ગણિત

ધોરણ IX

પ્રતિજ્ઞાપત્ર

ભારત મારો દેશ છે.
બધાં ભારતીયો મારાં ભાઈબહેન છે.
હું મારા દેશને ચાહું છું અને તેના સમૃદ્ધ અને
વૈવિધ્યપૂર્ણ વારસાનો મને ગર્વ છે.
હું સદાય તેને લાયક બનવા પ્રયત્ન કરીશ.
હું મારાં માતાપિતા, શિક્ષકો અને વડીલો પ્રત્યે આદર રાખીશ
અને દરેક જણ સાથે સભ્યતાથી વર્તીશ.
હું મારા દેશ અને દેશબાંધવોને મારી નિષ્ઠા અર્પું છું.
તેમનાં કલ્યાણ અને સમૃદ્ધિમાં જ મારું સુખ રહ્યું છે.

राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्
NATIONAL COUNCIL OF EDUCATIONAL RESEARCH AND TRAINING

ગુજરાત રાજ્ય શાળા પાઠ્યપુસ્તક મંડળ
'વિદ્યાયન', સેક્ટર 10-એ, ગાંધીનગર-382010

© NCERT, નવી દિલ્હી તથા ગુજરાત રાજ્ય શાળા પાઠ્યપુસ્તક મંડળ, ગાંધીનગર
આ પાઠ્યપુસ્તકના સર્વ હક NCERT, નવી દિલ્હી તથા ગુજરાત રાજ્ય શાળા પાઠ્યપુસ્તક મંડળને હસ્તક છે. આ પાઠ્યપુસ્તકનો કોઈ પણ ભાગ કોઈ પણ રૂપમાં NCERT, નવી દિલ્હી અને ગુજરાત રાજ્ય શાળા પાઠ્યપુસ્તક મંડળની લેખિત પરવાનગી વગર પ્રકાશિત કરી શકાશે નહિ.

અનુવાદ

ડૉ. એ. પી. શાહ(કન્વિનર)
શ્રી જયકૃષ્ણ એન. ભટ્ટ
શ્રી વિજય વોરા
શ્રી હિતેશકુમાર વી. પંડયા
ડૉ. હરેશ પી. ભુટક
ડૉ. અતુલભાઈ કે. વ્યાસ
ડૉ. પ્રવિણચંદ્ર જોષી
ડૉ. દિપક પટેલ

સમીક્ષક

ડૉ. એ. એચ. હાસમણી
ડૉ. પી. આઇ. અંધારીયા
શ્રી એમ. એસ. જાજલ
ડૉ. કાનજીભાઇ વી. પટેલ
ડૉ. એસ. આર. ગજેરા
શ્રી ઈન્દ્રવદન એ. શાહ
શ્રી એચ. બી. ડોબરીયા
શ્રી કલ્પેશ ડી. અખાણી
શ્રી યોગેશ એન. દેવલુક

ભાષાશુદ્ધિ

શ્રી વિજય પારેખ

સંયોજન

શ્રી આશિષ એચ. બોરીસાગર
(વિષય-સંયોજક : ગણિત)

નિર્માણ-આયોજન

શ્રી આશિષ એચ. બોરીસાગર
(નાયબ નિયામક : શૈક્ષણિક)

મુદ્રણ-આયોજન

શ્રી હરેશ એસ. લીમ્બાચીયા
(નાયબ નિયામક : ઉત્પાદન)

પ્રસ્તાવના

રાષ્ટ્રીય સ્તરે સમાન અભ્યાસક્રમ રાખવાની સરકારશ્રીની નીતિના અનુસંધાને ગુજરાત સરકાર તથા ગુજરાત માધ્યમિક અને ઉચ્ચતર માધ્યમિક શિક્ષણ બોર્ડ દ્વારા ઠરાવ ક્રમાંકઃ મશબ/1217/1036/છ તા.25/10/2017 થી શાળા કક્ષાએ NCERT ના પાઠ્યપુસ્તકોનો સીધો જ અમલ કરવાનો નિર્ણય કરવામાં આવ્યો. તેને અનુલક્ષીને NCERT, નવી દિલ્હી દ્વારા પ્રકાશિત **ધોરણ 9** ના **ગણિત** વિષયના પાઠ્યપુસ્તકનો ગુજરાતીમાં અનુવાદ કરાવીને વિદ્યાર્થીઓ સમક્ષ મૂકતાં ગુજરાત રાજ્ય શાળા પાઠ્યપુસ્તક મંડળ આનંદ અનુભવે છે.

આ પાઠ્યપુસ્તકનો અનુવાદ તથા તેની સમીક્ષા નિષ્ણાત પ્રાધ્યાપકો અને શિક્ષકો પાસે કરાવવામાં આવ્યા છે અને સમીક્ષકોનાં સૂચનો અનુસાર હસ્તપ્રતમાં યોગ્ય સુધારા-વધારા કર્યા પછી આ પાઠ્યપુસ્તક પ્રસિદ્ધ કરતાં પહેલાં આ પાઠ્યપુસ્તકની મંજૂરી માટે એક રાજ્ય કક્ષાની સમિતિની રચના કરવામાં આવી. આ સમિતિની સાથે NCERT ના પ્રતિનિધિ તરીકે આર.આઇ.ઇ. ભોપાલથી ઉપસ્થિત રહેલા નિષ્ણાતોની સાથે એક ત્રિદિવસીય કાર્યશિબિરનું આયોજન કરવામાં આવ્યું અને પાઠ્યપુસ્તકને અંતિમ સ્વરૂપ આપવામાં આવ્યું, જેમાં ડૉ. એ. પી. શાહ, શ્રી જયકૃષ્ણ ભટ્ટ, ડૉ. એસ. આર. ગજેરા, શ્રી મનોજકુમાર ઉપાધ્યાય, શ્રી દિવ્યાંશુ દવે, ડૉ. સુરેશ મકવાના(આર.આઇ.ઇ. ભોપાલ), શ્રી અજી થોમસ(આર.આઇ.ઇ. ભોપાલ) ઉપસ્થિત રહ્યા હતા અને તેમણે પોતાના કિંમતી સૂચનો અને માર્ગદર્શન પૂરા પાડ્યા છે.

પ્રસ્તુત પાઠ્યપુસ્તકને રસપ્રદ, ઉપયોગી અને ક્ષતિરહિત બનાવવા માટે માન. અગ્રસચિવશ્રી(શિક્ષણ) દ્વારા અંગત રસ લઈને જરૂરી માર્ગદર્શન આપવામાં આવ્યું છે. આ પાઠ્યપુસ્તકની ગુણવત્તા જાળવવા માટે મંડળ દ્વારા પૂરતી કાળજી લેવાઇ છે, તેમ છતાં શિક્ષણમાં રસ ધરાવનાર વ્યક્તિઓ પાસેથી પુસ્તકની ગુણવત્તા વધારે તેવાં સૂચનો આવકાર્ય છે.

NCERT, નવી દિલ્હીના સહકાર બદલ તેમના આભારી છીએ.

ડૉ. એમ. આઇ. જોષી
નિયામક

ડૉ. નીતિન પેથાણી
કાર્યવાહક પ્રમુખ

તા. 26-10-2017

ગાંધીનગર

પ્રથમ આવૃત્તિ : 2018

પ્રકાશક : ગુજરાત રાજ્ય શાળા પાઠ્યપુસ્તક મંડળ, 'વિદ્યાયન', સેક્ટર 10-એ, ગાંધીનગર વતી ડૉ. એમ. આઇ. જોષી, નિયામક

મુદ્રક :

Foreword

The National Curriculum Framework (NCF), 2005, recommends that children's life at school must be linked to their life outside the school. This principle marks a departure from the legacy of bookish learning which continues to shape our system and causes a gap between the school, home and community. The syllabi and textbooks developed on the basis of NCF signify an attempt to implement this basic idea. They also attempt to discourage rote learning and the maintenance of sharp boundaries between different subject areas. We hope these measures will take us significantly further in the direction of a child-centred system of education outlined in the national Policy on Education (1986).

The success of this effort depends on the steps that school principals and teachers will take to encourage children to reflect on their own learning and to pursue imaginative activities and questions. We must recognize that, given space, time and freedom, children generate new knowledge by engaging with the information passed on to them by adults. Treating the prescribed textbook as the sole basis of examination is one of the key reasons why other resources and sites of learning are ignored. Inculcating creativity and initiative is possible if we perceive and treat children as participants in learning, not as receivers of a fixed body of knowledge.

This aims imply considerable change is school routines and mode of functioning. Flexibility in the daily time-table is as necessary as rigour in implementing the annual calendar so that the required number of teaching days are actually devoted to teaching. The methods used for teaching and evaluation will also determine how effective this textbook proves for making children's life at school a happy experience, rather then a source of stress or boredom. Syllabus designers have tried to address the problem of curricular burden by restructuring and reorienting knowledge at different stages with greater consideration for child psychology and the time available for teaching. The textbook attempts to enhance this endeavour by giving higher priority and space to opportunities for contemplation and wondering, discussion in small groups, and activities requiring hands-on experience.

The National Council of Educational Research and Training (NCERT) appreciates the hard work done by the textbook development committee responsible for this book. We wish to thank the Chairperson of the advisory group in science and mathematics, Professor J.V. Narlikar and the Chief Advisor for this book, Professor P. Sinclair of IGNOU, New Delhi for guiding the work of this committee. Several teachers contributed to the development of this textbook; we are grateful to their principals for making this possible. We are indebted to the institutions and organizations which have generously permitted us to draw upon their resources, material and

personnel. We are especially grateful to the members of the National Monitoring Committee, appointed by the Department of Secondary and Higher Education, Ministry of Human Resource Development under the Chairpersonship of Professor Mrinal Miri and Professor G.P. Deshpande, for their valuable time and contribution. As an organisation committed to systemic reform and continuous improvement in the quality of its products, NCERT welcomes comments and suggestions which will enable us to undertake further revision and refinement.

Director

New Delhi — National Council of Educational

20 December 2005 — Research and Training

Textbook Development Committee

Chairperson, Advisory Group in Science and Mathematics

J.V. Narlikar, *Emeritus Professor*, *Chairman,* Advisory Committee, Inter University Centre for Astronomy & Astrophysics (IUCAA), Ganeshkhind, Pune University, Pune

Chief Advisor

P. Sinclair, Director, NCERT and *Professor of Mathematics*, IGNOU, New Delhi

Chief Coordinator

Hukum Singh, *Professor* (Retd.), DESM, NCERT

Members

A.K. Wazalwar, *Professor and Head*, DESM, NCERT

Anjali Lal, *PGT*, DAV Public School, Sector-14, Gurgaon

Anju Nirula, *PGT*, DAV Public School, Pushpanjali Enclave, Pitampura, Delhi

G.P. Dikshit, *Professor* (Retd.), Department of Mathematics & Astronomy, Lucknow University, Lucknow

K.A.S.S.V. Kameswara Rao, *Associate Professor*, Regional Institute of Education, Bhubaneswar

Mahendra R. Gajare, *TGT,* Atul Vidyalya, Atul, Dist. Valsad

Mahendra Shanker, *Lecturer* (S.G.) (Retd.), NCERT

Rama Balaji, *TGT*, K.V., MEG & Centre, ST. John's Road, Bangalore

Sanjay Mudgal, *Lecturer*, CIET, NCERT

Shashidhar Jagadeeshan, *Teacher and Member,* Governing Council, Centre for Learning, Bangalore

S. Venkataraman, *Lecturer*, School of Sciences, IGNOU, New Delhi

Uaday Singh, *Lecturer*, DESM, NCERT

Ved Dudeja, *Vice-Principal* (Retd.), Govt. Girls Sec. School, Sainik Vihar, Delhi

Member-Coordinator

Ram Avtar, *Professor* (Retd.), DESM, NCERT (till December 2005)

R.P. Maurya, *Professor*, DESM, NCERT (Since January 2006)

Acknowledgements

The Council gratefully acknowledges the valuable contributions of the following participants of the Textbook Review Workshop: A.K. Saxena, *Professor* (Retd.), Lucknow University, Lucknow; Sunil Bajaj, *HOD*, SCERT, Gurgaon; K.L. Arya, *Professor* (Retd.), DESM, NCERT; Vandita Kalra, *Lecturer,* Sarvodaya Kanya Vidyalya, Vikas Puri, District Centre, New Delhi; Jagdish Singh, *PGT,* Sainik School, Kapurthala; P.K. Bagga, *TGT,* S.B.V. Subhash Nagar, New Delhi; R.C. Mahana, *TGT,* Kendriya Vidyalya, Sambalpur; D.R. Khandave, *TGT,* JNV, Dudhnoi, Goalpara; S.S. Chattopadhyay, *Assistant Master,* Bidhan Nagar Government High School, Kolkata; V.A. Sujatha, *TGT,* K.V. Vasco No. 1, Goa; Akila Sahadevan, *TGT,* K.V., Meenambakkam, Chennai; S.C. Rauto, *TGT,* Central School for Tibetans, Mussoorie; Sunil P. Xavier, *TGT,* JNV, Neriyamangalam, Ernakulam; Amit Bajaj, *TGT,* CRPF Public School, Rohini, Delhi; R.K. Pande, *TGT,* D.M. School, RIE, Bhopal; V. Madhavi, *TGT,* Sanskriti School, Chanakyapuri, New Delhi; G. Sri Hari Babu, *TGT,* JNV, Sirpur Kagaznagar, Adilabad; and R.K. Mishra, *TGT*, A.E.C. School, Narora.

Special thanks are due to M. Chandra, *Professor* and *Head* (Retd.), DESM, NCERT for her support during the development of this book.

The Council acknowledges the efforts of *Computer Incharge,* Deepak Kapoor; *D.T.P. Operator,* Naresh Kumar; *Copy Editor,* Pragati Bhardwaj; and *Proof Reader,* Yogita Sharma.

Contribution of APC–Office, administration of DESM, Publication Department and Secretariat of NCERT is also duly acknowledged.

અનુક્રમણિકા

1.	**સંખ્યા પદ્ધતિ**	**1**
	1.1 પ્રાસ્તાવિક	1
	1.2 અસંમેય સંખ્યાઓ	4
	1.3 વાસ્તવિક સંખ્યા અને તેની દશાંશ-અભિવ્યક્તિ	8
	1.4 સંખ્યારેખા પર વાસ્તવિક સંખ્યાનું નિરૂપણ	13
	1.5 વાસ્તવિક સંખ્યાઓ પર ગાણિતિક પ્રક્રિયાઓ.	15
	1.6 વાસ્તવિક સંખ્યાઓ માટે ઘાતાંકના નિયમો	21
	1.7 સારાંશ	23
2.	**બહુપદીઓ**	**24**
	2.1 પ્રાસ્તાવિક	24
	2.2 એકચલ બહુપદી	24
	2.3 બહુપદીનાં શૂન્યો	28
	2.4 શેષ પ્રમેય	31
	2.5 બહુપદીઓનું અવયવીકરણ	36
	2.6 બૈજિક નિત્યસમો	40
	2.7 સારાંશ	45
3.	**યામ ભૂમિતિ**	**47**
	3.1 પ્રાસ્તાવિક	47
	3.2 કાર્તેઝિય પદ્ધતિ	50
	3.3 જે બિંદુના યામ આપેલા હોય તે બિંદુનું નિરૂપણ	56
	3.4 સારાંશ	59
4.	**દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણો**	**60**
	4.1 પ્રાસ્તાવિક	60
	4.2 સુરેખ સમીકરણો	60
	4.3 સુરેખ સમીકરણનો ઉકેલ	62
	4.4 દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણનો આલેખ	64
	4.5 x-અક્ષ અને y-અક્ષને સમાંતર રેખાઓનાં સમીકરણો	68
	4.6 સારાંશ	69

5.	**યુક્લિડની ભૂમિતિનો પરિચય**	**71**
5.1	પ્રાસ્તાવિક	71
5.2	યુક્લિડની વ્યાખ્યાઓ, પ્રમેયો અને પૂર્વધારણાઓ	73
5.3	યુક્લિડની પાંચમી પૂર્વધારણાને સમકક્ષ વિધાનો	79
5.4	સારાંશ	81
6.	**રેખાઓ અને ખૂણાઓ**	**82**
6.1	પ્રાસ્તાવિક	82
6.2	મૂળભૂત પદો તથા વ્યાખ્યાઓ	83
6.3	પરસ્પર છેદતી અને પરસ્પર ન છેદતી રેખાઓ	84
6.4	ખૂણાઓની જોડ	85
6.5	સમાંતર રેખાઓ અને છેદિકા	89
6.6	એક જ રેખાને સમાંતર રેખાઓ	92
6.7	ત્રિકોણના ખૂણાઓના સરવાળાનો ગુણધર્મ	95
6.8	સારાંશ	98
7.	**ત્રિકોણ**	**99**
7.1	પ્રાસ્તાવિક	99
7.2	ત્રિકોણની એકરૂપતા	99
7.3	ત્રિકોણની એકરૂપતા માટેની શરતો	102
7.4	ત્રિકોણના કેટલાક ગુણધર્મો	109
7.5	ત્રિકોણની એકરૂપતા માટેની કેટલીક વધુ શરતો	112
7.6	ત્રિકોણમાં અસમતાઓ	116
7.7	સારાંશ	120
8.	**ચતુષ્કોણ**	**121**
8.1	પ્રાસ્તાવિક	121
8.2	ચતુષ્કોણના ખૂણાઓના સરવાળાનો ગુણધર્મ	122
8.3	ચતુષ્કોણના પ્રકાર	123
8.4	સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના ગુણધર્મો	124
8.5	ચતુષ્કોણ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ થાય તેની બીજી શરત	130
8.6	મધ્યબિંદુ પ્રમેય	133
8.7	સારાંશ	136

9.	**સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ અને ત્રિકોણનાં ક્ષેત્રફળ**	**137**
9.1	પ્રાસ્તાવિક	137
9.2	એક જ પાયા ઉપર અને સમાંતર રેખાઓ વચ્ચેની આકૃતિઓ	139
9.3	એક જ પાયા અને સમાંતર રેખાની જોડની રેખાઓ વચ્ચેના સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ	140
9.4	એક જ પાયા પર આવેલા અને સમાંતર રેખાઓની જોડની રેખાઓ વચ્ચે આવેલા ત્રિકોણ	144
9.5	સારાંશ	149
10.	**વર્તુળ**	**151**
10.1	પ્રાસ્તાવિક	151
10.2	વર્તુળ અને તેને સંબંધિત પદો : એક સમીક્ષા	152
10.3	જીવાએ કોઈ બિંદુએ આંતરેલો ખૂણો	154
10.4	કેન્દ્રમાંથી જીવા પર દોરેલો લંબ	155
10.5	ત્રણ બિંદુઓમાંથી વર્તુળ	156
10.6	સમાન જીવાઓ અને તેમનું કેન્દ્રથી અંતર	157
10.7	વર્તુળના ચાપે આંતરેલો ખૂણો	160
10.8	ચક્રીય ચતુષ્કોણ	162
10.9	સારાંશ	166
11.	**રચનાઓ**	**167**
11.1	પ્રાસ્તાવિક	167
11.2	પાયાની રચનાઓ	168
11.3	ત્રિકોણની કેટલીક રચનાઓ	170
11.4	સારાંશ	174
12.	**હેરોનનું સૂત્ર**	**175**
12.1	પ્રાસ્તાવિક	175
12.2	ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ - હેરોનના સૂત્ર પરથી	177
12.3	ચતુષ્કોણનાં ક્ષેત્રફળ શોધવા હેરોનના સૂત્રનો ઉપયોગ	180
12.4	સારાંશ	184
13.	**પૃષ્ઠફળ અને ઘનફળ**	**185**
13.1	પ્રાસ્તાવિક	185
13.2	લંબઘન અને સમઘનનાં પૃષ્ઠફળ	185
13.3	લંબવૃત્તીય નળાકારનું પૃષ્ઠફળ	190
13.4	લંબવૃત્તીય શંકુનું પૃષ્ઠફળ	193

13.5 ગોલકનું પૃષ્ઠફળ 197

13.6 લંબઘનનું ઘનફળ 200

13.7 નળાકારનું ઘનફળ 202

13.8 લંબવૃત્તીય શંકુનું ઘનફળ 205

13.9 ગોળાનું ઘનફળ 207

13.10 સારાંશ 210

14. આંકડાશાસ્ત્ર 211

14.1 પ્રાસ્તાવિક 211

14.2 માહિતીનું એકત્રીકરણ 212

14.3 માહિતીની રજૂઆત 213

14.4 માહિતીની આલેખાત્મક રજૂઆત 219

14.5 મધ્યવર્તી સ્થિતિમાનનાં માપ 231

14.6 સારાંશ 239

15. સંભાવના 241

15.1 પ્રાસ્તાવિક 241

15.2 સંભાવના - એક પ્રાયોગિક અભિગમ 242

15.3 સારાંશ 254

પરિશિષ્ટ – 1 ગણિતમાં સાબિતીઓ 255

A1.1 પ્રાસ્તાવિક 255

A1.2 ગાણિતિક રીતે સ્વીકાર્ય વિધાનો 256

A1.3 આનુમાનિક તર્ક 259

A1.4 પ્રમેય, અનુમાન અને પૂર્વધારણા 261

A1.5 ગાણિતિક સાબિતી શું છે ? 267

A1.6 સારાંશ 272

પરિશિષ્ટ – 2 ગાણિતિક મોડેલનો પરિચય 273

A2.1 પ્રાસ્તાવિક 273

A2.2 શાબ્દિક કૂટપ્રશ્નોની સમીક્ષા 274

A2.3 કેટલાંક ગાણિતિક મોડેલ 278

A2.4 મોડેલિંગની પ્રક્રિયા, તેના ફાયદાઓ અને મર્યાદાઓ 285

A2.5 સારાંશ 288

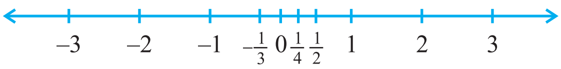
જવાબો/સૂચનો 289

પ્રકરણ 1

સંખ્યા પદ્ધતિ

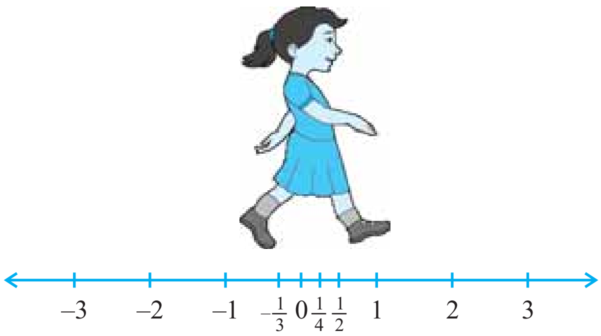
1.1 પ્રાસ્તાવિક

અગાઉના વર્ગમાં તમે સંખ્યારેખા વિશે શીખી ગયાં છો અને વિવિધ પ્રકારની સંખ્યાઓનું સંખ્યારેખા પર નિરૂપણ કેવી રીતે કરી શકાય એ પણ શીખી ગયાં છો (આકૃતિ 1.1 જુઓ).



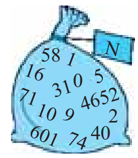
આકૃતિ 1.1 સંખ્યારેખા

કલ્પના કરો કે તમે શૂન્યથી ચાલવાનું શરૂ કરો છો અને સંખ્યારેખા પર ધન દિશામાં ચાલો છો. જ્યાં સુધી તમે જોઈ શકો છો (ક્ષિતિજ સુધી) ત્યાં સુધી તમને સંખ્યાઓ, સંખ્યાઓ અને સંખ્યાઓ જ જોવા મળે છે.

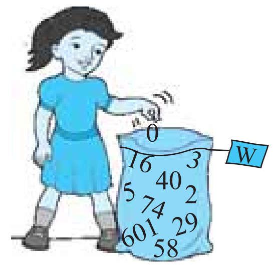


આકૃતિ 1.2

ધારો કે તમે સંખ્યારેખા પર ચાલવાનું શરૂ કરો છો અને કેટલીક સંખ્યાઓ એકત્રિત કરતાં જાવ છો. આ સંખ્યાઓને એકત્રિત કરવા માટે એક થેલો તૈયાર રાખો.

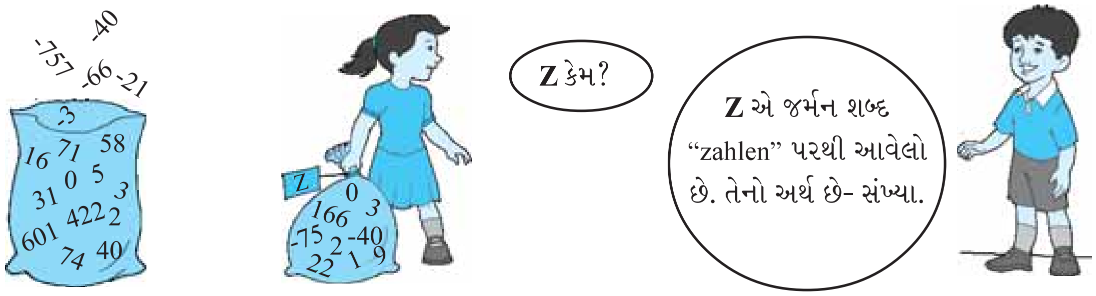


શક્ય છે કે તમે 1, 2, 3 અને આવી બધી ફક્ત ***પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓને*** *(natural numbers)* લેવાની શરૂઆત કરો છો. તમે જાણો છો કે આ યાદી હંમેશાં આગળ વધતી જ જાય છે. આવું કેમ જણાય છે? આમ, હવે તમારા થેલામાં પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ ભરાઈ ગઈ છે. તમને યાદ હશે કે આ પ્રકારની સંખ્યાના જથ્થાને સંકેતમાં N વડે દર્શાવાય છે.

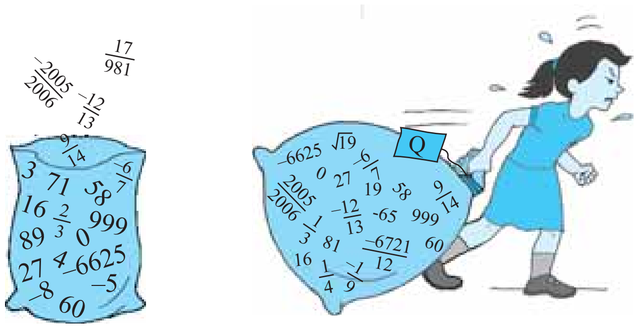


હવે તમે પાછા ફરી અને આનાથી વિરુધ્ધ દિશામાં ચાલતાં શૂન્યને લઈને તેને પણ થેલામાં મૂકી દો. આથી તમને ***પૂર્ણ સંખ્યાઓ*** *(Whole numbers)* નો એક જથ્થો મળે છે. તેને સંકેતમાં W વડે દર્શાવવામાં આવે છે.

હવે તમને ઘણીબધી ઋણ પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ દેખાશે. તમે આ બધી ઋણ પૂર્ણાંક સંખ્યાઓને પણ થેલામાં મૂકી દો. આ નવો જથ્થો શેનો બનેલો છે ? તમને યાદ હશે કે આ ***પૂર્ણાંકો*** *(Integers)*નો જથ્થો છે અને સંકેતમાં તેને *Z* વડે દર્શાવવામાં આવે છે.



શું હજુ પણ આ રેખા પર સંખ્યાઓ બાકી રહી છે ? નિશ્ચિતપણે, હા. રેખા પર $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ અથવા $\frac{-2005}{2006}$ જેવી સંખ્યાઓ પણ છે. જો તમે આ પ્રકારની બધી સંખ્યાઓ થેલામાં એકત્રિત કરો તો તમને ***સંમેય સંખ્યાઓ*** *(Rational numbers)*નો જથ્થો મળશે.



સંખ્યાના આ જથ્થાને Q વડે દર્શાવાય છે. અંગ્રેજી શબ્દ Rational એ ratio પરથી આવેલો છે અને Q સંકેત એ અંગ્રેજી શબ્દ Quotient પરથી લેવામાં આવ્યો છે.

