इकाई-1

समुच्चय सिद्धान्त (Set Theory)

समुच्चय (Sets)

1.1 भूमिका (Introduction)

आजकल समुच्चय सिद्धांत एक आधारभूत परिकल्पना है, जिसका प्रयोग गणित की प्राय: सभी शाखाओं में होता है। इस सिद्धांत का विकास जर्मन गणितज्ञ जॉर्ज कैण्टर (George Cantor 1845-1918) द्वारा किया गया था। वर्तमान समय में इसका प्रयोग ज्यामिति, अनुक्रम, प्रायिकता आदि के साथ विज्ञान की विभिन्न शाखाओं में भी किया जाता है। इस अध्याय में हम समुच्चय सिद्धांत से संबंधित कुछ मूलभूत परिभाषाओं और संक्रियाओं पर विचार करेंगे।

1.2 समुच्चय का अर्थ (Meaning of Sets)

हम अपने दैनिक जीवन में प्राय: वस्तुओं (Objects) के संग्रह की बात करते हैं, जैसे- सप्ताह के दिनों का समूह, व्यक्तियों की भीड़, ताश के पत्तों का समूह, किसी खास विद्यालय के बच्चों का समूह आदि। गणित में भी हम विभिन्न संग्रहों की चर्चा करते हैं, उदाहरण के लिए- प्राकृत संख्याओं का समूह, सम संख्याओं का समूह, अभाज्य संख्याओं का समूह, आदि।

आइए, हम निम्नलिखित समूहों पर विचार करते हैं-

(i) तेज छात्रों का समूह

(ii) प्रसिद्ध खिलाड़ियों का समूह

(iii) सुन्दर लड़कियों का समूह

(iv) वर्ष के महीनों का समूह

(v) सभी पूर्णांकों का समूह

(vi) भारत की नदियों का समूह

(vii) 10 से कम सम प्राकृत संख्याओं का समूह अर्थात् 2,4,6,8.

(viii) अंग्रेज़ी वर्णमाला के स्वर यानी a,e,i,o,u

(ix) त्रिभुजों के विभिन्न प्रकार

(x) संख्या 30 के अभाज्य गुणनखंड अर्थात् 2,3, और 5

उपर्युक्त समूहों पर विचार करने के उपरान्त हम देखते हैं कि (i),(ii) और (iii) के तेज, प्रसिद्ध और सुन्दर का मापदण्ड परिभाषित (ज्ञात) नहीं है, फलतः निश्चित रूप से नहीं कहा जा सकता है कि कौन वस्तु उस संग्रह में सम्मिलित हैं और कौन नहीं हैं?

दूसरी ओर (iv) से (x) तक के उदाहरणों में से प्रत्येक किसी वस्तुओं का एक सुपरिभाषित संग्रह इस अर्थ में है कि किसी वस्तु के संबंध में हम यह निर्णय निश्चित रूप से कर सकते हैं कि वस्तु दिये गये संग्रह में है अथवा नहीं। उदाहरण के लिए, हम निश्चित रूप से कह सकते हैं कि 7 संख्या 30 के अभाज्य गुणनखण्डों के समूह में सम्मिलित नहीं है। इसी तरह टेम्स नदी भारत की नदियों में शामिल नहीं है।

अतः हम कह सकते हैं कि- "सुपरिभाषित वस्तुओं के संग्रह को समुच्चय कहते हैं (A Collection of well-defined objects is called a set), सुपरिभाषित वस्तुओं (well defined objects) का अर्थ है- संग्रह की वस्तु एक दूसरे से भिन्न (distinct) हो, अर्थात् संग्रह में किसी वस्तु की पुनरावृत्ति नहीं हो तथा प्रत्येक वस्तु किसी विशेष गुण (property) को धारण करते हों। जिसके आधार पर निश्चित रूप से कहा जा सकता है कि दी हुई कोई वस्तु उस संग्रह में सम्मिलित है या नहीं। संग्रह की वस्तुओं को समुच्चय का अवयव या तत्व (element) या सदस्य (member) कहा जाता है। ये पर्यायवाची शब्द हैं।

1.3 समुच्चय का निरूपण (Representation of Sets)

समुच्चयों का निरूपण साधारणतः अंग्रेजी वर्णमाला के बड़े अक्षरें से किया जाता है, जैसे- $A,B,C,$ $P,Q,R,S,$ X,Y,Z आदि।

समुच्चय के अवयवों को अंग्रेजी वर्णमाला के छोटे अक्षरों द्वारा प्रदर्शित किया जाता है जैसे- $a,b,c,$ p,q,r,s x,y,z आदि।

यदि कोई अवयव किसी समुच्चय का सदस्य है तो इस बात को बतलाने के लिए यूनानी प्रतीक या संकेत "$\in$(epsilon)" का प्रयोग किया जाता है, जैसे- x समुच्चय A का सदस्य है तो इसे संकेत में $x \in A$ लिखा जाता है और इसे पढ़ा जाता है "x समुच्चय

A का सदस्य है (x belongs to the set A) अथवा "x अवयव है समुच्चय A का।"

यदि कोई अवयव किसी समुच्चय का सदस्य नहीं हैं तो इस बात को बतलाने के लिए संकेत $\notin$ का इस्तेमाल किया जाता है, जैसे- y समुच्चय B का सदस्य नहीं है तो इसे संकेत में $y \notin B$ लिखा जाता है और इसे पढ़ा जाता है "y समुच्चय B का सदस्य नहीं है (y does not belong to the set B) अथवा "y समुच्चय B का अवयव नहीं है।"

अंग्रेजी वर्णमाला के स्वरों के समुच्चय Z के संबध में:

$a \in Z$ किन्तु $b \notin Z$

इसी प्रकार 10 से कम विषम प्राकृत संख्याओं के समुच्चय P के लिए-

$3 \in P$ लेकिन $8 \notin P$

1.4 समुच्चय को निरूपित करने की विधियाँ (Methods of representing a Set)

समुच्चय का परिचय उसके अवयवों से होता है। इसलिए समुच्चय को निरूपित करने के लिए उसके अवयवों को स्पष्ट करना पड़ता है। किसी समुच्चय को निरूपित करने के लिए निम्नलिखित दो विधियों का प्रयोग किया जाता है-

(1) रोस्टर या तालिका रूप (Roster or Tabular form)

(2) प्रतीकात्मक या गुण-प्रकटीकरण या समुच्चय-निर्माण रूप (Symbolic or Set builder form)

(1) सारणी रूप में, समुच्चय के सभी अवयवों को मंझले कोष्ठक { } के अन्दर एक-एक कर अर्धविराम (comma) देकर लिखा जाता है, जैसे-

(i) यदि A प्रथम पाँच प्राकृत संख्याओं के समुच्चय को व्यक्त करता है तो सारणी रूप में इसे $A = \{1,2,3,4,5\}$ से व्यक्त किया जायेगा।

(ii) यदि B अंग्रेजी वर्णमाला के स्वरों (vowels) के समुच्चय को व्यक्त करता है तो सारणी रूप होगा- $B = \{a,e,i,o,u\}$

(iii) यदि P सम प्राकृत संख्याओं का समुच्चय हो, तो इसका सारणी रूप होगा- $P = \{2,4,6,8,...\}$

अन्त के तीन बिन्दु होने की स्थिति में प्राकृत संख्या अंतहीन है।

ध्यान दें- अन्त के तीन बिन्दु सम प्राकृत संख्याओं के अनन्त संख्या को दर्शाते हैं।

(iv) यदि S, समीकरण $x^2 - 4 = 0$ के हलों का समुच्चय हो तो सारणी रूप इस प्रकार लिखा जायेगा $S = \{-2,2\}$

नोट: (A) सारणी रूप में समुच्चय के अवयवों को लिखते समय उनके क्रम का महत्त्व नहीं होता है।
अतः उपर्युक्त $A=\{1,2,3,4,5\}$ को $A=\{2,1,5,3,4\}$ भी प्रदर्शित कर सकते हैं।
(B) समुच्चय के किसी अवयव को सामान्यतः दोबारा नहीं लिखा जाता है क्योंकि प्रत्येक अवयव दूसरे से भिन्न (distinct) होता है, जैसे 'ELEPHANT' में प्रयुक्त अक्षरों का समुच्चय $\{E,L,P,H,A,N,T\}$ है।

(2) **प्रतीकात्मक या गुण-प्रकटीकरण या समुच्चय-निर्माण रूप में किसी समुच्चय के सभी अवयवों में एक सर्वनिष्ठ गुणधर्म होता है जो समुच्चय से बाहर के किसी अवयव में नहीं होता है।**

इसके लिए मंझले कोष्ठ { } के अन्दर एक चर (x) को लिखकर तिरछी लकीर (/) या कॉलन (:) देकर पुनः चर (x) लिखकर तथा कौमा देकर चर के उस गुण को लिखा जाता है जो समुच्चय के प्रत्येक अवयव द्वारा संतुष्ट होता है। तिरछी रेखा (/) या कॉलन (:) को 'ऐसा कि (such that) पढ़ा जाता है, जैसे- (i) यदि A दस से छोटी प्राकृत संख्याओं का समुच्चय हो, तो इसे समुच्चय-निर्माण रूप में इस प्रकार लिखा जाता है-

$A=\{x/x,$ दस से छोटी प्राकृत संख्या है $\}$

या $A=\{x:x,$ दस से छोटी प्राकृत संख्या है $\}$

इसे इस प्रकार पढ़ा जा सकता है सभी x समुच्चय A का सदस्य है, ऐसा कि (such that) x, दस से छोटी एक प्राकृत संख्या है।

(ii) यदि $B=$ { न, म, क } हो तो इसे समुच्चय-निर्माण रूप में इस प्रकार लिखा जाता है- $B=\{x/x,$ 'नमक' शब्द का अक्षर है $\}$

या $B=\{x:x,$ 'नमक' शब्द का अक्षर है $\}$

(ii) यदि $C=\{2\}$ हो तो इसे समुच्चय-निर्माण रूप में इस प्रकार लिखा जा सकता है-

$C=\{x/x,$ अभाज्य सम प्राकृत संख्या है $\}$

$C=\{x:x,$ अभाजय सम प्राकृत संख्या है $\}$

गणित में कुछ विशेष समुच्चयों को दोनों रूपों में इस प्रकार लिख सकते हैं-

(i) प्राकृत संख्याओं के समुच्चय को N से सूचित किया जाता है-

$N=\{1,2,3,4,5,...\}$

या $N = \{x / x,$ एक प्राकृत संख्या है $\}$

(ii) पूर्ण संख्याओं के समुच्चय को W से सूचित किया जाता है।

$$W = \{0,1,2,3,...\}$$

या $W = \{x / x,$ एक पूर्ण संख्या है $\}$

(iii) पूर्णांकों के समुच्चय को I या Z से सूचित किया जाता है।

$$I = \{...,-3,-2,-1,0,1,2,3,...\}$$

या $I = \{x / x,$ एक पूर्णांक है $\}$

(iv) परिमेय संख्याओं के समुच्चय को Q से सूचित किया जाता है।

$$Q = \left\{ \frac{p}{q} : p \text{ और } q \text{ पूर्णांक है और } q \neq 0 \right\}$$

(v) वास्तविक संख्याओं के समुच्चय को R से सूचित किया जाता है

$R = \{x / x,$ एक वास्तविक संख्या है $\}$

गणित में उपर्युक्त प्रतीकों या संकेतों का प्रयोग संबंधित संख्याओं के समुच्चय के निरूपण में किया जाता है।

उदाहरण 1 : निम्नलिखित समूहों में से किसको समुच्चय कहा जा सकता है, किसको समुच्चय नहीं कहा जा सकता है और क्यों?

