ગુજરાત રાજ્યના શિક્ષણવિભાગના પત્ર-ક્રમાંક
મશબ/1211/414/છ, તા. 11-4-2011-થી મંજૂર

ગણિત

ધોરણ 11

(સિમેસ્ટર I)

પ્રતિજ્ઞાપત્ર

ભારત મારો દેશ છે.
બધાં ભારતીયો મારાં ભાઈબહેન છે.
હું મારા દેશને ચાહું છું અને તેના સમૃદ્ધ અને
વૈવિધ્યપૂર્ણ વારસાનો મને ગર્વ છે.
હું સદાય તેને લાયક બનવા પ્રયત્ન કરીશ.
હું મારાં માતાપિતા, શિક્ષકો અને વડીલો પ્રત્યે આદર રાખીશ
અને દરેક જણ સાથે સભ્યતાથી વર્તીશ.
હું મારા દેશ અને દેશબાંધવોને મારી નિષ્ઠા અર્પું છું.
તેમનાં કલ્યાણ અને સમૃદ્ધિમાં જ મારું સુખ રહ્યું છે.

રાજ્ય સરકારની વિનામૂલ્યે યોજના હેઠળનું પુસ્તક

ગુજરાત રાજ્ય શાળા પાઠ્યપુસ્તક મંડળ
'વિદ્યાયન', સેક્ટર 10-એ, ગાંધીનગર-382010

© ગુજરાત રાજ્ય શાળા પાઠ્યપુસ્તક મંડળ, ગાંધીનગર
આ પાઠ્યપુસ્તકના સર્વ હક ગુજરાત રાજ્ય શાળા પાઠ્યપુસ્તક મંડળને હસ્તક છે. આ પાઠ્યપુસ્તકનો કોઈ પણ ભાગ કોઈ પણ રૂપમાં ગુજરાત રાજ્ય શાળા પાઠ્યપુસ્તક મંડળના નિયામકની લેખિત પરવાનગી વગર પ્રકાશિત કરી શકાશે નહિ.

લેખન

ડૉ. એ. પી. શાહ (કન્વીનર)
શ્રી રાજીવ ચોક્સી
ડૉ. એ. એચ. હાસમણી
શ્રી પરિમલ પુરોહિત

અનુવાદ

ડૉ. એ. પી. શાહ
શ્રી રાજીવ ચોક્સી
ડૉ. એ. એચ. હાસમણી
શ્રી પરિમલ પુરોહિત

સમીક્ષા

ડૉ. મહેશ ત્રિવેદી
શ્રી નરસિંહ એમ. પટેલ
શ્રી આર. વી. વૈષ્ણવ
શ્રી એમ. એમ. સુદાણી
શ્રી નવરોજ ગાંગાણી
શ્રી જયંતી પટેલ
શ્રી વિપુલ આર. શાહ
શ્રી પી. પી. પટેલ
શ્રી આર. ડી. મોઢા
શ્રી એચ. ઓ. મણિયાર
શ્રી એમ. જે. નાગ્રેચા
શ્રી પ્રવીણ પટેલ

ચિત્રાંકન

શ્રી મનીષ પી. પારેખ

સંયોજન

શ્રી આશિષ એચ. બોરીસાગર
(વિષય-સંયોજક : ગણિત)

નિર્માણ-આયોજન

શ્રી હરેશ એસ. લીમ્બાચીયા
(નાયબ નિયામક : શૈક્ષણિક)

મુદ્રણ-આયોજન

શ્રી હરેશ એસ. લીમ્બાચીયા
(નાયબ નિયામક : ઉત્પાદન)

પ્રસ્તાવના

એન.સી.ઈ.આર.ટી. દ્વારા તૈયાર કરવામાં આવેલા નવા રાષ્ટ્રીય અભ્યાસક્રમોના અનુસંધાનમાં ગુજરાત રાજ્ય માધ્યમિક અને ઉચ્ચતર માધ્યમિક શિક્ષણ બોર્ડે નવા અભ્યાસક્રમો તૈયાર કર્યા છે. આ અભ્યાસક્રમો ગુજરાત સરકાર દ્વારા મંજૂર કરવામાં આવે છે.

ગુજરાત સરકાર દ્વારા મંજૂર થયેલા **ધોરણ 11 (સિમેસ્ટર I)** ના **ગણિત** વિષયના નવા અભ્યાસક્રમ અનુસાર તૈયાર કરવામાં આવેલું આ પાઠ્યપુસ્તક વિદ્યાર્થીઓ સમક્ષ મૂકતાં મંડળ આનંદ અનુભવે છે.

આ પાઠ્યપુસ્તક પ્રસિદ્ધ કરતાં પહેલાં એની હસ્તપ્રતની આ સ્તરે શિક્ષણકાર્ય કરતા શિક્ષકો અને તજ્જ્ઞો દ્વારા સર્વાંગી સમીક્ષા કરાવવામાં આવી છે. શિક્ષકો તથા તજ્જ્ઞોનાં સૂચનો અનુસાર હસ્તપ્રતમાં યોગ્ય સુધારાવધારા કર્યા પછી આ પાઠ્યપુસ્તક પ્રસિદ્ધ કરવામાં આવ્યું છે. મૂળ અંગ્રેજીમાં તૈયાર કરવામાં આવેલ પાઠ્યપુસ્તકનો આ ગુજરાતી અનુવાદ છે.

પ્રસ્તુત પાઠ્યપુસ્તકને રસપ્રદ, ઉપયોગી તથા ક્ષતિરહિત બનાવવા માટે મંડળે પૂરતી કાળજી લીધી છે. તેમ છતાં શિક્ષણમાં રસ ધરાવનાર વ્યક્તિઓ પાસેથી પુસ્તકની ગુણવત્તા વધારે તેવાં સૂચનો આવકાર્ય છે.

ડૉ. ભરત પંડિત	**ડૉ. નીતિન પેથાણી**
નિયામક	કાર્યવાહક પ્રમુખ
તા. 3-3-2015	ગાંધીનગર

પ્રથમ આવૃત્તિ : 2011, પુનઃમુદ્રણ : 2011, 2012, 2013, 2014

પ્રકાશક : ગુજરાત રાજ્ય શાળા પાઠ્યપુસ્તક મંડળ, 'વિદ્યાયન', સેક્ટર 10-એ, ગાંધીનગર વતી ભરત પંડિત, નિયામક

મુદ્રક :

મૂળભૂત ફરજો

ભારતના દરેક નાગરિકની ફરજ નીચે મુજબ રહેશે :*

(ક) સંવિધાનને વફાદાર રહેવાની અને તેના આદર્શો અને સંસ્થાઓનો, રાષ્ટ્રધ્વજનો અને રાષ્ટ્રગીતનો આદર કરવાની;

(ખ) આઝાદી માટેની આપણી રાષ્ટ્રીય લડતને પ્રેરણા આપનારા ઉમદા આદર્શોને હૃદયમાં પ્રતિષ્ઠિત કરવાની અને અનુસરવાની;

(ગ) ભારતનાં સાર્વભૌમત્વ, એકતા અને અખંડિતતાનું સમર્થન કરવાની અને તેમનું રક્ષણ કરવાની;

(ઘ) દેશનું રક્ષણ કરવાની અને રાષ્ટ્રીય સેવા બજાવવાની હાકલ થતાં, તેમ કરવાની;

(ચ) ધાર્મિક, ભાષાકીય, પ્રાદેશિક અથવા સાંપ્રદાયિક ભેદોથી પર રહીને, ભારતના તમામ લોકોમાં સુમેળ અને સમાન બંધુત્વની ભાવનાની વૃદ્ધિ કરવાની, સ્ત્રીઓના ગૌરવને અપમાનિત કરે તેવા વ્યવહારો ત્યજી દેવાની;

(છ) આપણી સમન્વિત સંસ્કૃતિના સમૃદ્ધ વારસાનું મૂલ્ય સમજી તે જાળવી રાખવાની;

(જ) જંગલો, તળાવો, નદીઓ અને વન્ય પશુપક્ષીઓ સહિત કુદરતી પર્યાવરણનું જતન કરવાની અને સુધારણા કરવાની અને જીવો પ્રત્યે અનુકંપા રાખવાની;

(ઝ) વૈજ્ઞાનિક માનસ, માનવતાવાદ અને જિજ્ઞાસા તથા સુધારણાની ભાવના કેળવવાની;

(ટ) જાહેર મિલકતનું રક્ષણ કરવાની અને હિંસાનો ત્યાગ કરવાની;

(ઠ) રાષ્ટ્ર પુરુષાર્થ અને સિદ્ધિનાં વધુ ને વધુ ઉન્નત સોપાનો ભણી સતત પ્રગતિ કરતું રહે એ માટે, વૈયક્તિક અને સામૂહિક પ્રવૃત્તિનાં તમામ ક્ષેત્રે શ્રેષ્ઠતા હાંસલ કરવાનો પ્રયત્ન કરવાની;

(ડ) માતા-પિતાએ અથવા વાલીએ 6 વર્ષથી 14 વર્ષ સુધીની વયના પોતાના બાળક અથવા પાલ્યને શિક્ષણની તકો પૂરી પાડવી.

*ભારતનું સંવિધાન : કલમ 51-क

અનુક્રમણિકા

1. ગાણિતિક તર્ક 1
2. ગણ સિદ્ધાંત 23
3. સંબંધ અને વિધેય 55
4. ત્રિકોણમિતીય વિધેયો 71
5. ત્રિકોણમિતીય વિધેયોનાં વિશિષ્ટ મૂલ્યો અને આલેખો 107
6. રેખાઓ 125
7. ક્રમચય અને સંચય 175
8. સુરેખ અસમતાઓ 207
9. પ્રસારમાન 239
10. સંભાવના 278
- જવાબો 297
- પારિભાષિક શબ્દો 311

આ પાઠ્યપુસ્તક વિશે...

ગુજરાત માધ્યમિક અને ઉચ્ચતર માધ્યમિક શિક્ષણ બોર્ડે 10 + 2ની તરાહના માટે NCERT ના અભ્યાસક્રમ પ્રમાણેનો અભ્યાસક્રમ તૈયાર કર્યો. ઉચ્ચતર વિજ્ઞાનપ્રવાહ માટે શાળા, કૉલેજ તથા યુનિવર્સિટીના શિક્ષકોની મદદથી આ અભ્યાસક્રમ તૈયાર કર્યો. રાષ્ટ્રીય કક્ષાની પ્રવેશ-પરીક્ષાને ધ્યાનમાં રાખીને COBSE દ્વારા તૈયાર કરેલ Core અભ્યાસક્રમને ધ્યાનમાં રાખીને આ અભ્યાસક્રમ તૈયાર કરવામાં આવ્યો.

રાજ્ય સરકારે 10 + 2 લેવલ પર સિમેસ્ટર પદ્ધતિનો અમલ કરવાનો નિર્ણય કર્યો છે. આથી સિમેસ્ટરના Iના અભ્યાસક્રમ પર આધારિત આ પાઠ્યપુસ્તક તૈયાર કરવામાં આવ્યું છે. ગુજરાત માધ્યમિક અને ઉચ્ચતર માધ્યમિક શિક્ષણ બોર્ડે પ્રથમ તથા ત્રીજા સિમેસ્ટરમાં OMR પદ્ધતિથી અને દ્વિતીય તથા ચતુર્થ સિમેસ્ટરમાં વિવરણાત્મક પરીક્ષા લેવાનો નિર્ણય કર્યો છે. આથી દરેક પ્રકરણના અંતે હેતુલક્ષી પ્રશ્નો મૂકવામાં આવ્યા છે.

આ પુસ્તકનો પ્રથમ મુસદો અંગ્રેજીમાં તૈયાર કરવામાં આવ્યો હતો. આથી વૈશ્વિક સ્તરે ચાલતા પ્રવાહોનો વિદ્યાર્થીઓને લાભ મળે અને મૌલિક અંગ્રેજીમાં માહિતી પ્રમાણિત રૂપે મળે. શાળા, કૉલેજ અને યુનિવર્સિટી શિક્ષકો દ્વારા આ મુસદ્દાની વિશદ્ ચર્ચા ચાર દિવસની કાર્યશિબિરમાં કરવામાં આવી હતી. કાર્યશિબિરના ફલસ્વરૂપ નીપજેલાં સૂચનો પ્રમાણે મુસદ્દામાં સુધારા કરવામાં આવ્યા હતા. આ સુધારા મૂળ અંગ્રેજી તથા અનુવાદિત ગુજરાતી મુસદ્દામાં સામેલ કરવામાં આવ્યા હતા. આ પછી ચાર દિવસની કાર્યશિબિરમાં શાળા, કૉલેજ તથા યુનિવર્સિટીના શિક્ષકોએ ગુજરાતીમાં અનુવાદિત પાઠ્યપુસ્તકના મુસદ્દાની ચર્ચા કરી હતી. આ કાર્યશિબિરમાં મળેલાં સૂચનોને આધારે ગુજરાતી તથા અંગ્રેજી મુસદ્દામાં જરૂરી સુધારા કરવામાં આવ્યા હતા. અંતે અંતિમ મુસદો તૈયાર કરવામાં આવ્યો હતો અને ગુજરાત માધ્યમિક અને ઉચ્ચતર માધ્યમિક શિક્ષણ બોર્ડના કાર્યાલયમાં તજ્જ્ઞો, અભ્યાસક્રમ સમિતિના સભ્યો તથા લેખકોની હાજરીમાં છણાવટ કરવામાં આવી હતી. અંતે તમામ સુધારા આમેજ કરીને પાઠ્યપુસ્તક છાપવા માટેનો મુસદો તૈયાર થયો. અંગ્રેજીના ભાષા-નિષ્ણાતે પણ ભાષાની ચકાસણી કરીને સૂચનો આપ્યા હતા.

પ્રકરણ 1માં ગાણિતિક તર્કની વાત કરી છે. ગણિતના આગળના અભ્યાસમાં ઉપયોગી તાર્કિક દલીલો કરવાની શક્તિ આ પ્રકરણમાંથી મળે છે. આ પછીનાં પ્રકરણો ગણસિદ્ધાંત તથા વિધેયમાં આ વિચારોનો ઉપયોગ કરીને ગણિતના અભ્યાસનો પાયો રચવામાં આવે છે. ચોથા તથા પાંચમા પ્રકરણમાં પાયાના ત્રિકોણમિતિનાં વિધેયોનો પ્રાથમિક પરિચય કરાવવામાં આવ્યો છે. પ્રકરણ 6 ધોરણ 10માં ભણેલા યામભૂમિતિના વિચારોને દૃઢ કરે છે અને યામભૂમિતિનો અભ્યાસ આગળ વધે છે. સાતમા પ્રકરણમાં ક્રમચય તથા સંચયનો અભ્યાસ કરીને સંભાવના, દ્વિપદી પ્રમેય વગેરેનો

આધાર ઊભો કરવામાં આવે છે. દ્વિપદી પ્રમેય અને સંભાવનાનો વધુ અભ્યાસ સિમેસ્ટર IIમાં આવશે. સંચય વિશ્લેષણનો અભિગમ પણ પ્રકરણમાં સમજાવ્યો છે. આઠમા પ્રકરણમાં સુરેખ અસમતાના આલેખનો અભ્યાસ છે અને તે આંકડાશાસ્ત્ર, મહત્તમ-ન્યૂનતમના આંકડાશાસ્ત્રીય પ્રશ્નોના ઉકેલમાં આ પ્રકરણ ઉપયોગી છે. આ પ્રકરણમાં સંકલ્પના સમજાવવા ચાર રંગોની આકૃતિઓની મદદ લીધી છે. છેલ્લાં બે પ્રકરણમાં આંકડાશાસ્ત્ર અને સંભાવનાનો અભ્યાસ કરવામાં આવ્યો છે.

સંકલ્પના સમજાવવા જરૂરી આકૃતિ, ચિત્રો અને આલેખોનો ઉપયોગ કરવામાં આવ્યો છે. આકર્ષક બે રંગમાં મુદ્રણ, ચાર રંગમાં મુખપૃષ્ઠ અને ચાર રંગમાં સુરેખ અસમતાના આલેખ આ પુસ્તકની વિશિષ્ટતાઓમાં ઉમેરો કરે છે. પ્રવાહી ભાષામાં સમજૂતી આપી છે. ઘણાં ઉદાહરણો અને ક્રમિક સ્વાધ્યાય આપવામાં આવ્યા છે.

સરળ ભાષામાં વિસ્તારથી સમજાવવામાં આવેલ સંકલ્પનાઓ રાજ્યના છેવાડામાં આવેલ વિદ્યાર્થી પણ સ્વ-પ્રયત્ને સમજી શકે તેવી રીતે આપેલ છે.

સેન્ટ્રલ બોર્ડની શાળાના કેટલાક તજ્જ્ઞોએ પણ પુસ્તક ચકાસ્યું હતું અને મુક્ત કંઠે તેની પ્રશંસા કરી હતી. તેમનો અભિપ્રાય હતો કે પાઠ્યપુસ્તક સંપૂર્ણપણે NCERT અભ્યાસક્રમ પ્રમાણે છે. પુસ્તકની માહિતી NCERT ના પાઠ્યપુસ્તકને સમકક્ષ છે, સમજૂતી પ્રવાહી ભાષામાં છે, પુષ્કળ પ્રમાણમાં ઉદાહરણોથી સમજણનું લેવલ ઉચ્ચસ્તરે લઈ જવાનો હેતુ બર આવે છે.

જ્યારે રાજ્યની સ્થાપનાનું સુવર્ણજયંતી વર્ષ ઉજવાઈ રહ્યું છે ત્યારે ગુજરાત રાજ્યના વિદ્યાર્થીઓને રાષ્ટ્રના નકશા પર મૂકવા માટે રાજ્ય સરકારનું આ ક્રાંતિકારી પગલું છે. વિદ્યાર્થીને જુદી જુદી સ્પર્ધાત્મક પરીક્ષાઓમાં સહાય મળે તેવો નમ્ર પ્રયાસ અમે કર્યો છે. આથી અમે સંકલ્પના વિસ્તારથી સમજાવી છે અને ખાલી અલપઝલપ માહિતી નથી આપી.

દરેક પ્રશ્નના અંતમાં આપેલ હેતુલક્ષી પ્રશ્નો પ્રકરણમાં સમજાવેલ સંકલ્પનાનું પુનરાવર્તન કરવામાં અને સમજવામાં મદદ કરે છે. કોઈ પણ સ્પર્ધાત્મક પરીક્ષામાં વિદ્યાર્થીને ઝળહળતી સફળતા મેળવવા માટે સમજૂતી અને માહિતી સહાયક છે.

પુસ્તક ઘણા ટૂંકા સમયમાં લખાયું છે. પૂરતી સાવચેતી છતાં કેટલીક ક્ષતિ રહી ગઈ હોય તે શક્ય છે. પુસ્તકની ગુણવત્તા સુધારવા માટે સૂચનો આવકાર્ય છે.

– લેખકો

પ્રકરણ **1**

ગાણિતિક તર્ક

1.1 પ્રાસ્તાવિક

આપણે આ પ્રકરણમાં ગણિતના અભ્યાસ માટે એક અગત્યના સાધન વિશે શીખીશું. તાર્કિક દલીલ કરવાની ક્ષમતા આપણને ગણિતના અભ્યાસ માટે યોગ્ય માર્ગદર્શન આપે છે.

ગણિતમાં મુખ્યત્વે બે પ્રકારની દલીલો અસ્તિત્વ ધરાવે છે : એક તો છે પ્રેરિત દલીલો. અહીં આપણે કેટલીક ભાતનું અવલોકન કરીએ છીએ અને તે પરથી અનુમાન કરીને કેટલાંક પરિણામો સાબિત કરીએ છીએ. આપણે આ પદ્ધતિનો અભ્યાસ આગળ જતાં **ગાણિતીય અનુમાન**ના પ્રકરણમાં કરીશું. દલીલોની બીજી પદ્ધતિ તર્કસંગત તારણ મેળવવાની છે. આ પ્રકરણમાં આપણે આ બીજી પદ્ધતિનો અભ્યાસ કરવો છે. એક ઉદાહરણ જોઈએ.

જો $\alpha\beta = \alpha\gamma$ અને $\alpha \neq 0$ તો સાબિત કરો કે $\beta = \gamma$; $\alpha, \beta, \gamma \in R$.

અહીં $\alpha \neq 0$ હોવાથી α^{-1} અસ્તિત્વ ધરાવે છે.

$\therefore \quad \alpha^{-1}(\alpha\beta) = \alpha^{-1}(\alpha\gamma)$ **(α^{-1} વડે બંને બાજુ ગુણતાં)**

$\therefore \quad (\alpha^{-1}\alpha)\beta = (\alpha^{-1}\alpha)\gamma$ **(ગુણાકાર વિશેનો જૂથનો નિયમ)**

$\therefore \quad 1 \cdot \beta = 1 \cdot \gamma$

$\therefore \quad \beta = \gamma$

અહીં આપણે ગણિતના જાણીતા પરિણામને તર્કસંગત રીતે ક્રમિક આનુષંગિક દલીલોના આધારે $\beta = \gamma$ સાબિત કર્યું.

ચાલો હવે આપણે બીજું ઉદાહરણ લઈએ. દરેક શૂન્યેતર વાસ્તવિક સંખ્યા x અનૃણ હોય અથવા ઋણ હોય. ધારો કે કોઈક વિચારણાને આધીન પ્રશ્નમાં જો x એ અનૃણ નથી તો તે ઋણ જ છે. આ પણ એક વિકલ્પ નિવારણ પદ્ધતિ દ્વારા તર્કસંગત દલીલ જ છે.

1.2 વિધાન

નીચેનાં વાક્યો જોઈએ :

(1) 2010 માં ભારતમાં મહિલા રાષ્ટ્રપતિ હતા.

(2) T-20 ક્રિકેટમાં ભારતે 2010માં વર્લ્ડકપ જીત્યો.

અહીં પ્રથમ વાક્ય સાચું અને બીજું વાક્ય ખોટું છે. આવાં વાક્યોને વિધાન કહે છે.

વિધાન : જો આપેલ વાક્ય સત્ય કે અસત્ય હોય પરંતુ બંને ન હોય અને એની સત્યાર્થતા કે અસત્યાર્થતા નિ:શંકપણે દર્શાવી શકાય તો તેને વિધાન (Statement) કહે છે. તેને ગાણિતિક રીતે સ્વીકાર્ય વિધાન (Mathematically Acceptable Statement) પણ કહે છે. નીચેનાં ઉદાહરણ વિધાન દર્શાવે છે. તે સત્ય છે કે અસત્ય તે બાજુમાં કૌંસમાં દર્શાવેલ છે.

(1) બે ધન સંખ્યાઓનો ગુણાકાર ધન મળે. (સત્ય)

(2) 1 એ અવિભાજ્ય સંખ્યા છે. (ખોટું)

(3) $2 + 2 = 5$ (ખોટું)

(4) દરેક વાસ્તવિક સંખ્યાનો વર્ગ અનૃણ છે. (સાચું)

(5) જેનો વર્ગ તે પોતે જ મળે એવી એક માત્ર વાસ્તવિક સંખ્યા 1 છે. (ખોટું)

હવે નીચેનું વાક્ય જોઈએ :

વાસ્તવિક સંખ્યાઓ x અને y માટે $xy > 0$.

આ વાક્ય x અને y પર આધારિત છે. જો $x = 3$, $y = 2$ લઈએ તો તે સત્ય છે.

જો $x = 2$, $y = -1$ લઈએ તો તે અસત્ય બને. આ વાક્ય સંદિગ્ધ છે, આથી તે વિધાન નથી.

હવે આપણે નીચેનાં વાક્યો જોઈએ :

(1) મુંબઈ હુમલામાં મૃત્યુ પામેલા લોકો માટે પ્રાર્થના કરવા સૌને વિનંતી.

(2) વાહ કેટલો સુંદર સૂર્યાસ્ત છે !

(3) બહાર જાવ !

(4) ગાંધીનગર ક્યાં આવેલું છે ?

અહીં (1) એ વિનંતી છે. (2) એ ઉદ્ગાર છે. (3) એ આજ્ઞાર્થ છે. (4) પ્રશ્નાર્થ છે. આ પૈકીના કોઈ પણ વાક્ય માટે તે સત્ય કે અસત્ય છે તેમ નિશ્ચિતપણે કહી ન શકાય. તેથી તેઓ વિધાનો નથી.

'આજે સોમવાર છે.' તે વાક્ય લઈએ. આ વાક્ય સોમવારના દિવસે સત્ય છે અને બાકીના દિવસો માટે અસત્ય છે. વાક્યમાં 'સમય' ચલ સ્વરૂપે હોય જેમકે 'આજે', 'આવતી કાલે', 'ગઈ કાલે' તો તે વિધાન નથી.

તે જ રીતે વાક્યમાં સ્થળો ચલ સ્વરૂપે હોય એટલે કે 'અહીં', 'ત્યાં' વગેરે તથા વાક્યમાં 'તે' જેવા ઉપનામ આપ્યા હોય તો તે પણ વિધાન નથી.

દાખલા તરીકે (1) 'ગાંધીનગર નજીક છે.' પણ ક્યાંથી ?

(2) 'તે ખૂબ હોશિયાર છે.' પણ કોણ ?

હવે નીચેનું વિધાન જોઈએ.

એક દિવસમાં $25 \times 60 \times 60$ સેકન્ડ આવેલ હોય છે. અહીં પણ સમય 'એક દિવસ' ચલ સ્વરૂપે છે. પરંતુ તે ચોક્કસપણે અસત્ય છે, કારણ કે દિવસમાં 24 કલાક જ હોય છે. તેથી આ વાક્ય એ વિધાન છે.

એટલે સંક્ષિપ્તમાં કહીએ તો જે વાક્યને નિઃશંકપણે સાચું કે ખોટું કહી શકીએ તેવા વાક્યને વિધાન કહે છે. સામાન્ય રીતે વિધાનોને $p, q, r, \ldots$ વગેરે નાના મૂળાક્ષરોથી દર્શાવવામાં આવે છે. દાખલા તરીકે,

p : ફેબ્રુઆરી માસમાં 35 દિવસો હોય છે.

p એ અસત્ય વિધાન છે.

ઉદાહરણ 1 : નીચેનાં પૈકી કયાં વિધાનો છે તે જણાવો અને તે માટે યોગ્ય કારણ દર્શાવો :

(1) આવતી કાલે રજા છે.

(2) વાસ્તવિક સંખ્યા x માટે, $[x]$ એ પૂર્ણાંક છે.

(3) તે યુવાનીમાં મૃત્યુ પામ્યો.

(4) ગાલ્વા ગણિતશાસ્ત્રી હતા. તે યુવાનીમાં મૃત્યુ પામ્યા.

(5) વાસ્તવિક સંખ્યા x માટે $x \cdot 0 = 0$

(6) હિમાલય કેટલો દૂર છે ?

(7) હારમાં ઊભા રહો.

(8) શૂન્યેતર સંખ્યાઓ x અને y માટે $x^2 + y^2 \neq 0$.

(9) $3^2 = 9$

(10) પાયથાગોરસ ગણિતશાસ્ત્રી હતા.

(11) ચાલો, આપણે સંગઠિત થઈએ !

(12) ઊર્જા બચાવો !

ઉકેલ :

(1) આ વિધાન નથી. અહીં સમય ચલ સ્વરૂપે છે.

(2) અહીં x ચલ છે. પરંતુ તે દરેક x માટે સત્ય છે, તેથી વિધાન છે.

(3) અહીં સર્વનામનો ઉપયોગ કરવામાં આવ્યો છે. તેથી વિધાન નથી. અહીં 'તે' એટલે કોણ ?

(4) અહીં 'તે'નો ઉપયોગ ગાલ્વા માટે છે. આથી વિધાન છે.

(5) અહીં x ચલ હોવા છતાં વાક્ય દરેક વાસ્તવિક સંખ્યા x માટે સત્ય છે. આથી તે વિધાન છે.

(6) પ્રશ્નાર્થ વાક્ય હોવાથી તે વિધાન નથી.

(7) તે આજ્ઞાર્થ વાક્ય છે. માટે તે વિધાન નથી.

(8) તે દરેક શૂન્યેતર x અને y માટે સત્ય છે માટે તે વિધાન છે.

(9), (10) વિધાન છે.

(11), (12) વિનંતી દર્શાવેલ છે. માટે તે બંને વિધાન નથી.

સ્વાધ્યાય 1.1

નીચેનાં વાક્યો વિધાન છે કે નહિ તે કારણ સહિત દર્શાવો :

1. $3^2 + 4^2 = 5$

2. જો x પ્રાકૃતિક સંખ્યા હોય, તો 2^x એ બેકી છે.

3. મહેરબાની કરી ઊભા થાઓ !

4. કેટલું ભયાનક ચલચિત્ર હતું !

5. સોક્રેટિસ ગણિતશાસ્ત્રી હતા.

6. તે વૈજ્ઞાનિક છે.

7. વેનિસ રોમમાં છે.

8. વન ડે ક્રિકેટનો વર્લ્ડકપ ઈ.સ. 2011માં ભારત, શ્રીલંકા અને બાંગ્લાદેશ દ્વારા સંયુક્તરૂપે યોજાયો.

*

1.3 સાદું વિધાન અને તેનું નિષેધ

જે વિધાન બે કે બેથી વધુ વિધાનોમાં વિભાજિત ન થઈ શકે તેવા વિધાનને સાદું વિધાન (Simple Statement) કહે છે.

ઉદાહરણ તરીકે, '2 + 2 = 5' એ સાદું વિધાન છે.

નિષેધ (Negation) : આપેલા વિધાનની સત્યાર્થતાનો ઈનકાર તે વિધાનનું નિષેધ છે, એટલે કે એવું વિધાન જે આપેલ વિધાન સત્ય હોય કે મિથ્યા હોય તે અનુસાર અનુક્રમે મિથ્યા હોય કે સત્ય હોય તે આપેલા વિધાનનું નિષેધ છે.

p : અમદાવાદ એ ગુજરાતનું મુખ્ય ઔદ્યોગિક મથક છે.

તેનું નિષેધ 'અમદાવાદ એ ગુજરાતનું મુખ્ય ઔદ્યોગિક મથક નથી.' અથવા 'અમદાવાદ એ ગુજરાતનું મુખ્ય ઔદ્યોગિક મથક છે તે ખોટું છે.' અથવા 'એ સાચું નથી કે અમદાવાદ ગુજરાતનું મુખ્ય ઔદ્યોગિક મથક છે.' બને.

જો વિધાન p સત્ય હોય, તો તેનું નિષેધ અસત્ય હોય છે અને જો p અસત્ય હોય, તો તેનું નિષેધ સત્ય હોય છે. pના નિષેધને $\sim p$ વડે દર્શાવાય છે.

જો વિધાન p સત્ય હોય, તો તેનું સત્યાર્થતા મૂલ્ય T અને p અસત્ય હોય, તો તેનું સત્યાર્થતા મૂલ્ય F વડે દર્શાવવામાં આવે છે.

આથી pનું સત્યાર્થતા મૂલ્ય T અથવા F હોય તે અનુસાર $\sim p$નું સત્યાર્થતા મૂલ્ય F અથવા T થાય.

ઉદાહરણ 2 : નીચેનાં વિધાનોનાં નિષેધ લખો :

(1) $3 \times 2 = 6$

(2) ક્રિસમસ (નાતાલ) 25મી ડિસેમ્બરના રોજ ઉજવવામાં આવે છે.

(3) દિવાળી એ હિન્દુઓના ચાલુ વર્ષનો અંત દર્શાવે છે.

(4) ઈજનેરી અભ્યાસક્રમમાં દાખલ થવા માટે 10 + 2 પદ્ધતિમાં ગણિત એ ફરજિયાત વિષય છે.

(5) ગણિત એ વિજ્ઞાનની રાણી છે.

ઉકેલ :

(1) $3 \times 2 \neq 6$ અથવા એ સત્ય નથી કે $3 \times 2 = 6$.

(2) ક્રિસમસ એ 25મી ડિસેમ્બરે ઉજવવામાં આવતું નથી.

(3) દિવાળી હિન્દુઓના ચાલુ વર્ષનો અંત દર્શાવે નહિ.

(4) ઈજનેરી અભ્યાસક્રમમાં દાખલ થવા માટે 10 + 2 પદ્ધતિમાં ગણિત એ ફરજિયાત વિષય નથી.

(5) ગણિત એ વિજ્ઞાનની રાણી નથી.

સ્વાધ્યાય 1.2

નીચેનાં વિધાનોનાં નિષેધ લખો :

1. $2 + 2 = 5$

2. ચોરસનું ક્ષેત્રફળ $A = \pi r^2$ સૂત્રથી મળે છે.

3. સમઘન એ સમતલીય આકૃતિ છે.

4. જ્યોર્જ કેન્ટરે ગણ સિદ્ધાંતનો વિકાસ કર્યો હતો.

5. અમિતાભ બચ્ચન ગુજરાત પ્રવાસનના બ્રાન્ડ એમ્બેસેડર છે.

6. $2 + 2 = 2^2$

7. પ્રાકૃતિક સંખ્યા $x \geq 3$ માટે $x + x = x^2$

8. બરફ ગરમ હોય છે.

*

1.4 કારકોની મદદથી સંયુક્ત વિધાનો

કેટલીક વખત સાદાં વિધાનોને જોડવાથી નવું વિધાન મળે છે. તેને **સંયુક્ત વિધાન (Compound statement)** કહે છે. **'અથવા' તથા 'અને' જેવા કારકોને તાર્કિક કારકો (Logical Connective) કહે છે.** તેમના ઉપયોગથી સંયુક્ત વિધાન બને છે.

સંયોજન (Conjunction) : બે કે તેથી વધુ સાદાં વિધાનોને તાર્કિક કારક 'અને' દ્વારા જોડવાથી મળતા સંયુક્ત વિધાનને આપેલાં વિધાનોનું સંયોજન કહે છે. આપેલાં સાદાં વિધાનોને ઘટક વિધાનો (Component Statements) કહે છે.

ધારો કે $p : 3 + 2 = 5$ તથા $q : 5 \cdot 2 = 10$,

તેમનું સંયોજન '$3 + 2 = 5$ અને $5 \cdot 2 = 10$' થાય.

વિધાનો p અને q ના સંયોજનને સંકેતમાં $p \wedge q$ વડે દર્શાવવામાં આવે છે. (વાંચો p અને q)

આમ, $p \wedge q : 3 + 2 = 5$ અને $5 \cdot 2 = 10$.

જ્યારે p અને q બંને વિધાનોનું સત્યાર્થતા મૂલ્ય T હોય ત્યારે $p \wedge q$ નું સત્યાર્થતા મૂલ્ય T બને છે. આ સિવાયના વિકલ્પોમાં $p \wedge q$ નું સત્યાર્થતા મૂલ્ય F છે.

કેટલાંક સાદાં વિધાનોને કારક 'અને' વડે જોડવાથી મળતું સંયોજિત વિધાન જ્યારે તેનાં બધાં ઘટક વિધાનો સત્ય હોય, તો અને માત્ર તો જ સત્ય છે. જો ઘટક વિધાનો પૈકી ઓછામાં ઓછું એક વિધાન અસત્ય હોય તો 'અને' દ્વારા મળતું સંયોજિત વિધાન અસત્ય છે.

ઉદાહરણ 3 : નીચેનું સંયોજિત વિધાન કયાં ઘટક વિધાનોનું સંયોજન છે તે શોધો. સંયોજિત વિધાનનું સત્યાર્થતા મૂલ્ય પણ દર્શાવો.

'અમદાવાદ ગુજરાતમાં આવેલ છે અને $3 + 2 = 6$.'

ઉકેલ : ધારો કે p : અમદાવાદ ગુજરાતમાં આવેલ છે.

$q : 3 + 2 = 6$

આપેલ સંયોજિત વિધાન $p \wedge q$ છે. અહીં સ્પષ્ટ છે કે $q : 3 + 2 = 6$ અસત્ય છે.

$\therefore$ સંયોજિત વિધાન $p \wedge q$ અસત્ય છે.

ઉદાહરણ 4 : નીચે આપેલ સંયુક્ત વિધાનો કયાં ઘટક વિધાનોનાં સંયોજન છે તે શોધો. સંયોજિત વિધાનની સત્યાર્થતા લખો :

(1) કાનપુર ભારતમાં આવેલ છે અને $7 \times 5 = 35$.

(2) દિલ્લી એ ગુજરાતનું પાટનગર છે અને $7 \times 5 = 75$.

(3) અમદાવાદ અને વડોદરા એ ગુજરાતનાં શહેરો છે.

(4) વાસ્તવિક સંખ્યા x માટે $x^2 \geq 0$ અને $1^2 = 1$.

(5) દરેક ખૂણો લઘુકોણ હોય છે અને તેનું માપ 90 કરતાં ઓછું છે.

ઉકેલ :

(1) p : કાનપુર ભારતમાં આવેલ છે.

$q : 7 \times 5 = 35$

આપેલ વિધાન $p \wedge q$ છે. અહીં p એ સત્ય અને q પણ સત્ય છે. તેથી વિધાન $p \wedge q$ એ સત્ય વિધાન છે.

(2) ધારો કે p : દિલ્હી એ ગુજરાતનું પાટનગર છે.

$q : 7 \times 5 = 75$

અહીં p અને q બંને અસત્ય વિધાનો છે. તેથી $p \wedge q$ પણ અસત્ય વિધાન થાય.

(3) ધારો કે p : અમદાવાદ શહેર ગુજરાતમાં આવેલું છે.

q : વડોદરા શહેર ગુજરાતમાં આવેલું છે.

અહીં p અને q બંને સત્ય વિધાનો છે. તેથી $p \wedge q$ પણ સત્ય વિધાન છે.

(4) ધારો કે p : વાસ્તવિક સંખ્યા x માટે $x^2 \geq 0$

$q : 1^2 = 1$

અહીં p અને q બંને સત્ય વિધાન છે. તેથી $p \wedge q$ સત્ય છે.

(5) ધારો કે p : દરેક ખૂણો લઘુકોણ છે.

q : દરેક ખૂણાનું માપ 90 કરતાં ઓછું હોય છે.

અહીં બંને વિધાનો અસત્ય છે. તેથી $p \wedge q$ અસત્ય વિધાન છે.

વિયોજન (Disjunction) : જો બે કે તેથી વધુ સાદાં વિધાનોને તાર્કિક કારક 'અથવા'થી જોડવામાં આવે તો તેથી બનતા વિધાનને તેમનું વિયોજન કહે છે. જો p અને q આપેલાં વિધાનો હોય તો તેમનું વિયોજન સંકેતમાં $p \vee q$ વડે દર્શાવાય છે. (વાંચો p અથવા q). આપેલાં સાદા વિધાનોને ઘટક વિધાનો કહે છે.

કારક 'અથવા' વડે જોડવાથી બનતા સંયુક્ત વિધાનમાં એક અથવા એકથી વધુ ઘટક વિધાન સત્ય હોય, તો એટલે કે ઓછામાં ઓછા એક ઘટક વિધાનની સત્યાર્થતા T હોય તો વિધાન સત્ય બને છે.

ઉદાહરણ 5 : નીચેનાં સંયુક્ત વિધાનો કયાં વિધાનોનું વિયોજન દર્શાવે છે તે શોધો. સંયુક્ત વિધાનનું સત્યાર્થતા મૂલ્ય લખો :

(1) $3 + 4 = 7$ અથવા $2 + 2 = 4$

(2) દરેક અવિભાજ્ય સંખ્યા અયુગ્મ છે અથવા દરેક અયુગ્મ સંખ્યા અવિભાજ્ય છે.

(3) ગુજરાત એ ભારતનું રાજ્ય છે અથવા અમદાવાદ એ મહારાષ્ટ્રમાં આવેલું છે.

(4) અઠવાડિયામાં 5 દિવસો હોય છે અથવા એક દિવસમાં 24 કલાક હોય છે.

(5) સોક્રેટિસ એ ગણિતશાસ્ત્રી હતા અથવા તત્ત્વજ્ઞાની હતા.

ઉકેલ :

(1) ધારો કે $p : 3 + 4 = 7$

$q : 2 + 2 = 4$

અહીં સ્પષ્ટ છે કે p અને q સત્ય છે. જો p અથવા q પૈકીનું ઓછામાં ઓછું એક સત્ય હોય, તો $p \vee q$ સત્ય બને. આથી આપેલ $p \vee q$ સત્ય છે.

(2) ધારો કે p : દરેક અવિભાજ્ય સંખ્યા અયુગ્મ છે.

q : દરેક અયુગ્મ સંખ્યા અવિભાજ્ય છે.

અહીં p અસત્ય છે, કારણ કે 2 એ યુગ્મ અવિભાજ્ય (ખરેખર તો એકમાત્ર) સંખ્યા છે. q પણ અસત્ય છે, કારણ કે 9 અયુગ્મ છે પરંતુ અવિભાજ્ય નથી.

$\therefore$ $p \vee q$ એ અસત્ય છે.

(3) ધારો કે p : ગુજરાત એ ભારતનું રાજ્ય છે.

q : અમદાવાદ એ મહારાષ્ટ્રમાં આવેલું છે.

અહીં p સત્ય છે. આથી $p \vee q$ સત્ય વિધાન છે.

(4) ધારો કે p : અઠવાડિયામાં 5 દિવસ હોય છે.

q : એક દિવસમાં 24 કલાક હોય છે.

અહીં q સત્ય વિધાન છે. તેથી $p \vee q$ સત્ય વિધાન છે.

(5) ધારો કે p : સોક્રેટિસ ગણિતશાસ્ત્રી હતા.

q : સોક્રેટિસ તત્ત્વજ્ઞાની હતા.

q એ સત્ય છે. માટે $p \vee q$ સત્ય છે.

સંયુક્ત વિધાનોનું નિષેધ :

સાદાં વિધાનોનાં નિષેધ કેવી રીતે લખાય તે આપણે જાણીએ છીએ. વિધાનના નિષેધ વિશે ફરીથી યાદ કરીએ, તો સાદા વિધાનના નિષેધને સંકેતમાં $\sim p$ વડે દર્શાવવામાં આવે છે. સ્પષ્ટ છે કે $\sim(\sim p) = p$.

pનું સત્યાર્થતા મૂલ્ય F અથવા T હોય તે પ્રમાણે અનુક્રમે $\sim p$ નું સત્યાર્થતા મૂલ્ય T અથવા F હોય.

$\therefore$ $\sim p$ નું સત્યાર્થતા મૂલ્ય T અથવા F હોય તે પ્રમાણે અનુક્રમે $\sim(\sim p)$નું સત્યાર્થતા મૂલ્ય F અથવા T થાય.

$\therefore$ $\sim(\sim p) = p$

હવે આપણે સાદાં વિધાનોનાં સંયોજન અથવા વિયોજનનાં નિષેધ મેળવીએ.

નિયમ : (1) : $\sim(p \wedge q) = (\sim p) \vee (\sim q)$ (2) : $\sim(p \vee q) = (\sim p) \wedge (\sim q)$

બે સાદાં વિધાનનાં સંયોજનનું નિષેધ એ તે બે સાદાં વિધાનોનાં નિષેધનું વિયોજન છે.

બે સાદાં વિધાનોનાં વિયોજનનું નિષેધ એ તે બે સાદાં વિધાનોનાં નિષેધનું સંયોજન છે.

ઉદાહરણ 6 : નીચેનાં વિધાનોનું નિષેધ શોધો :

(1) 5 એ પૂર્ણાંક છે અને $5^2 = 25$

(2) $3^2 = 9$ અને $(-3)^2 = 9$

(3) $1^2 = 1$ અથવા $1^3 = 1$

(4) $\frac{1}{2} \in$ N અથવા $\frac{1}{2} \in$ Q

(5) $\sqrt{2} \in$ R અથવા $\sqrt{2} \notin$ R

(6) ગાંધીજી પોરબંદરમાં જન્મ્યા હતા અને પોરબંદર ગુજરાતમાં આવેલું છે.

ઉકેલ : (1) ધારો કે p : 5 એ પૂર્ણાંક છે.

q : $5^2 = 25$

$\sim p$: 5 એ પૂર્ણાંક નથી.

$\sim q$: $5^2 \neq 25$

આપેલ વિધાન $p \wedge q$ છે. તેનું નિષેધ $(\sim p) \vee (\sim q)$ છે.

$\therefore$ આપેલા સંયુક્ત વિધાનનું નિષેધ '5 એ પૂર્ણાંક નથી અથવા $5^2 \neq 25$' છે.

(2) ધારો કે $p : 3^2 = 9$

$q : (-3)^2 = 9$

$\sim p : 3^2 \neq 9$

$\sim q : (-3)^2 \neq 9$

આપેલ વિધાન $p \wedge q$ છે. તેનું નિષેધ $(\sim p) \vee (\sim q)$ છે.

આપેલ સંયુક્ત વિધાનનું નિષેધ '$3^2 \neq 9$ અથવા $(-3)^2 \neq 9$' છે.

(3) ધારો કે $p : 1^2 = 1$

$q : 1^3 = 1$

$\sim p : 1^2 \neq 1$

$\sim q : 1^3 \neq 1$

$\sim(p \vee q) = (\sim p) \wedge (\sim q)$

$\therefore$ આપેલ સંયુક્ત વિધાનનું નિષેધ વિધાન '$1^2 \neq 1$ અને $1^3 \neq 1$' છે.

(4) ધારો કે $p : \frac{1}{2} \in N$

$q : \frac{1}{2} \in Q$

$\sim p : \frac{1}{2} \notin N$

$\sim q : \frac{1}{2} \notin Q$

$\sim(p \vee q) = (\sim p) \wedge (\sim q)$

$\therefore$ આપેલા સંયુક્ત વિધાનનું નિષેધ '$\frac{1}{2} \notin N$ અને $\frac{1}{2} \notin Q$' છે.

(5) ધારો કે $p : \sqrt{2} \in R$

$q : \sqrt{2} \notin R$

$\sim p : \sqrt{2} \notin R$

$\sim q : \sqrt{2} \in R$

$\sim(p \vee q) = (\sim p) \wedge (\sim q)$

$\therefore$ આપેલ સંયુક્ત વિધાનનું નિષેધ વિધાન '$\sqrt{2} \notin R$ અને $\sqrt{2} \in R$' છે.

(6) જો p : ગાંધીજી પોરબંદરમાં જન્મ્યા હતા.

q : પોરબંદર ગુજરાતમાં આવેલું છે.

$\sim p$: ગાંધીજી પોરબંદરમાં જન્મ્યા ન હતા.

$\sim q$: પોરબંદર ગુજરાતમાં આવેલ નથી.

$\sim(p \wedge q) = (\sim p) \vee (\sim q)$

$\therefore$ $(\sim p) \vee (\sim q)$: ગાંધીજી પોરબંદરમાં જન્મ્યા ન હતા અથવા પોરબંદર ગુજરાતમાં આવેલ નથી.

'અને' તથા 'અથવા'ના ઉપયોગ માટેની નોંધ :

કેટલીક વખત 'અને' શબ્દનો ઉપયોગ તાર્કિક કારક તરીકે થતો નથી, પરંતુ માત્ર બે શબ્દોને જોડવા માટે થાય છે.

(1) 'કોઈ સાધનના સમારકામ માટે પાણી અને તેલના મિશ્રણનો ઉપયોગ થઈ શકે નહિ.'
અહીં 'તેલ' અને 'પાણી' શબ્દો 'અને' વડે જોડાયેલ છે. અહીં વિધાનોનું સંયોજન નથી.

(2) '<u>ચાર્લી અને ચેપ્લિન</u> એ <u>બાળકો અને યુવાનો</u> ને સમાન રીતે રોમાંચિત કરે છે.'
'ચાર્લી અને ચેપ્લિન' શબ્દો 'અને' વડે જોડેલા છે. તે જ રીતે 'બાળકો અને યુવાનો' શબ્દો 'અને' વડે જોડેલા છે. અહીં 'અને' બે શબ્દોને જોડે છે. 'અને'થી સંયુક્ત વિધાન નથી બનતું.

(1) ઉચ્ચતર માધ્યમિકમાં વિજ્ઞાનપ્રવાહના વિદ્યાર્થીઓ ગણિત અથવા જીવવિજ્ઞાન વિષય પસંદ કરી શકે છે.

અહીં 'અથવા' શબ્દનો ઉપયોગ **સમાવેશ વિકલ્પના (inclusive or)** સંદર્ભે થયેલ છે. વિદ્યાર્થીઓ બંને વિષયો પસંદ કરી શકે.

(2) ભરત ધોરણ 12 પાસ કર્યા પછી તરત જ તેના વિશેષ અભ્યાસ માટે વિદેશ જશે અથવા ભારતમાં વિકસિત ગણિતનો અભ્યાસ કરશે.

અહીં 'અથવા' શબ્દનો **નિવારક વિકલ્પ (exclusive or)** ના સંદર્ભમાં ઉપયોગ કરેલ છે. બંને ઘટનાઓનું એક સાથે અસ્તિત્વ ન હોઈ શકે.

ઉદાહરણ 7 : નીચેના પ્રશ્નમાં 'અથવા'નો ઉપયોગ સમાવેશ વિકલ્પ તરીકે કે નિવારક વિકલ્પ તરીકે થયો છે તે નક્કી કરો.

'બે ભિન્ન સમતલીય રેખા એક બિંદુમાં છેદે અથવા સમાંતર હોય.'

ઉકેલ : ધારો કે p : બે ભિન્ન સમતલીય રેખા એક બિંદુમાં છેદે છે.
q : બે ભિન્ન સમતલીય રેખા સમાંતર છે.

આપેલ વિયોજન $p \vee q$ છે અને અત્રે 'અથવા'નો ઉપયોગ નિવારક વિકલ્પ તરીકે છે.

ભિન્ન સમતલીય રેખાઓ એક બિંદુમાં છેદે તથા સમાંતર પણ હોય તે શક્ય નથી.

ઉદાહરણ 8 : નીચેનાં સંયુક્ત વિધાનોમાં ઘટક વિધાનો નક્કી કરો તથા તાર્કિક કારક 'અથવા'નો ઉપયોગ સમાવેશ વિકલ્પ તરીકે કે નિવારક વિકલ્પ તરીકે થયો છે તે જણાવો. વળી, સંયુક્ત વિધાનનું સત્યાર્થતા મૂલ્ય નક્કી કરો.

'વાસ્તવિક સંખ્યા π અસંમેય છે અથવા સંમેય છે.'

ઉકેલ : ધારો કે p : વાસ્તવિક સંખ્યા π અસંમેય છે.
q : વાસ્તવિક સંખ્યા π સંમેય છે.

કોઈ પણ વાસ્તવિક સંખ્યા સંમેય તથા અસંમેય બંને ના હોઈ શકે. આથી 'અથવા'નો ઉપયોગ નિવારક વિકલ્પ તરીકે છે.

અહીં આપેલ વિધાન $p \vee q$ છે. p સત્ય અને q અસત્ય વિધાન છે. આથી $p \vee q$ એ સત્ય વિધાન છે.

ઉદાહરણ 9 : નીચેના સંયુક્ત વિધાનનાં ઘટક વિધાનો શોધો અને 'અથવા'નો ઉપયોગ સમાવેશ વિકલ્પ તરીકે છે કે નિવારક વિકલ્પ તરીકે છે તે નક્કી કરો. વિધાનનું સત્યતામૂલ્ય, નિષેધ તથા નિષેધનું સત્યતા મૂલ્ય શોધો.

'પાનકાર્ડ અથવા બૅન્કની પાસબુક ઓળખપત્ર છે.'

ધારો કે p : પાનકાર્ડ એ ઓળખપત્ર છે.
q : બૅન્ક પાસબુક એ ઓળખપત્ર છે.

અહીં આપેલ વિધાન $p \vee q$ છે. અહીં 'અથવા' શબ્દનો ઉપયોગ સમાવેશ વિકલ્પ તરીકે થયો છે. વ્યક્તિ પાસે બંને ઓળખપત્ર હોઈ શકે છે. p તથા q સત્ય હોવાથી $p \vee q$ સત્ય છે $(\sim p)$ અને $(\sim q)$ અસત્ય છે અને તેથી $(\sim p) \wedge (\sim q)$ અસત્ય છે. વિધાનનું નિષેધ $(\sim p) \wedge (\sim q)$: 'પાનકાર્ડ ઓળખપત્ર નથી અને બૅન્કની પાસબુક ઓળખપત્ર નથી.'

સ્વાધ્યાય 1.3

1. નીચેના સંયુક્ત વિધાનનાં ઘટક વિધાનો લખો અને સંયુક્ત વિધાનનું સત્યાર્થતા મૂલ્ય શોધો :

(1) $3 + 7 = 5$ અને $5^2 = 25$

(2) $3 + 7 = 10$ અને $10^2 = 100$

(3) ત્રિકોણને ત્રણ બાજુઓ છે અને ત્રણ ખૂણાઓ છે.

(4) ચતુષ્કોણને ચાર બાજુઓ છે અને ચાર ખૂણાઓ છે.

(5) ત્રિકોણના ત્રણેય ખૂણાઓનાં માપનો સરવાળો 180 છે અથવા 360 થાય છે.

(6) $2 + 2 = 5$ અને $5 + 2 = 25$

(7) 1 અને 2 એ $x^2 - 3x + 2 = 0$ નાં બીજ છે.

(8) $1^3 = 1$ અથવા $3^2 = 9$

(9) 1 અને 0 એ $x^2 = x$નું સમાધાન કરે છે.

(10) 0 એ સરવાળા માટે એકમ ઘટક છે અને 1 એ ગુણાકાર માટે એકમ ઘટક છે.

2. પ્રશ્ન 1નાં વિધાનોનાં નિષેધ લખો.

3. નીચેનાં વિધાનોમાં 'અથવા'નો ઉપયોગ સમાવેશ વિકલ્પ તરીકે થયો છે કે નિવારક વિકલ્પ તરીકે તે નક્કી કરો :

(1) રવિવારે અથવા તહેવારના દિવસે શાળામાં રજા હોય છે.

(2) પ્રવેશ પરીક્ષા પાસ કર્યા પછી, તમે મેડિકલ અથવા એન્જિનિયરીંગ કોર્ષમાં પ્રવેશ મેળવી શકો છો.

(3) ગુલાબ પીળા અથવા ગુલાબી રંગના હોય છે.

(4) ભારતે CWG રમતોમાં રાઈફલ શુટીંગમાં સુવર્ણચંદ્રક અને હોકીમાં રજતચંદ્રક મેળવ્યો હતો.

(5) પીઝા એ ઠંડાં પીણાં અથવા કૉલ્ડ કૉફી સાથે પીરસવામાં આવે છે.

4. એવાં બે ઉદાહરણ આપો કે જેમાં 'અને'નો ઉપયોગ થયો હોય, પણ તાર્કિક કારક તરીકે ઉપયોગ ન થયો હોય.

5. '30 એ 2, 3 અને 5 વડે વિભાજ્ય છે.' આ વિધાન કયાં વિધાનોનું સંયુક્ત વિધાન છે ? સંકેતમાં દર્શાવો તથા તેમની સત્યાર્થતા લખો તેમજ નિષેધ લખો.

6. 1 એ અવિભાજ્ય છે અથવા વિભાજ્ય છે. આ વિધાન કયાં સાદાં વિધાનોનું વિયોજન છે ? વિધાનનું સત્યાર્થતા મૂલ્ય લખો તેમજ નિષેધ લખો.

*

1.5 કારક અને તેમનાં નિષેધ

નીચે આપેલ છે તેવાં વિધાનોનો પણ ગણિતમાં ઉપયોગ થાય છે :

(1) પ્રાકૃતિક સંખ્યાગણના દરેક અરિક્ત ઉપગણમાં કોઈક નાનામાં નાની પ્રાકૃતિક સંખ્યા અસ્તિત્વ ધરાવે છે.

(2) પ્રત્યેક વાસ્તવિક સંખ્યા x માટે $x^2 \geq 0$.

'કોઈક અસ્તિત્વ ધરાવે છે' કે 'બધા માટે' કે 'પ્રત્યેક માટે' વગેરે જેવા શબ્દસમૂહોનો ગણિતમાં ઉપયોગ થાય છે. આ શબ્દસમૂહોને **કારકો (Quantifiers)** કહે છે.

'કોઈક અસ્તિત્વ ધરાવે છે' તે માટેનો સંકેત $\exists$ છે અને 'પ્રત્યેક માટે' માટેનો સંકેત $\forall$ છે.

'$\exists$' ને અસ્તિત્વ કારક અને '$\forall$' ને વૈશ્વિક કારક કહે છે.

ઉદાહરણ તરીકે 'પ્રત્યેક $x \in$ R માટે $x^2 \geq 0$' ને સંકેતમાં '$\forall x \in$ R, $x^2 \geq 0$' લખી શકાય.

જેથી $x^2 = -1$ થાય એવી કોઈક વાસ્તવિક સંખ્યા x અસ્તિત્વ ધરાવે છે. તેને સંકેતમાં '$\exists x$, $x \in$ R જેથી $x^2 = -1$' રીતે લખી શકાય.

આવાં વિધાનોનું નિષેધ કાળજીપૂર્વક કરવું જોઈએ. ઉદાહરણ તરીકે ઉપરનાં વિધાનો (1) તથા (2)નાં નિષેધ નીચે પ્રમાણે લખી શકાય :

(1) પ્રાકૃતિક સંખ્યાગણના કોઈક ઉપગણમાં નાનામાં નાની પ્રાકૃતિક સંખ્યા અસ્તિત્વ ધરાવતી નથી.

(2) જેના માટે $x^2 < 0$ થાય તેવી કોઈક વાસ્તવિક સંખ્યા x મળે છે.

વૈશ્વિક કારક (Universal Quantifier) અને અસ્તિત્વ કારક (Existential Quantifier)ના નિષેધ

કારક સાથેના વિધાન માટેના નિષેધ માટેનો નિયમ નીચે પ્રમાણે છે :

ધારો કે p કોઈક વિધાન છે.

~(કોઈક p) = બધા જ ~p. $\sim(\exists p) = \forall(\sim p)$

~(બધા જ p) = કોઈક ~p. $\sim(\forall p) = \exists(\sim p)$

ઉદાહરણ 10 : નીચેનાં વિધાનોનાં નિષેધ લખો :

(1) બધા જ ગણ A માટે, $\emptyset \subset$ A.

(2) બધા જ $x \in$ R માટે, $x + y = y + x$ જ્યાં $y \in$ R

(3) બધા જ $x \in$ R માટે, $x + 0 = 0 + x$

(4) બધા જ $x \in$ R માટે, $x \cdot 1 = 1 \cdot x$

ઉકેલ : બધાં જ વિધાનોમાં 'બધા જ p'નો ઉપયોગ થયેલ છે. માટે તેમનું નિષેધ 'કોઈક એવા ~p' પ્રકારનું હશે.

(1) કોઈક એવો ગણ A મળે કે જેથી $\emptyset \not\subset$ A.

(2) કોઈક એવો $x \in$ R મળે કે જેથી $x + y \neq y + x$ જ્યાં $y \in$ R.

(3) કોઈક એવો $x \in$ R મળે કે જેથી $x + 0 \neq 0 + x$.

(4) કોઈક એવો $x \in$ R મળે કે જેથી $x \cdot 1 \neq 1 \cdot x$.

ઉદાહરણ 11 : નીચેનાં વિધાનોનાં નિષેધ લખો :

(1) કોઈક $x \in$ N માટે $x^2 = x$.

(2) કોઈક $x \in$ R માટે $x^2 = -1$.

(3) કોઈક એવો માનવી છે જે અમર છે.

ઉકેલ : ~(કોઈક p માટે) = બધા જ ~p.

(1) બધા જ $x \in$ N માટે $x^2 \neq x$.

(2) બધા જ $x \in$ R માટે $x^2 \neq -1$.

(3) પ્રત્યેક માનવી માટે તે અમર નથી. (કોઈપણ માનવી અમર નથી.)

1.6 પ્રેરણ અને દ્વિપ્રેરણ

ગણિતમાં ઘણી વખત આ પ્રમાણેનાં વાક્યોનો ઉપયોગ કરીએ છીએ. 'જો ત્રિકોણની બધી જ બાજુઓ એકરૂપ હોય, તો તેના તમામ ખૂણાઓ એકરૂપ હોય છે.'

પ્રેરણ (Implication) : જો...અને તો... વડે બે વિધાનો **p અને q**ને જોડવામાં આવે છે. આ પ્રકારનાં વાક્યોનું સ્વરૂપ 'જો p તો q' હોય છે. તેને **પ્રેરણ** તરીકે ઓળખવામાં આવે છે. પ્રેરણને સંકેતમાં $p \Rightarrow q$ વડે દર્શાવાય છે. આ પ્રકારના વિધાનને **શરતી વિધાન (Conditional Statement)** કહે છે.

પ્રેરણને નીચેના પૈકી એક રીતે લખી શકાય છે :

(1) જો p તો q. (2) q, જો p.

(3) q તો જ p. (4) p એ q માટેની પર્યાપ્ત શરત છે.

(5) q એ p માટેની આવશ્યક શરત છે.

p ને સિદ્ધાંત અથવા પૂર્વવિધાન કહે છે. q ને તારણ અથવા ઉત્તરવિધાન કહે છે.

$p \Rightarrow q$ માં જો p અસત્ય હોય, તો q માટે કશું કહી ન શકાય. તદુપરાંત $p \Rightarrow q$નો અર્થ એવો નથી કે p અસ્તિત્વ ધરાવે છે. $p \Rightarrow q$ નો અર્થ એ છે કે p સત્ય હોય અને q અસત્ય હોય તો $p \Rightarrow q$ અસત્ય છે.

તે સિવાય તમામ વિકલ્પમાં હંમેશાં $p \Rightarrow q$ સત્ય જ બને.

ઉદાહરણ 12 : પ્રેરણ સ્વરૂપે લખો :

(1) યુગ્મ સંખ્યાનો વર્ગ યુગ્મ મળે.

(2) જો પૂર્ણાંક 9 વડે વિભાજ્ય હોય તો પૂર્ણાંકના અંકોનો સરવાળો 9 વડે વિભાજ્ય હોય.

(3) અવિભાજ્ય સંખ્યાનો વર્ગ અવિભાજ્ય ન હોય.

(4) પૂર્ણાંક સંખ્યા 10 વડે વિભાજ્ય હોય તેની આવશ્યક શરત એકમ અંકનો શૂન્ય હોવો જોઈએ.

(5) પૂર્ણાંક સંખ્યા 5 વડે વિભાજ્ય હોવા માટે એકમનો અંક 5 હોય તે પર્યાપ્ત શરત છે.

(6) વરસાદ પડે તો જ રસ્તા ભીના થાય.

(7) પરીક્ષા ન આપે તો જ નીરવ નાપાસ થાય.

ઉકેલ : (1) ધારો કે p : x એ યુગ્મ સંખ્યા છે.

q : x^2 એ યુગ્મ છે.

પ્રેરણ $p \Rightarrow q$ વડે દર્શાવાય. જો x યુગ્મ પૂર્ણાંક સંખ્યા હોય તો x^2 યુગ્મ છે.

(2) ધારો કે p : પૂર્ણાંક 9 વડે વિભાજ્ય છે.

q : તે પૂર્ણાંકના અંકોનો સરવાળો 9 વડે વિભાજ્ય છે.

પ્રેરણ $p \Rightarrow q$ વડે દર્શાવાય.

જો પૂર્ણાંક 9 વડે વિભાજ્ય હોય તો તેના અંકોનો સરવાળો 9 વડે વિભાજ્ય હોય.

(3) ધારો કે p : સંખ્યા x અવિભાજ્ય છે.

q : xનો વર્ગ અવિભાજ્ય નથી.

પ્રેરણ $p \Rightarrow q$: જો સંખ્યા અવિભાજ્ય હોય, તો તેનો વર્ગ અવિભાજ્ય નથી.

(4) ધારો કે p : પૂર્ણાંક સંખ્યા 10 વડે વિભાજ્ય છે.

q : પૂર્ણાંક સંખ્યાનો એકમનો અંક શૂન્ય છે.

પ્રેરણ $p \Rightarrow q$: જો પૂર્ણાંક સંખ્યા 10 વડે વિભાજ્ય હોય, તો તેનો એકમનો અંક શૂન્ય છે.

(5) ધારો કે p : પૂર્ણાંક સંખ્યાનો એકમનો અંક 5 છે.

q : પૂર્ણાંક સંખ્યા 5 વડે વિભાજ્ય છે.

પ્રેરણ $p \Rightarrow q$: જો પૂર્ણાંક સંખ્યાનો એકમનો અંક 5 હોય, તો તે 5 વડે વિભાજ્ય છે.

(6) ધારો કે p : રસ્તા ભીના થશે.

q : વરસાદ પડે.

$p \Rightarrow q$ 'જો રસ્તા ભીના હશે તો વરસાદ પડ્યો હશે.'

(7) ધારો કે p : નીરવ નાપાસ થયો.

q : નીરવે પરીક્ષા આપી નહિ હોય.

$p \Rightarrow q$: 'જો નીરવ નાપાસ થાય તો તેણે પરીક્ષા આપી નહિ હોય.'

દ્વિપ્રેરણ (Biconditional statement) : ભૂમિતિમાં આપણે આવા પ્રકારનાં વાક્યો જોતા હોઈએ છીએ. જેમકે 'ત્રિકોણ સમબાજુ ત્રિકોણ હોય તો અને તો જ તે સમકોણ ત્રિકોણ છે.' અહીં બે વિધાનોને 'તો અને તો જ' જેવા શબ્દસમૂહથી જોડવામાં આવ્યા છે.

ધારો કે p : ત્રિકોણ સમબાજુ ત્રિકોણ છે.

q : ત્રિકોણ સમકોણ ત્રિકોણ છે.

અહીં આપેલ વિધાન જો **p તો અને તો જ q** છે.

આ પ્રકારનાં વિધાનોને દ્વિપ્રેરણ કહે છે અને સંકેતમાં તેને $p \Leftrightarrow q$ વડે દર્શાવવામાં આવે છે.

તેનું સમાનાર્થી વિધાન 'જો p સત્ય છે તો q સત્ય છે' અને તે જ રીતે ઊલટું, 'જો q સત્ય છે તો p સત્ય છે'. **જો બંને વિધાન p અને q સત્ય હોય અથવા બંને અસત્ય હોય, તો $p \Leftrightarrow q$ સત્ય થાય.** તેને વિભાજિત કરીએ, તો **'જો p તો q અને જો q તો p' એમ બે વિધાનોનું સંયોજન દ્વિપ્રેરણ થાય.**

ઉદાહરણ 13 : દ્વિપ્રેરણથી નીચેનાં વિધાનો પરથી સંયુક્ત વિધાન રચો.

p : જો લંબચોરસ એ ચોરસ હોય તો તેની ચારેય બાજુઓ એકરૂપ હોય.

q : જો લંબચોરસની ચારેય બાજુઓ એકરૂપ હોય તો લંબચોરસ એ ચોરસ છે.