તમને યાદ હશે કે સંમેય સંખ્યાની વ્યાખ્યા નીચે પ્રમાણે છે :

જો p અને q પૂર્ણાંક હોય અને q શૂન્યેતર હોય તથા સંખ્યા ‘r’ને $\frac{p}{q}$ સ્વરૂપમાં લખી શકાય તો ‘r’ને સંમેય સંખ્યા કહે છે. (અહીં, આપણે $q \neq 0$નો આગ્રહ કેમ રાખીએ છીએ ?)

જુઓ કે થેલામાં રહેલી બધી સંખ્યાઓને p પૂર્ણાંક તથા q શૂન્યેતર પૂર્ણાંક હોય તેવા $\frac{p}{q}$ સ્વરૂપમાં લખી શકાય છે. ઉદાહરણ તરીકે -25 ને $\frac{-25}{1}$ ના સ્વરૂપમાં લખી શકાય છે. અહીંયા $p = -25$ અને $q = 1$ છે. આથી સંમેય સંખ્યાઓમાં પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ, પૂર્ણ સંખ્યાઓ અને પૂર્ણાંકોનો પણ સમાવેશ થાય છે.

તમે એ પણ જાણો છો કે સંમેય સંખ્યાઓને p પૂર્ણાંક હોય તથા q શૂન્યેતર પૂર્ણાંક હોય તેવા $\frac{p}{q}$ સ્વરૂપમાં અનન્ય રીતે દર્શાવી શકાતી નથી. ઉદાહરણ તરીકે $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{10}{20} = \frac{25}{50} = \frac{47}{94}$ વગેરે. આ ***સમાન સંમેય સંખ્યાઓ*** (*Equivalent rational numbers*) અથવા ***અપૂર્ણાંક*** છે, છતાં પણ આપણે $\frac{p}{q}$ સંમેય સંખ્યા છે તેમ કહીએ છીએ અથવા $\frac{p}{q}$ નું સંખ્યારેખા પર નિરૂપણ કરીએ છીએ ત્યારે સ્વીકારી લઈએ છીએ કે $q \neq 0$ અને p અને q ને 1 સિવાયનો કોઈ સામાન્ય અવયવ નથી(એટલે કે p અને q પરસ્પર અવિભાજ્ય(*co-prime*) છે). આમ, સંખ્યારેખા પર $\frac{1}{2}$ ને સમાન હોય તેવી અગણિત સંખ્યાઓમાંથી $\frac{1}{2}$ ને જ લઈએ છીએ અને $\frac{1}{2}$ તેને સમાન બધી સંખ્યાઓનું નિરૂપણ કરે છે.

ચાલો હવે આપણે અગાઉના ધોરણમાં શીખી ગયેલાં હોઈએ તેવી જુદી જુદી સંખ્યાઓનાં ઉદાહરણો ઉકેલીએ.

ઉદાહરણ 1 : નીચેનાં વિધાનો સત્ય છે કે અસત્ય ? કારણ સહિત ઉત્તર આપો.

(i) દરેક પૂર્ણ સંખ્યા એ પ્રાકૃતિક સંખ્યા છે.

(ii) દરેક પૂર્ણાંક એ સંમેય સંખ્યા છે.

(iii) દરેક સંમેય સંખ્યા એ પૂર્ણાંક છે.

ઉકેલ : (i) આ વિધાન અસત્ય છે, કારણ કે 0 એ પૂર્ણ સંખ્યા છે, પરંતુ પ્રાકૃતિક સંખ્યા નથી.

(ii) આ વિધાન સત્ય છે, કારણ કે દરેક પૂર્ણાંક m ને $\frac{m}{1}$ ના સ્વરૂપમાં લખી શકાય છે અને તેથી તે સંમેય સંખ્યા છે.

(iii) આ વિધાન અસત્ય છે, કારણ કે $\frac{3}{5}$ એ સંમેય સંખ્યા છે, પરંતુ પૂર્ણાંક નથી.

ઉદાહરણ 2 : 1 અને 2 વચ્ચેની પાંચ સંમેય સંખ્યાઓ શોધો.

આ પ્રશ્નનો ઉકેલ ઓછામાં ઓછી બે રીતે વિચારી શકાય :

રીત 1 : તમને યાદ હશે કે તમે r અને s વચ્ચેની એક સંમેય સંખ્યા શોધવા માટે r અને s નો સરવાળો કરીને સરવાળાને 2 વડે ભાગો છો એટલે કે $\frac{r+s}{2}$ એ r અને s ની વચ્ચે હોય છે. આથી $\frac{3}{2}$ એ 1 અને 2 ની વચ્ચેની એક સંખ્યા છે. આ પદ્ધતિથી આગળ વધો તો તમને 1 અને 2 વચ્ચેની બીજી ચાર સંમેય સંખ્યાઓ મળે. આવી અન્ય ચાર સંમેય સંખ્યાઓ $\frac{5}{4}, \frac{11}{8}, \frac{13}{8}$ અને $\frac{7}{4}$ છે.

રીત 2 : બીજી રીતમાં એક જ સોપાનમાં પાંચેય સંમેય સંખ્યા શોધી શકાય છે. આપણે પાંચ સંખ્યાઓ શોધવા માંગીએ છીએ તેથી $5 + 1 = 6$ ને છેદ તરીકે લઈને 1 અને 2 ને છેદમાં 6 હોય તેવી સમાન સંમેય સંખ્યાના સ્વરૂપમાં લખીએ એટલે કે $1 = \frac{6}{6}$ અને $2 = \frac{12}{6}$. તેથી આપણે કહી શકીએ કે $\frac{7}{6}, \frac{8}{6}, \frac{9}{6}, \frac{10}{6}, \frac{11}{6}$ એ બધી સંખ્યાઓ 1 અને 2 વચ્ચેની સંમેય સંખ્યાઓ છે. તેથી માંગેલ પાંચ સંખ્યાઓ $\frac{7}{6}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}$ અને $\frac{11}{6}$ છે.

નોંધ : ધ્યાન રાખો કે ઉદાહરણ 2 માં 1 અને 2 વચ્ચેની ફક્ત પાંચ સંમેય સંખ્યાઓ જ શોધવાનું કહ્યું છે. પરંતુ આપને સમજાયું હશે કે 1 અને 2 વચ્ચે અસંખ્ય સંમેય સંખ્યાઓ હોય છે. વ્યાપક રીતે કહીએ તો આપેલ બે સંમેય સંખ્યાઓ વચ્ચે અનંત સંમેય સંખ્યાઓ હોય છે.

હવે આપણે ફરીથી સંખ્યારેખાને નિહાળીએ. શું આપણે આ રેખા પરની બધી જ સંખ્યાઓને લઈ લીધી છે ? ના, હજુ સુધી તો નહિ જ. તેનું કારણ એ છે કે સંખ્યારેખા પર હજુ ઘણીબધી સંખ્યાઓ બાકી રહી છે. તમે જે સંખ્યાઓ ઊંચકેલી તેમની વચ્ચે ખાલી જગ્યા રહી છે અને આ ખાલી જગ્યામાં ફક્ત એક કે બે નહી પરંતુ અનંત સંખ્યાઓ રહેલી છે. આશ્ચર્યજનક બાબત એ છે કે કોઈ પણ બે સ્થાનોની વચ્ચે અગણિત અનંત સંખ્યાઓ આવેલી છે !

તેથી આપણી સામે નીચે પ્રકારના પ્રશ્નો રહે છે :

1. સંખ્યારેખા પર બાકી રહેલી સંખ્યાઓને શું કહી શકાય ?
2. તેમને આપણે કેવી રીતે ઓળખીશું ? એટલે કે આપણે આ સંખ્યાઓને સંમેય સંખ્યાઓથી કેવી રીતે જુદી પાડીશું ?

આ પ્રશ્નોના ઉત્તર હવે પછીના વિભાગમાં આપીશું.

સ્વાધ્યાય 1.1

1. શું શૂન્ય એ એક સંમેય સંખ્યા છે ? શું તમે તેને p પૂર્ણાંક તથા q શૂન્યેતર પૂર્ણાંક હોય તેવા p, q માટે $\frac{p}{q}$ સ્વરૂપમાં લખી શકશો ?
2. 3 અને 4 વચ્ચેની છ સંમેય સંખ્યાઓ શોધો.
3. $\frac{3}{5}$ અને $\frac{4}{5}$ વચ્ચેની પાંચ સંમેય સંખ્યાઓ શોધો.
4. નીચેનાં વિધાનો સત્ય છે કે અસત્ય ? કારણ સહિત ઉત્તર આપો.

   (i) દરેક પ્રાકૃતિક સંખ્યા એ પૂર્ણ સંખ્યા છે.

   (ii) દરેક પૂર્ણાંક એ પૂર્ણ સંખ્યા છે.

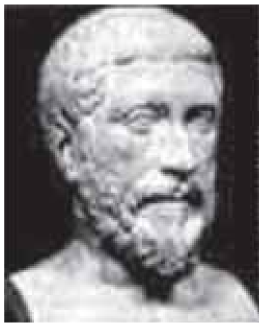
   (iii) દરેક સંમેય સંખ્યા એ પૂર્ણ સંખ્યા છે.

1.2 અસંમેય સંખ્યાઓ

આ પહેલાનાં વિભાગમાં આપણે જોયું કે સંખ્યારેખા પર જે સંમેય સંખ્યા ન હોય તેવી સંખ્યાઓ પણ હોય છે.

હવે આપણે આવી સંખ્યાઓની ચર્ચા કરીશું. p અને q પૂર્ણાંક હોય અને $q \neq 0$ હોય તેવા p, q માટે આપણે $\frac{p}{q}$ સ્વરૂપની સંખ્યાઓની ચર્ચા કરી છે. આથી તમને એવો પ્રશ્ન થાય કે શું જે આ સ્વરૂપમાં ન હોય એવી પણ સંખ્યાઓ છે? ખરેખર તેવી સંખ્યાઓ હોય છે.

The Pythagoreans in Greece, followers of the famous mathematician and philosopher Pythagoras, were the first to discover the numbers which were not rationals, around 400 BC. These numbers are called *irrational numbers* (*irrationals*), because they cannot be written in the form of a ratio of integers. There are many myths surrounding the discovery of irrational numbers by the Pythagorean, Hippacus of Croton. In all the myths, Hippacus has an unfortunate end, either for discovering that $\sqrt{2}$ is irrational or for disclosing the secret about $\sqrt{2}$ to people outside the secret Pythagorean sect!



Pythagoras
(569 BCE – 479 BCE)
આકૃતિ 1.3

તો ચાલો આપણે આ સંખ્યાઓને વિધિવત્ વ્યાખ્યાયિત કરીએ :

જો સંખ્યા s ને p પૂર્ણાંક અને q શૂન્યેતર પૂર્ણાંક હોય તેવા p, q માટે $\frac{p}{q}$ સ્વરૂપમાં મૂકી ના શકાય તો તેવી સંખ્યા s ને *અસંમેય* સંખ્યા કહે છે.

તમે જાણો છો કે સંમેય સંખ્યાઓ અનંત હોય છે. એવી જ રીતે અસંમેય સંખ્યાઓ પણ અનંત હોય છે. અસંમેય સંખ્યાનાં કેટલાંક ઉદાહરણો આ પ્રમાણે છે :

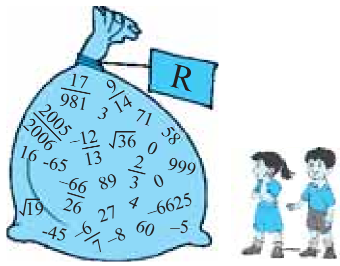
$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{15}, \pi, 0.10110111011110...$

નોંધ : તમને યાદ હશે કે જ્યારે આપણે $\sqrt{}$, ના સંકેતનો ઉપયોગ કરીએ છીએ ત્યારે એ સ્વીકારી લઈએ છીએ કે સંદર્ભની સંખ્યાનું વર્ગમૂળ એ ધન વર્ગમૂળ છે. $\sqrt{4} = 2$ છે, પરંતુ 2 અને -2 એ બંને 4નાં વર્ગમૂળ તો છે જ.

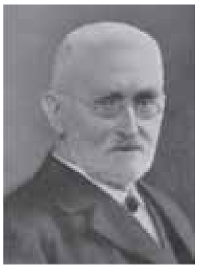
ઉપર આપેલી કેટલીક અસંમેય સંખ્યાઓ વિશે તમે જાણો છો. ઉદાહરણ તરીકે ઉપરની યાદીની સંખ્યામાં આવેલાં વર્ગમૂળ વિશે અને સંખ્યા π વિશે તમે અગાઉથી જાણો જ છો.

પાયથાગોરસના અનુયાયીઓએ $\sqrt{2}$ એ અસંમેય સંખ્યા છે તે સાબિત કર્યું હતું. ત્યાર બાદ ઈ. પૂ. 425 ની આસપાસ સાઈરિનના નિવાસી ***Theodorus*** એ સાબિત કર્યું કે $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{10}, \sqrt{11}, \sqrt{12}, \sqrt{13}, \sqrt{14}, \sqrt{15}$ અને $\sqrt{17}$ પણ અસંમેય સંખ્યાઓ છે. $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ વગેરે અસંમેય છે તેની સાબિતી માટે આપણે ધોરણ10 માં ચર્ચા કરીશું. જો π ની વાત કરીએ તો હજારો વર્ષોથી વિવિધ સંસ્કૃતિઓ તેનાથી પરિચિત છે. પરંતુ ઈ.સ.1700 ના અંતમાં જ ***Lambert*** અને ***Legendre*** એ π તે એક અસંમેય સંખ્યા છે તેમ સાબિત કર્યું હતું. હવે આપણે 0.10110111011110... અને π એ અસંમેય સંખ્યા કેમ છે તેની ચર્ચા આગળના વિભાગમાં કરીશું.

ચાલો આપણે પાછળના વિભાગના અંતમાં ઉપસ્થિત કરેલા પ્રશ્નો પર ફરી વિચાર કરીએ. તેના માટે સંમેય સંખ્યાવાળો થેલો લો. જો આ થેલામાં આપણે અસંમેય સંખ્યાઓ પણ મૂકી દઈએ. તો શું સંખ્યારેખા પર હજુ કોઈ સંખ્યા બાકી રહેશે ? આનો જવાબ છે 'ના'. આમ, એક સાથે લેવામાં આવેલી સંમેય સંખ્યા અને અસંમેય સંખ્યાનો જે સમૂહ મળે છે તેને ***વાસ્તવિક સંખ્યાઓ**નો સમૂહ* (*Real numbers*) કહેવામાં આવે છે. તેને R વડે દર્શાવવામાં આવે છે.



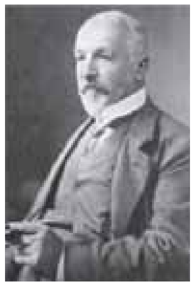
આમ, વાસ્તવિક સંખ્યાઓ સંમેય અથવા અસંમેય સંખ્યાઓ હોઈ શકે છે. આપણે કહી શકીએ કે **પ્રત્યેક વાસ્તવિક સંખ્યાનું સંખ્યારેખા પરના એક અનન્ય બિંદુ તરીકે નિરૂપણ કરી શકાય છે. એવી જ રીતે સંખ્યારેખાનું પ્રત્યેક બિંદુ એ એક વાસ્તવિક સંખ્યા દર્શાવે છે.** આ કારણથી જ સંખ્યારેખાને ***વાસ્તવિક સંખ્યારેખા*** (*real number-line*) કહેવામાં આવે છે.



(R.Dedekind (1831-1916)

આકૃતિ 1.4

In the 1870s two German mathematicians, Cantor and Dedekind, showed that : Corresponding to every real number, there is a point on the real number line, and corresponding to every point on the number line, there exists a unique real number.



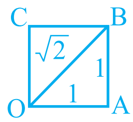
(G. Cantor (1845-1918)

આકૃતિ 1.5

હવે આપણે જોઈશું કે સંખ્યારેખા પર અસંમેય સંખ્યાને કેવી રીતે દર્શાવી શકાય.

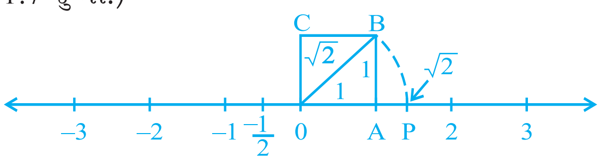
ઉદાહરણ 3 : સંખ્યારેખા પર $\sqrt{2}$ દર્શાવો.

ઉકેલ : એ સરળતાથી જોઈ શકાય છે કે કેવી રીતે ગ્રીસના લોકોએ $\sqrt{2}$ ની શોધ કરી હશે. એક એકમ લંબાઈની બાજુઓવાળા ચોરસ OABC (આકૃતિ 1.6 જુઓ)નો વિચાર કરો.



આકૃતિ.1.6

તમે પાયથાગોરસ પ્રમેય પરથી જોઈ શકો છો કે $OB = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. વિચાર કરો કે સંખ્યારેખા પર તમે $\sqrt{2}$ નું નિરૂપણ કેવી રીતે કરશો? આ ખૂબ જ સરળ છે. આકૃતિ 1.6 ને સંખ્યારેખા પર એવી રીતે લઈ જાવ કે જેથી શિરોબિંદુ O શૂન્ય પર આવે.(આકૃતિ 1.7 જુઓ.)



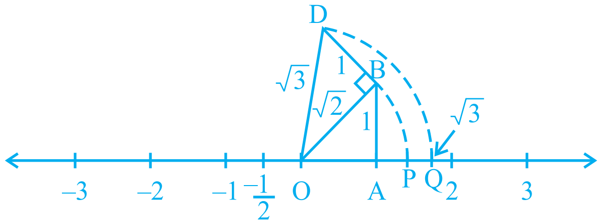
આકૃતિ 1.7

આપણે હમણાં જ જોયું છે કે $OB = \sqrt{2}$. પરિકર દ્વારા O ને કેન્દ્ર લઈ OB જેટલી ત્રિજ્યા લઈ સંખ્યારેખાને

P માં છેદતું ચાપ દોરીએ ત્યારે મળતું સંખ્યારેખા પરનું બિંદુ P એ $\sqrt{2}$ ને સંગત બિંદુ થાય છે.

ઉદાહરણ 4 : સંખ્યારેખા પર $\sqrt{3}$ દર્શાવો.

ઉકેલ : ફરી પાછા આકૃતિ 1.7 પર આવીએ.



આકૃતિ 1.8

OB પર એકમ લંબાઈનો લંબ BD દોરીએ. (આકૃતિ 1.8) પાયથાગોરસ પ્રમેય પ્રમાણે OD $=\sqrt{(\sqrt{2})^2+1^2}=\sqrt{3}$ મળે. પરિકરથી O કેન્દ્ર અને OD જેટલી ત્રિજ્યા લઈ સંખ્યારેખાને Q માં છેદતું એક ચાપ દોરીએ. તેથી બિંદુ Q એ $\sqrt{3}$ ને સંગત છે. આ જ પ્રમાણે n કોઈ ધન પૂર્ણાંક હોય તો $\sqrt{n-1}$ નું નિરૂપણ કર્યા પછી $\sqrt{n}$ નું નિરૂપણ સંખ્યારેખા પર કરી શકાય છે.

સ્વાધ્યાય 1.2

1. નીચેનાં વિધાનો સત્ય છે કે અસત્ય ? કારણ સહિત ઉત્તર આપો.

   (i) દરેક અસંમેય સંખ્યા એ વાસ્તવિક સંખ્યા છે.

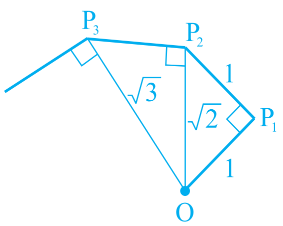
   (ii) સંખ્યારેખા પરનું દરેક બિંદુ કોઈક પ્રાકૃતિક સંખ્યા m માટે $\sqrt{m}$ સ્વરૂપનું હોય છે.

   (iii) દરેક વાસ્તવિક સંખ્યા એ અસંમેય સંખ્યા છે.

2. શું દરેક ધન પૂર્ણાંકનું વર્ગમૂળ અસંમેય હોય છે ? જો ના, તો એવી એક સંખ્યાનું ઉદાહરણ આપો જેનું વર્ગમૂળ સંમેય સંખ્યા હોય?

3. $\sqrt{5}$ ને સંખ્યારેખા પર કેવી રીતે દર્શાવી શકાય તે બતાવો.

4. **વર્ગ-પ્રવૃત્તિ : વર્ગમૂળ કુંતલની *(Spiral)* રચના :** એક મોટો કાગળ લો અને નીચે બતાવેલી પદ્ધતિથી 'વર્ગમૂળ કુંતલ'ની રચના કરો. સૌથી પહેલાં એક બિંદુ O લો અને એકમ લંબાઈનો રેખાખંડ OP_1 દોરો. OP_1 ને લંબ હોય તેવો એકમ લંબાઈનો રેખાખંડ P_1P_2 દોરો. (આકૃતિ 1.9 જુઓ.) હવે રેખાખંડ OP_2 પર એકમ લંબાઈનો લંબ રેખાખંડ P_2P_3 દોરો. ત્યાર પછી રેખાખંડ OP_3 પર એકમ લંબાઈનો લંબ રેખાખંડ P_3P_4 દોરો. આ જ રીતે આ પ્રક્રિયા ચાલુ રાખીને રેખાખંડ OP_{n-1} પર એકમ લંબાઈનો લંબ રેખાખંડ $P_{n-1}P_n$ મેળવી શકાય છે. આમ, આપણે O, P_1, P_2, P_3... P_n.... બિંદુઓ મેળવી શકીશું અને તેમને જોડતાં $\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{4},....$ ને દર્શાવતું સુંદર વર્ગમૂળ કુંતલ મળશે.



આકૃતિ 1.9
વર્ગમૂળ કુંતલની રચના

1.3 વાસ્તવિક સંખ્યા અને તેની દશાંશ-અભિવ્યક્તિ

આ વિભાગમાં એક જુદા પ્રકારના દૃષ્ટિકોણથી સંમેય અને અસંમેય સંખ્યાઓનો અભ્યાસ કરીશું. તેના માટે આપણે વાસ્તવિક સંખ્યાઓની દશાંશ- અભિવ્યક્તિ નો વિચાર કરીશું અને નક્કી કરીશું કે આપણે સંમેય અને અસંમેય સંખ્યાઓને અલગ પાડવા આ અભિવ્યક્તિનો ઉપયોગ કરી શકીએ કે નહિ. આપણે દશાંશ અભિવ્યક્તિનો ઉપયોગ કરીને વાસ્તવિક સંખ્યાઓને સંખ્યારેખા પર કેવી દર્શાવી શકીએ તેનો પણ અભ્યાસ કરીશું. આપણે સંમેય સંખ્યાઓથી વધારે પરિચિત હોવાથી,આપણી ચર્ચા તેવી સંખ્યાઓથી શરૂ કરીશું.

અહીં તેનાં ત્રણ ઉદાહરણો આપેલાં છે : $\frac{10}{3}, \frac{7}{8}, \frac{1}{7}$. તેના ભાગફળનો વિચાર કરીએ તો આપણે તેમાં કોઈ ચોક્કસ માળખું મેળવી શકીએ છીએ.

ઉદાહરણ 5 : $\frac{10}{3}$, $\frac{7}{8}$ અને $\frac{1}{7}$ ની દશાંશ અભિવ્યક્તિ મેળવો.

ઉકેલ :

```
     3.333...          0.875            0.142857...
   ---------          ------           -----------
 3 | 10           8 | 7.0          7 | 1.0
      9               64                7
    ---              ---              ---
     10               60               30
      9               56               28
    ---              ---              ---
     10                40               20
      9                40               14
    ---              ---              ---
     10                 0               60
      9                                 56
    ---                               ---
      1                                 40
                                        35
                                      ---
                                        50
                                        49
                                      ---
                                         1
```

શેષ : 1, 1, 1, 1, 1...
ભાજક : 3

શેષ : 6, 4, 0
ભાજક : 8

શેષ : 3, 2, 6, 4, 5, 1, 3, 2, 6, 4, 5, 1......
ભાજક : 7

અહીં તમે શું અવલોકન કર્યું ? તમારે ઓછામાં ઓછી ત્રણ વિગતોનું અવલોકન કરવું જોઈએ.

(i) અમુક પગલાં પછી શેષ 0 બને અથવા તેમનું પુનરાવર્તન થવાનું શરૂ થાય છે.

(ii) શેષ તરીકે પુનરાવર્તિત અંકોના જૂથમાં અંકોની સંખ્યા ભાજક કરતાં નાની હોય ($\frac{1}{3}$ માં એક અંકનું પુનરાવર્તન થાય છે અને ભાજક 3 છે. $\frac{1}{7}$ ના ભાગફળમાં 326451 એવા છ અંકોના જૂથનું પુનરાવર્તન થાય છે. 7 એ ભાજક છે.)

(iii) જો શેષ પુનરાવર્તિત હોય તો ભાગફળમાં અંક અથવા અંકોના જૂથનું પુનરાવર્તન થાય છે.($\frac{1}{3}$ના ભાગફળમાં 3 નું પુનરાવર્તન થાય છે અને $\frac{1}{7}$ માટે ભાગફળનું પુનરાવર્તન જૂથ 142857 મળે છે.)

આપણે ફક્ત ઉપરોક્ત ઉદાહરણો દ્વારા જ આ પ્રકારની તરાહ મેળવી છે. તેમ છતાં તે $q \neq 0$ માટે $\frac{p}{q}$ સ્વરૂપની બધી સંમેય સંખ્યાઓ માટે પણ એ સત્ય છે. જો આપણે p ને q વડે ભાગીએ તો શેષ શૂન્ય મળે અથવા ક્યારેય શૂન્ય ન મળે અને અમુક તબક્કા પછી શેષના જૂથનું પુનરાવર્તન થાય છે.

હવે આપણે દરેક વિકલ્પનાં વિવિધ ઉદાહરણ જોઈએ.

વિકલ્પ 1 : શેષ શૂન્ય થાય છે.

$\frac{7}{8}$ વાળા ઉદાહરણમાં આપણે જોયું કે કેટલાંક પગલાં પછી શેષ શૂન્ય થઈ જાય છે અને $\frac{7}{8}$ ની દશાંશ-અભિવ્યક્તિ $\frac{7}{8} = 0.875$ છે. અન્ય ઉદાહરણો $\frac{1}{2} = 0.5$, $\frac{639}{250} = 2.556$ છે. અમુક પગલાં પછી આ બધી સંખ્યાઓની દશાંશ-અભિવ્યક્તિ સાંત બને છે. આપણે આવી દશાંશ-અભિવ્યક્તિને ***સાન્ત દશાંશ અભિવ્યક્તિ****(terminating decimal* ***expression****)* કહીશું.

વિકલ્પ 2 : શેષ ક્યારેય શૂન્ય ન થાય.

$\frac{1}{3}$ અને $\frac{1}{7}$ વાળા ઉદાહરણમાં આપણે જોયું કે અમુક ચોક્કસ સોપાન પછી શેષ પુનરાવર્તિત થાય છે અને દશાંશ-અભિવ્યક્તિ સતત આગળ ચાલે છે. બીજા શબ્દોમાં કહીએ તો આવી દશાંશ અભિવ્યક્તિમાં ભાગફળમાં અંકોનું પુનરાવર્તિત જૂથ મળે છે. આ પ્રકારની દશાંશ અભિવ્યક્તિને ***અનંત આવૃત*** (*Non-terminating Recurring*) કહીશું. ઉદાહરણ તરીકે $\frac{1}{3} = 0.3333...$ અને $\frac{1}{7} = 0.142857142857142857...$ છે. $\frac{1}{3}$ ની દશાંશ-અભિવ્યક્તિમાં તેના ભાગફળમાં અંક 3નું પુનરાવર્તન થાય છે તેવું બતાવવા આપણે $\frac{1}{3}$ ને $0.\overline{3}$ રીતે લખીશું. તે જ પ્રમાણે $\frac{1}{7}$ ના ભાગફળમાં 142857 નું જૂથ પુનરાવર્તિ થાય છે. તેને દર્શાવવા આપણે $\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$ રીતે લખીશું. અહીં અંક કે અંકો પર દોરેલી લીટી ($\bar{\ }$) જે તે અંક કે અંકોના સમૂહનું પુનરાવર્તન દર્શાવે છે. એ જ રીતે 3.57272...ને $3.5\overline{72}$ તરીકે લખીશું. આમ, આ બધાં ઉદાહરણોમાં દશાંશ અભિવ્યક્તિઓ અનંત આવૃત (પુનરાવર્તિત) મળે છે.