(i) गुणवान शिक्षकों का समूह

(ii) अच्छे लड़कों का समूह

(iii) बिहारशरीफ, पटना तथा गंगा नदी का समूह

(iv) वर्ष के सभी महीनों का समूह

(v) 5,6,{4},7 और 8 का समूह

(vi) सुन्दर पक्षियों का समूह

हलः

(i) को समुच्चय नहीं कहा जा सकता है, क्योंकि 'गुणवान' शब्द अपरिभाषित है अर्थात् कितना गुणवाले शिक्षक को गुणवान कहा जायेगा यह अज्ञात है।

(ii) को समुच्चय नहीं कहा जा सकता है, क्योंकि 'अच्छे' शब्द अपरिभाषित है अर्थात् अच्छे का मापदण्ड अज्ञात है।

(iii) को समुच्चय कहा जायेगा, क्योंकि इस समूह का प्रत्येक सदस्य एक दूसरे से भिन्न है।

(iv) को समुच्चय कहा जायेगा, क्योंकि प्रत्येक महीना एक दूसरे से भिन्न है।

(v) को समुच्चय कहा जायेगा, क्योंकि प्रत्येक अवयव एक दूसरे से भिन्न है।

(vi) को समुच्चय नहीं कहा जायेगा, क्योंकि 'सुन्दर' शब्द का मापदण्ड ज्ञात नहीं है।

उदाहरण 2 : निम्नलिखित को संकेत में लिखें-

(i) 3, समुच्चय A का सदस्य है।

(ii) 5, समुच्चय B का सदस्य नहीं है।

(iii) a, समुच्चय P का सदस्य नहीं है।

(iv) x, समुच्चय N का सदस्य है।

हल :

(i) $3 \in A$ (ii) $5 \notin B$ (iii) $a \notin P$ (iv) $x \in N$

उदाहरण 3 : यदि $A = \{1,2,3,4,5\}$ तो रिक्त स्थानों को $\in$ या $\notin$ से भरें-

(i) 2 .... A (ii) 5 .... A (iii) 0 .... A

(iv) 3 .... A (v) 10 .... A (vi) 1.... A

उत्तर : (i) $\in$ (ii) $\in$ (iii) $\notin$ (iv) $\in$ (v) $\notin$ (vi) $\in$

उदाहरण 4 : यदि $P = \{a,b,\{c,d\},e,f\}$ तो निम्नलिखित में से कौन सत्य तथा कौन असत्य है?

(i) $a \in P$ (ii) $d \in P$ (iii) $\{a,b,e\} \in P$

(iv) $\{c,d\} \in P$ (v) $e \notin P$ (vi) $\{f\} \in P$

हल :

(i) सत्य है, क्योंकि a समुच्चय P का सदस्य है

(ii) असत्य है, क्योंकि $d \notin P$ बल्कि $\{c,d\} \in P$.

(iii) असत्य है, क्योंकि $\{a,b,e\} \notin P$. बल्कि $a \in P$, $b \in P$ और $e \in P$.

(iv) सत्य है, क्योंकि $\{c,d\}$ समुच्चय P का सदस्य है।

(v) असत्य है, क्योंकि $e \in P$.

(vi) असत्य है, क्योंकि $\{f\} \notin P$. बल्कि $f \in P$.

उदाहरण 5 : निम्नलिखित को सारणी रूप में लिखें-

(i) A= $\{x : x$ एक प्राकृत संख्या है जो 42 को विभाजित करती है $\}$

(ii) B= $\{y : y$ 'MATHEMATICS' का एक अक्षर है। $\}$

(iii) C= $\{z/z$ एक सम प्राकृत संख्या है $\}$

(iv) C= $\{x/x$ दो अंकोंवाली प्राकृत संख्या है और अंकों का योग 5 है $\}$

हल:

(i) $A=\{1,2,3,6,7,14,21,42\}$

(ii) $B=\{M,A,T,H,E,I,C,S\}$

(iii) $C=\{2,4,6,8,...\}$

(iv) $D=\{14,23,32,41,50\}$

उदाहरण 6. निम्नलिखित समुच्चयों को समुच्चय-निर्माण रूप में लिखें-

(i) $P=\{a,e,i,o,u\}$ (ii) $S=\{1,3,5,...\}$

(iii) $A=\left\{\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{5}{6}\right\}$ (iv) $B=\{3,6,9,12\}$

हल:

(i) $P=\{x/x$, अंग्रेज़ी वर्णमाला का एक स्वर है $\}$

(ii) $S=\{x/x$, एक विषम संख्या है। $\}$

(iii) $A=\left\{x: x=\frac{n}{n+1}, n\right.$ एक प्राकृत संख्या है और $\left.1\leq n\leq 5\right\}$

(iv) $B=\{x/x,3$ का धन अपवर्त्य है और $x\leq 12\}$

उदाहरण 7 : बाईं ओर समुच्चय निर्माण रूप में वर्णित प्रत्येक समुच्चय का दाईं ओर सारणी रूप में वर्णित समुच्चय से सही मिलान करें:

(i) $\{x:x$ शब्द TEACHERका एक अक्षर है $\}$ $(a)\{1,2,3,4,6,12\}$

(ii) $\{x:x$ एक पूर्णांक है और x+2=3 $\}$ $(b)\{1,2,3,4,5\}$

(iii) $\{x:x$ एक धन पूर्णांक है तथा 12 का भाजक है $\}$ $(c)\{T,E,A,C,H,R\}$

(iv) $\{x:x$ संख्या 6 से कम एक प्राकृत संख्या है $\}$ $(d)\{1\}$

हल:

(i) का सही मिलान (c) से होता है क्योंकि शब्द TEACHERमें 7 अक्षर हैं और एक अक्षर E की पुनरावृत्ति हुई है।

(ii) का सही मिलान (d) से होता है क्योंकि x+2=3 का तात्पर्य है कि x=1

(iii) का सही मिलान (a) से होता है क्योंकि 1,2,3,4,6,12 में से प्रत्येक 12 का भाजक है।

(iv) का सही मिलान (b) से होता है क्योंकि 1, 2, 3, 4, 5 प्राकृत संख्याएँ हैं जो 6 से कम है।

प्रश्नावली-1

1. **निम्नलिखित में कौन सा कथन समुच्चय है? अपने उत्तर का औचित्य बताइए।**
   - (i) आपके विद्यालय के वर्ग IX के छात्रों का समूह
   - (ii) S और T अक्षर से प्रारंभ होनेवाले सप्ताह के सभी दिनों का समूह
   - (iii) सभी प्राकृत संख्याओं का समूह
   - (iv) भारत के सर्वश्रेष्ठ पाँच प्रधानमंत्रियों का समूह
   - (v) Wolf शब्द के अक्षरों का समूह
   - (vi) मेधावी छात्रों का समूह
2. **यदि $A=\{a,b,c\}$, $B=\{d,e\}$ तो निम्नलिखित रिक्त स्थानों को $\in$ तथा $\notin$ से भरिए-**
   - (i) d .... B (ii) e .... A (iii) b .... A
   - (iv) c .... B (v) a .... B (vi) c .... A
3. **निम्नलिखित को भाषा में लिखिए-**
   - (i) $5 \in A$ (i) $x \notin P$ (i) $-7 \in Q$ (i) $\{1,2\} \notin A$
4. **निम्नलिखित को संकेत में लिखें-**
   - (i) टेबल, समुच्चय P का सदस्य है। (ii) समुच्चय A का सदस्य $\{y\}$ है।
   - (iii) समुच्चय M का सदस्य m है। (iv) समुच्चय B का सदस्य 2 नहीं है।
5. **निम्नलिखित समुच्चयों को सारणी रूप में लिखिए-**
   - (i) $A=\{x:x$,अंग्रेजी वर्णमाला का एक व्यंजन है जो h से पहले आता है $\}$
   - (ii) $B=\{x:x$, एक पूर्णांक है जहाँ $x^2 \leq 4$ $\}$
   - (iii) $C=\{x:x$, एक 4 और 16 के बीच सभी विषम धन पूर्णांक है $\}$
   - (iv) $D=\{x:x$, STUDENT शब्द का एक अक्षर है $\}$
   - (v) $E=\{x/x^2+x-6=0\}$
   - (vi) $F=\{x:x$ वर्ष का एक ऐसा महीना है, जिसमें 30 दिन होते हैं $\}$
6. **निम्नलिखित समुच्चयों को समुच्चय-निर्माण रूप में व्यक्त कीजिए-**
   - (i) $P=\{5,10,15,...\}$ (ii) $Q=\{1,4,9,...100\}$

(iii) $R=\{2,4,6,...\}$ (iv) $S=\{3,6,9,12\}$

7. कुछ समुच्चयों को दोनों रूपों (forms) में लिखा गया है, प्रत्येक समुच्चय के लिए उसके दोनों रूपों के जोड़े बनाइए:

(i) $\{1,2,3,6\}$ (a) $\{x/x$ विषम प्राकृत संख्या है और $x<10$ $\}$

(ii) $\{2,3\}$ (b) $\{x/x$ अभाज्य संख्या है और 6 का भाजक है

(iii) $\{1,3,5,7,9\}$ (c) $\{x/x$ शब्द 'PATNA' का अक्षर है $\}$

(iv) $\{P,A,T,N\}$ (d) $\{x/x$ प्राकृत संख्या है और 6 का भाजक है $\}$

8. निम्नलिखित में कौन कथन सत्य है?

(i) $\frac{5}{4}\in\left\{x/x=\frac{r}{r+1}\right.$ और r, एक प्राकृत संख्या है $\}$

(ii) $-5\in\{x/x,$ एक पूर्णांक है जो 5 से विभाज्य है $\}$

(iii) $\frac{1}{9}\notin\{x/x,$ एक पूर्ण वर्ग है $\}$

(iv) $\frac{1}{16}\notin\{x/x=\frac{1}{r}$ और r, 4 का अपवर्त्य है $\}$

1.5 समुच्चयों के प्रकार (Types of Set)

1.5.1 रिक्त समुच्चय (Empty or Null Set)

आइए, निम्न समुच्चयों पर विचार करें-

समुच्चय $A=\{x:x$, अंग्रेजी वर्णमाला का एक स्वर है $\}$

समुच्चय $B=\{x:x$, अंग्रेजी वर्णमाला का एक अक्षर है जो z के बाद आता है $\}$

यहाँ हम देखते हैं कि समुच्चय A के सदस्य a,e,i,o,u हैं जबकि समुच्चय B में z के बाद अंग्रेजी वर्णमाला का कोई अक्षर नहीं होता है। अतः समुच्चय B का कोई सदस्य (अवयव) नहीं है।

परिभाषा: जिस समुच्चय में एक भी अवयव नही होता है उसे रिक्त समुच्चय या शून्य समुच्चय कहा जाता है। इस परिभाषा के अनुसार B एक रिक्त समुच्चय है जबकि A एक रिक्त समुच्चय नहीं है।

संकेत में रिक्त समुच्चय को ϕ (void) या $\{\ \}$ से सूचित किया जाता है।

उदाहरण: मान लिया जाय कि $A=\{x:x$ वर्तमान में कक्षा IX तथा X दोनों में अध्ययनरत एक विद्यार्थी है।$\}$ यहाँ A रिक्त समुच्चय है क्योंकि एक विद्यार्थी एक साथ दोनों कक्षाओं

में अध्ययन नहीं कर सकता है।

(ii) $B=\{x:x$, संख्या 2 से अधिक एक सम अभाज्य संख्या है$\}$ तो B रिक्त समुच्चय है क्योंकि केवल संख्या 2 सम अभाज्य है।

(iii) $C=\{y:y^2=9,$ y सम संख्या है $\}$ तो C रिक्त समुच्चय है, क्योंकि समीकरण $y^2=9$, y के किसी सम मान से संतुष्ट नहीं होता है।