ઉકેલ : $p \Leftrightarrow q$: જો લંબચોરસ એ ચોરસ હોય તો અને તો જ તેની બધી જ બાજુઓ એકરૂપ હોય.

ઉદાહરણ 14 : નીચેનાં વિધાનો પૈકી સંયુક્ત વિધાનનાં ઘટક વિધાનો ઓળખો અને સંયુક્ત વિધાનનું સત્યાર્થતા મૂલ્ય લખો :

(1) જો ત્રિકોણ એ સમકોણ ત્રિકોણ હોય તો તેની બધી જ બાજુઓ એકરૂપ છે.

(2) જો $a \in N$, $b \in N$ તો $a + b \in N$ અને $ab \in N$.

(3) જો કોઈ સંખ્યા વાસ્તવિક સંખ્યા હોય, તો તે પ્રાકૃતિક સંખ્યા છે.

(4) જો m અને n અયુગ્મ હોય, તો $m + n$ એ યુગ્મ થાય.

(5) જો m અને n અયુગ્મ હોય, તો mn એ અયુગ્મ થાય.

ઉકેલ : (1) ધારો કે p : ત્રિકોણ એ સમકોણ ત્રિકોણ છે.

q : ત્રિકોણની તમામ બાજુઓ એકરૂપ છે.

અહીં $p \Rightarrow q$ આપેલ છે. અહીં p સત્ય હોય અને q અસત્ય હોય તે શક્ય નથી. તેથી જો p સત્ય હોય તો q સત્ય જ બને.

$\therefore$ $p \Rightarrow q$ સત્ય વિધાન છે.

(2) ધારો કે $p : a \in N, b \in N$

$q : a + b \in N$ અને $ab \in N$.

જો p સત્ય હોય, તો q સત્ય થાય. આથી $p \Rightarrow q$ સત્ય વિધાન બને.

(3) ધારો કે p : કોઈ સંખ્યા વાસ્તવિક સંખ્યા છે.

q : તે સંખ્યા પ્રાકૃતિક સંખ્યા છે.

અહીં $\sqrt{2} \in R$ અને $\sqrt{2} \notin N$.

તેથી p એ $x = \sqrt{2}$ માટે સત્ય છે અને q એ સત્ય નથી.

તેથી બધા જ $x \in R$ માટે p સત્ય હોય, તો q સત્ય થાય તે શક્ય નથી.

$\therefore \quad p \Rightarrow q$ અસત્ય છે.

(4) ધારો કે p : m અને n અયુગ્મ છે.

$q : m + n$ યુગ્મ છે.

જો p સત્ય છે તો q સત્ય છે. આથી $p \Rightarrow q$ સત્ય છે.

(5) ધારો કે p : m અને n અયુગ્મ છે.

q : mn અયુગ્મ છે.

જો p સત્ય હોય, તો q સત્ય બને. તેથી $p \Rightarrow q$ એ સત્ય છે.

સ્વાધ્યાય 1.4

1. નીચેના વિધાનોમાં કારક ઓળખો અને વિધાનનાં નિષેધ લખો :

(1) પ્રત્યેક પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓની જોડ a અને b માટે $a + b$ એ યુગ્મ પૂર્ણાંક મળે.

(2) દરેક કરદાતા પાસે પાનકાર્ડ હોવું જોઈએ.

(3) $\sqrt{x} \in R$ થાય તેવો કોઈ ધન પૂર્ણાંક x અસ્તિત્વ ધરાવે.

(4) $x \in \emptyset$ થાય તેવા કોઈક ઘટક x અસ્તિત્વ ધરાવે.

(5) પ્રત્યેક $\theta \in R$ માટે $sin^2\theta + cos^2\theta = 1$.

(6) ફક્ત સીધીપટ્ટી અને પરિકરની મદદથી દરેક ખૂણાની રચના થઈ શકે.

(7) 18 વર્ષ કરતાં વધુ ઉંમરના બધી જ વ્યક્તિઓ મતદાર હોય છે.

(8) N ના પ્રત્યેક ઉપગણમાં એક ન્યૂનતમ પૂર્ણાંક હોય છે.

(9) જેનો એકમનો અંક શૂન્ય હોય તેવી બધી જ સંખ્યાઓ 10 વડે વિભાજ્ય છે.

(10) જેનો એકમનો અંક 5 ન હોય તેવો 5નો કોઈક ગુણિત મળે.

2. નીચેનાં સંયુક્ત વિધાનોનાં ઘટક વિધાનો ઓળખો અને તે પરથી પ્રેરણની સત્યાર્થતા ચકાસો :

(1) જો n અયુગ્મ છે, તો n^2 એ અયુગ્મ છે.

(2) જો n એ 2 વડે વિભાજ્ય છે, તો n એ 4 વડે વિભાજ્ય હોય.

(3) જો n એ 9 વડે વિભાજ્ય છે, તો n એ 3 વડે વિભાજ્ય હોય.

(4) જો ચતુષ્કોણના બધા જ ખૂણાનું માપ 90 હોય તો તે લંબચોરસ છે.

(5) જો ત્રિકોણના બધા જ ખૂણાનાં માપ સમાન હોય તો તે ત્રિકોણ સમબાજુ ત્રિકોણ છે.

(6) જો ત્રિકોણ સમદ્વિબાજુ હોય તો તે સમબાજુ હોય છે.

(7) જો ત્રિકોણ એ કાટકોણ ત્રિકોણ હોય તો કાટખૂણાની સામેની બાજુ મોટામાં મોટી હોય છે.

(8) પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ u તથા v માટે જો ત્રિકોણની બાજુઓ $2uv$, $u^2 - v^2$, $u^2 + v^2$ $(u > v)$ હોય, તો તે કાટકોણ ત્રિકોણ છે.

(9) જો ત્રિકોણની બાજુઓ $m, n \in \mathrm{N}$, $m > n$ માટે, $2mn$, $m^2 - n^2$, $m^2 + n^2$ હોય, તો તે કાટકોણ ત્રિકોણ છે.

(10) જો આપેલ સંખ્યા 1001 વડે વિભાજ્ય હોય તો તે 7, 11 અને 13 વડે વિભાજ્ય છે.

3. નીચેનાં વિધાનો પરથી દ્વિપ્રેરણ લખો અને સત્યાર્થતા ચકાસો :

(1) p : ચતુષ્કોણ ABCD એ લંબચોરસ છે.
q : ચતુષ્કોણ ABCD એ ચોરસ છે.

(2) p : ΔABC એ સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ છે.
q : ΔABC એ સમબાજુ ત્રિકોણ છે.

(3) p : ચતુષ્કોણ ABCDની બધી બાજુઓ અને બધા ખૂણા એકરૂપ છે.
q : ચતુષ્કોણ ABCD એ ચોરસ છે.

(4) p : n એ ધન પૂર્ણાંક છે.
q : n એ યુગ્મ પૂર્ણાંક છે.

(5) p : વાસ્તવિક સંખ્યા x ધન છે.
q : વાસ્તવિક સંખ્યા x એ બીજી વાસ્તવિક સંખ્યાનો વર્ગ છે.

*

સમાનાર્થી પ્રેરણ અને પ્રતીપ :

પૂર્વવિધાન તથા ઉત્તરવિધાનનું નિષેધ લેવાથી આપેલ પ્રેરણનું સમાનાર્થી પ્રેરણ નીચે પ્રમાણે મળે છે અને તે તાર્કિક સાબિતીમાં ઉપયોગી છે :

$p \Rightarrow q$ અને $\sim q \Rightarrow \sim p$ સમાનાર્થી છે.

$\sim q \Rightarrow \sim p$ ને $p \Rightarrow q$નું સમાનાર્થી પ્રેરણ (Contrapositive) કહે છે.

તેથી ધારો કે આપણે $A \subset B$ સાબિત કરવું હોય તો 'જો $x \in A$, તો $x \in B$' સાબિત કરવું પડે.

સમાનાર્થી પ્રેરણ : જો $x \notin B$ તો $x \notin A$. i.e. $B' \subset A'$ સાબિત કરવું પૂરતું છે.

$p \Rightarrow q$નું પ્રતીપ (Converse) $q \Rightarrow p$ છે.

તેથી $p \Leftrightarrow q$ એ પ્રેરણ અને તેના પ્રતીપ વિધાનનું સંયોજિત વિધાન છે.

ઉદાહરણ 15 : નીચેનાં વિધાનોના સમાનાર્થી પ્રેરણ તથા પ્રતીપ આપો :

(1) જો વરસાદ પડે તો રસ્તા ભીના થાય.

(2) જો $ab = 0$, તો $a = 0$ અથવા $b = 0$.

(3) જો $ab = ac$ અને $a \neq 0$, તો $b = c$.

(4) જો x અવિભાજ્ય સંખ્યા છે, તો તે અયુગ્મ સંખ્યા છે.

(5) જો $\square$ABCD એ ચોરસ હોય, તો તેના વિકર્ણો એકરૂપ છે.

ઉકેલ : (1) ધારો કે p : વરસાદ પડે.
q : રસ્તા ભીના થાય.

સમાનાર્થી પ્રેરણ : જો રસ્તા ભીના ન થાય તો વરસાદ પડ્યો ન હોય.

પ્રતીપ : જો રસ્તા ભીના હોય, તો વરસાદ પડ્યો હોય.

(2) $p : ab = 0$

$q : a = 0$ અથવા $b = 0$

$\sim q \Rightarrow \sim p$: જો $a \neq 0$ અને $b \neq 0$, તો $ab \neq 0$

(જુઓ કે **'અથવા'નું પરિવર્તન 'અને'માં થાય છે. શા માટે ?**)

પ્રતીપ : 'જો $a = 0$ અથવા $b = 0$, તો $ab = 0$'.

(3) $p : ab = ac$ અને $a \neq 0$

$q : b = c$.

સમાનાર્થી પ્રેરણ : જો $b \neq c$ તો $ab \neq ac$ અથવા $a = 0$

('અને' પરિવર્તન 'અથવા'માં થાય છે. શા માટે ?)

પ્રતીપ : જો $b = c$ તો $ab = ac$ અને $a \neq 0$.

(4) $p : x$ એ અવિભાજ્ય સંખ્યા છે.

$q : x$ એ અયુગ્મ સંખ્યા છે.

$\sim q \Rightarrow \sim p$: જો x અયુગ્મ સંખ્યા ન હોય, તો તે અવિભાજ્ય સંખ્યા નથી.

પ્રતીપ : જો x એ અયુગ્મ સંખ્યા છે, તો x અવિભાજ્ય સંખ્યા છે.

(5) p : □ABCD એ ચોરસ છે.

q : □ABCDના વિકર્ણો એકરૂપ છે.

$\sim q \Rightarrow \sim p$: 'જો □ABCDના વિકર્ણો એકરૂપ ન હોય, તો તે ચોરસ નથી.'

પ્રતીપ : 'જો □ABCDના વિકર્ણો એકરૂપ હોય, તો □ABCD ચોરસ છે.'

સ્વાધ્યાય 1.5

1. નીચેનાં વિધાનોનાં સમાનાર્થી પ્રેરણ તથા પ્રતીપ વિધાનો લખો :

(1) જો n એ 30 વડે વિભાજ્ય હોય તો n એ 2 વડે વિભાજ્ય છે.

(2) જો n એ 8 વડે વિભાજ્ય હોય તો n એ 16 વડે વિભાજ્ય છે.

(3) જો સંજય પરીક્ષા ન આપે તો તે નાપાસ થશે.

(4) જો n એ કોઈ પૂર્ણાંકનો વર્ગ હોય તો તેનું વર્ગમૂળ પૂર્ણાંક થાય.

(5) જો n એ પૂર્ણાંકનો ઘન હોય તો તેના ત્રણ વાસ્તવિક ઘનમૂળ મળે.

(6) જો સમતલમાં આવેલ બે રેખાઓ પરસ્પર છેદે તો તે સમાંતર હોઈ શકે નહિ.

(7) જો ત્રિકોણના બે ખૂણાઓ એકરૂપ ન હોય તો તેમની સામેની બાજુઓ પણ એકરૂપ ન હોય.

(8) સમતલમાં જો $l \parallel m$ અને $m \parallel n$ તો $l \parallel n$ અથવા $l = n$.

(9) જો $a^2 = b^2$ તો $a = \pm b$ $(a, b \in R)$.

(10) જો $a^3 = b^3$ તો $a = b$ $(a, b \in R)$.

*

1.7 વિધાનોની યથાર્થતા

આ વિભાગમાં આપણે **વિધાનોની યથાર્થતા (Validating Statements)**ની ચર્ચા કરીશું. આપણે જાણીએ છીએ કે, વિધાન સત્ય કે મિથ્યા હોય અને આ બેમાંથી એક જ વિકલ્પ સત્ય છે. આપણે વિધાન સત્ય છે કે અસત્ય તે નક્કી કરવા ઇચ્છીએ છીએ. આ સત્યાર્થતાનો આધાર ઉપયોગમાં લીધેલા તાર્કિક કારકો 'અને' તથા 'અથવા', 'જો...તો' પ્રકારના પ્રેરણ, 'જો...તો અને તો જ' પ્રકારના દ્વિપ્રેરણ તથા 'પ્રત્યેક માટે' અને 'અસ્તિત્વકારક'' કારકો પર છે.

આ માટે કેટલાક નિયમોની યાદી તૈયાર કરીએ :

(1) જો તાર્કિક કારક 'અને'નો ઉપયોગ થયો હોય તો ઘટક વિધાનો p તથા q બંને સત્ય હોય તો સંયુક્ત વિધાન સત્ય છે અને આ સિવાયના વિકલ્પોમાં સંયુક્ત વિધાન સત્ય નથી.

(2) જો તાર્કિક કારક 'અથવા'નો ઉપયોગ થયો હોય તો ઘટક વિધાનો p તથા q બંને વિધાનો મિથ્યા હોય, તો સંયુક્ત વિધાન મિથ્યા છે અને આ સિવાયના વિકલ્પોમાં સંયુક્ત વિધાન સત્ય છે.

(3) (i) જો 'p તો q' પ્રકારનું વિધાન સાબિત કરવા માટે p સત્ય છે તેમ સ્વીકારી q સાબિત કરો. આને સાબિતીની **પ્રત્યક્ષ પદ્ધતિ (Direct Method)** કહે છે. અહીં આપણે એ હકીકતનો ઉપયોગ કરીએ છીએ કે જ્યારે p સત્ય હોય અને q મિથ્યા હોય ત્યારે જ પ્રેરણ અસત્ય છે. (ii) q નું નિષેધ સત્ય છે તેમ સ્વીકારી p નું નિષેધ સત્ય છે તેમ સાબિત કરો. આ રીત સમાનાર્થી પ્રેરણની રીત છે. $\sim q \Rightarrow \sim p$ તથા $p \Rightarrow q$ સમાનાર્થી વિધાનો છે.

(4) જો p તો અને તો જ q એટલે કે દ્વિપ્રેરણ $p \Leftrightarrow q$ સાબિત કરવા માટે (i) p ને સત્ય સ્વીકારી q સાબિત કરવું જોઈએ તથા (ii) q ને સત્ય સ્વીકારી p સાબિત કરવું જોઈએ.

(5) **વિરોધાભાસની રીત (અનિષ્ટાપત્તિની રીત) (Method of Contradiction) :** આ રીતમાં આપણે સ્વીકારી લઈએ છીએ કે, q સત્ય નથી અને તે પરથી પક્ષ (સિદ્ધાંત)થી વિપરીત પરિણામ મેળવીએ છીએ. આ પરથી તારણ મળે કે, q નો નિષેધ સત્ય હોય તે શક્ય નથી. આથી q સત્ય છે તેમ સાબિત થાય.

(6) આપણે નોંધીએ કે $\sim(p \Rightarrow q) = p \wedge (\sim q)$

ઉદાહરણ 16 : નીચેની બે રીતે સાબિત કરો કે જો $x, y \in N$ તથા x અને y અયુગ્મ હોય, તો xy અયુગ્મ છે :

(1) પ્રત્યક્ષ રીતે $p \Rightarrow q$ તરીકે,

(2) સમાનાર્થી પ્રેરણ $\sim q \Rightarrow \sim p$નો ઉપયોગ કરીને.

ઉકેલ : (1) $x = 2m - 1$, $y = 2n - 1$, $m, n \in N$ લઈએ. (અયુગ્મ પ્રાકૃતિક સંખ્યાનું પ્રમાણિત સ્વરૂપ)
(અયુગ્મ સંખ્યાઓ $2n \pm 1$ સ્વરૂપની હોય છે.)

$\therefore\ xy = (2m - 1)(2n - 1)$

$= 4mn - 2m - 2n + 1$

$= 2(2mn - m - n) + 1$

$= 2k + 1$ જ્યાં $k = 2mn - m - n$

$\therefore$ xy અયુગ્મ છે.

(2) ધારો કે $\sim q$ એ સત્ય છે.

$\therefore$ xy એ અયુગ્મ નથી.

$\therefore$ xy એ યુગ્મ છે.

$xy = 2m$ લેતાં, xy એ 2 વડે વિભાજ્ય છે.

$\therefore$ x એ 2 વડે વિભાજ્ય છે અથવા y એ 2 વડે વિભાજ્ય છે.

$\therefore$ x એ યુગ્મ છે અથવા y એ યુગ્મ છે.

$\therefore$ $\sim p$ સત્ય છે. **(p : x અને y બંને અયુગ્મ છે.)**

$\therefore$ $\sim q \Rightarrow \sim p$ સત્ય છે.

$\therefore$ $p \Rightarrow q$ સત્ય છે.

$\therefore$ જો x અને y અયુગ્મ હોય, તો xy એ અયુગ્મ છે.

ઉદાહરણ 17 : સમાનાર્થી પ્રેરણની રીતે સાબિત કરો : 'જો xy અયુગ્મ હોય તો x અને y અયુગ્મ છે.'

ઉકેલ : ધારો કે p : xy અયુગ્મ છે. q : x અને y અયુગ્મ છે.

$\therefore$ $\sim q$: x યુગ્મ છે અથવા y યુગ્મ છે. **(બંને યુગ્મ હોઈ શકે.)**

ધારો કે $x = 2m$, $m \in$ N **(અથવા તે જ રીતે ધારી શકાય કે $y = 2m$)**

$\therefore$ $xy = 2my$

$\therefore$ xy એ યુગ્મ છે.

$\therefore$ $\sim p$ એ સત્ય છે.

$\therefore$ $\sim q \Rightarrow \sim p$ સત્ય છે.

$\therefore$ $p \Rightarrow q$ સત્ય છે.

$\therefore$ જો xy અયુગ્મ હોય તો x અને y અયુગ્મ છે.

ઉદાહરણ 18 : અનિષ્ટાપત્તિની રીતથી સાબિત કરો કે, અસંમેય સંખ્યા અને સંમેય સંખ્યાનો સરવાળો અસંમેય હોય.

ઉકેલ : ધારો કે x એ અસંમેય સંખ્યા અને y એ સંમેય સંખ્યા છે.

ધારો કે $x + y = z$ એ સંમેય સંખ્યા છે.

અહીં z અને y એ બંને સંમેય છે. તેથી $z - y$ પણ સંમેય થાય.

$\therefore$ $x = z - y$ પણ સંમેય થાય.

પરંતુ x એ અસંમેય સંખ્યા છે.

$\therefore$ આ પરિણામ આપણી ધારણા કરતાં વિપરીત છે.

$\therefore$ $z = x + y$ એ અસંમેય થાય.

ઉદાહરણ 19 : અનિષ્ટાપત્તિના આધારે સાબિત કરો કે જો $x > 3$ તો $x^2 > 9$ ($x \in$ R).

ઉકેલ : ધારો કે વિધાન '$x > 3 \Rightarrow x^2 > 9$' અસત્ય છે.

આપણે જાણીએ છીએ કે, $\sim(p \Rightarrow q) = p \wedge (\sim q)$

$\therefore$ $x > 3$ અને $x^2 \le 9$

$\therefore$ $x > 3$ અને $x^2 - 9 \le 0$

$\therefore$ $x > 3$ અને ($x - 3 \le 0$ અથવા $x + 3 \le 0$)

$\therefore$ $x > 3$ અને ($x \le 3$ અથવા $x \le -3 < 3$)

$\therefore$ $x > 3$ અને $x \le 3$

આ પરિણામ શક્ય નથી.

તેથી $\sim(p \Rightarrow q)$ એ અસત્ય છે. આથી $p \Rightarrow q$ એ સત્ય છે.

ઉદાહરણ 20 : સાબિતીની પ્રત્યક્ષ રીતનો ઉપયોગ કરી સાબિત કરો કે જો $x = y$ તો $x^2 = y^2$ થાય. (જ્યાં x અને y વાસ્તવિક સંખ્યાઓ છે.)

ઉકેલ : ધારો કે $x = y$

$\therefore$ $xx = xy$

તે જ રીતે $x = y$ પરથી $xy = yy$

$\therefore$ $xx = xy = yy$

$\therefore$ $x^2 = y^2$

ઉદાહરણ 21 : સાબિત કરો કે જો n યુગ્મ સંખ્યા હોય તો n^2 યુગ્મ થાય.

ઉકેલ : ધારો કે p : n એ યુગ્મ સંખ્યા છે.

q : n^2 એ યુગ્મ સંખ્યા છે.

$\sim(p \Rightarrow q) = p \wedge (\sim q)$

$\therefore$ $p \wedge (\sim q)$: n યુગ્મ છે અને n^2 યુગ્મ નથી.

ધારો કે $n = 2m$

$\therefore$ $n^2 = 4m^2$ યુગ્મ છે.

$\therefore$ $p \wedge (\sim q)$ એટલે કે 'n યુગ્મ છે અને n^2 યુગ્મ નથી' તે ખોટું છે.

$\therefore$ $\sim(p \Rightarrow q)$ ખોટું છે.

$\therefore$ $p \Rightarrow q$ એટલે કે, n યુગ્મ છે $\Rightarrow$ n^2 યુગ્મ છે તે સત્ય છે.

ઉદાહરણ 22 : પ્રતિઉદાહરણ આપી દર્શાવો કે નીચેનાં વિધાન અસત્ય છે :

(1) જો n અવિભાજ્ય હોય તો n અયુગ્મ છે.

(2) જો $m^2 = n^2$, તો $m = n$.

ઉકેલ : (1) $n = 2$ એ અવિભાજ્ય છે. પરંતુ તે અયુગ્મ નથી. આથી આપેલ વિધાન સત્ય નથી.

(2) $3^2 = (-3)^2 = 9$, પરંતુ $3 \neq -3$.

આથી પ્રતિઉદાહરણની રીતે આપેલ વિધાન સત્ય નથી.

ઉદાહરણ 23 : સાબિતીની પ્રત્યક્ષ રીતે સાબિત કરો કે, વાસ્તવિક સંખ્યા x માટે જો $x^3 + x = 0$ તો $x = 0$.

ઉકેલ : ધારો કે $p : x^3 + x = 0$ અને $q : x = 0$

$\therefore$ $p : x(x^2 + 1) = 0$

$\therefore$ $x = 0$ અથવા $x^2 + 1 = 0$

પરંતુ વાસ્તવિક સંખ્યા x માટે $x^2 \geq 0$

$\therefore$ $x^2 + 1 > 0$

$\therefore$ $x^2 + 1 \neq 0$

$\therefore$ $x = 0$

$\therefore$ q સત્ય છે.

$\therefore$ $p \Rightarrow q$ સત્ય છે.

સ્વાધ્યાય 1

1. નીચેનાં વાક્યો વિધાન છે કે નહિ તે બતાવો :

(1) જો n પૂર્ણાંક સંખ્યા હોય તો n યુગ્મ અથવા અયુગ્મ સંખ્યા હોય.

(2) જો આપેલ ખૂણો કાટખૂણો હોય તો અને તો જ તે ખૂણાનું માપ 90 છે.

(3) ટ્રાફિકના નિયમોનું પાલન કરો.

(4) કેવું સુંદર પ્રદર્શન !

(5) ભારત વિકસિત દેશ છે.

(6) ગુજરાત વાઇબ્રન્ટ રાજ્ય છે.

(7) તાજમહેલ ક્યાં આવેલ છે ?

(8) ગુજરાત પ્રવાસન નિગમના બ્રાન્ડ એમ્બેસેડર કોણ છે ?

(9) જો n યુગ્મ હોય તો $n + 1$ અયુગ્મ છે.

(10) જો n યુગ્મ સંખ્યા હોય તો $n + 1$ શૂન્ય ન હોય.

2. નીચેનાં વિધાનોનાં નિષેધ લખો :

(1) વિજ્ઞાન અને ગણિત વિકાસ માટે ઉપયોગી છે.

(2) કોઈ પણ વ્યક્તિ ઇજનેરી અથવા તબીબી અભ્યાસ પસંદ કરી શકે.

(3) જો n પૂર્ણવર્ગ હોય તો n નો અંતિમ અંક 3 ના હોઈ શકે.

(4) બધી જ અવિભાજ્ય સંખ્યા અયુગ્મ છે.

(5) બધી જ અયુગ્મ સંખ્યા અવિભાજ્ય છે.

(6) દરેક પૂર્ણાંક સંમેય સંખ્યા છે.

(7) અવિભાજ્ય હોય તેવો કોઈક યુગ્મ પૂર્ણાંક છે.

(8) $x^2 = -1$ થાય તેવી કોઈક વાસ્તવિક સંખ્યા અસ્તિત્વ ધરાવે છે.

(9) પ્રત્યેક $a \in$ R માટે, $a + 0 = a$

(10) $a \cdot 1 \neq a$ થાય તેવી કોઈક વાસ્તવિક સંખ્યા $a \in$ R મળે.

(11) પ્રત્યેક વાસ્તવિક સંખ્યા x માટે $x^2 \neq x$.

(12) $x^3 < x$ થાય તેવી કોઈક વાસ્તવિક સંખ્યા x અસ્તિત્વ ધરાવે છે.

3. નીચેના વિધાનને પાંચ જુદી જુદી રીતે 'જો...તો'નો ઉપયોગ કરીને લખો :

(સૂચન : 'જો p તો q; q, જો p; q તો જ p, આવશ્યક, પર્યાપ્ત)

'જો n અયુગ્મ હોય તો $n^2 + 1$ યુગ્મ હોય.'

4. નીચેનાં વિધાનોનાં પ્રતીપ અને સમાનાર્થી પ્રેરણ લખો :

(1) જો બહાર વરસાદ પડતો હોય તો તમારી પાસે છત્રી હોવી જોઈએ.

(2) જો કોઈ ધન પૂર્ણાંક વિભાજ્ય હોય તો તેને ઓછામાં ઓછા ત્રણ અવયવ હોય.

(3) જો n વિભાજ્ય ન હોય કે અવિભાજ્ય ન હોય તો $n = 1$.

(4) જો ચતુષ્કોણ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ હોય તો તેની સામસામેની બાજુઓ એકરૂપ હોય.

(5) જો ચતુષ્કોણના વિકર્ણો પરસ્પર દુભાગે તો તે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

(6) જો આજે શુક્રવાર હોય તો હું નવું ચલચિત્ર જોવા જઈશ.

(7) જો x ઋણ હોય તો x^2 ધન હોય.

(8) જો x અને y ઋણ હોય તો xy ધન હોય.

(9) જો ચતુષ્કોણ સમકોણ હોય તો તે ચોરસ હોય.

(10) જો $x - a$ બહુપદી $p(x)$નો અવયવ હોય તો $p(a) = 0$.

5. નીચેના વિધાનની સત્યાર્થતા (1) પ્રત્યક્ષ પદ્ધતિ (2) સમાનાર્થી પ્રેરણની રીતથી (3) અનિષ્ટાપત્તિની રીતથી સાબિત કરો :

જો $x^5 + 16x = 0$ તો $x = 0$.

6. અનિષ્ટાપત્તિની રીતથી સાબિત કરો કે $\sqrt{2}$ અસંમેય છે.

7. પ્રતિઉદાહરણની રીતે સાબિત કરો કે નીચેનું વિધાન અસત્ય છે :
p : જો ત્રિકોણ કાટકોણ ત્રિકોણ હોય તો તે સમદ્વિભુજ ત્રિકોણ ન હોય.

8. પ્રતિઉદાહરણની રીતે સાબિત કરો કે નીચેનું વિધાન અસત્ય છે :
જ્યારે પણ x પ્રાકૃતિક સંખ્યા હોય ત્યારે $\sqrt{x}$ અસંમેય હોય.

9. સાબિતીની પ્રત્યક્ષ રીતે સાબિત કરો કે, પ્રત્યેક પૂર્ણાંક n માટે $n^3 - n$ યુગ્મ છે.

10. નીચે આપેલું દરેક વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલા વિકલ્પો (a), (b), (c) અથવા (d)માંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરીને ☐ માં લખો :

(1) નીચેના પૈકી કયું વિધાન છે ? ☐
(a) x ધન છે. (b) -1 ઋણ છે.
(c) ઊભા થાવ. (d) તમે ક્યાં છો ?

(2) નીચેના પૈકી કયું વિધાન નથી ? ☐
(a) $2 \times 3 = 6$ (b) $2 \times 4 \neq 8$
(c) સત્યનો વિજય થાવ ! (d) અયુગ્મ સંખ્યાનો વર્ગ અયુગ્મ છે.

(3) '3 અયુગ્મ છે અથવા 3 અવિભાજ્ય છે'નું નિષેધ ...... છે. ☐
(a) 3 અયુગ્મ નથી અને 3 અવિભાજ્ય નથી. (b) 3 અયુગ્મ નથી અથવા 3 અવિભાજ્ય નથી.
(c) 3 અયુગ્મ છે અને 3 અવિભાજ્ય નથી. (d) 3 અયુગ્મ નથી અને 3 અવિભાજ્ય છે.

(4) 'જો $x^2 = y^2$ તો $x = y$'નું પ્રતીપ ...... છે. ☐
(a) જો $x^2 = y^2$, તો $x \neq y$ (b) જો $x = y$, તો $x^2 = y^2$
(c) જો $x \neq y$, તો $x^2 = y^2$ (d) જો $x^2 \neq y^2$, તો $x = y$

(5) 'જો $x > y$, તો $3x > 3y$'નું સમાનાર્થી પ્રેરણ ...... છે. ☐
(a) જો $x > y$, તો $3x \leq 3y$ (b) જો $3x > 3y$, તો $x > y$
(c) જો $3x \leq 3y$, તો $x \leq y$ (d) જો $x < y$, તો $3x < 3y$

(6) $p \Rightarrow q$ નું સમાનાર્થી પ્રેરણ ...... છે. ☐
(a) $q \Rightarrow p$ (b) $\sim q \Rightarrow \sim p$ (c) $p \Rightarrow \sim q$ (d) $\sim p \Rightarrow q$

(7) $p \Rightarrow q$ નું નિષેધ ...... છે. ☐
(a) p અને $\sim q$ (b) p અથવા q (c) $\sim p$ અથવા q (d) $q \Rightarrow p$

(8) $p \Rightarrow q$ નું પ્રતીપ ...... છે. ☐
(a) $p \Rightarrow \sim q$ (b) $\sim q \Rightarrow p$ (c) $q \Rightarrow p$ (d) $\sim p \Rightarrow q$

(9) 'પ્રત્યેક x માટે p' નું નિષેધ ...... છે. ☐
(a) કોઈ x છે, $\sim p$ (b) પ્રત્યેક x માટે $\sim p$
(c) $\sim p$ (d) p

(10) '12 એ 3નો ગુણક છે તથા 12 એ 4નો ગુણક છે'નું નિષેધ ...... છે. ☐
(a) 12 એ 3 અથવા 4નો ગુણક છે.
(b) 12 એ 3નો ગુણક નથી અથવા 12 એ 4નો ગુણક નથી.
(c) 12 એ 3નો ગુણક નથી અને 12 એ 4નો ગુણક નથી.
(d) 12 એ 3નો ગુણક છે અને 12 એ 4નો ગુણક છે.

(11) દ્વિપ્રેરણ $p \Leftrightarrow q$ ...... છે.

(a) $p \Rightarrow q$ અને $q \Rightarrow p$ નું સંયોજન (b) $p \Rightarrow q$ અને $q \Rightarrow p$ નું વિયોજન

(c) $p \Rightarrow q$ નું પ્રતીપ (d) $q \Rightarrow p$ નું સમાનાર્થી પ્રેરણ

(12) જો ...... તો $p \wedge q$ સત્ય છે.

(a) p અને q સત્ય છે. (b) p અને q અસત્ય છે.

(c) p સત્ય છે અને q અસત્ય છે. (d) p અસત્ય છે અને q સત્ય છે.

(13) જ્યારે ...... ત્યારે $p \vee q$ અસત્ય છે.

(a) p અને q સત્ય છે. (b) p અને q અસત્ય છે.

(c) p સત્ય છે અને q અસત્ય છે. (d) p અસત્ય છે અને q સત્ય છે.

(14) જ્યારે ...... ત્યારે $p \Rightarrow q$ અસત્ય છે.

(a) p અને q સત્ય છે. (b) p અને q અસત્ય છે.

(c) p સત્ય છે અને q અસત્ય છે. (d) p અસત્ય છે અને q સત્ય છે.

(15) જ્યારે ...... ત્યારે $\sim p \Rightarrow \sim q$ અસત્ય છે.

(a) p અને q સત્ય છે. (b) p અને q અસત્ય છે.

(c) p સત્ય છે અને q અસત્ય છે. (d) p અસત્ય છે અને q સત્ય છે.

(16) $\sim$(p અથવા q) ...... છે.

(a) p અને q (b) $(\sim p)$ અને $\sim q$ (c) $(\sim p)$ અથવા $\sim q$ (d) p અથવા $\sim q$

(17) $\sim$(p અને q) ...... છે.

(a) p અથવા q (b) $(\sim p)$ અથવા $(\sim q)$ (c) $(\sim p)$ અને q (d) $(\sim p)$ અને $\sim q$

સારાંશ

આ પ્રકરણમાં આપણે નીચેના મુદ્દાઓનો અભ્યાસ કર્યો :

1. વિધાન, તેનું નિષેધ, સંયોજન, વિયોજન
2. સંયુક્ત વિધાનોના નિષેધ
3. અસ્તિત્વકારક અને વૈશ્વિકકારક તથા તેમનાં નિષેધ
4. પ્રેરણ, દ્વિપ્રેરણ, તેમનાં નિષેધ અને સમાનાર્થી પ્રેરણ તથા વિધાનનાં પ્રતીપ
5. સાબિતીની વિવિધ રીતો જેવી કે પ્રત્યક્ષ અને પરોક્ષ રીત
6. પરોક્ષ રીતમાં અનિષ્ટાપત્તિની રીત તથા પ્રતિઉદાહરણની રીત

પ્રકરણ 2

ગણ સિદ્ધાંત

2.1 પ્રાસ્તાવિક

ગણ સિદ્ધાંતની ચર્ચા ધોરણ 8 અને 9માં કરવામાં આવી હતી. આ પ્રકરણમાં ગણ સિદ્ધાંતના તાર્કિક અભિગમ વિશે ચર્ચા કરીશું. આ વિભાગમાં અગાઉ મેળવેલ માહિતીનું પુનરાવલોકન કરીશું.

ગણ (Set) એ ગણિતમાં આવતાં અવ્યાખ્યાયિત પદો પૈકીનું એક પદ છે. ગણના **ઘટક (Element)** હોવું તે પણ અવ્યાખ્યાયિત પદ છે. ગણને અમુક વસ્તુઓના સુવ્યાખ્યાયિત સમૂહ તરીકે સ્વીકારીશું. ગણના સભ્યોને ધનુષ્કૌંષ { }માં મૂકી દર્શાવાય છે; ઉદાહરણ તરીકે A = {a, b, c}, અહીં A ગણ છે અને તેના સભ્યો a, b, c છે. સામાન્ય રીતે A, B, C વગેરે સંકેતો ગણ માટે વપરાય છે અને તેના સભ્યો a, b, c, x, y, z વગેરેથી દર્શાવાય છે. ગણમાં આવેલ પદોને ગણના ઘટકો અથવા ગણના **સભ્યો (Members)** કહેવાય છે. જો x એ કોઈ ગણ Aનો સભ્ય (અથવા ઘટક) હોય, તો $x \in$ A (વંચાય : 'x belongs to A') લખીશું અને જો y એ ગણ Aનો સભ્ય ન હોય તો $y \notin$ A લખીશું. (વંચાય : 'y does not belong to A')

કેટલાક જાણીતા ગણ નીચે પ્રમાણે છે :

N = પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો ગણ = {1, 2, 3, 4, 5,...}

Z = પૂર્ણાંક સંખ્યાઓનો ગણ = {...−2, −1, 0, 1, 2, 3,...}

Q = સંમેય સંખ્યાઓનો ગણ

R = વાસ્તવિક સંખ્યાઓનો ગણ

વળી, ગણ દર્શાવવા માટે બે રીતો છે :

(1) યાદીની રીત (Listing Method / Roster Form) : આ રીતમાં ગણના ઘટકોની નિશ્ચિત યાદી બનાવાય છે. બે ઘટકોને તેમની વચ્ચે અલ્પવિરામ મૂકી જુદા પાડવામાં આવે છે. ઉદાહરણ તરીકે A = {1, 11, 111, 1111}ના ઘટકો 1, 11, 111, 1111 છે. યાદીની રીતે દર્શાવતાં, N = {1, 2, 3,...} અને Z = {....−2, −1, 0, 1, 2,...}.

યાદીની રીતે ગણ લખતાં યાદીમાં ઘટકોનું પુનરાવર્તન કરવામાં આવતું નથી. ઉદાહરણ તરીકે BEGINNING શબ્દમાં આવતા અક્ષરોનો ગણ α હોય, તો α = {B, E, G, I, N}. વળી યાદીમાં મૂકેલા ઘટકોના ક્રમનું મહત્ત્વ નથી.

જો ગણમાંના ઘટકોની યાદી વિશાળ હોય, તો ઘટકો પૈકી શરૂઆતના થોડા ઘટકો લખી ત્યાર બાદ ત્રણ ટપકાં અને અંતના થોડા ઘટકો લખી યાદીને ટૂંકાવવામાં આવે છે. ઉદાહરણ તરીકે 1000થી નાની યુગ્મ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો ગણ {2, 4, 6, 8,..., 996, 998}થી દર્શાવવામાં આવે છે. વળી, જો યાદીનો કોઈ અંત ન આવવાનો હોય તો છેલ્લે ત્રણ ટપકાં કરવામાં આવે છે.

(2) ગુણધર્મની રીત (ગણ સર્જનની રીત) (Property Method / Set Builder Form) : આ રીતમાં ગણના ઘટકો x ના કોઈ લાક્ષણિક ગુણધર્મ P(x) દ્વારા ગણની રજૂઆત કરવામાં આવે છે. આમ, $\{x \mid P(x)\} = \{x \mid x$નો ગુણધર્મ$\}$ લખાય. આને આપેલ ગુણધર્મ P(x) ધરાવતા તમામ xનો ગણ તેમ વંચાય. ઉદાહરણ તરીકે સંમેય સંખ્યાઓના ગણ Qને દર્શાવવા માટે,

$Q = \left\{x \mid x = \frac{p}{q}, p \in Z, q \in N\right\}$ સંકેત વપરાય.

જો $M = \{x \mid x$ એ પૂર્ણાંક સંખ્યા છે. $-2 < x < 3\}$, તો $M = \{-1, 0, 1, 2\}$

ફક્ત એક જ ઘટક ધરાવતા ગણને એકાકી ગણ (Singleton) કહેવાય છે. ઉદાહરણ તરીકે $\{-2\}$ એકાકી ગણ છે. ધારો કે $D = \{x \mid x$ એ યુગ્મ અવિભાજ્ય સંખ્યા છે.$\}$, અહીં 2 સિવાયની બધી જ યુગ્મ સંખ્યાઓ વિભાજ્ય હોવાથી $D = \{2\}$. આથી D એ એકાકી ગણ છે.

જે ગણ એક પણ ઘટક ન ધરાવતો હોય તેવા ગણને ખાલી ગણ (Null Set) અથવા રિક્ત ગણ (Empty Set) કહે છે. ખાલી ગણને { } અથવા $\emptyset$ થી દર્શાવાય છે. ગુણધર્મની રીતે ગણ દર્શાવતાં એવું બને કે આપેલ ગુણધર્મ ધરાવતી એક પણ રાશિ અસ્તિત્વમાં ન હોય. આવા કિસ્સામાં એ ગણ ખાલી ગણ બનશે. ઉદાહરણ તરીકે $\{x \mid x^2 = -4; x \in R\}$ એ ખાલી ગણ છે. કારણ કે દરેક વાસ્તવિક સંખ્યાનો વર્ગ અનૃણ હોય છે. આથી ગણમાં દર્શાવેલ ગુણધર્મ ધરાવતી હોય એવી કોઈ સંખ્યા ન મળે.

જે ગણ ખાલી ગણ નથી તે અરિક્ત ગણ (Non-empty Set) છે.

2.2 સાર્વત્રિક ગણ

સાર્વત્રિક ગણ (Universal Set) : ઘણી વખત આપણે એક કરતાં વધારે ગણની વાત કરતાં હોઈએ ત્યારે આ તમામ ગણના ઘટકો કોઈ એક નિશ્ચિત ગણના સભ્યો હોય છે. આ ગણને સાર્વત્રિક ગણ કહેવાય છે અને તેને U વડે દર્શાવાય છે. સાર્વત્રિક ગણનો આધાર સંદર્ભ પર રહેલો છે. જો કોઈ પૂર્ણાંક સંખ્યાઓના ગણનો વિચાર કરતાં હોઈએ તો સાર્વત્રિક ગણ તરીકે Z લેવાય; ધન વાસ્તવિક સંખ્યાના n-મૂળની ચર્ચા કરતી વખતે વાસ્તવિક સંખ્યાઓના ગણ Rને સાર્વત્રિક ગણ તરીકે લેવાય.

2.3 ઉપગણ

ઉપગણ (Subset) : જો ગણ Aનો પ્રત્યેક ઘટક ગણ Bનો પણ ઘટક હોય, તો ગણ Aને ગણ Bનો ઉપગણ કહેવાય. જો A એ Bનો ઉપગણ હોય, તો $A \subset B$ લખાય.

તર્કના સંકેતમાં, પ્રત્યેક x માટે $(x \in A \Rightarrow x \in B) \Rightarrow A \subset B$ લખાય.

આપણે તેને $(\forall x, x \in A \Rightarrow x \in B) \Rightarrow A \subset B$ તરીકે પણ લખી શકીએ.

પ્રત્યેક પ્રાકૃતિક સંખ્યા પૂર્ણાંક છે. આથી $N \subset Z$ લખાય. આ જ રીતે $Z \subset Q$ અને $Q \subset R$.

ઉપગણના ખ્યાલને સમજવા નીચેનાં ઉદાહરણો જોઈએ :

$\{1, 2, 4\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

વળી, $\{1, 3, 9\} \not\subset \{1, 2, 4, 8, 9\}$ કારણ કે, $3 \in \{1, 3, 9\}$ પરંતુ $3 \notin \{1, 2, 4, 8, 9\}$.

અહીં નોંધીએ કે કોઈ ગણ Aને અન્ય ગણ Bનો ઉપગણ સાબિત કરવા માટે જરૂરી છે કે Aના તમામ ઘટકો ગણ Bમાં આવેલ હોય પરંતુ $A \not\subset B$ દર્શાવવા માટે Aનો કોઈ એક ઘટક Bમાં નથી તે સાબિત કરવું પૂરતું છે.

'જો ($\forall x, x \in A \Rightarrow x \in B$), તો $A \subset B$'નું સમાનાર્થી પ્રેરણ 'જો $A \not\subset B$ તો કોઈક x એવો મળે કે જેથી $x \in A$ અને $x \notin B$' છે, કારણ કે $p \Rightarrow q$ અને $\sim q \Rightarrow \sim p$ તાર્કિકી સમાન છે તથા $p \Rightarrow q$નું નિષેધ $\sim(p \Rightarrow q) = p \wedge (\sim q)$ છે.

પ્રમેય 2.1 : $A \subset A$

સાબિતી : સ્પષ્ટ છે કે, પ્રત્યેક x માટે $x \in A \Rightarrow x \in A$. આથી $A \subset A$.

પ્રમેય 2.2 : કોઈ પણ ગણ A માટે $\emptyset \subset A$

સાબિતી : ધારો કે $\emptyset \not\subset A$,

આથી $\exists x$, $x \in \emptyset$ અને $x \notin A$.

પણ $x \in \emptyset$ શક્ય નથી કારણ કે $\emptyset$ ખાલી ગણ છે. આમ, આપણી ધારણા $\emptyset \not\subset A$ ખોટી છે. આથી $\emptyset \subset A$.

ઉપરના બે પ્રમેયો ઉપરથી સ્પષ્ટ છે કે **કોઈ પણ અરિક્ત ગણને ઓછામાં ઓછા બે ઉપગણો, $\emptyset$ અને આપેલ ગણ પોતે હોય છે. આ બંને ઉપગણને અનુચિત ઉપગણો (Improper Subsets) કહેવાય છે. આપેલ ગણના અન્ય ઉપગણોને (જો હોય તો) ઉચિત ઉપગણો (Proper Subsets) કહેવાય છે.**

જો ગણ A, ગણ Bનો ઉપગણ હોય, તો Bને Aનો અધિગણ (Super Set) કહેવાય. આ રીતે સાર્વત્રિક ગણ તમામ ગણોનો અધિગણ કહેવાય અને બધા જ ગણ સાર્વત્રિક ગણના ઉપગણો છે.

નીચેના કોષ્ટકમાં ગણના સભ્યોની સંખ્યા અને તેના ઉપગણોની સંખ્યાનો રસપ્રદ સંબંધ દર્શાવ્યો છે :

ગણ	ઉપગણો	સભ્યસંખ્યા (n)	ઉપગણોની સંખ્યા	ઉચિત ઉપગણોની સંખ્યા
$\emptyset$	$\emptyset$	0	$1 = 2^0$	0
$\{a\}$	$\emptyset$, $\{a\}$	1	$2 = 2^1$	$2 - 2 = 0$
$\{a, b\}$	$\emptyset$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{a, b\}$	2	$4 = 2^2$	$4 - 2 = 2$
$\{a, b, c\}$	$\emptyset$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$ $\{a, b, c\}$	3	$8 = 2^3$	$8 - 2 = 6$

વ્યાપક રીતે, **જો કોઈ ગણમાં સભ્યોની સંખ્યા n હોય, તો તેના ઉપગણોની સંખ્યા 2^n થાય અને જો $n \geq 1$ તો તેના ઉચિત ઉપગણોની સંખ્યા $2^n - 2$ થાય છે.**

ઘાત ગણ (Power Set) : કોઈ પણ ગણ A માટે, Aના તમામ ઉપગણોથી બનતા ગણને Aનો ઘાત ગણ કહેવાય છે અને તેને P(A)થી દર્શાવાય છે. ઉપર જણાવ્યા મુજબ જો Aમાં ઘટકોની સંખ્યા n હોય, તો P(A)ના ઘટકોની સંખ્યા 2^n થાય. ગણ Aનો ઘાત ગણ $P(A) = \{B \mid B \subset A\}$થી દર્શાવી શકાય. P(A) માટે કેટલીક વખત સંકેત 2^A પણ વપરાય છે.

જુઓ કે કોઈ પણ ગણ A માટે $\emptyset \subset A$. આથી $\emptyset \in P(A)$, આમ **કોઈ પણ ગણનો ઘાત ગણ ક્યારેય ખાલી ગણ ન હોય.** ઉદાહરણ તરીકે જો $A = \{d, e, f\}$ હોય, તો

$P(A) = \{\emptyset, \{d\}, \{e\}, \{f\}, \{d, e\}, \{d, f\}, \{e, f\}, \{d, e, f\}\}$.

વાસ્તવિક સંખ્યા ગણના ઉપગણો :

વાસ્તવિક સંખ્યા ગણ Rને કેટલાંક મહત્ત્વના ઉપગણો છે. થોડા ઉપગણોનાં ઉદાહરણ નીચે આપ્યાં છે :

પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો ગણ, $N = \{1, 2, 3,...\}$.

પૂર્ણાંક સંખ્યાઓનો ગણ, $Z = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2,...\}$.

સંમેય સંખ્યાઓનો ગણ, $Q = \left\{x \mid x = \frac{p}{q}, p \in Z, q \in N\right\}$.

$p \in Z$ તથા $q \in N$ હોય તેવી તમામ સંખ્યાઓ $\frac{p}{q}$ ને સંમેય સંખ્યાઓ કહે છે.

તમામ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ અને પૂર્ણાંકો, ગણ Qના ઘટકો છે (કારણ કે આ સંખ્યાઓના છેદમાં 1 મૂકી શકાય. ઉદાહરણ તરીકે $3 = \frac{3}{1}$, $-5 = \frac{-5}{1}$ વગેરે.) વ્યાપક રીતે $n \in Z$ તો $n = \frac{n}{1} \in Q$. આથી સ્પષ્ટ રીતે,

$$N \subset Z \subset Q \subset R$$

પૂર્ણાંકોના ભાગાકાર તરીકે એટલે કે $\frac{p}{q}$ સ્વરૂપમાં ન દર્શાવી શકાય તેવી કેટલીક વાસ્તવિક સંખ્યાઓ $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, π જેવી છે. આથી તેઓ Q ના ઘટકો નથી. આવી સંખ્યાઓ **અસંમેય સંખ્યાઓ (Irrational Numbers)** કહેવાય છે. તમામ અસંમેય સંખ્યાઓના ગણને I વડે દર્શાવાય છે. આમ, $I = \{x \mid x \in R, x \notin Q\}$ એટલે કે I એ સંમેય ન હોય તેવી તમામ વાસ્તવિક સંખ્યાઓનો ગણ છે.

અન્ય મહત્ત્વના Rના ઉપગણો **અંતરાલ (Interval)** છે.

અંતરાલ (Interval) : જો $a, b \in R$ અને $a < b$ હોય, તો ગણ $\{x \mid x \in R, a < x < b\}$ ને વિવૃત્ત અંતરાલ (Open Interval) કહેવાય છે અને તે (a, b) વડે દર્શાવાય છે.

અહીં a અને b વચ્ચેની તમામ વાસ્તવિક સંખ્યાઓ (a, b)માં સમાયેલી છે, પરંતુ સંખ્યાઓ a અને b પોતે આ અંતરાલમાં આવેલ નથી.

જો $a, b \in R$ અને $a < b$ હોય, તો ગણ $\{x \mid x \in R, a \le x \le b\}$ને સંવૃત્ત અંતરાલ (Closed Interval) કહેવાય છે અને તે $[a, b]$ વડે દર્શાવાય છે.

અહીં, $[a, b]$ એ a અને b વચ્ચેની તમામ વાસ્તવિક સંખ્યાઓ તેમજ a અને bને પણ સમાવે છે. a અને bને અંતરાલનાં **અંત્યબિંદુઓ (End Points)** કહેવાય છે.

અંતરાલમાં બેમાંથી એક અંત્યબિંદુ આવતું હોય તેવા અંતરાલો નીચે પ્રમાણે છે :

$[a, b) = \{x \mid x \in R, a \le x < b\}$ અને $(a, b] = \{x \mid x \in R, a < x \le b\}$

આ સિવાયના અન્ય અંતરાલો નીચે આપેલા છે :

$[0, \infty)$ = અનૃણ વાસ્તવિક સંખ્યાઓનો ગણ

$(-\infty, 0)$ = ઋણ વાસ્તવિક સંખ્યાઓનો ગણ

$(-\infty, \infty) = R$

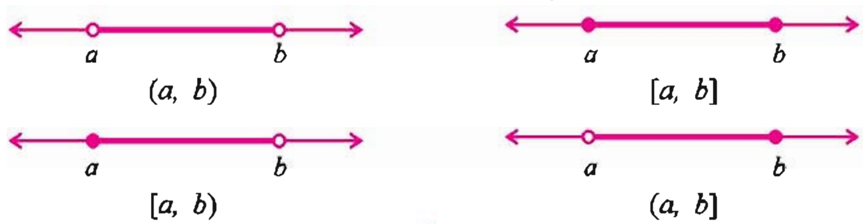
$(a, \infty) = \{x \mid x \in R, x > a\}$

$[a, \infty) = \{x \mid x \in R, x \ge a\}$

$(-\infty, a) = \{x \mid x \in R, x < a\}$

$(-\infty, a] = \{x \mid x \in R, x \le a\}$

સંખ્યારેખા પર વિવિધ અંતરાલોનું નિરૂપણ નીચેની આકૃતિમાં આપેલ છે :



આકૃતિ 2.1

અહીં નોંધીએ કે અંતરાલ એ અનંત ગણ છે.

સંખ્યા $(b - a)$ને (a, b), $[a, b]$, $[a, b)$ અથવા $(a, b]$ પ્રકારના અંતરાલની લંબાઈ કહેવાય છે.

સમાન ગણો (Equal Sets) : જો ગણ A તથા Bના તમામ ઘટકો તેના તે જ હોય, તો A તથા Bને સમાન ગણ કહે છે. આમ જો $\forall x, x \in A$ તો $x \in B$ અને જો $\forall x, x \in B$ તો $x \in A$ હોય, તો $A = B$. આમ, જો $A \subset B$ તથા $B \subset A$ તો $A = B$.

આ વ્યાખ્યા પરથી સ્પષ્ટ છે કે, ગણમાં ઘટકો કયા ક્રમમાં લખાયેલા છે તેનું મહત્ત્વ નથી. દાખલા તરીકે $A = \{a, b, c\}$, $B = \{b, c, a\}$ હોય, તો સહેલાઈથી જોઈ શકાય કે $A \subset B$ અને $B \subset A$. આથી $A = B$.

બે ગણોની સમાનતા આ પ્રમાણે પણ લખી શકાય :

જો $\forall x, x \in A \Rightarrow x \in B$ અને $\forall x, x \in B \Rightarrow x \in A$, તો અને તો જ $A = B$.

ઉદાહરણ 1 : સાબિત કરો કે $A \subset B$ અને $B \subset C \Rightarrow A \subset C$.

ઉકેલ : અહીં $A \subset B$ હોવાથી $\forall x, x \in A \Rightarrow x \in B$

વળી, $B \subset C$ હોવાથી $\forall x, x \in B \Rightarrow x \in C$

$\therefore \quad \forall x, x \in A \Rightarrow x \in C$

$\therefore \quad A \subset C$

આમ, 'ઉપગણ હોવું' સંબંધ **પરંપરિતતા (Transitivity)**નો ગુણધર્મ ધરાવે છે.

ઉદાહરણ 2 : $\alpha = \{x \mid x$ એ FELLOW શબ્દનો અક્ષર છે.$\}$

$\beta = \{x \mid x$ એ FLOW શબ્દનો અક્ષર છે.$\}$, તો નીચેમાંથી કયું વિધાન સાચું છે ?

(a) $\alpha \subset \beta$ (b) $\alpha = \beta$ (c) $\beta \subset \alpha$ (d) આ પૈકી એક પણ નહિ.

ઉકેલ : આ બંને ગણોને યાદીની રીતે લખતાં, $\alpha = \{F, E, L, O, W\}$, $\beta = \{F, L, O, W\}$ સ્પષ્ટ રીતે $\beta \subset \alpha$ પરંતુ $\alpha \not\subset \beta$. આથી $\alpha \neq \beta$. આમ વિકલ્પ (c) $\beta \subset \alpha$ સત્ય છે.

ઉદાહરણ 3 : $A = \{x \mid x \in N, x < 5\}$ અને $B = \{x \mid x \in N, x^2 < 25\}$ હોય, તો $A = B$ થાય તેમ સાબિત કરો.

ઉકેલ : રીત 1 : અહીં $A = \{1, 2, 3, 4\}$. વળી, $B = \{1, 2, 3, 4\}$ કારણ કે,

$1^2 < 25$, $2^2 < 25$, $3^2 < 25$, $4^2 < 25$, $5^2 \nless 25$ વગેરે.

સ્પષ્ટ છે કે $A = B$.

રીત 2 : આ રીત થોડી અમૂર્ત છે.

ધારો કે $x \in A$

$\therefore \quad x < 5$ અને $x \in N$

$\therefore \quad x^2 < 25$ (બંને તરફ વર્ગ લેતાં)

$\therefore \quad x \in B$

આમ, $\forall x, x \in A \Rightarrow x \in B$

$\therefore \quad A \subset B$ (i)

આથી ઊલટું, ધારો કે $x \in B$

$\therefore \quad x^2 < 25$ (વર્ગમૂળ લેતાં)

$\therefore \quad |x| < 5$

$\therefore \quad x < 5$ $(x \in N)$

$\therefore \quad x \in A$

$\therefore \quad \forall x, x \in B \Rightarrow x \in A$

$\therefore \quad B \subset A$ (ii)

$A \subset B$ અને $B \subset A$. આથી, $A = B$. ((i) અને (ii) ઉપરથી)

ઉદાહરણ 4 : જો $A = \{x \mid 4 < x^2 < 40, x \in N\}$ અને $B = \{x \mid 4 < x^3 < 40, x \in N\}$ તો સાબિત કરો કે $A \not\subset B$ અને $B \not\subset A$.

ઉકેલ : $x \in A$ માટે, $4 < x^2 < 40 < 49$

$\therefore \quad 2 < x < 7.$ $(x \in N)$

આથી $x = 3, 4, 5, 6$ શક્ય છે.

તથા $3^2 = 9, 4^2 = 16, 5^2 = 25, 6^2 = 36$ અને 9, 16, 25, 36 એ 4 અને 40 વચ્ચે આવેલ છે.

$\therefore \quad A = \{3, 4, 5, 6\}$

$x \in B$ માટે $1 < 4 < x^3 < 40 < 64$

$\therefore \quad 1 < x < 4.$

આથી $x = 2, 3$ શક્ય છે તથા $2^3 = 8, 3^3 = 27$ અને 8 અને 27 એ 4 અને 64 વચ્ચે આવેલ છે.

$\therefore \quad B = \{2, 3\}$

અહીં સ્પષ્ટ છે કે $4 \in A$ અને $4 \notin B$

$\therefore \quad A \not\subset B$

વળી, $2 \in B$ અને $2 \notin A$

$\therefore \quad B \not\subset A.$

સ્વાધ્યાય 2.1

1. નીચેના ગણને યાદીની રીતે લખો :

   (1) $\{x \mid x$ એ 10થી નાની પ્રાકૃતિક સંખ્યા છે.$\}$

   (2) $\{x \mid x^2 - 5x - 6 = 0, x \in N\}$

   (3) $\{x \mid x^2 - 5x - 6 = 0, x \in R\}$

   (4) $\{x \mid x^3 - x = 0, x \in Z\}$

   (5) $\{x \mid -3 \le x \le 3, x \in Z\}$

2. A = {1, a, b}ના તમામ ઉપગણોની યાદી બનાવો.

3. A = {a, b, c, d}, B = {a, b, c}, C = {b, d}. નીચેની શરતોનું પાલન કરતા તમામ ગણ X શોધો :

(1) $X \subset B, X \not\subset C$ (2) $X \subset B, X \not\subset C, X \neq B$

(3) $X \subset A, X \not\subset B, X \not\subset C$

4. સંખ્યાઓ પર ≤ સંબંધ નીચેના ગુણધર્મો ધરાવે છે :

(1) $a \leq a, \forall a \in R$ **(સ્વવાચકતા)**

(2) જો $a \leq b$ અને $b \leq a$, તો $a = b$, $\forall a, b \in R$ **(અસંમિતતા)**

(3) જો $a \leq b$ અને $b \leq c$, તો $a \leq c$, $\forall a, b, c \in R$ **(પરંપરિતતા)**

આમાંનો કયો ગુણધર્મ P(A) પરનો સંબંધ ⊂ ધરાવે છે ?

5. $A = \{x \mid x = 2y - 1, y \in Z\}$, $B = \{x \mid x = 2y + 1, y \in Z\}$ હોય, તો A = B સાબિત કરો.

*

2.4 ગણક્રિયાઓ

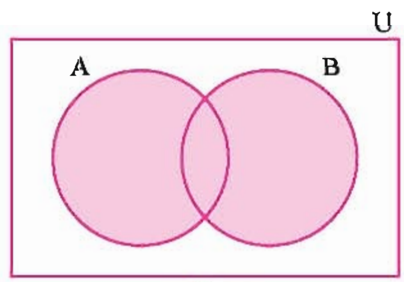
ધારો કે U સાર્વત્રિક ગણ છે અને P(U) તેનો ઘાત ગણ છે. આપણે P(U) ઉપર ક્રિયાઓ વ્યાખ્યાયિત કરીશું અને તેમના ગુણધર્મોનો અભ્યાસ કરીશું.

(1) યોગક્રિયા (Union Operation) : ધારો કે A, B ∈ P(U). A અથવા Bમાં આવેલા તમામ ઘટકોને સમાવતો ગણ A અને Bનો યોગ ગણ (Union Set) કહેવાય અને તેને A ∪ Bથી દર્શાવાય છે. બે ગણોનો યોગ ગણ મેળવવાની ક્રિયાને યોગક્રિયા કહે છે.

આમ, **$A \cup B = \{x \mid x \in A$ અથવા $x \in B\}$.**

અહીં 'અથવા' શબ્દમાં 'અને/અથવા' અભિપ્રેત છે. 'અથવા' શબ્દનો અર્થ સમાવેશ વિકલ્પ તરીકે Aમાં અથવા Bમાં હોય અથવા A અને B બંનેમાં હોય તેવા તમામ ઘટકોથી બનતો ગણ A ∪ B છે. આથી x એ A, B પૈકી ઓછામાં ઓછા એક ગણનો ઘટક છે. દાખલા તરીકે, ધારો કે A = {1, 2, 5}, B = {2, 3, 4, 5} હોય, તો A ∪ B = {1, 2, 3, 4, 5}.

A ∪ Bની વેન આકૃતિ યાદ હશે જ. આકૃતિ 2.2 માં રંગીન પ્રદેશ વડે A ∪ B દર્શાવેલ છે.



આકૃતિ 2.2

હવે, આપણે યોગક્રિયાનાં થોડાં મહત્ત્વનાં પરિણામોની ચર્ચા કરીશું. A, B, C, D ∈ P(U) લઈશું.

(1) યોગક્રિયા એ P(U) ઉપરની દ્વિક્ક્રિયા છે, એટલે કે જો A, B ∈ P(U), તો A ∪ B ∈ P(U).

$x \in A \cup B \Rightarrow x \in A$ અથવા $x \in B$

$A \in P(U), B \in P(U)$

$\therefore \quad A \subset U, B \subset U$

$\therefore \quad x \in U$

$\therefore \quad (A \cup B) \subset U$

$\therefore \quad (A \cup B) \in P(U)$

આ ક્રિયાને **સંવૃત્તતાનો (Closure)** ગુણધર્મ પણ કહેવાય છે.

(2) $A \subset (A \cup B)$ અને $B \subset (A \cup B)$

$\forall x, x \in A \Rightarrow x \in (A \cup B)$ અને $\forall x, x \in B \Rightarrow x \in (A \cup B)$

$\therefore$ $A \subset (A \cup B), B \subset (A \cup B)$

(3) સ્વયંઘાતી નિયમ (Idempotent Law) : $A \cup A = A$

$A \cup A = \{x \mid x \in A$ અથવા $x \in A\}$

$= \{x \mid x \in A\}$

$= A$

(4) જો $A \subset B$ અને $C \subset D$, તો $(A \cup C) \subset (B \cup D)$

ધારો કે $x \in A \cup C$

$\therefore$ $x \in A$ અથવા $x \in C$

$\therefore$ $x \in B$ અથવા $x \in D$ **($A \subset B$ અને $C \subset D$)**

$\therefore$ $x \in B \cup D$.

આમ, $\forall x, x \in (A \cup C) \Rightarrow x \in (B \cup D)$

$\therefore$ $(A \cup C) \subset (B \cup D)$

(5) ક્રમનો નિયમ (Commutative Law) : $A \cup B = B \cup A$

$A \cup B = \{x \mid x \in A$ અથવા $x \in B\}$

$= \{x \mid x \in B$ અથવા $x \in A\}$

$= B \cup A$

(6) જૂથનો નિયમ (Associative Law) : $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

$(A \cup B) \cup C = \{x \mid x \in A \cup B$ અથવા $x \in C\}$

$= \{x \mid (x \in A$ અથવા $x \in B)$ અથવા $x \in C\}$

$= \{x \mid x \in A$ અથવા $(x \in B$ અથવા $x \in C)\}$

$= \{x \mid x \in A$ અથવા $x \in B \cup C\}$

$= A \cup (B \cup C)$

આથી $A \cup (B \cup C)$ અથવા $(A \cup B) \cup C$ ને $A \cup B \cup C$ તરીકે લખી શકાય.

(7) $A \cup \emptyset = A$ (આમ, $\emptyset$ એ યોગક્રિયા માટે **તટસ્થ ઘટક (Neutral Element)** અથવા **એકમ ઘટક (Identity Element)** છે.)

ગુણધર્મ (2)માં દર્શાવ્યા મુજબ કોઈ પણ ગણ B માટે $A \subset (A \cup B)$ થાય. હવે $B = \emptyset$ લેતાં,

$$A \subset (A \cup \emptyset) \qquad \text{(i)}$$

વળી, $A \subset A, \emptyset \subset A \Rightarrow (A \cup \emptyset) \subset (A \cup A)$ **(ગુણધર્મ (4))**

$\Rightarrow (A \cup \emptyset) \subset A$ **(ગુણધર્મ (3))** (ii)

(i) અને (ii) પરથી,

$A \cup \emptyset = A$

અન્ય રીત :

$A \subset (A \cup \emptyset)$ છે જ. **(i)**

હવે, ધારો કે $x \in A \cup \emptyset$.

$\therefore$ $x \in A$ અથવા $x \in \emptyset$

પરંતુ કોઈ પણ x માટે $x \in \emptyset$ સત્ય નથી.