આમ, આપણે જોયું કે સંમેય સંખ્યાઓની દશાંશ-અભિવ્યક્તિ માટે માત્ર બે વિકલ્પો સાન્ત અથવા અનંત આવૃત હોય છે.

આથી ઊલટું તમે માની લો કે સંખ્યારેખા પર ચાલતાં તમને 3.142678 જેવી સંખ્યા મળે છે. તેની દશાંશ-અભિવ્યક્તિ સાન્ત છે અથવા 1.272727... એટલે કે $1.\overline{27}$ જેવી સંખ્યા મળે છે. તેની દશાંશ-અભિવ્યક્તિ અનંત આવૃત છે. શું આ પરથી તમે તારવી શકશો કે આ સંખ્યાઓ સંમેય છે ? તેનો જવાબ હા છે. તેને સાબિત નહીં કરીએ પરંતુ કેટલાંક ઉદાહરણ પરથી આ હકીકતને સમજીશું. સાન્ત અભિવ્યક્તિના કિસ્સાઓ સરળ છે.

ઉદાહરણ 6 : સાબિત કરો કે 3.142678 સંમેય સંખ્યા છે. બીજા શબ્દોમાં, p પૂર્ણાંક હોય અને q શૂન્યેતર પૂર્ણાંક હોય તે પ્રમાણે 3.142678 ને $\frac{p}{q}$ સ્વરૂપમાં દર્શાવો.

ઉકેલ : અહીં $3.142678 = \frac{3142678}{1000000}$ છે અને તેથી તે એક સંમેય સંખ્યા છે.

હવે આપણે અનંત આવૃત દશાંશ-અભિવ્યક્તિ લઈએ.

ઉદાહરણ 7 : સાબિત કરો કે $0.3333... = 0.\overline{3}$ ને p પૂર્ણાંક હોય અને q શૂન્યેતર પૂર્ણાંક હોય તેવા p, q માટે $\frac{p}{q}$ સ્વરૂપમાં દર્શાવી શકાય છે.

ઉકેલ : $0.\overline{3}$ શું છે તે આપણે જાણતા ન હોવાથી, આપણે તેને x લઈએ અને તેથી $x = 0.3333...$

આપણે અહીં કોઈ યુક્તિનો પ્રયોગ કરીએ. જુઓ કે

$$10x = 10 \times (0.3333...) = 3.3333...$$

હવે, $3.3333... = 3 + 0.3333...$

$\therefore 10x = 3 + x$ જ્યાં $x = 3.3333...$

તેથી x માં ઊકેલ મેળવવા માટે $9x = 3$ એટલે કે $x = \frac{1}{3}$ મળે.

ઉદાહરણ 8 : સાબિત કરો કે $1.272727... = 1.\overline{27}$ ને p પૂર્ણાંક હોય, q શૂન્યેતર પૂર્ણાંક હોય તેવાં p, q માટે $\frac{p}{q}$ સ્વરૂપમાં દર્શાવી શકાય છે.

ઉકેલ : ધારો કે $x = 1.272727...$

અહીં બે અંકોનું પુનરાવર્તન થાય છે તેથી આપણે બંને બાજુ 100 વડે ગુણીએ, તો

$$100x = 127.2727..$$

તેથી, $100x = 126 + 1.2727... = 126 + x$

$\therefore 100x - x = 126$

$\therefore \quad 99x = 126$

એટલે કે $x = \frac{126}{99} = \frac{14}{11}$ મળે.

એનાથી ઊલટું તમે $\frac{14}{11} = 1.\overline{27}$ પણ ચકાસી શકો છો.

ઉદાહરણ 9 : સાબિત કરો કે $0.2353535 = 0.2\overline{35}$ ને p પૂર્ણાંક હોય, q શૂન્યેતર પૂર્ણાંક હોય તેવા p, q માટે $\frac{p}{q}$ સ્વરૂપમાં દર્શાવી શકાય છે.

ઉકેલ : ધારો કે $x = 0.2353535 = 0.2\overline{35}$. અહીં જુઓ કે 2 પુનરાવર્તિત થતો નથી, પરંતુ સંખ્યાજૂથ 35 નું પુનરાવર્તન થાય છે. અહીં બે અંક પુનરાવર્તિત થાય છે. તેથી x ને 100 વડે ગુણવામાં આવે છે. આમ આપણને

$100x = 23.53535...$ મળશે.

$$100x = 23.3 + 0.23535... = 23.3 + x$$

એટલે કે, $99x = 23.3$

માટે $99x = \frac{233}{10}$ જેથી $x = \frac{233}{990}$ મળશે.

હવે આનાથી ઊલટું એટલે કે $\frac{233}{990} = 0.2\overline{35}$ પણ સાબિત કરી શકાય છે.

આમ, અનંત આવૃત દશાંશ-અભિવ્યક્તિ વાળી દરેક સંખ્યાને p પૂર્ણાંક હોય, q શૂન્યેતર પૂર્ણાંક હોય તેવા p, q માટે $\frac{p}{q}$ સ્વરૂપમાં દર્શાવી શકાય છે. તો ચાલો આપણે ઉપરનાં પરિણામો પરથી સંક્ષિપ્તમાં નીચે પ્રમાણેનો સારાંશ મેળવીએ.

કોઈ પણ સંમેય સંખ્યાની દશાંશ-અભિવ્યક્તિ કાં તો સાન્ત હોય છે અથવા અનંત આવૃત હોય છે. ઉપરાંત જે સંખ્યાની દશાંશ-અભિવ્યક્તિ સાન્ત હોય અથવા અનંત આવૃત હોય તે એક સંમેય સંખ્યા હોય છે.

હવે આપણે જાણીએ છીએ કે સંમેય સંખ્યાની દશાંશ-અભિવ્યક્તિ કેવી રીતે મળે છે. પરંતુ હવે એ પ્રશ્ન થાય છે કે અસંમેય સંખ્યાની દશાંશ-અભિવ્યક્તિ કેવી રીતે મળી શકે ? ઉપર જણાવ્યા મુજબ એવો નિષ્કર્ષ મળે છે કે આવી સંખ્યાની દશાંશ-અભિવ્યક્તિ ***અનંત અને અનાવૃત*** (*non-terminating non-recurring*) છે. ઉપર બતાવ્યા પ્રમાણે અસંમેય સંખ્યાના ગુણધર્મો સંમેય સંખ્યાના ગુણધર્મો જેવા જ છે.

અસંમેય સંખ્યાની દશાંશ-અભિવ્યક્તિ અનંત અને અનાવૃત હોય છે. ઉપરાંત જે સંખ્યાની દશાંશ-અભિવ્યક્તિ અનંત અને અનાવૃત હોય તે અસંમેય સંખ્યા છે.

અગાઉના વિભાગમાં આપણે એક અસંમેય સંખ્યા $s = 0.10110111011110...$ લીધી હતી. આપણે એ ખાસ નોંધીએ કે આ સંખ્યા અનંત અને અનાવૃત દશાંશ છે. તેથી ઉપર બતાવેલ ગુણધર્મ પરથી તે અસંમેય સંખ્યા છે. ઉપરાંત એ પણ ધ્યાન રાખો કે આપણે તેના જેવી ઘણીબધી અસંમેય સંખ્યાઓનું સર્જન કરી શકીએ છીએ.

જાણીતી અસંમેય સંખ્યાઓ $\sqrt{2}$ અને π વિશે તમે શું જાણો છો ? અહીં આપણે કેટલાક દશાંશ સ્થાન સુધી તેમની દશાંશ-અભિવ્યક્તિ બતાવેલી છે.

$$\sqrt{2} = 1.4142135623730950488016887242096...$$

$$\pi = 3.14159265358979323846264338327950...$$

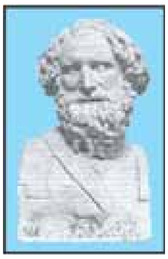
(નોંધીએ કે $\frac{22}{7}$ એ π નું આશરે પડતું(આસન્ન) મૂલ્ય છે પરંતુ $\pi \neq \frac{22}{7}$)

ગણિતશાસ્ત્રીઓએ ઘણા વર્ષથી અસંમેય સંખ્યાઓની દશાંશ-અભિવ્યક્તિમાં વધુમાં વધુ અંકો મળે તે માટેની ભિન્ન-ભિન્ન પધ્ધતિઓ વિકસાવી છે. ઉદાહરણ તરીકે તમે ભાગાકારની રીતે $\sqrt{2}$ ની દશાંશ-અભિવ્યક્તિ મેળવવાનું શીખી ગયા હશો. રસપ્રદ વાત એ પણ છે જે વૈદિક યુગ (ઈ.પૂ. 800 થી ઈ.પૂ. 500) ના ગાણિતિક ગ્રંથ સૂલ્બાસૂત્રો(જીવાના નિયમો)માં છે તે $\sqrt{2}$ ની લગભગ નજીકની કિંમત તમે જોઈ શકો છો અને તે આ પ્રમાણે છે.

$$\sqrt{2}=1+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{34}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}\right)=1.4142156$$

તમે અવલોકન કરશો તો આ કિંમતનાં પ્રથમ પાંચ સ્થાન આગળ આપેલી $\sqrt{2}$ ની દશાંશ-અભિવ્યક્તિના પ્રથમ પાંચ સ્થાનને સમાન જ છે. π ના દશાંશ વિસ્તરણમાં અંકોની શોધનો એક રસપ્રદ ઇતિહાસ છે.

The Greek genius Archimedes was the first to compute digits in the decimal expansion of π. He showed $3.140845 < \pi < 3.142857$. Aryabhatta (476 – 550 C.E.), the great Indian mathematician and astronomer, found the value of π correct to four decimal places (3.1416). Using high speed computers and advanced algorithms, π has been computed to over 1.24 trillion decimal places!



Archimedes (287 BCE – 212 BCE)

આકૃતિ 1.10

હવે આપણે અસંમેય સંખ્યાઓ કેવી રીતે મેળવી શકાય તે જોઈશું.

ઉદાહરણ 10 : $\frac{1}{7}$ અને $\frac{2}{7}$ વચ્ચેની એક અસંમેય સંખ્યા શોધો.

ઉકેલ : આપણે જોયું કે $\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$ છે. આથી, એકદમ સરળતાથી $\frac{2}{7}=0.\overline{285714}$ ની ગણતરી તમે કરી શકશો.

$\frac{1}{7}$ અને $\frac{2}{7}$ વચ્ચે એક અસંમેય સંખ્યા શોધવા માટે એક એવી સંખ્યા લઈએ કે જે આ સંખ્યાઓની વચ્ચે એક અનંત અનાવૃત સંખ્યા હોય. અલબત્ત, તમે આવી અનંત સંખ્યાઓ શોધી શકશો. આવી એક સંખ્યાનું ઉદાહરણ 0.150150015000150000... છે.

સ્વાધ્યાય 1.3

1. નીચેની સંખ્યાઓને દશાંશ સ્વરૂપમાં લખો અને તે કેવા પ્રકારની દશાંશ-અભિવ્યક્તિ છે તે જણાવો.

   (i) $\frac{36}{100}$ (ii) $\frac{1}{11}$ (iii) $4\frac{1}{8}$

   (iv) $\frac{3}{13}$ (v) $\frac{2}{11}$ (vi) $\frac{329}{400}$

2. તમે જાણો છો કે $\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$ છે. શું તમે ખરેખર ભાગાકારની લાંબી પ્રક્રિયા કર્યા વગર $\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7}$ ની દશાંશ-અભિવ્યક્તિ શું મળશે તેનું અનુમાન કરી શકશો ? જો હા, તો કેવી રીતે ?

   (**સૂચન :** $\frac{1}{7}$ નું મૂલ્ય મેળવતી વખતે મળતી શેષનું અવલોકન કરો)

3. p પૂર્ણાંક હોય, q શૂન્યેતર પૂર્ણાંક હોય તેવા $\frac{p}{q}$ સ્વરૂપમાં નીચેની સંખ્યાને દર્શાવો.

   (i) $0.\overline{6}$ (ii) $0.4\overline{7}$ (iii) $0.\overline{001}$

4. 0.99999..... ને $\frac{p}{q}$ સ્વરૂપમાં દર્શાવો. શું તમને તમારા ઉત્તરથી આશ્ચર્ય થાય છે ? તમારા શિક્ષક અને વર્ગના સહ-અધ્યાયીઓ સાથે તમારા જવાબની સત્યાર્થતાની ચર્ચા કરો.

5. $\frac{1}{17}$ ની દશાંશ-અભિવ્યક્તિમાં પુનરાવર્તિત અંકોની સંખ્યા વધુમાં વધુ કેટલી હશે ? તમારો જવાબ ભાગાકાર કરીને ચકાસો.

6. જેમાં p અને q ને 1 સિવાયનો કોઈ સામાન્ય અવયવ ન હોય તથા જેની દશાંશ અભિવ્યક્તિ સાન્ત હોય તેવા $\frac{p}{q}$ $(q \neq 0)$ સ્વરૂપના સંમેય સંખ્યાનાં કેટલાંક ઉદાહરણ લો. (જ્યાં p અને q પૂર્ણાંક છે અને $q \neq 0$ છે.) શું તમે અનુમાન લગાવી શકો છો કે q એ કયા ગુણધર્મનું પાલન કરવું જોઈએ ?

7. જેની દશાંશ અભિવ્યક્તિ અનંત અનાવૃત હોય તેવી ત્રણ સંખ્યાઓ લખો.

8. સંમેય સંખ્યાઓ $\frac{5}{7}$ અને $\frac{9}{11}$ ની વચ્ચે આવેલી ત્રણ ભિન્ન અસંમેય સંખ્યાઓ શોધો.

9. નીચેની સંખ્યાઓનું સંમેય અને અસંમેય સંખ્યાઓમાં વર્ગીકરણ કરો.

(i) $\sqrt{23}$ (ii) $\sqrt{225}$ (iii) 0.3796

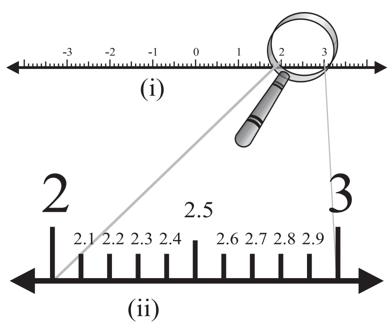
(iv) 7.478478... (v) 1.101001000100001...

1.4 સંખ્યારેખા પર વાસ્તવિક સંખ્યાનું નિરૂપણ

અગાઉના વિભાગમાં આપણે જોયું કે કોઈ પણ વાસ્તવિક સંખ્યાને એક દશાંશ-અભિવ્યક્તિ હોય છે. તેની મદદથી વાસ્તવિક સંખ્યાનું સંખ્યારેખા પર નિરૂપણ કરી શકાય છે. તો ચાલો આપણે જોઈએ કે કેવી રીતે તેનું નિરૂપણ કરી શકાય.

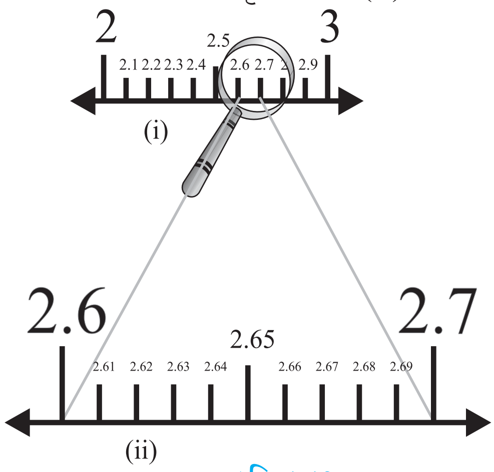
માનો કે આપણે સંખ્યારેખા પર 2.665નું નિરૂપણ કરવા માંગીએ છીએ. આપણે જાણીએ છીએ કે આ સંખ્યા 2 અને 3 ની વચ્ચે રહેલી છે.

હવે આપણે 2 અને 3 ની વચ્ચેના સંખ્યારેખાના ભાગને ધ્યાનથી જોઈએ. ધારો કે, આ ભાગને બરાબર એક સરખા 10 ભાગમાં વિભાજિત કરીને તેને આકૃતિ 1.11 (i) માં બતાવ્યા પ્રમાણે આંકીએ ત્યારે 2 ની જમણી બાજુનો પ્રથમ આંક 2.1 દર્શાવે છે. બીજો આંક 2.2 દર્શાવે છે અને તે પ્રમાણે આગળ. તમને આકૃતિ 1.11 (i)માં 2 અને 3 વચ્ચેના વિભાજિત ભાગને જોવામાં તકલીફ પડતી હશે. તેને સ્પષ્ટ જોવા માટે તમે એક ***વિપુલ દર્શક કાચ*** (*Magnifying glass*)નો ઉપયોગ કરી ને 2 અને 3 વચ્ચેના ભાગને જોઈ શકો છો. તમને આકૃતિ 1.11 (ii) માં છે તેવું દેખાશે. હવે 2.665 એ 2.6 અને 2.7 ની વચ્ચે છે. આથી આપણે 2.6 અને 2.7 વચ્ચે ધ્યાન કેન્દ્રિત કરીએ. [આકૃતિ 1.12(i) જુઓ] આપણે ફરીથી તે ભાગને 10 સરખા ભાગમાં વિભાજિત કરીશું. પહેલો આંક 2.61 દર્શાવે,



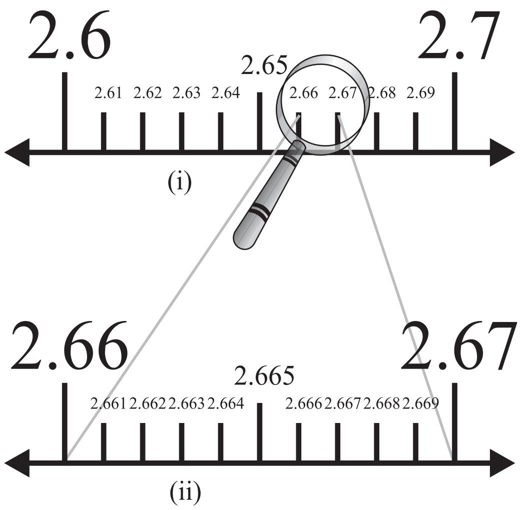
આકૃતિ 1.11

બીજો આંક 2.62 વગેરે. તેને સ્પષ્ટ જોવા માટે આપણે આકૃતિ 1.12 (ii) પ્રમાણે તે ભાગને મોટો કરીશું.



આકૃતિ 1.12

હવે ફરીથી 2.665 એ 2.66 અને 2.67 ની વચ્ચે છે. તેથી આપણે સંખ્યારેખા પર તે ભાગ પર ધ્યાન કેન્દ્રિત કરીએ. [આકૃતિ 1.13(i) જુઓ] અને કલ્પના કરો કે આ ભાગને 10 એક સરખા ભાગમાં વિભાજિત કરેલો છે. તેને સ્પષ્ટ રીતે જોવા માટે તે ભાગને મોટો કરીએ. જે આકૃતિ 1.13(ii) માં બતાવ્યુ છે. પહેલો આંક 2.661 દર્શાવે છે ત્યાર પછીનો આંક 2.662 અને તે પ્રમાણે આગળ. આથી આ પ્રકારના પેટા વિભાજનમાં પાંચમો ભાગ 2.665 નું નિરૂપણ કરે છે.



આકૃતિ 1.13

આમ વિપુલ દર્શક કાચની મદદથી સંખ્યારેખા પર સંખ્યાઓને દર્શાવવાની આ પદ્ધતિને *ક્રમિક વિપુલ દર્શિતાની પદ્ધતિ (Process of successive magnification)* કહે છે.

આ પ્રમાણે આપણે જોયું કે ક્રમિક વિપુલ દર્શિતાની પદ્ધતિ દ્વારા સંખ્યારેખા પર સાન્ત દશાંશ-અભિવ્યક્તિવાળી વાસ્તવિક સંખ્યાઓનું નિરૂપણ કરવું શક્ય છે. હવે આપણે સંખ્યારેખા પર અનંત અનાવૃત હોય તેવી એક વાસ્તવિક સંખ્યાનું નિરૂપણ કરવાનો પ્રયત્ન કરીએ. વિપુલદર્શક કાચની મદદથી યોગ્ય અંતરાલોને જોઈશું અને ક્રમિક વિપુલ દર્શિતાની પદ્ધતિ દ્વારા તે સંખ્યાનું નિરૂપણ સંખ્યારેખા પર કરીશું.

ઉદાહરણ 11 : $5.3\overline{7}$ ને 5 દશાંશ સ્થળ સુધી એટલે કે 5.37777 ને સંખ્યારેખા પર દર્શાવો.

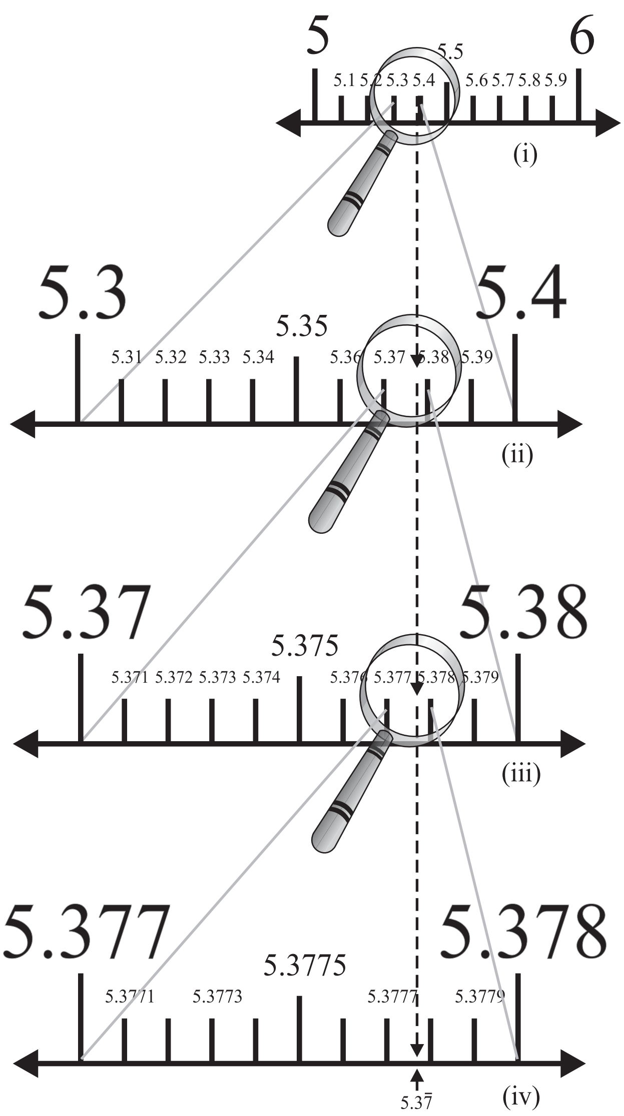
ઉકેલ : એકવાર ફરીથી ક્રમિક વિપુલદર્શિતાની પદ્ધતિ લઈએ અને સંખ્યારેખાના ભાગોની લંબાઈ ક્રમશઃ $5.3\overline{7}$ મળે ત્યાં સુધી ઘટાડીએ. સૌ પ્રથમ આપણે જોઈએ કે 5 અને 6 ની વચ્ચે $5.3\overline{7}$ છે. આગળના પગલામાં $5.3\overline{7}$ નું સ્થાન 5.3 અને 5.4 ની વચ્ચે નક્કી કરીશું. આ સંખ્યાનું નિરૂપણ વધારે સ્પષ્ટ રીતે જોવા માટે સંખ્યારેખાના આ ભાગને 10 સરખા ભાગમાં વિભાજિત કરી અને વિપુલદર્શક કાચથી નિરીક્ષણ કરીએ કે $5.3\overline{7}$ એ 5.37 અને 5.38 ની વચ્ચે છે.

$5.3\overline{7}$ નું વધારે સ્પષ્ટ નિરૂપણ કરવા માટે 5.377 અને 5.378 ના વચ્ચેના ભાગને બરાબર એક સરખા 10 ભાગમાં વિભાજિત કરીશું. તે આકૃતિ 1.14(iv) માં દર્શાવેલું છે. ધ્યાન રાખો કે $5.3\overline{7}$ એ 5.3777 ના કરતાં 5.3778 ની વધારે નજીક છે [આકૃતિ 1.14(iv) જુઓ]

નોંધ : વિપુલદર્શક કાચથી ઉત્તરોત્તર અને સંખ્યારેખાના જે ભાગમાં $5.3\overline{7}$ આવેલ હોય તેની લંબાઈમાં સતત ઘટાડો કરવાના અનુમાનને નિરંતર આગળ વધારી શકીએ છીએ. આપણે સંખ્યારેખા પર સંખ્યાનું સ્થાન જોવા માંગતા હોઈએ તો સંખ્યારેખાના ભાગનું માપ કેટલું લેવું તે ચોક્કસાઈની માત્રા પર આધારિત છે.

હવે તમને ચોક્કસ સમજાયું હશે કે આ પ્રક્રિયાથી સંખ્યારેખા પર અનંત અનાવૃત દશાંશ-અભિવ્યક્તિનું પણ નિરૂપણ કરી શકીએ છીએ.

ઉપરોક્ત કરવામાં આવેલી ચર્ચાઓ અને નિદર્શન પરથી આપણે કહી શકીએ કે દરેક વાસ્તવિક સંખ્યાને સંગત સંખ્યારેખા પર અનન્ય બિંદુ હોય છે અને આથી ઉલટું સંખ્યારેખાના દરેક બિંદુને સંગત એક અને માત્ર એક વાસ્તવિક સંખ્યા હોય છે.



આકૃતિ 1.14

સ્વાધ્યાય 1.4

1. ક્રમિક વિપુલ દર્શિતા પદ્ધતિની મદદથી સંખ્યારેખા પર 3.765 દર્શાવો.
2. ક્રમિક વિપુલ દર્શિતા પદ્ધતિની મદદથી સંખ્યારેખા પર $4.\overline{26}$ ને 4 દશાંશ સ્થળ સુધી દર્શાવો.

1.5 વાસ્તવિક સંખ્યાઓ પર ગાણિતિક પ્રક્રિયાઓ.

અગાઉના વર્ગોમાં તમે શીખી ગયા કે સંમેય સંખ્યાઓના સરવાળા અને ગુણાકાર એ ***ક્રમનો નિયમ*** *(commutative law)*, ***જૂથનો નિયમ*** *(associative law)* અને ***વિભાજનના*** *(distributive law)* નિયમોનું પાલન કરે છે. ઉપરાંત, આપણે બે સંમેય સંખ્યાઓને ઉમેરીએ, બાદ કરીએ, ગુણીએ કે ભાગીએ (શૂન્ય સિવાયની સંખ્યા વડે) તો આપણને સંમેય સંખ્યા જ મળે છે (એટલે કે સરવાળા, બાદબાકી, ગુણાકાર અને ભાગાકાર વિશે સંમેય સંખ્યા સંવૃત્તતાનો ગુણધર્મ ધરાવે છે). અસંમેય સંખ્યાઓ પણ સરવાળા અને ગુણાકાર માટે ક્રમના, જૂથના તથા વિભાજનના નિયમોનું પાલન કરે છે. જો કે અસંમેય સંખ્યાઓનો સરવાળો, તફાવત, ગુણનફળ, ભાગફળ હંમેશા અસંમેય સંખ્યા જ હોય તે જરૂરી નથી.

ઉદાહરણ તરીકે $(\sqrt{6})+(-\sqrt{6}), (\sqrt{2})-(\sqrt{2}), (\sqrt{3})\cdot(\sqrt{3})$ અને $\frac{\sqrt{17}}{\sqrt{17}}$ સંમેય સંખ્યાઓ છે.

હવે એક સંમેય સંખ્યામાં એક અસંમેય સંખ્યા ઉમેરીએ છીએ અને એક સંમેય સંખ્યાનો અસંમેય સંખ્યા વડે ગુણાકાર કરીએ છીએ ત્યારે શું થાય છે તે જોઈએ.