1.5.2 एकल समुच्चय (Singleton Set):-

यहाँ हम निम्नलिखित समुच्चयों पर विचार करते हैं-

$A=\{x/x$, भारत के अबतक के महिला राष्ट्रपति$\}$,

$B=\{4\}$,

$C=\{0\}$,

$D=\{x/x-2=0\}$

उपर्युक्त समुच्चयों में सदस्यों की संख्या एक और केवल एक है, अतः ऐसा समुच्चय जिसमें केवल एक सदस्य होता है, एकल समुच्चय कहलाता है।

1.5.3 युग्म समुच्चय (Pair Set):-

निम्न समुच्चयों को देखिए-

(i) $\{x/x,$ शब्द on का एक अक्षर है $\}$

(ii) $\{1,2\}$ (iii) $\{0,3\}$ (iv) $\{a,b\}$

स्पष्ट है कि प्रत्येक समुच्चय में सदस्यों की संख्या दो है, ऐसे समुच्चय को युग्म समुच्चय कहते हैं अर्थात् दो सदस्यों वाले समुच्चय को युग्म समुच्चय कहते हैं।

उदाहरण: खाली जगहों में रिक्त, एकल, युग्म में से चुनकर भरिए ताकि कथन सत्य हों-

(i) $\{0\}$, ...समुच्चय है।

(ii) $\{x/x,$ *IS* शब्द का एक अक्षर है $\}$, ...समुच्चय है।

(iii) $\{x/x\neq x,$ x एक वास्तविक संख्या है $\}$, ...समुच्चय है।

(iv) ϕ, ...समुच्चय है।

(v) $\{0,1\}$, ... समुच्चय है।

(vi) $\{\phi\}$, ...समुच्चय है।

हल:

(i) एकल (केवल एक सदस्य 0 है) (ii) युग्म (यहाँ *I* और *S* दो अवयव

हैं) (iii) रिक्त (एक भी अवयव नहीं है) (iv) रिक्त (इसमें एक भी अवयव नहीं है) (v) युग्म (इसमें दो अवयव 0 और 1 है) (vi) एकल (एक अवयव है जो ϕ है।)

1.5.4 परिमित समुच्चय (Finite Set)

मान लीजिए कि $A = \{a, b, c, d, e\}$

$B = \{x / x$, वर्ष का एक महीना है $\}$

$C = \{$ इस समय विश्व के विभिन्न भागों में रहनेवाले पुरुष $\}$

$D = \phi$

हम देखते हैं कि A में 5 अवयव हैं और B में 12 अवयव हैं, C में सदस्यों की संख्या एक बड़ी प्राकृत संख्या होगी तथा D में सदस्यों की संख्या शून्य है।

इस प्रकार ऐसा समुच्चय, जिसके अवयवों की संख्या परिमित (finite) अर्थात् निश्चित है, परिमित समुच्चय कहलाता है।

उपर्युक्त समुच्चय A,B,C, और D परिमित समुच्चय हैं। समुच्चय A में अवयवों की संख्या को प्रतीक n (A) द्वारा प्रदर्शित करते हैं अर्थात् n(A)=12, n(C)= कोई सीमित प्राकृत संख्या, n(D)=0। इस प्रकार एक समुच्चय, जो रिक्त है अथवा जिसके अवयवों की संख्या एक प्राकृत संख्या है, परिमित समुच्चय कहलाता है।

अपरिमित समुच्चय (Infinite Set):

निम्न उदाहरणों को देखिए-

(i) प्राकृत संख्याओं का समुच्चय

(ii) भिन्न संख्याओं का समुच्चय

(iii) किसी रेखा पर स्थित सभी बिन्दुओं का समुच्चय

(iv) पूर्णांकों का समुच्चय

क्या उपर्युक्त उदाहरणों में अवयवों की संख्या निश्चित है? स्पष्टतः प्राकृत संख्याओं का अंत नहीं है। भिन्न संख्याएँ अनगिनत हैं, किसी रेखा पर स्थित बिन्दुओं की संख्या अनगिनत होती हैं।

अतः, जिस समुच्चय के सदस्यों की संख्या गिनी नहीं जा सके उसे अपरिमित समुच्चय कहते हैं, दूसरे शब्दों में जो समुच्चय परिमित न हो उसे अपरिमित समुच्चय कहते हैं।

हम जानते हैं कि जब हम किसी समुच्चय को सारणी रूप में निरूपित करते हैं, तो हम उस समुच्चय के सभी अवयवों को एक कोष्ठक { } के भीतर लिखते हैं। किसी

अपरिमित समुच्चय के सभी अवयवों को एक कोष्ठक के भीतर लिखना संभव नहीं है। इसलिए, उसके कम-से-कम इतने अवयवों को लिखते हैं जिससे उस समुच्चय की संरचना स्पष्ट हो सके और तदुपरांत तीन बिंदु लगाते हैं।

उदाहरणार्थ $\{1,2,3,...\}$ प्राकृत संख्याओं का समुच्चय है और $\{...,-3,-2,-1,0,1,2,3,...\}$ पूर्णांकों का समुच्चय है। ये दोनों समुच्चय अपरिमित हैं किन्तु, क्या सभी अपरिमित समुच्चयों का वर्णन रोस्टर रूप में किया जा सकता है?स्पष्ट है, वास्तविक संख्याओं के समुच्चय, भिन्नों का समुच्चय आदि के अवयवों का कोई विशेष पैटर्न (प्रतिमान) नहीं रहने के कारण रोस्टर रूप में वर्णन नहीं किया जा सकता।

उदाहरण: निम्नलिखित समुच्चयों में कौन परिमित है और कौन अपरिमित-

(i) $\{x : x \in N$ और $(x-1)(x-2)=0\}$

(ii) $\{x : x \in N$ और x सम है $\}$

(iii) $\{x : x \in N$ और 2x−1=($\}$

(iv) $\{x : x \in N$ और x एक अभाज्य संख्या है $\}$

(v) $\{x : x \in N$ और $x^2 = 9\}$

हल:

(i) प्रदत्त समुच्चय $= \{1,2,\}$, अत: यह परिमित है।

(ii) क्योंकि सम प्राकृत संख्याएँ अनंत हैं, अत: प्रदत्त समुच्चय अपरिमित है।

(iii) प्रदत्त समुच्चय = ϕ, अत: यह परिमित है।

(iv) दिया हुआ समुच्चय सभी अभाज्य संख्याओं का समुच्चय है क्योंकि अभाज्य संख्याएँ अनंत हैं। अतः प्रदत्त समुच्चय अपरिमित है।

(v) प्रदत्त समुच्चय $= \{3\}$, अतः यह परिमित है।

1.5.6 समान समुच्चय (Equal Sets)

हम निम्नांकित समुच्चयों पर विचार करते हैं।

(i) $A = \{1,2,3\}$ तथा $B = \{2,1,3\}$

(ii) $P = \{a,b,c\}$ तथा $Q = \{c,b,a\}$

(iii) $S = \{x / x$ ten शब्द का एक अक्षर है तथा $R = \{x / x$ net शब्द का एक अक्षर है $\}$

स्पष्टतः समुच्चय A और B में समान सदस्य है, इसी प्रकार समुच्चय P

और Q में भी समान सदस्य है तथा समुच्चय S और R में सदस्यों को सारणी रूप में लिखने पर समान सदस्य मिलते हैं।

अतः, हम कह सकते हैं कि दो समुच्चयों A और B समान कहलाते हैं यदि A का प्रत्येक अवयव B में हो तथा B का प्रत्येक अवयव A में हो। दूसरे शब्दों में, दो समुच्चय समान होंगे यदि दोनों में हूबहू वही सदस्य हों। यहाँ दोनों में सदस्यों के क्रम का एक-सा होना आवश्यक नहीं है। यदि समुच्चय A तथा B समान हों तो इसे संकेतिक रूप में A=B लिखा जाता है।

नोटः यदि किसी समुच्चय के एक या एक से अधिक अवयवों की पुनरावृत्ति होती है तो समुच्चय बदलता नहीं है। उदाहरण के लिए सुमच्च $A=\{1,2,3\}$ और $B=\{2,2,1,3,3\}$ समान हैं क्योंकि A का प्रत्येक अवयव B में है और इसका विलोम भी सत्य है इसी कारण हम प्रायः किसी समुच्चय का वर्णन करते समय उसके अवयवों की पुनरावृत्ति नहीं करते हैं।

1.5.7 समतुल्य समुच्चय (Equivalent Sets)

यहाँ हम निम्नलिखित उदाहरणों पर विचार करते हैं-

(i) $\{1,2,3\} \leftrightarrow \{4,5,6\}$ (यहाँ दोनों में तीन-तीन सदस्य हैं)

(ii) $\{x, y\} \leftrightarrow \{1,2\}$ (यहाँ दोनों मे दो-दो सदस्य हैं)

(i) $\{x/x$, rat शब्द का एक्र अक्षर है $\} \leftrightarrow \{x/x$, man शब्द का एक अक्षर है। (यहाँ दोनों में तीन-तीन सदस्य है)

स्पष्टतः दो समुच्चयों में सदस्यों की संख्या समान हो तो वे समतुल्य समुच्चय कहलाते हैं। समुच्चयों की तुल्यता को संकेत में $\leftrightarrow$ या $\backsim$ से व्यक्त किया जाता है।

उदाहरणः समान समुच्चयों के युग्म छाँटिए, यदि ऐसा कोई युग्म है और कारण भी बताइए-

$A=\{0\}$, $B=\{x : x>15$ और $x<5\}$

$C=\{x : x-5=0\}$

$D=\{x : x^2=25\}$

$E=\{x : x$ समीकरण $x^2-2x-15=0$ का एक धन पूर्णांक मूल है $\}$

हलः

यहाँ $0 \in A$ और 0 समुच्चय B, C, D और E में से किसी में भी नहीं है, अतः

$A \neq B, A \neq C, A \neq D, A \neq E$

पुनः $B = \phi$ किन्तु और कोई समुच्चय रिक्त नहीं है।

अतः $B \neq C, B \neq D$ तथा $B \neq E$

तथा $C = \{5\}$ परन्तु $-5 \in D$ इसलिए $C \neq D$

यहाँ, क्योंकि $E = \{5\}, C = E, D = \{-5.5\}$ और $E = \{5\}$,

अतः $D \neq E$

इस प्रकार समान समुच्चयों का युग्म केवल C तथा E है।

प्रश्नावली-2

1. निम्नलिखित में रिक्त समुच्चय कौन है?