$\therefore$ $x \in A$

$\therefore$ $(A \cup \emptyset) \subset A$ **(ii)**

$\therefore$ $A \cup \emptyset = A$ **(i) તથા (ii)**

(8) $A \cup U = U$

$A \subset U$ અને $U \subset U$

$\therefore$ $(A \cup U) \subset (U \cup U)$ (ગુણધર્મ (4))

$\therefore$ $(A \cup U) \subset U$ કારણ કે $U \cup U = U$ **(i)**

ગુણધર્મ (2) પરથી $U \subset (A \cup U)$ **(ii)**

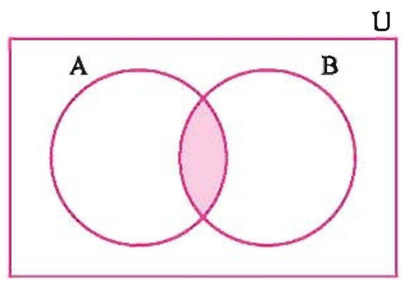
(i) અને (ii) પરથી, $(A \cup U) = U$

(2) છેદક્રિયા (Intersection Operation) : જો $A, B \in P(U)$ તો A તથા B બંનેમાં હોય તેવા તમામ ઘટકોથી બનતા ગણને A અને Bનો છેદ ગણ (Intersection Set) કહે છે તથા તેને સંકેત $A \cap B$ દ્વારા દર્શાવાય છે. બે ગણનો છેદ ગણ મેળવવાની ક્રિયાને છેદક્રિયા કહે છે.

આમ, $A \cap B = \{x \mid x \in A$ અને $x \in B\}$.

આપણે નોંધીએ કે $A \cap B$ એ A અને B બંનેમાં સામાન્ય હોય તેવા તમામ ઘટકોથી બનતો ગણ છે.

આકૃતિ 2.3 માં રંગીન પ્રદેશ $A \cap B$ દર્શાવે છે.



આકૃતિ 2.3

છેદક્રિયાના કેટલાક ગુણધર્મો જોઈએ.

$A, B, C, D \in P(U)$ લઈશું.

(1) છેદક્રિયા એ P(U) ઉપરની દ્વિક્ક્રિયા છે.

ધારો કે $x \in A \cap B$

$\therefore$ $x \in A$ અને $x \in B$

$\therefore$ $x \in U$ **($A, B \subset U$)**

$\therefore$ $(A \cap B) \subset U$

$\therefore$ $(A \cap B) \in P(U)$

(2) $(A \cap B) \subset A$, $(A \cap B) \subset B$

આ પરિણામ દેખીતું છે.

(3) સ્વયંઘાતી નિયમ : $A \cap A = A$

$A \cap A = \{x \mid x \in A$ અને $x \in A\}$

$= \{x \mid x \in A\}$

$= A$

(4) જો A ⊂ B અને C ⊂ D હોય, તો (A ∩ C) ⊂ (B ∩ D)

ધારો કે $x \in A \cap C$

$\therefore$ $x \in A$ અને $x \in C$

$\therefore$ $x \in B$ અને $x \in D$ **(A ⊂ B, C ⊂ D)**

$\therefore$ $x \in B \cap D$

$\therefore$ $(A \cap C) \subset (B \cap D)$

(5) ક્રમનો નિયમ : A ∩ B = B ∩ A

(6) જૂથનો નિયમ : A ∩ (B ∩ C) = (A ∩ B) ∩ C

ગુણધર્મો (5) અને (6) યોગક્રિયા માટે સાબિત કર્યા હતા તે મુજબ સાબિત કરી શકાય.

A ∩ (B ∩ C) અથવા (A ∩ B) ∩ C ને A ∩ B ∩ C લખાય છે.

(7) A ∩ ∅ = ∅

ગુણધર્મ (2)માં દર્શાવ્યા મુજબ, $(A \cap \emptyset) \subset \emptyset$ (i)

વળી, ∅ એ તમામ ગણોનો ઉપગણ છે. આથી વિશિષ્ટ કિસ્સામાં

$\emptyset \subset (A \cap \emptyset)$ (ii)

(i) અને (ii) પરથી, $A \cap \emptyset = \emptyset$

(8) A ∩ U = A **(U એ છેદક્રિયા માટે એકમ ઘટક છે.)**

ગુણધર્મ (2)માં દર્શાવ્યા મુજબ $(A \cap U) \subset A$ (i)

વળી, $A \subset A$ અને $A \subset U$

$\therefore$ $(A \cap A) \subset (A \cap U)$

$\therefore$ $A \subset (A \cap U)$ (ii)

(i) અને (ii) પરથી, $A \cap U = A$

વિભાજનના નિયમ :

(1) A ∩ (B ∪ C) = (A ∩ B) ∪ (A ∩ C)

સાબિતી : $x \in A \cap (B \cup C)$

$\therefore$ $x \in A$ અને $x \in B \cup C$

$\therefore$ $x \in A$ અને ($x \in B$ અથવા $x \in C$)

$\therefore$ ($x \in A$ અને $x \in B$) અથવા ($x \in A$ અને $x \in C$)

$\therefore$ $x \in A \cap B$ અથવા $x \in A \cap C$

$\therefore$ $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$\therefore$ $(A \cap (B \cup C)) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (i)

આ જ રીતે $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \Rightarrow x \in A \cap (B \cup C)$ સાબિત કરી શકાય એટલે કે,

$((A \cap B) \cup (A \cap C)) \subset (A \cap (B \cup C))$. (ii)

(i) અને (ii) પરથી, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

આને છેદક્રિયાનું યોગક્રિયા પર વિભાજન કહે છે.

(2) $\mathbf{A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)}$

પરિણામની સાબિતી ઉપરના પરિણામ (i) મુજબ જ આપી શકાય. આ નિયમને યોગક્રિયાના છેદક્રિયા પરના વિભાજનનો નિયમ કહે છે.

અલગ ગણ (Disjoint Sets) : જો બે અરિક્ત ગણ A અને Bનો છેદ ગણ ખાલી ગણ હોય, તો તેમને અલગ ગણ કહે છે.

અગત્યનું પરિણામ :

નીચેનાં વિધાનો તાર્કિક રીતે સમાન છે :

(1) $A \subset B$

(2) $A \cup B = B$

(3) $A \cap B = A$

[**નોંધ :** $p \Leftrightarrow q$, $q \Leftrightarrow r$, $r \Leftrightarrow p$ એ નીચેના ક્રમને આધારિત સાબિત કરી શકાય. $p \Rightarrow q$, $q \Rightarrow r$, $r \Rightarrow p$. પરંપરિતતાના સિદ્ધાંત પ્રમાણે ($p \Rightarrow q$ અને $q \Rightarrow r$) $\Rightarrow$ ($p \Rightarrow r$) વગેરે.]

સાબિતી : (1) $\Rightarrow$ (2)

અહીં સ્પષ્ટ છે કે, $B \subset (A \cup B)$ (i)

ધારો કે $x \in A \cup B$

$\therefore$ $x \in A$ અથવા $x \in B$

જો $x \in A$ તો $x \in B$ કારણ કે $A \subset B$

$\therefore$ $x \in B$ અથવા $x \in B$

$\therefore$ $x \in B$ (ii)

$\therefore$ $(A \cup B) \subset B$

$\therefore$ (i) અને (ii) પરથી, $A \cup B = B$

બીજી રીત :

અહીં સ્પષ્ટ છે કે, $B \subset (A \cup B)$ (i)

વળી, $A \subset B$ અને $B \subset B$

$\therefore$ $(A \cup B) \subset (B \cup B)$

$\therefore$ $(A \cup B) \subset B$ (ii)

$\therefore$ (i) અને (ii) પરથી, $(A \cup B) = B$

(2) $\Rightarrow$ (3)

સ્પષ્ટ છે કે $(A \cap B) \subset A$ (i)

ધારો કે $x \in A$

$\therefore$ $x \in A \cup B$

$\therefore$ $x \in B$ **($A \cup B = B$)**

$\therefore$ $x \in A$ અને $x \in B$

$\therefore$ $x \in A \cap B$

∴ $A \subset (A \cap B)$ (ii)

∴ (i) અને (ii) પરથી, $A \cap B = A$

બીજી રીત :

આપણે જાણીએ છીએ કે $(A \cap B) \subset A$ (i)

વળી, $A \subset A$ અને $A \subset B$

∴ $(A \cap A) \subset (A \cap B)$

∴ $A \subset (A \cap B)$ (ii)

(i) અને (ii) પરથી, $(A \cap B) = A$

(3) ⇒ (1)

સ્પષ્ટ છે કે, $(A \cap B) \subset B$

∴ $A \subset B$ **($A \cap B = A$)**

આમ, આપણે પરિણામ (1), (2) અને (3) એ તાર્કિક રીતે સમાન છે, તેમ સાબિત કર્યું.

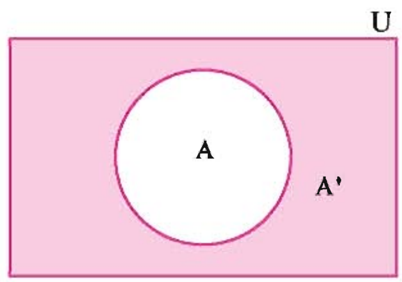
(3) પૂરકક્રિયા (Complementation) : ગણ $A \in P(U)$ માટે Aમાં ન હોય તેવા Uના બધા જ ઘટકોના ગણને Aનો પૂરક ગણ (Complement of a set) કહેવાય છે અને તેને A' થી દર્શાવાય છે. કોઈ ગણનો પૂરક ગણ શોધવાની ક્રિયાને પૂરકક્રિયા કહેવાય છે.

અહીં $A' = \{x \mid x \in U$ અને $x \notin A\}$

પૂરકક્રિયા પ્રત્યેક ગણ Aને અનન્ય ગણ A' સાથે સાંકળે છે.

આ ક્રિયા P(U) ઉપરની **એકીયક્રિયા (Unary Operation)** છે.

આકૃતિ 2.4 માં રંગીન ભાગ ગણ A' ની વેન આકૃતિ દર્શાવે છે.



આકૃતિ 2.4

પૂરકક્રિયાના કેટલાક ગુણધર્મ નીચે આપેલા છે.

(1) $A' \in P(U)$.

વ્યાખ્યા પરથી સ્પષ્ટ છે.

(2) $A \cap A' = \emptyset$, $A \cup A' = U$

પૂરકક્રિયાની વ્યાખ્યા પરથી ફલિત થાય છે કે,

$x \in A \Rightarrow x \notin A'$ અને $x \in A' \Rightarrow x \notin A$

∴ $A \cap A' = \emptyset$

બીજું પરિણામ સાબિત કરવા માટે જુઓ કે, $A \subset U$, $A' \subset U$

∴ $(A \cup A') \subset U$ (i)

વધુમાં, જો $x \in U$ તો $x \in A$ અથવા $x \in A'$

∴ $x \in A \cup A'$

∴ $U \subset (A \cup A')$ (ii)

(i) અને (ii) પરથી, $A \cup A' = U$

(3) $\emptyset' = U$, $U' = \emptyset$. પૂરકક્રિયાની વ્યાખ્યા પરથી આ પરિણામો સ્પષ્ટ રીતે ફલિત થાય છે.

(4) $(A')' = A$

આ પરિણામની સાબિતી સરળ છે. સ્વયં પ્રયત્ન કરી જુઓ.

દ'મોર્ગનના નિયમો (De Morgan's Laws) :

(1) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ (2) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

આ પરિણામો નીચે પ્રમાણે સાબિત કરી શકાય :

(1) $(A \cup B)' = \{x \mid x \in U, x \notin A \cup B\}$

$= \{x \mid x \in U$ અને $(x \notin A$ અને $x \notin B)\}$ **$(\sim(p \vee q) = (\sim p) \wedge (\sim q))$**

$= \{x \mid x \in U$ અને $(x \in A'$ અને $x \in B')\}$

$= A' \cap B'$

(2) $(A \cap B)' = \{x \mid x \in U$ અને $x \notin A \cap B\}$

$= \{x \mid x \in U$ અને $(x \notin A$ અથવા $x \notin B)\}$ **$(\sim(p \wedge q) = (\sim p) \vee (\sim q))$**

$= \{x \mid x \in U$ અને $(x \in A'$ અથવા $x \in B')\}$

$= A' \cup B'$

તાર્કિક રીતે દ'મોર્ગનના નિયમો સરળતાથી સાબિત કરી શકાય. આપણે નિયમ (1)ની સાબિતી આપીશું.

$x \in (A \cup B)' \Leftrightarrow x \notin A \cup B$

$\Leftrightarrow \sim(x \in A \cup B)$

$\Leftrightarrow \sim(x \in A$ અથવા $x \in B)$

$\Leftrightarrow \sim(x \in A)$ અને $\sim(x \in B)$ **$(\sim(p \vee q) = (\sim p) \wedge (\sim q))$**

$\Leftrightarrow x \notin A$ અને $x \notin B$

$\Leftrightarrow x \in A'$ અને $x \in B'$

$\Leftrightarrow x \in A' \cap B'$

$\therefore \quad (A \cup B)' = A' \cap B'$

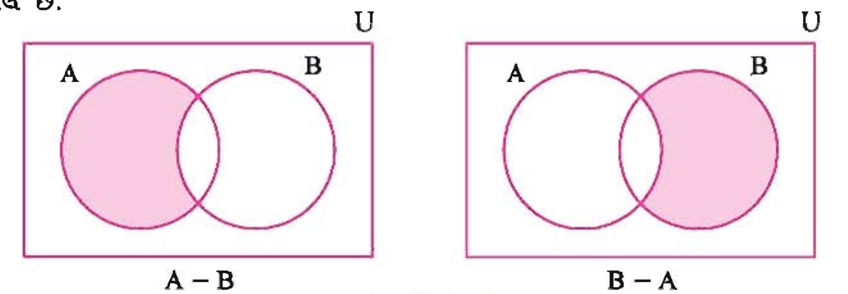
(4) તફાવત ગણ (Difference set) : $A, B \in P(U)$ તો Aમાં હોય તથા Bમાં ન હોય તેવા તમામ ઘટકોથી બનતા ગણને A અને Bનો તફાવત ગણ કહે છે. તેને સંકેત $A-B$થી દર્શાવાય છે. બે ગણનો તફાવત મેળવવાની ક્રિયાને તફાવત-ક્રિયા (Difference Operation) કહે છે.

અહીં, $A - B = \{x \mid x \in U, x \in A$ અને $x \notin B\}$

$\therefore \quad A - B = \{x \mid x \in A$ અને $x \in B'\}$

$\therefore \quad$ **$A - B = A \cap B'$**

આ ઉપરથી સ્પષ્ટ છે કે, $(A - B) \subset A$. વેન આકૃતિ 2.5 માં $A - B$ અને $B - A$ રંગીન પ્રદેશ વડે દર્શાવેલ છે.



આકૃતિ 2.5

ઉપરની વેન આકૃતિઓ પરથી સ્પષ્ટ છે કે, જો $A \neq B$ હોય, તો $A - B \neq B - A$

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ તો $A - B = \{1, 3, 5\}$, $B - A = \{8, 10\}$

તફાવત ગણના કેટલાક ગુણધર્મો :

(1) $U - A = A'$. સ્વયં સ્પષ્ટ છે.

(2) $A \subset B \Rightarrow A - B = \emptyset$

$A - B = \{x \mid x \in A$ અને $x \notin B\}$

$= \{x \mid x \in A$ અને $x \in B'\}$

$= \{x \mid x \in B$ અને $x \in B'\}$ **$(A \subset B)$**

$= \emptyset$

(5) સંમિત તફાવત ગણ (Symmetric Difference Set) : $A, B \in P(U)$. A માં હોય અથવા Bમાં હોય પરંતુ $A \cap B$ માં ન હોય તેવા તમામ ઘટકોથી બનતા ગણને A તથા B નો સંમિત તફાવત-ગણ કહે છે તથા તેના માટેનો સંકેત $A \Delta B$ છે.

આમ, **$A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$**

$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$ સાબિત કરીએ.

$(A \cup B) - (A \cap B) = (A \cup B) \cap (A \cap B)'$ **$(A - B = A \cap B')$**

$= (A \cup B) \cap (A' \cup B')$ **(દ'મોર્ગનનો નિયમ)**

$= ((A \cup B) \cap A') \cup ((A \cup B) \cap B')$ **(વિભાજનનો નિયમ)**

$= [(A \cap A') \cup (B \cap A')] \cup [(A \cap B') \cup (B \cap B')]$

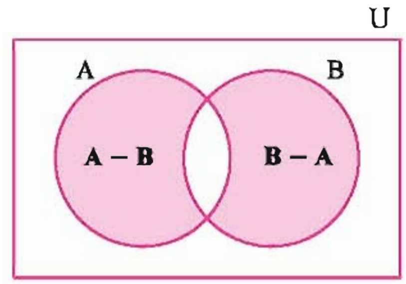
$= [\emptyset \cup (B \cap A')] \cup [(A \cap B') \cup \emptyset]$

$= (B \cap A') \cup (A \cap B')$

$= (B - A) \cup (A - B)$

$= (A - B) \cup (B - A)$

આકૃતિ 2.6 માં રંગીન ભાગ સંમિત તફાવત A Δ B દર્શાવે છે :



A Δ B

આકૃતિ 2.6

ઉદાહરણ 5 : $A = \{x \mid x \in Z, x^3 - 4x = 0\}$. P(A) શોધો.

ઉકેલ : અહીં $x^3 - 4x = 0$

$\therefore \quad x(x^2 - 4) = 0$

$\therefore \quad x(x - 2)(x + 2) = 0$

$\therefore \quad x = 0, x = 2, x = -2$

$\therefore \quad A = \{0, 2, -2\}$

આથી, $P(A) = \{\emptyset, \{0\}, \{2\}, \{-2\}, \{0, 2\}, \{0, -2\}, \{2, -2\}, A\}$

ઉદાહરણ 6 : $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B = \{1, 5, 6, 8\}$, $C = \{1, 4, 6, 7\}$ લઈ નીચેનાં પરિણામો ચકાસો :

(1) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(2) $(A \cup B)' = A' \cap B'$

(3) $A - B = A \cap B'$

(4) $A \Delta B = B \Delta A$. અહીં, $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$ અને
$B \Delta A = (B - A) \cup (A - B)$ લો.

(5) $A - C = A - (A \cap C)$

ઉકેલ : (1) અહીં, $B \cap C = \{1, 6\}$

$\therefore \quad A \cup (B \cap C) = \{1, 3, 5, 6, 7, 9\}$

હવે, $A \cup B = \{1, 3, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$A \cup C = \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$

$(A \cup B) \cap (A \cup C) = \{1, 3, 5, 6, 7, 9\}$

આમ, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(2) $A \cup B = \{1, 3, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$\therefore \quad (A \cup B)' = \{2, 4, 10\}$

હવે, $A' = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

$B' = \{2, 3, 4, 7, 9, 10\}$

$\therefore \quad A' \cap B' = \{2, 4, 10\}$

આમ, $(A \cup B)' = A' \cap B'$

(3) $A - B = \{3, 7, 9\}$

$B' = \{2, 3, 4, 7, 9, 10\}$

$A \cap B' = \{3, 7, 9\}$

આથી, $A - B = A \cap B'$

(4) $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$

અહીં $A \cup B = \{1, 3, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$A \cap B = \{1, 5\}$

$\therefore \quad A \Delta B = \{3, 6, 7, 8, 9\}$

$B \Delta A = (B - A) \cup (A - B)$

$B - A = \{6, 8\}$

$A - B = \{3, 7, 9\}$

$\therefore \quad (B - A) \cup (A - B) = \{3, 6, 7, 8, 9\}$

આથી, $A \Delta B = B \Delta A$

નોંધ અહીં $(A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$-ની ચકાસણી પણ થઈ ગઈ.

(5) $A - C = \{3, 5, 9\}$

$A \cap C = \{1, 7\}$

$A - (A \cap C) = \{3, 5, 9\}$

આમ, $A - C = A - (A \cap C)$

ઉદાહરણ 7 : સાબિત કરો કે $A - B = A - (A \cap B)$

ઉકેલ : વ્યાખ્યા મુજબ $A - B = A \cap B'$

$A - (A \cap B) = A \cap (A \cap B)'$

$= A \cap (A' \cup B')$ (દ'મોર્ગનના નિયમ મુજબ)

$= (A \cap A') \cup (A \cap B')$ (વિભાજનનો નિયમ)

$= \emptyset \cup (A \cap B')$

$= A \cap B'$

$= A - B$

ઉદાહરણ 8 : સાબિત કરો કે, $(A \cap B) \cup (A - B) = A$

ઉકેલ : આને વિભાજનના નિયમથી સાબિત કરી શકાય.

આપણે જાણીએ છીએ કે, $A - B = A \cap B'$

$\therefore \quad (A \cap B) \cup (A - B) = (A \cap B) \cup (A \cap B')$

$= A \cap (B \cup B')$

$= A \cap U$

$= A$

ઉદાહરણ 9 : જો $A \subset B$ હોય તો $B' \subset A'$ સાબિત કરો અને તેના પરથી તારવો કે, $A = B \Leftrightarrow A' = B'$.

ઉકેલ : અહીં આપ્યું છે કે, $A \subset B$

$\forall x, x \in B' \Rightarrow x \in U$ અને $x \notin B$

$\Rightarrow x \in U$ અને $x \notin A$ **$(A \subset B)$**

$\Rightarrow x \in A'$

$\therefore \quad B' \subset A'$

$A = B \Leftrightarrow A \subset B$ અને $B \subset A$

$\Leftrightarrow B' \subset A'$ અને $A' \subset B'$

$\Leftrightarrow A' = B'$

ઉદાહરણ 10 : જો $A = \{x \mid x \in R, x^2 - 3x - 4 = 0\}$ અને $B = \{x \mid x \in Z, x^2 = x\}$ હોય, તો (1) $A \cup B$ (2) $A \cap B$ (3) $A \Delta B$ શોધો.

ઉકેલ : $x \in A$ માટે,

$x^2 - 3x - 4 = 0$

$\therefore \quad (x - 4)(x + 1) = 0$

$\therefore \quad x = 4$ અથવા $x = -1$

$\therefore \quad A = \{-1, 4\}$

$x \in B$ માટે,

$x^2 = x$

$\therefore \quad x^2 - x = 0$

$\therefore \quad x(x - 1) = 0$

$\therefore \quad x = 0$ અથવા $x = 1$

$\therefore \quad B = \{0, 1\}$

હવે, (1) $A \cup B = \{-1, 0, 1, 4\}$

(2) $A \cap B = \emptyset$

(3) $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$

$= \{-1, 0, 1, 4\}$

ઉદાહરણ 11 : જો $A = \{4k + 1 \mid k \in Z\}$, $B = \{6k - 1 \mid k \in Z\}$, તો $A \cap B$ શોધો.

ઉકેલ : $k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$ લેતાં,

$A = \{ ..., 1, 5, 9, 13, 17, 21, ... \}$ અને $B = \{ ..., -1, 5, 11, 17, 23, ... \}$

આમ, $A \cap B = \{..., 5, 17, ...\} = \{ 12k + 5 \mid k \in Z \}$ લાગે છે.

ચાલો, સાબિત કરીએ.

ધારો કે $x \in A \cap B$. **(i)**

જો $x \in B$ તો $x = 6k - 1$, $k \in Z$.

જો k યુગ્મ હોય, તો $x = 6(2m) - 1 = 12m - 1$ ($k = 2m$, $m \in Z$ લેતાં)

$\therefore$ $x - 1 = 12m - 2 = 2(6m - 1)$, જે 4નો ગુણક નથી.

$\therefore$ કોઈ પણ $k' \in Z$ માટે $x - 1 \neq 4k'$

$\therefore$ કોઈ પણ $k' \in Z$ માટે $x \neq 4k' + 1$

$\therefore$ $x \notin A$

$\therefore$ $x \notin A \cap B$. આમ, $x \in A \cap B$ ધારણાથી વિપરીત છે.

$\therefore$ k યુગ્મ હોઈ શકે નહિ.

$\therefore$ k અયુગ્મ જ હોય.

ધારો કે $k = 2m + 1$, $m \in Z$.

$\therefore$ $x = 6(2m + 1) - 1 = 12m + 5$ **(i) પરથી**

$= 12m + 4 + 1$

$= 4(3m + 1) + 1 \in A$ **($3m + 1 \in Z$)**

$\therefore$ જો $x \in A \cap B$ તો $x = 12m + 5$ ($m \in Z$) સ્વરૂપનો હોય તે જરૂરી છે.

વળી, $12m + 5 = 4(3m) + 4 + 1 = 4(3m + 1) + 1 \in A$.

અને $12m + 5 = 12m + 6 - 1 = 6(2m + 1) - 1 \in B$.

$\therefore$ $12m + 5 \in A \cap B$

$\therefore$ $A \cap B = \{12k + 5 \mid k \in Z\}$

સ્વાધ્યાય 2.2

1. જો $A = \{x \mid x$ એ 5 કરતાં નાની પ્રાકૃતિક સંખ્યા છે.$\}$

$B = \{x \mid x$ એ 15 કરતાં નાની અવિભાજ્ય સંખ્યા છે.$\}$, તો $A \cup B$ અને $A \cap B$ શોધો.

2. જો $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 3, 5, 6\}$, $C = \{1, 2, 3\}$, $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ તો નીચેનાં પરિણામો ચકાસો :

(1) $(A - B) \cup B = A \cup B$

(2) $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$

(3) $A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C)$

(4) $A \Delta A = \emptyset$ તથા $A \Delta \emptyset = A$

(5) $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

3. $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{2, 5, 7, 8\}$ અને સાર્વત્રિક ગણ $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ માટે દ'મોર્ગનના નિયમો ચકાસો.

4. જો $A = \{a, b, c, d, e\}$ અને $B = \{c, d, e, f\}$, તો (1) $A \cup B$ (2) $A \cap B$ (3) $A - B$ (4) $B - A$ (5) $A \Delta B$ શોધો.

*

2.5 ગણોનો કાર્તેઝિય ગુણાકાર

રોજબરોજના જીવનમાં ક્રમયુક્ત જોડ આપણને જોવા મળે છે. ક્રમયુક્ત જોડ સહેલાઈથી જોઈ શકાય છે. કોઈ સભાખંડની બેઠક-વ્યવસ્થાનો બેઠક-ક્રમાંક ક્રમયુક્ત જોડનું ઉદાહરણ છે. ઉદાહરણ તરીકે (A, 5) એટલે કે A મૂળાક્ષરવાળી હારમાં 5મી ખુરશી. તેને ક્રમયુક્ત જોડ (A, 5) તરીકે લખી શકાય. આપણે નોંધીએ કે, આ ક્રમયુક્ત જોડમાં હાર સૂચવતો મૂળાક્ષર પહેલા આવે અને ખુરશીનો ક્રમાંક સૂચવતી સંખ્યા બીજી આવે છે. આ ક્રમ અગત્યનો છે. વ્યવહારમાં તેને A5 લખાય છે.

પરીક્ષાના પરિણામ-પત્રકમાં (35, 100) દર્શાવે છે કે વિદ્યાર્થીનો બેઠક-ક્રમાંક 35 છે અને તેણે મેળવેલ ગુણ 100 છે, પરંતુ ક્રમયુક્ત જોડ (100, 35) દર્શાવે છે કે 100 નંબરનો બેઠક-ક્રમાંક ધરાવનાર વિદ્યાર્થીએ 35 ગુણ મેળવ્યા છે. અગાઉ દર્શાવ્યા પ્રમાણે $\{p, q\} = \{q, p\}$ પરંતુ $(p, q) \neq (q, p)$. અહીં, $\{p, q\}$ એ ગણ છે, તેમાં ક્રમનું મહત્ત્વ નથી. p અને q ગણ $\{p, q\}$ના ઘટકો છે.

કાર્તેઝિય ગુણાકાર (Cartesian Product) : જો A અને B અરિક્ત ગણ હોય, તો જ્યાં $x \in A$ તથા $y \in B$ હોય તેવી તમામ ક્રમયુક્ત જોડીઓ (x, y)ના ગણને A તથા Bનો કાર્તેઝિય ગુણાકાર કહે છે તથા A અને Bના કાર્તેઝિય ગુણાકાર માટેનો સંકેત $A \times B$ (વાંચો : 'A cross B') છે.

આમ, $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$.

જો $A = \emptyset$ અથવા $B = \emptyset$ તો $A \times B = \emptyset$ લેવાય છે. $A \times A$ને આપણે A^2 દ્વારા દર્શાવીશું.

જે રીતે ક્રમયુક્ત જોડ (x, y) હોય છે તેમ ક્રમયુક્ત **ત્રય** અથવા ત્રિપુટી **(Triplet)** તથા ક્રમયુક્ત ***n*-ટુપલ (*n*-tuple)** $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ ની પણ વાત થઈ શકે. જો A, B અને C અરિક્ત ગણ હોય, તો તેમનો કાર્તેઝિય ગુણાકાર

$A \times B \times C = \{(x, y, z) \mid x \in A, y \in B, z \in C\}$ તરીકે વ્યાખ્યાયિત થાય છે.

$A \times A \times A = A^3$ લખવામાં આવે છે.

ઉદાહરણ 12 : $A = \{a, b, c\}$, $B = \{a, b\}$, $A \times B$ શોધો.

ઉકેલ : $A \times B = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (c, a), (c, b)\}$

ઉદાહરણ 13 : જો $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 6, 7\}$, $C = \{2, 7\}$, હોય તો

$A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$ સાબિત કરો.

ઉકેલ : અહીં $B - C = \{6\}$

$\therefore \quad A \times (B - C) = \{(1, 6), (2, 6), (3, 6)\}$

હવે, $A \times B = \{(1, 2), (1, 6), (1, 7), (2, 2), (2, 6), (2, 7), (3, 2), (3, 6), (3, 7)\}$

તેમજ $A \times C = \{(1, 2), (1, 7), (2, 2), (2, 7), (3, 2), (3, 7)\}$

$\therefore \quad (A \times B) - (A \times C) = \{(1, 6), (2, 6), (3, 6)\}$.

આમ, $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$

ઉદાહરણ 14 : $A \neq \emptyset$ અને $A \times B = A \times C$ તો સાબિત કરો કે $B = C$.

ઉકેલ : જો $B = C = \emptyset$ તો $A \times B = A \times C = \emptyset$ તથા $B = C$ છે જ.

માત્ર $B = \emptyset$ કે માત્ર $C = \emptyset$ શક્ય નથી તે સ્પષ્ટ છે કારણ કે $A \neq \emptyset$.

ધારો કે, $B \neq \emptyset$, $C \neq \emptyset$.

$A \neq \emptyset$ હોવાથી કોઈક $x \in A$ તો છે જ.

$\therefore$ હવે પ્રત્યેક $y \in B$ માટે, $(x, y) \in A \times B$

$\therefore \quad (x, y) \in A \times C$ **$(A \times B = A \times C)$**

$\therefore \quad x \in A, y \in C$

આમ, $\forall y, y \in B \Rightarrow y \in C$

$\therefore \quad B \subset C$

તે જ રીતે, $C \subset B$ સાબિત કરી શકાય.

$\therefore \quad B = C$

ઉદાહરણ 15 : $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{(a, b) \mid a$ વડે b વિભાજ્ય છે; $a, b \in A\}$, તો B ને યાદી સ્વરૂપે લખો.

ઉકેલ : અહીં 1 વડે 1, 2, 3, 4 વિભાજ્ય છે. 2 વડે 2 તથા 4 વિભાજ્ય છે. 3 વડે 3 તથા 4 વડે 4 વિભાજ્ય છે.

આમ, $B = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 4)\}$

ઉદાહરણ 16 : $A \times A = B \times B$ તો સાબિત કરો કે $A = B$.

ઉકેલ : જો $A = \emptyset$ તો $\emptyset = B \times B \Rightarrow B = \emptyset$. આમ, $A = B$.

ધારો કે $A \neq \emptyset$. ધારો કે $x \in A$

$\therefore \quad (x, x) \in A \times A$

$\therefore \quad (x, x) \in B \times B$ **$(A \times A = B \times B)$**

$\therefore \quad x \in B$

આમ, $\forall x, x \in A \Rightarrow x \in B$.

$\therefore \quad A \subset B$.

તે જ રીતે, $B \subset A$.

$\therefore \quad A = B$

સ્વાધ્યાય 2.3

1. $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 7\}$. $A \times B$ તેમજ $B \times A$ શોધો.

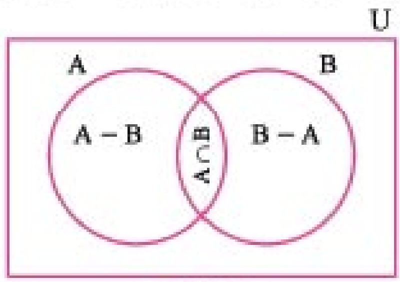
2. જો $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 5\}$, $C = \{2, 6\}$, તો $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$ ચકાસો.

3. $A = \{x \mid x$ એ 5 કરતાં નાની પ્રાકૃતિક સંખ્યા છે$\}$, $B = \{x \mid x = 3a - 1, a \in A\}$, $A \times B$ શોધો.

*

2.6 સાન્ત ગણના ઘટકોની સંખ્યા

સાન્ત ગણ Aના ઘટકોની સંખ્યાનો સંકેત $n(A)$ છે તે યાદ કરીએ. જો A અને B અલગ ગણ હોય, તો સ્પષ્ટ છે કે, $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$. તે જ રીતે જો $A \cap B = B \cap C = A \cap C = \emptyset$, તો $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C)$.



આકૃતિ 2.7

ઉદાહરણ તરીકે, જો $A = \{a, b, c\}$, $B = \{d, e, f\}$,

તો $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f\}$

અહીં, $n(A) = 3$, $n(B) = 3$ અને $A \cap B = \emptyset$

અને $n(A \cup B) = 6 = 3 + 3 = n(A) + n(B)$.

વેન આકૃતિ 2.7માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે સ્પષ્ટ છે કે,

$A \cup B = (A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A)$

અને $A - B$, $A \cap B$, $B - A$ પરસ્પર અલગ ગણો છે.

$\therefore \quad n(A \cup B) = n(A - B) + n(A \cap B) + n(B - A)$ (i)

વળી, $A = (A - B) \cup (A \cap B)$ અને $(A - B) \cap (A \cap B) = \emptyset$

$\therefore \quad n(A) = n(A - B) + n(A \cap B)$

$\therefore \quad n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$

તે જ રીતે, $n(B - A) = n(B) - n(A \cap B)$

આ પરિણામોને (i)માં ઉપયોગ કરતાં,

$$n(A \cup B) = [n(A) - n(A \cap B)] + n(A \cap B) + [n(B) - n(A \cap B)]$$
$$= n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

નોંધ વેન આકૃતિની મદદ વિના પણ $A - B$, $B - A$ અને $A \cap B$ પરસ્પર અલગ ગણો છે, તેમજ તેમનો યોગ $A \cup B$ થાય તે સહેલાઈથી સાબિત કરી શકાય.

આ જ રીતે, $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B \cup C) - n(A \cap (B \cup C))$

$$= n(A) + \{n(B) + n(C) - n(B \cap C)\} - n[(A \cap B) \cup (A \cap C)]$$
$$= n(A) + n(B) + n(C) - n(B \cap C) - [n(A \cap B) + n(A \cap C) - n(A \cap B \cap C)]$$
$$= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

ઉદાહરણ 17 : ગણ A તથા B માટે $n(A \cup B) = 75$, $n(A) = 50$, $n(B) = 50$, તો $n(A \cap B)$ શોધો.

ઉકેલ : આપણે જાણીએ છીએ કે, $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

$\therefore \quad 75 = 50 + 50 - n(A \cap B)$

$\therefore \quad n(A \cap B) = 100 - 75 = 25$

અન્ય રીતે, વેન આકૃતિ 2.8 જુઓ.

$n(A - B) = a$, $n(A \cap B) = b$, $n(B - A) = c$

$a + b + c = 75$

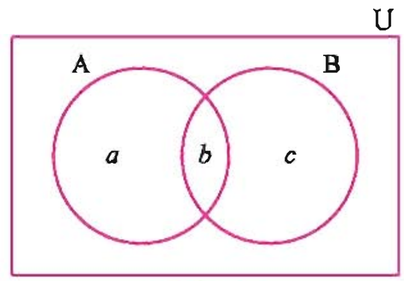
$a + b = 50$

$b + c = 50$

$\therefore \quad a + b + b + c = 100$

$\therefore \quad b + 75 = 100$

$\therefore \quad b = 25$



આકૃતિ 2.8

ઉદાહરણ 18 : સાબિત કરો કે,

(1) અરિક્ત ગણો હોય તો, A − B અને $A \cap B$ અલગ ગણ છે.

(2) $A = (A - B) \cup (A \cap B)$

(3) $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$

(4) જો $B \subset A$, તો $n(A - B) = n(A) - n(B)$

(5) $n(A') = n(U) - n(A)$

ઉકેલ : (1) $(A - B) \cap (A \cap B) = (A \cap B') \cap (A \cap B)$

$= A \cap (B' \cap B)$

$= A \cap \emptyset$ **($B \cap B' = \emptyset$)**

$= \emptyset$

$\therefore$ જો અરિક્ત ગણો હોય તો, A − B તથા $A \cap B$ અલગ ગણ છે.

(2) જ.બા. $= (A - B) \cup (A \cap B) = (A \cap B') \cup (A \cap B)$

$= A \cap (B' \cup B)$

$= A \cap U$

$= A =$ ડા.બા.

(3) પરિણામ (1) અને (2) પરથી, $n(A) = n(A - B) + n(A \cap B)$

$\therefore \quad n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$

(4) $B \subset A$ આપેલ છે.

$\therefore \quad A \cap B = B$

$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$ **((3) પરથી)**

$= n(A) - n(B)$ **($A \cap B = B$)**

(5) $A \cap A' = \emptyset$ અને $A \cup A' = U$

$\therefore \quad n(U) = n(A) + n(A')$

$\therefore \quad n(A') = n(U) - n(A)$

નોંધ : જો $A \subset B$, તો $n(A) \leq n(B)$.

સાન્ત ગણ A તથા B માટે $n(A \times B) = n(A)\, n(B)$.

ઉદાહરણ 19 : જો $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4\}$ હોય, તો $n(A \times B) = n(A)\, n(B)$ ચકાસો.

ઉકેલ : અહીં $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4\}$

$\therefore \quad A \times B = \{(1, 2), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 2), (3, 4), (4, 2), (4, 4)\}$

$\therefore \quad n(A \times B) = 8$

તેમજ $n(A) = 4$, $n(B) = 2$, $n(A \times B) = 8$

$\therefore \quad n(A \times B) = n(A)\, n(B)$.

ઉદાહરણ 20 : A અને B એકાકી ગણો નથી અને $n(A \times B) = 21$. જો $A \subset B$, તો $n(A)$ અને $n(B)$ શોધો.

ઉકેલ : અહીં $n(A \times B) = 21 = 3 \times 7 = 1 \times 21$

પરંતુ $n(A) \neq 1$, $n(B) \neq 1$

$\therefore \quad n(A) = 3$ અને $n(B) = 7$ અથવા $n(A) = 7$ અને $n(B) = 3$.

પરંતુ $n(A) \leq n(B)$ **($A \subset B$)**

$\therefore \quad n(A) = 3$, $n(B) = 7$

ઉદાહરણ 21 : 20 નર્તકોના એક જૂથમાં, 12 નર્તકો ભરતનાટ્યમ્ કરે છે, 4 નર્તકો ભરતનાટ્યમ્ અને કુચિપૂડી બંને નૃત્યો કરે છે. ફક્ત કુચિપૂડી નૃત્ય કરતાં નર્તકોની સંખ્યા શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે A = ભરતનાટ્યમ્ કરતાં નર્તકોનો ગણ તથા B = કુચિપૂડી કરતાં નર્તકોનો ગણ

$\therefore \quad n(A) = 12$, $n(A \cap B) = 4$, $n(A \cup B) = 20$

હવે, $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

(**નોંધ :** પ્રત્યેક નર્તક ભરતનાટ્યમ્ અથવા કુચિપૂડી નૃત્ય કરે છે.)

$\therefore \quad 20 = 12 + n(B) - 4$

$20 = n(B) + 8$

$\therefore \quad n(B) = 12$

આમ, કુચિપૂડી કરતાં નર્તકોની સંખ્યા 12 છે.

$\therefore$ ફક્ત કુચિપૂડી નૃત્ય-નર્તકોની સંખ્યા $= n(B) - n(A \cap B)$

$= 12 - 4 = 8$

ઉદાહરણ 22 : વ્યક્તિઓના એક જૂથમાં 28 વ્યક્તિઓને ગુજરાતી ચલચિત્રો ગમે છે, 30 વ્યક્તિઓને હિન્દી ચલચિત્રો ગમે છે, 42ને અંગ્રેજી ચલચિત્રો ગમે છે, 5ને ગુજરાતી તથા હિન્દી બંને ચલચિત્રો ગમે છે, 8ને હિન્દી તથા અંગ્રેજી ચલચિત્રો ગમે છે, 8ને ગુજરાતી તથા અંગ્રેજી ચલચિત્રો ગમે છે તેમજ 3 વ્યક્તિઓને ગુજરાતી, હિન્દી તથા અંગ્રેજી ચલચિત્રો ગમે છે. આ જૂથમાં ઓછામાં ઓછી કેટલી વ્યક્તિઓ હશે ?

ઉકેલ : ધારો કે G = ગુજરાતી ચલચિત્રો ગમતાં હોય તેવી વ્યક્તિઓનો ગણ

H = હિન્દી ચલચિત્રો ગમતાં હોય તેવી વ્યક્તિઓનો ગણ

E = અંગ્રેજી ચલચિત્રો ગમતાં હોય તેવી વ્યક્તિઓનો ગણ

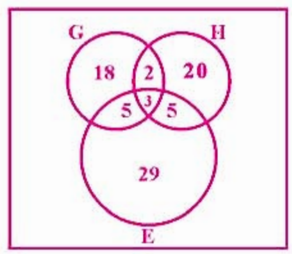
હવે, $n(G) = 28$, $n(H) = 30$, $n(E) = 42$

$n(G \cap H) = 5$, $n(E \cap H) = 8$, $n(G \cap E) = 8$, $n(G \cap E \cap H) = 3$

હવે, $n(G \cup E \cup H) = n(G) + n(H) + n(E) - n(G \cap H) - n(E \cap H) - n(G \cap E) + n(G \cap E \cap H)$

$= 28 + 30 + 42 - 5 - 8 - 8 + 3$

$= 103 - 21 = 82$



આકૃતિ 2.9

કેટલીક વ્યક્તિઓને ચલચિત્ર જોવાનું ન પણ ગમતું હોય.

$\therefore$ જૂથમાં ઓછામાં ઓછી 82 વ્યક્તિઓ છે.

પ્રકીર્ણ ઉદાહરણો

ઉદાહરણ 23 : જો $A \cap B = A \cap C$, $A \cup B = A \cup C$, તો સાબિત કરો કે $B = C$ $(B \neq \emptyset, C \neq \emptyset)$

રીત 1 : ધારો કે $x \in B$ **($B \neq \emptyset$ હોવાથી આ શક્ય છે.)**

$\therefore \quad x \in A \cup B$

$\therefore \quad x \in A \cup C$ **($A \cup B = A \cup C$)**

હવે, બે શક્યતાઓ છે.

(1) $x \in A$ અથવા (2) $x \in C$

(1) $x \in A$

આમ, $x \in A$ અને $x \in B$

$\therefore \quad x \in A \cap B$

$\therefore \quad x \in A \cap C$ **($A \cap B = A \cap C$)**

$\therefore \quad x \in C$

(2) $x \in C$ છે જ.

$\therefore$ આમ, બંને કિસ્સાઓમાં $x \in C$

$\therefore$ $\forall x, x \in B \Rightarrow x \in C$ સાબિત થયું.

$\therefore$ $B \subset C$

તે જ રીતે દર્શાવી શકાય કે $C \subset B$.

આમ, $B = C$.

રીત 2 : આપણે જાણીએ છીએ કે, $X \subset Y \Rightarrow X \cup Y = Y$

$$(A \cap B) \subset B$$

હવે, $B = (A \cap B) \cup B$

$= (A \cap C) \cup B$ **$(A \cap B = A \cap C)$**

$= (A \cup B) \cap (B \cup C)$

$= (A \cup C) \cap (B \cup C)$ **$(A \cup B = A \cup C)$**

$= (A \cap B) \cup C$

$= (A \cap C) \cup C$

$= C$ **$((A \cap C) \subset C)$**

રીત 3 : $X \subset Y \Rightarrow X = X \cap Y$ના ઉપયોગથી પણ આ પરિણામ સાબિત કરી શકાય. સાબિતી જાતે આપો.

ઉદાહરણ 24 : સાબિત કરો $A - B = A - C$ અને $B - A = C - A$, તો $B = C$. $(B \neq \emptyset, C \neq \emptyset)$

ઉકેલ : ધારો કે $B \not\subset C$. આમ, $p \in B$ તથા $p \notin C$ થાય તેવો p મળે.

હવે, $p \in U$ હોવાથી $p \in A$ અથવા $p \notin A$.

(1) જો $p \in A$ હોય, તો $p \in A - C$ કારણ કે, $p \notin C$

$\therefore$ $p \in A - B$ **$(A - B = A - C)$**

$\therefore$ $p \notin B$, જે પક્ષથી વિપરીત છે.

(2) જો $p \notin A$ હોય, તો $p \in B - A$

$\therefore$ $p \in C - A$ **$(B - A = C - A)$**

$\therefore$ $p \in C$, જે પક્ષથી વિપરીત છે.

આમ, બંને વિકલ્પો અશક્ય છે.

$\therefore$ $B \not\subset C$ એ શક્ય ના બને.

$\therefore$ $B \subset C$

તે જ રીતે $C \subset B$.

$\therefore$ $B = C$

ઉદાહરણ 25 : સાબિત કરો કે $P(A) = P(B) \Rightarrow A = B$

ઉકેલ : $A \subset A \Rightarrow A \in P(A)$

$\Rightarrow A \in P(B)$ **(P(A) = P(B))**

$\Rightarrow A \subset B$

તે જ રીતે $B \subset A$.

$\therefore$ $A = B$

ઉદાહરણ 26 : $n(A \times A) = 9$. $(a, b) \in A \times A$ તેમજ $c \in A$, તો ગણ A લખો.

ઉકેલ : ધારો કે $n(A) = k$

હવે, $n(A \times A) = k^2 = 9$

$\therefore$ $k = 3$

$(a, b) \in A \times A$

$\therefore$ $a \in A$, $b \in A$

વધુમાં $c \in A$ આપેલું છે.

આમ, ગણ Aમાં 3 ઘટકો a, b, c આવેલાં છે; એટલે કે

$\therefore$ $A = \{a, b, c\}$

ઉદાહરણ 27 : $A \cap B = \emptyset$ અને $A \cup B = U$ તો સાબિત કરો કે $A' = B$.

ઉકેલ : ધારો કે $x \in B$

$\therefore$ $x \notin A$ કારણ કે $A \cap B = \emptyset$

$\therefore$ $x \in A'$

$\therefore$ $B \subset A'$ (i)

ધારો કે $x \in A'$

$\therefore$ $x \notin A$

પરંતુ $x \in U$

$\therefore$ $x \in A \cup B$ **($A \cup B = U$)**

$\therefore$ $x \in A$ અથવા $x \in B$

$\therefore$ $x \in B$ **($x \notin A$)**

$\therefore$ $A' \subset B$ (ii)

(i) અને (ii) પરથી, $A' = B$.

સ્વાધ્યાય 2.4

1. વિદ્યાર્થીઓના એક જૂથમાં 100 વિદ્યાર્થીઓ હિન્દી જાણે છે અને 50 વિદ્યાર્થીઓ અંગ્રેજી જાણે છે. 25 વિદ્યાર્થીઓ બંને ભાષા જાણે છે. પ્રત્યેક વિદ્યાર્થી આમાંની ઓછામાં ઓછી એક ભાષા જાણે છે. આ જૂથમાં આવેલ વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા શોધો.

2. એક સોસાયટીના 600 રહીશો પૈકી, 500 ગુજરાતી સમાચારપત્ર વાંચે છે, 300 અંગ્રેજી સમાચારપત્ર વાંચે છે અને 50 બંને સમાચારપત્રો વાંચે છે. આ માહિતી સાચી છે ?

3. 50 વ્યક્તિઓના એક સર્વેક્ષણમાં એવું તારણ નીકળ્યું કે, 21 લોકોને ઉત્પાદન A ગમ્યું, 26 લોકોને ઉત્પાદન B ગમ્યું અને 29 લોકોને ઉત્પાદન C ગમ્યું. જો 14 લોકોને ઉત્પાદન A અને B બંને ગમ્યા હોય, 12 લોકોને C અને A ગમ્યા હોય, 14 લોકોને B અને C ગમ્યા હોય તથા 8 લોકોને ત્રણેય ઉત્પાદન ગમ્યાં હોય, તો ફક્ત ઉત્પાદન C ગમ્યું હોય તેવા લોકોની સંખ્યા શોધો. કેટલી વ્યક્તિને એક પણ ઉત્પાદન ન ગમ્યું ?

4. એક શાળામાં રમતગમતની ત્રણ ટીમો છે. બાસ્કેટબોલની ટીમમાં 21 ખેલાડીઓ, હોકીની ટીમમાં 26 અને ફૂટબૉલની ટીમમાં 29 ખેલાડીઓ છે. જો 14 ખેલાડીઓ હોકી અને બાસ્કેટબૉલ બંને રમતા હોય, 15 ખેલાડીઓ હોકી અને ફૂટબૉલ રમતા હોય, 12 ખેલાડીઓ ફૂટબૉલ અને બાસ્કેટબૉલ રમતા હોય તથા 8 ખેલાડીઓ ત્રણેય રમતો રમતા હોય, તો ઓછામાં ઓછા કેટલા વિદ્યાર્થી રમતગમતમાં ભાગ લે છે ?

5. A અને B સાર્વત્રિક ગણ Uના ઉપગણો છે. $n(A) = 20$, $n(B) = 30$, $n(U) = 100$, $n(A \cap B) = 10$ હોય, તો $n(A' \cap B')$ શોધો.

*

સ્વાધ્યાય 2

1. નીચેના ગણ યાદીની રીતે લખો :

(1) $A = \{x \mid x$ એ 20થી નાની અવિભાજ્ય સંખ્યા છે$\}$.

(2) $\beta = \{x \mid x$ એ અંગ્રેજી મૂળાક્ષરોમાં સ્વર છે$\}$.

(3) $X = \{x \mid x \in N, 5 < x < 11\}$.

(4) $X = \{x \mid x \in R, x^2 - 1 = 0\}$.

(5) $X = \{x \mid x \in N, x^2 + 3x + 2 = 0\}$.

2. નીચેના ગણ ગુણધર્મની રીતે લખો :

(1) $A = \{5, 10, 15, 20\}$

(2) $P = \{1, 3, 5, ...\}$

3. જો $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B = \{3, 7, 11\}$ હોય, તો (1) $A - B$ (2) $B - A$ (3) $A \cup B$ મેળવો.

4. નીચેનાં પરિણામો સાબિત કરો :

(1) $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$

(2) $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$

(3) $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$

5. $U = \{x \mid x \in N, 1 \leq x \leq 10\}$, $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B = \{2, 5, 8\}$, $C = \{2, 7, 8, 10\}$ હોય, તો નીચેનાં વિધાનો ચકાસો :

(1) $(A \cup B)' = A' \cap B'$

(2) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

(3) $A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C)$

6. ગણ A = {1, 5, 9}ના તમામ ઉપગણોની યાદી બનાવો.

7. જો $A \cup B = A \cap B$ હોય, તો A = B સાબિત કરો.

8. ગણ A, B, C માટે, $A \cap B \neq \emptyset$, $B \cap C \neq \emptyset$, $A \cap C \neq \emptyset$ હોય, પરંતુ $A \cap B \cap C = \emptyset$ થાય તેવી વેન આકૃતિ દોરો.

9. જો A અને B સાર્વત્રિક ગણ Uના ઉપગણો હોય અને $n(A) = 20$, $n(B) = 30$, $n(U) = 80$, $n(A \cap B) = 10$ હોય, તો $n(A' \cap B')$ શોધો.

10. 60 વિદ્યાર્થીઓના વર્ગમાં 35 વિદ્યાર્થીઓ કબડ્ડી રમતા હોય, 40 વિદ્યાર્થીઓ ખો-ખો રમતાં હોય અને 20 વિદ્યાર્થીઓ બંને રમત રમતા હોય, તો આ બંનેમાંથી કોઈ પણ રમત ન રમતાં હોય તેવા વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા શોધો.

11. નીચેનાં વિધાનો સાબિત કરો :

(1) $A - \emptyset = A$, $\emptyset - A = \emptyset$ (2) $A \cup \emptyset = A$ (જુઓ કે ખાલીગણ શૂન્યની જેમ વર્તે છે.)

(3) $A \subset B \Leftrightarrow A - B = \emptyset$ (4) $A - B = B - A \Leftrightarrow A = B = \emptyset$

12. નીચે આપેલું દરેક વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલા વિકલ્પો (a), (b), (c) અથવા (d)માંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરીને ☐ માં લખો :

(1) સ્તંભ Aમાં ગણ યાદીની રીતે અને સ્તંભ Bમાં ગુણધર્મની રીતે દર્શાવેલ છે :

A	B
(1) {L, A, T}	(A) {x | x એ 4થી નાની પ્રાકૃતિક સંખ્યા છે.}
(2) {–2, –1, 0, 1, 2}	(B) {x | x એ LATA શબ્દનો મૂળાક્ષર છે.}
(3) {1, 2, 3}	(C) {x | $x \in Z$, $x^2 < 5$}

નીચે પૈકીની કઈ જોડ યોગ્ય છે ? ☐

(a) (1) - (A), (2) - (B), (3) - (C) (b) (1) - (B), (2) - (A), (3) - (C)
(c) (1) - (B), (2) - (C), (3) - (A) (d) (1) - (A), (2) - (C), (3) - (B)

(2) A = 100થી નાની યુગ્મ સંખ્યાઓનો સમૂહ
B = 20મી સદીના રમતવીરોનો સમૂહ
C = ઉમાશંકર જોષીએ લખેલ કવિતાઓનો સમૂહ
નીચેના પૈકી ક્યું વિધાન સત્ય છે ? ☐

(a) A અને B ગણ છે. (b) B એ ગણ નથી.
(c) A અને C ગણ નથી. (d) A, B અને C ગણ છે.

(3) $A = \{x \mid x \in Z, x^4 - 16 = 0\}$ હોય, તો ☐

(a) A = {–2, 2} (b) A = {2}
(c) A = {–4} (d) A = {–4, 4, –2, 2}

(4) જો $A = \{y \mid y \in N, y^3 - 27 = 0\}$ હોય, તો ક્યું વિધાન સત્ય છે ? ☐

(a) $9 \in A$ (b) $-3 \in A$ (c) $3 \in A$ (d) $-9 \in A$

(5) જો $B = \{x \mid x \in Z, x^2 - 16 = 0\}$ હોય, તો ખરું વિધાન પસંદ કરો. ☐

(a) $4 \in B$ (b) $-4 \notin B$ (c) $-2 \in B$ (d) $2 \in B$

(6) જો $B = \{ \emptyset \}$ હોય, તો

(a) B ખાલી ગણ છે. (b) B સાન્તગણ છે.

(c) B અનંત ગણ છે. (d) B એ ગણ નથી.

(7) $A = \{x \mid x \in N, x^2 + 4 = 0\}$ હોય, તો

(a) $A = \{-2, 2\}$ (b) $A = \{2\}$ (c) $A = \emptyset$ (d) $A = \{ \emptyset \}$

(8) $\alpha = \{x \mid x$ એ ALPHA શબ્દનો મૂળાક્ષર છે.$\}$

$\beta = \{x \mid x$ એ ALPA શબ્દનો મૂળાક્ષર છે.$\}$

$\gamma = \{L, P, A, H\}$,

તો અસત્ય વિધાન પસંદ કરો.

(a) $\alpha = \gamma$ (b) $\beta = \{A, L, P\}$ (c) $\alpha = \beta$ (d) $\beta \cap \gamma \neq \emptyset$

(9) સ્તંભ Aમાં અમુક ગણ આપેલા છે અને સ્તંભ Bમાં ઉપગણો આપેલાં છે :

સ્તંભ A	સ્તંભ B
(1) $\{1, 3, 5, 7, \ldots\}$	(A) $\{1, 19, 21\}$
(2) $\{2, 4, 6, 8, \ldots\}$	(B) $\{2, 5, 6, 8, 19\}$
(3) $\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$	(C) $\{8, 28, 38\}$

જો સ્તંભ Aમાંના ત્રણ ગણને સ્તંભ Bમાં તેના ઉપગણ સાથે જોડીએ તો નીચેનામાંથી કઈ જોડી યોગ્ય છે ?

(a) (1) - (C), (2) - (B), (3) - (A) (b) (1) - (A), (2) - (C), (3) - (B)

(c) (1) - (C), (2) - (A), (3) - (B) (d) (1) - (A), (2) - (B), (3) - (C)

(10) ગણ $A = \{x \mid x \in N, x^2 < 9\}$ના ઘાત ગણની સભ્યસંખ્યા ...... છે.

(a) 9 (b) 4 (c) 1 (d) 8

(11) વાસ્તવિક સંખ્યા ગણ R માટે નીચેના પૈકી કયું વિધાન સાચું નથી ?

(a) $N \subset R$ (b) $(a, b) \subset R$; $a < b$

(c) $\pi \notin R$ (d) $\emptyset \subset R$

(12) $A = \{1, 5, 7\}$, $B = \{1, 10\}$, $C = \{11, 12, \ldots, 20\}$ કયા ગણના ઉપગણ છે ?

(a) $\{1, 2, 3, \ldots, 20\}$ (b) $\{1, 3, 5, \ldots, 21\}$

(c) $\emptyset$ (d) $\{1, 11, 111, 1111\}$

(13) $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{-1, 1, 0, -2, 2\}$, $C = \{1, 3, 4\}$ કયા ગણનાં ઉપગણ છે ?

(a) $[1, 4]$ (b) $[-1, 4]$ (c) $[-2, 2]$ (d) $[-2, 4]$

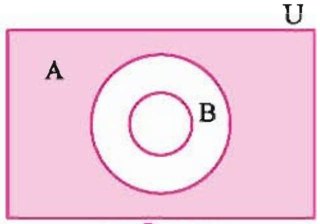
(14) અંતરાલ $(-1, 1]$ માટે નીચેના પૈકી કયું વિધાન સાચું છે ?

(a) $-1 \in (-1, 1]$ (b) $0 \in (-1, 1]$

(c) $(-1, 1] = \{-1, 1\}$ (d) $(-1, 1] = \emptyset$

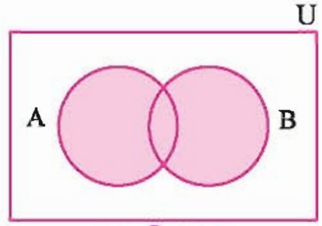
(15) કઈ વેન આકૃતિમાં રંગીન પ્રદેશ ભાગ A ∩ B દર્શાવે છે ?

(a)



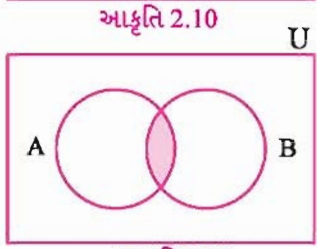
આકૃતિ 2.10

(b)



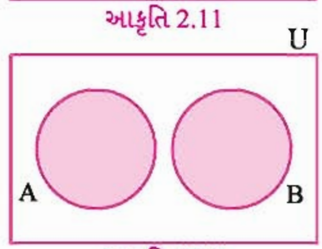
આકૃતિ 2.11

(c)



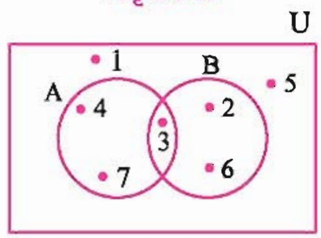
આકૃતિ 2.12

(d)



આકૃતિ 2.13

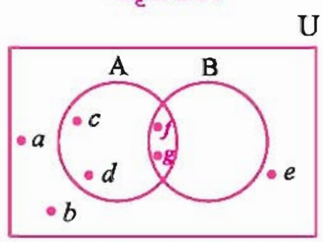
(16) વેન આકૃતિ 2.14માં માટે ખરું વિધાન પસંદ કરો.



આકૃતિ 2.14

(a) A = {1, 3, 4, 7}
(b) U = {1, 2,..., 7}
(c) A ∪ B = {4, 7, 2, 6}
(d) B = ∅

(17) વેન આકૃતિ 2.15 માટે ક્યું વિધાન ખરું નથી ?



આકૃતિ 2.15

(a) A = {*c, d, f, g*}
(b) B = ∅
(c) U = {*a, b, c, d, e, f, g*}
(d) A ∪ B = {*c, d, f, g*}

(18) A = {*x* | *x* એ 8 કરતાં નાની પ્રાકૃતિક સંખ્યા છે},
B = {*x* | *x* એ 5 કરતાં મોટી અને 18 કરતાં નાની પ્રાકૃતિક સંખ્યા છે}, તો
(a) A ∪ B = {*x* | *x* એ 18થી નાની પ્રાકૃતિક સંખ્યા છે}
(b) A ∪ B = {−1, −2, 1, 2, 0, 18}
(c) A ∪ B = ∅
(d) A ∩ B = {1}

(19) નીચેના પૈકી કયું વિધાન ખરું છે ? (A ≠ B)
(a) A ∪ (B ∪ C) = A ∩ (B ∪ C)
(b) A ∪ (B ∪ C) = A ∪ (B ∩ C)
(c) A ∩ (B ∪ C) = (A ∩ B) ∪ (A ∩ C)
(d) A ∩ (B ∩ C) = A ∩ (B ∪ C)

(20) A = {1, 3, 5, 7}, B = {2, 4, 6, 8}, હોય, તો n(P(A ∩ B)) = ...

(a) 1 (b) 2^8 (c) 8 (d) 8^2

(21) નીચેના પૈકી કયું વિધાન ખરું છે ? (A ≠ B)

(a) (A ∩ B) ⊂ A (b) (A ∪ B) ⊂ A

(c) (A ∪ B) ∩ B = A (d) (A ∪ B) ⊂ B

(22) જો A ⊂ B હોય, તો

(a) A ∩ B = ∅ (b) A ∩ B = A

(c) A ∩ B = B (d) A ∪ B = A

(23) U = {x | x ∈ N, x ≤ 10}, A = {1, 3, 5, 7, 9}, B = {2, 4, 6, 8, 10}, તો (A ∪ B)' = ...

(a) U (b) {2} (c) ∅ (d) {1, 4, 7, 8}

(24) વાસ્તવિક સંખ્યાઓના ગણ Rને સાર્વત્રિક ગણ લઈએ તો Q' = ...

(a) N (b) Z (c) I (d) R

(25) પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓના ગણને સાર્વત્રિક ગણ લઈએ અને A = {x | x − 8 = 3}, A' = ...

(a) N (b) {5} (c) N − {5} (d) N − {11}

(26) U = [1, 5], A = {x | x ∈ N, $x^2 - 6x + 5 = 0$} હોય, તો A' = ...

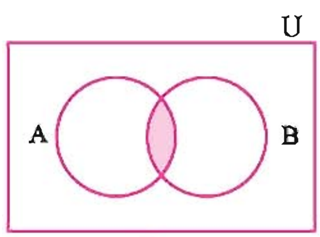
(a) {1, 5} (b) (1, 5) (c) [1, 5] (d) [−1, −5]

(27) U = [1, 2], A = {x | x ∈ N, $x^2 + x - 2 = 0$} હોય, તો A' = ...

(a) (1, 2] (b) [1, 2] (c) {1, 2} (d) (1, 2)

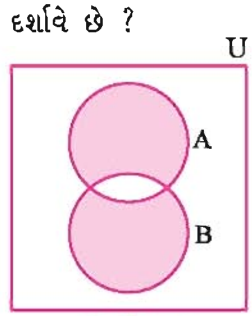
(28) નીચેના પૈકી કઈ વેન આકૃતિમાં રંગીન ભાગ (A ∩ B)' દર્શાવે છે ?

(a)



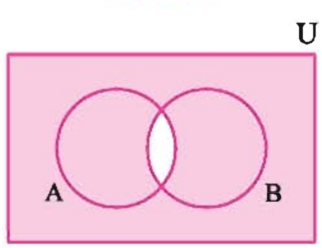
આકૃતિ 2.16

(b)



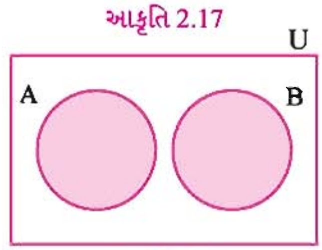
આકૃતિ 2.17

(c)



આકૃતિ 2.18

(d)



આકૃતિ 2.19

(29) એક વસતીમાં 50 કુટુંબો ગુજરાતી બોલે છે, 30 કુટુંબો હિન્દી બોલે છે તથા 10 કુટુંબો ગુજરાતી અને હિન્દી બંને ભાષાઓ બોલે છે. કેટલાં કુટુંબો બે પૈકી ઓછામાં ઓછી એક ભાષા બોલે છે ? ☐

(a) 80 (b) 90 (c) 70 (d) 60

(30) 200 વિદ્યાર્થીઓના એક છાત્રાલયમાં 50 વિદ્યાર્થીઓને ઈડલી ભાવે છે, 75ને ઉપમા ભાવે છે અને 35ને ઈડલી તેમજ ઉપમા બંને ભાવે છે. કેટલા વિદ્યાર્થીઓને ઈડલી કે ઉપમા બંનેમાંથી કંઈ ભાવતું નથી ? ☐

(a) 75 (b) 110 (c) 200 (d) 90

(31) વિદ્યાર્થીઓના એક સર્વેક્ષણમાં માલૂમ પડ્યું કે 21 વિદ્યાર્થીઓને વિનયન શાખા પસંદ પડી છે, 26ને વાણિજ્ય શાખા પસંદ પડી છે અને 29ને વિજ્ઞાન વિદ્યાશાખા પસંદ પડી છે. જો 14 વિદ્યાર્થીને વિનયન અને વાણિજ્ય બંને પસંદ પડી હોય, 10ને વિનયન અને વિજ્ઞાન બંને પસંદ પડી હોય, 8ને વાણિજ્ય અને વિજ્ઞાન બંને પસંદ પડી હોય તથા 6ને ત્રણેય પસંદ પડી હોય, ઉપરાંત દરેકને ઓછામાં ઓછી એક શાખા તો પસંદ પડી જ હોય, તો કુલ કેટલા વિદ્યાર્થીઓએ સર્વેક્ષણમાં ભાગ લીધો હોય ? ☐

(a) 76 (b) 82 (c) 50 (d) 110

સારાંશ

1. ગણ અવ્યાખ્યાયિત પદ
2. સાર્વત્રિક ગણ
3. ઉપગણ
4. બે ગણની સમાનતા
5. યોગ ગણ, યોગક્રિયા અને તેના ગુણધર્મો
6. છેદ ગણ, છેદક્રિયા અને તેના ગુણધર્મો
7. વિભાજનના નિયમ
8. પૂરક ગણ, પૂરકક્રિયા અને તેના ગુણધર્મો
9. દ'મોર્ગનના નિયમો
10. તફાવત ગણ અને સંમિત તફાવત
11. કાર્તેઝિય ગુણાકાર
12. સંકેત $n(A)$, $n(A \cup B)$, $n(A \cup B \cup C)$નાં સૂત્ર

બે ગણની વેન આકૃતિમાં ચાર પ્રદેશો બને છે. ત્રણ ગણની વેન આકૃતિમાં કુલ આઠ પ્રદેશો આવેલા છે. જેમાં ચાર ગણો આવેલા હોય તેવી વેન આકૃતિમાં કેટલા પ્રદેશો રચાય ? સામાન્ય રીતે ગણને વર્તુળથી વેન આકૃતિમાં દર્શાવવામાં આવે છે તો ચાર ગણો માટે આવી વેન આકૃતિ રચી શકાય ?