ઉદાહરણ તરીકે $\sqrt{3}$ એક અસંમેય સંખ્યા છે. તો $2+\sqrt{3}$ અને $2\sqrt{3}$ કેવી સંખ્યાઓ છે ? અહીં $\sqrt{3}$ એક અનંત અનાવૃત દશાંશ-અભિવ્યક્તિ છે. તેથી તે $2+\sqrt{3}$ અને $2\sqrt{3}$ માટે પણ આ ગુણધર્મ સત્ય છે. આમ, $2+\sqrt{3}$ અને $2\sqrt{3}$ બંને અસંમેય સંખ્યાઓ છે.

ઉદાહરણ 12 : $7\sqrt{5}, \frac{7}{\sqrt{5}}, \sqrt{2}+21, \pi-2$ એ અસંમેય સંખ્યાઓ છે કે નહિ ? ચકાસો.

ઉકેલ : $\sqrt{5} = 2.236..., \sqrt{2} = 1.4142..., \pi = 3.1415...$ છે.

તેથી $7\sqrt{5} = 15.652...,\ \frac{7}{\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5}}{\sqrt{5}\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5}}{5} = 3.1304..$ થાય.

$\sqrt{2}+21 = 22.4142...,\ \pi-2 = 1.1415..$

આ બધી સંખ્યાઓ અનંત અનાવૃત દશાંશ-અભિવ્યક્તિ છે. તેથી આ બધી સંખ્યાઓ અસંમેય સંખ્યાઓ છે.

જો આપણે અસંમેય સંખ્યાઓના સરવાળા, બાદબાકી, ગુણાકાર, ભાગાકાર કરીએ તથા વર્ગમૂળ અને કોઈપણ પ્રાકૃતિક સંખ્યા n માટે n-મૂળ પણ લઈએ, તો મહદ્ અંશે શું બનશે તે આપણે જોઈએ. ચાલો આપણે કેટલાંક ઉદાહરણ જોઈએ.

ઉદાહરણ 13 : $2\sqrt{2} + 5\sqrt{3}$ અને $\sqrt{2} - 3\sqrt{3}$ નો સરવાળો કરો.

ઉકેલ :
$$\left(2\sqrt{2} + 5\sqrt{3}\right)+\left(\sqrt{2} - 3\sqrt{3}\right) = \left(2\sqrt{2} + \sqrt{2}\right) + \left(5\sqrt{3}-3\sqrt{3}\right)$$
$$=\left(2+1\right)\sqrt{2} + \left(5-3\right)\sqrt{3}$$
$$=3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$$

ઉદાહરણ 14 : $6\sqrt{5}$ નો $2\sqrt{5}$ સાથે ગુણાકાર કરો.

ઉકેલ : $6\sqrt{5} \times 2\sqrt{5} = 6 \times 2 \times \sqrt{5} \times \sqrt{5} = 12 \times 5 = 60$

ઉદાહરણ 15 : $8\sqrt{15}$ નો $2\sqrt{3}$ વડે ભાગાકાર કરો.

ઉકેલ : $8\sqrt{15} \div 2\sqrt{3} = \frac{8\sqrt{3}\times\sqrt{5}}{2\sqrt{3}} = 4\sqrt{5}$

ઉપરનાં ઉદાહરણો આપણને નીચેની સત્ય હકીકત તરફ દોરી જાય છે.

(i) સંમેય સંખ્યાઓનો અસંમેય સંખ્યા સાથેનો સરવાળો અથવા તફાવત અસંમેય હોય છે.

(ii) શૂન્યેતર સંમેય સંખ્યા સાથે અસંમેય સંખ્યાનો ગુણાકાર કે ભાગાકાર અસંમેય હોય છે.

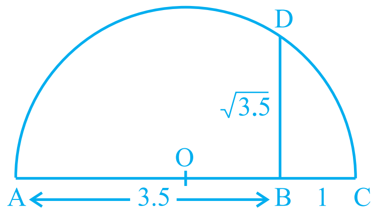
(iii) બે અસંમેય સંખ્યાઓનો સરવાળો, તફાવત, ગુણાકાર કે ભાગાકાર સંમેય અથવા અસંમેય હોઈ શકે.

હવે આપણે વાસ્તવિક સંખ્યાના વર્ગમૂળ કાઢવા માટેની પ્રક્રિયા તરફ આપણું ધ્યાન દોરીશું. તમને યાદ હશે કે જો a એક પ્રાકૃતિક સંખ્યા હોય તો $\sqrt{a} = b$ નો અર્થ $b^2 = a$ અને $b > 0$ થાય છે. આ શરત ધન વાસ્તવિક સંખ્યા પર પણ લાગુ પડી શકે છે.

ધારો કે $a > 0$ એક વાસ્તવિક સંખ્યા છે તો $\sqrt{a} = b$ નો અર્થ $b^2 = a$ અને $b > 0$ થાય છે.

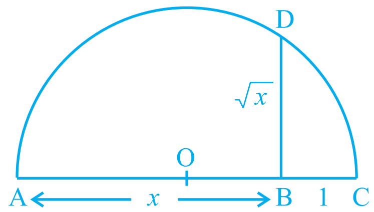
આપણે વિભાગ 1.2માં જોયું કે કેવી રીતે રેખા પર $\sqrt{n}$ (જ્યાં n ધનપૂર્ણાંક છે)નું નિરૂપણ કરી શકાય છે. હવે આપણે $\sqrt{x}$ ને (જ્યાં x એ ધન વાસ્તવિક સંખ્યા છે) ભૌમિતિક રીતે કેવી રીતે મેળવાય તે જોઈશું. ઉદાહરણ તરીકે $x = 3.5$ નું વર્ગમૂળ શોધીએ. એટલે કે આપણે $\sqrt{3.5}$ ભૌમિતિક રીતે શોધીએ.

એક આપેલી રેખા પરના બિંદુ A થી 3.5 એકમ દૂર એક બિંદુ B લો. AB = 3.5 એકમ થશે. (આકૃતિ 1.15 જુઓ) B થી 1 એકમ અંતરે બિંદુ C લો. AC નું મધ્યબિંદુ શોધીને તેને O કહો. O કેન્દ્ર અને OC જેટલી ત્રિજ્યાવાળુ એક અર્ધવર્તુળ દોરો. B માંથી પસાર થતી AC ને લંબ અને અર્ધવર્તુળને D માં છેદતી રેખા દોરો. તો BD = $\sqrt{3.5}$ થાય.



આકૃતિ 1.15

વ્યાપક રીતે, $\sqrt{x}$ નું મૂલ્ય શોધવા માટે (જ્યાં x એક ધન વાસ્તવિક સંખ્યા છે) AB = x એકમ થાય એવું બિંદુ B લો અને આકૃતિ 1.16 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે BC = 1 એકમ થાય એવું બિંદુ C લો. x=3.5 ના કિસ્સામાં જોયું તે પ્રમાણે BD = $\sqrt{x}$ મળશે.



આકૃતિ 1.16 (a), $x > 1$

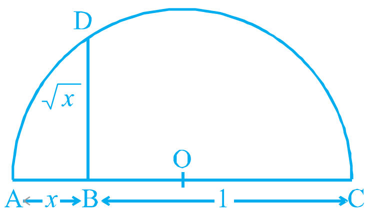
આ પરિણામને આપણે પાયથાગોરસના પ્રમેયનો ઉપયોગ કરીને સાબિત કરી શકીએ.

અહીં આકૃતિ 1.16 (a) માં Δ OBD એક કાટકોણ ત્રિકોણ છે. વળી, વર્તુળની ત્રિજ્યા $\frac{x+1}{2}$ એકમ છે.

આથી OC = OD = OA = $\frac{x+1}{2}$ એકમ

હવે OB = $x - \left(\frac{x+1}{2}\right) = \frac{x-1}{2}$, (આકૃતિ 1.16 (a)માં)

અથવા OB = $\frac{x+1}{2} - x = \frac{1-x}{2}$, (આકૃતિ 1.16 (b)માં)



આકૃતિ 1.16 (b), $x < 1$

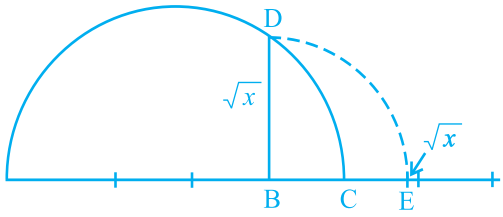
એટલે કે જો $x = 3.6$ તો OB = 1.3 [આકૃતિ 1.16 (a)] તથા જો $x = 0.6$ તો OB = 0.2 [આકૃતિ 1.16 (b)]

પાયથાગોરસ પ્રમેય પરથી

$$BD^2 = OD^2 - OB^2 = \left(\frac{x+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-1}{2}\right)^2 = \frac{4x}{4} = x.$$

આથી BD = $\sqrt{x}$ મળે.

આ રચના આપણને વાસ્તવિક સંખ્યા $x > 0$ માટે $\sqrt{x}$ નું અસ્તિત્વ તથા તેને દર્શાવવાની ભૌમિતિક રીત દર્શાવે છે. જો આપણે સંખ્યારેખા પર $\sqrt{x}$ નું નિરૂપણ કરવા માંગતા હોઇએ તો આપણે રેખા BC ને સંખ્યા રેખા, B ને શૂન્ય લઇ અને C ને 1 તરીકે લઇએ. B ને કેન્દ્ર અને BD ને ત્રિજ્યા લઇને એક ચાપ દોરીએ. તે સંખ્યારેખાને બિંદુ E માં છેદશે. (જુઓ આકૃતિ 1.17). E એ $\sqrt{x}$ નું નિરૂપણ કરે છે.



આકૃતિ 1.17, $x > 1$

$0 < x < 1$ માટે $\sqrt{x}$ ની રજૂઆત પણ તે જ રીતે થઇ શકે.

હવે આપણે કોઈ પણ ધન વાસ્તવિક સંખ્યાના વર્ગમૂળ વિશેના ખ્યાલને ઘનમૂળ, ચતુર્થમૂળ અને વ્યાપક રીતે ધન પૂર્ણાંક n માટે વાસ્તવિક સંખ્યાના n- મૂળ સુધી પણ વિસ્તૃત કરી શકીએ.

આગળના વર્ગોમાં વર્ગમૂળ અને ઘનમૂળ માટેની મેળવેલી સમજને તમે યાદ કરો.

$\sqrt[3]{8}$ શું છે ? આપણે જાણીએ છીએ કે જેનો ઘન 8 હોય તેવી એક ધન સંખ્યા છે. તમે અનુમાન કર્યું જ હશે કે $\sqrt[3]{8} = 2$ છે. ચાલો આપણે $\sqrt[5]{243}$ નું મૂલ્ય શોધીએ. શું તમે જાણો છો કે $b^5 = 243$ થાય તેવી કોઈ સંખ્યા b છે ? તેનો જવાબ છે 3. તેથી $\sqrt[5]{243} = 3$.

આ ઉદાહરણોથી, $a > 0$ એક વાસ્તવિક સંખ્યા હોય અને n એક ધન પૂર્ણાંક હોય તેવા a અને n માટે શું તમે $\sqrt[n]{a}$ વ્યાખ્યાયિત કરી શકશો ?

ધારો કે $a > 0$ એક વાસ્તવિક સંખ્યા છે અને n એક ધન પૂર્ણાંક છે. $b > 0$ માટે, જો $b^n = a$ તો $\sqrt[n]{a} = b$ છે. અહીં ધ્યાન રાખો કે $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{8}$, $\sqrt[n]{a}$, વગેરેમાં '$\sqrt{\ }$' સંકેતને ***કરણી ચિહ્ન*** *(Radical Sign)* કહેવામાં આવે છે.

આપણે વિવિધ ક્રિયાઓ માટે ઉપયોગી હોય તેવા વર્ગમૂળને લગતા કેટલાક ***નિત્યસમ***(*Identities*) લઇએ. તમે અગાઉના ધોરણમાં આમાંના કેટલાકથી પરિચિત થયા છો. બાકીના વાસ્તવિક સંખ્યાના સરવાળા પરના ગુણાકારના વિભાજનના નિયમથી અને નિત્યસમ $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$ થી મળે છે. (x, y વાસ્તવિક સંખ્યાઓ છે)

ધારો કે a અને b ધન વાસ્તવિક સંખ્યાઓ છે.

(i) $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$

(ii) $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

(iii) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right) = a - b$

(iv) $\left(a+\sqrt{b}\right)\left(a-\sqrt{b}\right) = a^2 - b$

(v) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{c}+\sqrt{d}\right) = \sqrt{ac}+\sqrt{ad}+\sqrt{bc}+\sqrt{bd}$

(vi) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 = a + 2\sqrt{ab} + b$

આ નિત્યસમ પર આધારિત કેટલાક વિશિષ્ટ ઉદાહરણો જોઈએ.

ઉદાહરણ 16: નીચેના પ્રશ્નોમાં સાદુંરૂપ આપો.

(i) $\left(5+\sqrt{7}\right)\left(2+\sqrt{5}\right)$ (ii) $\left(5+\sqrt{5}\right)\left(5-\sqrt{5}\right)$

(iii) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{7}\right)^2$ (iv) $\left(\sqrt{11}-\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{11}+\sqrt{7}\right)$

ઉકેલ: (i) $\left(5+\sqrt{7}\right)\left(2+\sqrt{5}\right)=10+5\sqrt{5}+2\sqrt{7}+\sqrt{35}$

(ii) $\left(5+\sqrt{5}\right)\left(5-\sqrt{5}\right)=5^2-\left(\sqrt{5}\right)^2=25-5=20$

(iii) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{7}\right)^2=\left(\sqrt{3}\right)^2+2\sqrt{3}\sqrt{7}+\left(\sqrt{7}\right)^2=3+2\sqrt{21}+7=10+2\sqrt{21}$

(iv) $\left(\sqrt{11}-\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{11}+\sqrt{7}\right)=\left(\sqrt{11}\right)^2-\left(\sqrt{7}\right)^2=11-7=4$

નોંધ : ધ્યાન રાખો કે ઉપરના ઉદાહરણમાં 'સાદુંરૂપ' શબ્દનો અર્થ એ થાય છે કે ''આ વિસ્તરણને સંમેય સંખ્યા અને અસંમેય સંખ્યાના સરવાળા તરીકે દર્શાવો''.

આપણે નીચેના પ્રશ્નનો વિચાર કરી આ વિભાગની ચર્ચા પૂર્ણ કરીશું. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ને સંખ્યારેખા પર ક્યાં દર્શાવી શકાય ? તમે જાણો છો કે તે અસંમેય સંખ્યા છે. જો છેદ સંમેય સંખ્યા હોય તો તે સરળ પડશે. જો આપણે છેદનું સંમેયીકરણ કરી શકીએ તો છેદ સંમેય સંખ્યા બનશે. તે માટે વર્ગમૂળના નિત્યસમોની જરૂર પડશે. આ કેવી રીતે શક્ય બને તે જોઈએ.

ઉદાહરણ 17: $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ના છેદનું સંમેયીકરણ કરો.

ઉકેલ : આપણે જેનો છેદ સંમેય સંખ્યા હોય એવી એક સમકક્ષ અભિવ્યક્તિમાં $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ને દર્શાવીશું . આપણે જાણીએ છીએ કે $\sqrt{2}\,.\sqrt{2}$ સંમેય સંખ્યા છે. આપણે એ પણ જાણીએ છીએ કે $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ને $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ વડે ગુણવાથી તેને સમકક્ષ અભિવ્યક્તિ મળે છે, કારણ કે $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=1$ છે. આ બંને તથ્યોને ભેગાં કરીએ તો આપણને $\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ મળે. આ સ્વરૂપમાં સંખ્યારેખા પર $\frac{1}{\sqrt{2}}$ નું નિરૂપણ કરવું સહેલું થઈ જાય. આ સંખ્યા 0 અને $\sqrt{2}$ નું મધ્યબિંદુ છે.

ઉદાહરણ 18 : $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$ ના છેદનું સંમેયીકરણ કરો.

ઉકેલ : આપણે ઉપરના નિત્યસમ (iv) નો ઉપયોગ કરીશું. $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$ નો $2-\sqrt{3}$ વડે ગુણાકાર અને ભાગાકાર કરવાથી આપણને

$\frac{1}{2+\sqrt{3}}\times\frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=\frac{2-\sqrt{3}}{4-3}=2-\sqrt{3}$ મળશે.

ઉદાહરણ 19 : $\frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}$ ના છેદનું સંમેયીકરણ કરો.

ઉકેલ : અહીં આપણે ઉપરોક્ત નિત્યસમ (iii) નો ઉપયોગ કરીશું.

$$\frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} = \frac{5\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)}{3-5} = \left(\frac{-5}{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)$$

ઉદાહરણ 20: $\frac{1}{7+3\sqrt{2}}$ ના છેદનું સંમેયીકરણ કરો.

ઉકેલ : $\frac{1}{7+3\sqrt{2}} = \frac{1}{7+3\sqrt{2}} \times \left(\frac{7-3\sqrt{2}}{7-3\sqrt{2}}\right) = \frac{7-3\sqrt{2}}{49-18} = \frac{7-3\sqrt{2}}{31}$

આમ, જ્યારે કોઈ અભિવ્યક્તિના છેદમાં વર્ગમૂળવાળું પદ (અથવા કરણી ચિહ્નની અંદરની સંખ્યા) હોય ત્યારે જેનો છેદ એક સંમેય સંખ્યા હોય તેવી સમતુલ્ય અભિવ્યક્તિમાં તેને રૂપાંતરિત કરવાની પદ્ધતિને ***છેદનું સંમેયીકરણ*** (*Rationalising the denominator*) કહેવાય છે.

સ્વાધ્યાય 1.5

1. આપેલી સંખ્યાઓનું સંમેય અને અસંમેય સંખ્યાઓમાં વર્ગીકરણ કરો :

   (i) $2-\sqrt{5}$ (ii) $\left(3+\sqrt{23}\right)-\sqrt{23}$ (iii) $\frac{2\sqrt{7}}{7\sqrt{7}}$

   (iv) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (v) 2π

2. સાદું રૂપ આપો :

   (i) $\left(3+\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{2}\right)$ (ii) $\left(3+\sqrt{3}\right)\left(3-\sqrt{3}\right)$

   (iii) $\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)^2$ (iv) $\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)$

3. યાદ કરો કે π ને એક વર્તુળના પરિઘ (c) અને તેના વ્યાસ (d) ના ગુણોત્તર તરીકે દર્શાવવામાં આવે છે. એટલે કે $\pi = \frac{c}{d}$. તે વિરોધાભાસી છે, કારણકે π એ અસંમેય સંખ્યા છે. આ વિરોધાભાસનો ઉકેલ કેવી રીતે લાવશો ?

4. $\sqrt{9.3}$ ને સંખ્યારેખા પર દર્શાવો.

5. આપેલ સંખ્યાઓના છેદનું સંમેયીકરણ કરો.

   (i) $\frac{1}{\sqrt{7}}$ (ii) $\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}$ (iii) $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$ (iv) $\frac{1}{\sqrt{7}-2}$

1.6 વાસ્તવિક સંખ્યાઓ માટે ઘાતાંકના નિયમો

શું તમને યાદ છે કે નીચે આપેલી સંખ્યાઓનું સાદુંરૂપ કેવી રીતે આપી શકાય?

(i) $17^2 \cdot 17^5 =$ (ii) $\left(5^2\right)^7 =$ (iii) $\dfrac{23^{10}}{23^7} =$ (iv) $7^3 \cdot 9^3 =$

શું તમે તેના જવાબો મેળવ્યા ? આ જવાબો નીચે મુજબ છે.

(i) $17^2 \cdot 17^5 = 17^7$ (ii) $(5^2)^7 = 5^{14}$

(iii) $\dfrac{23^{10}}{23^7} = 23^3$ (iv) $7^3 \cdot 9^3 = 63^3$

આ જવાબો મેળવવા માટે તમે નીચે દર્શાવેલા અગાઉના ધોરણમાં શીખેલા તે *ઘાતાંકના નિયમો* નો ઉપયોગ કર્યો હશે. (અહીં a, n અને m એ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ છે. તમને એ પણ યાદ હશે કે a ને *આધાર* (*base*) અને m અને n ને *ઘાતાંક* (*exponents*) કહેવામાં આવે છે.)

(i) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ (ii) $(a^m)^n = a^{mn}$

(iii) $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \ m > n$ (iv) $a^m b^m = (ab)^m$

$(a)^0$ ની કિંમત શું છે ? તેની કિંમત 1 થાય. આ ઉપરાંત $(a)^0 = 1$ થાય તેનો અભ્યાસ તમે કરી ગયા છો. ઉપરોક્ત નિયમ (iii) નો ઉપયોગ કરીને $\dfrac{1}{a^n} = a^{-n}$ પણ મેળવી શકાય.

આ નિયમોનો ઉપયોગ ઋણ ઘાતાંક માટે પણ કરી શકાય છે.

ઉદાહરણ તરીકે,

(i) $17^2 \cdot 17^{-5} = 17^{-3} = \dfrac{1}{17^3}$ (ii) $\left(5^2\right)^{-7} = 5^{-14}$

(iii) $\dfrac{23^{-10}}{23^7} = 23^{-17}$ (iv) $(7)^{-3} \cdot (9)^{-3} = (63)^{-3}$

ધારો કે આપણે નીચેની ગણતરી કરવી છે.

(i) $2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}}$ (ii) $\left(3^{\frac{1}{5}}\right)^4$ (iii) $\dfrac{7^{\frac{1}{5}}}{7^{\frac{1}{3}}}$ (iv) $13^{\frac{1}{5}} \cdot 17^{\frac{1}{5}}$

હવે આપણે આગળ કેવી રીતે વધીશું ? આધાર ધન વાસ્તવિક સંખ્યા હોય અને ઘાતાંક સંમેય સંખ્યા હોય ત્યારે આપણે જેનો અગાઉ અભ્યાસ કર્યો છે તેવા ઘાતાંકના નિયમોનો વિસ્તાર કરીશું. (હવે પછી તમે ઘાતાંક વાસ્તવિક સંખ્યા હોય તે પ્રમાણેના નિયમોનો વિસ્તાર કરશો.) પરંતુ આ નિયમોને દર્શાવતાં પહેલાં અને આ નિયમોનું જ્ઞાન મેળવતાં પહેલાં એ જાણવું જરૂરી છે કે $4^{\frac{3}{2}}$ નો અર્થ શો થાય ? આપણે તે અંગે થોડુંક કાર્ય કરવું પડશે !

વિભાગ 1.4 માં વાસ્તવિક સંખ્યા $a > 0$ માટે $\sqrt[n]{a}$ ને નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત કર્યું છે.

ધારો કે $a > 0$ એક વાસ્તવિક સંખ્યા છે અને n ધન પૂર્ણાંક છે તો જ્યારે $b^n = a$ હોય ત્યારે $\sqrt[n]{a} = b$ થાય અને $b > 0$ છે.

ઘાતાંકની ભાષામાં આપણે $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ લઈએ છીએ.

ઉદાહરણ તરીકે $\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}}$

હવે, $4^{\frac{3}{2}}$ બે રીતે વિચારીશું.

$$\text{(i) } 4^{\frac{3}{2}} = \left(4^{\frac{1}{2}}\right)^3 = 2^3 = 8$$

$$\text{(ii) } 4^{\frac{3}{2}} = \left(4^3\right)^{\frac{1}{2}} = (64)^{\frac{1}{2}} = 8$$

આ પરથી તેની વ્યાખ્યા નીચે મુજબ મળે.

જો $a > 0$ એક વાસ્તવિક સંખ્યા હોય તથા m અને n જેમને 1 સિવાય કોઈ સામાન્ય અવયવ ન હોય તેવા પૂર્ણાંક હોય અને $n > 0$ હોય.

તો $a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$ થાય.

આપણને હવે ઘાતાંકના વિસ્તૃત નિયમો નીચે પ્રમાણે મળે છે.

ધારો કે $a > 0$ એક વાસ્તવિક સંખ્યા છે અને p અને q એ સંમેય સખ્યાઓ છે,

(i) $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$ (ii) $(a^p)^q = a^{pq}$

(iii) $\dfrac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$ (iv) $a^p b^p = (ab)^p$

હવે તમે અગાઉ પૂછેલા પ્રશ્નોના જવાબ શોધવા ઉપરોક્ત નિયમોનો ઉપયોગ કરી શકો છો.

ઉદાહરણ 21 : સાદું રૂપ આપો (i) $2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}}$ (ii) $\left(3^{\frac{1}{5}}\right)^4$

(iii) $\dfrac{7^{\frac{1}{5}}}{7^{\frac{1}{3}}}$ (iv) $13^{\frac{1}{5}} \cdot 17^{\frac{1}{5}}$

ઉકેલ : (i) $2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)} = 2^{\frac{3}{3}} = 2^1 = 2$ (ii) $\left(3^{\frac{1}{5}}\right)^4 = 3^{\frac{4}{5}}$

(iii) $\dfrac{7^{\frac{1}{5}}}{7^{\frac{1}{3}}} = 7^{\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\right)} = 7^{\frac{3-5}{15}} = 7^{\frac{-2}{15}}$ (iv) $13^{\frac{1}{5}} \cdot 17^{\frac{1}{5}} = (13 \times 17)^{\frac{1}{5}} = 221^{\frac{1}{5}}$

સ્વાધ્યાય 1.6

1. કિંમત શોધો : (i) $64^{\frac{1}{2}}$ (ii) $32^{\frac{1}{5}}$ (iii) $125^{\frac{1}{3}}$

2. કિંમત શોધો : (i) $9^{\frac{3}{2}}$ (ii) $32^{\frac{2}{5}}$ (iii) $16^{\frac{3}{4}}$ (iv) $125^{\frac{-1}{3}}$

3. સાદું રૂપ આપો : (i) $2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{5}}$ (ii) $\left(\frac{1}{3^3}\right)^7$ (iii) $\frac{11^{\frac{1}{2}}}{11^{\frac{1}{4}}}$ (iv) $7^{\frac{1}{2}} \cdot 8^{\frac{1}{2}}$

1.7 સારાંશ

આ પ્રકરણમાં તમે નીચેના મુદ્દાઓ શીખ્યા :

1. જો p તથા q પૂર્ણાંક હોય તથા q શૂન્યેતર હોય તથા $r = \frac{p}{q}$ હોય તો r ને સંમેય સંખ્યા કહે છે.

2. જો વાસ્તવિક સંખ્યા s ને જ્યાં p પૂર્ણાંક હોય, q શૂન્યેતર પૂર્ણાંક હોય તેવા $\frac{p}{q}$ સ્વરૂપમાં ન દર્શાવી શકાય તો s ને અસંમેય સંખ્યા કહે છે.

3. સંમેય સંખ્યાની દશાંશ-અભિવ્યક્તિ એ સાન્ત અથવા અનંત આવૃત્ત હોય છે. વધુમાં જે સંખ્યાની દશાંશ અભિવ્યક્તિ સાન્ત અથવા અનંત આવૃત હોય તે સંમેય સંખ્યા છે.

4. અસંમેય સંખ્યાની દશાંશ-અભિવ્યક્તિ અનંત અનાવૃત્ત હોય છે. વધુમાં જે સંખ્યાની દશાંશ-અભિવ્યક્તિ અનંત અનાવૃત્ત હોય, તે સંખ્યા અસંમેય સંખ્યા છે.

5. બધી સંમેય અને અસંમેય સંખ્યાઓને એકત્રિત કરવાથી વાસ્તવિક સંખ્યાઓનો સમૂહ બને છે.

6. સંખ્યારેખા પરના દરેક બિંદુને સંગત અનન્ય વાસ્તવિક સંખ્યા હોય છે અને દરેક વાસ્તવિક સંખ્યાને સંગત સંખ્યારેખા પર અનન્ય બિંદુ મળે છે.

7. જો r સંમેય સંખ્યા હોય અને s અસંમેય સંખ્યા હોય તો $r + s$ અને $r - s$ અસંમેય સંખ્યા છે તથા શૂન્યેતર સંમેય સંખ્યા r માટે $r \cdot s$ અને $\frac{r}{s}$ અસંમેય સંખ્યા થાય છે.

8. નીચેના ગુણધર્મો ધન વાસ્તવિક સંખ્યાઓ a અને b માટેના છે.