(a) (i) 0 (ii) $\{0\}$ (iii) $\{\phi\}$ (iv) ϕ

(b) (i) $A = \{x / x$, धनात्मक अभाज्य सम पूर्णांक है $\}$

(ii) $B = \{x / x + 5 = 5\}$

(iii) $C = \{x / x$, पूर्णांक जिनका वर्ग ऋणात्मक है $\}$

(iv) $D = \{\phi\}$

2. खाली स्थानों में एकल, रिक्त या युग्म में से उचित शब्द चुनकर लिखिए-

(i) {राम,मोहन}, ... समुच्चय है।

(ii) $\{x / x^2 - 1 = 0\}$, ...समुच्चय है।

(iii $\{3\}$, ...समुच्चय है।

(iv) $\{x / x > 10$ और $x < 5\}$, ...समुच्चय है।

(v) $\{x / x - 7 = 0\}$, ...समुच्चय है।

(vi) $\{x / x, 2$ से विभाज्य विषम प्राकृत संख्याओं का समुच्चय $\}$.......समुच्चय है

(vii) $\{y : y$ किन्हीं भी दो समान्तर रेखाओं का उभयनिष्ठ बिंदु है $\}$

3. निम्नलिखित समुच्चयों में से कौन परिमित है और कौन अपरिमित-

(i) 99 से छोटे अभाज्य पूर्णांकों का समुच्चय।

(ii) सप्ताह के दिनों का समुच्चय।

(iii) $\{1, 2, 3, ... 99, 100\}$

(iv) पृथ्वी पर रहनेवाले जानवरों का समुच्चय।

(v) $\{x/x$, एक पूर्णांक है और $x \geq 4\}$

(vi) $\{x/x$, एक धन पूर्णांक है और $x \leq 4\}$

(vii) भारत में रहनेवाले आदमियों का समुच्चय।

(viii) उन संख्याओं का समुच्चय जो 5 के गुणज हैं।

(ix) $\{1,2,3,4..............\}$

(x) मूल बिन्दु (0,0) से होकर जानेवाले वृत्तों का समुच्चय।

4. नीचे दिए हुए समुच्चयों में से समान समुच्चयों का चयन कीजिए–

$A=\{2,4,8,12\}$, $B=\{1,2,3,4\}$, $C=\{2,4,12,14\}$,

$D=\{3,1,4,2\}$, $E=\{-1,1\}$, $F=\{0,a\}$,

$G=\{1,-1\}$, $H=\{0,1\}$

5. निम्नलिखित में से कौन समतुल्य समुच्चय है–

(i) $\{a,b,c\}$ तथा $\{d,e,f\}$

(ii) $\{1,2\}$ तथा $\{1,2,3\}$

(iii) $\{x,y\}$ तथा $\{1,2,3,4,5\}$

6. निम्नलिखित में बतलाइए कि $A=B$ है या नहीं–

(i) $A=\{2,4,6,8,10\}$ $B=\{x/x$ सम धन पूर्णांक है और $x \leq 10\}$

(ii) $A=\{a,b,c,d\}$ $B=\{d,c,b,a\}$

(iii) $A=\{x/x,5$ का अपवर्त्य है$\}$ $B=\{1,2,3,4,5\}$

(iv) $A=\{c,a,r\}$ $B=\{r,a,c,e\}$

7. क्या निम्नलिखित समुच्चय-युग्म समान हैं? कारण सहित बताइए–

(i) $A=\{x:x$, शब्द 'PRINCIPAL' का एक अक्षर है $\}$

$B=\{y:y$, शब्द 'PRINCIPLE' का एक अक्षर है $\}$

(ii) $A=\{x:x$, समीकरण $x^2+5x+6=0$ का एक हल है $\}$

$B=\{-2,-3\}$

1.6 उपसमुच्चय (Subsets):

नीचे दिये समुच्चयों पर विचार कीजिए-

$A=$ बिहार राज्य के सभी लोगों का समुच्चय

$B=$ भारत के सभी लोगों का समुच्चय

हम देखते हैं कि A का प्रत्येक अवयव, B का भी एक अवयव है। समुच्चय A को समुच्चय B का उपसमुच्चय कहा जाता है। इसे प्रतीक में $A \subset B$ द्वारा प्रकट करते हैं और पढ़ते हैं A, B का एक उपसमुच्चय है इसे समुच्चय A को समुच्चय B में अन्तर्विष्ट भी कहा जाता है।

यदि A, B का एक उपसमुच्चय नहीं है तो हम लिखते हैं $A \not\subset B$।

परिभाषा:- यदि समूच्चय A का प्रत्येक अवयव समुच्चय B का भी एक अवयव है, तो A, B का उपसमुच्चय कहलाता है।

हमें ध्यान देना चाहिए कि A को B का उपसमुच्चय होने के लिए मात्र यह आवश्यक है कि A का प्रत्येक अवयव B में हो। यह संभव है कि B का प्रत्येक अवयव A में हो, तो $B \subset A$ इस स्थिति में A और B समान समुच्चय है और इस प्रकार $A \subset B$ और $B \subset A \Leftrightarrow A = B$ जहाँ $\Leftrightarrow$ द्विधा, तात्पर्य (Two way implications) के लिए प्रतीक है और जिसे प्राय: यदि और केवल यदि पढ़ते हैं तथा संक्षेप में iff लिखते हैं।

ऊपर की चर्चा से हम इस निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि प्रत्येक समुच्चय स्वयं का उपसमुच्चय है, अर्थात, $A \subset A$।

चूँकि रिक्त समुच्चय ϕ में कोई अवयव नहीं होता है, अत: रिक्त समुच्चय प्रत्येक समुच्चय का एक उपसमुच्चय है।

निम्न उदाहरणों को देखें-

$A=\{1\}$ के उपसमुच्चय $=\{1\}, \phi$

$B=\{1,2\}$ के उपसमुच्चय $=\{1\},\{2\},\{1,2\}, \phi$

$C=\{1,2,3\}$ के उपसमुच्चय $=\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}, \phi$

यहाँ समुच्चय A में एक अवयव है तो उपसमुच्चय की संख्या दो (2)है। समुच्चय B में दो अवयव हैं तो उपसमुच्चयों की संख्या चार 2^2) है। इसी तरह समुच्चय C में तीन अवयव हैं तो उपसमुच्चयों की संख्या आठ 2^3) है।

अतः इस निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि किसी समुच्चय के उपसमुच्चयों की संख्या 2 पर उसके अवयवों की संख्या की घात होती है।

अर्थात्, किसी समुच्चय के उपसमुच्चयों की संख्या = $2^{\text{अवयवों की संख्या}}$

यदि किसी समुच्चय के सदस्यों (अवयवों) की संख्या n हो तो इसके उपसमुच्चयों की संख्या = 2^n होती है।

1.6.1 घात समुच्चय या शक्ति समुच्चय (Power Set)

हम जान चुके हैं कि समुच्चय $A=\{a,b\}$ के उपसमुच्चय $\{a\},\{b\},\{a,b\},\phi$ होंगे। इन सभी उपसमुच्चयों के समुच्चय को समुच्च्य A का घात या शक्ति समुच्चय कहते हैं।

परिभाषा: समुच्चय A के सभी उपसमुच्चयों के संग्रह को A का घात समुच्चय कहते हैं। इसे $P(A)$ से निरूपित करते हैं। $P(A)$ का प्रत्येक अवयव एक समुच्चय होता है। उपर्युक्त उदाहरण में, $A=\{a,b\}$ तो $p(A)=\{\phi,\{a\},\{b\},\{a,b\}$.

समुच्चयों का समुच्चय (Set of Sets)

निम्नलिखित समुच्चयों पर विचार कीजिए-

$A=\{\{1,2\},\{2,5\},\{3,6,8\}\}$

$B=\{\{1\},\{2\}\}$

यहाँ समुच्चय A में तीन सदस्य $\{1,2\},\{2,5\},\{3,6,8\}$ है जो स्वयं समुच्चय भी है। इसी प्रकार समुच्चय B में दो सदस्य है $\{1\},\{2\}$

परिभाषा: यदि किसी समुच्चय का प्रत्येक सदस्य भी एक समुच्चय हो तो ऐसे समुच्चय को समुच्चयों का समुच्चय कहते हैं।

परन्तु $S=\{\{1,2\},3,\{4\}\}$ समुच्चयों का समुच्चय नहीं है क्योंकि S का सदस्य 3 एक समुच्चय नहीं है।

1.6.2 वास्तविक उपसमुच्चय (Proper Subset)

A और B दो समुच्चय इस प्रकार हों कि A का प्रत्येक सदस्य B का भी सदस्य हो और B में कम से कम एक सदस्य ऐसा हो जो समुच्चय A का सदस्य नहीं हो, तो समुच्चय A को समुच्चय B का वास्तविक उपसमुच्चय कहा जाता है और संकेत $A\subset B$ लिखते हैं, जैसे-

$$A=\{1,2,3\},\ B=\{1,2,3,4\}$$

चूँकि A का प्रत्येक सदस्य B का भी सदस्य है और B में एक सदस्य 4 ऐसा है जो A में नहीं है।

अतः, $A=\{1,2,3\}, B=\{1,2,3,4\}$ का एक उचित या वास्तविक उपसमुच्चय है।

1.6.3 अधिसमुच्चय (Super Set):-

यदि समुच्चय A, समुच्चय B का वास्तविक उपसमुच्चय हो तो समुच्चय B को समुच्चय A का अधिसमुच्चय कहते हैं और इसे संकेत में $B \supset A$ लिखते हैं और इसे समुच्चय B में समुच्चय A अंतनर्विष्ट है (Set B contains set A), पढ़ते हैं।

उपर्युक्त उदाहरण $A=\{1,2,3\}, B=\{1,2,3,4\}$ में B, A का अधिसमुच्चय है।

1.6.4 सार्वत्रिक या समष्टीय समुच्चय (Universal Set):-

समुच्चय A, B, C और D पर विचार कीजिए:

$A=\{1,2,3\}, B=\{3,4,5,6\}, C=\{0,1\}$

तथा $D=\{0,1,2,3,4,5,6\}$

हम देखते हैं कि समुच्चय A, B, C में से प्रत्येक समुच्चय D के उपसमुच्चय है। इस संदर्भ में समुच्चय D समष्टीय समुच्चय कहलाता है।

परिभाषा: यदि किसी विशेष संदर्भ में सभी विचाराधीन समुच्चय (All sets under discussion), किसी निश्चित समुच्चय के उपसमुच्चय हों तो उस संदर्भ में, उस निश्चित समुच्चय को समष्टीय समुच्चय कहते हैं। समष्टीय समुच्चय को संकेत $\cup$ से सूचित किया जाता है। जब हम संख्या प्रणाली का अध्ययन करते हैं तो प्राकृत संख्याओं के समुच्चय और उसके उपसमुच्चयों में हमारी रूचि होती है, जैसे- अभाज्य संख्याओं का समुच्चय, समसंख्याओं का समुच्चय, इत्यादि। इसमें प्राकृत संख्याओं का समूह समष्टीय समुच्चय कहलाएगा।

उदाहरण के लिए पूर्णांकों के समुच्चय Z के लिए, परिमेय संख्याओं का समुच्चय Q या वास्तविक संख्याओं का समुच्चय R एक सार्वत्रिक समुच्चय हो सकता है। इसी प्रकार मानव जनसंख्या अध्ययन के लिए विश्व के समस्त मानव का समुच्चय सार्वत्रिक समुच्चय होगा।

उदाहरण: नीचे लिखे समुच्चयों पर विचार कीजिए-

ϕ, $A=\{1,3\}, B=\{1,5,9\}, C=\{1,3,5,7,9\}$ प्रत्येक समुच्चय युग्म के बीच सही प्रतीक $\subset$ अथवा $\not\subset$ भरिए-

(i) ϕ ...... B (ii) A .... B (iii) A .....C (iv) B C

हल: (i) $\phi \subset B$ क्योंकि ϕ, प्रत्येक समुच्चय का उपसमुच्चय होता है।

(ii) $A \not\subset B$ क्योंकि $3 \in A$ और $3 \notin B$

(iii) $A \subset C$ क्योंकि $1,3 \in A$ और $1,3 \in C$

(iv) $B \subset C$ क्योंकि B का प्रत्येक अवयव C मे भी है।

उदाहरण:

(i) $\{1,2,3\}$ के सभी उपसमुच्चयों को लिखिए।

(ii) $\{a,b,c\}$ के सभी वास्तविक उपसमुच्चयों को लिखिए।

(iii) यदि किसी समुच्चय में 4 अवयव हों, तो उसके उपसमुच्चयों की संख्या निकालिए।

(iv) किसी समुच्चय में 3 अवयव हों तो उसके वास्तविक उपसमुच्चयों की संख्या निकालिए।

हल:

(i) $\{1,2,3\}$ के उपसमुच्चय हैं-

$\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\},\phi$

(ii) $\{a,b,c\}$ के वास्तविक उपसमुच्चय हैं-

$\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\}, \phi$

(iii) समुच्चय में अवयवों की संख्या $n=4$

$\therefore$ उपसमुच्चयों की कुल संख्या $= 2^n = 2^4 = 16$

(iv) समुच्चय में अवयवों की संख्या $n=3$

$\therefore$ वास्तविक उपसमुच्चयों की संख्या $= 2^n - 1 = 2^3 - 1$

$= 8 - 1 = 7$

उदाहरण: यदि समुच्चय $A = \{a,b\}$ इसका शक्ति समुच्चय $P(A)$ क्या होता है?