પ્રકરણ 3

સંબંધ અને વિધેય

3.1 પ્રાસ્તાવિક

વિધેયની સંકલ્પના આધુનિક ગણિતશાસ્ત્રના પાયાની વિષયવસ્તુમાંની એક સંકલ્પના છે. વિધેયની સંકલ્પનાને વિકસાવવામાં અનેક ગણિતશાસ્ત્રીઓએ મહત્ત્વનું પ્રદાન કર્યું છે. **વિધેય (Function)** શબ્દનો સર્વપ્રથમ ઉપયોગ ફ્રેન્ચ ગણિતશાસ્ત્રી દ'કાર્તેએ ઈ.સ. 1637માં કર્યો હતો. તે વખતે તેણે x^n, $n \in$ Nનો જ ઉલ્લેખ કર્યો હતો. સન 1667માં જેમ્સ ગ્રેગરીએ વિધેયની વ્યાખ્યા આપી હતી. તેણે વિધેયનો ઉપયોગ કેટલીક રાશિઓ ઉપર થતી બૈજિક ક્રિયાઓથી મળતી નવી રાશિ તરીકે કર્યો હતો. ઈ.સ. 1673માં લિબ્નીટ્ઝે વક્ર પરના બિંદુના યામ, સ્પર્શકના ઢાળ, અભિલંબના ઢાળના સંદર્ભમાં દરેક બિંદુએ બદલાતી રાશિ તરીકે વિધેયનો ઉપયોગ કર્યો હતો. વિધેયની આધુનિક વ્યાખ્યા ડિરિશ્લેએ આપી હતી. જ્યોર્જ કેન્ટરે ગણની મદદથી વિધેયની વ્યાખ્યા આપી હતી. આ પ્રકરણમાં વિધેય તેના પ્રકારો અને તેમની ઉપરની ક્રિયાઓનો અભ્યાસ કરીશું.

3.2 સંબંધ

બે અરિક્ત ગણના કાર્તેઝિય ગુણાકારથી આપણે પરિચિત છીએ. ધારો કે A = $\{a, b, c\}$, B = $\{c, d\}$, તો A $\times$ B = $\{(a, c), (a, d), (b, c), (b, d), (c, c), (c, d)\}$ થાય.

પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓના ગણ Nમાં 'બમણા હોવાનો સંબંધ' સંખ્યા 1ને 2 સાથે, 2ને 4 સાથે, 3ને 6 સાથે અને તે જ રીતે બીજી સંખ્યાઓને સાંકળે છે. આવું લખવાને બદલે તેમને ક્રમયુક્ત જોડ દ્વારા $\{(1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 8),...\}$ દ્વારા પણ દર્શાવી શકાય. આમ, આ સંબંધને ગણ $\{(1, 2), (2, 4), (3, 6)...\}$ તરીકે પણ દર્શાવી શકાય. અહીં નોંધીએ કે આ ગણ N $\times$ Nનો ઉપગણ છે.

સંબંધ (Relation) : અરિક્ત ગણો A અને B માટે A $\times$ Bના કોઈ પણ ઉપગણને Aથી Bનો સંબંધ કહેવાય.

આમ, ઉપર દર્શાવેલ ગણ A અને B માટે $\{(a, c), (b, d)\}$ એ Aથી Bનો સંબંધ છે. હવે n(A $\times$ B) = 6 હોવાથી A $\times$ Bના ઉપગણોની સંખ્યા $2^6 = 64$ થાય. આમ, Aથી Bના 64 વિવિધ સંબંધો શક્ય બને. ગણ તરીકે સંબંધને S થી દર્શાવવામાં આવે છે. આમ ઉપરના સંબંધને S = $\{(a, c), (b, d)\}$ તરીકે લખાય. વધુમાં ઉપર જણાવ્યા મુજબ A $\times$ Bનો કોઈ પણ ઉપગણ S એ Aથી Bનો એક સંબંધ છે. જો કોઈ ક્રમયુક્ત જોડ $(x, y) \in$ S હોય તો x એ y સાથે S દ્વારા સંબંધ ધરાવે છે તેમ કહેવાય. ઉપરના ઉદાહરણમાં a એ c સાથે અને b એ d સાથે S દ્વારા સંબંધ ધરાવે છે, જો $(x, y) \in$ A $\times$ B પણ $(x, y) \notin$ S, તો x એ y સાથે S દ્વારા સંબંધ ધરાવતો નથી તેમ કહેવાય, ઉદાહરણ તરીકે $(c, c) \notin$ S, માટે c એ c સાથે S દ્વારા સંબંધ ધરાવતો નથી.

જો S એ Aથી Bનો સંબંધ હોય, તો **$\{a \mid (a, b) \in S\}$ને Sનો પ્રદેશ (Domain) કહેવાય અને ગણ $\{b \mid (a, b) \in S\}$ને Sનો વિસ્તાર (Range) કહેવાય.** ઉપરના ઉદાહરણમાં Sનો પ્રદેશ $\{a, b\}$ અને વિસ્તાર $\{c, d\}$ છે. Aથી Bના કોઈ પણ સંબંધ માટે પ્રદેશ A નો ઉપગણ હોય અને વિસ્તાર B નો ઉપગણ હોય છે.

Aથી Bનો કોઈ સંબંધ S એ $\emptyset$ હોય, તો Sને રિક્ત અથવા ખાલી (Void) સંબંધ કહે છે.

Aથી Bનો કોઈ સંબંધ S એ $A \times B$ હોય, તો S સાર્વત્રિક (Universal) સંબંધ કહેવાય છે.

વધુમાં જો $A = B$ હોય એટલે કે $S \subset A \times A$ હોય, તો સંબંધ Sને A પરનો સંબંધ કહેવાય છે.

ગણિત તેમજ સમાજમાં સંબંધ અનેક રીતે ઉદ્ભવે છે. કોઈ ગણ Aના ઘાતગણ P(A) ઉપર 'ઉપગણ હોવું' એ એક સંબંધ છે. જો $M \subset N$ હોય, તો M એ N સાથે $\subset$ દ્વારા સંબંધ ધરાવે છે તેમ કહેવાય. તે જ રીતે 'નાના હોવું' કે 'મોટા હોવું' તે સંખ્યાઓના ગણ ઉપર સંબંધો છે. આમ જો, $a < b$ હોય, તો a એ b સાથે '$<$' દ્વારા સંબંધ ધરાવે છે અથવા $a > b$ હોય, તો a એ b સાથે '$>$' દ્વારા સંબંધ ધરાવે છે તેમ કહેવાય. ઉપરનાં ઉદાહરણો પરથી નોંધીએ કે, સંબંધમાં ક્રમયુક્ત જોડીઓ લેવામાં આવે છે.

સમાજમાં, જો H એ તમામ મનુષ્યોનો ગણ હોય, તો 'માતા હોવું' એ સંબંધ છે. તે $H \times H$નો ઉપગણ છે, એટલે કે આ સંબંધ ગણ સ્વરૂપે $M = \{(a, b) \mid a, b \in H, a$ એ bની માતા છે$\}$થી દર્શાવી શકાય. અહીં aMb લખી શકાય.

ઉદાહરણ 1 : $A = \{1, 2, .., 10\}$, $B = \{3, 6, 9, 12\}$. S એ Aથી Bનો એક સંબંધ છે.

$S = \{(a, b) \mid a$ એ bનો ગુણક છે$\}$ હોય તો Sનો પ્રદેશ અને વિસ્તાર મેળવો.

ઉકેલ : અહીં $S = \{(3, 3), (6, 3), (9, 3), (6, 6), (9, 9)\}$ થાય, કારણ કે, B નો સભ્ય 3 છે; અને A માં આવેલ તેના ગુણક 3, 6, 9 છે. Bનો સભ્ય 6 છે; અને Aમાં 6નો ગુણક 6 છે, Bનો સભ્ય 9 છે; અને Aમાં તેનો ગુણક 9 છે. આમ, Sનો પ્રદેશ $\{3, 6, 9\}$ અને વિસ્તાર $\{3, 6, 9\}$ છે.

ઉદાહરણ 2 : $S = \{(a, b) \mid a + 2b = 15\}$ થાય તે રીતે એક સંબંધ N પર વ્યાખ્યાયિત છે. Sને યાદીની રીતે લખો. Sનો પ્રદેશ તેમજ વિસ્તાર મેળવો.

ઉકેલ : $a + 2b = 15$ થવા માટે જરૂરી છે કે $2b \le 15$. આથી bનાં શક્ય મૂલ્યો $b = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ થાય. હવે, b નાં આ મૂલ્યોને સંગત a (N માં) નાં મૂલ્યો અનુક્રમે 13, 11, 9, 7, 5, 3, 1 થશે.

આમ, $S = \{(13, 1), (11, 2), (9, 3), (7, 4), (5, 5), (3, 6), (1, 7)\}$

$\therefore$ Sનો પ્રદેશ $= \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$ અને

Sનો વિસ્તાર $= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

ઉદાહરણ 3 : જો $A = \{5, 7, 9\}$, $B = \{1, 3\}$ અને $S = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B, a - b$ અયુગ્મ પૂર્ણાંક$\}$ હોય, તો S રિક્ત સંબંધ છે તેમ દર્શાવો.

ઉકેલ : સ્પષ્ટ રીતે, A અને Bના ઘટકો અયુગ્મ પૂર્ણાંકો હોવાથી તેમની બાદબાકી યુગ્મ પૂર્ણાંકો મળે. આમ, કોઈ પણ ક્રમયુક્ત જોડ (a, b) માટે $a - b$ અયુગ્મ પૂર્ણાંક ન થાય. આમ S એ રિક્ત સંબંધ છે.

ઉદાહરણ 4 : O અયુગ્મ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો ગણ અને E એ યુગ્મ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો ગણ છે અને S = $\{(a, b) \mid a + b$ યુગ્મ સંખ્યા$\}$, T = $\{(a, b) \mid ab$ યુગ્મ સંખ્યા$\}$ છે, O થી E પરના સંબંધો S અને T શોધો. T માટે પ્રદેશ અને વિસ્તાર શોધો.

ઉકેલ : જો x એ અયુગ્મ અને y એ યુગ્મ સંખ્યા હોય, તો $x + y$ હંમેશાં અયુગ્મ થાય, જ્યારે xy હંમેશાં યુગ્મ સંખ્યા થાય.

$\therefore$ કોઈ પણ $(x, y) \in O \times E$ માટે $(x, y) \notin S$ અને હંમેશાં $(x, y) \in T$.

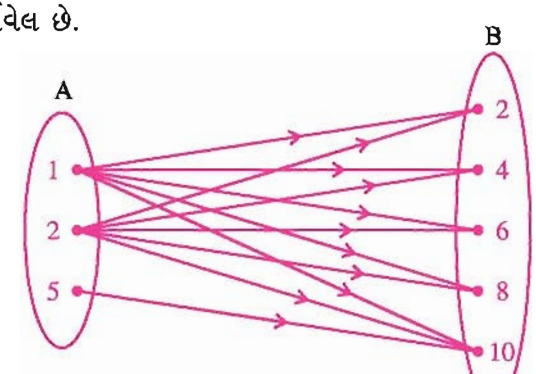
$\therefore$ $S = \emptyset$ અને $T = O \times E$

$\therefore$ T નો પ્રદેશ અને વિસ્તાર અનુક્રમે O અને E છે.

3.3 સંબંધનું દૃશ્ય નિરૂપણ

આપણે જોયું કે A થી B પરનો સંબંધ A × B ના ઉપગણ તરીકે દર્શાવી શકાય. સંબંધને વેન આકૃતિ દ્વારા અને સારણી દ્વારા પણ દર્શાવી શકાય. નીચેના ઉદાહરણમાં આનું નિરૂપણ કરેલ છે :

A = {1, 2, 5}, B = {2, 4, 6, 8, 10} અને S = $\{(a, b) \mid b$ એ a વડે વિભાજ્ય છે$\}$. હવે, S = {(1, 2), (1, 4), (1, 6), (1, 8), (1, 10), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (2, 8), (2, 10), (5, 10)}. આ સંબંધ વેન આકૃતિ 3.1માં દર્શાવેલ છે.



આકૃતિ 3.1

આ આકૃતિમાં aથી bને જોડતું કોઈ કિરણ હોય, તો a એ b સાથે સંબંધ ધરાવે છે તેવો અર્થ થાય છે. આવી આકૃતિને **કિરણ-આકૃતિ (Arrow Diagram)** પણ કહે છે.

બીજી રીત (સારણીની રીત) :

		B				
	S	2	4	6	8	10
	1	1	1	1	1	1
A	2	1	1	1	1	1
	5	0	0	0	0	1

ઉપર્યુક્ત સારણી 0 અને 1 દ્વારા બનેલી છે. અહીં (1, 2) ∈ S હોવાથી 1 વાળી હાર અને 2 વાળો સ્તંભ જ્યાં મળે તે ખાનામાં 1 લખાય. વળી, (5, 2) ∉ S, આથી આ ઘટકોને અનુરૂપ ખાનામાં 0 છે.

આ સારણીને $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ તરીકે પણ લખી શકાય.

☛ **નોંધ** આ પ્રકારની સારણીને શ્રેણિક કહેવાય છે.

સ્વાધ્યાય 3.1

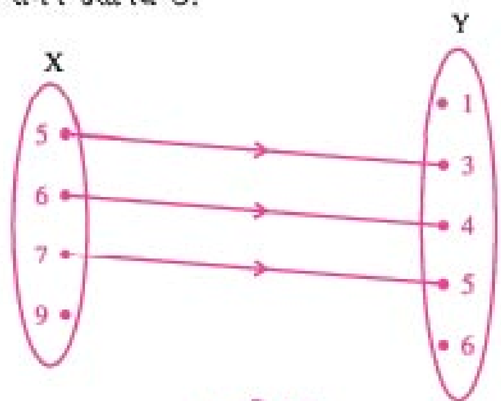
1. સંબંધ $S = \{(x, y) \mid x, y \in N, x + y = 8\}$નો પ્રદેશ અને વિસ્તાર શોધો.

2. સંબંધ $S = \{(x, x^3) \mid x$ એ 10 કરતાં નાની અવિભાજ્ય સંખ્યા છે$\}$ને યાદીના સ્વરૂપમાં લખો.

3. $A = \{1, 2, 3, 5\}, B = \{4, 6, 9\}$.

સંબંધ $S = \{(x, y) \mid x$ અને yનો તફાવત અયુગ્મ સંખ્યા છે, $x \in A, y \in B\}$ આપેલો છે. Sને યાદીના સ્વરૂપમાં લખો.

4. આકૃતિ 3.2માં એક સંબંધ દર્શાવેલ છે.



આકૃતિ 3.2

આ સંબંધને યાદીના સ્વરૂપમાં લખો.

*

3.4 વિધેય

હવે આપણે **વિધેય (Function)** તરીકે પ્રચલિત એક વિશિષ્ટ સંબંધનો અભ્યાસ કરીશું. બે અરિક્ત ગણ A અને B માટે જેનો પ્રદેશ A હોય અને પ્રત્યેક $x \in A$ માટે જો fમાં xને સમાવતી એક અને માત્ર એક (અનન્ય) ક્રમયુક્ત જોડ આવેલી હોય તેવા Aથી B પરના અરિક્ત સંબંધ f ને Aથી B પરનું વિધેય કહેવાય છે અને $f : A \rightarrow B$ લખાય છે. આમ, વિધેયની વિધિવત્ વ્યાખ્યા નીચે મુજબ આપી શકાય.

વિધેય (Function) : ધારો કે A અને B બે અરિક્ત ગણ છે અને $f \subset (A \times B)$ અને $f \neq \emptyset$. પ્રત્યેક $x \in A$ને સંગત અનન્ય ક્રમયુક્ત જોડ $(x, y) \in f$ હોય, તો $f : A \rightarrow B$ને વિધેય કહેવાય છે. ગણ Aને fનો પ્રદેશ (Domain) અને ગણ Bને fનો સહપ્રદેશ (Codomain) કહેવાય છે. ક્રમયુક્ત જોડીઓ (x, y) ના ગણ fને વિધેયનો આલેખ (Graph) પણ કહે છે.

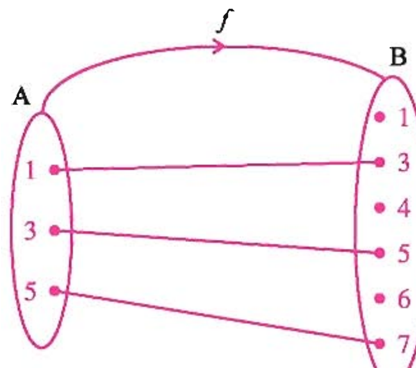
ગણ $\{y \mid (x, y) \in f\}$ને વિધેય fનો વિસ્તાર (Range) કહેવાય છે. વિધેય $f : A \to B$ના પ્રદેશ અને વિસ્તારને અનુક્રમે D_f અને R_fથી દર્શાવાય છે. સરળતા માટે આ ગણને વિધેય $f : A \to B$ના પ્રદેશ અને વિસ્તાર કહેવાને બદલે fના પ્રદેશ અને વિસ્તાર કહીશું. અહીં જુઓ કે fનો વિસ્તાર એ fના સહપ્રદેશનો ઉપગણ છે.

કોઈ વિધેય $f : A \to B$ માટે, જો $A \subset R$ હોય તો તે વિધેયને વાસ્તવિક ચલનું વિધેય કહેવાય. જો $B \subset R$ હોય તો તેને વાસ્તવિક વિધેય કહેવાય અને જો $A \subset R$ અને $B \subset R$ હોય, તો તેને વાસ્તવિક ચલનું વાસ્તવિક વિધેય કહેવાય.

હવે જો $f : A \to B$ વાસ્તવિક ચલનું વાસ્તવિક વિધેય હોય તો, ક્રમયુક્ત જોડ $(x, y) \in R \times R$ અને તેનું સમતલમાં એક બિંદુ તરીકે નિરૂપણ કરી શકાય. $\{(x, y) \mid (x, y) \in f\}$ **વિધેયનો સમતલમાં આલેખ દર્શાવે છે.**

ગણ $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{1, 3, 4, 5, 6, 7\}$ અને $f = \{(1, 3), (3, 5), (5, 7)\}$. જુઓ કે f નો પ્રદેશ સમગ્ર A છે અને Aના દરેક ઘટકને અનુરૂપ Bમાં એક અને માત્ર એક ઘટક આવેલો છે. આમ $f : A \to B$ વિધેય છે. અહીં fનો પ્રદેશ A છે. સહપ્રદેશ B છે અને fનો વિસ્તાર $\{3, 5, 7\}$ છે.

આ વિધેયને વેન આકૃતિ 3.3માં દર્શાવેલ છે.



આકૃતિ 3.3

જુઓ કે વિધેય એક ગણના ઘટકોની અન્ય ગણના ઘટકો સાથે સંગતતા આપે છે. ઉપરના ઉદાહરણમાં વિધેયને $f(1) = 3$, $f(3) = 5$ અને $f(5) = 7$ તરીકે લખી શકાય. અર્થાત્ $\forall (x, y) \in f$ માટે $y = f(x)$. વિધેયના અભ્યાસમાં જો આપેલ વિધેયની સંગતતાનું નિરીક્ષણ કરી તેમાં જો કોઈ ભાત (pattern) મળતી હોય, તો તે શોધવાનું ઉપયોગી છે. આવી ભાત વિધેય દર્શાવવા માટે નિયમ કે સૂત્ર આપે છે. ઉપરના ઉદાહરણમાં $f(x) = x + 2$, $\forall x \in A$ લખી શકાય. એ જરૂરી નથી કે દરેક વિધેયને નિયમ કે સૂત્ર તરીકે દર્શાવી શકાય. વિધેય ગણ તરીકે તેના પ્રદેશ અને સહપ્રદેશ ઉપર આધાર રાખે છે, તેના સૂત્ર ઉપર નહિ.

નીચેનાં ઉદાહરણ ઉપર દર્શાવેલ હકીકતને સમજવામાં મદદરૂપ છે :

ધારો કે $f : N \to N$, $f(x) = x^2$. આ વિધેય ગણ તરીકે $f = \{(1, 1), (2, 4), (3, 9), \ldots\}$ લખી શકાય. હવે $g : Z \to Z$, $g(x) = x^2$. આ વિધેયનું ગણ સ્વરૂપ

$g = \{\ldots, (-2, 4), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4), (3, 9), \ldots\}$ છે. આમ, f અને gનાં સૂત્રો સમાન હોવા છતાં તે અલગ વિધેયો છે.

ધારો કે $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$. $f : A \to B$; $f(x) = 2x - 1$ અને $g : A \to C$; $g(x) = 2x - 1$ વ્યાખ્યાયિત કરો.

$f = \{(1, 1), (2, 3), (3, 5), (4, 7), (5, 9)\}$

$g = \{(1, 1), (2, 3), (3, 5), (4, 7), (5, 9)\}$

અહીં વિધેયોના સહપ્રદેશ ભિન્ન છે, આથી f તથા g સમાન વિધેય નથી.

હવે ધારો કે A = {1, 2, 3, 4}, B = {2, 3, 4, 5, 6} અને C = {3, 5, 7, 9, 11}.

$f : A \rightarrow B$; $f(x) = x + 1$ અને $g : A \rightarrow C$; $g(x) = 2x + 1$ લો.

અહીં સહપ્રદેશ તથા સૂત્ર બંને ભિન્ન છે, આમ f અને g સમાન વિધેય નથી.

અંતમાં, ધારો કે A = {1, 2, 3, 4}, B = {1, 3, 5} અને

C = {x | x એ 30થી નાની પ્રાકૃતિક સંખ્યા છે.}

$f : A \rightarrow C$; $f(x) = x^2$ અને $g : B \rightarrow C$; $g(x) = x^2$ વ્યાખ્યાયિત કરો.

અહીં f અને gના પ્રદેશ ભિન્ન છે. આથી f અને g સમાન વિધેય નથી.

સમાન વિધેયો (Equal Functions) : જો બે વિધેયના પ્રદેશ, સહપ્રદેશ અને આલેખ (ક્રમયુક્ત જોડના ગણ) અથવા સૂત્ર (જો હોય તો) સમાન હોય, તો તેમને સમાન વિધેય કહે છે.

જો A = C, B = D તથા પ્રત્યેક $x \in$ A (અથવા C) માટે $f(x) = g(x)$ હોય, તો $f : A \rightarrow B$ અને $g : C \rightarrow D$ને સમાન વિધેય કહેવાય.

વિધેય $f : A \rightarrow B$ માટે $f(x)$ ને x આગળ fનું મૂલ્ય અથવા f દ્વારા મળતું xનું પ્રતિબિંબ (Image) કહેવાય છે અને xને $f(x)$નું પૂર્વ પ્રતિબિંબ (Pre-image) કહેવાય છે. જો C ⊂ A હોય, તો $\{y \mid y = f(x), x \in C\}$ ને f દ્વારા મળતું ગણ C નું પ્રતિબિંબ કહેવાય છે. આ ગણને f(C) તરીકે પણ દર્શાવાય છે. આમ, f(A) વિધેય $f : A \rightarrow B$નો વિસ્તાર છે.

ઉદાહરણ 5 : જો A = {1, 2, 3, 4}, B = {2, 4, 6, 8, 10, 12} અને

f = {(1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 10), (3, 12)}, તો f વિધેય છે ?

ઉકેલ : ના. કારણ કે, 3 ∈ A ને સંગત fમાં બે ઘટકો છે, જે ગણ Bના ઘટકો 6 અને 12 સાથે ક્રમયુક્ત જોડ રચે છે. **વિધેયમાં ગણ Aનો પ્રત્યેક ઘટક ગણ Bના અનન્ય ઘટક સાથે સંગત હોવો જોઈએ.**

ઉદાહરણ 6 : A = {1, 2, 3, 4, 5,}, B = {1, 3, 5, 7}, $f(x) = x - 2$. શું f એ Aથી B પરનું વિધેય છે ?

ઉકેલ : અહીં શક્ય હોય તો f = {(1, −1), (2, 0), (3, 1), (4, 2), (5, 3)}. અહીં સ્પષ્ટ જોઈ શકાય છે કે, $f \not\subset (A \times B)$. તેથી f એ A થી Bનો સંબંધ પણ નથી. તેથી f એ Aથી B પરનું વિધેય નથી.

ઉદાહરણ 7 : $f : N \rightarrow N$, $f(x) = 2x$ થી વ્યાખ્યાયિત કરો. f વિધેય છે ? fનો વિસ્તાર શોધો. જો A = {1, 2, 4, 8, 16} હોય, તો f(A) મેળવો. 56 અને 65નાં પ્રતિબિંબ અને પૂર્વપ્રતિબિંબ પણ મેળવો.

પ્રત્યેક $x \in$ N માટે અનન્ય $2x \in$ N અસ્તિત્વ ધરાવે છે. આથી $f : N \rightarrow N$ વિધેય છે.

f = {(1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 8),...} = $\{(n, 2n) \mid n \in N\}$

∴ fનો વિસ્તાર {2, 4, 6, 8, 10,...} = $\{2n \mid n \in N\}$ છે.

હવે, $f(1) = 2$, $f(2) = 4$, $f(4) = 8$, $f(8) = 16$, $f(16) = 32$,

∴ f(A) = {2, 4, 8, 16, 32}.

વધુમાં, $f(56) = 112$ અને $f(65) = 130$. આથી 56 અને 65નાં પ્રતિબિંબ અનુક્રમે 112 અને 130 છે.

કોઈ પણ સંખ્યા $x \in N$નું પૂર્વ પ્રતિબિંબ $\frac{x}{2}$ છે. x યુગ્મ હોય, તો $\frac{x}{2}$ પ્રાકૃતિક સંખ્યા છે. આમ, 56નું પૂર્વ પ્રતિબિંબ અસ્તિત્વ ધરાવે છે અને તે 28 છે, પરંતુ 65નું પૂર્વ પ્રતિબિંબ અસ્તિત્વ ધરાવતું નથી.

$f(28) = 56$ અને કોઈ પણ $x \in N$ માટે $f(x) \neq 65$.

ઉદાહરણ 8 : નીચેના વાસ્તવિક વિધેયના વિસ્તાર શોધો :

(1) $f : R \to R,\ f(x) = x^2 + 2x + 3$

(2) $f : R \to R,\ f(x) = x^4$

(3) $f : R \to R,\ f(x) = [x]$

(4) $f : R \to R,\ f(x) = 3x + 2$

ઉકેલ : (1) $f(x) = x^2 + 2x + 3$

$f(x) = x^2 + 2x + 1 + 2$

$= (x + 1)^2 + 2 \geq 2$ કારણ કે $(x + 1)^2 \geq 0$

વિસ્તાર $R_f \subset \{y \mid y \geq 2, y \in R\}$

વળી, જો $y \in R$ અને $y \geq 2$, અને $\sqrt{y-2} - 1 = x$ લઈએ તો,

$(x + 1)^2 = y - 2$ અથવા $x^2 + 2x + 3 = y$

આમ, પ્રત્યેક $y \geq 2$ માટે $x \in R$ મળે જેથી $y = x^2 + 2x + 3$

$\therefore\ y \in R_f$

$\therefore\ R_f = \{y \mid y \geq 2, y \in R\}$

(2) $x^4 \geq 0$, તેથી $R_f \subset (R^+ \cup \{0\})$ (i)

વળી, જો $y \geq 0$, તો $\sqrt[4]{y} = x$ અસ્તિત્વ ધરાવે છે.

$\therefore\ x^4 = y$

$\therefore\ f(x) = y$

આમ, પ્રત્યેક $y \in R^+ \cup \{0\}$ ને સંગત $x \in R$ મળે જેથી $y = f(x)$

$\therefore\ (R^+ \cup \{0\}) \subset R_f$ (ii)

$\therefore$ (i) અને (ii) પરથી $R_f = R^+ \cup \{0\}$.

(3) $[x]$ એટલે x કરતાં મોટો ના હોય તેવો મહત્તમ પૂર્ણાંક.

તેથી, $[x] = \begin{cases} 0 \text{ જો } 0 \leq x < 1 \\ 1 \text{ જો } 1 \leq x < 2 \\ 2 \text{ જો } 2 \leq x < 3 \text{ વગેરે.} \end{cases}$

પ્રત્યેક વાસ્તવિક સંખ્યા x માટે $[x]$ એ પૂર્ણાંક છે.

$\therefore\ f(x)$ એ પૂર્ણાંક છે.

$\therefore\ R_f \subset Z$ (i)

વળી, કોઈ પણ $n \in Z$ માટે $n = [n] = f(n)$

$\therefore\ n \in R_f$

$\therefore\ Z \subset R_f$ (ii)

$\therefore$ (i) તથા (ii) પરથી $R_f = Z$

નોંધ : 3 કરતાં મોટા નહિ તેવા પૂર્ણાંકો 3, 2, 1, 0,...

તે પૈકી મોટામાં મોટો પૂર્ણાંક 3 છે. તેથી [3] = 3

જો $0 \le x < 1$ તો x થી મોટા નહિ તેવા પૂર્ણાંકો 0, −1, −2,... છે. તે પૈકી મહત્તમ પૂર્ણાંક 0 છે.

$\therefore \quad 0 \le x < 1$ તો $[x] = 0$.

nથી મોટા ન હોય તેવા પૂર્ણાંક $n, n-1, n-2,...$ છે. તે પૈકી મહત્તમ પૂર્ણાંક n છે. આથી $[n] = n$.

(4) જો $x \in R$ તો $3x + 2 \in R$.

$R_f \subset R$ (i)

વળી, જો $y \in R$, તો $\frac{y-2}{3} \in R$. જો $x = \frac{y-2}{3}$, તો $y = 3x + 2$.

તેથી પ્રત્યેક $y \in R$ માટે એક $x \in R$ એવો અસ્તિત્વ ધરાવે છે કે જેથી $y = f(x)$

$\therefore \quad R \subset R_f$ (ii)

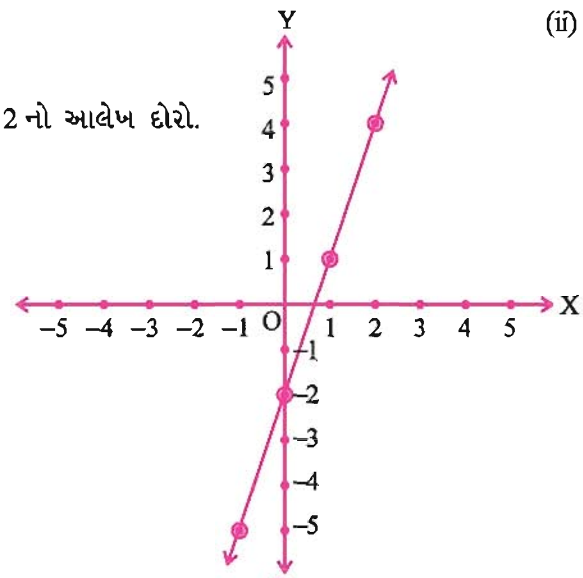
$\therefore$ (i) તથા (ii) પરથી $R_f = R$

ઉદાહરણ 9 : $f : R \to R$, $f(x) = 3x - 2$ નો આલેખ દોરો.

ઉકેલ : અહીં $f(0) = -2, f(1) = 1, f(2) = 4, f(10) = 28, f(0.5) = -0.5$. આથી $(0, -2) \in f$, $(1, 1) \in f$, $(2, 4) \in f$, $(-1, -5) \in f$...

આ બિંદુઓને જોડતાં આકૃતિ 3.4માં દર્શાવ્યા પ્રમાણેની રેખા મળે.

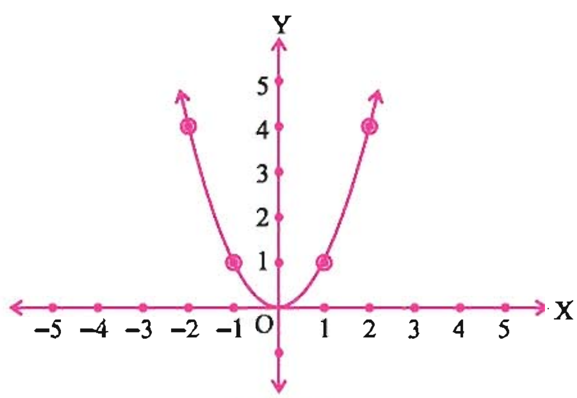
(માત્ર કેટલાંક બિંદુઓનું જ આલેખમાં નિરૂપણ કર્યું છે. પરંતુ $x \in R$ હોવાથી 'સતત' રેખા દોરી છે.)



આકૃતિ 3.4

ઉદાહરણ 10 : $f : R \to R$, $f(x) = x^2$થી વ્યાખ્યાયિત વિધેયનો આલેખ દોરો.

ઉકેલ : આ વિધેય (x, x^2) પ્રકારની જોડીઓ ધરાવે છે. એટલે કે (−1, 1), (1, 1), (−2, 4), (2, 4) વગેરે fમાં છે. આ બિંદુઓ જોડતાં આકૃતિ 3.5 પ્રમાણેનો વક્ર મળે.



આકૃતિ 3.5

સ્વાધ્યાય 3.2

1. R પર વ્યાખ્યાયિત નીચેનાં વિધેયોના વિસ્તાર મેળવો :

(1) $f : N \to N, f(x) = x + 2$ (2) $f : N \to N, f(x) = 2^x$

(3) $f : R \to R, f(x) = 5$ (4) $f : Z \to Z, f(x) = x - 1$

2. નીચેનાં વિધેયોના આલેખ દોરો :

(1) $f : R \to R, f(x) = x + 3$ (2) $f : R \to R, f(x) = 1 - x$

3. જો $f : R^+ \to R^+, f(x) = x^2 + 4\sqrt{x} + 3$ હોય, તો $f(4), f(16)$ શોધો.

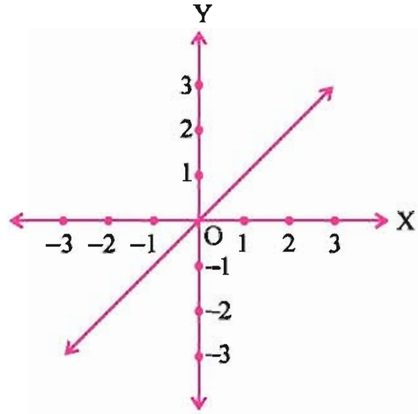
4. જો $f : R - \{0\} \to R, f(x) = \frac{1}{x} + ax$ અને $f\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{28}{5}$ હોય, તો a શોધો.

*

3.5 કેટલાંક વિશિષ્ટ વિધેયો અને તેમના આલેખ

(1) તદેવ વિધેય (Identity Function) : જો A કોઈ અરિક્ત ગણ હોય તો $f : A \to A, f(x) = x, \forall x \in A$થી વ્યાખ્યાયિત વિધેય A ઉપરનું **તદેવ વિધેય** કહેવાય. **ગણ A પરનું તદેવ વિધેય I_Aથી દર્શાવાય છે.**

આ વિધેય Aના કોઈ પણ ઘટકને તેના તે જ ઘટક સાથે સંગત કરે છે. આ વિધેયનો વિસ્તાર સમગ્ર સહપ્રદેશ છે. વાસ્તવિક સંખ્યાઓના ગણ R પરના તદેવ વિધેયનો આલેખ $y = x$ આકૃતિ 3.6 માં દર્શાવેલ રેખા થાય.



આકૃતિ 3.6

(2) અચળ વિધેય (Constant Function) : જે વિધેયનો વિસ્તાર એકાકી ગણ હોય તેને અચળ વિધેય કહેવાય છે.

વિધેય $f : A \to B$ હોય અને c એ Bનો કોઈક નિશ્ચિત ઘટક હોય તથા પ્રત્યેક $x \in A$ માટે $f(x) = c$ તો $f : A \to B$ને અચળ વિધેય કહે છે.

$f : \{2, 4, 6, 8\} \to R, f(x) = 0$ લેતાં,

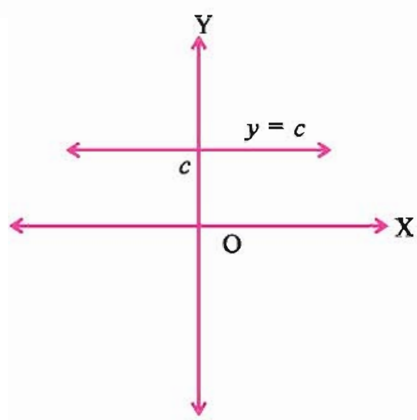
$f(2) = 0, f(4) = 0, f(6) = 0, f(8) = 0$ થાય.

આમ, f એ અચળ વિધેય છે.

ઉદાહરણ તરીકે, જો x એ કોઈ લઘુકોણનું માપ હોય, તો $x \in (0, 90)$ અને $sin^2x + cos^2x = 1$.

હવે $f : (0, 90) \to R, f(x) = sin^2x + cos^2x$ વ્યાખ્યાયિત કરીએ તો, $\forall x \in (0, 90), f(x) = 1$. આથી તે અચળ વિધેય છે.

વાસ્તવિક સંખ્યાઓના ગણ પરના અચળ વિધેયનો આલેખ $y = c$ $(c > 0)$ સમક્ષિતિજ રેખા થાય. (જુઓ આકૃતિ 3.7.)

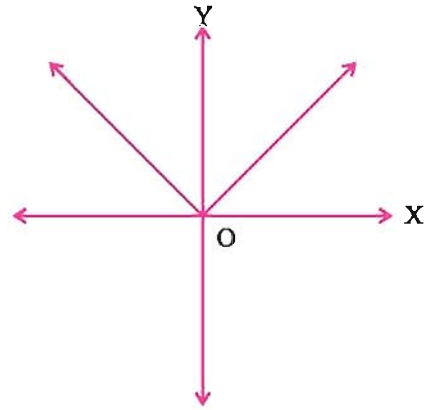


આકૃતિ 3.7

(3) માનાંક વિધેય (Modulus Function) : વાસ્તવિક સંખ્યા x નું માન નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત થાય છે :

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

$f : R \to R, f(x) = |x|$થી વ્યાખ્યાયિત થતું વિધેય માનાંક વિધેય અથવા નિરપેક્ષ મૂલ્ય વિધેય કહેવાય છે. $\forall x \in R$, $|x| \geq 0$ થતું હોવાથી આ વિધેયનો વિસ્તાર $R^+ \cup \{0\}$ થશે. આ વિધેયનો આલેખ દોરવા માટે જુઓ કે, $f(1) = 1$, $f(-1) = 1$, $f(0) = 0$ વગેરે. આમ, આ વિધેયનો આલેખ બે કિરણોનો યોગગણ થશે. આ આલેખ આકૃતિ 3.8માં દર્શાવ્યો છે.



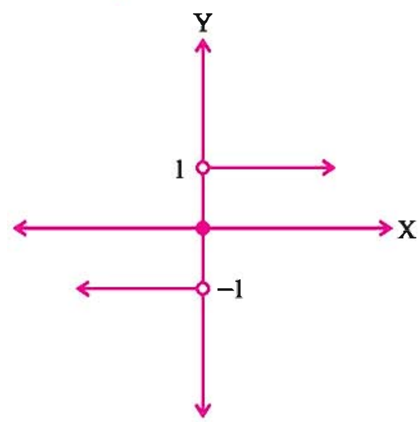
આકૃતિ 3.8

જો માનાંક વિધેય R^+ ઉપર વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે તો તે તદેવ વિધેય બને.

(4) ચિહ્ન વિધેય (Signum Function) : વિધેય $f : R \to R$, જ્યાં

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{જો } x > 0 \\ 0 & \text{જો } x = 0 \\ -1 & \text{જો } x < 0 \end{cases}$$

ને ચિહ્ન વિધેય કહેવાય છે. આ વિધેયનું મૂલ્ય ચલનું મૂલ્ય ધન અથવા ઋણ હોય તે મુજબ 1 અથવા -1 છે અને $x = 0$ માટે તેનું મૂલ્ય શૂન્ય છે. આ વિધેયનો પ્રદેશ R છે અને વિસ્તાર $\{-1, 0, 1\}$ છે. આ વિધેયનો આલેખ આકૃતિ 3.9માં દર્શાવ્યા મુજબનો થાય.



આકૃતિ 3.9

આ વિધેયની વ્યાખ્યા આ પ્રમાણે પણ આપી શકાય :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{જો } x = 0 \\ \frac{|x|}{x} & \text{જો } x \neq 0 \end{cases}$$

(5) બહુપદી વિધેય (Polynomial Function) : વિધેય $g : R \to R$ જ્યાં,

$g(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$ને n ઘાતનું બહુપદી વિધેય કહેવાય છે. અહીં n એ અનૃણ પૂર્ણાંક છે અને $a_0, a_1, a_2, .., a_n$ અચળ વાસ્તવિક સંખ્યાઓ છે. અહીં નોંધીએ કે આગળ જણાવેલ અચળ વિધેય એ બહુપદી વિધેયનો $n = 0$ માટેનો ખાસ કિસ્સો છે.

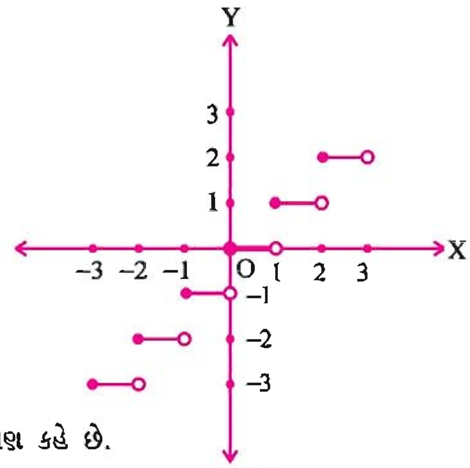
(6) સંમેય વિધેય (Rational Function) : $g(x) \neq 0$ હોય તેવા પ્રદેશમાં વ્યાખ્યાયિત બહુપદીય વિધેયો f તથા g માટે $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ ને સંમેય વિધેય કહેવાય છે.

આમ, $h : R - \{x \mid g(x) = 0\} \to R$, $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ એક સંમેય વિધેય છે. અત્રે f તથા g બહુપદીય વિધેયો છે.

(7) મહત્તમ પૂર્ણાંક વિધેય (Greatest Integer Function) : જો $[x]$ એ x થી નાના અથવા x ને સમાન તમામ પૂર્ણાંકોમાં સૌથી મોટો પૂર્ણાંક દર્શાવે તો $f: R \to R, f(x) = [x]$ ને મહત્તમ પૂર્ણાંક વિધેય કહે છે. તેનો પ્રદેશ R તથા વિસ્તાર Z છે.

$[x]$ની વ્યાખ્યા પરથી સ્પષ્ટ છે કે,

$$[x] = \begin{cases} -1 & -1 \le x < 0 \\ 0 & 0 \le x < 1 \\ 1 & 1 \le x < 2 \text{ વગેરે.} \end{cases}$$



આકૃતિ 3.10

આ વિધેયને **ફ્લોર વિધેય (Floor Function)** પણ કહે છે.

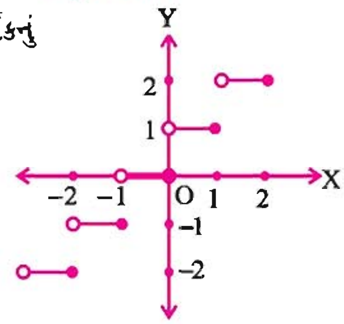
આ વિધેયનો આલેખ આકૃતિ 3.10માં દર્શાવ્યા મુજબ થશે.

આવી જ રીતે xથી નાના ન હોય તેવા પૂર્ણાંકો પૈકી ન્યૂનતમ પૂર્ણાંકનું વિધેય પણ વ્યાખ્યાયિત કરી શકાય.

(8) ન્યૂનતમ પૂર્ણાંક વિધેય (Ceiling Function) :

$g: R \to R, g(x) = \lceil x \rceil$, x કરતાં નાનો નહિ તેવો ન્યૂનતમ પૂર્ણાંક.

$$g(x) = \begin{cases} -1 & -2 < x \le -1 \\ 0 & -1 < x \le 0 \\ 1 & 0 < x \le 1 \text{ વગેરે.} \end{cases}$$



આકૃતિ 3.11

આ વિધેયને **સિલિંગ વિધેય (Ceiling Function)** કહે છે. આ વિધેયનો આલેખ આકૃતિ 3.11માં દર્શાવેલ છે.

સ્વાધ્યાય 3.3

1. નીચેનાં વિધેયોના આલેખ દોરો :

(1) $f: R \to R, f(x) = |x - 1|$ (2) $g: R \to R, g(x) = [x + 1]$

(3) $h: N \to R, h(x) = x - [x]$

(4) $g: [-3, 3] \to Z; g(x) = x$થી નાનો નહિ તેવો ન્યૂનતમ પૂર્ણાંક.

2. નીચેનાં વિધેયોના વિસ્તાર મેળવો :

(1) $f: N \to R$ $f(x) = \frac{1}{x}$

(2) $h: N \to R$ $h(x) = x - [x]$

*

3.6 વાસ્તવિક વિધેયો પરની બૈજિક ક્રિયાઓ

આપણે વાસ્તવિક વિધેયોનાં સરવાળા, બાદબાકી, ગુણાકાર તેમજ ભાગાકારનો અભ્યાસ કરીશું.

$f: A \to R$ અને $g: B \to R$ વિધેયો છે તથા $A \cap B \ne \emptyset$

(1) બે વિધેયોનો સરવાળો : $f: A \to R$, $g: B \to R$ બે વાસ્તવિક વિધેયો છે. તેમનો સરવાળો $(f+g): (A \cap B) \to R$; $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, $\forall x \in A \cap B$ થી વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે છે.

(2) બે વિધેયોની બાદબાકી : બે વાસ્તવિક વિધેયો, $f: A \to R$ અને $g: B \to R$ માટે તેમની બાદબાકી $(f-g): (A \cap B) \to R$; $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$, $\forall x \in A \cap B$ થી વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે છે.

(3) વાસ્તવિક સંખ્યાથી ગુણાકાર : ધારો કે $X \subset R$ અને $f: X \to R$ એ વાસ્તવિક વિધેય છે અને α એ કોઈ વાસ્તવિક સંખ્યા છે. વાસ્તવિક સંખ્યા α અને વિધેય fનો ગુણાકાર $(\alpha f): X \to R$, $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$, $\forall x \in X$થી વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે છે. અહીં વાસ્તવિક સંખ્યા αને અદિશ કહે છે. આથી આ ગુણાકારને અદિશ વડે વિધેયનો ગુણાકાર કહેવાય છે.

(4) બે વાસ્તવિક વિધેયોનો ગુણાકાર : બે વાસ્તવિક વિધેયો $f: A \to R$ અને $g: B \to R$નો ગુણાકાર $(A \cap B)$ ઉપર વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે છે. આમ $(fg): (A \cap B) \to R$ અને $\forall x \in A \cap B$, $(fg)(x) = f(x)\, g(x)$.

(5) બે વાસ્તવિક વિધેયોનો ભાગાકાર : બે વાસ્તવિક વિધેયો $f: A \to R$ અને $g: B \to R$નો ભાગાકાર $\left(\frac{f}{g}\right)$ એ $(A \cap B) - \{x \mid g(x) = 0\} \neq \emptyset$ ઉપર વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે છે.

આમ, $\left(\frac{f}{g}\right): A \cap B - \{x \mid g(x) = 0\} \to R$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

> **નોંધ** વાસ્તવિક સંખ્યાથી વિધેયનો ગુણાકાર અને બે વાસ્તવિક વિધેયોનો ગુણાકાર તે વચ્ચે શું સંબંધ છે ?

ઉદાહરણ 11 : $f: R \to R$ અને $g: R \to R$, $f(x) = x^2$, $g(x) = 4x - 1$ હોય, તો $f+g$, $f-g$, fg અને $\frac{f}{g}$ શોધો.

ઉકેલ : $f+g: R \to R$; $(f+g)(x) = x^2 + 4x - 1$,

$f-g: R \to R$; $(f-g)(x) = x^2 - 4x + 1$

$fg: R \to R$; $(fg)(x) = x^2(4x-1) = 4x^3 - x^2$

$\left(\frac{f}{g}\right)$ શોધવા માટે $g(x) \neq 0$ થવું જોઈએ. અહીં $g(x) = 4x - 1$ હોવાથી તે ફક્ત $x = \frac{1}{4}$ માટે શૂન્ય થાય. આમ, $\left(\frac{f}{g}\right)$નો પ્રદેશ $R - \left\{\frac{1}{4}\right\}$ થશે. આથી, $\frac{f}{g}: R - \left\{\frac{1}{4}\right\} \to R$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2}{4x-1}$.

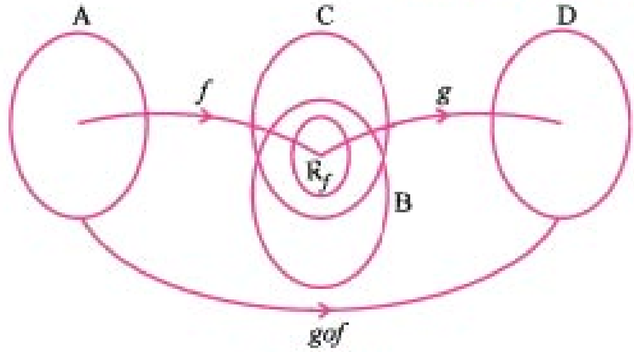
3.7 વિધેયોનું સંયોજન (સંયોજિત વિધેય)

હવે આપણે વિધેયોના સંયોજનનો અભ્યાસ કરીશું. $f: A \to B$ કોઈ વિધેય હોય તો $\forall x \in A$ને સંગત ગણ Bમાં અનન્ય ઘટક મળે. હવે $g: B \to C$ વિધેય હોય તો Bના પ્રત્યેક ઘટકને સંગત ગણ Cમાં અનન્ય ઘટક મળે. વિધેયો f અને gના સંયોજનનો વિચાર કરતાં Aના પ્રત્યેક ઘટકને સંગત ગણ C માં અનન્ય ઘટક મેળવી શકાય. હવે આપણે બે વિધેયના સંયોજનની વ્યાખ્યા આપીશું.

સંયોજિત વિધેય (Composition Function) : ધારો કે $f: A \to B$ અને $g: C \to D$ બે વિધેયો છે. જો $R_f \subset C$ હોય તો વિધેયો f અને gનું સંયોજિત વિધેય $h: A \to D$, $h(x) = g(f(x))$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે છે. આવા વિધેય hને gofથી દર્શાવાય છે.

સંયોજિત વિધેય આવી રીતે લખી શકાય, $(gof) : A \to D$ અને $(gof)(x) = g(f(x))$.

સંયોજિત વિધેયની સચિત્ર રજૂઆત આકૃતિ 3.12 માં દર્શાવ્યા મુજબ થાય.



આકૃતિ 3.12

વિધેય f અને gનું સંયોજિત વિધેય (gof) વ્યાખ્યાયિત થાય તે માટે $R_f \subset D_g$ હોવું જરૂરી છે. આમ, g તથા f નું સંયોજિત વિધેય fog વ્યાખ્યાયિત થાય તે માટે $R_g \subset D_f$ હોવું જરૂરી છે. જો $f : A \to B$, $g : B \to C$ હોય, તો તે વિશિષ્ટ સંયોજન છે. અત્રે $R_f \subset B = D_g$. આથી $R_f \subset D_g$ છે જ. આથી gof હંમેશાં શક્ય બને. જો $f : A \to B$, $g : B \to A$ હોય, તો gof અને fog બંને શક્ય છે.

ઉદાહરણ 12 : $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $C = \{3, 7, 11, 15, 19, 23\}$. $f : A \to B$, $f(x) = 2x - 1$ તથા $g : B \to C$, $g(x) = 2x + 1$ હોય, તો fog અથવા gof પૈકી જે શક્ય હોય તે શોધો.

ઉકેલ : અહીં $R_f \subset B = D_g$. આથી gof શક્ય છે.

હવે, $(gof)(x) = g(f(x)) = g(2x - 1) = 2(2x - 1) + 1 = 4x - 2 + 1 = 4x - 1$

$\therefore \quad (gof)(1) = 3, (gof)(2) = 7, (gof)(3) = 11, (gof)(4) = 15, (gof)(5) = 19$

આમ, $gof : A \to C$, $gof = \{(1, 3), (2, 7), (3, 11), (4, 15), (5, 19)\}$.

હવે, $g : B \to C$, $g = \{(1, 3), (3, 7), (5, 11), (7, 15), (9, 19)\}$

$\therefore \quad R_g = \{3, 7, 11, 15, 19\} \not\subset A = D_f$

$\therefore \quad fog$ મળે નહિ.

> **નોંધ** અહીં, gof મળે છે, પરંતુ fog મળતું નથી.

ઉદાહરણ 13 : $f : N \to N$, $f(x) = x^2$, $g : N \to N$, $g(x) = x^3$. fog અને gof શોધો.

ઉકેલ : $fog : N \to N$; $(fog)(x) = f(g(x)) = f(x^3) = (x^3)^2 = x^6$

$gof : N \to N$; $(gof)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = (x^2)^3 = x^6$

> **નોંધ** અહીં, $fog = gof$.

ઉદાહરણ 14 : $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 4, 9, 16, 25\}$, $f : A \to B$, $f(x) = x^2$, $g : B \to A$, $g(x) = \sqrt{x}$. fog અને gof શોધો.

ઉકેલ : $fog : B \to B$; $(fog)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x$

$gof : A \to A$; $(gof)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = \sqrt{x^2} = |x| = x$ કારણ કે $x \in A$

> **નોંધ** અહીં, $gof = I_A$ અને $fog = I_B$

ઉદાહરણ 15 : $f : R \rightarrow R$, $f(x) = 3x + 2$, $g : R \rightarrow R$, $g(x) = 2x + 3$. fog અને gof શોધો. શું $fog = gof$ છે ?

ઉકેલ : $R_f \subset R = D_g$ અને $R_g \subset R = D_f$

$\therefore$ $fog : R \rightarrow R$ અને $gof : R \rightarrow R$ અસ્તિત્વ ધરાવે છે.

$(fog)(x) = f(g(x)) = f(2x + 3) = 3(2x + 3) + 2 = 6x + 11$

$(gof)(x) = g(f(x)) = g(3x + 2) = 2(3x + 2) + 3 = 6x + 7$

$\therefore$ gof અને fogને સમાન પ્રદેશ અને સહપ્રદેશ પર વ્યાખ્યાયિત છે, પરંતુ $gof \neq fog$.

પ્રમેય 3.1 : જો $f : A \rightarrow B$ વિધેય હોય, તો $foI_A = f$ અને $I_Bof = f$.

સાબિતી : અહીં $I_A : A \rightarrow A$ અને $f : A \rightarrow B$ વિધેયો છે. આથી foI_A વ્યાખ્યાયિત છે તેમજ $(foI_A) : A \rightarrow B$ એક વિધેય છે.

હવે $\forall x \in A$, $(foI_A)(x) = f\,(I_A(x) = f(x)$ **(I_A તદેવ વિધેય છે.)**

$foI_A : A \rightarrow B$ અને $f : A \rightarrow B$ અને $(foI_A)(x) = f(x)\ \forall x \in A$

આમ, $foI_A = f$ મળે છે.

વળી, $f : A \rightarrow B$ અને $I_B : B \rightarrow B$ વિધેય હોવાથી I_Bof વ્યાખ્યાયિત છે તથા $f : A \rightarrow B$ અને $I_Bof : A \rightarrow B$ વિધેયો છે.

$(I_Bof)(x) = I_B\,(f(x)) = f(x),\ \forall x \in B$

$\therefore$ $I_Bof = f$

પ્રમેય 3.2 : જો $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$ અને $h : C \rightarrow D$ વિધેયો હોય તો $(hog)of = ho(gof)$.

સાબિતી : જુઓ કે $hog : B \rightarrow D$ વિધેય છે. આથી $(hog)of : A \rightarrow D$ વિધેય છે. $gof : A \rightarrow C$ વિધેય છે. આથી $ho(gof) : A \rightarrow D$ વિધેય છે. બીજા શબ્દોમાં $(hog)of$ અને $ho(gof)$ સમાન પ્રદેશ અને સહપ્રદેશ પરનાં વિધેયો છે.

હવે $\forall x \in A$,
$$((hog)of)(x) = (hog)\,(f(x)) = h\,(g\,(f(x))) = h\,((gof)(x)) = (ho(gof))\,(x)$$

$\therefore$ $(hog)of = ho(gof)$

સ્વાધ્યાય 3

1. $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5, 6\}$; $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow A$ આપેલાં વિધેય છે. $f = \{(1, 5), (2, 6), (3, 4)\}$, $g = \{(5, 1), (6, 2), (4, 3)\}$. fog અને gof શોધો. (જો અસ્તિત્વ ધરાવે તો.)
2. f અને g એ Rથી R નીચે મુજબ પર વ્યાખ્યાયિત છે. fog, gof, fof, gog શોધો.
   (1) $f(x) = x + 1$ $\quad$ $g(x) = 2x$
   (2) $f(x) = x^2 + 2$ $\quad$ $g(x) = 3x$

(3) $f(x) = x^2 + 3x + 1$ $g(x) = 2x - 3$

(4) $f(x) = x + 1$ $g(x) = x - 1$

(5) $f(x) = 2x^2 + 1$ $g(x) = 3x$

3. સંબંધ $S = \{(x, y) \mid x, y \in N, x + y = 5\}$ માટે પ્રદેશ અને વિસ્તાર શોધો.

4. સંબંધ $S = \{(x, x^2) \mid x \in N, x < 5\}$ને યાદીની રીતે દર્શાવો.

5. નીચેના સંબંધોને આલેખની રીતે દર્શાવો :

(1) $S = \{(x, y) \mid x, y \in N, x < 10, y < 10, \frac{x}{y}$ એ પૂર્ણાંક છે.$\}$

(2) $S = \{(x, y) \mid x \in N, y \in N, -3 < x < 2, y < 8, x + y = 8\}$

6. નીચેના R પર વ્યાખ્યાયિત વિધેયોનાં વિસ્તાર શોધો :

(1) $f(x) = 2x$ (2) $f(x) = 2x^2$ (3) $f(x) = x - 2$

(4) $f(x) = 1000$ (5) $f(x) = |x|$

7. નીચેનાં વિધેયોના આલેખ દોરો :

(1) $f: R \rightarrow R, f(x) = 1 + |x|$

(2) $f: R \rightarrow R, f(x) = x + 10$

(3) $f: N \rightarrow N, f(x) = x + 10$

8. જો $f: R^+ \rightarrow R, f(x) = x - \sqrt{x}$, તો $f(9)$ અને $f(2)$ શોધો.

9. નીચેનાં વિધેયો $f: R \rightarrow R, g: R \rightarrow R$ માટે *fog, gof, fof, gog* શોધો.

(1) $f(x) = x^2$ $g(x) = x - 1$

(2) $f(x) = x - 5$ $g(x) = 5x$

(3) $f(x) = x^2 - 3$ $g(x) = x^2 + 3$

10. $f: R^+ \rightarrow R^+, f(x) = x^2, g: R^+ \rightarrow R^+, g(x) = \sqrt{x}$ તો *fog, gof, fof, gog* શોધો.

11. (1) $f: R \rightarrow R, f(x) = |x|$. સાબિત કરો કે $fof = f$.

(2) $f: R - \{-1\} \rightarrow R - \{-1\}, f(x) = \frac{1-x}{1+x}$. સાબિત કરો કે $fof = I_{R - \{-1\}}$.

12. નીચે આપેલું દરેક વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલાં વિકલ્પો (a), (b), (c) અથવા (d)માંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરીને ☐ માં લખો :

(1) સંબંધ $S : A \rightarrow B$નો પ્રદેશ ...... છે. ☐

(a) Bનો ઉપગણ (b) Aનો ઉપગણ (c) સાર્વત્રિક ગણ (d) ખાલી ગણ

(2) સંબંધ $S : A \rightarrow B$નો વિસ્તાર ...... છે. ☐

(a) હંમેશાં ખાલી (b) Bનો ઉપગણ (c) Aનો ઉપગણ (d) $A \times B$

(3) સંબંધ $S : A \rightarrow B, S = A \times B$ તો S એ... ☐

(a) વ્યાખ્યાયિત નથી. (b) એકાકી ગણ (c) સાર્વત્રિક સંબંધ (d) ખાલી સંબંધ

(4) જો $f: R \rightarrow R, f(x) = x - 2, g: R \rightarrow R, g(x) = x + 2; (f + g)(x) =$ ...... ☐

(a) x (b) $x^2 - 4$ (c) $2x$ (d) 4

(5) જો $f : R - \{0\} \to R$, $g : R - \{0\} \to R$, $f(x) = x$, $g(x) = \frac{1}{x}$;
$fg : R - \{0\} \to R$, $(fg)(x) =$ ...... ☐

(a) x^2 (b) 1 (c) $\frac{1}{x^2}$ (d) x

(6) જો $f : Z \to Z$, $f(x) = x - 3$, $g : Z \to Z$ $g(x) = x + 3$, તો $fog : Z \to Z$, $(fog)(x) =$ ...... ☐

(a) $|x|$ (b) x (c) $x^2 - 9$ (d) $\frac{x+3}{x-3}$

(7) જો $f : R \to R$, $f(x) = x^2 - 9$, $f(3) =$ ...... ☐

(a) -6 (b) 9 (c) 0 (d) 3

(8) જો $f : R \to R$, $f(x) = x + 2$, $g : R \to R$, $g(x) = x - 2$ તો $fog : R \to R$, $fog =$ ...... ☐

(a) તદેવ વિધેય છે. (b) અચળ વિધેય છે.
(c) વ્યાખ્યાયિત નથી. (d) માનાંક વિધેય છે.

(9) $I_R : R \to R$ એ તદેવ વિધેય હોય, તો તેનો આલેખ ...... છે. ☐

(a) રેખા (b) નિશ્ચિત બિંદુ છે. (c) વર્તુળ છે. (d) અંતરાલ છે.

(10) $f : R \to R$, $f(x) = x^2$ નો વિસ્તાર ...... છે. ☐

(a) R (b) Z (c) $R^+ \cup \{0\}$ (d) $R - \{0\}$

(11) જો $f : \{x \mid |x| \leq 1, x \in R\} \to R$, $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ અને
$g : \{x \mid |x| \geq 1, x \in R\} \to R$, $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$, તો... ☐

(a) $f + g$ એ I_R છે. (b) $f + g : R \to R$, $(f + g)(x) = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{x^2-1}$
(c) $f + g$ અસ્તિત્વ ધરાવતું નથી. (d) $f + g : \{1, -1\} \to R$, $(f + g)(x) = 0$

સારાંશ

1. સંબંધ, તેનો પ્રદેશ અને વિસ્તાર
2. ખાલી સંબંધ, સાર્વત્રિક સંબંધ, વેન આકૃતિ અને સારણી
3. વિધેય, પ્રદેશ, વિસ્તાર
4. વિશિષ્ટ વિધેયોના અને અન્ય વિધેયના આલેખ
5. વિધેયો પર બૈજિક ક્રિયાઓ
6. સંયોજિત વિધેય

પ્રકરણ 4

ત્રિકોણમિતીય વિધેયો

4.1 પ્રાસ્તાવિક

ત્રિકોણમિતિના અભ્યાસની શરૂઆત સૌપ્રથમ ભારતમાં થઈ. આર્યભટ્ટ (476 AD), બ્રહ્મગુપ્ત (598 AD), ભાસ્કર I (600 AD) અને ભાસ્કર II (1114 AD) વગેરે પ્રાચીન ભારતીય ગણિતશાસ્ત્રીઓએ મહત્ત્વનાં પરિણામો મેળવ્યાં. આ બધા જ જ્ઞાનનો ફેલાવો ભારતમાંથી સર્વપ્રથમ મધ્ય પૂર્વના વિસ્તારોમાં અને ત્યાંથી યુરોપમાં થયો. ગ્રીક ગણિતશાસ્ત્રીઓએ પણ ત્રિકોણમિતિના અભ્યાસની શરૂઆત કરી હતી, પણ તેમનો અભિગમ એટલો ગૂંચવાડા ભરેલો હતો કે ત્રિકોણમિતિમાં ભારતીય અભિગમ પ્રાપ્ય બનતાં જ દુનિયામાં તે સર્વત્ર તરત જ સ્વીકારાયો.

ગણિતના ઇતિહાસમાં '*Siddhantas*' (ખગોળશાસ્ત્રનું સંસ્કૃતમાં થયેલું કાર્ય) ભારતીય પ્રદાન છે. તેમાં આધુનિક ત્રિકોણમિતિનાં વિધેયો જેવા કે આપેલ ખૂણાનો *sine* અને *sine* વિધેયનાં પરિચયની પૂર્વગામી રજૂઆત છે.