(i) $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ (ii) $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

(iii) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right) = a - b$

(iv) $\left(a+\sqrt{b}\right)\left(a-\sqrt{b}\right) = a^2 - b$ (v) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 = a + 2\sqrt{ab} + b$

9. $\frac{1}{\sqrt{a}+b}$ ના છેદનું સંમેયીકરણ કરવા માટે તેનો $\frac{\sqrt{a}-b}{\sqrt{a}-b}$ વડે ગુણાકાર કરવો જોઈએ. a અને b પૂર્ણાંક છે.

10. જો $a > 0$ એક વાસ્તવિક સંખ્યા હોય અને p અને q સંમેય સંખ્યા હોય, તો

(i) $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$ (ii) $\left(a^p\right)^q = a^{pq}$ (iii) $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$ (iv) $a^p b^p = (ab)^p$

પ્રકરણ 2

બહુપદીઓ

2.1 પ્રાસ્તાવિક

અગાઉના વર્ગોમાં આપણે બૈજિક અભિવ્યક્તિના સરવાળા, બાદબાકી, ગુણાકાર, ભાગાકાર શીખ્યાં છીએ. કેટલીક બૈજિક અભિવ્યક્તિના અવયવો પાડવાનું પણ આપણે શીખ્યાં છીએ. કેટલાંક બૈજિક નિત્યસમો નીચે આપેલા છે.

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

અને $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$

અને અવયવ પાડવામાં તેમનો ઉપયોગ કરવાનું પણ શીખ્યાં છીએ. આ પ્રકરણમાં આપણે જેને 'બહુપદી' કહીશું તેવી ચોક્કસ પ્રકારની બૈજિક અભિવ્યક્તિ અને તેને સંબંધિત કેટલાક પારિભાષિક શબ્દોની સમજૂતી મેળવીશું. આ પ્રકરણમાં આપણે ***શેષ પ્રમેય*** (*Remainder Theorem*) અને ***અવયવ પ્રમેય*** (*Factor Theorem*)નો અભ્યાસ કરીશું અને બહુપદીઓના અવયવો પાડવામાં તેમનો ઉપયોગ કરતાં શીખીશું આ ઉપરાંત, કેટલાક વધુ બૈજિક નિત્યસમો અને તેમનો અવયવો પાડવામાં અને આપેલ કિંમતો આગળ અભિવ્યક્તિઓનું મૂલ્ય શોધવામાં ઉપયોગ કરીશું.

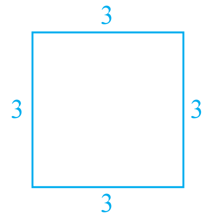
2.2 એકચલ બહુપદી

ભિન્ન કિંમતો ધારણ કરી શકે તેવી સંજ્ઞાને ચલ કહે છે. ચલને x, y, z વગેરે સંકેતથી દર્શાવાય છે. નોંધો કે $2x$, $3x$, $-x$, $-\frac{1}{2}x$ એ *બૈજિક અભિવ્યક્તિ* (*Algebraic Expressions*) છે. આ બધી બૈજિક *અભિવ્યક્તિ* (અચળપદ) $\times x$ પ્રકારની છે. હવે ધારો કે આપણે એક (અચળપદ)×(ચલ) પ્રકારની બહુપદી લખવી છે અને આપણે અચળ વિશે જાણતાં

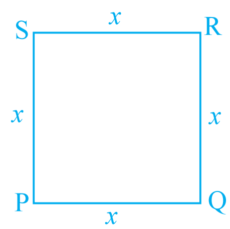
નથી. આવાં ઉદાહરણોમાં અચળને સામાન્ય રીતે a, b, c વગેરે દ્વારા દર્શાવવામાં આવે છે. તેથી પદાવલિને ax પ્રમાણે દર્શાવવામાં આવે છે.

આમ, છતાં અચળ અને ચલ દર્શાવતા સંકેતો વચ્ચે તફાવત હોય છે. કોઇ એક સ્થિતિમાં અચળની કિંમત એક સરખી જળવાઇ રહે છે, પરંતુ ચલની કિંમત બદલાતી રહે છે.

હવે 3 એકમ બાજુવાળા ચોરસનો વિચાર કરો.(આકૃતિ 2.1). તેની પરિમિતિ કેટલી થશે? તમે જાણો છો કે ચાર બાજુઓનાં માપના સરવાળાને ચોરસની પરિમિતિ કહે છે. અહીં દરેક બાજુની લંબાઈ 3 એકમ છે. તેથી તેની પરિમિતિ $4 \times 3 = 12$ એકમ છે. હવે જો ચોરસની એક બાજુનું માપ 10 એકમ હોય તો તેની પરિમિતિ કેટલી થશે? પરિમિતિ $4 \times 10 = 40$ એકમ થશે. જો ચોરસની એક બાજુનું માપ x એકમ હોય તો (આકૃતિ 2.2) ચોરસની પરિમિતિ $4x$ એકમ થાય. આમ, જેમ બાજુની લંબાઇનું માપ બદલાય તેમ પરિમિતિનું માપ પણ બદલાય છે.



આકૃતિ 2.1



આકૃતિ 2.2

તમે ચોરસ PQRS નું ક્ષેત્રફળ શોધી શકો ? તે $x \times x = x^2$ ચોરસ એકમ છે. x^2 એ બૈજિક અભિવ્યક્તિ છે. તમે $2x$, $x^2 + 2x$, $x^3 - x^2 + 4x + 7$ જેવી બીજી બૈજિક અભિવ્યક્તિથી પરિચિત છો. આપણે નોંધીએ કે બધી જ બૈજિક અભિવ્યક્તિઓના ચલના ઘાતાંક એ પૂર્ણ સંખ્યાઓ છે. આ પ્રકારની અભિવ્યક્તિઓને એક ચલ વાળી બહુપદીઓ કહે છે. ઉપરના ઉદાહરણમાં x એ ચલ છે. ઉદાહરણ તરીકે $x^3 - x^2 + 4x + 7$ એ x ચલ વાળી બહુપદી છે. તે જ પ્રમાણે $3y^2 + 5y$ એ y ચલ વાળી બહુપદી છે અને $t^2 + 4$ એ t ચલ વાળી બહુપદી છે.

બહુપદી $x^2 + 2x$ માં x^2 અને $2x$ એ બહુપદીનાં ***પદો*** છે. તે જ પ્રમાણે $3y^2 + 5y + 7$ ને $3y^2$, $5y$ અને 7 એમ ત્રણ પદો છે. તમે બહુપદી $-x^3 + 4x^2 + 7x - 2$ નાં પદો લખી શકશો ? આ બહુપદીને 4 પદો $-x^3$, $4x^2$, $7x$, અને -2 છે.

બહુપદીના દરેક પદને ***સહગુણક*** હોય છે. તેથી બહુપદી $-x^3 + 4x^2 + 7x - 2$ માં x^3 નો સહગુણક -1, x^2 નો સહગુણક 4, x નો સહગુણક 7 અને x^0 નો સહગુણક -2 છે. (યાદ છે ને કે $x^0 = 1$) $x^2 - x + 7$ માં x નો સહગુણક શું છે તે તમે કહી શકશો? તે -1 છે.

સંખ્યા 2 એ પણ બહુપદી છે. હકીકતમાં 2, -5, 7 વગેરે અચળ બહુપદીઓનાં ઉદાહરણો છે. અચળ બહુપદી 0 ને ***શૂન્ય બહુપદી*** કહે છે. બધી બહુપદીઓના સંગ્રહમાં આ શૂન્ય બહુપદી ખૂબ જ મહત્વની ભૂમિકા ભજવે છે. આ વિશે તમે આગળના ધોરણમાં શીખશો.

હવે $x + \frac{1}{x}$, $\sqrt{x} + 3$ અને $\sqrt[3]{y} + y^2$ જેવી બૈજિક અભિવ્યક્તિઓનો વિચાર કરો. તમે જાણો છો કે $x + \frac{1}{x}$ ને $x + x^{-1}$ તરીકે પણ લખી શકાય. અહીં બીજા પદનો ઘાતાંક એટલે કે x^{-1} નો ઘાતાંક -1 છે અને તે પૂર્ણ સંખ્યા નથી. તેથી આ બૈજિક અભિવ્યક્તિ એ બહુપદી નથી.

ફરીથી જોતાં, $\sqrt{x}+3$ ને $x^{\frac{1}{2}}+3$ રીતે પણ લખી શકાય. અહીં x નો ઘાતાંક $\frac{1}{2}$ છે અને તે પૂર્ણ સંખ્યા નથી. તેથી $\sqrt{x}+3$ એ x માં બહુપદી છે ? ના તે નથી. તો $\sqrt[3]{y}+y^2$ અંગે તમારું શું માનવું છે ? તે પણ y માં બહુપદી નથી. (કેમ ?)

જો બહુપદીમાં ચલ તરીકે x હોય તો આપણે બહુપદીને $p(x)$ અથવા $q(x)$ અથવા $r(x)$ વગેરે તરીકે ઓળખીશું. ઉદાહરણ તરીકે,

$$p(x) = 2x^2 + 5x - 3$$

$$q(x) = x^3 - 1$$

$$r(y) = y^3 + y + 1$$

$$s(u) = 2 - u - u^2 + 6u^5$$

બહુપદીમાં ગમે તેટલાં પદો હોઈ શકે. $x^{150} + x^{149} + ...+ x^2 + x + 1$ એ 151 પદો વાળી બહુપદી છે. $2x$, 2, $5x^3$, $-5x^2$, y અને u^4 જેવી બહુપદીઓનો વિચાર કરો. તમે જોયું કે આ બધી બહુપદીઓમાં માત્ર એક જ પદ છે. તેમને ***એકપદીઓ*** *(Monomials)* કહે છે. (*Mono* એટલે 1)

હવે નીચેની બહુપદીઓનું નિરીક્ષણ કરો :

$p(x) = x + 1, q(x) = x^2 - x, \quad r(y) = y^{30} + 1, \quad t(u) = u^{43} - u^2$

આ દરેકમાં કેટલાં પદો છે ? આ દરેક બહુપદીને બે પદો છે. જે બહુપદીને માત્ર બે જ પદો હોય તેને ***દ્વિપદી*** (*binomial*) કહે છે. (*bi* એટલે 2)

તે જ પ્રમાણે જે બહુપદીઓને માત્ર 3 પદો હોય તેને ***ત્રિપદી*** *(trinomials)* (*tri* એટલે 3)કહે છે. ત્રિપદીનાં કેટલાંક ઉદાહરણો નીચે પ્રમાણે છે :

$p(x) = x + x^2 + \pi, \qquad q(x) = \sqrt{2} + x - x^2,$

$r(u) = u + u^2 - 2, \qquad t(y) = y^4 + y + 5.$

હવે $p(x) = 3x^7 - 4x^6 + x + 9$ નો વિચાર કરો. x ની મહત્તમ ઘાતવાળું પદ કયું છે ? તે $3x^7$ છે. x નો ઘાતાંક 7 છે. તે જ પ્રમાણે બીજી બહુપદી $q(y) = 5y^6 - 4y^2 - 6$ માં y ની મહત્તમ ઘાતવાળુ પદ $5y^6$ છે અને y નો ઘાતાંક 6 છે. બહુપદીના ચલના મહત્તમ ઘાતાંકને ***બહુપદીની ઘાત***(*degree of the polynomial*) કહે છે. તેથી બહુપદી $3x^7 - 4x^6 + x + 9$ ની ઘાત 7 છે અને બહુપદી $5y^6 - 4y^2 - 6$ ની ઘાત 6 છે. **શૂન્ય સિવાયની અચળ બહુપદીની ઘાત 0 હોય છે.**

ઉદાહરણ 1 : નીચે આપેલી બહુપદીઓની ઘાત જણાવો :

(i) $x^5 - x^4 + 3$ (ii) $2 - y^2 - y^3 + 2y^8$ (iii) 2

ઉકેલ : (i) ચલનો મહત્તમ ઘાતાંક 5 છે. તેથી બહુપદીની ઘાત 5 છે.

(ii) ચલનો મહત્તમ ઘાતાંક 8 છે. તેથી બહુપદીની ઘાત 8 છે.

(iii) અહીં એક જ પદ 2 છે. તેને $2x^0$ તરીકે પણ લખી શકાય છે. તેથી x નો ઘાતાંક 0 છે. તેથી બહુપદીની ઘાત 0 છે.

હવે બહુપદીઓ $p(x) = 4x + 5$, $q(y) = 2y$, $r(t) = t + \sqrt{2}$ અને $s(u) = 3 - u$ નો વિચાર કરો. તમને આ બધામાં કંઈ સામાન્ય લાગે છે ? આ બધી બહુપદીઓની ઘાત 1 છે. જે બહુપદીની ઘાત 1 હોય તે બહુપદીને ***સુરેખ બહુપદી*** કહે છે. કેટલીક અન્ય સુરેખ બહુપદીઓ $2x - 1, \sqrt{2}y + 1$, $2 - u$ છે. હવે ત્રણ પદ અને ચલ x વાળી સુરેખ બહુપદી લખવાનો પ્રયત્ન કરો. તમે તે નહીં લખી શકો કારણ કે ચલ x વાળી સુરેખ બહુપદીને વધુમાં વધુ બે પદ હોય છે. તેથી દરેક ચલ x વાળી સુરેખ બહુપદીને $ax + b$ સ્વરૂપમાં લખી શકાય, જ્યાં a અને b અચળ છે અને $a \neq 0$ (શા માટે ?) તે પ્રમાણે $ay + b$ એ ચલ y વાળી સુરેખ બહુપદી છે.

હવે નીચેની બહુપદીઓનો વિચાર કરોઃ

$$2x^2 + 5,\ 5x^2 + 3x + \pi,\ x^2 \text{ અને } x^2 + \frac{2}{5}x$$

આપેલી બહુપદીઓની ઘાત 2 છે. તેથી તે બહુપદીઓને ***દ્વિઘાત બહુપદી*** કહે છે. દ્વિઘાત બહુપદીનાં કેટલાંક ઉદાહરણો $5 - y^2$, $4y - 5y^2$ અને $6 - y - y^2$ છે. તમે ચાર પદ વાળી એક ચલ વાળી દ્વિઘાત બહુપદી લખી શકો ? તમને ખ્યાલ આવશે કે એક ચલ વાળી દ્વિઘાત બહુપદીને વધુમાં વધુ 3 પદો હોય છે. જો તમે દ્વિઘાત બહુપદીના કેટલાંક વધારે ઉદાહરણો જોશો તો ખ્યાલ આવશે કે તે સામાન્ય રીતે ચલ x વાળી દ્વિઘાત બહુપદી $ax^2 + bx + c$ સ્વરૂપમાં મળશે. અહીં $a \neq 0$ તથા a, b, c અચળો છે. તે જ પ્રમાણે ચલ y વાળી દ્વિઘાત બહુપદી $ay^2 + by + c$ છે. અહીં $a \neq 0$ તથા a, b, c અચળ છે.

જે બહુપદીની ઘાત 3 હોય તેને ત્રિઘાત બહુપદી કહે છે. ત્રિઘાત બહુપદીનાં કેટલાંક ઉદાહરણો $4x^3$, $2x^3 + 1$, $5x^3 + x^2$, $6x^3 - x$, $6 - x^3$, $2x^3 + 4x^2 + 6x + 7$ છે. એક ચલ વાળી ત્રિઘાત બહુપદીને કેટલાં પદ હોઈ શકે? તેને વધુમાં વધુ 4 પદો હોઈ શકે. તેને સામાન્ય રીતે $ax^3 + bx^2 + cx + d$ સ્વરૂપમાં લખી શકાય. અહીં $a \neq 0$ અને a, b, c, d અચળ છે.

હવે, તમે જોયું કે એક ઘાતવાળી, 2 ઘાતવાળી અથવા 3 ઘાતવાળી બહુપદીઓની જેમ તમે એક ચલ વાળી n ઘાતવાળી બહુપદીને લખી શકો ? એક ચલ વાળી n ઘાતની બહુપદીને સામાન્ય રીતે નીચે પ્રમાણે લખી શકાય :

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

જ્યાં $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ અચળ છે અને $a_n \neq 0$.

વિશેષ વિકલ્પમાં જો $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_n = 0$ (બધાં જ અચળ શૂન્ય છે) તો આપણે *શૂન્ય બહુપદી* મેળવીશું. શૂન્ય બહુપદીની ઘાત કેટલી હશે ? શૂન્ય બહુપદીની ઘાત *અવ્યાખ્યાયિત* છે.

અત્યાર સુધી આપણે એક ચલ વાળી બહુપદીઓનો અભ્યાસ કર્યો. એક કરતાં વધારે ચલ વાળી બહુપદીઓ પણ હોઈ શકે. ઉદાહરણ તરીકે $x^2 + y^2 + xyz$ (જ્યાં x, y, z એ ચલ છે.) એ ત્રણ ચલ વાળી બહુપદી છે. તે જ પ્રમાણે $p^2 + q^{10} + r$ (જ્યાં p, q, r એ ચલ છે.) $u^3 + v^2$ (જ્યાં u, v ચલ છે.) અનુક્રમે ત્રણ અને બે ચલ વાળી બહુપદીઓ છે. આવી બહુપદીઓનો વિગતે અભ્યાસ તમે પછી કરશો.

સ્વાધ્યાય 2.1

1. નીચે આપેલી અભિવ્યક્તિઓ પૈકી કઈ બહુપદી એક ચલ વાળી છે અને કઈ બહુપદી એક ચલ વાળી નથી ? તમારા જવાબ માટે કારણ આપો.

(i) $4x^2 - 3x + 7$ (ii) $y^2 + \sqrt{2}$ (iii) $3\sqrt{t} + t\sqrt{2}$ (iv) $y + \frac{2}{y}$

(v) $x^{10} + y^3 + t^{50}$

2. નીચેનામાં x^2 નો સહગુણક લખો :

(i) $2 + x^2 + x$ (ii) $2 - x^2 + x^3$ (iii) $\frac{\pi}{2}x^2 + x$ (iv) $\sqrt{2}x - 1$

3. 35 ઘાતાંકવાળી દ્વિપદીનું કોઈ પણ એક ઉદાહરણ અને 100 ઘાતાંકવાળી એકપદીનું કોઈ પણ એક ઉદાહરણ આપો.

4. નીચે આપેલી બહુપદીઓની ઘાત જણાવો.

(i) $5x^3 + 4x^2 + 7x$ (ii) $4 - y^2$

(iii) $5t - \sqrt{7}$ (iv) 3

5. નીચે આપેલી બહુપદીઓને સુરેખ, દ્વિઘાત કે ત્રિઘાત બહુપદીમાં વર્ગીકૃત કરો :

(i) $x^2 + x$ (ii) $x - x^3$ (iii) $y + y^2 + 4$ (iv) $1 + x$

(v) $3t$ (vi) r^2 (vii) $7x^3$

2.3 બહુપદીનાં શૂન્યો

બહુપદી $p(x) = 5x^3 - 2x^2 + 3x - 2$ નો વિચાર કરો.

જો આપણે x ના બદલે 1 લઈએ તો,

$$p(1) = 5 \times (1)^3 - 2 \times (1)^2 + 3 \times (1) - 2$$
$$= 5 - 2 + 3 - 2$$
$$= 4$$

આ પરિસ્થિતિમાં આપણે કહીશું કે $x = 1$ આગળ $p(x)$ નું મૂલ્ય 4 છે.

તે જ પ્રમાણે, $p(0) = 5(0)^3 - 2(0)^2 + 3(0) - 2$

$= -2$

શું તમે $p(-1)$ શોધી શકશો ?

ઉદાહરણ 2 : નીચે આપેલી બહુપદીઓનું મૂલ્ય બહુપદીની ચલની સામે દર્શાવેલ કિંમતો માટે શોધો.

(i) $p(x) = 5x^2 - 3x + 7$, $x = 1$ આગળ

(ii) $q(y) = 3y^3 - 4y + \sqrt{11}$, $y = 2$ આગળ

(iii) $p(t) = 4t^4 + 5t^3 - t^2 + 6$, $t = a$ આગળ

ઉકેલ : (i) $p(x) = 5x^2 - 3x + 7$

$x = 1$ આગળ બહુપદી $p(x)$નું મૂલ્ય,

$p(1) = 5(1)^2 - 3(1) + 7$

$= 5 - 3 + 7 = 9$

(ii) $q(y) = 3y^3 - 4y + \sqrt{11}$

$y = 2$ આગળ બહુપદી $q(y)$નું મૂલ્ય,

$q(2) = 3(2)^3 - 4(2) + \sqrt{11} = 24 - 8 + \sqrt{11} = 16 + \sqrt{11}$

(iii) $p(t) = 4t^4 + 5t^3 - t^2 + 6$

$t = a$ આગળ બહુપદી $p(t)$નું મૂલ્ય,

$p(a) = 4a^4 + 5a^3 - a^2 + 6$

હવે, બહુપદી $p(x) = x - 1$નો વિચાર કરીએ.

$p(1)$ નું મૂલ્ય શું? આપણે જોઈશું કે : $p(1) = 1 - 1 = 0$.

અહીં $p(1) = 0$. તેથી 1 એ આપેલી બહુપદી $p(x)$ નું શૂન્ય છે તેમ કહેવાય છે.

જો, $q(x) = x - 2$ તો, 2 એ $q(x)$નું શૂન્ય છે.

સામાન્ય રીતે આપણે કહી શકીએ કે $p(x)$ નું શૂન્ય c હોય તો $p(c) = 0$.

તમે નિરીક્ષણ કર્યું હશે કે બહુપદી $x - 1$ નું શૂન્ય શોધવા માટે તેને 0 સાથે સરખાવવી પડે. એટલે કે $x - 1 = 0$, આથી $x = 1$ મળે. *આપણે કહી શકીએ કે $p(x) = 0$ એ બહુપદીય સમીકરણ છે અને 1 એ આ બહુપદીય સમીકરણ $p(x) = 0$ નું બીજ છે.* તેથી આપણે કહી શકીશું કે 1 એ બહુપદી $x - 1$ નું શૂન્ય છે, અથવા 1 એ બહુપદીય સમીકરણ $x - 1 = 0$ નું *બીજ* છે.

હવે, અચળ બહુપદી 5 નો વિચાર કરો. તમે આ બહુપદીનું કોઈ શૂન્ય કહી શકશો ? તેને શૂન્ય નથી કારણ કે x ને બદલે કોઈ પણ સંખ્યા લખવાથી $5x^0$ આપણને 5 જ આપશે. હકીકતમાં શૂન્ય ન હોય તેવી અચળ બહુપદીને શૂન્ય હોતું નથી. શૂન્ય બહુપદીનાં શૂન્ય વિશે શું કહી શકાય ? સરળતા ખાતર સ્વીકારી લઈએ કે દરેક વાસ્તવિક સંખ્યા એ શૂન્ય બહુપદીનું શૂન્ય છે.

ઉદાહરણ 3 : ચકાસો કે -2 અને 2 બહુપદી $x + 2$ નાં શૂન્યો છે કે નહી.

ઉકેલ : ધારો કે $p(x) = x + 2$

$p(2) = 2 + 2 = 4$, $p(-2) = -2 + 2 = 0$

તેથી, -2 એ બહુપદી $x + 2$ નું શૂન્ય છે, પરંતુ 2 એ બહુપદી $x + 2$ નું શૂન્ય નથી.

ઉદાહરણ 4 : બહુપદી $p(x) = 2x + 1$ નાં શૂન્ય શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે $p(x) = 0$

હવે, $2x + 1 = 0$ લેતાં, $x = -\frac{1}{2}$

તેથી, $-\frac{1}{2}$ એ બહુપદી $2x + 1$નું શૂન્ય છે.

હવે જો, $p(x) = ax + b$, $a \neq 0$, એ સુરેખ બહુપદી હોય, તો આપણે $p(x)$ નું શૂન્ય કેવી રીતે શોધી શકીએ ? ઉદાહરણ 4 પરથી કદાચ તમને ઉકેલ મળી શકે. $p(x)$ નું શૂન્ય શોધવું એટલે કે સમીકરણ $p(x) = 0$ નો ઉકેલ મેળવવો.

હવે, $p(x) = 0$ એટલે કે $ax + b = 0$, $a \neq 0$

તેથી, $ax = -b$

એટલે કે $x = -\frac{b}{a}$

તેથી, $x = -\frac{b}{a}$ એ $p(x)$ નું એક માત્ર શૂન્ય છે. એટલે કે સુરેખ બહુપદીને એક અને માત્ર એક જ શૂન્ય છે.

હવે, આપણે કહી શકીએ કે 1 એ $x - 1$ નું શૂન્ય છે અને -2 એ $x + 2$ નું શૂન્ય છે.

ઉદાહરણ 5 : ચકાસો : 2 અને 0 બહુપદી $x^2 - 2x$ નાં શૂન્ય છે.

ઉકેલ : ધારો કે, $p(x) = x^2 - 2x$

તેથી $p(2) = 2^2 - 2(2) = 4 - 4 = 0$

અને $p(0) = 0 - 0 = 0$

આથી, 2 અને 0 બંને બહુપદી $x^2 - 2x$ નાં શૂન્યો છે.

ચાલો આપણે અગત્યના મુદ્દાઓ નોંધીએ.

(i) બહુપદીનું શૂન્ય 0 હોય તે જરૂરી નથી.

(ii) 0 પણ બહુપદીનું શૂન્ય હોઈ શકે.

(iii) દરેક સુરેખ બહુપદીને એક અને માત્ર એક જ શૂન્ય હોય છે.

(iv) બહુપદીને એક કરતાં વધારે શૂન્ય પણ હોઈ શકે.

સ્વાધ્યાય 2.2

1. x ની નીચેની કિંમતો માટે $5x - 4x^2 + 3$ બહુપદીનું મૂલ્ય શોધો.

(i) $x = 0$ (ii) $x = -1$ (iii) $x = 2$

2. નીચે આપેલ દરેક બહુપદી માટે $p(0)$, $p(1)$ અને $p(2)$ શોધો.

(i) $p(y) = y^2 - y + 1$ (ii) $p(t) = 2 + t + 2t^2 - t^3$

(iii) $p(x) = x^3$ (iv) $p(x) = (x - 1)(x + 1)$

3. નીચેની બહુપદીની સામે દર્શાવેલ x ની કિંમતો એ આપેલ બહુપદીનાં શૂન્યો છે કે નહિ તે ચકાસો :

(i) $p(x) = 3x + 1$, $x = -\frac{1}{3}$ (ii) $p(x) = 5x - \pi$, $x = \frac{4}{5}$

(iii) $p(x) = x^2 - 1, x = 1, -1$ (iv) $p(x) = (x + 1)(x - 2), x = -1, 2$

(v) $p(x) = x^2, x = 0$ (vi) $p(x) = lx + m, x = -\frac{m}{l}$

(vii) $p(x) = 3x^2 - 1, x = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}$ (viii) $p(x) = 2x + 1, x = \frac{1}{2}$

4. નીચે આપેલી દરેક બહુપદીનાં શૂન્યો શોધો :

(i) $p(x) = x + 5$ (ii) $p(x) = x - 5$ (iii) $p(x) = 2x + 5$

(iv) $p(x) = 3x - 2$ (v) $p(x) = 3x$ (vi) $p(x) = ax,\ a \neq 0$

(vii) $p(x) = cx + d,\ c \neq 0,$ c અને d એ વાસ્તવિક સંખ્યાઓ છે.

2.4 શેષ પ્રમેય

ચાલો, બે સંખ્યાઓ 15 અને 6 લઈએ. તમે જાણો છો કે જો આપણે 15 ને 6 વડે ભાગીએ તો આપણને ભાગફળ 2 મળે અને શેષ 3 આવે. તમને યાદ છે કે આ હકીકતને કેવી રીતે દર્શાવી શકાય ? આપણે 15 ને આ પ્રમાણે લખી શકીએ :

$$15 = (6 \times 2) + 3$$

આપણે નિરીક્ષણ કર્યુ કે શેષ 3 એ ભાજક 6 કરતાં નાની છે. તે જ પ્રમાણે જો આપણે 12 ને 6 વડે ભાગીએ તો,

$$12 = (6 \times 2) + 0$$

અહીં શેષ કેટલી છે ? અહી શેષ 0 છે. આપણે કહીશું કે 6 એ 12 નો અવયવ છે અથવા 12 એ 6 નો ગુણિત છે.