हल:

समुच्चय $A = \{a,b\}$ के लिए

शक्ति समुच्चय $P(A) = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$

(यहाँ समुच्चय A में अवयवों की संख्या दो है अत: इसके उपसमुच्चयों की संख्या 4 होगी।)

उदाहरणः निम्न समुच्चय-युग्मों में कौन वास्तविक उपसमुच्चय है और क्यों?

(i) $A=\{1,2,3\}, B=\{1,3,2\}$

(ii) $A=\{a,e,i,o,u\}, B=\{a,b,c,d\}$

(iii) $A=\{x/x$ संख्या 6 के सभी अभाज्य भाजक $\}$

$B=\{x/x$ संख्या 6 के सभी भाजक $\}$

हलः

(i) नहीं, यहाँ $A\subset B$ तथा $B\subset A$ अतः $A=B$

जो वास्तविक उपसमुच्चय नहीं है।

(ii) नहीं, A का प्रत्येक सदस्य B में नहीं है। अतः $A\not\subset B$

(iii) हाँ, $A=\{2,3\}, B=\{1,2,3,6\}$

चूँकि $A\subset B$ तथा $A\neq B$ तो A,B का वास्तविक उपसमुच्चय है।

उदाहरणः समुच्चय $A=\{1,3,5\}, B=\{2,4,6\}$ और $C=\{0,2,4,6,8\}$ प्रदत्त हैं। इन तीनों समुच्चय A, B, और C के लिए निम्नलिखित में से कौन-सा (से) समष्टीय समुच्चय लिए जा सकते हैं?

(i) $\{0,1,2,3,4,5,6\}$ (ii) ϕ

(iii) $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ (iv) $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$

हलः

(iii) क्योंकि इसमें तीनों समुच्चयों A,B,C के सभी सदस्य शामिल हैं।

प्रश्नावली-3

(1) निम्नांकित समुच्चयों के आधार पर प्रत्येक-समुच्चय युग्म के बीच सही प्रतीक $\subset$, $\supset$ या $\not\subset$ भरिए-

$A=\{a,b\},\ B=\{b,c,d\},\ C=\{a,e,i\},$

$D=\{b,c,d,e,f\},\ E=\{a\}$

$(i) A........E \quad (ii) B........D \quad (iii) E........C$

$(iv) \phi........E \quad (v) D........C \quad (vi) A........B$

(2) रिक्त स्थानों में प्रतीक $\subset$ या $\not\subset$ को भरकर सही कथन बनाइए-

(i) $\{2,3,4\}.....\{1,2,3,4,5\}$

(ii) $\{a,b,c\}.....\{b,c,d\}$

(iii) $\{x/x$, आपके विद्यालय की कक्षा IX का एक विद्यार्थी है $\}$......$\{x:x$, आपके विद्यालय का एक विद्यार्थी है $\}$

(iv) $\{a,e,i,o,u\}$......$\{x/x$, अंग्रेजी वर्णमाला का कोई अक्षर है $\}$

(v) $\{x:x$, एक सम प्राकृत संख्या है $\}$.....$\{x:x$ एक पूर्णांक है $\}$

(3) जाँचिए, निम्नलिखत कथन सत्य है अथवा असत्य-

(i) $\{a,c\}\not\subset\{b,c,a\}$

(ii) $\{i,u\}\subset\{x:x$, अंग्रेजी वर्णमाला का एक स्वर है $\}$

(iii) $\{3,4,5\}\subset\{1,3,5,6\}$

(iv) $\{a\}\subset\{a,b,c\}$

(v) $\{a\}\in\{a,b,c\}$

(4) मान लीजिए कि $A=\{1,2\ \{3,4\},5\ \}$। निम्नलिखित में से कौन सा कथन सही नहीं है और क्यों?

(i) $\{3,4\}\subset A$ (ii) $\{3,4\}\in A$ (iii) $\{\{3,4\}\}\subset A$

(iv) $1\in A$ (v) $1\subset A$ (vi) $\{1,2,5\}\subset A$

(vii) $\{1,2,5\}\in A$ (viii) $\{1,2,3\}\subset A$ (ix) $\phi\in A$

(x) $\phi\subset A$ (xi) $\{\phi\}\subset A$

(5) निम्नलिखित समुच्चयों के सभी उपसमुच्चय लिखिए-

(i) $\{1\}$ (ii) $\{x,y,z\}$ (iii) ϕ

(iv) $\{1,2\}$ (v) {जनवरी, फरवरी}

(6) नीचे तीन समुच्चय दिये गये हैं-

$A=\{w,o,l,f\}$, $B=\{f,o,l,w,e\}$

$C=\{f,l,o,w,e,r\}$

इन तीनों समुच्चयों A, B और C के लिए निम्नलिखित में से कौन समष्टीय समुच्चय लिये जा सकते हैं-

(i) $\{w,f,o,r\}$ (ii) $\{e,f,l,o,w,r\}$

(iii) ϕ (iv) $\{f,l,o,e,r\}$

(7) रिक्त स्थानों को भरिए-

(i) प्रत्येक समुच्चय स्वयं का .... होता है।

(ii) कोई भी समुच्चय स्वयं का ....उपसमुच्चय नहीं होता है।

(iii) रिक्त समुच्चय सभी समुच्चयों का ....होता है।

(iv) ϕ प्रत्येक अरिक्त समुच्चय का ....उपसमुच्चय होता है।

(v) यदि किसी समुच्चय में सदस्यों की संख्या n हो तो इसके उपसमुच्चयों की संख्या ....होती है।

(vi) यदि किसी समुच्चय X के सभी अवयव Y के भी अवयव हों तो X, Y का ....है।

(8) **निम्नलिखित प्रश्नों के चार विकल्पों में से एक चुनें-**

(a) समुच्चय $A = \{0,3\}$ के सभी उपसमुच्चय हैं-

(i) $\{0\}, \{3\}$ (ii) $\{0\}, \{3\}, \{0,3\}$

(iii) $\{0\}, \{3\}, \{0,3\}, \{\phi\}$ (iv) $\{0\}, \{3\}, \{0,3\}, \phi$

(b) यदि $X = \{2, \{3\}, 5 \{7\}\}$ तो कथन सत्य है:

(i) $3 \in X$ (ii) $\{2,5\} \subset X$

(iii) $5 \notin X$ (iv) $\{7\} \notin X$

(c) कथन सत्य है-

(i) $\phi = \{\phi\}$ (ii) $\{\phi\} = \{0\}$

(iii) $\{1\} \subset \{\{1\}\}$ (iv) $\{\phi\} \in \{\{\phi\}\}$

(d) $A = \{\text{घनाभ}\}$, $B = \{\text{घन}\}$ में सत्य है:

(i) $A \subset B$ (ii) $B \subset A$

(iii) $A = B$ (iv) $B \in A$

(e) $A = \{9, 2, \{1,4\}, 5\}$ तो सत्य है-

(i) $5 \in A$ (ii) $\{3,4\} \in A$ (iii) $\{1,2,5\} \subset A$

(iv) $\{1\} \subset A$ (v) $\{1,2,3,4,5\} \subset A$

(9) क्या $\phi = \{\phi\}$ कथन सही है? सकारण लिखें।

(10) समुच्चय $A = \{0,1,2\}$ का निम्नलिखित में से कौन उपसमुच्चय है-

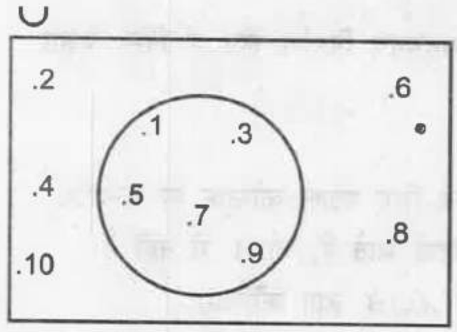
(i) 0 (ii) ϕ (iii) $\{2,3\}$ (iv) $\{1,-2\}$

1.7 वेन आरेख (Venn Diagram)

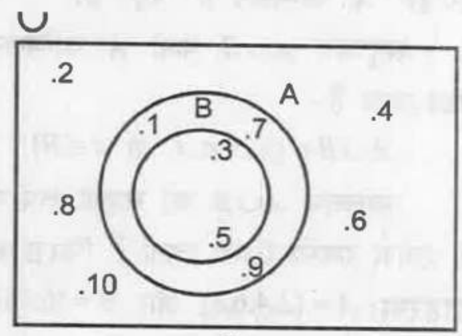
दो या दो से अधिक समुच्चयों के बीच जो संबंध होते हैं उनको जब आरेख द्वारा निरूपित किया जाता है तो उसे वेन आरेख कहते हैं।

वेन आरेख का नाम ब्रिटिश तर्कशास्त्री जॉन वेन [(John Venn)(1834-1883ई0)] के नाम पर रखा गया है। वेन आरेख में किसी समष्टीय समुच्चय को प्राय: एक आयत द्वारा और उसके उपसमुच्चयों को वृत्त के द्वारा दिखाया जाता है। साथ ही समुच्चयों के अवयवों को उनके समुच्चय-विशेष में लिखा जाता है।

आइए, निम्नलिखित वेन आरेखों को समझें-



आकृति-1.1



आकृति-1.2

उपर्युक्त आकृति 1.1 में $\cup=\{1,2,3,....,10\}$ एक समष्टीय समुच्चय है और उसका उपसमुच्चय है $A=\{1,3,5,7,9\}$ है।

इसी प्रकार आकृति 1.2 में $\cup=\{1,2,3,...,10\}$ एक समष्टीय समुच्चय है जिसके $A=\{1,3,5,7,9\}$ और $B=\{3,5\}$ उप समुच्चय है और $B\subset A$.

1.8 समुच्चयों पर संक्रियाएँ (Operations on Sets)

पिछली कक्षाओं में हमलोग अंकगणितीय संक्रियाओं(योग, अन्तर, गुणा और भाग) से अच्छी तरह परिचित हो चुके हैं। किन्हीं दो संख्याओं पर इन संक्रियाओं (Operations) का प्रयोग करने से तीसरी संख्या प्राप्त होती है, जैसे-

3 और 4 पर जोड़ की संक्रिया करने से 7 मिलता है, गुणा की संक्रिया करने पर $3\times4=12$ मिलता है। इसी तरह किन्हीं दो समुच्चयों पर संक्रियाएँ करने से तीसरा समुच्चय प्राप्त होता है, ये संक्रियाएँ हैं-

(i) समुच्चयों का सम्मिलन (Union of Sets)

(ii) समुच्चयों का सर्वनिष्ठ (Intersection of sets)

(iii) समुच्चयों का अन्तर (Difference of Sets)

1.8.1 समुच्चयों का सम्मिलन (Union of Sets)

मान लीजिए कि A और B कोई दो समुच्चय हैं। A और B का सम्मिलन समुच्चय वह समुच्चय है जिसमें A के सभी अवयव के साथ B के भी सभी अवयव हों, तथा उभयनिष्ठ अवयवों को केवल एक बार लिया गया हो। सम्मिलन को प्रकट करने के लिए संकेत $\cup$ का प्रयोग होता है। प्रतीकात्मक रूप में हम $A \cup B$ लिखते हैं और इसे 'A सम्मिलन B' पढ़ते हैं।

समुच्चय $A \cup B$ यानी A सम्मिलन B को समुच्चय निर्माण रूप में निम्न प्रकार लिखा जाता है-