ભાસ્કર I (લગભગ 600 AD)એ 90^oથી વધુ મૂલ્યના ખૂણા માટે *sine* વિધેયનાં મૂલ્યોનાં સૂત્રો આપ્યાં. સોળમી સદીના મલયાલમ સાહિત્ય '*Yuktibhasa*'માં $sin(A + B)$ના વિસ્તરણનું સૂત્ર છે. 18^o, 36^o, 54^o, 72^o વગેરેનાં *sine* તથા *cosine* ના ચોક્કસ મૂલ્યો ભાસ્કર IIએ આપ્યાં.

થેલ્સ (લગભગ 600 AD)નું નામ અંતર અને ઊંચાઈના કોયડાઓ સાથે સતત રીતે જોડાયેલ છે. જાણીતી ઊંચાઈના સ્તંભ અને પડછાયાની મદદથી ઇજિપ્તના પિરામીડની ઊંચાઈ માપવાનો યશ તેમને ફાળે જાય છે. તેના માટે તેમણે નીચેના ગુણોત્તરની સરખામણી કરી.

$\frac{H}{S} = \frac{h}{s} = tan$ (સૂર્યનો ઉત્સેધકોણ)

થેલ્સે સમરૂપ ત્રિકોણોનો ઉપયોગ કરીને સમુદ્રમાં રહેલા વહાણના અંતરની પણ ગણતરી કરી હતી તેમ પણ કહેવાય છે. અંતર અને ઊંચાઈને લગતા કોયડામાં સમરૂપતાનો ઉપયોગ પ્રાચીન ભારતીય કાર્યમાં પણ જોવા મળે છે.

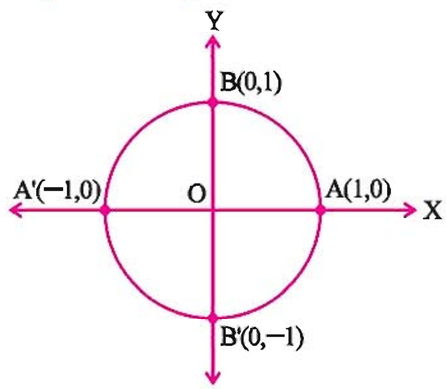
ત્રિકોણમિતિ અવકાશશાસ્ત્ર, ભૌતિકશાસ્ત્ર, ઇજનેરીવિદ્યા તથા ગણિતશાસ્ત્રની ઘણી શાખામાં બહોળો ઉપયોગ ધરાવે છે. ત્રિકોણમિતિ 'Trigonometry' બે ગ્રીક શબ્દો 'trigono' અને 'metron'નો બનેલો છે. 'trigono'નો અર્થ ત્રિકોણ થાય છે અને 'metron' શબ્દનો અર્થ માપન એવો થાય છે. આમ, 'Trigonometry' શબ્દનો અર્થ 'ત્રિકોણનું માપન – ત્રિકોણમિતિ' થાય. વર્તમાન સમયમાં

ત્રિકોણમિતિનો વ્યાપ ત્રિકોણથી પણ આગળ ગયો છે. ત્રિકોણમિતિય વિધેયોનો સમૂહ આવર્તી વિધેયોના અભ્યાસના પાયામાં છે અને તેનો ઉપયોગ યાંત્રિકી ધ્રુજારી તરંગોની ગતિ (Mechanical waves) વગેરેના અભ્યાસમાં થાય છે. ધોરણ 10માં આપણે ત્રિકોણમિતિનો પ્રારંભિક પરિચય મેળવ્યો. ત્યાં આપણે લઘુકોણના ત્રિકોણમિતિય ગુણોત્તરો જેવા કે *sin*, *cos*, *tan* વગેરેનો અભ્યાસ કર્યો હતો અને તે અભ્યાસ ફક્ત કાટકોણ ત્રિકોણના સંદર્ભમાં સીમિત હતો. હવે આપણે ત્રિકોણમિતિય વિધેયોનો વ્યાપક સંદર્ભમાં અભ્યાસ કરીશું.

4.2 ત્રિકોણમિતિય બિંદુ

યામ-સમતલમાં ઊગમબિંદુ કેન્દ્ર તથા એકમ ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળને એકમ વર્તુળ (Unit Circle) કહે છે.

એકમ વર્તુળ X-અક્ષને A અને A' બિંદુઓમાં છેદે છે તથા Y-અક્ષને B અને B'માં છેદે છે. વર્તુળની ત્રિજ્યા 1 એકમ હોવાથી A(1, 0) અને A'(−1, 0) અને B(0, 1) અને B'(0, −1) છે.



આકૃતિ 4.1

જો θ એ કોઈ વાસ્તવિક સંખ્યા હોય, તો આ વાસ્તવિક સંખ્યા θ ને સંગત એકમ વર્તુળ પર અનન્ય બિંદુ નીચે પ્રમાણે મળે :

જો $\theta = 0$ હોય, તો તેને સંગત બિંદુ A(1, 0) લઈએ. જો $0 < \theta < 2\pi$ હોય, તો એકમ વર્તુળ પર એક અનન્ય બિંદુ P એવું મળે કે જેથી $l(\overset{\frown}{AP}) = \theta$. આપણે ચાપ A થી Pઘડિયાળના કાંટાથી ઉલ્ટી દિશામાં માપીએ છીએ. ચાપનું સાતત્ય હોઈ અને વર્તુળનો પરિઘ 2π હોવાથી પ્રત્યેક $\theta \in (0, 2\pi)$ માટે θ લંબાઈનું કોઈક ચાપ મળે, જેથી $l(\overset{\frown}{AP}) = \theta$. આ રીતે મેળવેલા બિંદુ P ને ત્રિકોણમિતિય બિંદુ (Trigonometric Point) કહે છે. આ બિંદુ $\theta \in [0, 2\pi)$ને સંગત બિંદુ છે અને તેને $P(\theta)$ વડે દર્શાવાય છે.

હવે પ્રત્યેક $\theta \in R$ માટે, ધારો કે, $\left[\frac{\theta}{2\pi}\right] = n$. હવે n એ પૂર્ણાંક છે અને $n \le \frac{\theta}{2\pi} < n + 1$

$\therefore \quad 2n\pi \le \theta < 2n\pi + 2\pi$

$\therefore \quad 0 \le (\theta - 2n\pi) < 2\pi$

ધારો કે $\theta - 2n\pi = \alpha$. તેથી $0 \le \alpha < 2\pi$.

હવે ઉપર ચર્ચા કર્યા મુજબ એકમ વર્તુળ પર α ને સંગત અનન્ય બિંદુ $P(\alpha)$ મળે અને $\alpha \in [0, 2\pi)$. આપણે $P(\theta) = P(\alpha)$ વ્યાખ્યાયિત કરીશું. આમ, કોઈ પણ $\theta \in R$ ને સંગત એકમ વર્તુળ પર અનન્ય બિંદુ $P(\theta)$ મળે. $P(\theta)$ને ત્રિકોણમિતિય બિંદુ અથવા ત્રિબિંદુ કહે છે.

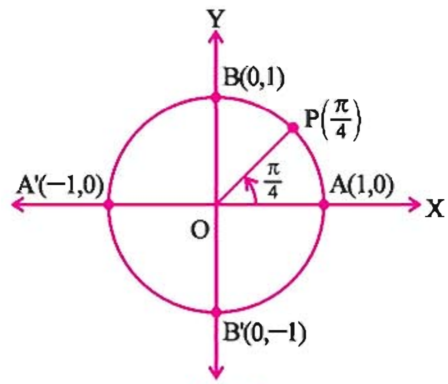
અહીં નોંધીએ કે, પ્રત્યેક વાસ્તવિક સંખ્યા θ માટે એક અનન્ય વાસ્તવિક સંખ્યા α એવી મળે કે જેથી કોઈક પૂર્ણાંક n માટે $\theta = 2n\pi + \alpha$ અને $0 \le \alpha < 2\pi$. દેખીતું છે કે જો $\theta \in [0, 2\pi)$ તો $n = 0$ અને $\theta = \alpha$. હવે આપણે થોડાં ત્રિકોણમિતિય બિંદુઓ મેળવીશું.

(1) $P\left(\frac{\pi}{4}\right)$

અહીં $\theta = \frac{\pi}{4}$ અને $0 < \frac{\pi}{4} < 2\pi$

વર્તુળનો પરિઘ 2π હોવાથી લંબાઈ $\widehat{AA'} = \frac{2\pi}{2} = \pi$ અને લંબાઈ $\widehat{AB} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$. આથી ચાપ $\widehat{AB}$નું મધ્યબિંદુ P એવું છે કે જેથી $l(\widehat{AP}) = \frac{\pi}{4}$.

આ બિંદુ P એ ત્રિબિંદુ $P\left(\frac{\pi}{4}\right)$ છે.



આકૃતિ 4.2

(2) $P\left(\frac{31\pi}{3}\right)$

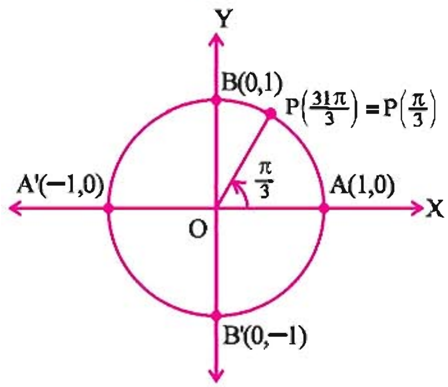
અહીં $\theta = \frac{31\pi}{3}$ અને $\theta \notin [0, 2\pi)$

વળી, $n = \left[\frac{\theta}{2\pi}\right] = \left[\frac{31\pi}{3} \times \frac{1}{2\pi}\right] = \left[\frac{31}{6}\right] = 5$

$\therefore \quad \alpha = \theta - 2n\pi = \frac{31\pi}{3} - 10\pi = \frac{\pi}{3}$

વળી, $P(\theta) = P(\alpha)$,

$\therefore \quad P\left(\frac{31\pi}{3}\right) = P\left(\frac{\pi}{3}\right)$.



આકૃતિ 4.3

(3) $P\left(\frac{-101\pi}{6}\right)$

અહીં $\theta = -\frac{101\pi}{6}$, $\theta \notin [0, 2\pi)$

$\therefore \quad n = \left[-\frac{101\pi}{6} \times \frac{1}{2\pi}\right] = \left[\frac{-101}{12}\right] = -9$

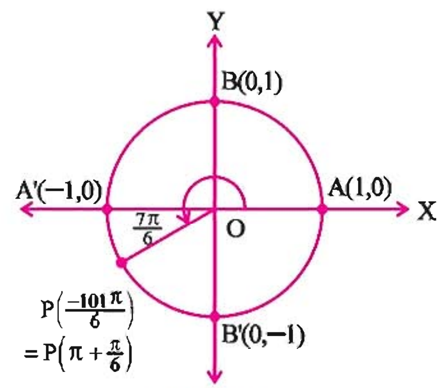
$\therefore \quad \alpha = \theta - 2n\pi = -\frac{101\pi}{6} + 18\pi$

$= \frac{7\pi}{6} = \pi + \frac{\pi}{6}$

આમ, $P(\theta) = P(\alpha)$

$\therefore \quad P\left(\frac{-101\pi}{6}\right) = P\left(\frac{7\pi}{6}\right)$

$\therefore \quad P\left(\frac{7\pi}{6}\right)$ એ ત્રીજા ચરણમાં છે.



આકૃતિ 4.4

4.3 ત્રિકોણમિતિય બિંદુ વિધેય અને આવર્તમાન

આપણે જોયું કે પ્રત્યેક $\theta \in R$ માટે એકમ વર્તુળ પર અનન્ય બિંદુ $P(\theta)$ મળે છે. આ હકીકતને આપણે વિધેય તરીકે નિહાળીએ.

જો એકમ વર્તુળને C દ્વારા દર્શાવીએ તો $f : R \rightarrow C$, $f(\theta) = P(\theta) = P(x, y)$ ને ત્રિકોણમિતિય બિંદુ વિધેય અથવા ત્રિબિંદુ વિધેય કહે છે.

જો વિધેય માટે પ્રદેશના કોઈ પણ બે ભિન્ન ઘટક સાથે સહપ્રદેશના ભિન્ન ઘટક સંગત થાય તો તેવા વિધેયને એક-એક વિધેય કહે છે. એક-એક ના હોય તેવું વિધેય અનેક-એક વિધેય છે.

વ્યાખ્યા : ધારો કે $f : A \to B$ એ વાસ્તવિક ચલનું વિધેય છે. $A \subset R$ તથા f અચળ વિધેય નથી. ધારો કે $p' \in R, p' \neq 0$ એવી સંખ્યા મળે છે કે જેથી, જો $x \in A$ હોય, તો $x + p' \in A$, $\forall x \in A$ અને $f(x) = f(x + p')$, $\forall x \in A$ થાય, તો f ને આવર્તી વિધેય (Periodic Function) કહેવાય છે અને p'ને fનું આવર્તમાન કહે છે. જો p એ ન્યૂનતમ ધન સંખ્યા એવી હોય કે જે ઉપર્યુક્ત ગુણધર્મ ધરાવતી હોય એટલે કે, જો $x \in A$ તો $x + p \in A$ અને $f(x) = f(x + p)$, $\forall x \in A$, તો pને fનું મુખ્ય આવર્તમાન (Principal Period) કહે છે.

આવર્તમાન (Period) : કોઈક પૂર્ણાંક k માટે $\theta_2 - \theta_1 = 2k\pi$, $k \in Z$ તેવી વાસ્તવિક સંખ્યા θ_1, θ_2 છે.

જો $\theta_1 = 2m\pi + \alpha$, $0 \leq \alpha < 2\pi$, $m \in Z$ હોય તો $P(\theta_1) = P(\alpha)$

હવે, $\theta_2 = \theta_1 + 2k\pi = 2m\pi + \alpha + 2k\pi$

$\therefore \quad \theta_2 = 2(m + k)\pi + \alpha, \quad m + k \in Z, 0 \leq \alpha < 2\pi$

ધારો કે $m + k = n$, $n \in Z$

$\therefore \quad \theta_2 = 2n\pi + \alpha$

$\therefore \quad P(\theta_2) = P(\alpha)$

આમ, $P(\theta_1) = P(\theta_2) = P(\theta_1 + 2k\pi)$

$\therefore \quad f(\theta_1) = f(\theta_2) = f(\theta_1 + 2k\pi), k \in Z$

આનાથી ફલિત થાય છે કે fની કિંમતો 2π ના અંતરાલ પર પુનરાવર્તન પામે છે. આમ, આ વિધેયના આવર્તમાન $...-6\pi, -4\pi, -2\pi, 2\pi, 4\pi,...$ છે.

જો વિધેય fનું મુખ્ય આવર્તમાન p હોય, તો $f(\theta) = f(\theta + p)$, $\forall\theta \in R$. જો $0 < q < p$, હોય, તો કોઈક $\theta \in R$ માટે $f(\theta) \neq f(\theta + q)$.

હવે આપણે ત્રિ-બિંદુવિધેયનું મુખ્ય આવર્તમાન 2π છે તેમ સાબિત કરીએ. ઉપર જણાવ્યા મુજબ fનું આવર્તમાન 2π છે તથા $2\pi > 0$. ધારો કે મુખ્ય આવર્તમાન q છે. જો $0 < q < 2\pi$ હોય તો દરેક $\theta \in R$ માટે $f(\theta) = f(\theta + q)$ થાય. જો $\theta = 0$ હોય, તો $f(0) = f(0 + q)$ જે શક્ય નથી, કારણ કે $f(0)$ બિંદુ $A(1, 0)$ છે. જ્યારે $f(q)$ એ એવું બિંદુ Q છે કે જેથી $\widehat{AQ}$ની લંબાઈ q થાય. $0 < q < 2\pi$ હોવાથી બિંદુ Q એ બિંદુ Aથી ભિન્ન બિંદુ થાય. કારણ કે વર્તુળની લંબાઈ 2π છે. આમ $f(0) \neq f(0 + q)$. માટે q એ fનું આવર્તમાન નથી. માટે $0 < q < 2\pi$ તો q એ મુખ્ય આવર્તમાન નથી.

આમ fનું આવર્તમાન 2π છે. 2πથી નાની કોઈ પણ ધન સંખ્યા fનું આવર્તમાન નથી માટે **ત્રિ-બિંદુ વિધેયનું મુખ્ય આવર્તમાન 2π છે.**

4.4 *sine* અને *cosine* વિધેયોની વ્યાખ્યા

આપણે જોયું કે ત્રિબિંદુ વિધેય f પ્રત્યેક વાસ્તવિક સંખ્યા θને સંગત એકમ વર્તુળ પર એક અનન્ય બિંદુ $P(\theta)$ આપે છે. હવે આપણે એકમ વર્તુળ C થી R નાં બે વિધેયો f અને g વ્યાખ્યાયિત કરીશું.

$g : C \to R, g(P(x, y)) = x$ વ્યાખ્યાયિત કરીએ. આ વિધેય g એકમ વર્તુળ પરના પ્રત્યેક બિંદુને તેના અનન્ય x-યામ સાથે સંગત કરે છે. આકૃતિ 4.5 પરથી આ વિધેય સમજી શકાય.

$f : R \to C, f(\theta) = P(\theta) = P(x, y)$ તથા $g : C \to R, g(P(x, y)) = x$ ના સંયોજિત વિધેય $gof : R \to R$ ને *cosine* વિધેય કહે છે.

આ સંયોજિત વિધેય gof ને *cosine* વિધેય કહે છે અને ટૂંકમાં *cos* તરીકે લખાય છે.

$(gof)(\theta) = g(f(\theta)) = g(P(\theta)) = g(P(x, y)) = x$

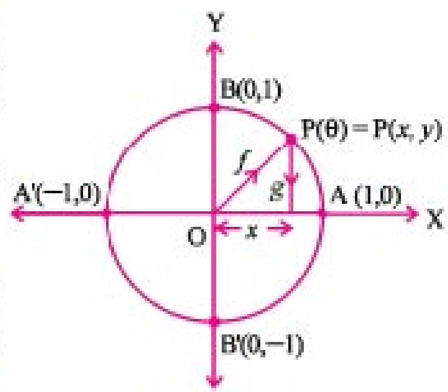
આમ $cos : R \to R, cos\theta = (gof)(\theta) = x$

હવે, ત્રિબિંદુ વિધેય અનેક-એક હોવાથી *cosine* વિધેય પણ અનેક-એક વિધેય છે. દાખલા તરીકે $cos0$ એ બિંદુ A(1, 0)નો x-યામ એટલે કે 1 થાય.

$2\pi = 2\pi \cdot 1 + 0$. આમ, $\theta = 2\pi$ માટે $\alpha = 0$

$\therefore \quad P(2\pi) = P(0) = A(1, 0)$

$\therefore \quad cos2\pi = 1 = cos0$



આકૃતિ 4.5

$h : C \to R, h(P(x, y)) = y$ એ એકમ વર્તુળ પરના પ્રત્યેક બિંદુ $P(x, y)$ ને સંગત તેનો અનન્ય y-યામ આપે છે.

હવે $f : R \to C, f(\theta) = P(\theta) = P(x, y)$ તથા $h : C \to R, h(P(x, y)) = y$ ના સંયોજિત વિધેય $hof : R \to R$ ને *sine* વિધેય કહે છે તથા તેને ટૂંકમાં *sin* તરીકે લખાય છે.

$(hof)(\theta) = h(f(\theta)) = h(P(\theta)) = h(P(x, y)) = y$

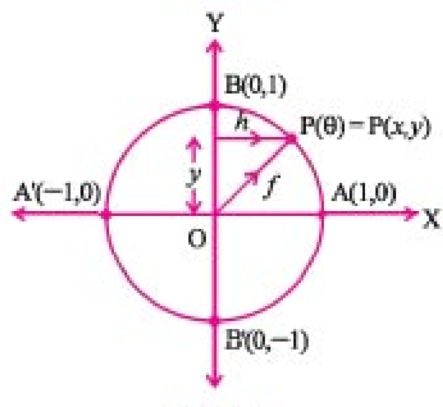
$\therefore \quad sin : R \to R$ તથા $sin\theta = (hof)(\theta) = y$

તે આકૃતિ 4.6માં દર્શાવેલ છે. આ વિધેય ટૂંકમાં *sin* તરીકે લખાય છે.

$sin : R \to R, sin\theta = y$

cos વિધેય જેવી જ દલીલો દ્વારા સાબિત કરી શકાય કે, $sin0 = sin2\pi = 0$.

આમ, *sine* વિધેય અનેક-એક વિધેય છે.



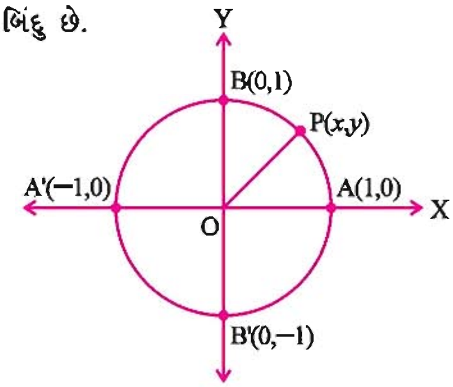
આકૃતિ 4.6

> **નોંધ** આ વ્યાખ્યાઓ પરથી સ્પષ્ટ છે કે, એકમ વર્તુળ પરના કોઈ પણ બિંદુના યામ કોઈક $\theta \in R$ માટે $(cos\theta, sin\theta)$ હોય છે.

4.5 એક મૂળભૂત નિત્યસમ

આપણે ધોરણ 10માં અંતર-સૂત્રનો અભ્યાસ કરેલ છે. જો $A(x_1, y_1)$ અને $B(x_2, y_2)$ યામ-સમતલમાં બે બિંદુઓ હોય, તો તેમની વચ્ચેનું અંતર AB એ અંતર-સૂત્ર

$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ દ્વારા મળે છે.



આકૃતિ 4.7

ધારો કે $P(\theta) = P(x, y)$ એકમ વર્તુળ પરનું કોઈ બિંદુ છે.

$\therefore$ $OP = 1$ **(એકમ વર્તુળની ત્રિજ્યા)**

$\therefore$ $OP^2 = 1$

$\therefore$ $(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 1$

$\therefore$ $x^2 + y^2 = 1$

પરંતુ $x = cos\theta$ અને $y = sin\theta$

$\therefore$ $(cos\theta)^2 + (sin\theta)^2 = 1$

$(cos\theta)^2$ અને $(sin\theta)^2$ને અનુક્રમે $cos^2\theta$ અને $sin^2\theta$ લખવાનો રિવાજ છે.

આમ, પ્રત્યેક $\theta \in R$ માટે $cos^2\theta + sin^2\theta = 1$.

4.6 *cosine* અને *sine* વિધેયોના વિસ્તાર

પ્રત્યેક $\theta \in R$ માટે $cos^2\theta + sin^2\theta = 1$.

કોઈ પણ વાસ્તવિક સંખ્યાનો વર્ગ અનૃણ હોય તથા બે વાસ્તવિક સંખ્યાઓના વર્ગોનો સરવાળો 1 છે;

$0 \le cos^2\theta \le 1$ અને $0 \le sin^2\theta \le 1$. આથી, $| cos\theta | \le 1$, $| sin\theta | \le 1$

આમ, પ્રત્યેક $\theta \in R$ માટે $cos\theta \in [-1, 1]$, $sin\theta \in [-1, 1]$.

$\therefore$ આમ *cosine* અને *sine* વિધેયના વિસ્તાર $[-1, 1]$ના ઉપગણ થશે. ખરેખર તો વિસ્તાર સમગ્ર $[-1, 1]$ છે.

પ્રત્યેક $p \in [-1, 1]$ માટે, બિંદુ $(p, \sqrt{1-p^2})$ એકમ વર્તુળ પર છે,

કારણ કે $p^2 + (\sqrt{1-p^2})^2 = p^2 + 1 - p^2 = 1$

$\therefore$ હવે, આ બિંદુને સંગત $\theta \in R$ એવો મળે કે જેથી,

$f(\theta) = P(\theta) = (p, \sqrt{1-p^2})$.

હવે *cos* વિધેયની વ્યાખ્યા પરથી $P(\theta)$નો x-યામ $cos\theta$ છે.

$\therefore$ $cos\theta = p$ અને $p \in [-1, 1]$.

$\therefore$ પ્રત્યેક $p \in [-1, 1]$ માટે $\theta \in R$ એવો મળે કે જેથી $cos\theta = p$.

$\therefore$ ***cosine* વિધેયનો વિસ્તાર [−1, 1] છે.**

તે જ રીતે પ્રત્યેક $p \in [-1, 1]$ માટે બિંદુ $(\sqrt{1-p^2}, p)$ એકમ વર્તુળ પર છે, માટે $\theta \in R$, એવો મળે કે જેથી $sin\theta = p$.

$\therefore$ ***sine* વિધેયનો વિસ્તાર [−1, 1] છે.**

આપણે જાણીએ છીએ કે $| x | = \begin{cases} x & x \ge 0 \text{ માટે} \\ -x & x < 0 \text{ માટે} \end{cases}$

$\therefore | sin\theta | = \begin{cases} sin\theta & \text{જો } sin\theta \ge 0 \\ -sin\theta & \text{જો } sin\theta < 0 \end{cases}$

$\therefore \quad -1 \le sin\theta \le 1 \iff -1 \le sin\theta \le 0$ અથવા $0 \le sin\theta \le 1$

$\iff 0 \le -sin\theta \le 1$ અથવા $0 \le sin\theta \le 1$

$\iff |sin\theta| \le 1, \forall\theta \in R$

એ જ રીતે $|cos\theta| \le 1, \forall\theta \in R$

$\therefore$ ***cosine* અને *sine* વિધેયના વિસ્તાર $\{p \mid |p| \le 1, p \in R\}$ તરીકે પણ લખી શકાય.**

4.7 *sine* અને *cosine* વિધેયનાં શૂન્યો

કોઈ પણ વાસ્તવિક વિધેય $f : A \to B$ માટે $\{x \mid f(x) = 0, x \in A\}$ને વિધેય fનાં શૂન્યોનો ગણ કહેવાય છે.

***sine* વિધેયનાં શૂન્યો :** ધારો કે કોઈક $\theta \in R$ માટે *sin* વિધેયનું મૂલ્ય શૂન્ય છે. એટલે કે $sin\theta = 0$.

$\therefore$ ત્રિબિંદુ $P(\theta)$નો y-યામ શૂન્ય છે.

$\therefore$ $sin\theta = 0$ હોય, તો $P(\theta)$ X-અક્ષ પર છે.

$\therefore$ $P(\theta) = A(1, 0)$ અથવા $A'(-1, 0)$

હવે, A અને A' અનુક્રમે $\alpha = 0$ અને $\alpha = \pi$ને સંગત છે. વ્યાપક રીતે, $\theta = 2n\pi + \alpha, n \in Z$.

જો $\alpha = 0$ હોય, તો $\theta = 2n\pi$ અને $\alpha = \pi$ હોય, તો $\theta = 2n\pi + \pi, n \in Z$.

$\therefore$ $\theta = 2n\pi$ અથવા $\theta = (2n + 1)\pi, n \in Z$

હવે $2n\pi$, πનો યુગ્મ ગુણક અને $(2n + 1)\pi$ એ πનો અયુગ્મ ગુણક છે.

સ્પષ્ટ છે કે $sin\theta = 0 \Rightarrow \theta$ એ πનો પૂર્ણાંક ગુણક છે એટલે કે $\theta = k\pi, k \in Z$.

આનાથી ઊલટું જો $\theta = k\pi, k \in Z$ હોય, તો $P(\theta)$ એ A અથવા A' થાય. આથી $sin\theta = 0$

આમ, ***sin*નાં શૂન્યોનો ગણ $\{k\pi \mid k \in Z\}$ છે.**

***cosine* વિધેયનાં શૂન્યો :** ધારો કે કોઈક $\theta \in R$ માટે *cosine* વિધેયનું મૂલ્ય શૂન્ય છે એટલે કે $cos\theta = 0$.

$\therefore$ ત્રિબિંદુ $P(\theta)$નો x-યામ શૂન્ય છે.

$\therefore$ $P(\theta)$ એ Y-અક્ષ પર છે.

$\therefore$ $P(\theta) = B(0, 1)$ અથવા $B'(0, -1)$

આપણે જાણીએ છીએ કે B અને B', $\alpha = \frac{\pi}{2}$ અને $\alpha = \frac{3\pi}{2}$ને સંગત છે.

વ્યાપક રીતે, $\theta = 2n\pi + \alpha, n \in Z$.

$\therefore$ $\theta = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$ અથવા $\theta = 2n\pi + \frac{3\pi}{2}, n \in Z$

આમ, $\theta = (4n + 1)\frac{\pi}{2}$ અથવા $\theta = (4n + 3)\frac{\pi}{2}, n \in Z$

$4n + 1 = 2(2n) + 1$, $4n + 3 = 2(2n + 1) + 1$

$\therefore$ $4n + 1$ અને $4n + 3$ એ $2k + 1, k \in Z$નું સ્વરૂપ છે.

$\therefore$ $(4n + 1)$ અથવા $(4n + 3)$, $n \in Z$ એ અયુગ્મ પૂર્ણાંકો છે. તેથી θ એ $\frac{\pi}{2}$ નો અયુગ્મ ગુણક છે.

$\therefore$ $\theta = (2k - 1)\frac{\pi}{2}$ અથવા $\theta = (2k + 1)\frac{\pi}{2}, k \in Z$

આથી સ્પષ્ટ થાય છે કે $\theta = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$, $k \in Z$.

આથી ઊલટું ધારો કે $\theta = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$, $k \in Z$.

તેથી, $\theta = (2(2n) + 1)\frac{\pi}{2}$ અથવા $\theta = (2(2n + 1) + 1)\frac{\pi}{2}$

(kની કિંમત યુગ્મ કે અયુગ્મ હોય તે અનુસાર)

$\therefore \quad \theta = (4n + 1)\frac{\pi}{2}$ અથવા $(4n + 3)\frac{\pi}{2}$

$\therefore \quad \theta = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$ અથવા $\theta = 2n\pi + \frac{3\pi}{2}$

$\therefore \quad \alpha = \frac{\pi}{2}$ અથવા $\frac{3\pi}{2}$

$\therefore \quad P(\theta) = P(\alpha) = B$ અથવા B'

$\therefore \quad P(\theta)$નો x-યામ શૂન્ય છે.

$\therefore \quad cos\theta = 0$

***cosine* વિધેયનાં શૂન્યોનો ગણ $\left\{(2k + 1)\frac{\pi}{2} \mid k \in Z\right\}$ અથવા $\left\{(2k - 1)\frac{\pi}{2} \mid k \in Z\right\}$ છે.**

4.8 અન્ય ત્રિકોણમિતિય વિધેયો

અન્ય ત્રિકોણમિતિય વિધેયોની વ્યાખ્યા આપતાં પહેલાં બે વિધેયોના ભાગાકારની વ્યાખ્યા યાદ કરીએ. ધારો કે $f : A \to R$, $g : B \to R$, $A \subset R$, $B \subset R$ વાસ્તવિક ચલનાં વાસ્તવિક વિધેયો હોય અને $A \cap B - \{x \mid g(x) = 0\} \neq \emptyset$ હોય, તો $\frac{f}{g} : A \cap B - \{x \mid g(x) = 0\} \to R$

જ્યાં, $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

હવે આપણે નવું ત્રિકોણમિતિય વિધેય જેને tangent (અથવા *tan*) વિધેય કહે છે, તે વ્યાખ્યાયિત કરીશું. અહીં tangent વિધેય $sin : R \to R$ અને $cos : R \to R$ બે વિધેયોનું ભાગાકાર વિધેય છે.

હવે cosનાં શૂન્યોનો ગણ $\{x \mid cosx = 0\} = \left\{(2k + 1)\frac{\pi}{2} \mid k \in Z\right\}$ છે.

tangent વિધેય *sine* અને *cosine* વિધેયના ભાગાકાર તરીકે વ્યાખ્યાયિત કરવાનું છે.

$tan : R - \left\{(2k + 1)\frac{\pi}{2} \mid k \in Z\right\} \to R$, $tan\theta = \frac{sin\theta}{cos\theta}$

$tan0 = \frac{sin\,0}{cos\,0} = \frac{0}{1} = 0$ અને $tan\,2\pi = \frac{sin2\pi}{cos2\pi} = \frac{0}{1} = 0$.

આમ, $tan0 = tan\,2\pi = 0$. આથી, *tan* અનેક-એક વિધેય છે.

tan વિધેયનો વિસ્તાર :

$p \in R$ હોય, તો $p^2 \geq 0$. આથી $1 + p^2 \geq 1$.

ધારો કે $x = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2}}$, $y = \frac{p}{\sqrt{1 + p^2}}$

$\therefore \quad x^2 + y^2 = \frac{1}{1 + p^2} + \frac{p^2}{1 + p^2} = \frac{1 + p^2}{1 + p^2} = 1$

આમ, $(x, y) \in C$.

$\therefore \quad \theta \in R$ એવો મળે કે જેથી $P(\theta) = (x, y)$.

$\therefore \quad x = cos\theta,\ y = sin\theta$

$\therefore \quad cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}},\ sin\theta = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$

$\therefore \quad tan\theta = \frac{sin\theta}{cos\theta} = p$

વળી, $cos\theta = x \neq 0$ કારણ કે જો $x = 0$ હોય, તો $\frac{1}{\sqrt{1+p^2}} = 0$, જે શક્ય નથી.

$\therefore \quad cos\theta \neq 0 \Leftrightarrow \theta \neq (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in Z$

આમ, પ્રત્યેક $p \in R$ માટે $\theta \in R - \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in Z\right\}$ એવો મળે કે જેથી $tan\theta = p$.

આમ, *tan* વિધેયનો વિસ્તાર R છે.

***cot* વિધેય :** *cot* વિધેય *cos* વિધેય અને *sin* વિધેયના ભાગાકારથી વ્યાખ્યાયિત થાય છે.

અહીં $sin : R \to R$ અને $cos : R \to R$

cot વિધેયનો પ્રદેશ $R \cap R - \{x \mid sinx = 0\} = R - \{k\pi \mid k \in Z\}$

$\therefore \quad cot : R - \{k\pi \mid k \in Z\} \to R,\ cot\theta = \frac{cos\,\theta}{sin\,\theta}$.

cot વિધેય પણ અનેક-એક વિધેય છે, કારણ કે

$cot\frac{\pi}{2} = \frac{cos\frac{\pi}{2}}{sin\frac{\pi}{2}} = \frac{0}{1} = 0,\quad cot\frac{3\pi}{2} = \frac{cos\frac{3\pi}{2}}{sin\frac{3\pi}{2}} = \frac{0}{-1} = 0$

tan વિધેયની જેમ જ *cot* વિધેયનો વિસ્તાર પણ R છે. આ માટે *tan* વિધેયની જેમ જ કોઈ પણ $p \in R$ માટે, $x = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}},\ y = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}$. લેતાં, $x^2 + y^2 = 1$. આમ, $(x, y) \in C$.

હવે, (x, y) એકમ વર્તુળ પર હોવાથી $\theta \in R$ એવો મળે કે જેથી $P(\theta) = (x, y)$.

$x = cos\theta,\ y = sin\theta,\ cot\theta = \frac{cos\,\theta}{sin\,\theta} = \frac{x}{y} = p$

હવે આવી સંખ્યા θ માટે, $sin\theta = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}} \neq 0 \Leftrightarrow \theta \neq k\pi$.

આમ પ્રત્યેક $p \in R$ માટે, $\theta \in R - \{k\pi \mid k \in Z\}$ એવો મળે કે જેથી $cot\theta = p$

આમ, *cot* નો વિસ્તાર R છે.

***sec* વિધેય :** $f : R \to R,\ f(x) = 1$ વિધેય છે અને $cos : R \to R$ વિધેય છે. f અને *cos* ના ભાગાકારને *secant* વિધેય કહેવાય છે.

sec વિધેયનો પ્રદેશ $= (R \cap R) - \{\theta \mid cos\theta = 0\}$

$= R - \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in Z\right\}$

$\therefore \quad \mathbf{sec : R - \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in Z\right\} \to R,\ sec\theta = \frac{1}{cos\theta}}$

વળી, $sec0 = 1$ અને $sec2\pi = 1$ હોવાથી *sec* અનેક-એક વિધેય છે.

sec વિધેયનો વિસ્તાર :

આપણે જોયું કે $sec\theta = \frac{1}{cos\theta}$.

જો $cos\theta \neq 0$ હોય, તો $sec\theta$ વ્યાખ્યાયિત થાય છે.

cos વિધેયનો વિસ્તાર $[-1, 1]$ છે.

$-1 \leq cos\theta \leq 1, cos\theta \neq 0$

$\Leftrightarrow$ $-1 \leq cos\theta < 0$ અને $0 < cos\theta \leq 1$

$\Leftrightarrow$ $-1 \geq \frac{1}{cos\theta}$ અથવા $\frac{1}{cos\theta} \geq 1$

$\Leftrightarrow$ $-1 \geq sec\theta$ અથવા $sec\theta \geq 1$

$\Leftrightarrow$ $sec\theta \leq -1$ અથવા $sec\theta \geq 1$

આથી *sec* એ -1 અને 1 વચ્ચેનું કોઈ મૂલ્ય ધરાવતું નથી.

આમ, $\forall\theta \in R - \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\right\}$, $sec\theta \in R - (-1, 1)$.

આથી ઊલટું, $p \in R - (-1, 1)$ અને $p \neq 0$ હોય, તો $\frac{1}{p} \in [-1, 1]$.

તથા $\theta \in R - \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in Z\right\}$ એવો મળે કે જેથી $cos\,\theta = \frac{1}{p}$.

અને આવા θ માટે $sec\theta = p$. આમ, *sec* વિધેયનો વિસ્તાર $R - (-1, 1)$ છે.

cosec વિધેય :

વિધેય $f : R \to R, f(x) = 1$ અને $sin : R \to R$ના ભાગાકારને *cosec* વિધેય કહે છે.

cosec વિધેયનો પ્રદેશ $= (R \cap R) - \{\theta \mid sin\theta = 0\}$

$= R - \{k\pi \mid k \in Z\}$

$\therefore$ **$cosec : R - \{k\pi \mid k \in Z\} \to R, cosec\theta = \frac{1}{sin\theta}$.**

અન્ય ત્રિકોણમિતિય વિધેયોની માફક *cosec* પણ અનેક-એક વિધેય છે, કારણ કે $cosec\frac{\pi}{2} = 1$ અને $cosec\frac{5\pi}{2} = 1$.

વધુમાં $-1 \leq sin\theta \leq 1$, $cosec\theta = \frac{1}{sin\theta}$ હોવાથી તે $sin\theta \neq 0$ હોય, તો વ્યાખ્યાયિત થાય. *sec* વિધેયમાં ચર્ચા કર્યા મુજબ જ *cosec* વિધેયનો વિસ્તાર $R - (-1, 1)$ છે, તેમ સાબિત કરી શકાય.

$$| cos\theta | \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{|cos\theta|} \geq 1 \Leftrightarrow | sec\theta | \geq 1$$

sec વિધેય તથા *cosec* વિધેયનો વિસ્તાર $\{ p \mid |p| \geq 1, p \in R \}$ તરીકે પણ લખી શકાય.

4.9 અન્ય નિત્યસમો

આપણે જોયું કે $\forall\theta \in R, sin^2\theta + cos^2\theta = 1$ (i)

$\theta \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in Z \Leftrightarrow cos\theta \neq 0$

હવે, સમીકરણ (i)ની બંને બાજુઓને $cos^2\theta$ વડે ભાગતાં,

$$\frac{cos^2\theta}{cos^2\theta} + \frac{sin^2\theta}{cos^2\theta} = \frac{1}{cos^2\theta}, \forall\theta \in R - \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in Z\right\}$$

$$\therefore \quad 1 + tan^2\theta = sec^2\theta, \quad \forall\theta \in R - \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in Z\right\} \qquad \text{(ii)}$$

તે જ રીતે $\theta \neq k\pi, k \in Z \Leftrightarrow sin\theta \neq 0$. હવે નિત્યસમ (i)ને $sin^2\theta$ વડે ભાગતાં,

$$\frac{cos^2\theta}{sin^2\theta} + \frac{sin^2\theta}{sin^2\theta} = \frac{1}{sin^2\theta}, \forall\theta \in R - \{k\pi \mid k \in Z\}$$

$$\therefore \quad cot^2\theta + 1 = cosec^2\theta, \quad \forall\theta \in R - \{k\pi \mid k \in Z\} \qquad \text{(iii)}$$

ઉદાહરણ 1 : નીચેનાં વિધેયોનાં શૂન્યોનો ગણ શોધો :

(1) $sin\ (x - 1)$ (2) $sin\ x - 1$ (3) $cos\ x + 1$ (4) $cot\ 5x$ (5) $sec\ 5x$

ઉકેલ : (1) $sin\ (x - 1) = 0 \Leftrightarrow (x - 1) = k\pi, k \in Z$

$\Leftrightarrow x = k\pi + 1, k \in Z$

$\therefore$ $sin(x - 1)$ નાં શૂન્યોનો ગણ $\{k\pi + 1 \mid k \in Z\}$ છે.

(2) $sin\ x - 1$ નાં શૂન્યોનો વિચાર કરીએ.

$sin\ x - 1 = 0 \Leftrightarrow sin\ x = 1$

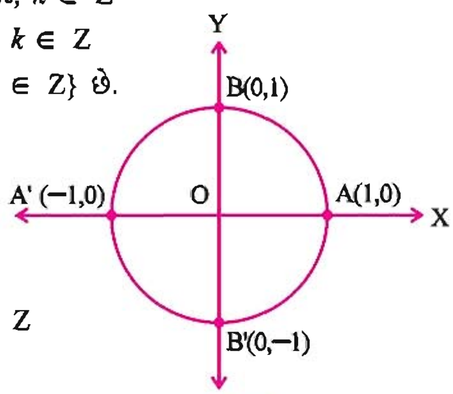
$\Leftrightarrow P(x) = B(0, 1)$

$\Leftrightarrow P(x) = P(\frac{\pi}{2})$

$\Leftrightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in Z$

$\Leftrightarrow x = \frac{4k\pi + \pi}{2}$

$\Leftrightarrow x = (4k + 1)\frac{\pi}{2}, k \in Z$



આકૃતિ 4.8

$\therefore$ $sin\,x - 1$ નાં શૂન્યોનો ગણ $\left\{(4k + 1)\frac{\pi}{2} \mid k \in Z\right\}$ છે.

(3) $cos\ x + 1$ નાં શૂન્યોનો વિચાર કરીએ.

$cos\ x + 1 = 0 \Leftrightarrow cos\ x = -1$

$\Leftrightarrow P(x) = A'(-1, 0)$

$\Leftrightarrow P(x) = P(\pi)$

$\Leftrightarrow x = 2k\pi + \pi, k \in Z$ $\qquad (\alpha = \pi, \theta = 2k\pi + \alpha)$

$\Leftrightarrow x = (2k + 1)\pi, k \in Z$

$\therefore$ $cos\,x + 1$નાં શૂન્યોનો ગણ $\{(2k + 1)\pi \mid k \in Z\}$ છે.

(4) $cot\,5x = 0$ નો વિચાર કરીએ.

$cot\ 5x = 0 \Leftrightarrow 5x = (2k + 1)\frac{\pi}{2}, k \in Z$

$\Leftrightarrow x = (2k + 1)\frac{\pi}{10}, k \in Z$

$\therefore$ માંગેલ ગણ $\left\{(2k + 1)\frac{\pi}{10} \mid k \in Z\right\}$ છે.

(5) $sec\ 5x$ નાં શૂન્યોનો વિચાર કરીએ.

secનો વિસ્તાર $R - (-1, 1)$ છે. એટલે કે sec વિધેય -1 અને 1 વચ્ચેનું કોઈ મૂલ્ય ધરાવતું નથી.

આમ, કોઈ પણ x માટે $sec\ 5x \neq 0$

$\therefore$ $sec\ 5x$ નાં શૂન્યોનો ગણ $\emptyset$ છે.

ઉદાહરણ 2 : નીચેનાં વિધેયોનો વિસ્તાર શોધો :

(1) $5cos3x - 2$ (2) $6 - 7sin^2x$ (3) $3cosec^2x - 2$ (4) $2 + 3sec\ x$

(5) $| 3 - 7cos^2x |$ (6) $a\ cos^2(px + q) + b$

ઉકેલ : (1) $-1 \leq cos3x \leq 1 \Leftrightarrow -5 \leq 5cos3x \leq 5$

$\Leftrightarrow (-5 - 2) \leq (5cos3x - 2) \leq 5 - 2$

$\Leftrightarrow -7 \leq (5cos3x - 2) \leq 3$

$\therefore$ $5cos3x - 2$નો વિસ્તાર $[-7, 3]$ છે.

(2) $-1 \leq sin\ x \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq sin\ x \leq 0$ અથવા $0 \leq sin\ x \leq 1$

$\Leftrightarrow 0 \leq sin^2x \leq 1$

$\Leftrightarrow 0 \geq -7sin^2x \geq -7$

$\Leftrightarrow -7 \leq -7sin^2x \leq 0$

$\Leftrightarrow -1 \leq 6 - 7sin^2x \leq 6$

$\therefore$ $6 - 7sin^2x$નો વિસ્તાર $[-1, 6]$ છે.

(3) $cosec^2x \geq 1 \Leftrightarrow 3cosec^2x \geq 3$

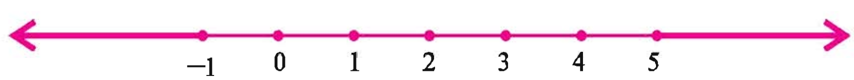
$\Leftrightarrow (3cosec^2x - 2) \geq 1$

$\therefore$ $3cosec^2x - 2$નો વિસ્તાર $[1, \infty)$ અથવા $\{p \mid p \geq 1, p \in R\}$

(4) $secx \leq -1$ અથવા $secx \geq 1$

$\Leftrightarrow$ $3secx \leq -3$ અથવા $3secx \geq 3$

$\Leftrightarrow$ $2 + 3secx \leq -1$ અથવા $2 + 3secx \geq 5$



આકૃતિ 4.9

$\therefore$ $2 + 3sec\ x$નો વિસ્તાર $R - (-1, 5)$ અથવા $(-\infty, -1] \cup [5, \infty)$ છે.

આ ગણને $\{p \mid p \leq -1$ અથવા $p \geq 5, p \in R\}$થી પણ દર્શાવી શકાય.

(5) $0 \le cos^2 x \le 1 \Leftrightarrow 0 \ge -7\ cos^2 x \ge -7$

$\Leftrightarrow -7 \le -7\ cos^2 x \le 0$

$\Leftrightarrow -4 \le (3 - 7\ cos^2 x) \le 3$

$\Leftrightarrow 3 - 7cos^2 x \in [-4, 0] \cup [0, 3]$

$\Leftrightarrow |\ 3 - 7cos^2 x\ | \in [0, 4] \cup [0, 3]$

$\therefore$ $|\ 3 - 7cos^2 x\ |$નો વિસ્તાર $[0, 4]$ છે.

(6) **(1) જો $a > 0$ તો**

$0 \le cos^2 (px + q) \le 1 \Leftrightarrow 0 \le a\ cos^2 (px + q) \le a$

$\Leftrightarrow b \le a\ cos^2 (px + q) + b \le a + b$

(2) જો $a < 0$ તો

$0 \le cos^2 (px + q) \le 1 \Leftrightarrow 0 \ge a\ cos^2 (px + q) \ge a$

$\Leftrightarrow a \le a\ cos^2 (px + q) \le 0$

$\Leftrightarrow a + b \le a\ cos^2 (px + q) + b \le a$

$\therefore$ જો $a > 0$ હોય, તો $a\ cos^2 (px + q) + b$નો વિસ્તાર $[b, a + b]$ થાય અને $a < 0$ હોય, તો આ વિધેયનો વિસ્તાર $[\ a + b, b]$ થાય.

ઉદાહરણ 3 : સાબિત કરો કે, $1 + \frac{4tan^2\theta}{(1 - tan^2\theta)^2} = \frac{1}{1 - 4sin^2\theta cos^2\theta}$

ઉકેલ : ડા.બા. $= 1 + \frac{4tan^2\theta}{(1 - tan^2\theta)^2}$

$$= \frac{(1 - tan^2\theta)^2 + 4tan^2\theta}{(1 - tan^2\theta)^2}$$

$$= \frac{(1 + tan^2\theta)^2}{(1 - tan^2\theta)^2} \qquad ((a - b)^2 + 4ab = (a + b)^2)$$

$$= \frac{\left(1 + \frac{sin^2\theta}{cos^2\theta}\right)^2}{\left(1 - \frac{sin^2\theta}{cos^2\theta}\right)^2}$$

$$= \frac{(sin^2\theta + cos^2\theta)^2}{(cos^2\theta - sin^2\theta)^2}$$

$$= \frac{1}{(cos^2\theta + sin^2\theta)^2 - 4sin^2\theta\ cos^2\theta} \qquad ((a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab\ )$$

$$= \frac{1}{1 - 4sin^2\theta\ cos^2\theta} = \text{જ.બા.}$$

ઉદાહરણ 4 : સાબિત કરો કે, $\frac{tan\theta + sec\theta - 1}{tan\theta - sec\theta + 1} = \frac{cos\theta}{1 - sin\theta} = \frac{1 + sin\theta}{cos\theta}$.

ઉકેલ : ડા.બા. $= \frac{tan\theta + sec\theta - 1}{tan\theta - sec\theta + 1}$

$$= \frac{(tan\theta + sec\theta) - (sec^2\theta - tan^2\theta)}{(tan\theta - sec\theta + 1)}$$

$$= \frac{(tan\theta + sec\theta) - (sec\theta - tan\theta)(sec\theta + tan\theta)}{(tan\theta - sec\theta + 1)}$$

$$= \frac{(tan\theta + sec\theta)(1 - (sec\theta - tan\theta))}{(tan\theta - sec\theta + 1)}$$

$$= \frac{(tan\theta + sec\theta)(1 - sec\theta + tan\theta)}{(tan\theta - sec\theta + 1)}$$

$$= (tan\theta + sec\theta)$$

$$= \frac{sin\theta}{cos\theta} + \frac{1}{cos\theta} = \frac{sin\theta + 1}{cos\theta} \qquad \text{(i)}$$

હવે, $\frac{sin\theta + 1}{cos\theta} = \frac{1 + sin\theta}{cos\theta} \times \frac{1 - sin\theta}{1 - sin\theta}$

$$= \frac{1 - sin^2\theta}{cos\theta(1 - sin\theta)}$$

$$= \frac{cos^2\theta}{cos\theta(1 - sin\theta)} = \frac{cos\theta}{1 - sin\theta} \qquad \text{(ii)}$$

(i) અને (ii) ઉપરથી માંગેલું પરિણામ સાબિત થાય છે.

ઉદાહરણ 5 : સાબિત કરો કે, $sec^2\theta + cosec^2\theta \geq 4$

ઉકેલ : $sec^2\theta + cosec^2\theta = 1 + tan^2\theta + 1 + cot^2\theta$

$= 2 + tan^2\theta + cot^2\theta$

$= 2 + tan^2\theta + cot^2\theta - 2tan\theta\, cot\theta + 2cot\theta\, tan\theta$

$= 2 + (tan\theta - cot\theta)^2 + 2$

$= 4 + (tan\theta - cot\theta)^2$

≥ 4 $\qquad (tan\theta - cot\theta)^2 \geq 0$

સ્વાધ્યાય 4.1

1. નીચેનાં વિધેયોનાં શૂન્યો શોધો :

(1) $tan\,(2\theta + 1)$ (2) $cos\,(3x + 2)$ (3) $sinx + 1$

(4) $cosx - 1$ (5) $cot\,3x$ (6) $cosec\,5x$

2. નીચેનાં વિધેયોનો વિસ્તાર શોધો :

(1) $5\ sin7x + 3$ (2) $3 - sec^2x$ (3) $3sin^2\ x - 4$

(4) $|\ 2 - 5\ sin^2x|$ (5) $|\ 3 - 4sec^2x\ |$ (6) $3\ cosec\ x - 2$

3. સાબિત કરો કે :

(1) જો $tan\theta + cot\theta = 2$, તો $tan^4\theta + cot^4\theta = 2$

(2) જો $sin\theta + cosec\theta = 2$, તો $sin^n\theta + cosec^n\theta = 2$

(3) $2\ sec^2\theta - sec^4\theta - 2cosec^2\theta + cosec^4\theta = cot^4\theta - tan^4\theta$

(4) $\dfrac{1 + tan^2\theta}{1 + cot^2\theta} = \left(\dfrac{1 - tan\theta}{1 - cot\theta}\right)^2$

(5) $\left(\dfrac{1 + sin\theta - cos\theta}{1 + sin\theta + cos\theta}\right)^2 = \dfrac{1 - cos\theta}{1 + cos\theta}$

(6) $\dfrac{1}{cosec\theta - cot\theta} - \dfrac{1}{sin\,\theta} = \dfrac{1}{sin\,\theta} - \dfrac{1}{cosec\theta + cot\theta}$

(7) $\dfrac{sin\theta + 1 - cos\theta}{sin\theta + cos\theta - 1} = \dfrac{1 + sin\theta}{cos\theta}$

(8) $\dfrac{sinA}{secA + tanA - 1} + \dfrac{cosA}{cosecA + cotA - 1} = 1$

(9) $\left(\dfrac{1}{sec^2A - cos^2A} + \dfrac{1}{cosec^2A - sin^2A}\right) sin^2A\ cos^2A = \dfrac{1 - sin^2A\,cos^2A}{2 + sin^2A\,cos^2A}$

4. જો $tan\theta = \dfrac{2x(x+1)}{2x+1}$, તો $sin\theta$ નું મૂલ્ય શોધો. $(0 < \theta < \frac{\pi}{2})$

5. જો $10sin^4\theta + 15cos^4\theta = 6$, તો $27cosec^2\theta + 8\ sec^2\theta$નું મૂલ્ય શોધો.

6. જો $cosec\theta + cot\theta = \frac{3}{2}$, તો $cos\theta$ શોધો.

7. $tan^2\theta - sin^2\theta = tan^2\theta \cdot sin^2\theta$ સાબિત કરો અને તેના પરથી $tan^2\theta \geq sin^2\theta$ તારવો.

*

4.10 ત્રિકોણમિતિય વિધેયોનાં આવર્તમાન

આપણે જાણીએ છીએ કે, ત્રિકોણમિતિય બિંદુ વિધેયનું મુખ્ય આવર્તમાન 2π છે.

$\therefore \quad P(2\pi + \theta) = P(\theta)$

આમ, જો કોઈ બિંદુ Pથી એક પૂર્ણ ભ્રમણ કરવામાં આવે તો તે જ બિંદુ P પર પાછા આવીએ. આથી જો θ, 2πના ગુણાંકમાં વધે અથવા ઘટે તો *sine* અને *cosine* વિધેયનાં મૂલ્યો બદલાતાં નથી, એટલે કે

$sin(2k\pi + \theta) = sin\theta,\ cos(2k\pi + \theta) = cos\theta,\ k \in Z.$

આ જ રીતે *sec* અને *cosec* અનુક્રમે *cos* અને *sin*નાં વ્યસ્ત વિધેયો હોવાથી,

$sec(2k\pi + \theta) = sec\theta$ અને $cosec(2k\pi + \theta) = cosec\theta$.

હાલ પૂરતું ધારી લઈએ કે જો θ, πના ગુણાંકમાં વધે અથવા ઘટે તો *tan* અને *cot* વિધેયોનાં મૂલ્યો બદલાતાં નથી. આમ,

આમ, *sin, cos, sec, cosec* ના મુખ્ય આવર્તમાન 2π છે તથા *tan* અને *cot* ના મુખ્ય આવર્તમાન π છે.

આમ, $tan(k\pi + \theta) = tan\theta,\ cot(k\pi + \theta) = cot\theta,\ k \in Z.$

ઉદાહરણ 6 : સાબિત કરો કે $sin\left(\frac{37\pi}{6}\right) = sin\frac{\pi}{6}$.

ઉકેલ : આપણે જોયું કે $sin(2k\pi + \theta) = sin\theta$, $k \in Z$

$\therefore \quad sin\left(\frac{37\pi}{6}\right) = sin\left(6\pi + \frac{\pi}{6}\right)$

$= sin\frac{\pi}{6}$ **($6\pi = 3(2\pi)$ એ sinનું આવર્તમાન છે.)**

ઉદાહરણ 7 : સાબિત કરો કે $cos\left(\frac{-101\pi}{3}\right) = cos\frac{\pi}{3}$.

ઉકેલ : $cos\left(\frac{-101\pi}{3}\right) = cos\left(-34\pi + \frac{\pi}{3}\right)$

$= cos\frac{\pi}{3}$ **(-34π એ cosનું આવર્તમાન છે.)**

ઉદાહરણ 8 : સાબિત કરો કે $tan\ \frac{22\pi}{3} = tan\frac{\pi}{3}$.

ઉકેલ : આપણે જાણીએ છીએ કે $tan(k\pi + \theta) = tan\theta$, $k \in Z$.

$\therefore \quad tan\ \frac{22\pi}{3} = tan\left(7\pi + \frac{\pi}{3}\right)$

$= tan\frac{\pi}{3}$ **(7π એ tanનું આવર્તમાન છે.)**

4.11 વધતાં અને ઘટતાં વિધેયો

આપણે જાણીએ છીએ કે વિધેય $f : R \rightarrow R$, $f(x) = 2x + 1$નો આલેખ રેખા છે. આ આલેખની રેખા ઊર્ધ્વગામી છે. આનો અર્થ એ થાય કે, જેમ x વધતો જાય તેમ $f(x)$ વધે છે.

$f : N \rightarrow N$, $f(x) = x^2$ માટે $f(1) = 1$, $f(2) = 4$, $f(3) = 9$, $f(4) = 16$ વગેરે. અહીં જોઈ શકાય છે કે જેમ-જેમ x વધે છે તેમ-તેમ $f(x)$ પણ વધે છે.

એટલે કે $4 > 3$ હોવાથી $f(4) > f(3)$ થાય છે.

આવા વિધેયને વધતું વિધેય કહેવાય. વિધેય $f : N \rightarrow R$, $f(x) = \frac{1}{x}$, $f(1) = 1$, $f(2) = \frac{1}{2}$, $f(3) = \frac{1}{3}$, $f(4) = \frac{1}{4}$, વગેરે. અહીં જોઈ શકાય છે કે જેમ-જેમ x વધે છે તેમ-તેમ $f(x)$નું મૂલ્ય ઘટે છે, એટલે કે $4 > 2 \Rightarrow f(4) < f(2)$. આવા વિધેયને ઘટતું વિધેય કહેવાય છે.

વ્યાપક રીતે, **જો $A \subset R$, $B \subset R$ હોય અને $f : A \rightarrow B$ વિધેય હોય તથા $\forall x_1, x_2 \in A$, $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$, થતું હોય તો fને ચુસ્ત વધતું વિધેય (Strictly Increasing Function) કહેવાય છે અને તેને $f\uparrow$ વડે દર્શાવાય છે.**

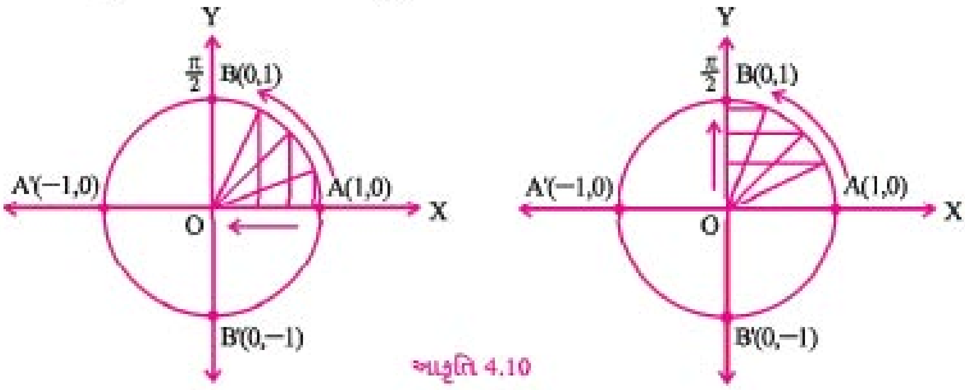
જો $A \subset R$, $B \subset R$ અને $f : A \rightarrow B$ વિધેય હોય અને

જો $\forall x_1, x_2 \in A$, $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, થતું હોય, તો fને ચુસ્ત ઘટતું વિધેય (Strictly Decreasing Function) કહેવાય છે અને તે $f\downarrow$થી દર્શાવાય છે.

હવે આપણે ત્રિકોણમિતીય વિધેયોનો વિચાર કરીશું.

તમામ ત્રિકોણમિતીય વિધેયો ચરણમાં ચુસ્ત વધતા કે ઘટતા વિધેયો છે. પણ આપણે તેને વધતાં કે ઘટતાં વિધેયો કહીશું.

જો $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ હોય અને θ વધે છે તો તેને સંગતબિંદુ $P(\theta)$ ચાપ Aથી B ઉપરની તરફ જાય છે. આથી તેનો x-યામ 1થી 0 તરફ ઘટે છે જ્યારે y-યામ 0 થી વધીને 1 થાય છે. આમ, $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ માટે $cos\theta$ ઘટતું વિધેય છે અને $sin\theta$ વધતું વિધેય છે.



આકૃતિ 4.10

દ્વિતીય ચરણમાં $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$. જેમ-જેમ θ વધે તેમ-તેમ સંગતબિંદુ $P(\theta)$ ચાપ $\widehat{BA'}$ પર નીચે સરકે છે. તે અનુસાર $sin\theta$ એ 1થી ઘટીને 0 થાય છે તથા $cos\theta$ એ 0 થી ઘટીને -1 થાય છે. આમ, આ ચરણમાં *sin* તથા *cos* બંને ઘટતાં વિધેયો છે.

ત્રીજા ચરણમાં $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$. હવે θ જેમ-જેમ વધે તેમ તેને સંગતબિંદુ $P(\theta)$ ચાપ $\widehat{A'B'}$માં નીચેની તરફ જાય છે. આથી $sin\theta$ એ 0 થી ઘટીને -1 થાય છે જ્યારે $cos\theta$ એ -1થી વધીને 0 થાય છે. છેલ્લે, ચોથા ચરણમાં $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$. આથી જેમ-જેમ θ વધે તેમ-તેમ સંગતબિંદુ $P(\theta)$ ચાપ $\widehat{B'A}$માં ઉપરની તરફ જાય છે અને આથી $sin\theta$ એ -1થી વધીને 0 થાય છે તથા *cos* એ 0 થી વધીને 1 થાય છે.

આમ,

વિધેય \ ચરણ	પ્રથમ	દ્વિતીય	તૃતીય	ચતુર્થ
	$\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$	$\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$
sin	↑	↓	↓	↑
cos	↓	↓	↑	↑

હવે, *cosec* અને *sec* એ અનુક્રમે *sin* અને *cos*નાં વ્યસ્ત વિધેયો હોવાથી જ્યારે $sin\theta$ વધતું વિધેય હોય ત્યારે $cosec\theta$ ઘટતું વિધેય હોય અને જ્યારે $sin\theta$ ઘટતું હોય ત્યારે $cosec\theta$ વધતું હોય. આમ નીચેનું કોષ્ટક મળે. તે જ રીતે *cos* તથા *sec* માટે કહી શકાય.

વિધેય \ ચરણ	પ્રથમ	દ્વિતીય	તૃતીય	ચતુર્થ
	$\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$	$\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$
sec	↑	↑	↓	↓
cosec	↓	↑	↑	↓

આપણે સ્વીકારી લઈશું કે દરેક ચરણમાં *tan* વધતું વિધેય છે અને *cot* ઘટતું વિધેય છે.

ઉપર્યુક્ત ચર્ચામાં જોયું કે ત્રિકોણમિતિય વિધેય ઘટતું કે વધતું હોવું તે ચરણ પર આધારિત છે. આપણે સ્વીકાર્યું છે કે *tan* દરેક ચરણમાં વધતું વિધેય છે, તેનો અર્થ એ નથી કે તે સમગ્ર યામ-સમતલમાં વધતું વિધેય છે. ઉદાહરણ તરીકે $30^\circ < 150^\circ$ પરંતુ $tan30^\circ < tan150^\circ$ નથી કારણ કે $tan30^\circ$ ધન છે જ્યારે $tan150^\circ$ ઋણ છે. આમ $30^\circ < 150^\circ \Rightarrow tan30^\circ < tan150^\circ$ થતું નથી.

ઉદાહરણ 9 : નીચેના વિધાનની સત્યાર્થતા ચકાસો :

$$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi \Rightarrow cos\frac{\pi}{2} < cos\theta < cos\pi$$

ઉકેલ : બીજા ચરણમાં *cos* વિધેય $\downarrow$ છે.

$\therefore \quad \frac{\pi}{2} < \theta < \pi \Rightarrow cos\frac{\pi}{2} > cos\theta > cos\pi$

$\therefore$ આમ, વિધાન અસત્ય છે.

> **☛ નોંધ** $cos\frac{\pi}{2} < cos\theta < cos\pi$ અર્થાત્ $0 < cos\theta < -1$ દેખીતું જ અસત્ય છે.

ઉદાહરણ 10 : સત્યાર્થતા ચકાસો : $sin\theta_1 > sin\theta_2 \Leftrightarrow cos\theta_1 > cos\theta_2,\ 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

ઉકેલ : પ્રથમ ચરણમાં *sin* વધતું વિધેય છે અને *cos* એ ઘટતું વિધેય છે.

$\therefore \quad sin\theta_1 > sin\theta_2 \Leftrightarrow \theta_1 > \theta_2$

$\qquad\qquad\qquad\qquad \Leftrightarrow cos\theta_1 < cos\theta_2$

$\therefore$ આપેલું વિધાન અસત્ય છે.

ઉદાહરણ 11 : સાબિત કરો કે $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$માં $cot\theta$ એ ઘટતું વિધેય છે.

ઉકેલ : $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ માટે $sin\theta > 0$ અને $cos\theta > 0$.

હવે $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$માં *sin* વધતું વિધેય છે.

ધારો કે $\theta_1, \theta_2 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ અને $\theta_1 < \theta_2$

$\therefore \quad \theta_1 < \theta_2 \Rightarrow sin\theta_1 < sin\theta_2 \Rightarrow \frac{1}{sin\theta_1} > \frac{1}{sin\theta_2}$ (i)

હવે $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$માં *cos* ઘટતું વિધેય છે.