હવે, પ્રશ્ન એ છે કે આપણે એક બહુપદીને બીજી બહુપદીથી ભાગી શકીએ ? શરૂઆતમાં ચાલો પ્રયત્ન કરવા માટે ભાજક તરીકે એકપદી લઈએ. તેથી ચાલો બહુપદી $2x^3 + x^2 + x$ ને એકપદી x વડે ભાગીએ.

$$(2x^3 + x^2 + x) \div x = \frac{2x^3}{x} + \frac{x^2}{x} + \frac{x}{x}$$

$$= 2x^2 + x + 1$$

હકીકતમાં, તમે નોંધ્યુ હશે કે $2x^3 + x^2 + x$ માં x સામાન્ય છે. તેથી આપણે $2x^3 + x^2 + x$ ને $x(2x^2 + x + 1)$ લખી શકીએ.

આપણે કહી શકીએ કે x અને $(2x^2 + x + 1)$ એ $2x^3 + x^2 + x$ ના અવયવો છે અને $2x^3 + x^2 + x$ એ x નો તથા $2x^2 + x + 1$નો ગુણિત છે.

ચાલો આપણે બીજી બે બહુપદીઓની જોડ $3x^2 + x + 1$ અને x નો વિચાર કરીએ.

અહીં $(3x^2 + x + 1) \div x = (3x^2 \div x) + (x \div x) + (1 \div x)$

આપણે જાણીએ છીએ કે 1 ને x વડે ભાગીને બહુપદી ન મેળવી શકાય. તેથી આવી પરિસ્થિતિમાં આપણે અટકીશું અને 1 ને શેષ તરીકે લઈશું.

$\therefore\ 3x^2 + x + 1 = \{ x \times (3x + 1)\} + 1$

અહીં $(3x + 1)$ એ ભાગફળ છે અને 1 એ શેષ છે. તમને લાગે છે કે x એ $3x^2 + x + 1$ નો અવયવ છે ? અહીં શેષ 0 ન હોવાથી x એ અવયવ નથી.

ચાલો હવે આપણે જેમાં કોઈપણ બહુપદીને શૂન્ય સિવાયની બહુપદી વડે ભાગવાની હોય એવું ઉદાહરણ જોઈએ.

ઉદાહરણ 6 : $p(x) = x + 3x^2 - 1$ અને $g(x) = 1 + x$ માટે $p(x)$ ને $g(x)$ વડે ભાગો.

ઉકેલ : આપણે આ ઉદાહરણનો ઉકેલ કેવી રીતે શોધી શકાય તેની સમજ નીચેનાં સોપાનો દ્વારા મેળવીશું.

સોપાન 1 : ભાજ્ય $x + 3x^2 - 1$ અને ભાજક $1 + x$ ને પ્રમાણિત સ્વરૂપમાં લખીએ એટલે કે ચલના ઘાતાંકના ઉતરતા ક્રમમાં પદોની ગોઠવણી કરીએ. તેથી ભાજ્ય $= 3x^2 + x - 1$ અને ભાજક $= x + 1$.

સોપાન 2 : હવે આપણે ભાજ્યના પ્રથમ પદનો ભાજકના પ્રથમ પદ વડે ભાગાકાર કરીશું. એટલે કે $3x^2$ ને x વડે ભાગીશું. તેથી ભાગફળનું પ્રથમ પદ મળશે.

$\frac{3x^2}{x} = 3x$ ભાગફળનું પ્રથમ પદ

સોપાન 3 : હવે આપણે ભાગફળના પ્રથમ પદને ભાજક સાથે ગુણીશું અને જે પરિણામ મળે તેને ભાજ્યમાંથી બાદ કરીશું એટલે કે, $(x + 1)$ ને $3x$ વડે ગુણીશું અને ગુણાકાર $3x^2 + 3x$ ને ભાજ્ય $3x^2 + x - 1$ માંથી બાદ કરીશું. તેથી આપણને શેષ તરીકે $-2x-1$ મળશે.

$3x$

$x + 1 \ \big| \ +3x^2 + x - 1$

$\quad\quad\ \ \ +3x^2 + 3x$

$\quad\quad\quad\ \ -\quad\ -$

$x^3 + \quad -2x-1$

સોપાન 4 : હવે આપણે શેષ $-2x-1$ ને નવો ભાજ્ય ગણીશું. પણ ભાજક તેનો તે જ રહેશે. હવે આપણે ભાગફળ મેળવવા સોપાન 2 નો ઉપયોગ કરીશું. એટલે કે નવા ભાજ્યના પ્રથમ પદ $-2x$ ને ભાજકના પ્રથમ પદ x વડે ભાગીશું. તેથી -2 મળશે. આ રીતે -2 એ ભાગફળનું બીજું પદ થશે.

$\frac{-2x}{x} = -2$ = ભાગફળનું બીજું પદ | નવું ભાગફળ $= 3x - 2$

સોપાન 5 : હવે આપણે ભાગફળના બીજા પદને ભાજક સાથે ગુણીશું અને જે પરિણામ મળે તેને ભાજ્યમાંથી બાદ કરીશું. એટલે કે $(x + 1)$ ને -2 વડે ગણીશું અને ગુણાકાર $-2x-2$ ને ભાજ્ય $-2x-1$ માંથી બાદ કરીશું. તેથી આપણને શેષ 1 મળશે.

$+$

$(x + 1)(-2) \ \big| \ -2x - 1$

$= -2x - 2 \ \big| \ -2x - 2$

$\quad\quad\quad\quad\quad +\quad +$

$x^3 + \quad\quad\quad +1$

આ પ્રક્રિયાને શેષ 0 ન થાય ત્યાં સુધી ચાલુ રાખવામાં આવે છે

અથવા નવા ભાજ્યની ઘાત એ ભાજકની ઘાત કરતાં ઓછી થાય ત્યાં સુધી ચાલુ રાખવામાં આવે છે. આ તબક્કે નવું ભાજ્ય એ શેષ બને છે અને ભાગફળોનો સરવાળો એ સમગ્ર ભાગફળ બને છે.

સોપાન 6 : અહીં ભાગફળ એ $3x - 2$ છે અને શેષ 1 છે.

ઉપરોક્ત સમગ્ર પ્રક્રિયા દરમિયાન આપણે શું કર્યું તેને સમગ્ર રીતે જોઈએ.

$+3x - 2$

$x + 1 \,\big)\; +3x^2 + x - 1$

$+3x^2 + 3x$

$-\quad -$

$x^3 + \quad -2x - 1$

$-2x - 2$

$+\quad +$

1

$3x^2 + x - 1 = (x + 1)\,(3x - 2) + 1$

એટલે કે **ભાજ્ય = (ભાજક × ભાગફળ) + શેષ**

વ્યાપક રીતે જો $p(x)$ ની ઘાત $\geq$ $g(x)$ ની ઘાત હોય તેવી બહુપદીઓ $p(x)$ અને $g(x)$ આપેલ હોય અને $g(x) \neq 0$, તો આપણને બહુપદીઓ $q(x)$ અને $r(x)$ એવી મળશે કે જેથી

$p(x) = g(x)\, q(x) + r(x),$

જ્યાં $r(x) = 0$ અથવા $r(x)$ ની ઘાત $<$ $g(x)$ ની ઘાત. અહીં આપણે કહી શકીએ કે $p(x)$ ને $g(x)$ વડે ભાગીએ તો ભાગફળ $q(x)$ અને શેષ $r(x)$ મળે છે.

ઉપરોક્ત ઉદાહરણમાં ભાજક એ સુરેખ બહુપદી હતી. આ સ્થિતિમાં ચાલો આપણે એ જોઈએ કે શેષ અને ભાજ્યની કેટલીક ચોક્કસ કિંમતો વચ્ચે કોઈ સંબંધ છે કે નહિ ?

$p(x) = 3x^2 + x - 1$, માં આપણે x ની જગ્યાએ -1 લેતાં,

$p(-1) = 3(-1)^2 + (-1) - 1 = 1$

તેથી $p(x) = 3x^2 + x - 1$ ને $x + 1$ વડે ભાગતાં મળતી શેષ અને બહુપદી $p(x)$ નું $x = -1$ માટે મળતું મૂલ્ય સમાન છે.

ચાલો બીજાં ઉદાહરણ જોઈએ.

ઉદાહરણ 7 : બહુપદી $3x^4 - 4x^3 - 3x - 1$ ને $x - 1$ વડે ભાગો.

ઉકેલ : ભાગાકાર કરતાં,

$$\begin{array}{r|l} & 3x^3 - x^2 - x - 4 \\ \hline x - 1 & 3x^4 - 4x^3 - 3x - 1 \\ & \underline{\underset{-}{}3x^4 \underset{+}{-} 3x^3} \\ & \quad - x^3 - 3x - 1 \\ & \quad \underline{\underset{+}{-} x^3 \underset{-}{+} x^2} \\ & \quad\quad - x^2 - 3x - 1 \\ & \quad\quad \underline{\underset{+}{-} x^2 \underset{-}{+} x} \\ & \quad\quad\quad - 4x - 1 \\ & \quad\quad\quad \underline{\underset{+}{-} 4x \underset{-}{+} 4} \\ & \quad\quad\quad\quad - 5 \end{array}$$

અહીં શેષ – 5 છે. $x - 1$ નું શૂન્ય 1 છે. તેથી જો $p(x)$ માં $x = 1$ મૂકીએ તો,

$$p(1) = 3(1)^4 - 4(1)^3 - 3(1) - 1$$

$$= 3 - 4 - 3 - 1$$

$$= -5$$ અને તે શેષ પણ છે.

ઉદાહરણ 8 : $p(x) = x^3 + 1$ ને $x + 1$ વડે ભાગતાં મળતી શેષ શોધો.

ઉકેલ : ભાગાકાર કરતાં,

$$\begin{array}{r|l} & x^2 - x + 1 \\ \hline x + 1 & x^3 + 1 \\ & x^3 + x^2 \\ & \underline{- \quad -} \\ & \quad - x^2 + 1 \\ & \quad - x^2 - x \\ & \quad \underline{+ \quad +} \\ & \quad\quad x + 1 \\ & \quad\quad x + 1 \\ & \quad\quad \underline{- \quad -} \\ & \quad\quad\quad 0 \end{array}$$

અહીં શેષ 0 છે અને $p(x) = x^3 + 1$ છે. વળી $x + 1 = 0$ નું બીજ –1 છે. તેથી જો $p(x)$ માં $x = -1$ મૂકીએ તો,

$$p(-1) = (-1)^3 + 1$$

$$= -1 + 1$$

$$= 0$$

શું ખરેખર ભાગાકાર કરતાં મળતી શેષ પણ 0 છે.

શું બહુપદીનો સુરેખ બહુપદી વડે ભાગાકાર કરીને શેષ મેળવવાની આ રીત સરળ નથી ? હવે આપણે વ્યાપક રીતે નીચેના પ્રમેય સ્વરૂપમાં આ સત્ય જોઈશું. વળી તમને આ પ્રમેયની સાબિતી આપીને દર્શાવીશું કે શા માટે આ પ્રમેય સત્ય છે.

શેષ પ્રમેય : *જો બહુપદી $p(x)$ની ઘાત 1 કે 1 કરતાં વધુ હોય અને તેને સુરેખ બહુપદી $x - a$ વડે ભાગવામાં આવે તો શેષ $p(a)$ મળે. અહીં a વાસ્તવિક સંખ્યા છે.*

સાબિતી : ધારો કે કોઈ બહુપદી $p(x)$ની ઘાત એક કે એક કરતાં વધારે છે. વળી, ધારો કે ભાજ્ય $p(x)$ને ભાજક $(x - a)$ વડે ભાગવામાં આવે, તો ભાગફળ $q(x)$ મળે છે અને શેષ $r(x)$ છે. આથી,

$$p(x) = (x - a)\, q(x) + r(x)$$

ભાજક $x - a$ ની ઘાત 1 છે અને તેથી શેષ $r(x)$ની ઘાત $<$ ભાજક $(x - a)$ ની ઘાત એટલે કે $r(x)$ ની ઘાત 0 છે. એટલે કે $r(x)$ એ શૂન્યેતર અચળ અથવા $r(x) = 0$.

તેથી x ની તમામ કિંમતો માટે $r(x) = r$ (અચળ).

$$\therefore\ p(x) = (x - a)\, q(x) + r.$$

આ નિત્યસમમાં $x = a$ લેતાં,

$$p(a) = (a - a)\, q(a) + r$$
$$= r$$

$\therefore$ શેષ r એ $p(a)$ છે. આથી આ પ્રમેય સિદ્ધ થાય છે.

ચાલો, આ પ્રમેયનો ઉપયોગ આપણે બીજા ઉદાહરણમાં કરીએ.

ઉદાહરણ 9 : જ્યારે $x^4 + x^3 - 2x^2 + x + 1$ ને $x - 1$ વડે ભાગવામાં આવે ત્યારે મળતી શેષ શોધો.

ઉકેલ : અહીં $p(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 + x + 1$ અને $x - 1$ નું શૂન્ય 1 છે.

$$\therefore\ p(1) = (1)^4 + (1)^3 - 2(1)^2 + 1 + 1 = 2$$

તેથી શેષ પ્રમેય પ્રમાણે જ્યારે $x^4 + x^3 - 2x^2 + x + 1$ ને $x - 1$ વડે ભાગવામાં આવે ત્યારે મળતી શેષ 2 છે.

ઉદાહરણ 10 : બહુપદી $q(t) = 4t^3 + 4t^2 - t - 1$ એ $2t + 1$ ની ગુણિત છે કે નહીં તે ચકાસો.

ઉકેલ : તમે જાણો છો કે જો $q(t)$ ને $2t + 1$ વડે ભાગીએ અને શેષ 0 મળે તો $q(t)$ એ $2t + 1$ ની ગુણિત થાય.

તેથી $2t + 1 = 0$ લેતાં, $t = -\frac{1}{2}$.

$$q\left(-\frac{1}{2}\right) = 4\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 4\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right) - 1 = -\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} - 1 = 0$$

તેથી $q(t)$ ને $2t + 1$ વડે ભાગતાં મળતી શેષ = 0. તેથી $2t + 1$ એ બહુપદી $q(t)$ નો એક અવયવ છે. એટલે કે $q(t)$ એ $2t + 1$ નો ગુણિત છે.

સ્વાધ્યાય 2.3

1. બહુપદી $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ નો નીચેના ભાજક વડે ભાગાકાર કરો અને શેષ શોધો.

(i) $x + 1$ (ii) $x - \frac{1}{2}$ (iii) x (iv) $x + \pi$ (v) $5 + 2x$

2. $x^3 - ax^2 + 6x - a$ ને $x - a$ વડે ભાગતાં મળતી શેષ શોધો.

3. $7 + 3x$ એ $3x^3 + 7x$ નો અવયવ છે કે નહિ તે ચકાસો.

2.5 બહુપદીઓનું અવયવીકરણ

ઉદાહરણ 10 પર દૃષ્ટિપાત કરતાં જણાય છે કે શેષ = $q\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$. અહીં $(2t + 1)$ એ $q(t)$ નો એક અવયવ છે. $q(t) = (2t + 1)\, g(t)$. આ પરિણામ નીચેના અવયવ પ્રમેય માટે ઉપયોગી છે.

અવયવ પ્રમેય : *જો બહુપદી $p(x)$ ની ઘાત એક કે એક કરતાં વધુ હોય અને a વાસ્તવિક સંખ્યા હોય તો,*

(i) જો $p(a) = 0$ હોય તો $x - a$ એ $p(x)$ નો એક અવયવ છે અને

(ii) જો $x - a$ એ $p(x)$ નો અવયવ હોય તો $p(a) = 0$.

સાબિતી : શેષ પ્રમેય પરથી, આપણે જાણીએ છીએ કે $p(x)=(x - a)\, q(x) + p(a)$.

(i) જો $p(a) = 0$ તો $p(x) = (x - a)\, q(x)$. આથી $x - a$ એ $p(x)$ નો અવયવ છે.

(ii) વળી $x - a$ એ $p(x)$ નો અવયવ હોય તો કોઈક બહુપદી $g(x)$ માટે $p(x) = (x - a)\, g(x)$

હવે, $p(a) = (a - a)\, g(a) = 0$.

ઉદાહરણ 11 : $x + 2$ એ $x^3 + 3x^2 + 5x + 6$ અને $2x + 4$ નો અવયવ છે કે નહી તે ચકાસો.

ઉકેલ : $x + 2$ નું શૂન્ય -2 છે.

ધારો કે, $p(x) = x^3 + 3x^2 + 5x + 6$ અને $s(x) = 2x + 4$

$$p(-2) = (-2)^3 + 3(-2)^2 + 5(-2) + 6$$
$$= -8 + 12 - 10 + 6$$
$$= 0$$

તેથી અવયવ પ્રમેય પરથી $x + 2$ એ $x^3 + 3x^2 + 5x + 6$ નો અવયવ છે.

વળી, $s(-2) = 2(-2) + 4 = 0$

તેથી $x + 2$ એ $2x + 4$ નો અવયવ છે. હકીકતમાં તમે અવયવ પ્રમેયનો ઉપયોગ કર્યા વગર પણ આ ચકાસી શકો છો, કારણ કે, $2x + 4 = 2(x + 2)$.

ઉદાહરણ 12 : જો $x - 1$ એ $4x^3 + 3x^2 - 4x + k$ નો અવયવ હોય તો k ની કિંમત શોધો.

ઉકેલ : $x - 1$ એ $p(x) = 4x^3 + 3x^2 - 4x + k$ નો અવયવ છે.

$\therefore\ p(1) = 0$

હવે $p(1) = 4(1)^3 + 3(1)^2 - 4(1) + k$

$\therefore\ 4 + 3 - 4 + k = 0$

$\therefore\ k = -3$

હવે આપણે અવયવ પ્રમેયના ઉપયોગથી દ્વિઘાત અને ત્રિઘાત બહુપદીઓના અવયવ પાડવાનું શીખીશું.

તમે દ્વિઘાત બહુપદી $x^2 + lx + m$ ના અવયવો કેવી રીતે પાડવા તે જાણો છો. તેમાં મધ્યમ પદ lx ને વિભાજિત કરીને તમે અવયવો મેળવેલ. $ab = m$ અને તે રીતે મધ્યમપદ $lx = ax + bx$ તરીકે વિભાજિત થાય. પછી $x^2 + lx + m = (x + a)(x + b)$. ચાલો આપણે દ્વિઘાત બહુપદી $ax^2 + bx + c$, જ્યાં $a \neq 0$ અને a, b, c અચળ છે, ના અવયવો પાડવાનો પ્રયત્ન કરીએ.

મધ્યમ પદને વિભાજિત કરીને બહુપદી $ax^2 + bx + c$ ના અવયવો મેળવવાની રીત આ પ્રમાણે છે :

ધારો કે તેના અવયવો $(px + q)$ અને $(rx + s)$ છે.

$ax^2 + bx + c = (px + q)(rx + s) = pr\,x^2 + (ps + qr)\,x + qs$

x^2 ના સહગુણકોને સરખાવતાં, $a = pr$.

તે જ પ્રમાણે x ના સહગુણકોને સરખાવતાં $b = ps + qr$ અને અચળ પદોને સરખાવતાં $c = qs$.

આ આપણને બતાવે છે કે b એ ps અને qr નો સરવાળો છે. તેમનો ગુણાકાર $(ps)(qr) = (pr)(qs) = ac$.

તેથી $ax^2 + bx + c$ ના અવયવો પાડવા માટે આપણે b ને જેમનો ગુણાકાર ac થાય એવી બે સંખ્યાના સરવાળા તરીકે લખવું પડે. નીચેના ઉદાહરણ 13 પરથી આ વાત સરળતાથી સમજાશે.

ઉદાહરણ 13 : $6x^2 + 17x + 5$ ના અવયવો મધ્યમ પદને વિભાજિત કરીને અને અવયવ પ્રમેયનો ઉપયોગ કરીને મેળવો.

ઉકેલ 1 : (*મધ્યમપદને વિભાજિત કરવાની રીત*) : આપણે એવી બે સંખ્યા p અને q શોધીએ કે જેથી $p + q = 17$ અને $pq = 6 \times 5 = 30$ થાય. હવે આપણે અવયવો મેળવીએ.

ચાલો આપણે 30 ના અવયવોની જોડનો વિચાર કરીએ. તેમાંની કેટલીક 1 અને 30, 2 અને 15, 3 અને 10, 5 અને 6 આ બધી જોડમાંથી 2 અને 15 ની જોડ આપણને $p + q = 17$ આપે છે.

તેથી $6x^2 + 17x + 5 = 6x^2 + (2 + 15)x + 5$

$= 6x^2 + 2x + 15x + 5$

$= 2x(3x + 1) + 5(3x + 1)$

$= (3x + 1)(2x + 5)$

ઉકેલ 2 : અવયવ પ્રમેયની મદદથી $6x^2 + 17x + 5 = 6\left(x^2 + \frac{17}{6}x + \frac{5}{6}\right) = 6\,p(x)$ કહો. જો a અને b, $p(x)$ નાં શૂન્ય હોય તો, $6x^2 + 17x + 5 = 6(x - a)(x - b)$. તેથી, $ab = \frac{5}{6}$. ચાલો a અને b ની કેટલીક સંભવિત કિંમતો જોઇએ.

$\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{5}{3}, \pm\frac{5}{2}, \pm 1$. હવે, $p\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}+\frac{17}{6}\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{5}{6}\neq 0$. પરંતુ $p\left(\frac{-1}{3}\right)=\left(\frac{-1}{3}\right)^2+\frac{17}{6}\left(\frac{-1}{3}\right)+\frac{5}{6}=0$.

તેથી $\left(x+\frac{1}{3}\right)$ એ $p(x)$ નો અવયવ છે.

તે જ પ્રમાણે પ્રયત્નો દ્વારા $\left(x+\frac{5}{2}\right)$ એ $p(x)$ નો અવયવ છે તે નક્કી થઈ શકે.

$$6x^2 + 17x + 5 = 6\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{5}{2}\right)$$

$$= 6\left(\frac{3x+1}{3}\right)\left(\frac{2x+5}{2}\right)$$

$$= (3x+1)(2x+5)$$

ઉપરના ઉદાહરણમાં મધ્યમ પદના ભાગ પાડવાની રીત વધુ સરળ લાગે છે. છતાંયે ચાલો બીજું ઉદાહરણ જોઈએ.

ઉદાહરણ 14 : અવયવ પ્રમેયનો ઉપયોગ કરીને $y^2 - 5y + 6$ ના અવયવ પાડો.

ઉકેલ : ધારો કે $p(y) = y^2 - 5y + 6$. હવે જો $p(y) = (y - a)(y - b)$, તો સ્પષ્ટ છે કે ab અચળ પદ છે. તેથી $ab = 6$. તેથી $p(y)$ ના અવયવો શોધવા માટે 6 ના અવયવોનો વિચાર કરીએ.

6 ના અવયવો : 1, 2, 3 અને 6

હવે, $p(2) = 2^2 - (5 \times 2) + 6 = 0$

તેથી, $y - 2$ એ $p(y)$ નો અવયવ છે.

આ ઉપરાંત, $p(3) = 3^2 - (5 \times 3) + 6 = 0$

તેથી, $y - 3$ એ પણ $y^2 - 5y + 6$નો અવયવ છે.

તેથી, $y^2 - 5y + 6 = (y - 2)(y - 3)$

આપણે નોંધીએ છીએ કે $y^2 - 5y + 6$ ના મધ્યમ પદ $-5y$ ને વિભાજિત કરીને પણ અવયવો મેળવી શકીએ.

ચાલો, ત્રિઘાત બહુપદીના અવયવો પાડવાનું વિચારીએ. અહીં ભાગ પાડવાની રીતનો ઉપયોગ એ શક્ય નથી. આપણે ઓછામાં ઓછો એક અવયવ નક્કી કરીએ તો જ રીત સરળ બને છે. એ તમે નીચેના ઉદાહરણમાં જોશો.

ઉદાહરણ 15 : અવયવ પાડો : $x^3 - 23x^2 + 142x - 120$.

ઉકેલ : ધારો કે, $p(x) = x^3 - 23x^2 + 142x - 120$

હવે આપણે -120 ના બધા જ અવયવો વિચારતાં તેમાંનાં કેટલાંક $\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm5, \pm6, \pm8, \pm10, \pm12, \pm15, \pm20, \pm24, \pm30, \pm60$ છે.

આપણે પ્રયત્નો દ્વારા જાણી શકીએ કે $p(1) = 0$. તેથી $x - 1$ એ $p(x)$ નો અવયવ છે.

હવે, $x^3 - 23x^2 + 142x - 120 = x^3 - x^2 - 22x^2 + 22x + 120x - 120$

$= x^2(x - 1) - 22x(x - 1) + 120(x - 1)$ (કેમ ?)

$= (x - 1)(x^2 - 22x + 120)$ [$(x - 1)$ સામાન્ય લેતાં]

આપણે $p(x)$ ને $x - 1$ વડે ભાગીને પણ ઉપરોક્ત જવાબ મેળવી શકીએ.

હવે, $x^2 - 22x + 120$ ના અવયવો મધ્યમ પદને વિભાજીત કરીને અથવા અવયવ પ્રમેયનો ઉપયોગ કરીને મેળવી શકીએ. મધ્યમ પદને વિભાજીત કરતાં,

$$x^2 - 22x + 120 = x^2 - 12x - 10x + 120$$

$$= x(x - 12) - 10(x - 12)$$

$$= (x - 12)(x - 10)$$

તેથી, $x^3 - 23x^2 - 142x - 120 = (x - 1)(x - 10)(x - 12)$

સ્વાધ્યાય 2.4

1. નીચે આપેલ બહુપદીમાંથી કઈ બહુપદીનો અવયવ $(x + 1)$ છે તે નક્કી કરો :

(i) $x^3 + x^2 + x + 1$ (ii) $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

(iii) $x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x + 1$ (iv) $x^3 - x^2 - (2 + \sqrt{2})x + \sqrt{2}$

2. આપેલ બહુપદી $g(x)$ એ આપેલ બહુપદી $p(x)$ નો એક અવયવ છે કે નહિ તે અવયવ પ્રમેય પરથી નક્કી કરો.

(i) $p(x) = 2x^3 + x^2 - 2x - 1$, $g(x) = x + 1$

(ii) $p(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$, $g(x) = x + 2$

(iii) $p(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$, $g(x) = x - 3$

3. નીચેના દરેકમાં જો $x - 1$ એ $p(x)$ નો એક અવયવ હોય તો k ની કિંમત શોધો.

(i) $p(x) = x^2 + x + k$ (ii) $p(x) = 2x^2 + kx + \sqrt{2}$

(iii) $p(x) = kx^2 - \sqrt{2}x + 1$ (iv) $p(x) = kx^2 - 3x + k$

4. અવયવ પાડો :

(i) $12x^2 - 7x + 1$ (ii) $2x^2 + 7x + 3$

(iii) $6x^2 + 5x - 6$ (iv) $3x^2 - x - 4$

5. અવયવ પાડો :

(i) $x^3 - 2x^2 - x + 2$ (ii) $x^3 - 3x^2 - 9x - 5$

(iii) $x^3 + 13x^2 + 32x + 20$ (iv) $2y^3 + y^2 - 2y - 1$

2.6 બૈજિક નિત્યસમો

અગાઉના વર્ગોના અભ્યાસ પરથી તમને યાદ હશે કે **બૈજિક નિત્યસમો** એ આપેલ ચલની તમામ કિંમતો માટે સત્ય બૈજિક સમીકરણો જ છે. નીચેના તમામ નિત્યસમો તમે અગાઉના વર્ગોમાં શીખ્યા છે.

નિત્યસમ I : $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

નિત્યસમ II : $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

નિત્યસમ III : $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$

નિત્યસમ IV : $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

બૈજિક પદાવલીઓના અવયવો પાડવા માટે તમે કેટલાક બૈજિક નિત્યસમોનો ઉપયોગ કરેલ છે. તમે ગણતરીઓ કરવામાં તેનો ઉપયોગ જોઈ શકો છો.