$A \cup B = \{x : x \in A$ या $x \in B\}$

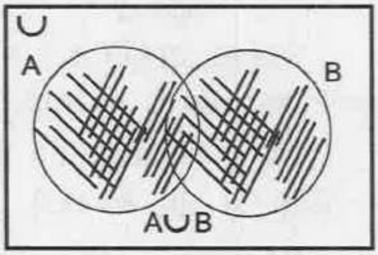
समुच्चय $A \cup B$ को सारणी रूप में लिखने के लिए मंझले कोष्ठक के अन्दर A का प्रत्येक सदस्य लिखा जाता है फिर B के सदस्य लिखे जाते हैं, जो A में नहीं हैं।

उदाहरण: $A = \{2,4,6,8\}$ और $B = \{6,8,10,12\}$, तो $A \cup B$ ज्ञात कीजिए।

हल:

हम देखते हैं कि $A \cup B = \{2,4,6,8,10,12\}$

दो समुच्चयों के सम्मिलन को आकृति 1.3 के वेन आरेख से दिखाया जा सकता है। इसका छायांकित भाग $A \cup B$ को दर्शाता है।



आकृति-1.3

सम्मिलन की संक्रिया के कुछ गुण धर्म:

समुच्चय सिद्धांत के सम्मिलन की संक्रिया के लिए कई बीजीय नियम हैं जो इस प्रकार हैं-

(i) क्रम विनिमेय नियम (Commutative Law)

$A \cup B = B \cup A$

(ii) साहचर्य नियम (Associative Law)

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

(iii) वर्गसम नियम (Idempotent Law)

$A \cup A = A$

(iv) तत्समक नियम (Identity Laws)

$A \cup \phi = A$

(v) समष्टीय समुच्चय का नियम (Law of Universal Sets)

$U \cup A = U$

1.8.2 समुच्चयों का सर्वनिष्ठ (Intersection of Sets)

हमलोग समुच्चय A और B पर विचार करें। समुच्चय A और B का सर्वनिष्ठ उन सभी अवयवों का समुच्चय है, जो A और B दोनों में है। सर्वनिष्ठ को निरूपित करने के लिए प्रतीक '$\cap$' का प्रयोग करते हैं।

अतः दो समुच्चय A और B के सर्वनिष्ठ को $A \cap B$ द्वारा सूचित किया जायेगा तथा इसे 'A सर्वनिष्ठ (Intersection) B पढ़ा जाता है

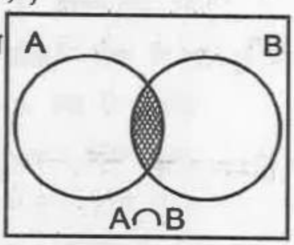
समुच्चय $A \cap B$ को समुच्चय-निर्माण रूप में निम्न प्रकार लिखा जाता है-

$$A \cap B = \{x / x \in A \text{ और } x \in B\}$$

समुच्चय $A \cap B$ यानी A सर्वनिष्ठ B को सारणी रूप में लिखने के लिए मंझले कोष्ठक के अन्दर सिर्फ A और B में सर्वनिष्ठ सदस्यों को लिखा जाता है।

उदाहरण : $A = \{1,2,3\}$, $B = \{2,3,4,5\}$ के लिए $A \cap B = \{2,3\}$

दो समुच्चयों के सर्वनिष्ठ को वेन आरेख से दिखाया जा सकता है। इसका छायांकित भाग $A \cap B$ को दर्शाता है।



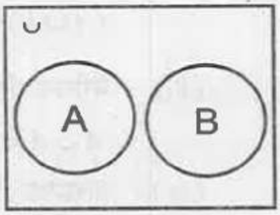
आकृति-1.4

यदि A और B ऐसे दो समुच्चय हों कि $A \cap B = \phi$ तो A और B असंयुक्त समुच्चय (Disjoint Sets) कहलाते हैं। उदाहरण के लिए मान लीजिए कि $A = \{1,3,5,7\}$ और $B = \{2,4,6,8\}$ तो A और B असंयुक्त समुच्चय है क्योंकि A और B में कोई

भी अवयव उभयनिष्ठ नहीं है।

असंयुक्त समुच्चयों का वेन आरेख द्वारा निरूपित किया जा सकता है, जैसा कि आकृति 1.5 में प्रदर्शित है।

इस वेन आरेख मे A और B असंयुक्त समुच्चय हैं।



आकृति–1.5

सर्वनिष्ठ की संक्रिया के कुछ गुणधर्म: समुच्चय सिद्धांत के सर्वनिष्ठ की संक्रिया के लिए कई बीजीय नियम है जो इस प्रकार हैं–

(i) क्रम विनियम नियम (Commutative Law)

$A \cap B = B \cap A$

(ii) साहचर्य नियम (Associative Law)

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

(iii) वर्ग सम नियम (Idempotent Law)

$A \cap A = A$

(iv) तत्समक नियम (Identity Law)

$A \cap \phi = \phi$

(v) समष्टीय समुच्चय का नियम (Law of Universal Set)

$U \cap A = A$

समुच्चयों का अन्तर (Difference of Set)

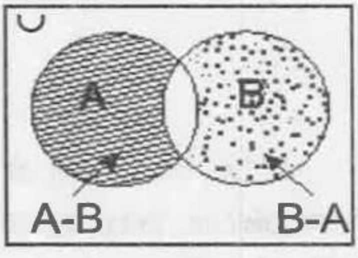
दो समुच्चयों A और B का अंतर उन अवयवों का समुच्चय हैं जो A में है किन्तु B में नहीं जबकि A और B को इसी क्रम मे लिखा जाय।

संकेत में इसे $A - B$ लिखते हैं और 'A अन्तर B' पढ़ते हैं।

अत: यदि $x \in A - B$ तो परिभाषा से $x \in A$ तथा $x \notin B$

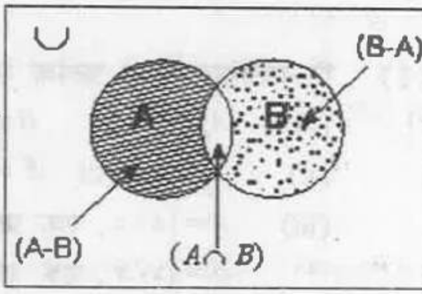
तथा यदि $x \in B - A$ तो $x \in B$ तथा $x \notin A$

दो समुच्चयों A और B के अंतर को वेन आरेख द्वारा दर्शाया जा सकता है जैसा कि आकृति 1.6 मे प्रदर्शित है–



आकृति–1.6

इस प्रकार $A-B, A \cap B$ और $B-A$ परस्पर असंयुक्त (Disjoint) होते हैं अर्थात इन तीनों में से किन्हीं दो समुच्चयों का सर्वनिष्ठ समुच्चय एक रिक्त समुच्चय होता है जैसा कि आकृति 1.7 मे प्रदर्शित है।



आकृति-1.7

जैसे:- $(A-B) \cap (A \cap B) = \phi$

$(A-B) \cap (B-A) = \phi$

$(A \cap B) \cap (B-A) = \phi$

उदाहरण: मान लीजिए कि $A=\{a,b,c\}, B=\{b,c,d,e\}$ तो $A-B$, $B-A$ तथा $A \cap B$ ज्ञात कीजिए।

हल: यहाँ $A-B=\{a\}$, क्योंकि a समुच्चय A में है किन्तु B में नहीं है। $B-A=\{d,e\}$ क्योंकि अवयव d,e समुच्चय B में है परन्तु A में नहीं है। $A \cap B=\{b-c\}$ क्योंकि अवयव b,c दोनों समुच्चयों में उभयनिष्ठ है।

उदाहरण : मान लीजिए कि $A=\{1,2,3,4,5\}, B=\{2,4,6\}$ तो $A-B$ और $B-A$ ज्ञात कीजिए।

हल: यहाँ हम देखते हैं कि $A-B=\{1,3,5\}$ क्योंकि अवयव 1,3,5 समुच्चय A में हैं किन्तु B में नहीं है तथा $B-A=\{6\}$,क्योंकि अवयव 6, B में है किन्तु A में नहीं है।

इस प्रकार हम देखते हैं कि $A-B \neq B-A$.

प्रश्नावली-4

(1) **निम्नलिखित में से प्रत्येक समुच्चय-युग्म का सम्मिलन ज्ञात कीजिए-**

(i) $A=\{2,4,6\}$ $B=\{6,7\}$

(ii) $X=\{a,b,c\}$ $Y=\{a,e,i,o,u\}$

(iii) $A=\{x/x$, एक प्राकृत संख्या है और $6<x<10\}$

$B=\{x/x$, एक प्राकृत संख्या है और $1<x\le 6\}$

(iv) $A=\{1,3,5,7\}$ $B=\phi$

(v) $A=\{x:x$, एक प्राकृत संख्या है और 3 का गुणज है$\}$

$B=\{x:x$ संख्या 6 से कम एक प्राकृत संख्या है$\}$

(2) यदि $A=\{0,1,2,3\}$, $B=\{1,2,4\}$, $C=\{2,4,6,8\}$, $D=\{1,4,8,9,10\}$ तो निम्नलिखित ज्ञात कीजिए-

(i) $A\cup B$ (ii) $A\cup C$ (iii) $B\cup C$ (iv) $B\cup D$

(v) $A\cup B\cup C$ (vi) $A\cup B\cup D$ (vii) $B\cup C\cup D$

(3) मान लीजिए कि $A=\{a,b\}$, $B=\{a,b,c\}$, क्या $A\subset B$? $A\cup B$ ज्ञात कीजिए।

(4) यदि A और B दो ऐसे समुच्चय हैं कि $A\subset B$, तो $A\cup B$ क्या है?

(5) यदि $A=\{3,5,7,9,11\}$, $B=\{7,9,11,13\}$, $C=\{11,13,15\}$,और $D=\{15,17\}$,तो निम्नलिखित ज्ञात कीजिए-

(i) $A\cap B$ (ii) $C\cap D$ (iii) $A\cap C\cap D$

(iv) $A\cap(B\cap C)$ (v) $(A\cup B)\cap(B\cup C)$ (vi) $(A\cap C)\cup(B\cap C)$

(6) यदि $A=\{x:x$,एक प्राकृत संख्या है $\}$,$B=\{x:x$, एक सम प्राकृत संख्या है $\}$, $C=\{x:x$, एक विषम प्राकृत संख्या है $\}$,$D=\{x:x$, एक अभाज्य सेख्या है $\}$ तो निम्नलिखित ज्ञात कीजिए-

(i) $A\cap B$ (ii) $A\cap C$ (iii) $A\cap D$

(iv) $B\cap C$ (v) $B\cap D$ (vi) $C\cap D$

(7) **निम्नलिखित समुच्चय-युग्मों में से कौन युग्म असंयुक्त है?**

(i) $\{a,e,i,o,u\}$ तथा $\{c,d,e,f\}$

(ii) $\{1,2,3,4\}$ तथा $\{x:x$, एक प्राकृत संख्या है और $4\le x\le 6\}$

(iii) $\{x : x$, एक सम पूर्णांक है $\}$ और $\{x : x$, एक विषम पूर्णांक है $\}$

(iv) $\{x / x$, अभाज्य पूर्णांक है $\}$ तथा $\{x / x$, विषम पूर्णांक है $\}$

(8) निम्नलिखित समुच्चयों को ज्ञात कीजिए-

(i) $\{x / x, 2$ का गुणज है $\} \cap \{x / x, 3$ का गुणज है $\}$

(ii) $\{x / x,$ सम पूर्णांक है $\} \cup \{x / x,$ विषम पूर्णांक है $\}$

(iii) $\{x / x, 12$ का गुणनखण्ड है $\} \cap \{x / x, 20$ से छोटी रूढ़ संख्या है$\}$

(iv) $\{x / x,$ एक परिमेय संख्या है $\} \cup \{x / x$ एक अपरिमेय संख्या है $\}$

(9) यदि $A = \{p, q, r\}$, $B = \{l, m\}$, $C = \{r, l\}$ तो जाँच करके दिखाइए कि-

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C\})$.