$\therefore \quad \theta_1 < \theta_2 \Rightarrow cos\theta_1 > cos\theta_2$ (ii)

(i) અને (ii) ઉપરથી, $\frac{1}{sin\theta_1} \times cos\theta_1 > \frac{1}{sin\theta_2} \times cos\theta_2$

$\therefore \quad cot\theta_1 > cot\theta_2$

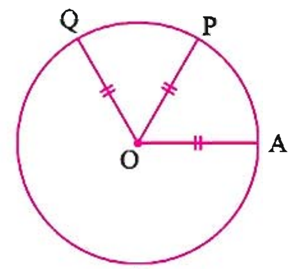
આમ, $\theta_1 < \theta_2 \Rightarrow cot\theta_1 > cot\theta_2$

આથી, $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$માં $cot\theta$ એ ઘટતું વિધેય છે.

4.12 ખૂણાનું માપ

હવે આપણે ખૂણો માપવાની બે રીતો વિશે જાણીશું :

અંશ માપ : ખૂણો માપવાની આ પદ્ધતિમાં કાટખૂણાના માપને એક સમાન 90 ભાગમાં વહેંચવામાં આવે છે અને આવા પ્રત્યેક હિસ્સાને એક અંશ કહેવાય છે. તેને 1° વડે દર્શાવાય છે. આમ, એક અંશ એટલે કાટકોણના માપનો 90મો ભાગ. 1 અંશને 60 સમાન હિસ્સામાં વહેંચવામાં આવે છે અને પ્રત્યેક હિસ્સાના માપને 1 કળા કહે છે અને એક કળાને $1'$ થી દર્શાવાય છે. વધુમાં $1'$ને 60 સમાન ભાગમાં વહેંચવામાં આવે છે અને પ્રત્યેક ભાગના માપને 1 વિકળા કહે છે અને તેની નિશાની $1''$ છે.



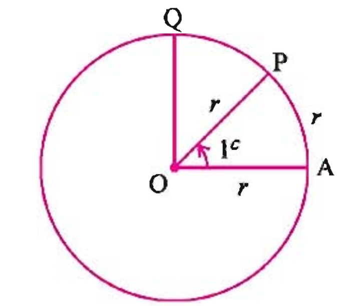
આકૃતિ 4.11

આમ, $1^{\circ} = 60' = 60$ કળા

$1' = 60'' = 60$ વિકળા

ખૂણાનું રેડિયન માપ : રેડિયન એ ખૂણાના માપનો અન્ય એકમ છે. કોઈ વર્તુળના કેન્દ્ર પાસે વર્તુળની ત્રિજ્યા જેટલી લંબાઈના ચાપ દ્વારા આંતરવામાં આવતા ખૂણાના માપને 1 રેડિયન માપનો ખૂણો કહે છે અને તે 1^c અથવા 1^R થી દર્શાવાય છે.

O કેન્દ્ર અને r ત્રિજ્યાના વર્તુળ ઉપર કોઈ બિંદુ A લો. જેની લંબાઈ વર્તુળની ત્રિજ્યા r જેટલી હોય તેવો $\widehat{AP}$ લો. એટલે કે $l(\widehat{AP}) = r$. તો $\angle AOP$નું માપ 1 રેડિયન $(= 1^c)$ થાય. જો $l(\widehat{AQ}) = 2r$ તો $\angle AOQ$નું માપ 2 રેડિયન $(= 2^c)$ થાય. રેડિયન એ ખૂણાના માપનું એકમ હોઈ તે અચળાંક છે.



આકૃતિ 4.12

કેન્દ્ર O અને r ત્રિજ્યાવાળું એક વર્તુળ લો. વર્તુળ પર કોઈ પણ બિંદુ A લો અને ચાપ $\widehat{AP}$ એવી રીતે લો કે તેની લંબાઈ r થાય. $\overline{OA}$ અને $\overline{OP}$ જોડો તથા $\overline{OQ} \perp \overline{OA}$ રચો. હવે વ્યાખ્યા મુજબ $m\angle AOP = 1^c$ અને $\angle AOQ$ = કાટકોણ.

ચાપ દ્વારા વર્તુળમાં કેન્દ્ર આગળ આંતરવામાં આવતા ખૂણાઓ એ સંગત ચાપના માપના પ્રમાણમાં હોય છે.

$$\therefore \quad \frac{m\angle AOP}{m\angle AOQ} = \frac{l(\widehat{AP})}{l(\widehat{AQ})}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{m\angle AOP}{m\angle AOQ} = \frac{r}{\frac{1}{2}(\pi r)} \qquad \left(l(\widehat{AQ}) = \frac{1}{4}(2\pi r) = \frac{1}{2}\pi r\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1^c}{m\angle AOQ} = \frac{2}{\pi}$$

$\therefore \quad m\angle AOQ = \frac{\pi}{2}$ રેડિયન

$\therefore$ કાટકોણનું રેડિયન માપ $\frac{\pi}{2}$ છે. આથી રેડિયન એ અચળ ખૂણો છે

$\therefore$ કાટકોણનું રેડિયન માપ $\frac{\pi}{2}$ અને અંશમાપ 90 છે.

$\therefore$ $\frac{\pi^c}{2} = 90^o$

$\therefore$ $\pi^c = 180^o$

1 રેડિયન = $\frac{180}{\pi}$ અંશ = $57^o\ 16'\ 22''$ અથવા 1 અંશ = $\frac{\pi}{180}$ રેડિયન = 0.01746 રેડિયન

આમ, જે ખૂણાનું રેડિયન માપ α હોય તેનું અંશમાપ $\frac{180\alpha}{\pi}$ અને α અંશમાપવાળા ખૂણાનું રેડિયન માપ $\frac{\pi\alpha}{180}$ થાય.

રેડિયન માપ = $\frac{\pi}{180}$ $\times$ અંશમાપ

અંશમાપ = $\frac{180}{\pi}$ $\times$ રેડિયન માપ

દાખલા તરીકે, $\frac{\pi}{6}$ રેડિયન માપવાળા ખૂણાનું અંશમાપ $\frac{180}{\pi} \times \frac{\pi}{6} = 30$ થાય.

120 અંશમાપવાળા ખૂણાનું રેડિયન માપ $120 \times \frac{\pi}{180} = \frac{2\pi^c}{3}$ થાય.

ધારો કે, r ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળમાં l માપની ચાપ $\widehat{AP}$ વર્તુળના કેન્દ્ર આગળ θ રેડિયન માપનો ખૂણો આંતરે છે. અને,

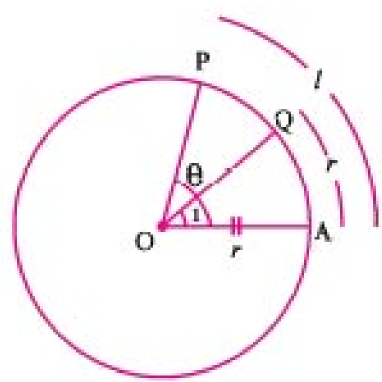
$l(\widehat{AQ}) = r$

$m\angle AOP = \theta$, $m\angle AOQ = 1$

$\therefore$ $\frac{\text{રેડિયન } m\angle AOP}{\text{રેડિયન } m\angle AOQ} = \frac{l(\widehat{AP})}{l(\widehat{AQ})}$

$\therefore$ $\frac{\theta}{1} = \frac{l}{r}$

$\therefore$ $\theta = \frac{l}{r}$



આકૃતિ 4.13

આમ, ખૂણાનું રેડિયન માપ = $\frac{\text{ચાપની લંબાઈ}}{\text{વર્તુળની ત્રિજ્યા}}$

☛ નોંધ ધોરણ 10 સુધી આપણે ફક્ત ખૂણાના અંશમાપ વિશે જ શીખ્યા હતા. આમ, 60^o અંશમાપવાળા ખૂણા A માટે $m\angle A = 60$ લખતા હતા. હવે આપણે ખૂણાના માપના અન્ય એકમ રેડિયન વિશે પણ જાણીએ છીએ. આથી હવે, 60^o માપવાળા ખૂણા A માટે $m\angle A = 60^o$ લખીશું. જો A કાટકોણ હોય, તો $m\angle A = 90^o$ અથવા $m\angle A = \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^c}{2}$ લખીશું. જો ખૂણો A સમબાજુ ત્રિકોણનો ખૂણો હોય, તો $m\angle A = 60$ લખવાના બદલે $m\angle A = 60^o$ અથવા $m\angle A = \frac{\pi}{3}$ કારણ કે $\frac{\pi}{3}$ રેડિયન્સ = 60^o.

અહીં, $m\angle A = x^o$નો અર્થ $\angle A$નું અંશ માપ x છે અને $m\angle A = x$ એટલે $\angle A$નું રેડિયન માપ x છે.

ખૂણાનું અંશમાપ (0, 180) માં હોય છે અને $0^o = 0^c$ તથા $180^o = \pi^c$. આથી ખૂણાનું રેડિયન માપ $(0, \pi)$ માં હોય છે.

ઉદાહરણ 12 : જે ખૂણાનું અંશમાપ $47^o\ 30'$ હોય તેને રેડિયન માપમાં પરિવર્તિત કરો.

ઉકેલ : આપણે જાણીએ છીએ કે $1^o = 60'$

$\therefore \quad 30' = \left(\frac{30}{60}\right)^o = \left(\frac{1}{2}\right)^o$

$47^o\ 30' = \left(47\frac{1}{2}\right)^o = \left(\frac{95}{2}\right)^o$

$\therefore \quad \left(\frac{95}{2}\right)^o = \left(\frac{\pi}{180} \times \frac{95}{2}\right)^c = \left(\frac{19\pi}{72}\right)^c = \frac{19\pi}{72}$

આથી, $47^o\ 30'$ અંશમાપવાળા ખૂણાનું રેડિયન માપ $\left(\frac{19\pi}{72}\right)^c$ અથવા $\frac{19\pi}{72}$ થાય.

ઉદાહરણ 13 : જેનું અંશમાપ $39^o\ 22'\ 30''$ તે ખૂણાનું રેડિયન માપ શોધો.

ઉકેલ : $30'' = \left(\frac{30}{60}\right)' = \left(\frac{1}{2}\right)'$

$\therefore \quad 22'\ 30'' = \left(22\frac{1}{2}\right)' = \left(\frac{45}{2}\right)'$

$\left(\frac{45}{2}\right)' = \left(\frac{45}{2} \times \frac{1}{60}\right)^o = \left(\frac{3}{8}\right)^o$

$\therefore \quad 39^o\ 22'\ 30'' = \left(39\frac{3}{8}\right)^o = \left(\frac{315}{8}\right)^o$

$\left(\frac{315}{8}\right)^o = \left(\frac{315}{8} \times \frac{\pi}{180}\right)^c = \left(\frac{7\pi}{32}\right)^c$

આથી, $39^o\ 22'\ 30''$ માપવાળા ખૂણાનું રેડિયન માપ $\left(\frac{7\pi}{32}\right)^c = \frac{7\pi}{32}$.

ઉદાહરણ 14 : 2 રેડિયન માપવાળા ખૂણાનું અંશમાપ મેળવો.

ઉકેલ : $2^c = \left(\frac{180}{\pi} \times 2\right)^o = \left(\frac{180 \times 7 \times 2}{22}\right)^o$

$= \left(114\frac{6}{11}\right)^o = 114^o + \left(\frac{6}{11} \times 60\right)'$ **$(1^o = 60')$**

$= 114^o + \left(32\frac{8}{11}\right)' = 114^o + 32' + \left(\frac{8}{11} \times 60\right)''$ **$(1' = 60'')$**

$= 114^o + 32' + 44''$

આથી, 2 રેડિયન $= 114^o\ 32'\ 44''$

ઉદાહરણ 15 : 25 સેમી ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળમાં 55 સેમી લંબાઈની ચાપે કેન્દ્ર આગળ આંતરેલા ખૂણાનું અંશમાપ મેળવો.

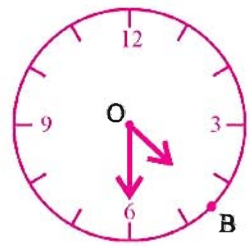
ઉકેલ : અહીં $r = 25$ સેમી, $l = 55$ સેમી

હવે, $\theta = \left(\frac{l}{r}\right)^c$

$\therefore \quad \theta = \left(\frac{55}{25}\right)^c = \left(\frac{11}{5} \times \frac{180}{\pi}\right)^o = \left(\frac{11 \times 36 \times 7}{22}\right) = 126^o$

$\therefore$ ખૂણાનું અંશમાપ 126 છે.

ઉદાહરણ 16 : ઘડિયાળમાં 4:30 વાગે ત્યારે મિનિટ કાંટા અને કલાકના કાંટા વચ્ચેના ખૂણાનું અંશમાપ અને રેડિયન માપ મેળવો.



આકૃતિ 4.14

ઉકેલ : આપણે જાણીએ છીએ કે, કલાકનો કાંટો 12 કલાકમાં એક પરિભ્રમણ પૂરું કરે છે અને મિનિટ કાંટો 60 મિનિટમાં એક પરિભ્રમણ પૂરું કરે છે.

આમ, કલાકના કાંટાએ 12 કલાકમાં આંતરેલા ખૂણાનું માપ = 360°.

$\therefore$ કલાકના કાંટાએ 4 કલાક 30 મિનિટ = $\frac{9}{2}$ કલાકમાં આંતરેલ ખૂણાનું માપ

$$= \left(\frac{360}{12} \times \frac{9}{2}\right)^\circ = 135^\circ$$

હવે, મિનિટ કાંટા દ્વારા 60 મિનિટમાં આંતરેલા ખૂણાનું માપ = 360°

$\therefore$ મિનિટ કાંટા દ્વારા 30 મિનિટમાં આંતરેલા ખૂણાનું માપ = $\left(\frac{360}{60} \times 30\right)^\circ = 180^\circ$

આથી, માંગેલ $m\angle BOC = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$

$$= \left(45 \times \frac{\pi}{180}\right) = \frac{\pi}{4} \text{ રેડિયન}$$

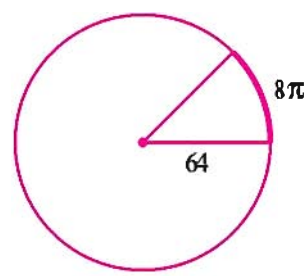
ઉદાહરણ 17 : 4 સેમી ત્રિજ્યાવાળા એક વર્તુળાકાર તારને કાપી 64 સેમી ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળના પરિઘ પર ગોઠવવામાં આવે છે, તો તેણે વર્તુળના કેન્દ્ર આગળ આંતરેલા ખૂણાનું માપ શોધો.

ઉકેલ : વર્તુળાકાર તારની ત્રિજ્યા = 4 સેમી

$\therefore$ તારની લંબાઈ = પરિઘનું માપ

$= 2\pi r$

$= 2\pi \times 4 = 8\pi$



આકૃતિ 4.15

હવે તેને 64 સેમી ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળના પરિઘ પર મૂકતાં,

અહીં $l = 8\pi$, $r = 64$ સેમી

આથી, $\theta = \frac{l}{r} = \frac{8\pi}{64} = \frac{\pi}{8} = \left(\frac{\pi}{8} \times \frac{180}{\pi}\right)^\circ = 22^\circ\ 30'$

ઉદાહરણ 18 : 40 સેમી લંબાઈનું લોલક જો 8 સેમીની ચાપ બનાવે તો તેણે રચેલા ખૂણાનું અંશમાપ શોધો.

ઉકેલ : અહીં $r = 40$ સેમી, $l = 8$ સેમી

આથી, $\theta = \frac{l}{r} = \frac{8}{40} = \frac{1}{5}$ રેડિયન = $\left(\frac{1}{5} \times \frac{180}{\pi}\right)$ અંશ

$= \left(\frac{36 \times 7}{22}\right)^\circ = \left(11\frac{5}{11}\right)^\circ$

$= 11^\circ + \left(\frac{5}{11} \times 60\right)'$

$= 11° + \left(27\frac{3}{11}\right)'$

$= 11° + 27' + 16''$

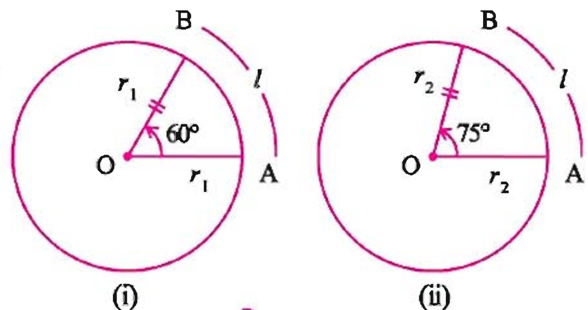
$= 11° \ 27' \ 16''$

ઉદાહરણ 19 : બે વર્તુળોમાં સમાન લંબાઈની ચાપ કેન્દ્ર આગળ 60° અને 75° માપના ખૂણા આંતરે, તો વર્તુળોની ત્રિજ્યાનો ગુણોત્તર શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે r_1 અને r_2 વર્તુળોની ત્રિજ્યાઓ છે અને ચાપની લંબાઈ l છે.

પ્રથમ વર્તુળ માટે,

$\theta = 60° = \left(60 \times \frac{\pi}{180}\right)^c = \left(\frac{\pi}{3}\right)^c$



આકૃતિ 4.16

હવે, $\theta = \frac{l}{r}$

$\therefore \quad r = \frac{l}{\theta}$

$\therefore \quad r_1 = \frac{l}{\frac{\pi}{3}}$

$\therefore \quad r_1 = \frac{3l}{\pi}$ (i)

બીજા વર્તુળ માટે,

$\theta = 75° = \left(75 \times \frac{\pi}{180}\right)^c = \left(\frac{5\pi}{12}\right)^c$

$\therefore \quad r_2 = \frac{12l}{5\pi}$ $\left(r = \frac{l}{\theta}\right)$ (ii)

(i) અને (ii)નો ગુણોત્તર લેતાં,

$\frac{r_1}{r_2} = \frac{\frac{3l}{\pi}}{\frac{12l}{5\pi}}$

$\therefore \quad \frac{r_1}{r_2} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4}$

આથી, $r_1 : r_2 = 5 : 4$

ઉદાહરણ 20 : જો $\frac{\sin A}{\sin B} = \sqrt{2}, \frac{\tan A}{\tan B} = \sqrt{3}$ હોય, તો $\tan$A અને $\tan$B શોધો. A, B $\in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

ઉકેલ : અહીં $\frac{1}{\sin B} = \frac{\sqrt{2}}{\sin A}, \frac{1}{\tan B} = \frac{\sqrt{3}}{\tan A}$

$\therefore \quad \text{cosec } B = \sqrt{2}\,\text{cosec } A, \ \cot B = \sqrt{3}\cot A$

હવે, $cosec^2B - cot^2B = 1$

$\therefore \quad 2cosec^2A - 3cot^2A = 1$

$\therefore \quad 2(1 + cot^2A) - 3cot^2A = 1$

$\therefore \quad 2 + 2cot^2A - 3cot^2A = 1$

$\therefore \quad cot^2A = 1$

$\therefore \quad cotA = \pm 1$

$\therefore \quad tanA = \pm 1$

પરંતુ $0 < A < \frac{\pi}{2}$

$\therefore \quad tanA = 1$

હવે, $cotB = \sqrt{3}cot\ A = \sqrt{3}cot\frac{\pi}{4} = \sqrt{3}$

$\therefore \quad tanB = \frac{1}{\sqrt{3}}$

સ્વાધ્યાય 4.2

1. નીચેના અંશમાપને સંગત રેડિયન માપ શોધો :

(1) $240°$ (2) $75°$ (3) $40°\ 20'$ (4) $110°\ 30'$

2. નીચેના રેડિયન માપને સંગત અંશમાપ શોધો : ($\pi = \frac{22}{7}$)

(1) $\frac{\pi}{15}$ (2) 8 (3) $\frac{\pi}{32}$ (4) $\frac{1}{4}$

3. 3 સેમી ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળમાં 1 સેમી લંબાઈની ચાપે કેન્દ્ર આગળ આંતરેલા ખૂણાનું અંશમાપ શોધો.

4. 60 સેમી વ્યાસવાળા વર્તુળમાં જીવાનું માપ 30 સેમી હોય, તો જીવાને સંગત લઘુચાપનું માપ શોધો.

5. 75 સેમી લંબાઈવાળા લોલકનો છેડો જો 21 સેમીની ચાપ બનાવે, તો તેણે બનાવેલા ખૂણાનું અંશમાપ શોધો.

6. જો વર્તુળોમાં સમાન લંબાઈના ચાપ તેમનાં કેન્દ્ર આગળ $65°$ અને $110°$ માપના ખૂણા આંતરે, તો તેમની ત્રિજ્યાઓનો ગુણોત્તર શોધો.

7. ઘડિયાળમાં 2:30 સમયે કલાક કાંટા અને મિનિટ કાંટા વચ્ચેના ખૂણાના રેડિયન અને અંશમાપ શોધો.

8. જો કોઈ ત્રિકોણના ખૂણા સમાંતર શ્રેણીમાં હોય અને સૌથી મોટા ખૂણાનું માપ $\frac{5\pi}{12}$ હોય, તો સૌથી નાના ખૂણાનું માપ શોધો.

9. જો $\frac{sin\ A}{sin\ B} = \sqrt{3}$, $\frac{tan\ A}{tan\ B} = 3$, તો sin^2A શોધો.

*

4.13 યુગ્મ તથા અયુગ્મ વિધેયો

જો $A \subset R$, $B \subset R$ માટે વિધેય $f : A \to B$ હોય અને

$\forall x, -x \in A, f(-x) = f(x)$ હોય તો f ને યુગ્મ વિધેય (Even Function) કહેવાય છે અને જો $\forall x, -x \in A, f(-x) = -f(x)$ હોય, તો f ને અયુગ્મ વિધેય (Odd Function) કહેવાય છે.

ઉદાહરણ તરીકે $f : R \to R, f(x) = x^2$ નો ગુણધર્મ $(-x)^2 = x^2$

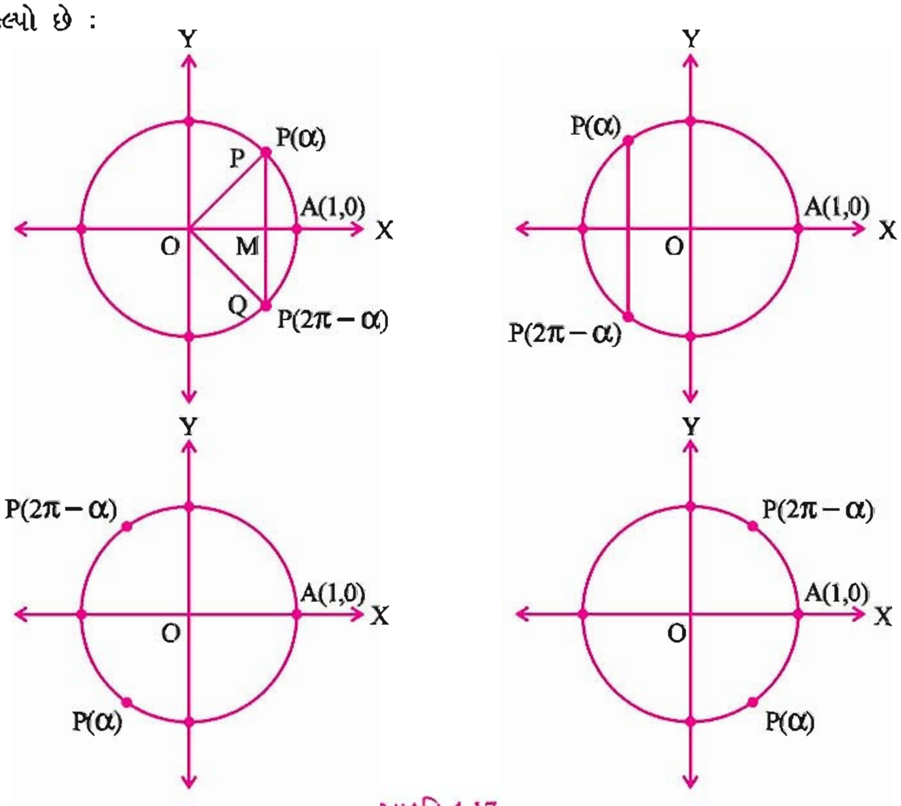
$\therefore$ પ્રત્યેક $x \in R$ માટે $f(-x) = f(x)$ હોવાથી f એ યુગ્મ વિધેય છે.

તે જ રીતે $f : R \to R, f(x) = x^3$ માટે $(-x)^3 = -x^3$.

એટલે કે પ્રત્યેક $x \in R$ માટે $f(-x) = -f(x)$ થતું હોવાથી f એ અયુગ્મ વિધેય છે.

sin એ અયુગ્મ વિધેય છે અને *cos* એ યુગ્મ વિધેય છે તેમ સાબિત કરીશું.

ધારો કે $0 < \alpha < 2\pi$. બિંદુઓ $P(\alpha)$ અને $P(2\pi - \alpha)$ માટે નીચેની આકૃતિઓમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે ચાર વિકલ્પો છે :



આકૃતિ 4.17

જો $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ હોય, તો $P(\alpha)$ પ્રથમ ચરણમાં હોય અને માટે $P(2\pi - \alpha)$ ચોથા ચરણમાં આવે. ચાપ $\widehat{AP}$ ની લંબાઈ તથા ચાપ $\widehat{AQ}$ ની લંબાઈ સમાન થાય અને તેમના માપ α થાય.

આમ, $m\angle AOP = m\angle AOQ$

હવે P અને Qને જોડતો રેખાખંડ $\overline{PQ}$ રચો. ધારો કે $\overline{PQ}$, X-અક્ષને Mમાં છેદે છે.

$P(\alpha)$ અને $P(2\pi - \alpha)$ ને એકમ વર્તુળ ઉપર P તથા Q દ્વારા દર્શાવ્યા છે.

$\Delta POM \cong \Delta QOM$

$\therefore$ $\overline{PQ}$ એ X-અક્ષને લંબ છે.

$\therefore$ Pના યામ (x, y) અને Qના યામ $(x, -y)$ થાય.

પરંતુ $P(\alpha)$ અને $P(2\pi - \alpha)$ એકમ વર્તુળ પર હોવાથી તેમના યામ અનુક્રમે $(cos\alpha, sin\alpha)$ અને $(cos(2\pi - \alpha), sin(2\pi - \alpha))$ લખી શકાય.

$\therefore$ $(x, y) = (cos\alpha, sin\alpha)$ અને $(x, -y) = (cos(2\pi - \alpha), sin(2\pi - \alpha))$

$\therefore$ $x = cos\alpha, y = sin\alpha$ અને $x = cos(2\pi - \alpha), -y = sin(2\pi - \alpha)$

$cos\alpha = cos(2\pi - \alpha) = x, sin\alpha = y, sin(2\pi - \alpha) = -y$

વળી, sin અને cos વિધેયોના આવર્તમાન 2π છે.

$cos\alpha = x, cos(-\alpha) = x, sin\alpha = y, sin(-\alpha) = -y$

$\therefore$ $cos\alpha = cos(-\alpha) = x, sin(-\alpha) = -y = -sin\alpha$

આ જ રીતે $P(\alpha)$ કોઈ પણ ચરણમાં હોય, તો ઉપર્યુક્ત પરિણામો સાબિત કરી શકાય.

હવે, ધારો કે $\theta \in R$ અને ધારો કે $\theta = 2n\pi + \alpha, 0 < \alpha < 2\pi$

$\therefore -\theta = -2n\pi - \alpha$

$\therefore -\theta = -2n\pi - \alpha + 2\pi - 2\pi$

$\therefore -\theta = 2\pi(-1 - n) + (2\pi - \alpha)$ અને $0 < (2\pi - \alpha) < 2\pi$

cos વિધેયનું આવર્તમાન 2π છે.

$cos\theta = cos\alpha$ અને $cos(-\theta) = cos(2\pi - \alpha) = cos(-\alpha)$ **(cosનું આવર્તમાન 2π)**

પરંતુ, $cos\alpha = cos(-\alpha)$

આમ, $cos\theta = cos(-\theta)$

$\therefore$ આ જ રીતે સાબિત કરી શકાય કે, $sin(-\theta) = -sin\theta$.

આમ, sin એ અયુગ્મ વિધેય છે અને cos એ યુગ્મ વિધેય છે.

આમ, $\forall\ \theta \in R, cos(-\theta) = cos\theta, sin(-\theta) = -sin\theta$

આપણે વાસ્તવિક સંખ્યાનાં ત્રિવિધેયોનો અભ્યાસ કર્યો.

જો ખૂણાનું રેડિયન માપ θ હોય તો આપણે $cos\theta$, $sin\theta$ વગેરે વાસ્તવિક સંખ્યા θ માટે મેળવીએ છીએ. ખૂણાનું રેડિયન માપ $(0, \pi)$ માં હોવાથી મર્યાદિત પ્રદેશ $(0, \pi)$ માં ત્રિકોણમિતિય લેવાથી ખૂણા-સંબંધી ત્રિકોણમિતિય વિધેય મળે.

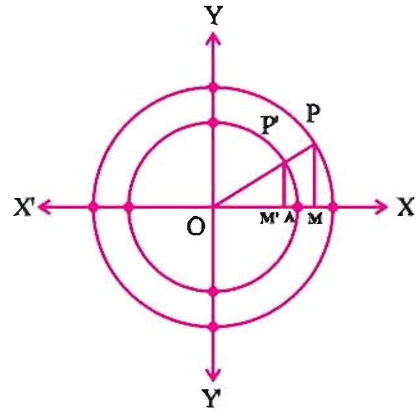
4.14 કાટકોણ ત્રિકોણ પરથી મળતાં ત્રિકોણમિતિય વિધેયો

યામ-સમતલમાં ΔMOPમાં $\angle M$ એ કાટકોણ છે.

ધારો કે O કેન્દ્રવાળું એકમ વર્તુળ $\overrightarrow{OP}$ ને બિંદુ P' માં છેદે છે. ધારો કે $\overline{P'M'}$ અને $\overline{PM}$ X-અક્ષને લંબ છે. આથી $\overleftrightarrow{PM} \parallel \overleftrightarrow{P'M'}$.

$\therefore \quad \Delta POM \sim \Delta P'OM'$

$\therefore \quad \frac{OP}{OP'} = \frac{OM}{OM'} = \frac{PM}{P'M'}$



આકૃતિ 4.18

જો $l(\widehat{AP'}) = \theta$ હોય તો P' એકમ વર્તુળ પર હોવાથી $P'(x, y) = (cos\theta, sin\theta)$ અને OM' અને M'P' અનુક્રમે બિંદુ P'ના x અને y-યામ થાય.

$OM' = cos\theta$, $M'P' = sin\theta$ અને $OP' = 1$.

$\therefore \quad \frac{OP}{1} = \frac{OM}{cos\theta} = \frac{PM}{sin\theta}$

$\therefore \quad cos\theta = \frac{OM}{OP}, \; sin\theta = \frac{PM}{OP}$

હવે, $\angle P'OM'$નું રેડિયન માપ θ હોવાથી $\angle POM$નું રેડિયન માપ પણ θ થાય.

$\therefore \quad \Delta POM$માં $cos\theta = \frac{OM}{OP} = \frac{\text{ખૂણાની પાસેની બાજુ}}{\text{કર્ણ}}$

અને $sin\theta = \frac{PM}{OP} = \frac{\text{ખૂણાની સામેની બાજુ}}{\text{કર્ણ}}$

$\therefore \quad cos\left(\frac{180\theta}{\pi}\right)^{\circ} = \frac{\text{પાસેની બાજુ}}{\text{કર્ણ}}, \quad sin\left(\frac{180\theta}{\pi}\right)^{\circ} = \frac{\text{સામેની બાજુ}}{\text{કર્ણ}}$

$\left(\frac{180\theta}{\pi}\right)^{\circ} = \alpha$ લેતાં,

$$cos\alpha = \frac{\text{પાસેની બાજુ}}{\text{કર્ણ}}, \; sin\alpha = \frac{\text{સામેની બાજુ}}{\text{કર્ણ}}$$

આમ, એકમ વર્તુળ પર વ્યાખ્યાયિત ત્રિકોણમિતિય વિધેયો અને કાટકોણ ત્રિકોણને આધારે વ્યાખ્યાયિત ત્રિકોણમિતિય વિધેયો ભિન્ન નથી. અહીં જોઈએ કે કાટકોણ ત્રિકોણને આધારિત ત્રિકોણમિતિય ગુણોત્તરોનો મર્યાદિત અર્થ છે, કારણ કે અહીં ખૂણાના અંશમાપ (0, 90)માં આવેલાં છે. એકમ વર્તુળને આધારે આપવામાં આવેલી વ્યાખ્યામાં ખૂણાનું માપ ગમે તે હોઈ શકે, ભલે ખૂણો રેડિયનમાં માપવામાં આવે કે અંશમાં માપવામાં આવે.

4.15 પ્રત્યેક ચરણમાં ત્રિકોણમિતિય વિધેયનાં મૂલ્યો

આપણે જાણીએ છીએ કે, પ્રત્યેક વાસ્તવિક સંખ્યા θને સંગત એકમ વર્તુળ પર અનન્ય બિંદુ $P(\theta)$ મળે. આ બિંદુના યામ (x, y) હોય, તો *cos* અને *sin* વિધેયોની વ્યાખ્યા પરથી $x = cos\theta$, $y = sin\theta$.

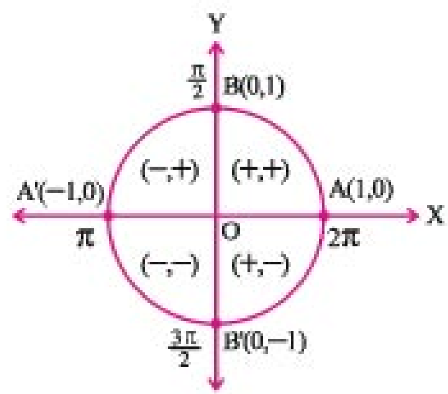
જો $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ હોય તો $P(\theta) = P(x, y)$ પ્રથમ ચરણમાં આવે અને પ્રથમ ચરણમાં $x > 0$ અને $y > 0$.

$\therefore \quad x = cos\theta > 0, y = sin\theta > 0.$

જો $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ હોય તો $P(\theta) = P(x, y)$ દ્વિતીય ચરણમાં આવે અને આ ચરણમાં $x < 0$ અને $y > 0$.
$\therefore \quad x = cos\theta < 0, y = sin\theta > 0.$

જો $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ હોય તો $P(\theta) = P(x, y)$ તૃતીય ચરણમાં આવે અને આ ચરણમાં $x < 0$, $y < 0$ હોવાથી $x = cos\theta < 0$, $y = sin\theta < 0$.

જો $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$ હોય તો $P(\theta) = P(x, y)$ ચતુર્થ ચરણમાં આવે અને આ ચરણમાં $x > 0$, $y < 0$ થાય. આમ, $x = cos\theta > 0$ અને $y = sin\theta < 0$.



આકૃતિ 4.19

હવે $tan\theta = \frac{sin\theta}{cos\theta}$, $cot\theta = \frac{cos\theta}{sin\theta}$, $cosec\theta = \frac{1}{sin\theta}$ અને $sec\theta = \frac{1}{cos\theta}$ હોવાથી વિવિધ ચરણમાં આ વિધેયોની કિંમત મેળવી શકાય. તે નીચેના કોષ્ટકમાં દર્શાવી છે :

વિધેય \ ચરણ	પ્રથમ	દ્વિતીય	તૃતીય	ચતુર્થ
sin	+	+	−	−
cos	+	−	−	+
tan	+	−	+	−
cot	+	−	+	−
cosec	+	+	−	−
sec	+	−	−	+

ઉદાહરણ 21 : જો $P(\theta)$ બીજા ચરણમાં હોય અને $cot\theta = \frac{-5}{12}$ હોય, તો બાકીનાં ત્રિકોણમિતિય વિધેયનાં મૂલ્યો શોધો.

ઉકેલ : $cot\theta = \frac{-5}{12}$. આથી $tan\theta = \frac{-12}{5}$

હવે, $sec^2\theta = 1 + tan^2\theta = 1 + \frac{144}{25} = \frac{169}{25}$

$\therefore \quad sec\theta = \pm\frac{13}{5}$

દ્વિતીય ચરણમાં $sec\theta < 0$. માટે $sec\theta = -\frac{13}{5}$. આથી $cos\theta = \frac{-5}{13}$

વળી, આપણે જાણીએ છીએ કે $sin\theta = cos\theta \cdot tan\theta = \left(\frac{-5}{13}\right)\left(\frac{-12}{5}\right) = \frac{12}{13}$

$\therefore \quad sin\theta = \frac{12}{13}$ અને $cosec\theta = \frac{13}{12}$

ઉદાહરણ 22 : $cos\theta = \frac{(a+b)^2}{4ab}$, $ab > 0$ હોય તો $a = b$ સાબિત કરો.

ઉકેલ : $|cos\theta| \le 1$

$\therefore \quad \frac{(a+b)^2}{4|ab|} \le 1$

$\therefore \quad (a + b)^2 \le 4ab$ **$(ab > 0)$**

$\therefore \quad (a - b)^2 \le 0$

પરંતુ $(a - b)^2 \nless 0$

$\therefore \quad a - b = 0$

$\therefore \quad a = b$

ઉદાહરણ 23 : $tan\theta = 2 - \sqrt{3}$ હોય તો $cos\theta$ શોધો. $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

ઉકેલ : $sec^2\theta = 1 + tan^2\theta$

$= 1 + (2 - \sqrt{3})^2$

$= 1 + (4 - 4\sqrt{3} + 3)$

$= 8 - 4\sqrt{3}$

$= 8 - 2\sqrt{12}$

$= (\sqrt{6} - \sqrt{2})^2$

$\therefore \quad sec\theta = \sqrt{6} - \sqrt{2}$ **$\left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$**

$\therefore \quad cos\theta = \frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$

$\therefore \quad cos\theta = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

ઉદાહરણ 24 : જો $tan\theta = x - \frac{1}{4x}$ હોય, તો $sec\theta + tan\theta$ શોધો.

ઉકેલ : અહીં $tan\theta = x - \frac{1}{4x}$

$\therefore \quad tan^2\theta = x^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{16x^2}$

$sec^2\theta = 1 + tan^2\theta$

$= 1 + \left(x^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{16x^2}\right)$

$= x^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{16x^2} = \left(x + \frac{1}{4x}\right)^2$

$\therefore \quad sec\theta = x + \frac{1}{4x}$ અથવા $-x - \frac{1}{4x}$

$\therefore \quad sec\theta + tan\theta = x + \frac{1}{4x} + x - \frac{1}{4x} = 2x$

અથવા $sec\theta + tan\theta = -x - \frac{1}{4x} + x - \frac{1}{4x} = -\frac{1}{2x}$

સ્વાધ્યાય 4.3

1. જો $P(\theta)$ બીજા ચરણમાં હોય અને $cosec\theta = \frac{5}{3}$ હોય, તો અન્ય ત્રિકોણમિતિય વિધેયોનાં મૂલ્યો મેળવો.
2. જો $\theta \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ હોય તથા $sin\theta = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$ હોય, તો અન્ય ત્રિકોણમિતિય વિધેયોનાં મૂલ્યો મેળવો.
3. જો $cos\theta = \frac{-1}{2}, \pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ હોય, તો $5\,tan^2\theta - 6\,cosec^2\theta$નું મૂલ્ય મેળવો.
4. જો $sin\theta = \frac{3}{5}, tan\alpha = \frac{1}{2}$ તથા $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ અને $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ હોય, તો $4\,tan\theta - \sqrt{5}\,sec\alpha$નું મૂલ્ય શોધો.
5. જો $sec\theta + tan\theta = p$ હોય, તો $sec\theta$, $tan\theta$ અને $sin\theta$નાં મૂલ્ય pની અભિવ્યક્તિમાં મેળવો.
6. જો $sin\theta = \frac{4}{5}$ હોય, તો $\frac{5cos\theta + 4cosec\theta + 3tan\theta}{4cot\theta + 3sec\theta + 5sin\theta}$ નું મૂલ્ય શોધો. $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$.
7. સાબિત કરો કે, $\sqrt{\frac{1 - sin\theta}{1 + sin\theta}} = \begin{cases} sec\theta - tan\theta, & 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \\ -sec\theta + tan\theta, & \frac{\pi}{2} < \theta < \pi \end{cases}$

*

પ્રકીર્ણ ઉદાહરણો

ઉદાહરણ 25 : જો $cos\alpha + sin\alpha = \sqrt{2}\,cos\alpha$ હોય, તો $cos\alpha - sin\alpha$ શોધો. $(0 < \alpha < \frac{\pi}{4})$

ઉકેલ : $cos\alpha + sin\alpha = \sqrt{2}\,cos\alpha$

$\therefore \quad (cos\alpha + sin\alpha)^2 = 2cos^2\alpha$

$\therefore \quad cos^2\alpha + 2sin\alpha\ cos\alpha + sin^2\alpha = 2cos^2\alpha$

$\therefore \quad 1 + 2sin\alpha\ cos\alpha = 2(1 - sin^2\alpha)$

$\therefore \quad 2sin^2\alpha = 1 - 2sin\alpha\ cos\alpha$

$= sin^2\alpha + cos^2\alpha - 2sin\alpha\ cos\alpha$

$= (cos\alpha - sin\alpha)^2$

અહીં $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$ હોવાથી $sin\alpha > 0$ અને $cos\alpha > sin\alpha$

$\therefore \quad \sqrt{2}\,sin\alpha = cos\alpha - sin\alpha$

$\therefore \quad cos\alpha - sin\alpha = \sqrt{2}\,sin\alpha$

બીજી રીત : $cos\alpha + sin\alpha = \sqrt{2}\,cos\alpha$

$\therefore \quad sin\alpha = (\sqrt{2} - 1)\ cos\alpha$

$\therefore \quad cos\alpha = \frac{sin\alpha}{\sqrt{2}-1} \times \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1}$

$\therefore \quad cos\alpha = (\sqrt{2} + 1)\ sin\alpha$ $\quad ((\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1) = (\sqrt{2})^2 - 1 = 1)$

$\therefore \quad cos\alpha = \sqrt{2}\,sin\alpha + sin\alpha$

$\therefore \quad cos\alpha - sin\alpha = \sqrt{2}\,sin\alpha$

ઉદાહરણ 26 : જો $\frac{cos^4\alpha}{cos^2\beta} + \frac{sin^4\alpha}{sin^2\beta} = 1$ હોય, તો સાબિત કરો કે,

(a) $sin^4\alpha + sin^4\beta = 2sin^2\alpha\ sin^2\beta$ (b) $\frac{cos^4\beta}{cos^2\alpha} + \frac{sin^4\beta}{sin^2\alpha} = 1$

ઉકેલ : અહીં, $\frac{cos^4\alpha}{cos^2\beta} + \frac{sin^4\alpha}{sin^2\beta} = 1$

$\therefore \quad \frac{(1 - sin^2\alpha)^2}{1 - sin^2\beta} + \frac{sin^4\alpha}{sin^2\beta} = 1$

ધારો કે $sin^2\alpha = m$ અને $sin^2\beta = n$

$\therefore \quad \frac{(1 - m)^2}{1 - n} + \frac{m^2}{n} = 1$

$\therefore \quad n(1 - m)^2 + m^2(1 - n) = n(1 - n)$

$\therefore \quad n(1 - 2m + m^2) + m^2(1 - n) = n - n^2$

$\therefore \quad n - 2mn + m^2n + m^2 - m^2n = n - n^2$

$\therefore \quad n^2 - 2mn + m^2 = 0$

$\therefore \quad (n - m)^2 = 0$

$\therefore \quad n = m$

$\therefore \quad sin^2\alpha = sin^2\beta$ (i)

$\therefore \quad 1 - cos^2\alpha = 1 - cos^2\beta$

$\therefore \quad cos^2\alpha = cos^2\beta$ (ii)

(a) $sin^4\alpha + sin^4\beta = (sin^2\alpha - sin^2\beta)^2 + 2sin^2\alpha\ sin^2\beta$ $(a^2 + b^2 = (a - b)^2 + 2ab)$

$= (sin^2\alpha - sin^2\alpha)^2 + 2sin^2\alpha\ sin^2\beta$

$= 2sin^2\alpha\ sin^2\beta$

(b) $\frac{cos^4\beta}{cos^2\alpha} + \frac{sin^4\beta}{sin^2\alpha} = \frac{cos^4\beta}{cos^2\beta} + \frac{sin^4\beta}{sin^2\beta}$ (i) અને (ii)

$= cos^2\beta + sin^2\beta = 1$

ઉદાહરણ 27 : જો $tan^2\theta = 1 - a^2$ હોય, તો $sec\theta + tan^3\theta\ cosec\theta = (2 - a^2)^{\frac{3}{2}}$ સાબિત કરો. $(0 < \theta < \frac{\pi}{2})$

ઉકેલ : ડા.બા. $= sec\theta + tan^3\theta\ cosec\theta$

$= \frac{1}{cos\theta} + \frac{sin^3\theta}{cos^3\theta} \times \frac{1}{sin\theta}$

$= \frac{1}{cos\theta} + \frac{sin^2\theta}{cos^3\theta}$

$= \frac{cos^2\theta + sin^2\theta}{cos^3\theta}$

$= \frac{1}{cos^3\theta}$

$= sec^3\theta$

$= (sec^2\theta)^{\frac{3}{2}}$ $\left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$

$= (1 + tan^2\theta)^{\frac{3}{2}}$

$= (1 + 1 - a^2)^{\frac{3}{2}}$

$= (2 - a^2)^{\frac{3}{2}}$ = જ.બા.

ઉદાહરણ 28 : જો x એ કોઈ પણ શૂન્યેતર વાસ્તવિક સંખ્યા હોય, તો સાબિત કરો કે $cos\theta$ અને $sin\theta$ એ $x + \frac{1}{x}$ થઈ શકે નહિ.

ઉકેલ : ધારો કે $x \in R - \{0\}$ છે.

વિકલ્પ 1 : $x > 0$

$$x + \frac{1}{x} = (\sqrt{x})^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 - 2\sqrt{x} \times \frac{1}{\sqrt{x}} + 2\sqrt{x} \times \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$= \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 + 2$$

$$\therefore \quad x + \frac{1}{x} \geq 2$$

વિકલ્પ 2 : $x < 0$

ધારો કે $x = -y$ અને $y > 0$

$$\therefore \quad x + \frac{1}{x} = -y - \frac{1}{y} = -\left(y + \frac{1}{y}\right)$$

હવે, $y > 0$ હોવાથી ઉપર દર્શાવ્યા મુજબ $y + \frac{1}{y} \geq 2$.

$$-\left(y + \frac{1}{y}\right) \leq -2$$

$$\therefore \quad \left(x + \frac{1}{x}\right) \leq -2$$

આમ, $x > 0$ માટે $\left(x + \frac{1}{x}\right) \geq 2$ તથા $x < 0$ માટે $\left(x + \frac{1}{x}\right) \leq -2$.

પ્રત્યેક $\theta \in R$ માટે $-1 \leq sin\theta \leq 1$ અને $-1 \leq cos\theta \leq 1$.

આમ, $sin\theta$ અને $cos\theta$ એ $x + \frac{1}{x}$ બરાબર થઈ શકે નહિ.

સ્વાધ્યાય 4

1. જો $a, b, c \in R^+$ અને $a \neq b, b \neq c, c \neq a$ હોય, તો કોઈ પણ $\theta \in R$ માટે $sec\theta = \frac{ab + bc + ca}{a^2 + b^2 + c^2}$ થાય નહિ તેમ સાબિત કરો.

2. $\frac{sin\alpha}{cos\alpha + sin\beta} + \frac{sin\beta}{cos\beta - sin\alpha} = \frac{sin\alpha}{cos\alpha - sin\beta} + \frac{sin\beta}{cos\beta + sin\alpha}$ સાબિત કરો.

3. જો $f(n) = cos^n\theta + sin^n\theta$ હોય, તો $2f(6) - 3f(4) + 1 = 0$ સાબિત કરો.

4. જો $m\, cos\alpha - n\, sin\alpha = p$ હોય, તો $m\, sin\alpha + n\, cos\alpha = \pm\sqrt{m^2 + n^2 - p^2}$ સાબિત કરો.

5. જો $a\, cos^3x + 3a\, cos\, x\, sin^2 x = m$ અને $a\, sin^3x + 3a\, cos^2x\, sin\, x = n$ હોય, તો $(m + n)^{\frac{2}{3}} + (m - n)^{\frac{2}{3}} = 2a^{\frac{2}{3}}$ સાબિત કરો.

6. જો $sin\theta + cos\theta = m$ હોય, તો $sin^6\theta + cos^6\theta = \frac{4 - 3(m^2 - 1)^2}{4}$ સાબિત કરો.

7. $\dfrac{1 + sec^2A\ cot^2B}{1 + sec^2C\ cot^2B} = \dfrac{1 + tan^2A\ cos^2B}{1 + tan^2C\ cos^2B}$ સાબિત કરો.

8. $\dfrac{2 - 3sin\theta + sin^3\theta}{sin\theta + 2} = 2sin\theta\ (sin\theta - 1) + cos^2\theta$ સાબિત કરો.

9. $cot^2x - cos^2x = cos^2x\ cot^2x$ સાબિત કરો અને તે પરથી $cot^2x \geq cos^2x$ તારવો.

10. જો $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ હોય, તો $sin\theta + cos\theta + tan\theta + cot\theta > sec\theta + cosec\theta$ સાબિત કરો.

11. સાબિત કરો કે $2sec^2\theta - sec^4\theta - 2cosec^2\theta + cosec^4\theta = \dfrac{1 - tan^8\theta}{tan^4\theta}$.

12. સાબિત કરો કે $\dfrac{tan^2\theta(cosec\theta - 1)}{1 + cos\theta} = \dfrac{(1 - cos\theta)cosec^2\theta}{cosec\theta + 1}$.

13. જો $a^2\ sec^2\alpha - b^2\ tan^2\alpha = c^2$ હોય, તો $sin^2\alpha = \dfrac{c^2 - a^2}{c^2 - b^2}$ સાબિત કરો.

14. નીચે આપેલું દરેક વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલા વિકલ્પો (a), (b), (c) અથવા (d)માંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરીને ☐ માં લખો :

(1) જો $sin\theta + cosec\theta = 2$ હોય, તો $sin^6\theta + cosec^6\theta = ...$ ☐

(a) 1 (b) 64 (c) 2 (d) 16

(2) જો $f(x) = cos^2x + sec^2x$, હોય, તો ...... ☐

(a) $f(x) < 1$ (b) $f(x) = 1$ (c) $0 < f(x) < 1$ (d) $f(x) \geq 2$

(3) જો $\theta \in R$ તો નીચેના પૈકી કયું વિધાન સાચું નથી ? ☐

(a) $sin\theta = -\frac{1}{5}$ (b) $cos\theta = 1$ (c) $sec\theta = \frac{1}{2}$ (d) $tan\theta = 40$

(4) જો $tan\theta = 3$ હોય અને $P(\theta)$ ત્રીજા ચરણમાં હોય તો $sin\theta = ...$ ☐

(a) $\frac{1}{\sqrt{10}}$ (b) $\frac{-1}{\sqrt{10}}$ (c) $\frac{-3}{\sqrt{10}}$ (d) $\frac{3}{\sqrt{10}}$

(5) નીચેના પૈકી કયું વિધાન સત્ય છે ? ☐

(a) $sin\ 1^\circ > sin\ 1$ (b) $sin\ 1^\circ < sin\ 1$

(c) $sin\ 1^\circ = sin\ 1$ (d) $sin\ 1^\circ = \frac{\pi}{180}\ sin\ 1$

(6) કેન્દ્ર આગળ 45°નો ખૂણો બનાવતી 28 સેમી ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળના ચાપની લંબાઈ ...... છે. ☐

(a) 12 સેમી (b) 16 સેમી (c) 22 સેમી (d) 24 સેમી

(7) ઘડિયાળમાં 8:30 વાગે કલાક કાંટા અને મિનિટ કાંટા વચ્ચેના ખૂણાનું માપ ...... છે. ☐

(a) 80° (b) 75° (c) 60° (d) 105°

(8) 7 સેમી ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળાકાર તારને કાપી 12 સેમી ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળના પરિઘ પર ગોઠવ્યો હોય, તો તેણે કેન્દ્ર પાસે બનાવેલા ખૂણાનું માપ = ...

(a) 50° (b) 210° (c) 100° (d) 60°

(9) 15π સેમીના લંબાઈવાળું ચાપ કેન્દ્ર પાસે $\frac{3\pi}{4}$ માપનો ખૂણો બનાવતું હોય, તો વર્તુળની ત્રિજ્યા ......

(a) 10 સેમી (b) 20 સેમી (c) $11\frac{1}{4}$ સેમી (d) $22\frac{1}{2}$ સેમી

(10) જો $tan\theta = x - \frac{1}{4x}$ હોય, તો $sec\theta - tan\theta$ = ...

(a) $-2x$ અથવા $\frac{1}{2x}$ (b) $\frac{-1}{2x}$ અથવા $2x$ (c) $2x$ (d) $\frac{-1}{2x}$

(11) જો $\frac{cosA}{3} = \frac{cosB}{4} = \frac{1}{5}$, $\frac{-\pi}{2} < A < 0$, $\frac{-\pi}{2} < B < 0$ હોય, તો $2sinA + 4sinB$નું મૂલ્ય ...... છે.

(a) -4 (b) 0 (c) 2 (d) 4

(12) જો $\pi < \theta < 2\pi$ હોય તો $\sqrt{\frac{1+cos\theta}{1-cos\theta}}$ = ...

(a) $cosec\theta + cot\theta$ (b) $cosec\theta - cot\theta$

(c) $-cosec\theta + cot\theta$ (d) $-cosec\theta - cot\theta$

(13) જો $cosec\theta - cot\theta = 2$, $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ હોય તો $cos\theta$ = ...

(a) $\frac{-3}{5}$ (b) $\frac{-5}{3}$ (c) $\frac{5}{3}$ (d) $\frac{3}{5}$

(14) જો $sec\theta = m$, $tan\theta = n$ હોય, તો $\frac{1}{m}\left\{(m+n) + \frac{1}{m+n}\right\}$ = ...

(a) 2 (b) mn (c) $2m$ (d) $2n$

(15) $sin^6\theta + cos^6\theta + 3sin^2\theta\ cos^2\theta$નું મૂલ્ય ...... છે.

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3થી વધુ

(16) $tan^2\alpha + cot^2\alpha$ ......

(a) ≥ -2 (b) ≥ 2 (c) ≤ 2 (d) ≤ -2

(17) જો $cosec\theta + cot\theta = \frac{5}{2}$ હોય, તો $tan\theta$નું મૂલ્ય ...... છે.

(a) $\frac{14}{24}$ (b) $\frac{20}{21}$ (c) $\frac{21}{20}$ (d) $\frac{15}{16}$

(18) $1 - \frac{sin^2\theta}{1 + cos\theta} + \frac{1 + cos\theta}{sin\theta} - \frac{sin\theta}{1 - cos\theta} = ...$

(a) 0 (b) 1 (c) $sin\theta$ (d) $cos\theta$

(19) જો $sec\theta = \sqrt{2}$, $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$ હોય તો $\frac{1 + tan\theta + cosec\theta}{1 + cot\theta - cosec\theta} = ...$

(a) $-\sqrt{2}$ (b) -1 (c) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (d) 0

(20) જો $p = a\ cos^2\theta\ sin\theta$ અને $q = a\ sin^2\theta\ cos\theta$ હોય, તો $\frac{(p^2 + q^2)^3}{p^2q^2} = ...$

(a) $\frac{1}{a}$ (b) a^2 (c) a (d) a^3

(21) જો $secA - tanA = \frac{a + 1}{a - 1}$ હોય, તો $cosA = ...$

(a) $\frac{2a}{a^2 - 1}$ (b) $\frac{2a}{a^2 + 1}$ (c) $\frac{a^2 + 1}{a^2 - 1}$ (d) $\frac{a^2 - 1}{a^2 + 1}$

સારાંશ

1. ત્રિકોણમિતિય બિંદુ, ત્રિકોણમિતિય બિંદુ વિધેય, આવર્તમાન
2. *sine* વિધેય, *cosine* વિધેય, તેમનાં શૂન્ય અને વિસ્તાર, મૂળભૂત નિત્યસમ
3. અન્ય ત્રિવિધેયો, તેમના વિસ્તાર અને નિત્યસમ
4. વધતાં અને ઘટતાં વિધેયો
5. અંશમાપ અને રેડિયન માપ
6. યુગ્મ અને અયુગ્મ વિધેયો
7. કાટકોણ ત્રિકોણ અને ત્રિવિધેયો
8. પ્રત્યેક ચરણમાં ત્રિવિધેયનાં મૂલ્ય

પ્રકરણ 5

ત્રિકોણમિતીય વિધેયોનાં વિશિષ્ટ મૂલ્યો અને આલેખો

5.1 પ્રાસ્તાવિક

આગળના પ્રકરણમાં આપણે ત્રિકોણમિતીય વિધેયો, તેમના પ્રદેશો, શૂન્યો, વિસ્તાર તથા આવર્તમાન વિશે ખ્યાલ મેળવ્યો. હવે આપણે ચલની વિશિષ્ટ કિંમતો માટે ત્રિકોણમિતીય વિધેયોનાં મૂલ્યો મેળવીશું અને ત્રિકોણમિતીય વિધેયોના આલેખો જોઈશું.

5.2 અક્ષો પરનાં ત્રિ-બિંદુ આગળ ત્રિ-વિધેયનાં મૂલ્યો

આપણે જાણીએ છીએ કે પ્રત્યેક $\theta \in R$ને અનુરૂપ અનન્ય ત્રિ-બિંદુ $P(\theta)$ આપણને એકમ વર્તુળ પર મળે. એકમ વર્તુળ X-અક્ષને $A(1, 0)$ અને $A'(-1, 0)$માં છેદે છે અને Y-અક્ષને $B(0, 1)$ અને $B'(0, -1)$માં છેદે છે. આપણે એ જાણીએ છીએ કે ત્રિ-બિંદુ $P(\theta)$નો x-યામ $cos\theta$ છે અને y-યામ એ $sin\theta$ છે.

વાસ્તવિક સંખ્યા 0 ને સંગત ત્રિ-બિંદુ $P(0) = A(1, 0)$ છે, માટે $cos 0 = 1$ અને $sin 0 = 0$.

વાસ્તવિક સંખ્યા $\frac{\pi}{2}$ને સંગત ત્રિ-બિંદુ $P\left(\frac{\pi}{2}\right) = B(0, 1)$ છે,

માટે $cos\frac{\pi}{2} = 0$, $sin\frac{\pi}{2} = 1$.

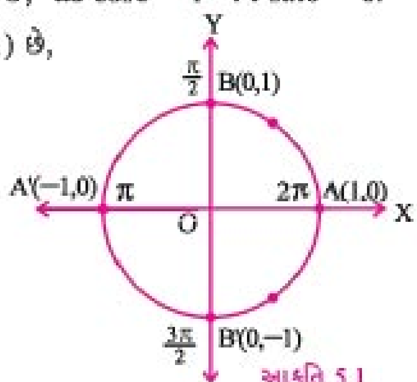
તે જ રીતે $P(\pi) = A'(-1, 0)$ છે,

માટે $cos\pi = -1$, $sin\pi = 0$.

તે જ રીતે $P\left(\frac{3\pi}{2}\right) = B'(0, -1)$ છે,

માટે $cos\frac{3\pi}{2} = 0$, $sin\frac{3\pi}{2} = -1$.

આપણે જાણીએ છીએ કે $P(2\pi)$ એ $A(1, 0)$ છે,

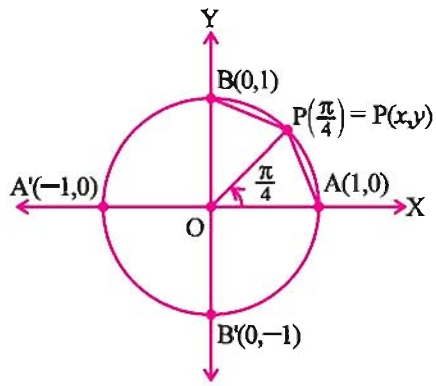


આકૃતિ 5.1

માટે $cos\ 2\pi = 1$, $sin\ 2\pi = 0$. ઉપર મેળવેલ વિશિષ્ટ મૂલ્યોને કોષ્ટક સ્વરૂપે લખતાં :

θ	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
cos	1	0	−1	0	1
sin	0	1	0	−1	0
tan	0	$\frac{\pi}{2}$ પ્રદેશમાં નથી.	0	$\frac{3\pi}{2}$ પ્રદેશમાં નથી.	0
cot	0 પ્રદેશમાં નથી.	0	π પ્રદેશમાં નથી.	0	2π પ્રદેશમાં નથી.
sec	1	$\frac{\pi}{2}$ પ્રદેશમાં નથી.	−1	$\frac{3\pi}{2}$ પ્રદેશમાં નથી.	1
cosec	0 પ્રદેશમાં નથી.	1	π પ્રદેશમાં નથી.	−1	2π પ્રદેશમાં નથી.

5.3 $P\left(\frac{\pi}{4}\right)$ના યામ :



આકૃતિ 5.2

ધારો કે એકમ વર્તુળ પરના ત્રિકોણમિતીય બિંદુ $P\left(\frac{\pi}{4}\right)$ના યામ (x, y) છે. હવે લઘુ $\widehat{AB}$ ની લંબાઈ $\frac{\pi}{2}$ છે. જો P એ લઘુ $\widehat{AB}$ નું મધ્યબિંદુ હોય, તો $\widehat{AP} \cong \widehat{PB}$, $l(\widehat{AP}) = \frac{\pi}{4}$.

એક જ વર્તુળમાં એકરૂપ ચાપને અનુરૂપ જીવાઓ પણ એકરૂપ હોય છે.

$\therefore \quad AP = PB$

$\therefore \quad AP^2 = PB^2$

હવે A(1, 0), P(x, y) અને B(0, 1) છે.

$\therefore \quad (x-1)^2 + (y-0)^2 = (x-0)^2 + (y-1)^2$

$\therefore \quad x^2 - 2x + 1 + y^2 = x^2 + y^2 - 2y + 1$

$\therefore \quad -2x = -2y$

$\therefore \quad x = y$ (i)

પરંતુ P(x, y) એકમ વર્તુળ પર છે.

$\therefore \quad x^2 + y^2 = 1$

$\therefore$ (i) પરથી, $x^2 + x^2 = 1$

$\therefore \quad 2x^2 = 1$

$\therefore \quad x^2 = \frac{1}{2}$

$\therefore \quad x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

હવે, $P\left(\frac{\pi}{4}\right)$ પ્રથમ ચરણમાં હોવાથી, $x > 0$, $y > 0$.

$\therefore \quad x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore$ (i) પરથી $x = y = \frac{1}{\sqrt{2}}$

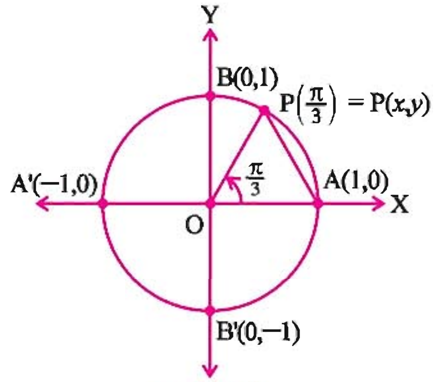
પરંતુ *cos* અને *sin* વિધેયની વ્યાખ્યા પ્રમાણે,

$P\left(\frac{\pi}{4}\right)$ના યામ $(x, y) = \left(cos\frac{\pi}{4}, sin\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ છે.

આથી, $cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

$tan\frac{\pi}{4} = 1$, $cot\frac{\pi}{4} = 1$, $sec\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$, $cosec\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$.

5.4 $P\left(\frac{\pi}{3}\right)$ના યામ :



આકૃતિ 5.3

ધારો કે $P\left(\frac{\pi}{3}\right)$ના યામ (x, y) છે.

લઘુ $\widehat{AP}$ની લંબાઈ $\frac{\pi}{3}$ છે.

$\therefore \quad m\angle AOP = \frac{\pi}{3} = 60^\circ$

હવે, ΔOAPમાં $OA = OP$ (ત્રિજ્યા)

$\therefore \quad m\angle OPA = m\angle OAP$ (i)

વળી, $m\angle AOP = 60^\circ$

$\therefore \quad m\angle OPA + m\angle OAP = 120^\circ$

$\therefore$ (i) પરથી, $m\angle OPA = m\angle OAP = 60^\circ$

$\therefore \quad \Delta OAP$ સમભુજ છે.

વળી, $OA = OP = 1$ (એકમ વર્તુળની ત્રિજ્યાઓ)

$\therefore \quad AP = 1$

$\therefore \quad AP^2 = 1$

હવે, $P(x, y)$ અને $A(1, 0)$ છે.

$\therefore \quad (x - 1)^2 + (y - 0)^2 = 1$

$\therefore \quad x^2 - 2x + 1 + y^2 = 1$

પરંતુ $x^2 + y^2 = 1$

$\therefore \quad 2x = 1$

$\therefore \quad x = \frac{1}{2}$

વળી, $x^2 + y^2 = 1$

$\therefore \quad \frac{1}{4} + y^2 = 1$

$\therefore \quad y^2 = \frac{3}{4}$

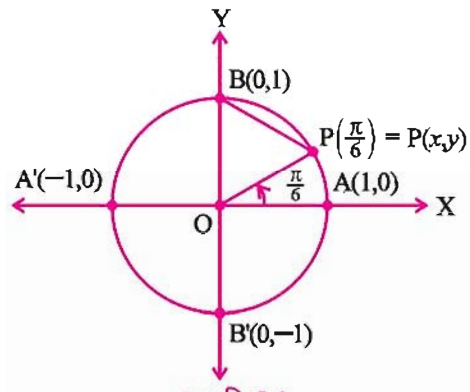
$\therefore \quad y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ($P\left(\frac{\pi}{3}\right)$ પ્રથમ ચરણમાં છે. $y > 0$)

$\therefore \quad P\left(\frac{\pi}{3}\right)$ના યામ $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ છે.

$\therefore \quad cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, $sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. તેથી, $tan\frac{\pi}{3} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$.

$sec\frac{\pi}{3} = 2$, $cosec\frac{\pi}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}$, $cot\frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

5.5 $P\left(\frac{\pi}{6}\right)$ના યામ :



આકૃતિ 5.4

ધારો કે $P\left(\frac{\pi}{6}\right)$ના યામ (x, y) છે.

લઘુ $\widehat{AP}$ની લંબાઈ $\frac{\pi}{6}$ છે.