ઉદાહરણ 16 : યોગ્ય નિત્યસમનો યોગ્ય ઉપયોગ કરીને નીચેના ગુણાકાર મેળવો.

(i) $(x + 3)(x + 3)$ (ii) $(x - 3)(x + 5)$

ઉકેલ : (i) અહીં નિત્યસમ I નો ઉપયોગ કરતાં : $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

$y = 3$ મૂકતાં, $(x + 3)(x + 3) = (x + 3)^2 = x^2 + 2(x)(3) + (3)^2$

$= x^2 + 6x + 9$

(ii) ઉપરના નિત્યસમ IV નો ઉપયોગ કરતાં, એટલે કે : $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$.

$(x - 3)(x + 5) = x^2 + (-3 + 5)x + (-3)(5)$

$= x^2 + 2x - 15$

ઉદાહરણ 17 : સીધો ગુણાકાર કર્યા સિવાય 105×106 ની કિંમત મેળવો.

ઉકેલ : $105 \times 106 = (100 + 5) \times (100 + 6)$

$= (100)^2 + (5 + 6)(100) + (5 \times 6)$, (નિત્યસમ IV નો ઉપયોગ કરતાં)

$= 10000 + 1100 + 30$

$= 11130$

ઉપરોક્ત દર્શાવેલ નિત્યસમોનો ઉપયોગ તમે પદાવલીઓનો ગુણાકાર કરવામાં કરેલ છે. આ નિત્યસમો બૈજિક પદાવલીઓના અવયવો પાડવામાં પણ ઉપયોગી છે. તમે હવે પછીનાં ઉદાહરણોમાં આ હકીકત જોઈ શકશો.

ઉદાહરણ 18 : અવયવ પાડો.

(i) $49a^2 + 70ab + 25b^2$ (ii) $\frac{25}{4}x^2 - \frac{y^2}{9}$

ઉકેલ : (i) અહીં $49a^2 = (7a)^2$, $25b^2 = (5b)^2$, $70ab = 2(7a)(5b)$

આપેલી પદાવલીને $x^2 + 2xy + y^2$, સાથે સરખાવતાં $x = 7a$ અને $y = 5b$.

નિત્યસમ I નો ઉપયોગ કરતાં,

$$49a^2 + 70ab + 25b^2 = (7a + 5b)^2 = (7a + 5b)(7a + 5b)$$

(ii) $\frac{25}{4}x^2 - \frac{y^2}{9} = \left(\frac{5}{2}x\right)^2 - \left(\frac{y}{3}\right)^2$

હવે નિત્યસમ III સાથે સરખાવતાં,

$$\frac{25}{4}x^2 - \frac{y^2}{9} = \left(\frac{5}{2}x\right)^2 - \left(\frac{y}{3}\right)^2 = \left(\frac{5}{2}x + \frac{y}{3}\right)\left(\frac{5}{2}x - \frac{y}{3}\right)$$

અત્યાર સુધી આપણે તમામ ચાર નિત્યસમોનો ઉપયોગ દ્વિઘાત બહુપદીઓના ગુણાકાર કરવામાં કરેલ છે. ચાલો, આપણે નિત્યસમ I ને ત્રિપદી $x + y + z$ સુધી વિસ્તારીએ. આપણે $(x + y + z)^2$ નું વિસ્તરણ નિત્યસમ I નો ઉપયોગ કરીને મેળવીએ.

$x + y = t$ ધારતાં,

$(x + y + z)^2 = (t + z)^2$

$= t^2 + 2tz + t^2$ (નિત્યસમ I નો ઉપયોગ કરતાં)

$= (x + y)^2 + 2(x + y)z + z^2$ (t ની કિંમત મૂકતાં)

$= x^2 + 2xy + y^2 + 2xz + 2yz + z^2$ (નિત્યસમ I નો ઉપયોગ કરતાં)

$= x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$ (પદોની પુનઃગોઠવણી કરતાં)

તેથી આપણને નીચેનું નિત્યસમ મળશે.

નિત્યસમ V : $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$

નોંધ : જમણી બાજુની બહુપદી એ ડાબી બાજુની બહુપદીનું વિસ્તરણ છે. યાદ રાખો કે $(x + y + z)^2$ એ ત્રણ વર્ગવાળા પદ અને ત્રણ ગુણાકારના પદ ધરાવે છે.

ઉદાહરણ 19 : $(3a + 4b + 5c)^2$ નું વિસ્તરણ કરો.

ઉકેલ : આપેલ પદાવલિ $(x + y + z)^2$ સાથે સરખાતાં,

$x = 3a$, $y = 4b$ અને $z = 5c$.

નિત્યસમ V નો ઉપયોગ કરતાં,

$$(3a + 4b + 5c)^2 = (3a)^2 + (4b)^2 + (5c)^2 + 2(3a)(4b) + 2(4b)(5c) + 2(5c)(3a)$$

$$= 9a^2 + 16b^2 + 25c^2 + 24ab + 40bc + 30ac$$

ઉદાહરણ 20 : $(4a - 2b - 3c)^2$ નું વિસ્તરણ કરો.

ઉકેલ : નિત્યસમ V નો ઉપયોગ કરતાં,

$$(4a - 2b - 3c)^2 = [4a + (-2b) + (-3c)]^2$$
$$= (4a)^2 + (-2b)^2 + (-3c)^2 + 2(4a)(-2b) + 2(-2b)(-3c) + 2(-3c)(4a)$$
$$= 16a^2 + 4b^2 + 9c^2 - 16ab + 12bc - 24ac$$

ઉદાહરણ 21 : અવયવ પાડો : $4x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 2yz + 4xz$.

ઉકેલ : $4x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 2yz + 4xz = (2x)^2 + (-y)^2 + (z)^2 + 2(2x)(-y) + 2(-y)(z) + 2(2x)(z)$

$= [2x + (-y) + z]^2$ (નિત્યસમ V નો ઉપયોગ કરતાં,)

$= (2x - y + z)^2 = (2x - y + z)(2x - y + z)$

અત્યાર સુધી આપણે બે ઘાતવાળા નિત્યસમો જોયા છે. ચાલો આપણે $(x + y)^3$ નો ઉકેલ મેળવવા માટે નિત્યસમ I નો ઉપયોગ કરીએ.

$$(x + y)^3 = (x + y)(x + y)^2$$
$$= (x + y)(x^2 + 2xy + y^2)$$
$$= x(x^2 + 2xy + y^2) + y(x^2 + 2xy + y^2)$$
$$= x^3 + 2x^2y + xy^2 + x^2y + 2xy^2 + y^3$$
$$= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$
$$= x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$$

આમ આપણને નીચેનું નિત્યસમ મળશે :

નિત્યસમ VI : $\boldsymbol{(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy\,(x + y)}$

નિત્યસમ VI માં y ના બદલે $-y$ મૂકતાં,

નિત્યસમ VII : $\boldsymbol{(x - y)^3 = x^3 - y^3 - 3xy(x - y)}$

$\boldsymbol{= x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3}$

ઉદાહરણ 22 : નીચે આપેલા ઘનને વિસ્તૃત સ્વરૂપમાં લખો.

(i) $(3a + 4b)^3$ (ii) $(5p - 3q)^3$

ઉકેલ : (i) આપેલ પદાવલીને $(x + y)^3$ સાથે સરખાવતાં,

$x = 3a$ અને $y = 4b$.

તેથી નિત્યસમ VI નો ઉપયોગ કરતાં,

$$(3a + 4b)^3 = (3a)^3 + (4b)^3 + 3(3a)(4b)(3a + 4b)$$
$$= 27a^3 + 64b^3 + 108a^2b + 144ab^2$$

(ii) આપેલી પદાવલીને $(x - y)^3$ સાથે સરખાવતાં,

$$x = 5p, \quad y = 3q.$$

તેથી નિત્યસમ VII નો ઉપયોગ કરતાં,

$$(5p - 3q)^3 = (5p)^3 - (3q)^3 - 3(5p)(3q)(5p - 3q)$$
$$= 125p^3 - 27q^3 - 225p^2q + 135pq^2$$

ઉદાહરણ 23 : યોગ્ય નિત્યસમનો ઉપયોગ કરીને કિંમત શોધો.

(i) $(104)^3$ (ii) $(999)^3$

ઉકેલ : (i) $(104)^3 = (100 + 4)^3$

$= (100)^3 + (4)^3 + 3(100)(4)(100 + 4)$ (નિત્યસમ VI નો ઉપયોગ કરતાં)

$= 1000000 + 64 + 124800$

$= 1124864$

(ii) $(999)^3 = (1000 - 1)^3$

$= (1000)^3 - (1)^3 - 3(1000)(1)(1000 - 1)$ (નિત્યસમ VII નો ઉપયોગ કરતાં)

$= 1000000000 - 1 - 2997000$

$= 997002999$

ઉદાહરણ 24 : અવયવ પાડો : $8x^3 + 27y^3 + 36x^2y + 54xy^2$

ઉકેલ : આ પદાવલીને નીચે પ્રમાણે પણ લખી શકાય.

$(2x)^3 + (3y)^3 + 3(4x^2)(3y) + 3(2x)(9y^2)$

$= (2x)^3 + (3y)^3 + 3(2x)^2(3y) + 3(2x)(3y)^2$

$= (2x + 3y)^3$ (નિત્યસમ VI નો ઉપયોગ કરતાં)

$= (2x + 3y)(2x + 3y)(2x + 3y)$

હવે, $(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$ નો વિચાર કરો.

વિસ્તરણ કરતાં,

$x(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) + y(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) + z(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

$= x^3 + xy^2 + xz^2 - x^2y - xyz - zx^2 + x^2y + y^3 + yz^2 - xy^2 - y^2z - xyz + x^2z + y^2z + z^3 - xyz - yz^2 - xz^2$

$= x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ (સાદુંરૂપ આપતાં)

તેથી, આપણને નીચેનું નિત્યસમ મળશે.

નિત્યસમ VIII : $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

ઉદાહરણ 25 : અવયવ પાડો : $8x^3 + y^3 + 27z^3 - 18xyz$

ઉકેલ : $8x^3 + y^3 + 27z^3 - 18xyz = (2x)^3 + y^3 + (3z)^3 - 3(2x)(y)(3z)$

$$= (2x + y + 3z)[(2x)^2 + y^2 + (3z)^2 - (2x)(y) - (y)(3z) - (2x)(3z)]$$

$$= (2x + y + 3z)\ (4x^2 + y^2 + 9z^2 - 2xy - 3yz - 6xz)$$

સ્વાધ્યાય : 2.5

1. યોગ્ય નિત્યસમનો ઉપયોગ કરીને નીચેના ગુણાકાર મેળવો :

(i) $(x + 4)(x + 10)$ (ii) $(x + 8)(x - 10)$ (iii) $(3x + 4)(3x - 5)$

(iv) $\left(y^2 + \frac{3}{2}\right)\left(y^2 - \frac{3}{2}\right)$ (v) $(3 - 2x)(3 + 2x)$

2. સીધો ગુણાકાર કર્યા સિવાય નિત્યસમોનો ઉપયોગ કરીને નીચેના ગુણાકારની કિંમતો મેળવો :

(i) 103×107 (ii) 95×96 (iii) 104×96

3. યોગ્ય નિત્યસમનો ઉપયોગ કરી અવયવ પાડો :

(i) $9x^2 + 6xy + y^2$ (ii) $4y^2 - 4y + 1$ (iii) $x^2 - \frac{y^2}{100}$

4. યોગ્ય નિત્યસમનો ઉપયોગ કરીને વિસ્તરણ કરો :

(i) $(x + 2y + 4z)^2$ (ii) $(2x - y + z)^2$ (iii) $(-2x + 3y + 2z)^2$

(iv) $(3a - 7b - c)^2$ (v) $(-2x + 5y - 3z)^2$ (vi) $\left[\frac{1}{4}a - \frac{1}{2}b + 1\right]^2$

5. અવયવ પાડો :

(i) $4x^2 + 9y^2 + 16z^2 + 12xy - 24yz - 16xz$

(ii) $2x^2 + y^2 + 8z^2 - 2\sqrt{2}\ xy + 4\sqrt{2}\ yz - 8xz$

6. નીચેના ઘનનું વિસ્તરણ કરો :

(i) $(2x + 1)^3$ (ii) $(2a - 3b)^3$ (iii) $\left[\frac{3}{2}x + 1\right]^3$ (iv) $\left[x - \frac{2}{3}y\right]^3$

7. યોગ્ય નિત્યસમનો ઉપયોગ કરીને કિંમત મેળવો :

(i) $(99)^3$ (ii) $(102)^3$ (iii) $(998)^3$

8. નીચેના પૈકી પ્રત્યેકના અવયવ પાડો :

(i) $8a^3 + b^3 + 12a^2b + 6ab^2$ (ii) $8a^3 - b^3 - 12a^2b + 6ab^2$

(iii) $27 - 125a^3 - 135a + 225a^2$ (iv) $64a^3 - 27b^3 - 144a^2b + 108ab^2$

(v) $27p^3 - \frac{1}{216} - \frac{9}{2}p^2 + \frac{1}{4}p$

9. ચકાસો : (i) $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$ (ii) $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$

10. નીચેના પૈકી દરેકના અવયવ પાડો :

(i) $27y^3 + 125z^3$ (ii) $64m^3 - 343n^3$

[**સૂચન** : પ્રશ્ન 9 જુઓ]

11. અવયવ પાડો : $27x^3 + y^3 + z^3 - 9xyz$

12. ચકાસો $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = \frac{1}{2}(x + y + z)[(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2]$

13. જો $x + y + z = 0$ તો સાબિત કરો કે $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$.

14. ઘનનું મૂલ્ય મેળવ્યા સિવાય નીચેના દરેકની કિંમતો મેળવો :

(i) $(-12)^3 + (7)^3 + (5)^3$

(ii) $(28)^3 + (-15)^3 + (-13)^3$

15. નીચે લંબચોરસનાં ક્ષેત્રફળ દર્શાવેલ છે તેમની સંભવિત લંબાઈ અને પહોળાઈ શોધો :

ક્ષેત્રફળ : $25a^2 - 35a + 12$	ક્ષેત્રફળ : $35y^2 + 13y - 12$
(i)	(ii)

16. નીચે લંબઘનનાં ઘનફળ દર્શાવેલ છે. તેમનાં શક્ય પરિમાણ શોધો :

ઘનફળ : $3x^2 - 12x$	ઘનફળ : $12ky^2 + 8ky - 20k$
(i)	(ii)

2.7 સારાંશ

આ પ્રકરણમાં તમે નીચેના મુદ્દાઓ શીખ્યા :

1. એક ચલ x વાળી બૈજિક અભિવ્યક્તિને *બહુપદી* $p(x)$ સ્વરૂપમાં નીચે પ્રમાણે લખી શકાય

$$p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0,$$

જ્યાં $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ અચળ છે અને $a_n \neq 0$.

$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ એ અનુક્રમે $x^0, x, x^2, \ldots, x^n$ ના *સહગુણકો* છે અને બહુપદીની ઘાત n છે. $a_n \neq 0$ અને $a_nx^n, a_{n-1}x^{n-1}, \ldots, a_0$ ને બહુપદી $p(x)$નાં *પદો* કહે છે.

2. એક પદવાળી બહુપદીને એકપદી કહે છે.

3. બે પદવાળી બહુપદીને દ્વિપદી કહે છે.

4. ત્રણ પદવાળી બહુપદીને ત્રિપદી કહે છે.

5. જે બહુપદીની ઘાત 1 હોય તેને સુરેખ બહુપદી કહે છે.

6. જે બહુપદીની ઘાત 2 હોય તેને દ્વિઘાત બહુપદી કહે છે.

7. જે બહુપદીની ઘાત 3 હોય તેને ત્રિઘાત બહુપદી કહે છે.

8. જો $p(a) = 0$ હોય તો વાસ્તવિક સંખ્યા 'a' ને બહુપદીનું *શૂન્ય* કહે છે. વળી, 'a' ને સમીકરણ $p(x)=0$ નું બીજ પણ કહે છે.

9. દરેક એક ચલવાળી સુરેખ બહુપદીને અનન્ય શૂન્ય હોય છે. શૂન્ય સિવાયની અચળ બહુપદીને શૂન્ય હોતું નથી અને દરેક વાસ્તવિક સંખ્યા એ શૂન્ય બહુપદીનું શૂન્ય હોય છે.

10. **શેષ પ્રમેય :** જો બહુપદી $p(x)$ ની ઘાત 1 કે 1 કરતાં વધુ હોય અને તેને સુરેખ બહુપદી $x - a$ વડે ભાગવામાં આવે તો શેષ $p(a)$ આવે.

11. **અવયવ પ્રમેય :** જો $p(a) = 0$ હોય તો $x - a$ એ $p(x)$ નો અવયવ છે અને જો $x - a$ એ $p(x)$ નો અવયવ હોય તો $p(a) = 0$.

12. $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$

13. $(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$

14. $(x - y)^3 = x^3 - y^3 - 3xy(x - y)$

15. $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

યામ ભૂમિતિ

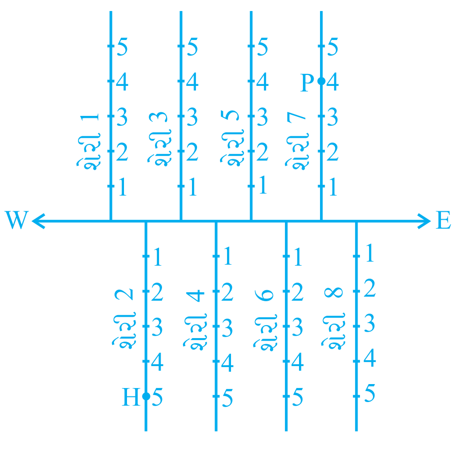
What's the good of Mercator's North Poles and Equators, Tropics, Zones and Meridian Lines ?' So the Bellman would cry; and crew would reply ' They are merely conventional signs!'

LEWIS CARROLL, *The Hunting of the Snark*

3.1 પ્રાસ્તાવિક

અગાઉ તમે સંખ્યારેખા પર બિંદુનું નિરૂપણ કરવાનું શીખી ગયાં છો. તમે એ પણ જાણો છો કે બિંદુને રેખા પર કેવી રીતે દર્શાવવું. વાસ્તવમાં મોટા ભાગની પરિસ્થિતિઓમાં, બિંદુનું ચોક્કસ સ્થાન દર્શાવવા એક કરતાં વધારે રેખાઓના સંદર્ભની જરૂર પડે છે. દાખલા તરીકે નીચે દર્શાવેલ પરિસ્થિતિનો વિચાર કરો :

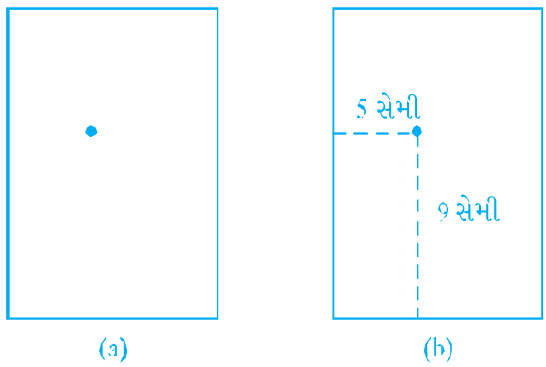
I. આકૃતિ 3.1 માં, રહેણાંક વિસ્તારમાં મુખ્ય રસ્તાઓ પૂર્વથી પશ્ચિમ દિશા તરફ અને શેરીનું નામાભિધાન પશ્ચિમથી પૂર્વ તરફ કરેલું છે. વળી, દરેક શેરી પર ઘરના નંબર દર્શાવેલ છે. અહીં આ પરિસ્થિતિમાં આપણા મિત્રનું ઘર શોધવા તે અંગે એક સંદર્ભ જાણતા હોઈએ તે પર્યાપ્ત છે ? તે માટે જો આપણે જાણીએ કે તે શેરી 2 માં રહે છે, તો આપણે તેનું ઘર સરળતાથી શોધી લઈશું ? ના. જે શેરીમાં મિત્રનું ઘર આવેલું છે તે શેરીનો નંબર અને તેના ઘરનો નંબર બંને જાણતા હોઈએ તો આવી માહિતી પરથી જેટલી સરળતા રહે તેટલી સરળતાથી નહિ. જો આપણે બીજી શેરીમાં અને ઘર નંબર 5 માં પહોંચવું હોય, તો સૌપ્રથમ બીજી શેરી ઓળખવી પડે અને ત્યાં પહોંચીને એ શેરીમાં 5 નંબરનું ઘર શોધી શકાય. આકૃતિ 3.1 માં



આકૃતિ 3.1

આ ચોક્કસ સ્થાન H દ્વારા દર્શાવવામાં આવ્યું છે. આ જ પ્રમાણે શેરી 7 માં 4 નંબરનું ઘર P દ્વારા દર્શાવેલ છે.

II. ધારો કે તમે કાગળના ટુકડા પર એક ટપકું કરો છો. [આકૃતિ.3.2(a)]. જો અમે તમને પૂછીએ કે 'કહો કાગળ પર ટપકાનું સ્થાન કયાં છે?' તમે કેવી રીતે જણાવશો ? કદાચ તમે તમારી રીતે કેટલાક પ્રયત્ન કરશો કે 'ટપકું કાગળના ઉપરના અર્ધતલના ભાગમાં છે' અથવા 'તે કાગળ પર ડાબી ધારની નજીક છે અથવા તે કાગળના ડાબી બાજુના ઉપરના ખૂણાની ઘણી નજીક છે.' શું આ મંતવ્યો પરથી ટપકાનું ચોક્કસ સ્થાન નક્કી કરાય ? ના ! પણ તમે એવું કહો કે ''ટપકું કાગળની ડાબી ધારથી 5 સેમી દૂર છે.'' તો તે આપણને વિચારવામાં મદદ કરશે. પણ ટપકાનું સ્થાન ચોક્કસ નક્કી કરાતું નથી. એક વધુ માર્ગદર્શન આપવામાં આવે, કે ટપકાનું સ્થાન તળિયેથી 9 સેમી ઉપર છે તો હવે તે ટપકું ખરેખર ક્યાં છે તે જાણી શકાય.



આકૃતિ 3.2

આપણે ટપકાનું સ્થાન બે રેખા એટલે કે ડાબી ધાર અને તળિયાની ધારથી કેટલું અંતર છે તે પરથી નિશ્ચિત કરીએ છીએ [આકૃતિ.3.2(b)]. બીજા શબ્દોમાં, આપણા માટે બે સ્વતંત્ર માહિતી ટપકાનું સ્થાન નક્કી કરવા માટે જરૂરી છે.

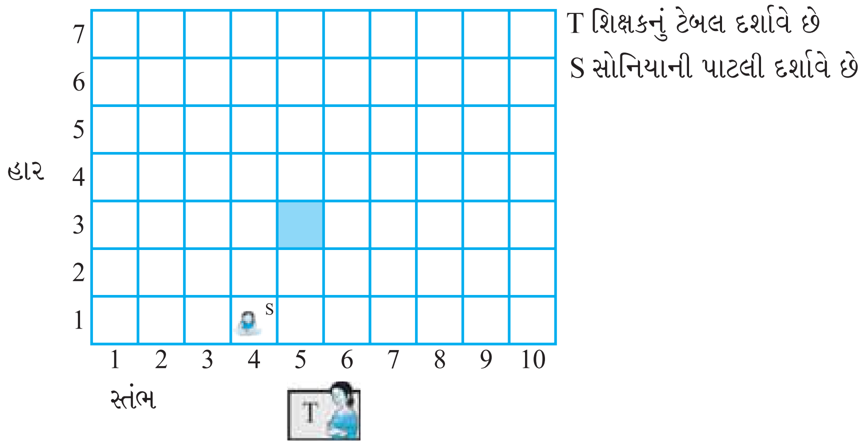
હવે, આપણે નીચે પ્રમાણે વર્ગખંડમાં 'બેઠક-વ્યવસ્થા'ની પ્રવૃત્તિ જાણીએ :

પ્રવૃત્તિ 1 (બેઠક-વ્યવસ્થા) : બધી પાટલીઓ સાથે રાખીને, તમારા વર્ગખંડની બધી પાટલીઓની બેઠક વ્યવસ્થાનું ચિત્ર તૈયાર કરીએ. દરેક પાટલીને ચોરસ તરીકે દર્શાવીએ. દરેક ચોરસમાં, જે પાટલી પર વિદ્યાર્થી બેસે છે તે દરેક પાટલી ઉપર વિદ્યાર્થીનું નામ લખીએ. દરેક વિદ્યાર્થીનું સ્થાન વર્ગખંડમાં બે સ્વતંત્ર માહિતીથી ચોક્કસ દર્શાવી શકાય.

(i) સ્તંભમાં તે ક્યાં બેસે છે.

(ii) હારમાં તે ક્યાં બેસે છે.

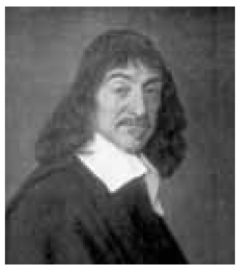
જો તમે પાંચમો સ્તંભ અને ત્રીજી હારમાં બેસો છો (આકૃતિ 3.3 માં રંગીન ચોરસ દર્શાવેલ છે.) તો તમારું સ્થાન (5,3) લખી શકાય. પ્રથમ સ્તંભ નંબર અને પછી હાર નંબર છે. શું આ સ્થાન (3, 5) ને સમાન છે ? તમારા વર્ગમાં બીજા વિદ્યાર્થીઓનાં નામો અને સ્થાનો દર્શાવો. ઉદાહરણ માટે જો સોનિયા ચોથા સ્તંભમાં અને પ્રથમ હારમાં બેઠી છે, તો તેનું સ્થાન S(4, 1) લખો. શિક્ષકનું ટેબલ તમારી બેઠક-વ્યવસ્થાનો ભાગ નથી. આપણે શિક્ષકને માત્ર કોઈ નિરીક્ષકના રૂપમાં લઈએ છીએ.



આકૃતિ 3.3

ઉપરની ચર્ચા પરથી એવું અવલોકન કરી શકાય કે તમે કોઈ પણ પદાર્થનું સ્થાન બે લંબરેખાઓની મદદથી દર્શાવી શકો. 'ટપકા'ના સ્થાનમાં આપણને ટપકા માટે તળિયાની ધારથી અંતર તેમજ ડાબી ધારથી અંતર જરૂરી છે. બેઠક-વ્યવસ્થાની ગોઠવણીમાં, આપણને સ્તંભનો ક્રમાંક અને તે હારનો ક્રમાંક જરૂરી છે. આ સરળ વિચાર જ ગણિતશાસ્ત્રની ખૂબ જ પ્રતિષ્ઠિત મહત્ત્વની શાખા *'યામ ભૂમિતિ'*ના ઉદ્ભવનું પ્રથમ પગલું બન્યો. આપણું ધ્યેય આ પ્રકરણમાં યામ ભૂમિતિની કેટલીક પાયાની સંકલ્પનાઓ આપવાનો છે. આ વિશે તમે તમારાં ઉચ્ચ ધોરણોમાં આનાથી વધારે અભ્યાસ કરશો. આ અભ્યાસના વિકાસની શરૂઆત ફ્રેન્ચ તત્ત્વજ્ઞાની અને ગણિતજ્ઞ René Déscartes એ કરી હતી.

René Déscartes, the great French mathematician of the seventeenth century, liked to lie in bed and think! One day, when resting in bed, he solved the problem of describing the position of a point in a plane. His method was a development of the older idea of latitude and longitude. In honour of Déscartes, the system used for describing the position of a point in a plane is also known as the *Cartesian system*.



René Déscartes (1596 -1650)

આકૃતિ 3.4

સ્વાધ્યાય 3.1

1. બીજી કોઈ વ્યક્તિને તમારા અભ્યાસના ટેબલ પરના ટેબલ લૅમ્પનું સ્થાન કેવી રીતે વર્ણવશો ?
2. (શેરીનો નકશો) એક શહેરના બે મુખ્ય રસ્તાઓ શહેરના કેન્દ્ર આગળ એકબીજાને છેદે છે. આ બે રસ્તાઓ ઉત્તર-દક્ષિણ દિશાઓ અને પૂર્વ-પશ્ચિમ દિશાઓમાં છે. શહેરની બાકીની બધી શેરીઓ આ રસ્તાની સમાંતરે છે અને પરસ્પર 200 મીટર દૂર છે. દરેક દિશામાં 5 શેરીઓ છે. 1 સેમી = 200 મીટર માપ લઈ, તમારી નોટબુકમાં શહેરનું આદર્શ ચિત્ર દોરો. રસ્તાઓ/શેરીઓને સીધી રેખાઓ દ્વારા દર્શાવો.