(10) यदि $A = \{1, 2.3.4\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$, $C = \{3, 4, 5, 6\}$ तो सिद्ध कीजिए कि-

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

(11) यदि $A = \{5, 10, 15, 20\}$, $B = \{2, 4, 6, 8, , 10, 12, 14, 16\}$, $C = \{4, 8, 12, 16, 20\}$, $D = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 20\}$ तो निम्नलिखित को ज्ञात कीजिए-

(i) $A - B$ (ii) $B - C$ (iii) $C - D$

(iv) $A - D$ (v) $D - B$ (vi) $B - A$

(12) यदि $X = \{a, b, c, d\}$ और $Y = \{f, b, d, g\}$, तो निम्नलिखित को ज्ञात कीजिए-

(i) $X - Y$ (ii) $Y - X$ (iii) $X \cap Y$

(13) यदि R वास्तविक संख्याओं तथा Q परिमेय संख्याओं के समुच्चय है तो $R - Q$ क्या होगा?

(14) यदि $A \cap B = \phi$ तो A और B किस प्रकार के समुच्चय कहे जाते हैं?

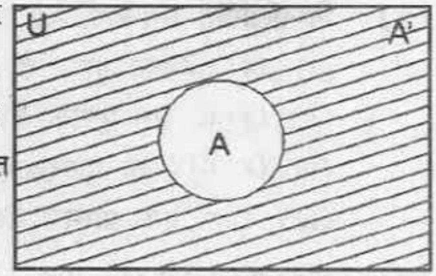
1.9.1 पूरक समुच्चय (Complementary Set):

मान लिया कि $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ एक समष्टीय समुच्चय U है, तथा $\{1, 2, 3\}$ इसका एक उपसमुच्चय A है। तो $U - A = \{4, 5, 6\}$ होगा, जो U के सापेक्ष A का पूरक समुच्चय कहलाता है और इसे A' से निरूपित किया जाता है। अत: $A' = \{4, 5, 6\}$. इस प्रकार हम देखते हैं कि $A' = \{x : x \in U$ और $x \notin A\}$ है। इससे निम्नलिखित परिभाषा प्राप्त होती है-

परिभाषा: मान लीजिए कि U एक समष्टीय समुच्चय है और A, U का एक

उपसमुच्चय है, तो A का पूरक समुच्चय U के उन अवयवों का समुच्चय है, जो A के अवयव नहीं हैं। हम लिख सकते हैं कि $A' = U - A$ अर्थात् A का पूरक समुच्चय (A') समष्टीय समुच्चय U तथा समुच्चय A का अन्तर होता है।

किसी समुच्चय A के पूरक A' को वेन आरेख द्वारा आकृति 1.8 में दर्शाया गया है। छायांकित भाग समुच्चय A के पूरक A' को दर्शाता है।



आकृति–1.8

उदाहरण: मान लीजिए कि $U = \{1,2,3,4,5,6\}$ तथा $A = \{1,2,3,\}$ तो A' ज्ञात कीजिए।

हल: हम देखते हैं कि केवल 4,5,6 ही U के ऐसे अवयव है, जो A में नहीं है।

अत: $A' = \{4,5,6\}$

उदाहरण: मान लीजिए कि U एक सह-शिक्षा विद्यालय की कक्षा X के सभी लड़कों का समुच्चय है, तो A' ज्ञात कीजिए।

हल: स्पष्टतया A' कक्षा के सभी लड़कियों का समुच्चय होगा क्योंकि A, कक्षा X सभी लड़कों का समुच्चय है।

यदि A सार्वत्रिक समुच्चय U का एक उपसमुच्चय है तो इसका पूरक A' भी U का एक उपसमुच्चय होता है।

पूरक के कुछ गुणधर्म

(1) सम्मिलन का पूरक नियम, $A \cup A' = U$

(2) सर्वनिष्ठ का पूरक नियम, $A \cap A' = \phi$

(3) ϕ' और U के नियम, $\phi' = U$ और $U' = \phi$

प्रश्नावली–5

1. मान लीजिए कि $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$,

$A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{2,4,6,8\}$ और $C = \{3,4,5,6\}$

तो निम्नलिखित ज्ञात कीजिए-

(i) A' (ii) B' (iii) $(A \cup C)'$ (iv) $(A \cup B)'$

(v) $(B - C)'$ (vi) $(A - B)'$

2. यदि $A = \{a, b, c, d, e, f\}$, $B = \{2,4,6\}$ तथा $C = \{b, c, d, e\}$ है, तो निम्नलिखित ज्ञात कीजिए-

(i) A में B' (ii) A के सापेक्ष C'

3. यदि समष्टीय समुच्चय E हो, तो किसी समुच्चय A और उसके पूरक समुच्चय A' का सम्मिलन निम्नलिखित में से कौन-सा है?

(i) ϕ (ii) A (iii) E (iv) A'

4. प्राकृत संख्याओं के समुच्चय को सार्वत्रिक समुच्चय मानते हुए, निम्नलिखित समुच्चयों के पूरक समुच्चय लिखिए:

(i) $\{x : x$, एक प्राकृत सम संख्या है$\}$

(ii) $\{x : x$, संख्या 3 का एक धन गुणज है$\}$

(iii) $\{x : x$, एक अभाज्य संख्या है$\}$

(iv) $\{x : x$, एक पूर्ण वर्ग संख्या है$\}$

(v) $\{x : x \geq 7\}$

5. मान लीजिए U दिये गये तल में सभी त्रिभुजों का समुच्चय है। यदि A उन सभी त्रिभुजों का समुच्चय है जिनका कम-से-कम एक कोण 60^0 से भिन्न हो, तो A' क्या है?

6. यदि $S = \{1,2,3,4,5,6,8\}$, $A = \{1,3,4,7\}$ और $B = \{2,3,4,5,8\}$ तो निम्नलिखित की सत्यता की जाँच करें-

(i) $(A \cap B)' = A' \cup B'$ (ii) $(A \cup B)' = A' \cap B'$

7. निम्नलिखित कथनों में कौन सत्य तथा कौन असत्य है?

(i) $U' = \phi$ (ii) $\phi' = U$ (iii) $A \cap B \subset A$ (iv) $A \cup B \subset B$

8. निम्नलिखित कथनों को सत्य बनाने के लिए रिक्त स्थानों को भरिए-

(i) $A \cup A' = ...$ (ii) $A \cap A' = ...$

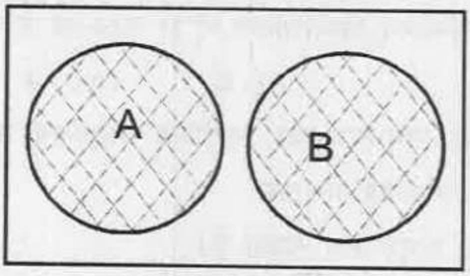
(iii) $\phi' \cap A = ...$ (iv) $U \cap A = ...$

1.10 समुच्चयों के व्यावहारिक अनुप्रयोग (Practical Applications of Sets)

हमलोग दो समुच्चयों के सम्मिंलन, सर्वनिष्ठ तथा अन्तर के बारे मे सीख चुके हैं। यहाँ हम अपने प्रतिदिन के जीवन से संबन्धित कुछ प्रश्नों को हल करेंगे। इसके लिए कुछ सूत्रों को प्राप्त करने का प्रयास करेंगे जो आगे के अध्ययन में भी लाभदायक होगा।

(i) मान लीजिए कि A और B परिमित समुच्चय है।

यदि $A \cap B = \phi$ तो



$A \cap B = \phi$

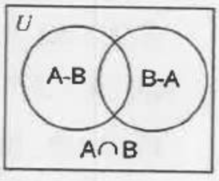
$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) \text{.............................} (1)$$

$A \cup B$ के अवयव या तो A में है या B में है परन्तु दोनों में नहीं हैं क्योंकि $A \cap B = \phi$। अत: परिणाम (i) तत्काल प्राप्त होता है।

(ii) व्यापक रूप से यदि A और B परिमित समुच्चय हैं तो

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \text{............} (2)$$

हम जानते हैं कि समुच्चय $A-B$, $A \cap B$ तथा $B-A$ असंयुक्त होते हैं और इनका सम्मिलन $A \cup B$ होगा, इसलिए



$$n(A \cup B) = n(A-B) + n(A \cap B) + n(B-A)$$

..(3)

$$= n(A-B) + n(A \cap B) + n(B-A) + n(A \cap B) - n(A \cap B)$$

(यहाँ $n(A \cap B)$ को जोड़ा और घटाया गया है)

$$= \{n(A-B) + n(A \cap B)\} + \{n(B-A) + n(A \cap B)\} - n(A \cap B)$$

$$= n(A) + n(B) - n(A \cap B),$$

जो परिणाम (2) को सत्यापित करता है।

उदाहरण: एक विद्यालय में 25 अध्यापक हैं जो गणित या भौतिकी पढ़ाते हैं। इनमें से 12 गणित पढ़ाते हैं और 8 भौतिकी और गणित दोनों पढ़ाते हैं। कितने अध्यापक भौतिकी पढ़ाते हैं?

हल: मान लीजिए कि M उन अध्यापकों का समुच्चय निरूपित करता है, जो गणित पढ़ाते हैं और P उन अध्यापकों का समुच्चय निरूपित करता है जो भौतिकी पढ़ाते हैं। हमें प्रश्न के कथन में आने वाले शब्द 'या' से सम्मिलन तथा शब्द 'और' से सर्वनिष्ठ का संकेत मिलता है। इसलिए-

$n(M \cup P) = 25, n(M) = 12,$ और $n(M \cap P) = 8$

हम $n(P)$ ज्ञात करना चाहते हैं-

सूत्र, $n(M \cup P) = n(M) + n(P) - n(M \cap P)$ के प्रयोग द्वारा

$25 = 12 + n(P) - 8$

अत: $n(P) = 21$

अतएव 21 अध्यापक भौतिकी पढ़ाते हैं।

उदाहरण: 520 व्यक्तियों के समूह में 360 केवल हिन्दी तथा 130 केवल अंग्रेज़ी बोल सकते हैं। कितने व्यक्ति हिन्दी और अंग्रेज़ी दोनों बोल सकते हैं?

हल: माना कि $A = \{x / x$, हिन्दी बोलने वाले व्यक्ति $\}$

$B = \{x / x$, अंग्रेज़ी बोलने वाले व्यक्ति$\}$

प्रश्न से, $n(A \cup B) = 520;\ \ n(A) - n(A \cap B) = 360$

$n(B) - n(A \cap B) = 130;\ \ n(A \cap B) = ?$

सूत्र से, $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

$520 = n(A) + 130$

या, $n(A) = 520 - 130 = 390$

$\because$ प्रश्न से, $n(A) - n(A \cap B) = 360$

$\therefore$ $390 - n(A \cap B) = 360$

या, $n(A \cap B) = 30$

$\therefore$ हिन्दी और अंग्रेज़ी दोनों बोलने वालों की संख्या=30.

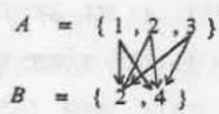
उदाहरण: एक समिति मे 50 व्यक्ति फ्रैंच, 20 स्पैनिश तथा 10 फ्रैंच और स्पैनिश दोनों बोलते हैं। बताइए, कितने व्यक्ति इन दोनों भाषाओं में से कम-से-कम एक भाषा अवश्य बोलते हैं?