$l(\widehat{AP}) = \frac{\pi}{6}$. $m\angle AOP = \frac{\pi}{6} = 30^\circ$

વળી, બિંદુ P એ ∠AOBના અંદરના ભાગમાં છે.

$\therefore \quad m\angle POB = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$

હવે, ΔOPBમાં OB = OP **(ત્રિજ્યા)**

આથી, $\angle OBP \cong \angle OPB$ અને

$m\angle OBP + m\angle OPB + m\angle POB = 180^\circ$

$m\angle OBP + m\angle OPB = 120^\circ$ **($m\angle POB = 60^\circ$)**

વળી, $\angle OBP \cong \angle OPB$ **(OB = OP)**

$m\angle OBP = m\angle OPB = 60^\circ$ અને ΔPOBના ખૂણા એકરૂપ છે.

$\therefore$ ΔPOB સમભુજ છે.

$\therefore \quad OP = OB = PB = 1$

$\therefore \quad PB^2 = 1$

$\therefore \quad (x - 0)^2 + (y - 1)^2 = 1$ **(P(x, y) અને B(0, 1))**

$\therefore \quad x^2 + y^2 - 2y + 1 = 1$

પરંતુ, $x^2 + y^2 = 1$ કારણ કે $P(x, y)$ એ એકમ વર્તુળ પર છે.

$\therefore \quad 2y = 1$

$\therefore \quad y = \frac{1}{2}$

વળી, $x^2 + y^2 = 1$

$\therefore \quad x^2 + \frac{1}{4} = 1.$

તેથી $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ **($P\left(\frac{\pi}{6}\right)$ પ્રથમ ચરણમાં છે, તેથી $x > 0$)**

cos અને *sin* વિધેયની વ્યાખ્યા પ્રમાણે,

$$(x, y) = \left(cos\frac{\pi}{6}, sin\frac{\pi}{6}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore \quad cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}. \text{ તેથી } tan\frac{\pi}{6} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$sec\frac{\pi}{6} = \frac{2}{\sqrt{3}}, cosec\frac{\pi}{6} = 2, cot\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}.$$

ઉદાહરણ 1 : $3\cos^2\frac{\pi}{4} - \sec\frac{\pi}{3} + 5\tan^2\frac{\pi}{3}$નું મૂલ્ય મેળવો.

ઉકેલ : આપણે જાણીએ છીએ કે, $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sec\frac{\pi}{3} = 2$, $\tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$

$$3\cos^2\frac{\pi}{4} - \sec\frac{\pi}{3} + 5\tan^2\frac{\pi}{3} = 3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - 2 + 5(\sqrt{3})^2$$

$$= 3 \times \frac{1}{2} - 2 + 5 \times 3$$

$$= \frac{3}{2} - 2 + 15 = \frac{29}{2}$$

ઉદાહરણ 2 : $4\tan^2\frac{\pi}{6} - 5\,cosec^2\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}\sin\frac{\pi}{6}$ ની કિંમત મેળવો.

ઉકેલ : આપણે જાણીએ છીએ કે, $\tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $cosec\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$, $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

$$4\tan^2\frac{\pi}{6} - 5\,cosec^2\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}\sin\frac{\pi}{6} = 4 \times \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 - 5(\sqrt{2})^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{4}{3} - 10 - \frac{1}{6}$$

$$= \frac{8 - 60 - 1}{6} = -\frac{53}{6}$$

ઉદાહરણ 3 : સાબિત કરો કે, $\frac{4}{3}\cot^2\frac{\pi}{6} + 3\sin^2\frac{\pi}{3} - 2\,cosec^2\frac{\pi}{3} - \frac{3}{4}\tan^2\frac{\pi}{6} = 3\frac{1}{3}$.

ઉકેલ : આપણે જાણીએ છીએ કે, $\cot\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$, $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $cosec\frac{\pi}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}$, $\tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

ડા.બા. $= \frac{4}{3}\cot^2\frac{\pi}{6} + 3\sin^2\frac{\pi}{3} - 2\,cosec^2\frac{\pi}{3} - \frac{3}{4}\tan^2\frac{\pi}{6}$

$$= \frac{4}{3}(\sqrt{3})^2 + 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 - \frac{3}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2$$

$$= \frac{4}{3} \times 3 + 3 \times \frac{3}{4} - 2 \times \frac{4}{3} - \frac{3}{4} \times \frac{1}{3}$$

$$= 4 + \frac{9}{4} - \frac{8}{3} - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{48 + 27 - 32 - 3}{12}$$

$= \frac{40}{12} = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3} =$ જ.બા.

ઉદાહરણ 4 : સાબિત કરો કે, $\frac{\tan\frac{\pi}{4} - \tan\frac{\pi}{6}}{1 + \tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{\pi}{6}} = 2 - \sqrt{3}$

ઉકેલ : આપણે જાણીએ છીએ કે, $\tan\frac{\pi}{4} = 1$, $\tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

ડા.બા. $= \dfrac{\tan\frac{\pi}{4} - \tan\frac{\pi}{6}}{1 + \tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{\pi}{6}}$

$= \dfrac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + 1\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}}$

$= \dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$

$= \dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} \times \dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1}$

$= \dfrac{3 - 2\sqrt{3} + 1}{3 - 1}$

$= \dfrac{2(2-\sqrt{3})}{2} = 2 - \sqrt{3}$ = જ.બા.

સ્વાધ્યાય 5.1

1. $\sec\frac{\pi}{6}\ \tan\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{4}\ \operatorname{cosec}\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{6}\ \cot\frac{\pi}{3}$ નું મૂલ્ય મેળવો.

2. $\cot^2\frac{\pi}{6} + \operatorname{cosec}\frac{\pi}{6} + 3\tan^2\frac{\pi}{6}$ નું મૂલ્ય મેળવો.

3. $2\sin^2\frac{\pi}{4} + 2\cos^2\frac{\pi}{4} + \sec^2\frac{\pi}{3}$ નું મૂલ્ય મેળવો.

4. સાબિત કરો કે, $\left(3\cos\frac{\pi}{3}\ \sec\frac{\pi}{3} - 4\sin\frac{\pi}{6}\ \tan\frac{\pi}{4}\right)\cos 2\pi = 1$.

5. $\left(\sin\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{6}\right)\left(\sin^2\frac{\pi}{6} - \sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{6} + \cos^2\frac{\pi}{6}\right)$ ની કિંમત મેળવો.

6. $\dfrac{5\sin^2\frac{\pi}{6} + \cos^2\frac{\pi}{4} - 4\tan\frac{\pi}{6}}{2\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{6} + \tan\frac{\pi}{4}}$ ની કિંમત મેળવો.

7. સાબિત કરો કે, $\cos\frac{\pi}{3}\ \cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3}\ \sin\frac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$.

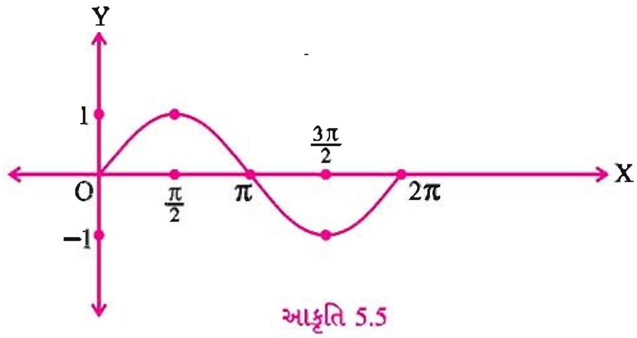
*

5.6 ત્રિકોણમિતીય વિધેયના આલેખો

***y = sinx*નો આલેખ.**

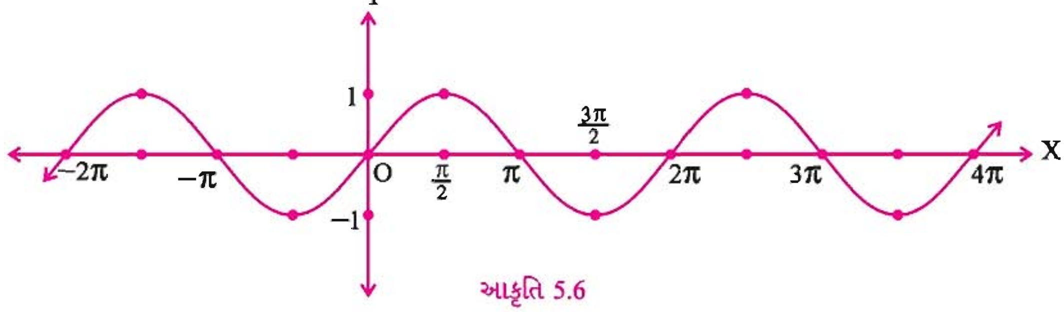
x ની કેટલીક કિંમતો માટે *sinx*ની કિંમતનું કોષ્ટક નીચે પ્રમાણે છે :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	−1	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-1}{2}$	0
	0	0.5	0.87	1	0.87	0.5	0	−0.5	−0.87	−1	−0.87	−0.5	0



આકૃતિ 5.5

sin આવર્તી વિધેય છે. તેનું આવર્તમાન 2π છે. તેથી, $y = sinx$ વિધેયના આલેખનું આલેખન પ્રથમ $[0, 2\pi]$ અંતરાલમાં કરવું જોઈએ. (આકૃતિ 5.5) એકવાર આલેખનું આલેખન આ અંતરાલમાં થયા બાદ સરળતાથી 2π લંબાઈના અંતરાલમાં એ જ આલેખનું પુનરાવર્તન થશે. (આકૃતિ 5.6)



આકૃતિ 5.6

આલેખ પરથી નીચેની વિગતો સ્પષ્ટપણે જોઈ શકાય છે :

(1) $y = sinx$ નો આલેખ X-અક્ષને એકથી વધુ બિંદુઓમાં છેદે છે, જેવાં કે $0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \ldots$ આ બધાં બિંદુઓએ તેની કિંમત શૂન્ય થાય.

(2) $y = sinx$ નો આલેખ X-અક્ષને $0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \ldots$ બિંદુઓમાં છેદે છે. તેથી તેનાં શૂન્યોનો ગણ $\{k\pi \mid k \in Z\}$ છે.

(3) $y = sinx$ ની મહત્તમ અને ન્યૂનતમ કિંમત અનુક્રમે 1 અને -1 છે અને *sinx* એ -1 તથા 1 વચ્ચેની તમામ કિંમત ધારણ કરે છે.

(4) $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ એટલે કે પ્રથમ ચરણમાં આલેખ ઉપરની તરફ જાય છે. કારણ કે તે વધતું વિધેય છે. તે જ પ્રમાણે બીજા અને ત્રીજા ચરણમાં ઘટતું અને ચોથા ચરણમાં વધતું વિધેય છે.

(5) $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right], \ldots$ જેવા મર્યાદિત પ્રદેશમાં *sin* વિધેય એક-એક છે.

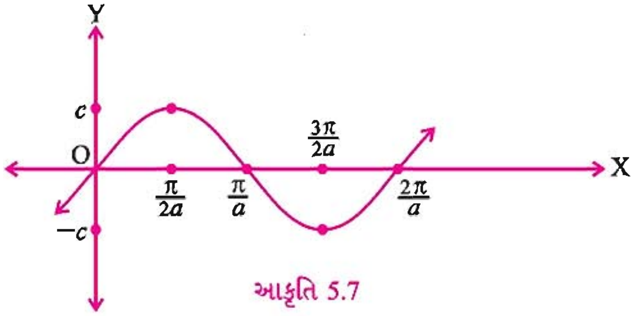
(6) $y = sinx$ નો આલેખ 2πના અંતરાલમાં પુનરાવર્તિત થાય છે. કારણ કે, *sin* વિધેયનું આવર્તમાન 2π છે.

જો $y = f(x)$ એ T આવર્તમાનવાળું આવર્તીય વિધેય હોય અને તેનો કંપવિસ્તાર k હોય, તો તેનો આલેખ T લંબાઈના અંતરાલમાં દોરવો પર્યાપ્ત છે. કારણ કે એકવાર તેને T લંબાઈના અંતરાલમાં દોર્યા બાદ તે T લંબાઈના અંતરાલમાં એ જ આલેખનું પુનરાવર્તન થશે. તેનો કંપવિસ્તાર એ $y = f(x)$ નું મહત્તમ નિરપેક્ષ મૂલ્ય છે.

જો કોઈ વિધેય $y = f(x)$ નું આવર્તમાન 2π હોય અને કંપવિસ્તાર m હોય, તો વિધેય $y = c \cdot f(ax + b)$, $a > 0$ નું આવર્તમાન $\frac{2\pi}{a}$ થશે અને તેનો કંપવિસ્તાર $|c| \cdot m$ થશે. હવે આ ચર્ચાનો ઉપયોગ કરી આપણે $c \sin ax$, $c \cos ax$ અને $c \tan ax$ના આલેખો દોરી શકીશું.

$g(x) = c \sin ax$નો આલેખ $(a > 0)$

પ્રથમ આપણે $y = \sin x$ના આલેખનું આલેખન કરીશું અને આલેખ જ્યાં X-અક્ષને છેદે તે બિંદુઓનું આલેખન કરીશું. ત્યાર બાદ આ બધાં બિંદુઓ P(x) હોય, તો x ને a વડે ભાગીશું. $y = c \sin ax$નો આલેખ X-અક્ષને $0, \frac{\pi}{a}, \frac{2\pi}{a}, ...$ જેવાં બિંદુઓમાં છેદશે. તેથી તેનું આવર્તમાન $\frac{2\pi}{a}$ થશે. Y-અક્ષ પરનાં બિંદુઓ -1 તથા 1 ના સ્થાને $-|c|$ તથા $|c|$ લેવાય. આલેખ પરના ઉચ્ચતમ અને સૌથી નીચેના બિંદુના x-યામ $\left[0, \frac{2\pi}{a}\right]$ માં $\frac{\pi}{2a}$ તથા $\frac{3\pi}{2a}$ થાય. વિધેયનો વિસ્તાર $[-|c|, |c|]$ છે.



આકૃતિ 5.7

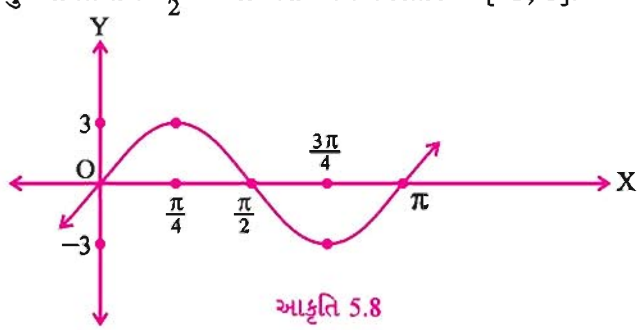
આપણે $y = c \sin ax$ ના આલેખની મહત્તમ અને ન્યૂનતમ કિંમતો અનુક્રમે $|c|$ અને $-|c|$ એ Y-અક્ષ પર દર્શાવી છે. $y = \sin x$ નો આલેખ $-|c|$ તથા $|c|$ વચ્ચે આવશે.

ઉદાહરણ 5 : $y = 3\sin 2x$નો આલેખ દોરો.

ઉકેલ : $y = 3 \sin 2x$ને $y = c \sin ax$ સાથે સરખાવતાં,

$\therefore$ $a = 2$ અને $c = 3$. તેથી તેનું આવર્તમાન $\frac{2\pi}{2} = \pi$ થશે અને વિસ્તાર $= [-3, 3]$.

આ વિધેયનો આલેખ $y = \sin x$ ના આલેખ જેવો જ છે. $y = \sin x$ નો આલેખ X-અક્ષને જે બિંદુઓએ છેદે છે તેને અનુરૂપ સંખ્યાઓ $\pi, 2\pi, 3\pi, ...$ વગેરેના બદલે $\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, ...$ વગેરે મળે છે અને વિસ્તાર $[-3, 3]$ છે તે લક્ષમાં લેતાં આલેખ $y = -3$ તથા $y = 3$ વચ્ચે આવેલો છે.



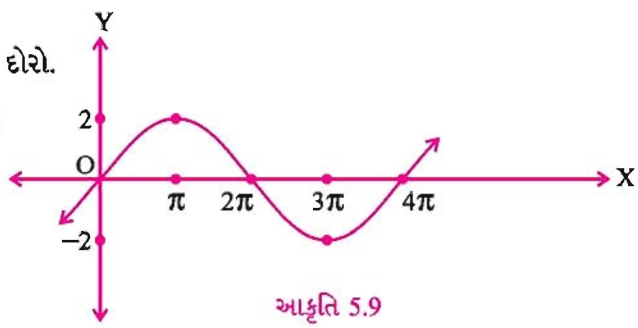
આકૃતિ 5.8

ઉદાહરણ 6 : $y = 2\sin \frac{x}{2}$નો આલેખ દોરો.

ઉકેલ : અહીં $a = \frac{1}{2}$ અને $c = 2$

$\therefore$ આવર્તમાન 4π અને વિસ્તાર $[-2, 2]$ છે.

આલેખના X-અક્ષ સાથેનાં છેદબિંદુ $2\pi, 4\pi, ...$ વગેરે છે. ($\pi, 2\pi, ...$ વગેરેના બદલે)

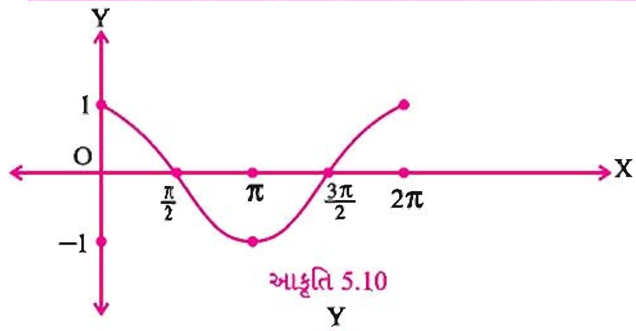


આકૃતિ 5.9

$f(x) = cos x$નો આલેખ ($0 \le x \le 2\pi$)

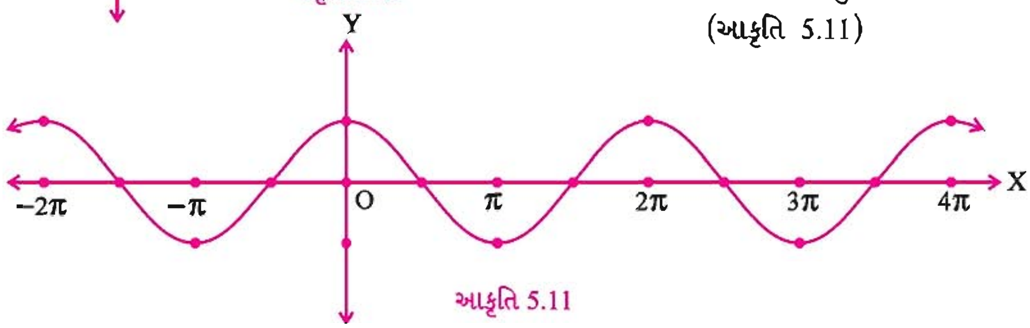
xની કેટલીક કિંમતો માટે $cos\, x$ની કિંમતનું કોષ્ટક નીચે પ્રમાણે છે :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$cos\ x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	-1	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
	1	0.87	0.5	0	-0.5	-0.87	-1	-0.87	-0.5	0	0.5	0.87	1



આકૃતિ 5.10

$cos x$ વિધેય પણ આવર્તી વિધેય છે અને તેનું મુખ્ય આવર્તમાન 2π છે. તેથી $y = cos\, x$નો આલેખ 2π અંતરાલમાં દોર્યા બાદ તેનું 2π લંબાઈના અંતરાલમાં પુનરાવર્તન થાય છે. (આકૃતિ 5.11)



આકૃતિ 5.11

આલેખ પરથી નીચેની વિગતો સ્પષ્ટપણે જોઈ શકાય છે :

(1) $y = cos\, x$નો આલેખ X-અક્ષને એકથી વધુ બિંદુઓમાં છેદે છે, જેમકે $\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm\frac{5\pi}{2}, \ldots$ આ બધાં જ બિંદુ આગળ તેની કિંમત શૂન્ય થાય છે.

(2) $y = cos\, x$નો આલેખ X-અક્ષને $\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm\frac{5\pi}{2}, \ldots$ બિંદુઓમાં છેદે છે. તેનાં શૂન્યોનો ગણ $\left\{(2k + 1)\frac{\pi}{2} \mid k \in Z\right\}$ છે.

(3) $y = cos\, x$ની મહત્તમ અને ન્યૂનતમ કિંમત 1 અને -1 છે. અને તેની વચ્ચેની તમામ કિંમત ધારણ કરે છે.

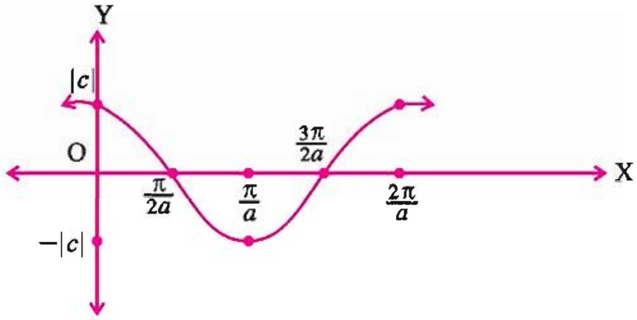
(4) $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ એટલે પ્રથમ ચરણમાં જેમ-જેમ x વધે તેમ-તેમ આલેખ નીચે તરફ ઊતરે છે. એટલે પ્રથમ ચરણમાં cos ઘટતું વિધેય છે. આલેખ પરથી જોઈ શકાય છે કે $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ એટલે બીજા ચરણમાં પણ આલેખ નીચે તરફ ઊતરે છે. એટલે બીજા ચરણમાં પણ cos ઘટતું વિધેય છે તથા $\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ અને $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ એટલે ત્રીજા અને ચોથા ચરણમાં આલેખ ઉપર તરફ જાય છે એટલે cos વધતું વિધેય છે.

(5) $[0, \pi]$, $[\pi, 2\pi]$,... જેવા મર્યાદિત પ્રદેશમાં cos એક-એક વિધેય છે.

(6) $y = cos\, x$નો આલેખ 2πનાં લંબાઈના અંતરાલમાં પુનરાવર્તિત થાય છે, કારણ કે cos વિધેયનું મુખ્ય આવર્તમાન 2π છે.

$y = c \cos ax$ નો આલેખ ($a > 0$)

આપણે $y = \cos x$ના આલેખનું આલેખન પ્રથમ કરીશું અને આલેખ જ્યાં X-અક્ષને છેદે છે તે તમામ બિંદુઓને સંગત સંખ્યાઓને a વડે ભાગીશું. તેનું આવર્તમાન $\frac{2\pi}{a}$ થશે. વિધેયનો વિસ્તાર $[-|c|, |c|]$ છે. $y = c \cos ax$ ની મહત્તમ અને ન્યૂનતમ કિંમતો અનુક્રમે $|c|$ અને $-|c|$, Y-અક્ષ પર મળશે.

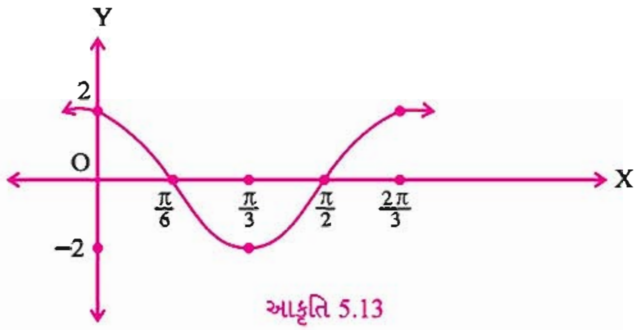


આકૃતિ 5.12

ઉદાહરણ 7 : $y = 2 \cos 3x$ નો આલેખ દોરો.

ઉકેલ : $y = 2 \cos 3x$ ને $y = c \cos ax$ સાથે સરખાવતાં, $a = 3$, $c = 2$

તેથી તેનું મુખ્ય આવર્તમાન $\frac{2\pi}{3}$ અને વિસ્તાર $[-2, 2]$ છે.



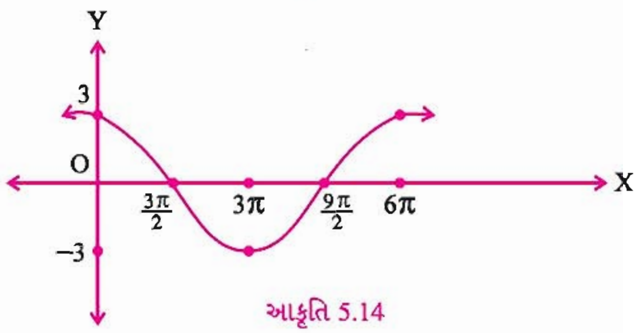
આકૃતિ 5.13

ઉદાહરણ 8 : $y = 3 \cos \frac{x}{3}$ નો આલેખ દોરો.

ઉકેલ : $a = \frac{1}{3}$, $c = 3$

આવર્તમાન $= 6\pi$,

વિસ્તાર $= [-3, 3]$.



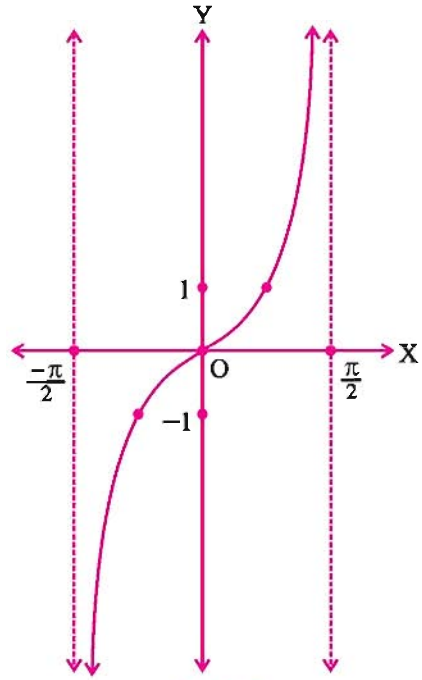
આકૃતિ 5.14

$y = \tan x$નો આલેખ, $x \in \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

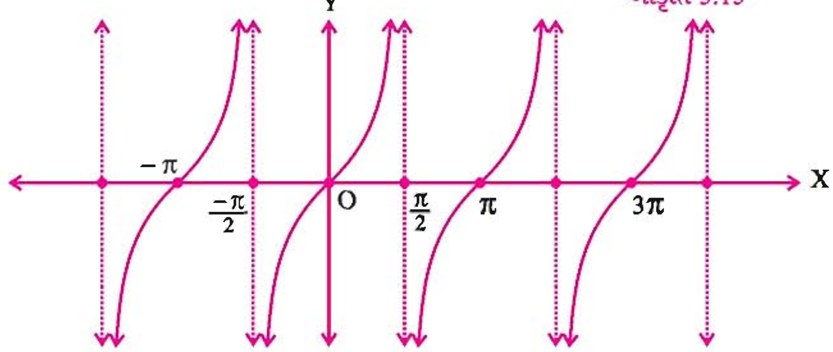
x ની કેટલીક કિંમતો માટે $\tan x$ ની કિંમતનું કોષ્ટક નીચે પ્રમાણે છે :

x	$\frac{-\pi}{3}$	$\frac{-\pi}{4}$	$\frac{-\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\tan x$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$
	-1.74	-1	-0.57	0	0.57	1	1.74

tan વિધેય પણ આવર્તી વિધેય છે અને તેનું મુખ્ય આવર્તમાન π છે. તેથી, આપણે પ્રથમ $y = tan\, x$નો આલેખ π લંબાઈના અંતરાલમાં દોરીશું અને ત્યાર બાદ તે આકૃતિ 5.16માં દર્શાવ્યા મુજબ π લંબાઈના અંતરાલમાં પુનરાવર્તિત થશે.



આકૃતિ 5.15



આકૃતિ 5.16

આલેખ પરથી નીચેની વિગતો સ્પષ્ટપણે જોઈ શકાય છે :

(1) $y = tan\, x$નો આલેખ X-અક્ષને એક કરતાં વધુ બિંદુઓ જેવા કે, $\pm\pi$, $\pm 2\pi$, $\pm 3\pi$,...માં છેદે છે.

(2) $y = tan\, x$નો આલેખ X-અક્ષને $\pm\pi$, $\pm 2\pi$, $\pm 3\pi$,... માં છેદે છે. તે પરથી કહી શકાય કે વિધેયનાં શૂન્યોનો ગણ $\{k\pi \mid k \in Z\}$ છે.

(3) *tan* વિધેયનો વિસ્તાર R છે.

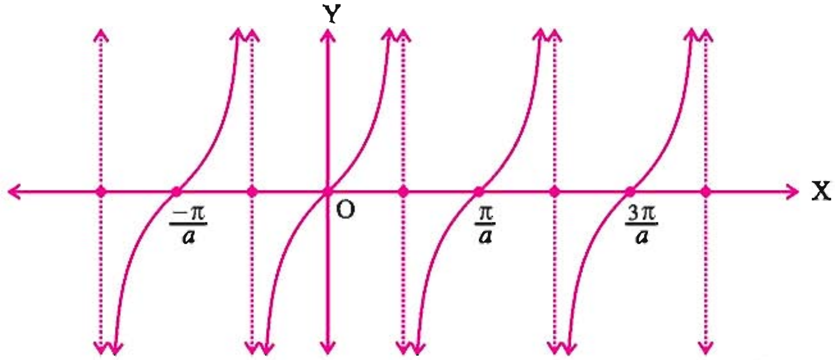
(4) કોઈ પણ ચરણમાં જેમ xની કિંમત વધે તેમ આલેખ ઉપરની તરફ જાય છે. તેથી $y = tan\, x$ વિધેય દરેક ચરણમાં વધતું વિધેય છે.

(5) આલેખ π લંબાઈના અંતરાલમાં પુનરાવર્તિત છે. *tan* વિધેયનું મુખ્ય આવર્તમાન π છે.

(6) *tan* વિધેયનો આલેખ $\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$,...જેવા મર્યાદિત પ્રદેશમાં એક-એક છે.

$y = c\ tan\ ax$નો આલેખ ($a > 0$)

પ્રથમ આપણે $y = tan\ x$ ના આલેખનું આલેખન કરીશું અને આલેખ જ્યાં X-અક્ષને છેદે છે તે તમામ બિંદુઓને સંગત સંખ્યાઓને a વડે ભાગીશું. તેનું મુખ્ય આવર્તમાન $\frac{\pi}{a}$ છે. વિધેય $y = tan\ x$નો વિસ્તાર R છે, તેથી $y = c\ tan\ ax$ નો વિસ્તાર પણ R થશે.

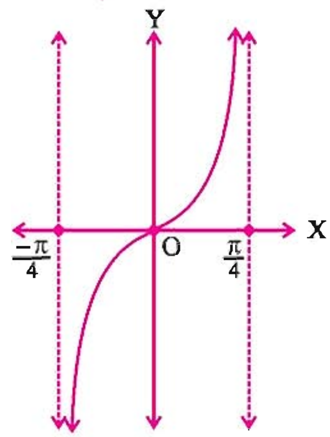


આકૃતિ 5.17

ઉદાહરણ 9 : $y = 3\ tan\ 2x,\ x \in \left(\frac{-\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ નો આલેખ દોરો.

ઉકેલ : $a = 2,\ c = 3$

$\therefore$ મુખ્ય આવર્તમાન $\frac{\pi}{2}$ અને વિસ્તાર R છે.

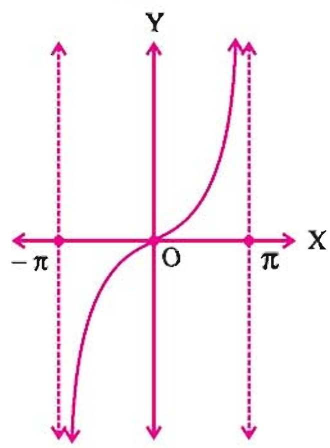


આકૃતિ 5.18

ઉદાહરણ 10 : $y = tan\ \frac{x}{2},\ x \in (-\pi, \pi)$ નો આલેખ રચો.

ઉકેલ : $a = 1,\ c = \frac{1}{2}$

$\therefore$ મુખ્ય આવર્તમાન 2π અને વિસ્તાર R છે.



આકૃતિ 5.19

સ્વાધ્યાય 5.2

1. $y = 2\,sin\frac{x}{2}$નો આલેખ રચો. $0 \le x \le 6\pi$
2. $y = 2\,sin\,3x$નો આલેખ રચો. $0 \le x \le \frac{2\pi}{3}$
3. $y = 3\,cos\frac{x}{2}$નો આલેખ રચો. $0 \le x \le 4\pi$
4. $y = sin\,2x$નો આલેખ રચો. $0 \le x \le \pi$
5. $y = tan\frac{x}{3}$નો આલેખ રચો. $x \in \left(\frac{-3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$
6. $y = 2\,tan\,x$નો આલેખ રચો. $x \in \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

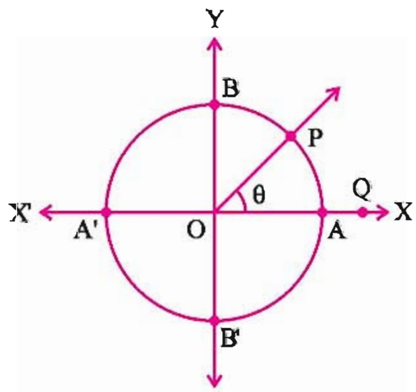
*

5.7 વ્યાપક માપના ખૂણા અને તેનાં ત્રિ-વિધેયો

આપણે ખૂણાના માપથી પરિચિત છીએ. દરેક ખૂણાને સંગત ખૂણાનું માપ હોય છે અને તે માપ 0થી 180 અંશ કે 0 થી π રેડિયન વચ્ચેની વાસ્તવિક સંખ્યા છે. પણ આપણે ત્રિકોણમિતીય વિધેયોને $(0, \pi)$ અંતરાલ પર સીમિત નથી રાખ્યા. આપણે ત્રિ-વિધેયોને R પર વ્યાખ્યાયિત કર્યાં છે.

એટલે હવે આપણે ખૂણાની પૂર્વધારણા મુજબ કોઈ પણ ખૂણાનું માપ 0 થી 180 વચ્ચેની વાસ્તવિક સંખ્યા છે તેને વિસ્તારીને ખૂણાનું માપ એ કોઈ પણ વાસ્તવિક સંખ્યા થઈ શકે એવી રીતે ખૂણાના વ્યાપક માપ અંગે માહિતી મેળવવી જોઈએ. કિરણના પરિભ્રમણની સંકલ્પનાનો ઉપયોગ કરી આપણે આ કાર્ય સિદ્ધ કરીશું. અહીં આપણે ઘડિયાળના કાંટાથી વિરુદ્ધ દિશામાં પરિભ્રમણને ધન દિશાનું પરિભ્રમણ ધારીશું.

$\overrightarrow{OX}$ પર કોઈ બિંદુ Q લો. $\overrightarrow{OQ}$ને આપણે ચલ કિરણ તરીકે લઈશું. $\overrightarrow{OQ}$ તેની પ્રારંભિક સ્થિતિ $\overrightarrow{OA}$થી $\overrightarrow{OX}$ ને સાપેક્ષ પરિભ્રમણ કરશે. શરૂઆતમાં $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OA}$. $\overrightarrow{OQ}$ તેની પ્રારંભિક સ્થિતિ $\overrightarrow{OA}$થી પરિભ્રમણ કરી $\overrightarrow{OP}$ની સ્થિતિ પ્રાપ્ત કરે છે. આમ, $\overrightarrow{OQ}$ના પરિભ્રમણથી $\angle AOP$ બનશે. જો $\overrightarrow{OQ}$ પરિભ્રમણ ના કરે તો $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OA}$. તો $\overrightarrow{OQ} \cup \overrightarrow{OQ}$ એ 0° વ્યાપક માપવાળો ખૂણો દર્શાવશે. જો પરિભ્રમણ ન હોય તો $\overrightarrow{OQ}$ તથા $\overrightarrow{OA}$ સંપાતી છે. હવે જો $\overrightarrow{OQ}$ ઘડિયાળના કાંટાથી ઊલટી દિશામાં Aથી પરિભ્રમણ શરૂ કરી A આગળથી ફરી પસાર થયા વિના $\overrightarrow{OA'}$ની સ્થિતિ ધારણ કરે તો $\overrightarrow{OA} \cup \overrightarrow{OA'}$ એ 180° વ્યાપક માપવાળો ખૂણો બનાવશે.



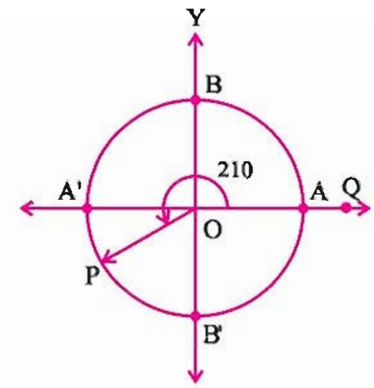
આકૃતિ 5.20

જો $0 < \theta < 180$ તો $\overrightarrow{OQ}$ ઘડિયાળના કાંટાની વિરુદ્ધ દિશામાં પરિભ્રમણ કરી A આગળથી પસાર થયા વિના X-અક્ષના ઉપરના અર્ધતલમાં $\overrightarrow{OP}$ની સ્થિતિ ધારણ કરે તો $\angle AOP$ એ $\overrightarrow{OQ}$ના પરિભ્રમણથી બનતો θ વ્યાપક માપવાળો ખૂણો છે.

જો $180 < \theta < 360$ હોય તો $-180 < \theta - 360 < 0$.

$\therefore \quad 0 < 360 - \theta < 180$

જો $\overrightarrow{OQ}$ એ X-અક્ષની નીચેના અર્ધતલમાં ઘડિયાળના કાંટાની દિશામાં પરિભ્રમણ કરે અને A આગળથી પસાર થયા વિના $\overrightarrow{OP}$ની સ્થિતિ ધારણ કરે તો $m\angle AOP = 360 - \theta$ થાય તેવો માપ θ વાળો વ્યાપક ખૂણો મળે. આમ, $\theta = 210$ હોય, તો $360 - \theta = 360 - 210 = 150$. આમ, $\theta = 210$ વ્યાપક માપવાળો ખૂણો આકૃતિ 5.21માં દર્શાવેલ છે.



આકૃતિ 5.21

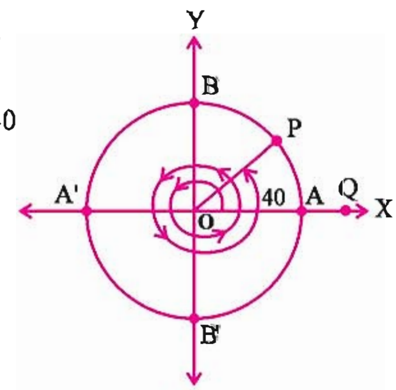
જો $\theta \notin [0, 360)$ અને $\theta > 0$ હોય, તો $\theta = 360n + \alpha$ લખી શકાય, જ્યાં $n = \left[\frac{\theta}{360}\right]$, $n \in N$ અને $0 \le \alpha < 360$. α વ્યાપક અંશમાપવાળો ખૂણો મળે. $\overrightarrow{OQ}$ એ n પૂર્ણ પરિભ્રમણ કરી α વ્યાપક અંશમાપવાળા ખૂણાને સંગત ઉપર દર્શાવેલ સ્થિતિ ધારણ કરશે. અહીં $\overrightarrow{OQ}$ એ $\overrightarrow{OP}$ની સ્થિતિ ધારણ કરતા પહેલાં જેટલા પરિભ્રમણ કરશે તેની સંખ્યા n દર્શાવે છે. $n > 0$ છે અને પરિભ્રમણ ઘડિયાળના કાંટાની વિરુદ્ધ દિશામાં છે.

ઉદાહરણ 11 : $\theta = 760$ માટે જેનું વ્યાપક અંશમાપ θ હોય તેવો ખૂણો દર્શાવો.

ઉકેલ : $\left[\frac{\theta}{360}\right] = \left[\frac{760}{360}\right] = 2$ અને $760 = 360 \cdot 2 + 40$

$\therefore \quad \alpha = 40$

ઘડિયાળના કાંટાથી વિરુદ્ધ દિશામાં $\overrightarrow{OQ}$ ના બે પૂર્ણ પરિભ્રમણ પછી $\overleftrightarrow{OA}$ના ઉપરના અર્ધતલમાં $\overrightarrow{OP}$ મળે, જેથી $m\angle AOP = 40$. $\angle AOP$ એ 760 વ્યાપક અંશમાપવાળો ખૂણો બને.

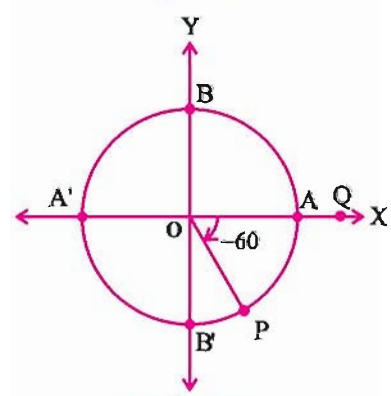


આકૃતિ 5.22

હવે ધારો કે $\theta < 0$. જો $-180 < \theta < 0$, તો $\overleftrightarrow{AA'}$ના નીચેના અર્ધતલમાં એકમ વર્તુળ પર P મળે કે જેથી $m\angle AOP = |\theta| = -\theta$ કારણ કે $0 < -\theta < 180$.

$\overrightarrow{OQ}$ ઘડિયાળના કાંટાની દિશામાં પરિભ્રમણ કરી A આગળ ફરી પસાર થયા વિના $\overrightarrow{OP}$ ની સ્થિતિ ધારણ કરે તો, $\angle AOP$ને વ્યાપક અંશમાપ θ વાળો ખૂણો કહે છે.

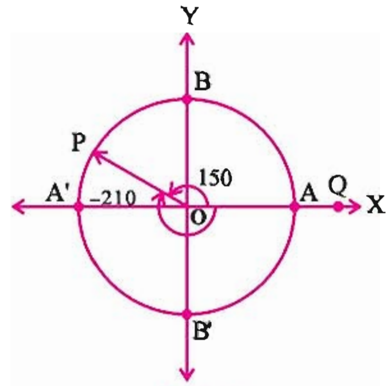
આમ, $\theta = -60$ તો $\overleftrightarrow{AA'}$ની નીચેના અર્ધતલમાં એકમ વર્તુળ પર P એવું મળશે કે જેથી $m\angle AOP = 60$. આમ, $\overrightarrow{OQ}$ ઘડિયાળના કાંટાની દિશામાં પરિભ્રમણ કરી $\overrightarrow{OP}$ ની સ્થિતિ ધારણ કરે, તો $\angle AOP$ વ્યાપક અંશમાપ -60 વાળો ખૂણો બને.



આકૃતિ 5.23

જો $-360 < \theta < -180$, તો $0 < 360 + \theta < 180$.

P એ $\overleftrightarrow{AA'}$ની ઉપરના અર્ધતલમાં મળે. જેથી $m\angle AOP = (360 + \theta)$. આમ, $\overrightarrow{OQ}$ ઘડિયાળના કાંટાની દિશામાં પરિભ્રમણ કરી એકમ વર્તુળ પર $\overrightarrow{OP}$ની સ્થિતિ ધારણ કરે કે જેથી $m\angle AOP = (360 + \theta)$. $\angle AOP$ વ્યાપક અંશમાપ θ વાળો ખૂણો બને.



આકૃતિ 5.24

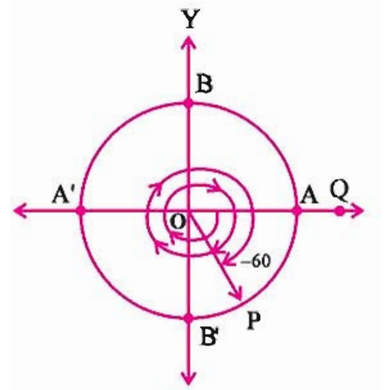
જો $\theta = -210$, તો $360 + \theta = 150$. આકૃતિ 5.24માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે -210 વ્યાપક માપવાળો ખૂણો $\angle AOP$ મળે.

હવે ધારો કે $\theta < 0$ હોય તો

$| \theta | = 360n + \alpha, 0 \le \alpha < 360$

તેથી $-\theta = 360n + \alpha$ **($| \theta | = -\theta$)**

$\therefore \quad \theta = -360n - \alpha$ **($-360 < -\alpha \le 0$)**



આકૃતિ 5.25

આમ, વ્યાપક અંશમાપ θ વાળો ખૂણો એ $\overrightarrow{OQ}$ના ઘડિયાળના કાંટાની દિશામાં n પૂર્ણ પરિભ્રમણ પછી મળતો $-\alpha$ વ્યાપક અંશમાપવાળો ખૂણો બને છે.

એટલે જો $\theta = -780$, તો $780 = 360 \times 2 + 60$

$\therefore \quad -780 = -360 \times 2 - 60$

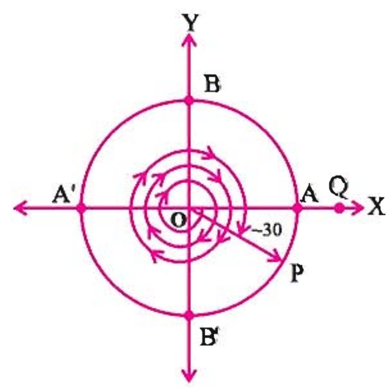
આમ, -780 વ્યાપક અંશમાપવાળો ખૂણો એટલે ઘડિયાળના કાંટાની દિશામાં બે પૂર્ણ પરિભ્રમણ પછી જેનું વ્યાપક અંશમાપ -60 છે, તેવો $\angle AOP$ છે.

ઉદાહરણ 12 : વ્યાપક અંશમાપ $\theta = -1110$ માટે પરિભ્રમણની સંખ્યા n અને અંશમાપ α મેળવી વ્યાપક અંશમાપવાળો ખૂણો દોરો.

ઉકેલ : $\left[\frac{-\theta}{360}\right] = \left[\frac{1110}{360}\right] = 3$

$\therefore \quad -1110 = (-360)3 + \alpha, \quad \alpha = -30$

$= (-360)3 + (-30)$



આકૃતિ 5.26

આમ, -1110 વ્યાપક અંશમાપવાળો ખૂણો એટલે ઘડિયાળના કાંટાની દિશામાં ત્રણ પૂર્ણ પરિભ્રમણ કરવાના અને ત્યાર બાદ જેનું વ્યાપક અંશમાપ -30 છે તેવો ખૂણો દોરવાનો.

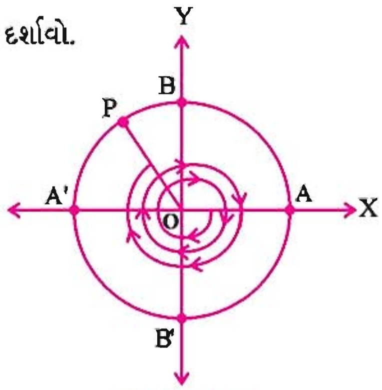
5.8 વ્યાપક અંશમાપવાળા ખૂણાનાં ત્રિકોણમિતીય વિધેયો

આપણે જાણીએ છીએ કે *sine* અને *cosine* વિધેયો એ Rથી R પર વ્યાખ્યાયિત છે. આમ, પ્રત્યેક $\theta \in R$ માટે $sin\theta$ અને $cos\theta$ વ્યાખ્યાયિત છે.

જો ∠AOP નું વ્યાપક અંશમાપ θ હોય, તો $sin\theta^o$ માટે $sin\,\frac{\pi\theta}{180}$ એવી વ્યાખ્યા લેવામાં આવે છે. અહીં, $\frac{\pi\theta}{180} \in R$ અને *sin* વિધેય R થી R પર વ્યાખ્યાયિત છે, તેથી $sin\,\frac{\pi\theta}{180}$ વાસ્તવિક સંખ્યા છે. આમ, કોઈ પણ વ્યાપક અંશમાપ કે રેડિયન માપવાળા ખૂણાનાં ત્રિ-વિધેયો વ્યાખ્યાયિત થઈ શકે. આમ, $sin18^o = sin\,\frac{18\pi}{180} = sin\,\frac{\pi}{10}$. અહીં આપણે નોંધીશું કે $sin18^o$ને આપણે $sin18$ નહિ લખીએ કારણ કે $sin18^o = sin\,\frac{18\pi}{180}$ અને $sin18$ અલગ છે. $sin18$ એટલે કે વાસ્તવિક સંખ્યા 18 (રેડિયન માપ 18)ને સંગત ખૂણા માટે *sin* વિધેયનું મૂલ્ય. આમ, *sin* અને *cosine* વિધેયના વ્યાપક અંશમાપ θ વાળા ખૂણા માટે $sin\theta^o$ અને $cos\theta^o$ લખવું જરૂરી છે.

પ્રકીર્ણ ઉદાહરણો :

ઉદાહરણ 13 : θ = −960 માટે વ્યાપક અંશમાપ θવાળો ખૂણો દર્શાવો.



આકૃતિ 5.27

ઉકેલ : $n = \left[\frac{-\theta}{360}\right] = \left[\frac{960}{360}\right] = 2$

$\therefore\ -960 = (-360)2 + \alpha,\ \alpha = -240^o$

$= (-360)2 + (-240)$

$n = 2,\ \alpha = -240^o,\ -360 < \alpha \le 0$

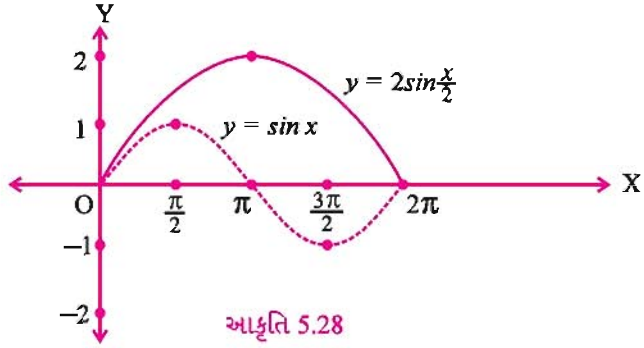
આમ, ઘડિયાળના કાંટાની દિશામાં બે પૂર્ણ પરિભ્રમણ પછી ∠AOP એ વ્યાપક અંશમાપ −240 વાળો લેતાં વ્યાપક માપ -960^o વાળો ખૂણો મળે છે.

ઉદાહરણ 14 : એક જ આલેખપત્ર પર એક જ સ્કેલમાપ લઈ $y = sin\,x$ અને $y = 2sin\frac{x}{2}$ના આલેખ દોરો. $x \in [0, 2\pi]$

ઉકેલ : $y = sin\,x$ માટે વિસ્તાર [−1, 1] અને મુખ્ય આવર્તમાન 2π છે.

$y = 2sin\frac{x}{2}$ માટે $c = 2$ અને $a = \frac{1}{2}$.

તેથી વિસ્તાર [−2, 2] અને આવર્તમાન 4π છે.



આકૃતિ 5.28

સ્વાધ્યાય 5.3

1. નીચેના ખૂણા માટે પરિભ્રમણની સંખ્યા n અને અંશમાપ α મેળવો :

(1) 750° (2) 1125° (3) 1485°

2. નીચેના ખૂણા માટે પરિભ્રમણની સંખ્યા n અને અંશમાપ α મેળવી વ્યાપક અંશમાપવાળો ખૂણો દોરો :

(1) 840° (2) -765° (3) -1470°

સ્વાધ્યાય 5

1. એક જ આલેખપત્ર પર એક જ સ્કેલમાપ લઈ $y = \sin x$ અને $y = \cos x$ના આલેખ દોરો.

2. $y = 3\sin 2x$નો આલેખ રચો.

3. $y = 2\cos 3x$નો આલેખ રચો.

4. નીચેના ખૂણા માટે પરિભ્રમણની સંખ્યા n અને અંશમાપ α મેળવી વ્યાપક અંશમાપવાળો ખૂણો દોરો :

(1) -1320° (2) -2000° (3) -540°

5. નીચે આપેલું દરેક વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલા વિકલ્પો (a), (b), (c) અથવા (d)માંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરીને ☐ માં લખો :

(1) $\tan\left(\frac{19\pi}{3}\right)$નું મૂલ્ય = ... ☐

(a) $\sqrt{3}$ (b) $-\sqrt{3}$ (c) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (d) $\frac{-1}{\sqrt{3}}$

(2) $\cot\left(\frac{-15\pi}{4}\right)$નું મૂલ્ય = ... ☐

(a) 1 (b) -1 (c) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (d) $\frac{-1}{\sqrt{3}}$

(3) જો $\sec\theta + \tan\theta = \sqrt{3}$, $0 < \theta < \pi$ હોય, તો θનું મૂલ્ય ...... ☐

(a) $\frac{5\pi}{6}$ (b) $\frac{\pi}{6}$ (c) $\frac{\pi}{3}$ (d) $\frac{-\pi}{3}$

(4) જો $\tan\theta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ અને $P(\theta)$ ચોથા ચરણમાં હોય, તો $\cos\theta$નું મૂલ્ય = ... ☐

(a) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$ (b) $\frac{2}{\sqrt{6}}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) $\frac{1}{\sqrt{6}}$

(5) જો $x \cdot \sin 45^\circ \cos^2 60^\circ = \frac{\tan^2 60^\circ \operatorname{cosec}^2 30^\circ}{\sec 45^\circ \cot^2 30^\circ}$, તો x = ... ☐

(a) 16 (b) 1 (c) $8\sqrt{2}$ (d) $\frac{16}{3}$

(6) $\cot^2\frac{\pi}{4} + \sec^2\frac{\pi}{4} - 4\cos\frac{\pi}{3}$નું મૂલ્ય = ... ☐

(a) 1 (b) $\frac{1}{2}$ (c) $-\frac{1}{2}$ (d) $\frac{3}{2}$

(7) $2\sin^2\frac{\pi}{6} - \operatorname{cosec}\frac{\pi}{6} \cdot \cos^2\frac{\pi}{3}$ નું મૂલ્ય = ... ☐

(a) 1 (b) 0 (c) $\frac{1}{2}$ (d) $-\frac{1}{2}$

(8) જો $\theta = -1470$ માટે પૂર્ણ પરિભ્રમણની સંખ્યા = ...

(a) -3 (b) 3 (c) -4 (d) 4

(9) જો $\theta = 750$ વ્યાપક અંશમાપ θ° વાળો ખૂણો દર્શાવે તો $P(\theta)$ ...... ચરણમાં છે.

(a) પ્રથમ (b) દ્વિતીય (c) તૃતીય (d) ચતુર્થ

(10) $cos\left(\frac{65\pi}{4}\right)$ = ...

(a) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (c) $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ (d) $\sqrt{2}$

સારાંશ

1. અક્ષો પરના બિંદુ $P(\theta)$ માટે ત્રિ-વિધેયોનાં મૂલ્ય
2. $P\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(cos\frac{\pi}{4}, sin\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
3. $P\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(cos\frac{\pi}{3}, sin\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
4. $P\left(\frac{\pi}{6}\right) = \left(cos\frac{\pi}{6}, sin\frac{\pi}{6}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$
5. $y = sinx$, $y = cosx$ અને $y = tanx$ વિધેયના આલેખ
6. વ્યાપક અંશમાપવાળા ખૂણાના ત્રિકોણમિતીય વિધેયો વિશેનો ખ્યાલ

—❖—

પ્રકરણ 6

રેખાઓ

6.1 પ્રાસ્તાવિક

ઈ.સ. 1637માં ફ્રેન્ચ ગણિતશાસ્ત્રી રેને દ'કાર્તેએ પોતાનું પુસ્તક La Géométrie' બહાર પાડ્યું હતું. ભૂમિતિના અભ્યાસમાં બીજગણિતનો ઉપયોગ કરનાર તેઓ પ્રથમ ગણિતશાસ્ત્રી હતા. તેમણે વાસ્તવિક સંખ્યાઓની ક્રમયુક્ત જોડની મદદથી સમતલનાં બિંદુઓનું આલેખન (નિરૂપણ) કર્યું હતું. આ ક્રમયુક્ત જોડને કાર્તેઝિય યામ તરીકે ઓળખવામાં આવે છે. રેખા અને વિવિધ વક્રોને કાર્તેઝિય યામના આધારે તેમણે બૈજિક સમીકરણ રૂપે દર્શાવ્યા હતા. યામભૂમિતિમાં બીજગણિતના ઉપયોગ વડે ભૂમિતિના કોયડા ઉકેલવામાં આવે છે. તેથી યામ ભૂમિતિ એ મુખ્યત્વે બીજગણિત અને ભૂમિતિનો સમન્વય છે. ત્યાર બાદ અલબત્ત આના ઘણા સમય પહેલા આરબ ગણિતશાસ્ત્રી અલ-ખ્વારિઝમીએ ભૌમિતિક આકૃતિઓની મદદથી બીજગણિતનાં સમીકરણોના ઉકેલો મેળવ્યા હતા. આપણા ભારતીય ગણિતશાસ્ત્રી ભાસ્કરાચાર્યનું પણ વિશેષ યોગદાન રહ્યું છે.

6.2 પુનરાવર્તન

આપણે આગળના વર્ગોમાં અભ્યાસ કરેલ યામ-ભૂમિતિનું પુનરાવર્તન કરીએ. આપણે અગાઉ યામાક્ષો, યામ સમતલ, યામ સમતલમાં બિંદુઓનું નિરૂપણ, અંતરસૂત્ર, વિભાજન સૂત્ર, ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ વગેરેનો અભ્યાસ કર્યો.

સમતલનાં બિંદુઓ અને $R \times R$ની તમામ ક્રમયુક્ત જોડ વચ્ચે એક-એક સંગતતા હોય છે. XY-સમતલમાં X-અક્ષ અને Y-અક્ષને અનુક્રમે $\{P(x, 0) \mid x \in R\}$ અને $\{P(0, y) \mid y \in R\}$ તરીકે દર્શાવવામાં આવે છે.

અક્ષો પર ન આવેલાં બિંદુઓથી સમતલના પરસ્પર અલગ હોય તેવા ચાર બિંદુ ગણ મળે છે. આ બિંદુ ગણ પ્રથમ, દ્વિતીય, તૃતીય અને ચતુર્થ ચરણ તરીકે ઓળખાય છે. તેમને નીચે પ્રમાણે દર્શાવવામાં આવે છે :

પ્રથમ ચરણ $= \{P(x, y) \mid x > 0, y > 0\}$

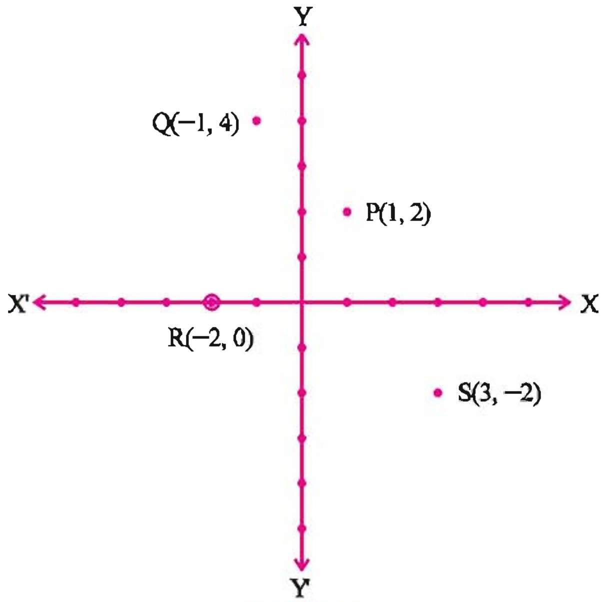
દ્વિતીય ચરણ $= \{P(x, y) \mid x < 0, y > 0\}$

તૃતીય ચરણ $= \{P(x, y) \mid x < 0, y < 0\}$

ચતુર્થ ચરણ $= \{P(x, y) \mid x > 0, y < 0\}$

આકૃતિ 6.1માં સમતલનાં બિંદુઓ P(1, 2), Q(−1, 4), R(−2, 0) અને S(3, −2)નું નિરૂપણ દર્શાવેલ છે. કોઈ પણ બિંદુના યામમાં તેના x-યામનું નિરપેક્ષ મૂલ્ય એ Y-અક્ષથી અને y-યામનું નિરપેક્ષ મૂલ્ય એ X-અક્ષથી અંતર દર્શાવે છે. બિંદુ P(1, 2) એ Y-અક્ષની ધન દિશાથી એકમ અંતરે તથા X-અક્ષની ધન દિશાથી 2 એકમ અંતરે આવેલું છે. પરંતુ Q(−1, 4) પણ Y-અક્ષથી એકમ અંતરે જ છે અને તેનો x-યામ ઋણ હોવાથી તેનું સ્થાન બીજા ચરણમાં છે.

આ ઉપરાંત આપણે કેટલાંક સૂત્રો પણ શીખી ગયા.



આકૃતિ 6.1

(1) અંતર સૂત્ર (Distance formula) : $A(x_1, y_1)$ અને $B(x_2, y_2)$ એ સમતલમાં આવેલાં બિંદુઓ છે. A થી B સુધીનું અંતર $d(A, B)$ કે AB વડે દર્શાવાય છે અને તેને

$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ વડે મેળવવામાં આવે છે.

ઉદાહરણ તરીકે A(9, 8) અને B(6, 4) વચ્ચેનું અંતર

$$AB = \sqrt{(9-6)^2 + (8-4)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

(2) વિભાજન સૂત્ર (Division formula) : $A(x_1, y_1)$ અને $B(x_2, y_2)$ એ સમતલના આપેલાં બિંદુઓ છે. $P(x, y)$ એ $\overleftrightarrow{AB}$ પર આવેલ $\overline{AB}$નું A તરફથી λ ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરતું બિંદુ છે. $\lambda \in R - \{0, -1\}$.

$$\lambda = \frac{AP}{PB}.$$

$$P(x, y) = \left(\frac{\lambda x_2 + x_1}{\lambda + 1}, \frac{\lambda y_2 + y_1}{\lambda + 1}\right)$$

જો ગુણોત્તર $\lambda = m : n$ હોય, તો

$$P(x, y) = \left(\frac{mx_2 + nx_1}{m + n}, \frac{my_2 + ny_1}{m + n}\right)$$

ઉદાહરણ તરીકે, A(2, 3) અને B(4, 8) એ xy સમતલમાં આપેલાં બિંદુઓ છે. $\overline{AB}$ નું A તરફથી 3 : 2 ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરતા બિંદુના યામ,

$$\left(\frac{mx_2 + nx_1}{m + n}, \frac{my_2 + ny_1}{m + n}\right) = \left(\frac{3 \cdot 4 + 2 \cdot 2}{3 + 2}, \frac{3 \cdot 8 + 2 \cdot 3}{3 + 2}\right) = \left(\frac{16}{5}, 6\right)$$

(3) રેખાખંડનું મધ્યબિંદુ (Mid-point of a Line-segment) : રેખાખંડનું મધ્યબિંદુ એ $\overline{AB}$ નાં અંત્યબિંદુઓ $A(x_1, y_1)$ અને $B(x_2, y_2)$થી સમાન અંતરે આવેલ હોય છે અને $\overline{AB}$ પર હોય છે. તે $\overline{AB}$નું $m : n = 1 : 1$ ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે છે.

$\overline{AB}$ ના મધ્યબિંદુના યામ $= \left(\frac{1 \cdot x_2 + 1 \cdot x_1}{1+1}, \frac{1 \cdot y_2 + 1 \cdot y_1}{1+1}\right)$

$= \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$

(4) (x_1, y_1), (x_2, y_2) અને (x_3, y_3) શિરોબિંદુઓવાળા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ,

$$\frac{1}{2} \mid x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) \mid \qquad \text{(i)}$$

ઉદાહરણ તરીકે, A(3, 2), B(11, 8) અને C(8, 12) એ ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓ છે.

ΔABCનું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2} \mid 3(8 - 12) + 11(12 - 2) + 8(2 - 8) \mid$

$= \frac{1}{2} \mid 3(-4) + 11(10) + 8(-6) \mid$

$= \frac{1}{2} \mid -12 + 110 - 48 \mid$

$= \frac{1}{2} \mid 50 \mid$

$= 25$

☛ **નોંધ** ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ હંમેશાં ધન હોય છે. જો ઉપરના (i)નું મૂલ્ય શૂન્ય થાય, તો ત્રિકોણ શક્ય નથી. તેથી બિંદુઓ સમરેખ થાય.

આ પ્રકરણમાં આપણે યામભૂમિતિનો વધુ અભ્યાસ કરીશું. યામભૂમિતિની સૌથી સરળ આકૃતિ રેખાનો અભ્યાસ કરવા માટે વિભાજન સૂત્ર ખૂબ અગત્યનું છે.

6.3 ઊગમબિંદુનું સ્થાનાંતર (Shifting of Origin)

આપણે જાણીએ છીએ કે યામ-સમતલમાં દરેક બિંદુને નિશ્ચિત યામ હોય છે. સમતલના પ્રત્યેક બિંદુના યામ અક્ષો અને ઊગમબિંદુના સ્થાન પર આધારિત મળે છે.

સમતલમાં લંબરેખાઓની એક જોડ લો. આ રેખાઓના છેદબિંદુને ઊગમબિંદુ કહે છે અને તેને O દ્વારા દર્શાવાય છે. આ પૈકીની એક રેખાને X-અક્ષ તથા બીજી રેખાને Y-અક્ષ કહે છે.

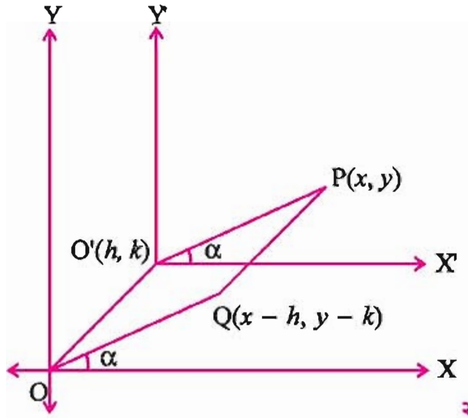
ધારો કે P એ યામ-સમતલ XOYનું કોઈ બિંદુ છે. Pના યામ (x, y) છે.

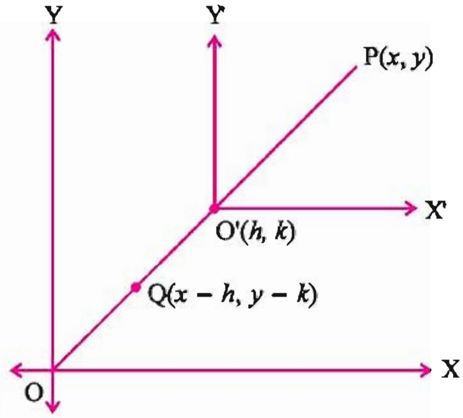
ધારો કે $O'(h, k)$ એ જ સમતલનું અન્ય કોઈ બિંદુ છે. $P \neq O'$.