તમારા નમૂનામાં શહેરમાં ઘણીબધી છેદતી શેરીઓ છે આ છેદતી શેરીઓ એક ઉત્તર-દક્ષિણ દિશામાં અને બીજી પૂર્વ-પશ્ચિમ દિશામાં જતી હોય તેવી બે શેરીઓની બનેલી છે. દરેક લંબ શેરી નીચેના અનુસંધાનમાં દર્શાવાય છે. જો બીજી શેરી ઉત્તર-દક્ષિણ દિશામાં અને પાંચમી શેરી પૂર્વ-પશ્ચિમ દિશામાં ક્યાંક મળતી હોય, તો આપણે તેને છેદતી શેરી (2, 5) કહીશું. આ રૂઢિનો ઉપયોગ કરી નીચેના પ્રશ્નોના ઉત્તર આપો :

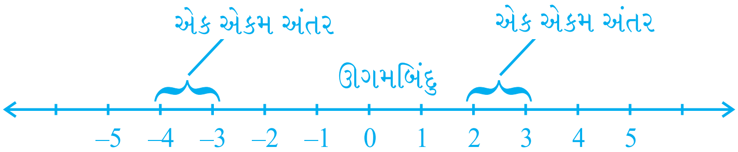
(i) કેટલી છેદતી શેરીઓનું નામાભિધાન (4, 3) તરીકે થઈ શકે ?

(ii) કેટલી છેદતી શેરીઓનું નામાભિધાન (3, 4) તરીકે થઈ શકે ?

3.2 કાર્તેઝિય પદ્ધતિ

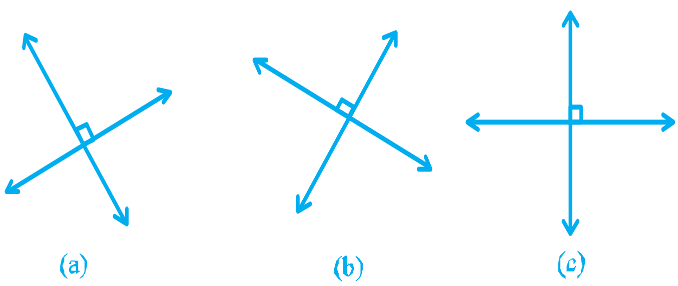
સંખ્યારેખાનો અભ્યાસ તમે 'સંખ્યા પદ્ધતિ'ના પ્રકરણમાં કરી ગયાં છો.

રેખા પર એક નક્કી બિંદુથી એકમ લંબાઈના ધન અંતર એક દિશામાં અને ઋણ અંતર બીજી દિશામાં દર્શાવ્યા છે. જે બિંદુથી અંતરો દર્શાવેલ છે તેને ઊગમબિંદુ કહે છે. એક રેખા પર સમાન અંતરે બિંદુઓ દર્શાવી સંખ્યા દ્વારા સંખ્યારેખા દર્શાવી છે. એકમ અંતરે સંખ્યા 1 દર્શાવાય, જ્યારે 3 એકમ અંતરે સંખ્યા '3' દર્શાવાય છે. '0' એ ઊગમબિંદુ દર્શાવે છે. ધન દિશામાં ઊગમબિંદુથી r અંતરે આવેલ બિંદુ સંખ્યા r દર્શાવે છે. ઋણ દિશામાં ઊગમબિંદુથી r અંતરે આવેલું બિંદુ સંખ્યા $-r$ દર્શાવે છે. સંખ્યારેખા પર ભિન્ન સંખ્યાઓનું સ્થાન આકૃતિ 3.5 માં દર્શાવ્યું છે.



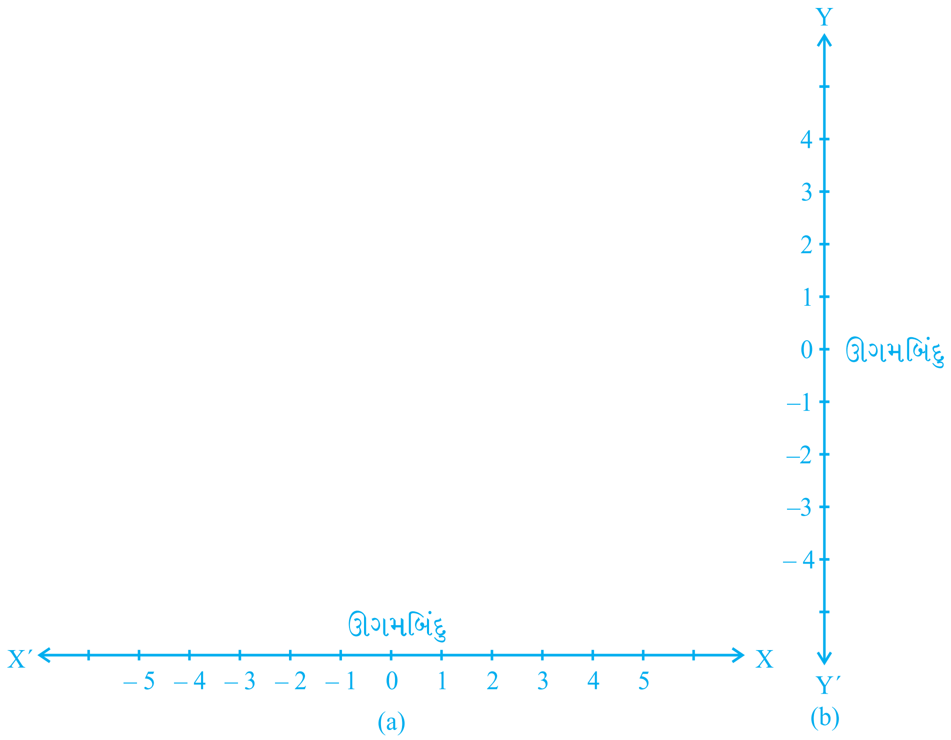
આકૃતિ 3.5

René Déscartesએ સમતલમાં બે રેખાઓને એકબીજીને લંબ દર્શાવવાનો વિચાર કર્યો અને સમતલમાં બિંદુનું સ્થાન નક્કી કરવા માટે આ રેખાઓનો સંદર્ભ લીધો. આકૃતિ 3.6માં દર્શાવ્યા મુજબ લંબરેખાઓ કોઈ પણ દિશામાં હોઈ શકે છે.



આકૃતિ 3.6

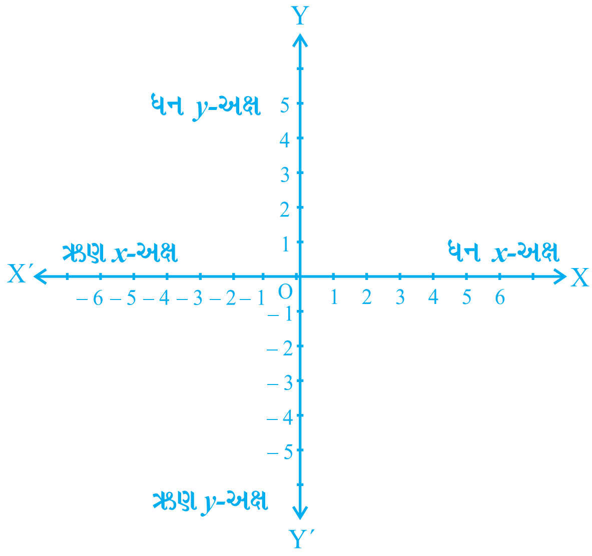
પણ જ્યારે આપણે આ પ્રકરણમાં બે રેખાઓથી બિંદુનું સ્થાન સમતલમાં નક્કી કરીએ ત્યારે એક સમક્ષિતિજ અને બીજી શિરોલંબ રેખા લઈશું. તે આકૃતિ 3.6(c) માં છે.



આકૃતિ 3.7

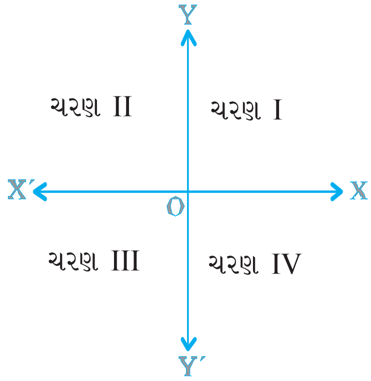
વાસ્તવિક રીતે આ બે રેખાઓ આ પ્રમાણે મેળવવામાં આવે છે. બે સંખ્યારેખાઓ X'X અને Y'Y પસંદ કરો. X'X ને સમક્ષિતિજ [આકૃતિ.3.7(a)] લઈ તેની ઉપર સંખ્યારેખાની જેમ સંખ્યાઓ લખો. આપણે તે જ રીતે સંખ્યારેખા Y'Y માટે કરો. ફેર એટલો છે કે Y'Y શિરોલંબ થશે, નહિ કે સમક્ષિતિજ. [આકૃતિ.3.7(b)]

બંને રેખાઓ એકબીજીને તેમનાં શૂન્યોમાં છેદે અથવા ઊગમબિંદુએ છેદે તે રીતે ગોઠવો. [આકૃતિ.3.8] સમક્ષિતિજ રેખા X'X ને x-અક્ષ અને શિરોલંબ રેખા Y'Y ને y-અક્ષ તરીકે ઓળખવામાં આવે છે. X'X અને Y'Y જે બિંદુએ લંબ છે તે બિંદુને ઊગમબિંદુ કહેવામાં આવે છે અને તેને O વડે દર્શાવાય છે. ધન સંખ્યાઓ OX અને OY પર હોય છે અને તેથી OX અને OY ને અનુક્રમે x-અક્ષ અને y-અક્ષની ધન દિશાઓ કહે છે. તે જ રીતે OX' અને OY' ને અનુક્રમે x-અક્ષ અને y-અક્ષની ઋણ દિશાઓ કહે છે.



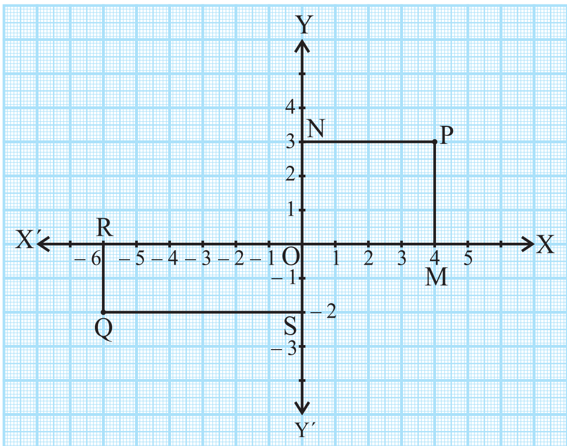
આકૃતિ.3.8

તમે કહી શકો છો કે, અક્ષો (એકવચનમાં શબ્દ ‘અક્ષ’) સમતલને ચાર ભાગમાં વહેંચે છે. આ ચાર ભાગને ચરણ કે પાદ કહેવામાં આવે છે (એક ચતુર્થાંશ ભાગ). OX થી વિષમઘડી દિશામાં તેમને ક્રમાંક I, II, III અને IV વડે દર્શાવાય છે(જુઓ આકૃતિ 3.9.) તેથી સમતલ, યામાક્ષો અને ચાર ચરણનો યોગગણ છે. આપણે સમતલને કાર્તેઝિય સમતલ અથવા યામ સમતલ અથવા xy-સમતલ કહીશું. અક્ષોને યામાક્ષો તરીકે ઓળખવામાં આવે છે.



આકૃતિ 3.9

હવે, આપણે જોઈએ કે શા માટે આ પદ્ધતિ ગણિત માટે પાયાની છે અને તે કેવી રીતે ઉપયોગી છે. વિચારો કે નીચેના આલેખપત્રમાં અક્ષો દર્શાવ્યા છે. P અને Q અક્ષોથી કેટલા અંતરે છે તે તપાસીએ. આ માટે x-અક્ષ પર લંબરેખાખંડ PM અને y-અક્ષ પર લંબરેખાખંડ PN દોરો. તેવી જ રીતે આપણે લંબરેખાખંડ $\overline{QR}$ અને $\overline{QS}$ આકૃતિ 3.10 માં દર્શાવેલ છે.



આકૃતિ 3.10

તમે જોઈ શકશો કે,

(i) P બિંદુનું x-અક્ષની ધન દિશામાં y-અક્ષથી લંબઅંતર PN = OM = 4 એકમ છે.

(ii) P બિંદુનું y-અક્ષની ધન દિશામાં x-અક્ષથી લંબઅંતર PM = ON = 3 એકમ છે.

(iii) Q બિંદુનું x-અક્ષની ઋણ દિશામાં y-અક્ષથી લંબઅંતર OR = SQ = 6 એકમ છે.

(iv) Q બિંદુનું y-અક્ષની ઋણ દિશામાં x-અક્ષથી લંબઅંતર OS = RQ = 2 એકમ છે.

હવે, આ અંતરનો ઉપયોગ કરીને બિંદુઓ કેવી રીતે દર્શાવવા કે જેથી કોઈ મુશ્કેલી ના રહે ?

હવે આપણે નીચેની રીતનો ઉપયોગ કરીને બિંદુના યામ લખીશું :

(i) કોઈપણ બિંદુનો x-યામ એ તેનું y-અક્ષથી x-અક્ષની દિશામાં માપેલ લંબઅંતર છે.(જો અંતર x-અક્ષની ધન દિશામાં હોય તો તેનો x-યામ ધન છે અને જો અંતર x-અક્ષની ઋણ દિશામાં માપવામાં આવે, તો તેનો x-યામ ઋણ હોય છે). આમ, P નો x-યામ 4 છે અને Q નો x-યામ – 6 છે. x-યામને કોટિ પણ કહે છે.

(ii) કોઈ પણ બિંદુનો y-યામ તેનું x-અક્ષથી y-અક્ષની દિશામાં માપેલ લંબઅંતર છે.(જો તે અંતર y-અક્ષની ધન દિશામાં માપવામાં આવે, તો y-યામ ધન હોય છે તથા જો તે અંતર y-અક્ષની ઋણ દિશામાં માપવામાં આવે, તો તે y-યામ ઋણ હોય છે). બિંદુ P માટે તે 3 છે અને બિંદુ Q માટે – 2 છે. y-યામને ભુજ પણ કહે છે.

(iii) બિંદુના યામ લખતી વખતે પ્રથમ x-યામ અને તે પછી y-યામ લખવામાં આવે છે. યામને કૌંસમાં લખવામાં આવે છે. આથી બિંદુ P ના યામ (4, 3) અને બિંદુ Q ના યામ (– 6, – 2) છે. સમતલના પ્રત્યેક બિંદુને યામ દ્વારા અનન્ય રીતે દર્શાવાય છે. (3, 4) એ (4, 3) ને સમાન નથી.

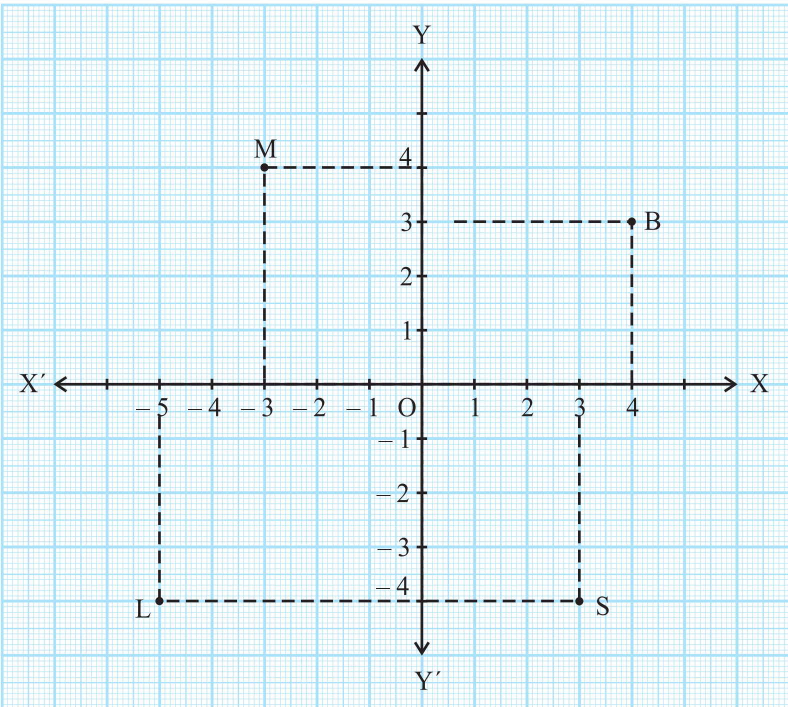
ઉદાહરણ 1 : આકૃતિ 3.11 જુઓ અને નીચેનાં વિધાનો પૂર્ણ કરો :

(i) બિંદુ B ના કોટિ અને ભુજ અનુક્રમે .... અને .... છે. આથી બિંદુ B ના યામ (........, ...) છે.

(ii) બિંદુ M ના x-યામ અને y-યામ અનુક્રમે .... અને .... છે. આથી બિંદુ M ના યામ (........, ...) છે.

(iii) બિંદુ L ના x-યામ અને y-યામ અનુક્રમે .... અને .... છે. આથી બિંદુ L ના યામ (........, ...) છે.

(iv) બિંદુ S ના x-યામ અને y-યામ અનુક્રમે .... અને .... છે. આથી બિંદુ S ના યામ (........, ...) છે.



આકૃતિ 3.11

ઉકેલ : (i) બિંદુ B એ y-અક્ષથી 4 એકમ અંતરે છે. આથી બિંદુ B નો x-યામ અથવા કોટિ 4 છે. બિંદુ B એ x-અક્ષથી 3 એકમ અંતરે છે, તેથી બિંદુ B નો y-યામ અથવા ભુજ 3 છે. આથી બિંદુ B ના યામ (4, 3) છે.

ઉપર (i) મુજબ,

(ii) બિંદુ M ના x-યામ અને y-યામ અનુક્રમે – 3 અને 4 છે. આથી બિંદુ M ના યામ (– 3, 4) છે.

(iii) બિંદુ L ના x-યામ અને y-યામ અનુક્રમે – 5 અને – 4 છે. આથી બિંદુ M ના યામ (– 5, – 4) છે.

(iv) બિંદુ S ના x-યામ અને y-યામ અનુક્રમે 3 અને – 4 છે. આથી બિંદુ S ના યામ (3, – 4) છે.

ઉદાહરણ 2 : આકૃતિ 3.12 માં અક્ષો ઉપરનાં બિંદુઓના યામ લખો :

ઉકેલ : તમે જોઈ શકશો કે,

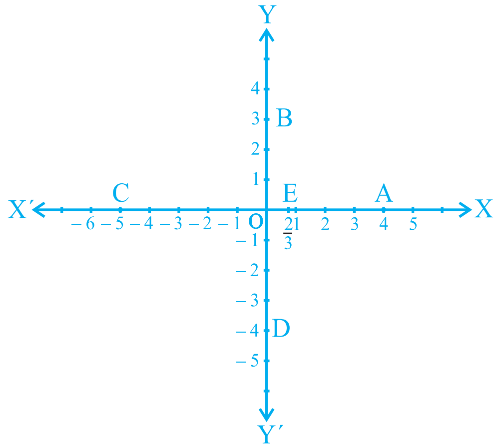
(i) બિંદુ A y-અક્ષથી + 4 અંતરે છે અને x-અક્ષ થી 0 અંતરે છે તેથી બિંદુ A નો x- યામ 4 છે અને y-યામ 0 છે. આથી બિંદુ A ના યામ (4, 0) છે.

(ii) શા માટે બિંદુ B ના યામ (0, 3) છે ?

(iii) શા માટે બિંદુ C ના યામ (– 5, 0) છે ?

(iv) શા માટે બિંદુ D ના યામ (0, – 4) છે ?

(v) શા માટે બિંદુ E ના યામ $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$ છે ?



આકૃતિ.3.12

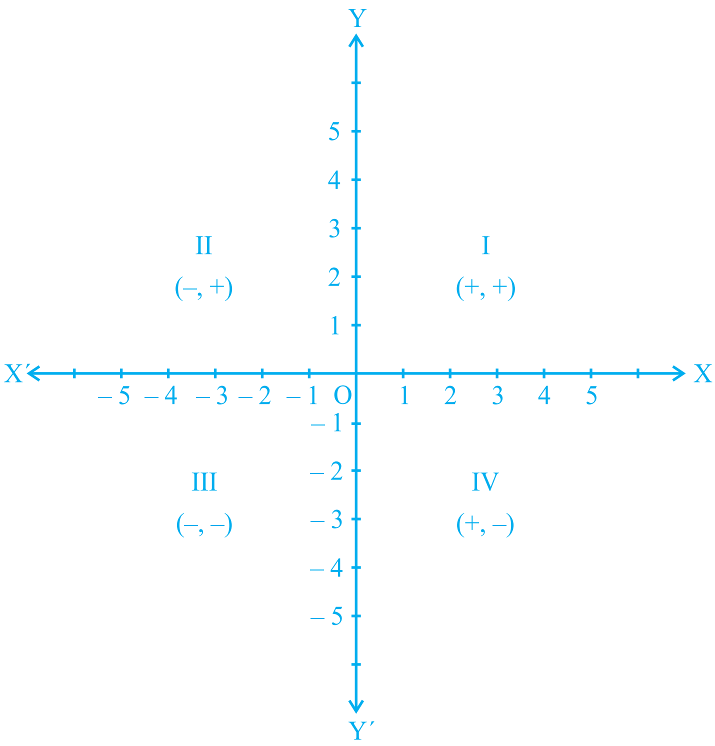
x-અક્ષના દરેક બિંદુનું x-અક્ષથી અંતર શૂન્ય છે. તેથી x-અક્ષ પરનાં પ્રત્યેક બિંદુનો y-યામ કાયમ માટે શૂન્ય છે. આ રીતે કોઈપણ બિંદુ x-અક્ષ પર હોય તો તેના યામ $(x, 0)$ થાય છે. અહીં x એ બિંદુનું y-અક્ષથી નિરપેક્ષ અંતર છે. તે જ રીતે કોઈ પણ બિંદુ y-અક્ષ પર હોય તો તેના યામ $(0, y)$ થાય છે. અહીં y એ x-અક્ષથી તે બિંદુનું નિરપેક્ષ અંતર છે. શા માટે ?

ઊગમબિંદુના યામો શું છે? તેનાં બંને અક્ષોથી અંતર શૂન્ય છે, તેથી x-યામ અને y-યામ બંને શૂન્ય છે, માટે ઊગમબિંદુના યામ (0, 0) છે.

ઉપરના ઉદાહરણ પરથી તમે નીચે પ્રમાણે અવલોકન કરી શકો કે બિંદુના યામોનાં ચિહ્નો પરથી બિંદુ કયા ચરણમાં છે તે નક્કી થાય છે.

(i) જો બિંદુ પ્રથમ ચરણમાં હોય તો, બિંદુનું સ્વરૂપ (+, +) થશે. પ્રથમ ચરણ ધન x-અક્ષ અને ધન y-અક્ષથી ઘેરાયેલ છે.

(ii) જો બિંદુ બીજા ચરણમાં હોય તો, બિંદુનું સ્વરૂપ (–, +) થશે. બીજું ચરણ ઋણ x-અક્ષ અને ધન y-અક્ષથી ઘેરાયેલ છે.



આકૃતિ 3.13

(iii) જો બિંદુ ત્રીજા ચરણમાં હોય, તો બિંદુનું સ્વરૂપ (–, –) થશે. ત્રીજું ચરણ ઋણ x-અક્ષ અને ઋણ y-અક્ષથી ઘેરાયેલ છે.

(iv) જો બિંદુ ચોથા ચરણમાં હોય, તો બિંદુનું સ્વરૂપ (+, –) થશે. ચોથું ચરણ ધન x-અક્ષ અને ઋણ y-અક્ષથી ઘેરાયેલ છે.(જુઓ આકૃતિ 3.13)

ટિપ્પણી : સમતલમાં બિંદુનું સ્થાન સૂચવવા માટે ઉપર જે પદ્ધતિની ચર્ચા કરી છે તે ફક્ત એક રૂઢિ છે, જે વિશ્વભરમાં સ્વીકાર્ય છે. અહીં ભુજ (y-યામ) પહેલા અને કોટિ (x-યામ) બીજા સ્થાને આવે તેવી પદ્ધતિ પણ વિકસાવી શકાય. તેમ છતાં કોઈ પણ સંદિગ્ધતાને દૂર રાખવા આપણે સમગ્ર વિશ્વમાં પ્રચલિત રૂઢિગત પદ્ધતિને અનુસરીશું.

સ્વાધ્યાય 3.2

1. નીચેના દરેક પ્રશ્નના જવાબ આપો :

(i) યામ-સમતલમાં કોઈપણ બિંદુ દર્શાવવા ઉપયોગમાં લેવાતી સમક્ષિતિજ અને શિરોલંબ રેખાઓનાં નામ શું છે ?

(ii) આ બે રેખાઓથી બનતા સમતલના દરેક ભાગનું નામ શું છે ?

(iii) આ બે રેખાઓ જ્યાં છેદે તે બિંદુનું નામ લખો.

2. આકૃતિ 3.14 જુઓ અને માગ્યા પ્રમાણે જવાબ લખો :

(i) બિંદુ B ના યામ જણાવો.

(ii) બિંદુ C ના યામ જણાવો.

(iii) (– 3, – 5) દ્વારા દર્શાવાતું બિંદુ લખો.

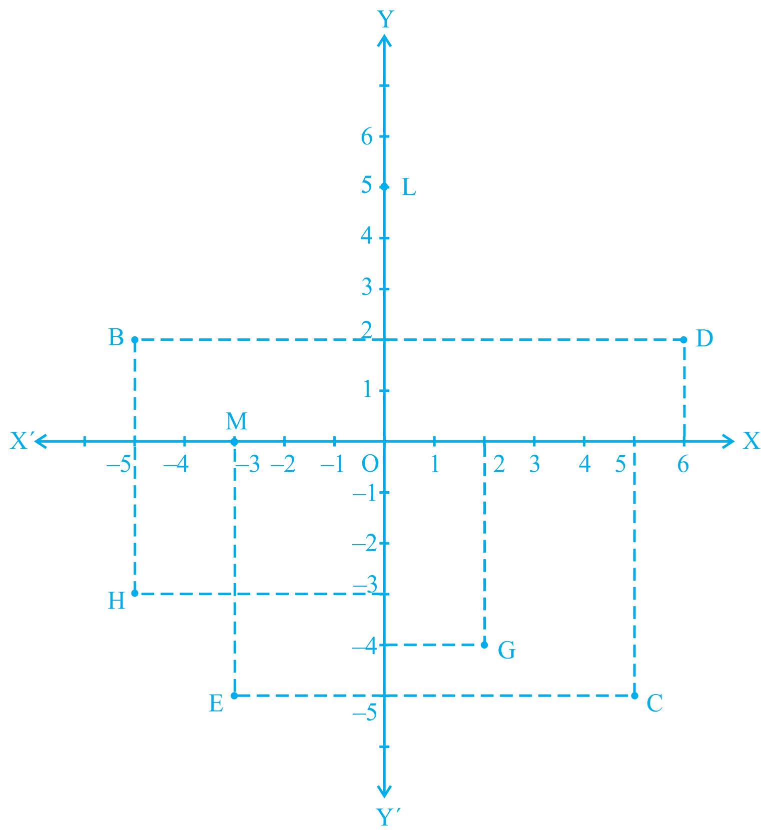
(iv) (2, – 4) દ્વારા દર્શાવાતું બિંદુ લખો.

(v) બિંદુ D નો x-યામ જણાવો.

(vi) બિંદુ H નો y-યામ જણાવો.

(vii) બિંદુ L ના યામ જણાવો.

(viii) બિંદુ M ના યામ જણાવો.



આકૃતિ 3.14