तो, $A \times B = \{(1,3),(1,4),(2,3),(2,4)(3,3),(3,4)\}$

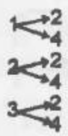
तथा $BxA = \{(3,1),(3,2),(3,3),(4,1),(4,2),(4,3)\}$

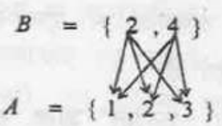
सारणी रूप में दो समुच्चयों A और B के लिए $A \times B$ को लिखने हेतु सभी क्रमित युग्मों को मंझले कोष्ठ के अन्दर कौमा देकर लिखते हैं।

अर्थात् $A \times B$ के लिए-

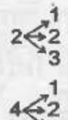


दूसरे तरह से





दूसरी तरह से



नोट: (i) (1,2) और {1,2} अलग है क्योंकि (1,2) एक क्रमित युग्म है जबकि {1,2} एक समुच्चय है जिसके अवयव 1,2 हैं।

(ii)यदि $(a,b) \in A \times B$, तो $a \in A$ और $b \in B$.

(ii)यदि A और B में एक भी रिक्त समुच्चय हो, तो $A \times B$ और $B \times A$ रिक्त समुच्चय होंगे अर्थात $A \times \phi = \phi$ तथा $\phi \times B = \phi$

कार्तीय गुणन में सदस्य संख्या:-

मान लीजिए $A = \{1,2,3\}$ तथा $B = \{2,4\}$

तो $A \times B = \{(1,2),(1,4),(2,2),(2,4),(3,2),(3,4)\}$

यहाँ हम देखते हैं कि समुच्चय A में सदस्यों की संख्या 3 है तथा समुच्चय B में सदस्यों की संख्या 2 है और दोनों समुच्चयों के कार्तीय गुणन में सदस्यों की संख्या 6 है जो दोनों समुच्चयों के अवयवों की संख्याओं के गुणनफल के बराबर है।

इस प्रकार $n(A \times B) = n(A) \times n(B)$

जहाँ $n(A) =$ समुच्चय A के सदस्यों की संख्या, $n(B) =$ समुच्चय B के सदस्यों की संख्या तथा $n(A \times B)$ कार्तीय गुणन समुच्चय में सदस्यों की संख्या है।

$A \times A$ का अर्थ: किसी समुच्चय का अपने साथ कार्तीय गुणन मिल सकता है। यदि $A = B$ हो तो $A \times B = A \times A$ हो जाता है, जैसे-

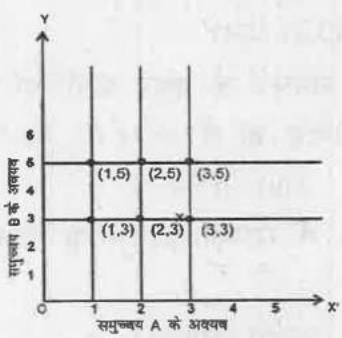
उदाहरण: यदि $A = \{1,2\}$ तो,

$$A \times A = \{1,2\} \times \{1,2\} = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$$

समुच्चय के कार्तीय गुणन का चित्रीय निरूपण:

इसके लिए हम ग्राफ पेपर पर दो परस्पर लम्ब रेखाएँ खींचते हैं। सुविधा के लिए एक क्षैतिज (horizontal) तथा दूसरा ऊर्ध्वाधर (vertical) $A \times B$ के अवयवों (क्रमित युग्मों) की प्रथम प्रविष्टि को क्षैतिज रेखा के अनुदिश तथा द्वितीय प्रविष्टि को ऊर्ध्वाधर रेखा के अनुदिश लेकर बिन्दुओं को अंकित करते हैं।

यदि $a \in A$ और $b \in B$, तो बिन्दु (a,b) क्रमित युग्म बतलाता है। इस प्रकार प्राप्त बिन्दुओं का समुच्चय $A \times B$ का चित्रीय निरूपण करता है। इसी प्रकार $B \times A$ का भी चित्रीय निरूपण किया जाता है।



उदाहरण के लिए- माना कि $A = \{1,2,3\}$

$B = \{3,5\}$

$A \times B$ का चित्रीय निरूपण

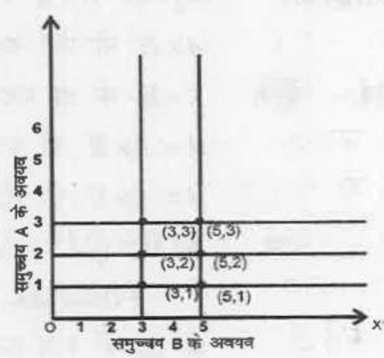
$= \{1,2,3\} \times \{3,5\}$

$= \{(1,3),(1,5),(2,3),(2,5),(3,3),(3,5)$

$B \times A$ का चित्रीय निरूपण

$B \times A = \{3,5\} \times \{1,2,3\}$

$= \{(3,1),(3,2),(3,3),(5,1),(5,2),(5,3)\}$



उदाहरणः यदि एक क्रमित युग्म (3,2) हो, तो निम्नलिखित में कौन असत्य है-

(i) $(3,2)=(2,3)$ (ii) $(3,2)\neq(2,3)$

(i) क्रमित यग्म की प्रथम प्रविष्टि 3 है (iv) क्रमित युग्म की द्वितीय प्रविष्टि 2 है।

हलः (i) असत्य, क्योंकि $3\neq 2$ इसलिए $(3,2)\neq(2,3)$

उदाहरणः यदि $A=\{2,3\}, B=\{0,1,2\}$ तो निम्नलिखित को ज्ञात कीजिए-

(i) $A\times B$ (ii) $B\times A$ (iii) $A\times A$ (iv) $B\times B$

हलः (i) $A\times B=\{(2,0),(2,1),(2,2),(3,0),(3,1),(3,2)\}$

(ii) $B\times A=\{(0,2),(0,3),(1,2),(1,3),(2,2),(2,3)\}$

(iii) $A\times A=\{(2,2),(2,3),(3,2)(3,3)$

(iv) $B\times B=\{(0,0),(0,1),(0,2),(1,0),(1,1),(1,2),(2,0),(2,1),(2,2)\}$

उदाहरणः यदि समुच्चय $A\times B=\{(1,2),(1,4),(3,2),(3,4)$ तो A को लिखिए-

हलः- चूँकि $A\times B=\{(1,2),(1,4),(3,2),(3,4)$

इसलिए $A=A\times B$ के सभी अवयवों के प्रथम प्रविष्टियों का समुच्चय $=\{1,3\}$

उदाहरणः यदि $n(A)=p$ तथा $n(B)=q$ हो तो $n(A\times B)$ का मान ज्ञात कीजिए-

(i) $p-q$ (ii) $p+q$ (iii) $p+q-1$ (iv) pq

हलः- (iv) pq क्योंकि $n(A\times B)$ में सदस्यों की संख्या दोनों समुच्चयों के अवयवों की संख्या का गुणनफल होती है।

उदाहरणः यदि $A=\phi$ तो $A\times A$ के अवयव लिखिए-

हलः- चूँकि $A=\phi$ इसलिए $A\times A$ में कोई अवयव नहीं होगा।

उदाहरणः समुच्चय $A\times B$ मे चार सदस्य हैं जिनमें दो सदस्य (2,5) एवं (1,3) हैं। $A\times B$ के शेष सदस्यों को लिखें।

हलः- चूँकि $A\times B$ के दो सदस्य (2,5) एवं (1,3) हैं।

$\therefore$ $A=A\times B$ के प्रथम प्रविष्टियों का समुच्चय $=\{2,1\}$

$B=A\times B$ के द्वितीय प्रविष्टियों का समुच्चय $=\{5,3\}$

अब, $A\times B=\{2,1\}\times\{5,3\}$

$=\{(2,5),(2,3),(1,5),(1,3)\}$

$\therefore$ $A\times B$ के शेष अवयव हैं। (2,3),(1,5)

उदाहरण: यदि $P=\{1,4,9\}$ तथा $Q=\{2,4,6\}$ तो निम्नलिखित को ज्ञात कीजिए-

(i) $P\times(P\cap Q)$ (ii) $(P-Q)\times Q$ (iii) $(P\cap Q)\times(P\cup Q)$

हल:- (i) $\{(1,4),(4,4),(9,4)\}$

(ii) $\{(1,2),(1,4),(1,6),(9,2),(9,4),(9,6)\}$

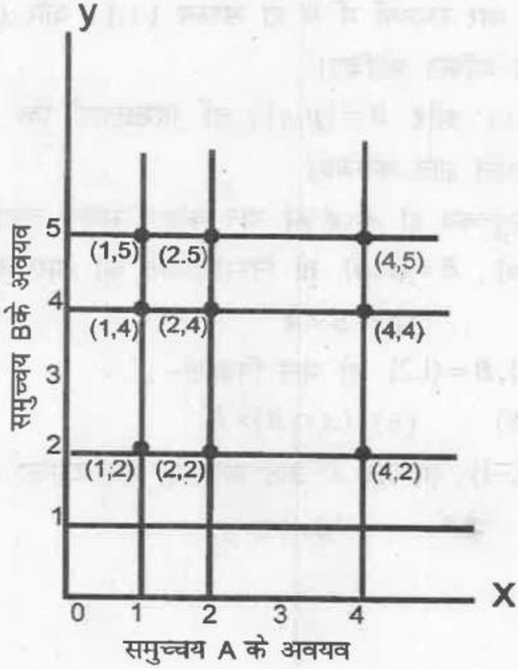
(iii) $\{(4,1),(4,2),(4,4),(4,6),(4,9)\}$

उदाहरण: यदि $A=\{1,2,4\}$ तथा $B=\{2,4,5\}$ तो $A\times B$ को ज्ञात कर उनका आलेख खींचिए।

हल:- $A\times B=\{1,2,4\}\times\{2,4,5\}$

$=\{(1,2),(1,4),(1,5),(2,2),(2,4),(2,5),(4,2),(4,4),(4,5)\}$

$A\times B$ का आलेखीय निरूपण



प्रश्नावली-7

1. यदि $n(A)=2,\ n(B)=3$ तो $n(A\times B)$ निम्नलिखित में से किसके बराबर है?

   (i) 3 (ii) 6 (iii) 1 (iv) 0

2. यदि (6,2) एक क्रमित युग्म हो, तो निम्नलिखित में कौन गलत है?

   (i) $(6,2)=(2,6)$ (ii) $(6,2)\neq(2,6)$

   (iii) क्रमित युग्म का प्रथम प्रविष्टि=6 (iv) क्रमित युग्म का द्वितीय प्रविष्टि=2

3. यदि X समष्टीय समुच्चय एवं A एक अरिक्त समुच्चय हो तो $A\times\phi$ निम्नलिखित में कौन सा है?

   (i) ϕ (ii) A (iii) E (iv) A'

4. यदि $A=\{1,2\}$ और $B=\{x,y\}$, हो तो $A\times B$ तथा $B\times A$ को लिखिए।
5. यदि $A=\{0\}$ तो $A\times A$ का अवयव क्या होगा?
6. यदि समुच्चय $A\times B=\{(1,2),(1,4),(3,2),(3,4)\}$, तो समुच्चय A को लिखिए।
7. यदि $A\times B$ के चार सदस्यों में से दो सदस्य (1,1) और (7,3), हों तो समुच्चय A और B को अंकित कीजिए।
8. यदि $A=\{a,b,c\}$ और $B=\{p,q\}$, तो दिखलाएँ कि $A\times B\neq B\times A$ और $n(A\times B)$ का मान ज्ञात कीजिए।
9. यदि A कोई समुच्चय हो $A\times\phi$ का मान कारण सहित बताइए।
10. यदि $A=\{s,u,n\}$, $B=\{0,n\}$ तो निम्नलिखित को सारणीबद्ध करें-

    (i) $A\times B$ (ii) $B\times A$

11. यदि $A=\{1,2,3\}, B=\{1,2\}$ तो मान निकालें-

    (i) $A\times(A\cup B)$ (ii) $(A\cap B)\times B$

12. यदि $A=\{-2,0,-1\}$, तो $A\times A$ ज्ञात कीजिए और उसका आलेख खींचिए।