બે રેખાઓ $\overleftrightarrow{O'X'}$ અને $\overleftrightarrow{O'Y'}$ પસંદ કરો જેથી $\overleftrightarrow{O'X'} \parallel \overleftrightarrow{OX}$ અને $\overleftrightarrow{O'Y'} \parallel \overleftrightarrow{OY}$.

વળી, $\overrightarrow{OX}$ ની દિશા $= \overrightarrow{O'X'}$ ની દિશા તથા $\overrightarrow{OY}$ની દિશા $= \overrightarrow{O'Y'}$ ની દિશા.

ધારો કે નવા અક્ષો $\overleftrightarrow{O'X'}$ તથા $\overleftrightarrow{O'Y'}$ ને સાપેક્ષ Pના યામ (x', y') છે.





આકૃતિ 6.2

ધારો કે જૂના અક્ષો $\overleftrightarrow{OX}$, $\overleftrightarrow{OY}$ ને સાપેક્ષ Q ના યામ $(x - h, y - k)$ છે.

હવે, $O'P = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2}$

$OQ = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2}$

$\therefore \quad O'P = OQ$

તે જ રીતે $OO' = PQ = \sqrt{h^2 + k^2}$

$P \neq O'$. તેથી O, O', P અને Q સમરેખ છે અથવા સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનાં શિરોબિંદુ છે.

ધારો કે $m\angle PO'X' = \alpha$ **$(0 < \alpha < 2\pi)$**

તેથી $m\angle QOX = \alpha$

$\therefore \quad (x', y') = (O'P \cos\alpha, O'P \sin\alpha)$

અને $(x - h, y - k) = (OQ \cos\alpha, OQ \sin\alpha)$

$= (O'P \cos\alpha, O'P \sin\alpha)$

$\therefore \quad (x', y') = (x - h, y - k)$

$\therefore \quad x' = x - h, \qquad y' = y - k$

$x = x' + h, \qquad y = y' + k$

આથી ઊગમબિંદુનું (h, k) આગળ સ્થાનાંતર કરતાં $P(x, y)$ ના નવા યામ $(x - h, y - k)$ મળે છે.

આ પરથી ઊગમબિંદુનું સ્થાનાંતર (3, 5) આગળ કરતાં P(6, 8) ના નવા યામ શોધીએ.

અહીં, $(h, k) = (3, 5)$, $(x, y) = (6, 8)$

ધારો કે P ના નવા યામ (x', y') છે.

તેથી $x' = x - h$ અને $y' = y - k$

$= 6 - 3 \qquad = 8 - 5$

$= 3 \qquad = 3$

$\therefore$ P ના નવા યામ (3, 3) છે.

6.4 રેખાખંડનું વિભાજન (Division of a Line-segment)

ધારો કે A અને B એ એક સમતલમાં આવેલાં બે ભિન્ન બિંદુઓ છે. માટે બે ભિન્ન બિંદુઓમાંથી પસાર થતી અનન્ય $\overleftrightarrow{AB}$ મળે.

ધારો કે P(x, y) એ $\overleftrightarrow{AB}$ પર આવેલ બિંદુ છે. તેથી બિંદુ P ના સ્થાન માટે ત્રણ શક્યતાઓ છે. જો P ≠ A, P ≠ B તો આ શક્યતાઓ નીચે પ્રમાણે છે :

(1) A–P–B (2) A–B–P (3) P–A–B.

P નું ચોક્કસ સ્થાન નક્કી કરવામાં ગુણોત્તર $\frac{AP}{PB}$ એ ખૂબ જ અગત્યનું સ્થાન ધરાવે છે.

વ્યાખ્યા : (1) જો A–P–B તો બિંદુ P એ $\overline{AB}$ નું A તરફથી $\lambda = \frac{AP}{PB}$ ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે છે. અહીં $\lambda > 0$. આ વિભાજનને અંતઃવિભાજન કહે છે.

(2) જો P–A–B અથવા A–B–P તો P એ $\overline{AB}$ નું A તરફથી $\lambda = -\frac{AP}{PB}$ ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે છે. આ વિભાજનને બહિર્વિભાજન કહે છે. અહીં $\lambda < 0$.

આમ બધા જ વિકલ્પમાં $\lambda \in R - \{0, -1\}$.

બિંદુ P એ $\overline{AB}$ નું λ ($\lambda \neq 0$ અને $\lambda \neq -1$) ગુણોત્તરમાં A તરફથી વિભાજન કરે તો,

(1) જો A–P–B, તો $\lambda > 0$. (અંતઃવિભાજન)

(2) જો P–A–B, તો $-1 < \lambda < 0$. (બહિર્વિભાજન)

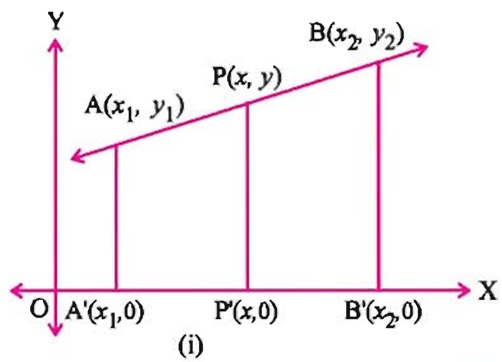
(3) જો A–B–P, તો $\lambda < -1$. (બહિર્વિભાજન)

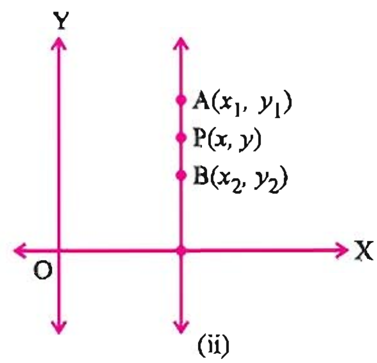
((2)માં $-1 < \lambda < 0$ તથા (3) માં $\lambda < -1$ સાબિત કરો !)

વિભાજન બિંદુના યામ (Coordinates of the Point of Division) :

A(x_1, y_1) અને B(x_2, y_2) એ એક જ સમતલમાં આવેલાં બિંદુઓ છે. આપણે $\overline{AB}$ નું A તરફથી λ ($\lambda > 0$) ગુણોત્તરમાં અંતઃવિભાજન કરતા બિંદુના યામ મેળવીએ.

ધારો કે P(x, y) એ $\overline{AB}$ નું A તરફથી $\lambda = \frac{AP}{PB}$ ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે છે.





આકૃતિ 6.3

જો $\overleftrightarrow{AB}$ શિરોલંબ ના હોય તો A, P, B માંથી X-અક્ષ પરના લંબપાદ અનુક્રમે A', P', B' લો. આકૃતિ 6.3(i)માં બતાવ્યા પ્રમાણે $\overleftrightarrow{AA'} \parallel \overleftrightarrow{PP'} \parallel \overleftrightarrow{BB'}$ તથા X-અક્ષ અને $\overleftrightarrow{AB}$ તેમની છેદિકા છે.

$\therefore \quad \frac{AP}{PB} = \frac{A'P'}{P'B'} = \frac{|x - x_1|}{|x_2 - x|}$

સ્પષ્ટ છે કે A'–P'–B'. આથી $x - x_1 > 0$ અને $x_2 - x > 0$ અથવા $x - x_1 < 0$ અને $x_2 - x < 0$

$\therefore \quad \lambda = \frac{x - x_1}{x_2 - x}$

$\therefore \quad \lambda x_2 - \lambda x = x - x_1$

$\therefore \quad \lambda x_2 + x_1 = \lambda x + x$

$\therefore \quad x = \frac{\lambda x_2 + x_1}{\lambda + 1}$

જો $\overleftrightarrow{AB}$ એ X-અક્ષને લંબ હોય, તો $x = x_1 = x_2$. તેથી $\frac{\lambda x_2 + x_1}{\lambda + 1} = \frac{\lambda x + x}{\lambda + 1} = x$.

આમ, બંને વિકલ્પોમાં $x = \frac{\lambda x_2 + x_1}{\lambda + 1}$, જ્યાં $\lambda > 0$. જો $\overleftrightarrow{AB}$ સમક્ષિતિજ ન હોય તો આ જ રીતે A, P, B માંથી Y-અક્ષ પર લંબ દોરી $y = \frac{\lambda y_2 + y_1}{\lambda + 1}$ મેળવી શકાય.

જો $\overleftrightarrow{AB}$ સમક્ષિતિજ હોય તોપણ $y = \frac{\lambda y_2 + y_1}{\lambda + 1}$ મેળવી શકાય.

તેથી જો $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ આપેલાં બિંદુઓ હોય તથા P એ $\overline{AB}$ નું A તરફથી λ ગુણોત્તરમાં ($\lambda > 0$) અંતઃવિભાજન કરે તો $P\left(\frac{\lambda x_2 + x_1}{\lambda + 1}, \frac{\lambda y_2 + y_1}{\lambda + 1}\right)$.

આથી ઊલટું ધારો કે, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ અને $P\left(\frac{\lambda x_2 + x_1}{\lambda + 1}, \frac{\lambda y_2 + y_1}{\lambda + 1}\right)$, $\lambda > 0$ આપેલાં બિંદુઓ છે.

આપણે હવે A–P–B અને $\frac{AP}{PB} = \lambda$ સાબિત કરીશું.

હવે, $AP^2 = \left(\frac{\lambda x_2 + x_1}{\lambda + 1} - x_1\right)^2 + \left(\frac{\lambda y_2 + y_1}{\lambda + 1} - y_1\right)^2$

$= \left(\frac{\lambda x_2 - \lambda x_1}{\lambda + 1}\right)^2 + \left(\frac{\lambda y_2 - \lambda y_1}{\lambda + 1}\right)^2$

$= \frac{\lambda^2(x_2 - x_1)^2}{(\lambda + 1)^2} + \frac{\lambda^2(y_2 - y_1)^2}{(\lambda + 1)^2}$

$= \frac{\lambda^2}{(\lambda + 1)^2}\left[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2\right]$

$= \left(\frac{\lambda}{\lambda + 1}\right)^2 AB^2$

$\therefore \quad AP = \left|\frac{\lambda}{\lambda+1}\right| \cdot AB$

$\therefore \quad AP = \frac{\lambda}{\lambda+1} \cdot AB$ **($\lambda > 0$ અને $\lambda + 1 > 0$)**

તે જ રીતે, $PB = \left|\frac{1}{\lambda+1}\right| \cdot AB = \frac{1}{\lambda+1} \cdot AB$

$\therefore \quad \frac{AP}{PB} = \frac{\frac{\lambda}{\lambda+1}}{\frac{1}{\lambda+1}} \cdot \frac{AB}{AB}$ **(અહીં A અને B ભિન્ન બિંદુઓ છે. આથી $AB \neq 0$)**

$\frac{AP}{PB} = \lambda$

વળી, $AP + PB = \lambda PB + PB$

$= (\lambda + 1) PB$

$= (\lambda + 1) \frac{1}{\lambda+1} \cdot AB$

$= AB$

$AP + PB = AB$

$\therefore \quad A-P-B$

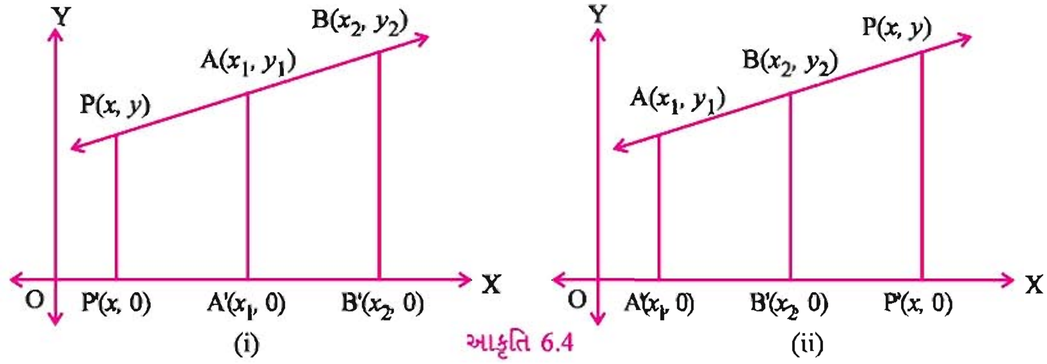
તેથી A–P–B અને $\frac{AP}{PB} = \lambda$.

$P\left(\frac{\lambda x_2 + x_1}{\lambda+1}, \frac{\lambda y_2 + y_1}{\lambda+1}\right)$ અને $\lambda > 0$, આપેલ હોય તો, આપણે કહી શકીએ કે, A–P–B અને $\frac{AP}{PB} = \lambda$.

$\therefore$ જો P એ $\overline{AB}$ નું $\lambda > 0$ ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે તો $P\left(\frac{\lambda x_2 + x_1}{\lambda+1}, \frac{\lambda y_2 + y_1}{\lambda+1}\right)$ અને આથી ઊલટું જો $P\left(\frac{\lambda x_2 + x_1}{\lambda+1}, \frac{\lambda y_2 + y_1}{\lambda+1}\right)$, $\lambda > 0$ તો P એ $\overline{AB}$ નું λ ગુણોત્તરમાં અંતઃવિભાજન કરે છે. અત્રે $\lambda = \frac{AP}{PB}$.

6.5 રેખાખંડનું બહિર્વિભાજન કરતા બિંદુના યામ (Coordinates of the Point Dividing a Line-segment Externally)

$A(x_1, y_1)$ અને $B(x_2, y_2)$ એ સમતલનાં આપેલાં બિંદુઓ છે. આપણે $\overline{AB}$ નું A તરફથી λ ($\lambda < 0$) ગુણોત્તરમાં બહિર્વિભાજન કરતા બિંદુના યામ મેળવીએ. ધારો કે P એ $\overline{AB}$ નું A તરફથી λ ગુણોત્તરમાં બહિર્વિભાજન કરે છે.



આકૃતિ 6.4

અંતઃવિભાજન માટે આપણે અગાઉ જે પ્રમાણે કર્યું તે પ્રમાણે કરતાં અહીં $\overleftrightarrow{AA'} \parallel \overleftrightarrow{BB'} \parallel \overleftrightarrow{PP'}$.
$\overleftrightarrow{AB}$ અને X-અક્ષ એ તેમની છેદિકાઓ છે.

$\therefore \quad \frac{AP}{PB} = \frac{A'P'}{P'B'}$

અહીં, $-\frac{AP}{PB} = -\frac{A'P'}{P'B'} = -\frac{|x - x_1|}{|x_2 - x|} = -\frac{x - x_1}{x - x_2}$ **($x_1 - x$ અને $x_2 - x$ બંને સમચિહ્ન છે.)**

$\therefore \quad \lambda = \frac{x - x_1}{x_2 - x}$ **$\left(-\frac{AP}{PB} = \lambda\right)$**

$\therefore \quad \lambda x_2 - \lambda x = x - x_1$

$\therefore \quad \lambda x + x = \lambda x_2 + x_1$

$\therefore \quad (\lambda + 1)x = \lambda x_2 + x_1$

$\therefore \quad x = \frac{\lambda x_2 + x_1}{\lambda + 1}$ **$(\lambda \neq -1)$**

$\overleftrightarrow{AB}$ એ X-અક્ષને લંબ હોય તો $x = x_1 = x_2$. તેથી, $\frac{\lambda x_2 + x_1}{\lambda + 1} = \frac{\lambda x + x}{\lambda + 1} = x$.

તે જ રીતે, $y = \frac{\lambda y_2 + y_1}{\lambda + 1}$ સાબિત કરી શકાય.

તેથી $\overline{AB}$ નું A તરફથી λ ($\lambda < 0, \lambda \neq -1$) ગુણોત્તરમાં બહિર્વિભાજન કરતા બિંદુના યામ.

$\left(\frac{\lambda x_2 + x_1}{\lambda + 1}, \frac{\lambda y_2 + y_1}{\lambda + 1}\right)$ જ્યાં $\lambda < 0, \lambda \neq -1$

આથી ઊલટું ધારો કે $\lambda < 0, \lambda \neq -1$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ અને $P\left(\frac{\lambda x_2 + x_1}{\lambda + 1}, \frac{\lambda y_2 + y_1}{\lambda + 1}\right)$ એ આપેલાં બિંદુઓ છે.

આપણે $\frac{AP}{PB} = -\lambda$ તથા P–A–B અથવા A–B–P સાબિત કરીશું.

અંતઃવિભાજન માટે કરી હતી તે જ ગણતરી કરતાં,

$\therefore \quad AP = \left|\frac{\lambda}{\lambda + 1}\right| \cdot AB$ અને $PB = \left|\frac{1}{\lambda + 1}\right| \cdot AB$

જો $-1 < \lambda < 0$, તો $\lambda + 1 > 0$ અને $|\lambda| = -\lambda$

$\therefore \quad AP = \frac{-\lambda}{\lambda + 1} \cdot AB$ અને $PB = \frac{1}{\lambda + 1} \cdot AB$ (i)

તેથી $\frac{AP}{PB} = \frac{\frac{-\lambda}{\lambda + 1} \cdot AB}{\frac{1}{\lambda + 1} \cdot AB} = -\lambda$

(i) પરથી, $-AP + PB = \frac{\lambda}{\lambda + 1} AB + \frac{1}{\lambda + 1} AB = AB$

$\therefore \quad AP + AB = PB$

$\therefore$ P–A–B

જો $\lambda < -1$ તો $\lambda + 1 < 0$

$\therefore \quad |\lambda + 1| = -(\lambda + 1)$ અને $|\lambda| = -\lambda$

$AP = \left|\frac{\lambda}{\lambda+1}\right| \cdot AB = \frac{-\lambda}{-(\lambda+1)} \cdot AB = \frac{\lambda}{\lambda+1} \cdot AB$

$\therefore \quad AP = \frac{\lambda}{\lambda+1} \cdot AB$ અને $PB = \frac{1}{-(\lambda+1)} \cdot AB$ (ii)

$\therefore \quad \frac{AP}{PB} = -\lambda$

(ii) પરથી, $AP - PB = AB$

$\therefore \quad AP = AB + PB$

$\therefore \quad A-B-P$

તેથી $\lambda < 0, \lambda \neq -1$ માટે P એ $\overleftrightarrow{AB}$ પર આવેલ બિંદુ હોય, તો P–A–B અથવા A–B–P, જ્યાં $\lambda = -\frac{AP}{PB}$.

$\therefore$ જો $\frac{AP}{PB} = -\lambda, \lambda < 0, \lambda \neq -1$, તો P–A–B અથવા A–B–P અને

$P(x, y) = \left(\frac{\lambda x_2 + x_1}{\lambda+1}, \frac{\lambda y_2 + y_1}{\lambda+1}\right)$ અને ઊલટું જો $P\left(\frac{\lambda x_2 + x_1}{\lambda+1}, \frac{\lambda y_2 + y_1}{\lambda+1}\right), \lambda < 0$, તો P એ $\overline{AB}$ નું λ ગુણોત્તરમાં બહિર્વિભાજન કરે છે.

માટે અંતઃવિભાજન અને બહિર્વિભાજનથી આપણે કહી શકીએ કે પ્રત્યેક $\lambda \in R - \{0, -1\}$ તથા રેખા પરનાં તમામ બિંદુઓ વચ્ચે એક-એક સંગતતા છે. (A અને B બિંદુઓ સિવાય)

નોંધ 1 $A(x_1, y_1)$ અને $B(x_2, y_2)$ આપેલાં ભિન્ન બિંદુઓ છે. જો P એ $\overline{AB}$ નું B તરફથી λ ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે તો બિંદુ P ના યામ $\left(\frac{\lambda x_1 + x_2}{\lambda+1}, \frac{\lambda y_1 + y_2}{\lambda+1}\right)$.

નોંધ 2 જો $\overleftrightarrow{AB}$ અને $\overleftrightarrow{CD}$, P બિંદુમાં છેદે તો $\overleftrightarrow{CD}$ એ $\overline{AB}$ નું $\frac{AP}{PB}$ ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે જ્યાં A–P–B અને જો P–A–B અથવા A–B–P તો $\overleftrightarrow{CD}$ એ $\overline{AB}$ નું $-\frac{AP}{PB}$ ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે છે.

ઉદાહરણ 1 : A(8, 4), B(−3, 1) આપેલાં બિંદુઓ છે. બિંદુ P એવું શોધો કે જેથી P એ $\overline{AB}$ નું B તરફથી −1 : 2 ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે.

ઉકેલ : $A(x_1, y_1) = (8, 4)$ અને $B(x_2, y_2) = (-3, 1)$

ધારો કે $P(x, y)$ એ $\overline{AB}$ નું B તરફથી $\lambda = \frac{-1}{2}$ ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે છે.

તેથી $P(x, y) = \left(\frac{\lambda x_1 + x_2}{\lambda+1}, \frac{\lambda y_1 + y_2}{\lambda+1}\right)$ (P એ B તરફથી વિભાજન કરે છે)

$= \left(\frac{-\frac{1}{2}(8) + (-3)}{-\frac{1}{2}+1}, \frac{-\frac{1}{2}(4) + 1}{-\frac{1}{2}+1}\right)$

$= \left(\frac{-4 + (-3)}{\frac{1}{2}}, \frac{-2+1}{\frac{1}{2}}\right) = (-14, -2)$

$\therefore$ માંગેલ બિંદુ P(−14, −2) છે.

ઉદાહરણ 2 : P(3, 5) અને Q(12, 14)ને જોડતા રેખાખંડનાં ત્રિભાગ બિંદુઓના યામ શોધો.

ઉકેલ :

આકૃતિ 6.5

ધારો કે R અને S એ $\overline{PQ}$ નાં ત્રિભાગ બિંદુઓ છે. બિંદુ R એ $\overline{PQ}$નું P તરફથી 1:2 ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે છે.

$$R\left(\frac{\lambda x_2 + x_1}{\lambda + 1}, \frac{\lambda y_2 + y_1}{\lambda + 1}\right) = R\left(\frac{\frac{1}{2}(12) + 3}{\frac{1}{2} + 1}, \frac{\frac{1}{2}(14) + 5}{\frac{1}{2} + 1}\right)$$

$$= R\left(\frac{12 + 6}{1 + 2}, \frac{14 + 10}{1 + 2}\right)$$

$$= R(6, 8)$$

બિંદુ S એ $\overline{RQ}$નું મધ્યબિંદુ છે.

$\therefore$ બિંદુ Sના યામ $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) = \left(\frac{6 + 12}{2}, \frac{8 + 14}{2}\right) = (9, 11)$

$\therefore$ આમ R(6, 8) અને S(9, 11) $\overline{PQ}$ નાં ત્રિભાગ બિંદુઓ છે.

નોંધ : અહીં બિંદુઓ P, R, S અને Q ના x-યામ અનુક્રમે 3, 6, 9, 12 છે, જે સમાંતર શ્રેણીમાં છે અને તે જ રીતે y-યામ પણ સમાંતર શ્રેણીમાં છે. તે પરથી $A(x_1, y_1)$ અને $B(x_2, y_2)$ આપેલા ભિન્ન બિંદુઓ હોય તો $\overline{AB}$ ના n એકરૂપ ભાગમાં વિભાજન કરતાં બિંદુના યામ માટે $d = \frac{x_2 - x_1}{n}$ અને $d' = \frac{y_2 - y_1}{n}$ લેતાં વિભાજન બિંદુના યામ

$(x_1 + d, y_1 + d'), (x_1 + 2d, y_1 + 2d'), ..., (x_1 + (n - 1)d, y_1 + \ + (n - 1)d')$

ઉદાહરણ 3 : A(3, −2) અને B(0, 7) હોય, તો P ∈ $\overleftrightarrow{AB}$ શોધો કે જેથી AP = 4AB થાય.

ઉકેલ : (રીત 1) : અહીં, P ∈ $\overleftrightarrow{AB}$. ધારો કે Pના યામ (x, y) છે.

$\therefore$ AP = 4AB

$\therefore$ $\frac{AP}{4} = \frac{AB}{1} = k$ (ધારો કે)

$\therefore$ AP = $4k$ અને AB = k

વિકલ્પ 1 : A–B–P

આકૃતિ 6.6

બિંદુ P, $\overline{AB}$નું A તરફથી $\lambda = \frac{-AP}{PB} = \frac{-4k}{3k} = \frac{-4}{3}$ ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે છે.

$\therefore \quad P(x, y) = \left(\dfrac{\lambda x_2 + x_1}{\lambda + 1}, \dfrac{\lambda y_2 + y_1}{\lambda + 1}\right)$

$= \left(\dfrac{\frac{-4}{3}(0) + 3}{\frac{-4}{3} + 1}, \dfrac{\frac{-4}{3}(7) + (-2)}{\frac{-4}{3} + 1}\right)$

$= \left(\dfrac{-4(0) + 3(3)}{-4 + 3}, \dfrac{-4(7) + 3(-2)}{-4 + 3}\right)$

$= \left(\dfrac{9}{-1}, \dfrac{-28 - 6}{-1}\right) = (-9, 34)$

$\therefore$ બિંદુ Pના યામ (–9, 34) થાય.

વિકલ્પ 2 : P–A–B

આકૃતિ 6.7

બિંદુ P, $\overline{AB}$નું A તરફથી $\lambda = \dfrac{-AP}{PB} = \dfrac{-4}{5}$ ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે છે.

$\therefore \quad P(x, y) = \left(\dfrac{\lambda x_2 + x_1}{\lambda + 1}, \dfrac{\lambda y_2 + y_1}{\lambda + 1}\right)$

$= \left(\dfrac{\frac{-4}{5}(0) + 3}{\frac{-4}{5} + 1}, \dfrac{\frac{-4}{5}(7) + (-2)}{\frac{-4}{5} + 1}\right)$

$= \left(\dfrac{-4(0) + 3(5)}{-4 + 5}, \dfrac{-4(7) + (-2)5}{-4 + 5}\right)$

$= (15, -38)$

$\therefore$ બિંદુ Pના યામ (15, –38) થાય.

વિકલ્પ 3 : અહીં, AP > AB હોવાથી A–P–B શક્ય નથી.

આમ, Pના યામ (–9, 34) અથવા (15, –38) થાય.

રીત 2 : ધારો કે $P(x, y)$ માંગેલ બિંદુ છે.

અહીં $P \in \overleftrightarrow{AB}$ અને AP = 4AB એટલે કે, $\dfrac{AP}{AB} = 4$

$\therefore$ બિંદુ A એ $\overline{PB}$નું P તરફથી $\lambda = -4:1$ અથવા $\lambda = 4:1$ ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે છે.

(1) $\lambda = -4:1$ લેતાં,

$\therefore \quad (3, -2) = \left(\dfrac{-4(0) + 1(x)}{-4 + 1}, \dfrac{-4(7) + 1(y)}{-4 + 1}\right)$

$\therefore \quad 3 = \dfrac{-4(0) + 1(x)}{-4 + 1}, \quad -2 = \dfrac{-4(7) + 1(y)}{-4 + 1}$

$\therefore \quad 3 = \dfrac{x}{-3}, \quad -2 = \dfrac{-28 + y}{-3}$

$\therefore \quad x = -9, \qquad y = 34$

$\therefore$ માંગેલ બિંદુ P ના યામ (−9, 34) થાય.

(2) $\lambda = 4:1$ લેતાં,

$$(3, -2) = \left(\frac{4(0) + 1(x)}{4+1}, \frac{4(7) + 1(y)}{4+1}\right)$$

$$\therefore \quad (3, -2) = \left(\frac{x}{5}, \frac{28 + y}{5}\right)$$

$\therefore \quad 3 = \frac{x}{5}$ અને $-2 = \frac{28 + y}{5}$

$\therefore \quad x = 15$ અને $y = -38$

$\therefore$ માંગેલ બિંદુ Pના યામ (15, −38) થાય.

આમ, Pના યામ (−9, 34) અથવા (15, −38) થાય.

સ્વાધ્યાય 6.1

1. A(3, −5) અને B(2, 3) એ આપેલાં બિંદુઓ છે. $\overline{AB}$ નું A તરફથી 2 : 3 ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરતા બિંદુના યામ શોધો.
2. A(2, 0) અને B(2, 6) આપેલાં છે. $\overline{AB}$ નું B તરફથી −3 : 5 ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરતા બિંદુના યામ શોધો.
3. A(−7, 8) અને B(−3, −5) માટે X-અક્ષ એ $\overline{AB}$નું A તરફથી કયા ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે છે ?
4. બિંદુઓ A(1, 2) અને B(7, 8)ને જોડતા રેખાખંડનાં ત્રિભાગ બિંદુઓના યામ શોધો.
5. A(1, 2) અને B(6, 3) આપેલાં બિંદુઓ છે, 3AB = 2PB થાય તેવું બિંદુ P $\in \overleftrightarrow{AB}$ મેળવો.
6. A(1, 2) અને B(0, 3) એ આપેલાં બિંદુઓ છે. P(10, −7) $\in \overleftrightarrow{AB}$. P એ $\overline{AB}$ નું A તરફથી કયા ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે છે ?

*

6.6 રેખાનાં પ્રચલ સમીકરણો

આપણે સૌ જાણીએ છીએ કે, જો $A(x_1, y_1)$ તથા $B(x_2, y_2)$ તો $\forall \lambda \in R - \{0, -1\}$ માટે $\overleftrightarrow{AB}$ પરના A અને B સિવાયનાં તમામ બિંદુઓ $\left(\frac{\lambda x_2 + x_1}{\lambda + 1}, \frac{\lambda y_2 + y_1}{\lambda + 1}\right)$ સૂત્ર દ્વારા મેળવી શકાય છે.

તેથી, $\overleftrightarrow{AB} = \left\{(x, y) \,\middle|\, x = \frac{\lambda x_2 + x_1}{\lambda + 1}, y = \frac{\lambda y_2 + y_1}{\lambda + 1}, \lambda \in R - \{0, -1\}\right\} \cup \{A, B\}$

ધારો કે $t = \frac{\lambda}{\lambda + 1}$. તેથી $1 - t = \frac{1}{\lambda + 1}$.

હવે, $x = \dfrac{\lambda x_2 + x_1}{\lambda + 1}$ અને $y = \dfrac{\lambda y_2 + y_1}{\lambda + 1}$

$\therefore \quad x = \dfrac{\lambda}{\lambda+1}x_2 + \dfrac{1}{\lambda+1}x_1$ અને $y = \dfrac{\lambda}{\lambda+1}y_2 + \dfrac{1}{\lambda+1}y_1$

$\therefore \quad x = tx_2 + (1-t)x_1$ અને $y = ty_2 + (1-t)y_1$

વળી $\lambda \neq 0 \Leftrightarrow t \neq 0$ અને $\lambda \neq -1 \Leftrightarrow t \neq 1$

વળી પ્રત્યેક $\lambda \in R - \{0, -1\}$ ને સંગત અનન્ય $t \in R - \{0, 1\}$ મળે તથા

પ્રત્યેક $t \in R - \{0, 1\}$ ને સંગત અનન્ય $\lambda \in R - \{0, -1\}$ મળે.

$\therefore$ પ્રત્યેક $P(x, y) \in \overleftrightarrow{AB} - \{A, B\}$ માટે

$(x, y) = (tx_2 + (1-t)x_1, ty_2 + (1-t)y_1), t \neq 0, 1$

$$\overleftrightarrow{AB} = \left\{(x, y) \,\middle|\, \begin{matrix} x = tx_2 + (1-t)x_1 \\ y = ty_2 + (1-t)y_1 \end{matrix} ; t \in R - \{0, 1\}\right\} \cup \{A, B\}$$

હવે સમીકરણો $x = tx_2 + (1-t)x_1$, $y = ty_2 + (1-t)y_1$ માં

$t = 0$ મૂકતાં $x = x_1$, $y = y_1$. તેથી $t = 0$ માટે, $(x, y) = (x_1, y_1)$

$t = 1$ મૂકતાં $x = x_2$, $y = y_2$. તેથી $t = 1$ માટે, $(x, y) = (x_2, y_2)$

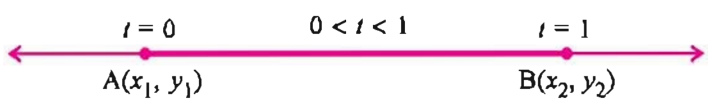
આથી આપણે $t = 0$ તથા 1 મૂલ્યો સ્વીકારીએ તો A તથા B મળે. આમ $t \in R$ લેતાં A અને B નો પણ સમાવેશ થઈ જાય.

$$\therefore \quad \overleftrightarrow{AB} = \left\{(x, y) \,\middle|\, \begin{matrix} x = tx_2 + (1-t)x_1 \\ y = ty_2 + (1-t)y_1 \end{matrix} ; t \in R\right\}$$

(x_1, y_1) અને (x_2, y_2) માંથી પસાર થતી રેખા માટે સમીકરણો $x = tx_2 + (1-t)x_1$ અને $y = ty_2 + (1-t)y_1$, $t \in R$ ને રેખાનાં પ્રચલ સમીકરણો (Parametric Equations) કહે છે. t ને પ્રચલ કહે છે.

t ને R ના કોઈ ઉપગણ પૂરતો મર્યાદિત રાખીએ, તો રેખાના અનુરૂપ જાણીતા ઉપગણ મળે.

- $$\overline{AB} = \left\{(x, y) \,\middle|\, \begin{matrix} x = tx_2 + (1-t)x_1 \\ y = ty_2 + (1-t)y_1 \end{matrix} ; t \in [0, 1]\right\}$$



આકૃતિ 6.8

- $$\overrightarrow{AB} = \left\{(x, y) \,\middle|\, \begin{matrix} x = tx_2 + (1-t)x_1 \\ y = ty_2 + (1-t)y_1 \end{matrix} ; t \geq 0\right\}$$

આકૃતિ 6.9

- $\overleftrightarrow{AB} - \overline{AB} = \left\{(x,\ y) \,\middle|\, \begin{matrix} x = tx_2 + (1-t)\,x_1 \\ y = ty_2 + (1-t)\,y_1 \end{matrix} ;\ t \in R - [0,\ 1]\right\}$

આકૃતિ 6.10

- $\overrightarrow{BA} = \left\{(x,\ y) \,\middle|\, \begin{matrix} x = tx_2 + (1-t)\,x_1 \\ y = ty_2 + (1-t)\,y_1 \end{matrix} ;\ t \le 1\right\}$

આકૃતિ 6.11

- $\overrightarrow{AB} - \overline{AB} = \left\{(x,\ y) \,\middle|\, \begin{matrix} x = tx_2 + (1-t)\,x_1 \\ y = ty_2 + (1-t)\,y_1 \end{matrix} ;\ t > 1\right\}$

આકૃતિ 6.12

રેખાનાં પ્રચલ સમીકરણો અનન્ય નથી :

ધારો કે A(1, 2) અને B(3, 5) બે બિંદુઓ છે.

$\overleftrightarrow{AB}$નાં પ્રચલ સમીકરણો,

$x = 3t + 1(1 - t) = 2t + 1$ અને $y = 5t + 2(1 - t) = 3t + 2,\ t \in R$

એટલે કે, $x = 2t + 1,\ y = 3t + 2,\ t \in R$

અહીં, $t = 0$ લેતાં, A(1, 2) અને $t = 1$ લેતાં B(3, 5) મળે છે.

જો $t = 3$ અને $t = 4$ અનુક્રમે લઈએ, તો P(7, 11) અને Q(9, 14) એ $\overleftrightarrow{AB}$ પરનાં બિંદુઓ મળે.

હવે $\overleftrightarrow{PQ}$નાં પ્રચલ સમીકરણો,

$x = 9t' + (1 - t')7 = 2t' + 7,\ y = 14t' + (1 - t')11 = 3t' + 11$

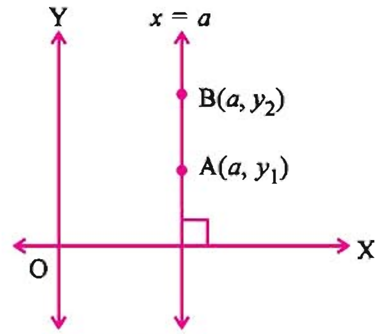
અહીં $t' = 0$ અને 1 અનુક્રમે લેતા P(7, 11) અને Q(9, 14) મળશે.

$\overleftrightarrow{PQ} = \overleftrightarrow{AB}$, પરંતુ તેમનાં પ્રચલ સમીકરણો જુદા છે.

પ્રચલ 0 અને 1 લેતાં આપણને જે બિંદુ પરથી પ્રચલ સમીકરણ મળ્યા છે તે બિંદુ મળે છે.

પ્રચલ $t' = t - 3$ લેતાં $\overleftrightarrow{PQ}$નાં પ્રચલ સમીકરણ $x = 2(t - 3) + 7 = 2t + 1$, $y = 3(t - 3) + 11 = 3t + 2$ થશે જે $\overleftrightarrow{AB}$નાં પ્રચલ સમીકરણ છે. આમ, એક જ રેખાનાં જુદા જુદા પ્રચલ સમીકરણ હોઈ શકે પણ પ્રચલના સુરેખ સંબંધથી એક સમીકરણને બીજા સ્વરૂપમાં ફેરવી શકાય.

6.7 X-અક્ષને લંબરેખાનું સમીકરણ



આકૃતિ 6.13

ધારો કે $A(a, y_1)$ અને $B(a, y_2)$ આપેલ $\overleftrightarrow{AB}$ નાં ભિન્ન બિંદુઓ છે. આથી $\overleftrightarrow{AB}$ નાં પ્રચલ સમીકરણો,

$$x = tx_2 + (1 - t)x_1 \text{ અને } y = ty_2 + (1 - t)y_1, t \in R$$
$$= ta + (1 - t)a$$
$$= a$$

$\therefore \quad x = a$

$\overleftrightarrow{AB}$ પરનાં તમામ બિંદુઓનો x-યામ a છે અને y-યામ કોઈ પણ વાસ્તવિક સંખ્યા છે.

X-અક્ષને લંબ કોઈ પણ રેખાનો આ લાક્ષણિક ગુણધર્મ છે.

તેથી શિરોલંબ $\overleftrightarrow{AB}$ નું સમીકરણ $x = a, a \in R$ છે.

$\overleftrightarrow{AB}$ પરના પ્રત્યેક બિંદુ (x, y) માટે $x = a$ તથા $y \in R$ યથેચ્છ છે.

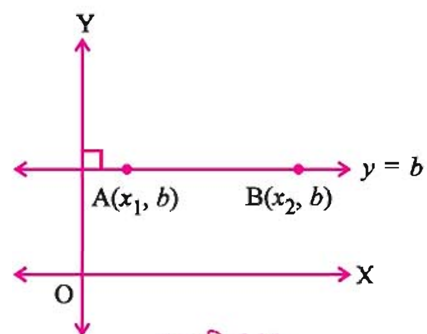
Y-અક્ષનું સમીકરણ $x = 0$ છે. Y-અક્ષને સમાંતર એટલે કે X-અક્ષને લંબ તમામ રેખાઓનું સમીકરણ $x = a$ છે. ($a \neq 0$).

આમ, રેખા પરનાં બે બિંદુના x-યામ સમાન હોય તો તેની પરનાં તમામ બિંદુના x-યામ સમાન હોય અને રેખા શિરોલંબ (Vertical) એટલે કે X-અક્ષને લંબ હોય.

6.8 Y-અક્ષને લંબરેખાનું સમીકરણ

ધારો કે $\overleftrightarrow{AB}$ પર આવેલાં ભિન્ન બિંદુઓ $A(x_1, b)$ અને $B(x_2, b)$ છે. આપણે અગાઉ જોયું તે પ્રમાણે Y-અક્ષને લંબરેખા પર આવેલાં બિંદુઓના y-યામ સમાન હોય છે. એટલે કે $y = b$.

તેથી $\overleftrightarrow{AB}$નું સમીકરણ $y = b, b \in R$.



આકૃતિ 6.14

Y-અક્ષને લંબ કોઈ પણ રેખા પરના બિંદુ (x, y) નો y-યામ અચળ છે અને x-યામ સ્વૈર છે. આ લાક્ષણિક ગુણધર્મ પરથી આપણે તેનું સમીકરણ $y = b$ લઈએ છીએ. **X-અક્ષનું સમીકરણ $y = 0$ છે. X-અક્ષને સમાંતર તમામ રેખાનું સમીકરણ $y = b$ છે. ($b \neq 0$).**

આથી રેખા પરનાં બે બિંદુના y-યામ સમાન હોય, તો રેખા પરનાં તમામ બિંદુના y-યામ સમાન હોય છે અને રેખા સમક્ષિતિજ (Horizontal) એટલે કે Y-અક્ષને લંબ છે.

6.9 રેખાનું કાર્તેઝિય સમીકરણ

રેખાનાં પ્રચલ સમીકરણોમાંથી t નો લોપ કરતાં મળતાં સમીકરણને રેખાનું કાર્તેઝિય સમીકરણ કહે છે.

$x = tx_2 + (1 - t)x_1$, $y = ty_2 + (1 - t)y_1$; $t \in R$ એ $A(x_1, y_1)$ અને $B(x_2, y_2)$ માંથી પસાર થતી રેખાનાં પ્રચલ સમીકરણો છે.

ધારો કે $\overleftrightarrow{AB}$ એ એક પણ અક્ષને લંબ નથી.

$\therefore$ $x_1 \neq x_2$ અને $y_1 \neq y_2$.

કોઈ પણ $P(x, y) \in \overleftrightarrow{AB}$ માટે, $x \neq x_1$, $y \neq y_1$, $x \neq x_2$, $y \neq y_2$.

હવે, $x = tx_2 + (1 - t)\, x_1 = tx_2 + x_1 - tx_1$

$\therefore$ $x - x_1 = t(x_2 - x_1)$ અને તે જ રીતે $y - y_1 = t(y_2 - y_1)$.

$\therefore$ $t = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$ અને $t = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$

$\therefore$ $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$

સ્પષ્ટ છે કે પ્રતીપ પણ સત્ય છે.

જો $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = t$ (ધારો કે)

$x = tx_2 + (1 - t)\, x_1$, $y = ty_2 + (1 - t)\, y_1$

$\therefore$ $P(x, y) \in \overleftrightarrow{AB}$.

$\therefore$ **રેખાનું કાર્તેઝિય સ્વરૂપે સમીકરણ (Cartesian Equation) $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$ થાય.**

ઉદાહરણ 4 : નીચે આપેલાં બિંદુઓમાંથી પસાર થતી રેખાઓનાં કાર્તેઝિય અને પ્રચલ સમીકરણ શોધો :

(1) (1, 2), (3, 5) (2) (5, 6), (5, −1) (3) (1, 3), (2, 0)

ઉકેલ : (1) રેખાનાં પ્રચલ સમીકરણ :

$$\left.\begin{aligned} x &= tx_2 + (1 - t)\, x_1 \\ y &= ty_2 + (1 - t)\, y_1 \end{aligned}\right\} ; t \in R$$

અહીં, $(x_1, y_1) = (1, 2)$ અને $(x_2, y_2) = (3, 5)$

$$\left.\begin{aligned} x &= t \cdot 3 + (1 - t) \cdot 1 \quad \text{અને} \quad & y &= t \cdot 5 + (1 - t) \cdot 2 \\ &= 3t + 1 - t & &= 5t + 2 - 2t \\ &= 2t + 1 & &= 3t + 2 \end{aligned}\right\} t \in R$$

$\therefore$ રેખાનાં પ્રચલ સમીકરણો $x = 2t + 1$, $y = 3t + 2$, $t \in R$ છે.

$\frac{x - 1}{2} = t$ અને $\frac{y - 2}{3} = t$

$\therefore$ $\frac{x - 1}{2} = \frac{y - 2}{3}$

$\therefore$ $3x - 2y + 1 = 0$ એ (1, 2) તથા (3, 5) માંથી પસાર થતી રેખાનું કાર્તેઝિય સમીકરણ છે.

(2) બિંદુઓ (5, 6) અને (5, −1)માંથી પસાર થતી રેખાનાં પ્રચલ સમીકરણ :

$$\left.\begin{aligned} x &= tx_2 + (1 - t)x_1 \quad \text{અને} \quad & y &= ty_2 + (1 - t)y_1 \\ &= t \cdot 5 + (1 - t)5 & &= t(-1) + (1 - t)6 \\ x &= 5 & &= 6 - 7t \end{aligned}\right\} t \in R$$

રેખાનાં પ્રચલ સમીકરણ : $x = 5$, $y = 6 - 7t$, $t \in R$ છે.

રેખા Y-અક્ષને સમાંતર છે અને તેનું કાર્તેઝિય સમીકરણ $x = 5$ છે.

(3) (1, 3) અને (2, 0) માંથી પસાર થતી રેખાનાં પ્રચલ સમીકરણ :

$$\left.\begin{aligned} x &= tx_2 + (1-t)x_1 & \text{અને} \quad y &= ty_2 + (1-t)y_1 \\ &= t \cdot 2 + (1-t)1 & &= t(0) + (1-t)3 \\ &= t + 1 & &= 3 - 3t \end{aligned}\right\} \quad t \in \mathrm{R}$$

રેખાનાં પ્રચલ સમીકરણો : $x = t + 1$, $y = 3 - 3t$, $t \in \mathrm{R}$ છે.

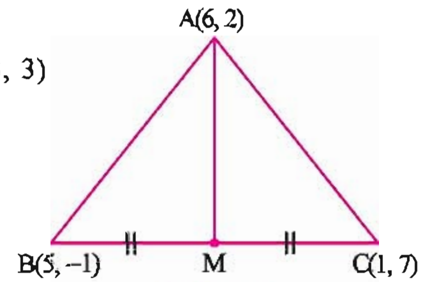
$t = x - 1$ અને $t = \frac{y-3}{-3}$

$\therefore \quad x - 1 = \frac{y-3}{-3}$.

$\therefore \quad -3x + 3 = y - 3$

$\therefore \quad 3x + y - 6 = 0$ એ રેખાનું કાર્તેઝિય સમીકરણ છે.

ઉદાહરણ 5 : ΔABC ના શિરોબિંદુ A માંથી પસાર થતી મધ્યગાનું સમીકરણ શોધો. જ્યાં A(6, 2), B(5, −1) અને C(1, 7).



આકૃતિ 6.15

ઉકેલ : $\overline{\mathrm{BC}}$નું મધ્યબિંદુ $\mathrm{M} = \left(\frac{5+1}{2}, \frac{-1+7}{2}\right) = (3, 3)$

$\overline{\mathrm{AM}}$ એ મધ્યગા છે.

$\overline{\mathrm{AM}}$ નાં પ્રચલ સમીકરણો

$$\begin{aligned} x &= tx_2 + (1-t)x_1 \\ y &= ty_2 + (1-t)y_1 \end{aligned} \; ; t \in [0, 1]$$

$$\begin{aligned} x &= t \cdot 3 + (1-t) \cdot 6 = 6 - 3t \\ y &= t \cdot 3 + (1-t) \cdot 2 = 2 + t \end{aligned} \; ; t \in [0, 1]$$

$\therefore$ મધ્યગા $\overline{\mathrm{AM}} = \left\{(x, y) \;\middle|\; \begin{matrix} x = 6 - 3t \\ y = 2 + t \end{matrix} \; ; t \in [0, 1]\right\}$

ઉદાહરણ 6 : એક રેખાનાં પ્રચલ સમીકરણો $x = 2t - 1$ અને $y = 6 - 5t$, $t \in \mathrm{R}$. છે. રેખા પર આવેલાં બિંદુ A નો x-યામ 7 છે. તે બિંદુનો y-યામ શોધો.

ઉકેલ : અહીં $x = 2t - 1$. આપેલ બિંદુનો x-યામ 7 છે.

$\therefore \quad 7 = 2t - 1$

$\therefore \quad 2t = 8$

$\therefore \quad t = 4$

સમીકરણ $y = 6 - 5t$ માં $t = 4$ મૂકતાં,

$y = 6 - 5(4) = 6 - 20 = -14$

બિંદુ Aનો y-યામ −14 છે.

ઉદાહરણ 7 : બિંદુ A અને Bના યામ અનુક્રમે (3, 2) અને (4, −3) છે. $P(x, y) \in \overline{\mathrm{AB}}$. તો $3x - y$ની મહત્તમ અને ન્યૂનતમ કિંમત શોધો.

ઉકેલ : $\overline{\mathrm{AB}}$ નાં પ્રચલ સમીકરણો

$x = tx_2 + (1 - t)x_1$ અને $y = ty_2 + (1 - t)y_1$ $\quad t \in [0, 1]$

$= t \cdot 4 + (1 - t) \cdot 3$ $\qquad = t(-3) + (1 - t)\ 2$ $\quad t \in [0, 1]$

$x = t + 3$ $\qquad = -5t + 2$ $\quad t \in [0, 1]$

હવે, $\overline{AB} = \{(x, y) \mid x = t + 3, y = -5t + 2; t \in [0, 1]\}$

હવે, $3x - y = 3(t + 3) - (-5t + 2) = 3t + 9 + 5t - 2 = 8t + 7$

અહીં, $P(x, y) \in \overline{AB}$. તેથી $0 \le t \le 1$

$\therefore \quad 0 \le 8t \le 8$

$\therefore \quad 0 + 7 \le 8t + 7 \le 8 + 7$

$\therefore \quad 7 \le 3x - y \le 15$ $\qquad$ **$(3x - y = 8t + 7)$**

$\therefore \quad 3x - y$ની મહત્તમ કિંમત 15 અને ન્યૂનતમ કિંમત 7 થાય.

ઉદાહરણ 8 : A(1, 2) અને B(−1, 0) આપેલાં બિંદુઓ છે. જો $P(x, y) \in \overline{AB}$ તો $10y - 2x$ની મહત્તમ અને ન્યૂનતમ કિંમત શોધો.

ઉકેલ : $\overleftrightarrow{AB}$ નાં પ્રચલ સમીકરણો

$x = tx_2 + (1 - t)x_1$

$y = ty_2 + (1 - t)y_1$ $\quad t \in R$

અહીં, A(1, 2) અને B(−1, 0) આપેલાં બિંદુઓ છે.

$\therefore \quad x = t(-1) + (1 - t)1 = -t + 1 - t = 1 - 2t, t \in R$

$y = t(0) + (1 - t)2 = 2 - 2t, t \in R$

હવે, $10y - 2x = 10(2 - 2t) - 2(1 - 2t)$

$= 20 - 20t - 2 + 4t$

$= 18 - 16t$

અહીં $P(x, y) \in \overline{AB}$, હોવાથી $0 \le t \le 1$

$\therefore \quad 0 \ge -16t \ge -16$

$\therefore \quad 18 + 0 \ge 18 - 16t \ge 18 - 16$

$\therefore \quad 18 \ge 10y - 2x \ge 2$ $\qquad$ **$(10y - 2x = 18 - 16t)$**

$\therefore \quad 2 \le 10y - 2x \le 18$

$\therefore \quad 10y - 2x$ની મહત્તમ કિંમત 18 છે અને ન્યૂનતમ કિંમત 2 છે.

ઉદાહરણ 9 : A(3, 5) અને B(−2, 1) આપેલાં બિંદુઓ છે. Y-અક્ષ એ $\overline{AB}$ નું A તરફથી કયા ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે છે ? કયા બિંદુએ ?

ઉકેલ : ધારો કે P(0, y) એ Y-અક્ષ પરનું માંગેલ બિંદુ છે.

ધારો કે P એ $\overline{AB}$ નું A તરફથી λ ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે છે.

$$\therefore \quad (0, y) = \left(\frac{\lambda(-2) + 3}{\lambda + 1}, \frac{\lambda(1) + 5}{\lambda + 1}\right)$$

$\therefore \quad \frac{-2\lambda + 3}{\lambda + 1} = 0$

$\therefore \quad -2\lambda + 3 = 0$

$\therefore \quad \lambda = \frac{3}{2}$

હવે, $y = \frac{\lambda + 5}{\lambda + 1}$

$\therefore \quad y = \frac{\frac{3}{2} + 5}{\frac{3}{2} + 1} = \frac{3 + 10}{3 + 2} = \frac{13}{5}$

$\therefore$ Y-અક્ષ એ $\overline{AB}$ નું A તરફથી $\lambda = \frac{3}{2}$ ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે છે અને વિભાજન બિંદુના યામ $\left(0, \frac{13}{5}\right)$ છે.

સ્વાધ્યાય 6.2

1. રેખાનાં પ્રચલ સમીકરણો $x = 2t + 5$ અને $y = 3 - 3t$, $t \in R$ છે. $a + b = 7$ થાય તેવું બિંદુ $P(a, b)$ એ રેખા પર આવેલ છે. P ના યામ શોધો.
2. $A(1, -5)$ અને $B(5, -1)$. જો $P(x, y) \in \overline{AB}$ તો $2x - 5y$ ની મહત્તમ અને ન્યૂનતમ કિંમત શોધો.
3. $\overleftrightarrow{AB}$ નાં પ્રચલ સમીકરણો $x = 7t - 1$ અને $y = 4t + 7$, $t \in R$ છે. રેખા પર આવેલા બિંદુ P નો y-યામ 11 હોય, તો તેનો x-યામ શોધો.
4. $A(3, 2)$ અને $B(-10, 0)$ સમતલમાં આવેલાં બિંદુઓ છે. તે પરથી $\overleftrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overline{AB}$, $\overleftrightarrow{AB} - \overline{AB}$ ને ગણ સ્વરૂપે દર્શાવો.
5. $A(2, 5)$ અને $B(6, 5)$ માંથી પસાર થતી રેખા $\overleftrightarrow{AB}$ પર બિંદુ $(3, -9)$ નથી તેમ સાબિત કરો.
6. $(-1, 1)$ અને $(2, -3)$ માંથી પસાર થતી રેખાનું કાર્તેઝિય સમીકરણ મેળવો.

*

6.10 રેખાનો ઢાળ

ધારો કે રેખા l એ Y-અક્ષને લંબ નથી. તો આ રેખા X-અક્ષને અનન્ય બિંદુ P માં છેદે છે. ધારો કે $A \in l$ અને A એ X-અક્ષની ઉપરના અર્ધતલમાં છે. ધારો કે B એ $\overrightarrow{PX}$ પરનું કોઈ પણ બિંદુ છે. (આકૃતિ 6.16)

$\angle APB$ ને રેખા l દ્વારા X-અક્ષની ધન દિશા સાથે બનતો ખૂણો કહે છે. જો રેખા Y-અક્ષને લંબ હોય, તો આપણે કહીએ છીએ કે તે X-અક્ષની ધન દિશા સાથે વ્યાપક રેડિયન માપ 0 વાળો ખૂણો બનાવે છે. ધારો કે $m\angle APB = \theta$ તો $0 < \theta < \pi$.

ઢાળ (Slope) : X-અક્ષને લંબ ન હોય તેવી રેખા X-અક્ષની ધન દિશા સાથે ઘડિયાળના કાંટાથી ઊલટી દિશામાં જે ખૂણો બનાવે તેનું માપ θ હોય તો $tan\theta$ ને રેખાનો ઢાળ કહે છે. તેને સંકેતમાં m વડે દર્શાવાય છે.

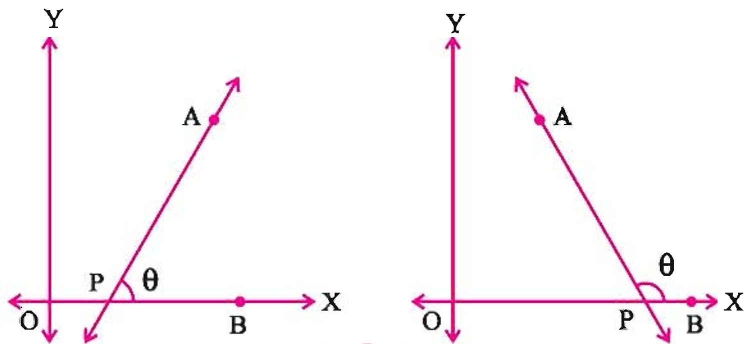
જો રેખા Y-અક્ષને લંબ હોય તો તેનો ઢાળ $tan0 = 0$ તરીકે વ્યાખ્યાયિત થાય છે.

જો રેખા X-અક્ષને લંબ હોય તો તેનો ઢાળ વ્યાખ્યાયિત નથી.

જો રેખાએ X-અક્ષની ધન દિશા સાથે બનાવેલા ખૂણાનું માપ θ હોય, તો $tan\theta$ ને રેખાનો ઢાળ કહે છે. જો રેખાએ X-અક્ષની ધન દિશા સાથે ઘડિયાળના કાંટાથી ઊલટી દિશામાં બનાવેલા ખૂણાનું માપ θ હોય, તો $0 < \theta < \pi$.

જો રેખા X-અક્ષની ધન દિશા સાથે $\frac{\pi}{2}$ માપનો ખૂણો બનાવે તો તેને ઢાળ નથી એટલે કે શિરોલંબ રેખાને ઢાળ નથી. આમ $m = tan\theta$, $0 < \theta < \pi$, $\theta \neq \frac{\pi}{2}$.

સમક્ષિતિજ રેખા એટલે કે Y-અક્ષને લંબ રેખાનો ઢાળ 0 છે. આમ, સારાંશમાં X-અક્ષને લંબ ન હોય તેવી રેખાનો ઢાળ $m = tan\theta$ છે, જ્યાં $0 \leq \theta < \pi$, $\theta \neq \frac{\pi}{2}$.



આકૃતિ 6.16

રેખા પર કોઈ પણ બે ભિન્ન બિંદુ આપ્યાં હોય, તો રેખાના ઢાળની અભિવ્યક્તિ

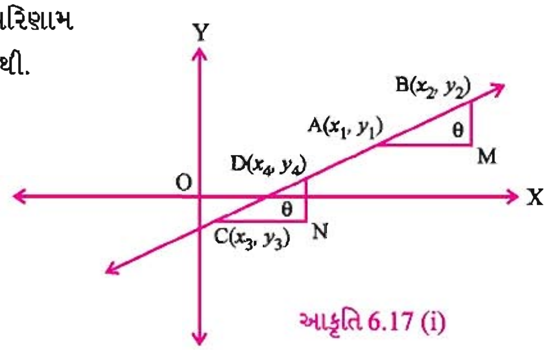
રેખાખંડનો ઢાળ : આપણે રેખાખંડનો ઢાળ વ્યાખ્યાયિત કરીશું અને સાબિત કરીશું કે રેખા પરનાં કોઈ પણ બે રેખાખંડના ઢાળ સમાન છે અને રેખાના રેખાખંડનો અચળ ઢાળ એ જ રેખાનો ઢાળ છે.

ધારો કે $A(x_1, y_1)$ અને $B(x_2, y_2)$ એ R^2 નાં બે ભિન્ન બિંદુઓ છે. $x_1 \neq x_2$. તેથી તેમને જોડતી $\overleftrightarrow{AB}$ એ X-અક્ષને લંબ નથી. હવે આપણે $\overline{AB}$નો ઢાળ $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત કરીશું.

હવે આપણે રેખા પરનાં કોઈ પણ ભિન્ન બિંદુઓની બે જોડ માટે તે અચળ છે તેમ સાબિત કરીશું.

$\overleftrightarrow{AB}$ Y-અક્ષને લંબ હોય તો $m = 0$ હોવાથી પરિણામ સ્પષ્ટ છે. આથી ધારો કે $\overleftrightarrow{AB}$ Y-અક્ષને લંબ નથી.

ધારો કે $\overleftrightarrow{AB}$ પર $C(x_3, y_3)$ અને $D(x_4, y_4)$ બે ભિન્ન બિંદુઓ છે તથા રેખા $\overleftrightarrow{AB}$ એ X-અક્ષને લંબ નથી. તેથી $x_3 \neq x_4$. બિંદુ A માંથી Y-અક્ષને અને Bમાંથી X-અક્ષને લંબ દોરેલ રેખાઓ પરસ્પર Mમાં છેદે છે. તે જ પ્રમાણે બિંદુ C માંથી Y-અક્ષને લંબ અને D માંથી X-અક્ષને લંબ રેખાઓ પરસ્પર Nમાં છેદે છે. આકૃતિ 6.17(i) જુઓ.



આકૃતિ 6.17 (i)

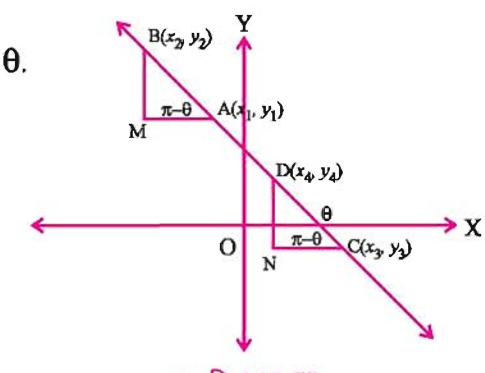
ધારો કે $m\angle BAM = \theta$. આથી $m\angle DCN = \theta$.

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

$\overleftrightarrow{AB}$ એ X-અક્ષની ધન દિશા સાથે θ માપનો ખૂણો બનાવે છે.

હવે, $tan\theta = \frac{BM}{AM} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

વળી, $tan\theta = \frac{DN}{CN} = \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3}$



આકૃતિ 6.17 (ii)

$\therefore \quad \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3}$

$\therefore \quad \overline{AB}$નો ઢાળ = $\overline{CD}$નો ઢાળ

આકૃતિ 6.17 (ii) માં $\overleftrightarrow{AB}$ એ X-અક્ષની ધન દિશા સાથે θ માપનો ખૂણો બનાવે છે અને $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$.

$$tan(\pi - \theta) = \frac{y_2 - y_1}{x_1 - x_2} = -\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

હવે, $tan(\pi - \theta) = tan(-\theta)$ **(tan નું આવર્તમાન π છે.)**

$= -tan\theta$ **(tan અયુગ્મ વિધેય છે.)**

$\therefore \quad -tan\theta = -\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$\therefore \quad tan\theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

તે જ રીતે, $tan\theta = \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3}$

$\therefore \quad tan\theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3}$

$\therefore$ રેખા પરના કોઈ પણ બે રેખાખંડના ઢાળ સમાન છે અને આ અચળ રેખાનો ઢાળ છે.

$\therefore$ જો $A(x_1, y_1)$ અને $B(x_2, y_2)$ શિરોલંબ ના હોય તેવી રેખા પરનાં ભિન્ન બિંદુઓ હોય, તો $\overleftrightarrow{AB}$ નો ઢાળ $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

જો રેખા સમક્ષિતિજ હોય એટલે કે Y-અક્ષને લંબ હોય તો $y_1 = y_2$ તથા $y_3 = y_3$.

આથી સમક્ષિતિજ રેખાનો ઢાળ $m = 0$.

આમ પ્રત્યેક વિકલ્પમાં શિરોલંબ ના હોય તેવી $\overleftrightarrow{AB}$ માટે $m = tan\theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

6.11 બે ચલમાં સુરેખ સમીકરણ

x અને y ચલવાળું એકઘાતીય (સુરેખ) સમીકરણ (Linear Equation) રેખા દર્શાવે છે.

$S = \{(x, y) \mid ax + by + c = 0, a^2 + b^2 \neq 0, a, b, c \in R\}$ રેખા દર્શાવે છે.

સાબિતી : સમીકરણ $ax + by + c = 0$, $a, b, c \in R$, $a^2 + b^2 \neq 0$ એ R^2માં સુરેખ સમીકરણ છે.

જો $a \neq 0$, $b = 0$, તો $S = \left\{(x, y) \mid x = \frac{-c}{a}\right\}$ અને S શિરોલંબ રેખા દર્શાવે છે.

જો $a = 0$, $b \neq 0$, તો $S = \left\{(x, y) \mid y = \frac{-c}{b}\right\}$ અને S સમક્ષિતિજ રેખા દર્શાવે છે.

ધારો કે $a \neq 0$, $b \neq 0$.

$\left(\frac{-c}{a}, 0\right)$ અને $\left(-\frac{c+b}{a}, 1\right)$ એ S નાં બે ભિન્ન ઘટક છે.

ધારો કે બિંદુઓ $A(x_1, y_1) \in S$, $B(x_2, y_2) \in S$

$\therefore$ $A(x_1, y_1)$ અને $B(x_2, y_2)$ એ $ax + by + c = 0$ નું સમાધાન કરે છે.

$\therefore$ $ax_1 + by_1 + c = 0$ અને $ax_2 + by_2 + c_2 = 0$

હવે $\overleftrightarrow{AB}$ નાં પ્રચલ સમીકરણો :

$$\left.\begin{aligned} x &= tx_2 + (1 - t)x_1 \\ y &= ty_2 + (1 - t)y_1 \end{aligned}\right\} ; t \in R$$

ધારો કે બિંદુ $C(x_3, y_3)$ એ $\overleftrightarrow{AB}$ પર આવેલ બિંદુ છે.

$\therefore$ કોઈક $t \in R$ માટે $x_3 = tx_2 + (1 - t)x_1$ તથા $y_3 = ty_2 + (1 - t)y_1$

હવે $ax_3 + by_3 + c = a[tx_2 + (1 - t)x_1] + b[ty_2 + (1 - t)y_1] + c(t + 1 - t)$

$= t(ax_2 + by_2 + c) + (1 - t)(ax_1 + by_1 + c)$

$= t \cdot 0 + (1 - t)0 = 0$

$\therefore$ $C(x_3, y_3)$ એ $ax + by + c = 0$ વડે દર્શાવાતા બિંદુગણ પર આવેલ બિંદુ છે.

$\overleftrightarrow{AB}$ પરનાં બધાં જ બિંદુઓ $ax + by + c = 0$ નું સમાધાન કરે છે.

$\therefore$ $\overleftrightarrow{AB} \subset S$

હવે, $A(x_1, y_1) \in S$, $B(x_2, y_2) \in S$. ધારો કે, $C(x_3, y_3) \in S$.

A, B, C એ $ax + by + c = 0$ નું સમાધાન કરે છે. $a^2 + b^2 \neq 0$, $a, b, c \in R$

$ax_1 + by_1 + c = 0$ (i)

$ax_2 + by_2 + c = 0$ (ii)

$ax_3 + by_3 + c = 0$ (iii)

હવે, $a \neq 0$, $b \neq 0$

$\therefore$ $y_1 \neq y_2$, $x_1 \neq x_2$, $y_2 \neq y_3$, $x_2 \neq x_3$, $y_3 \neq y_1$, $x_3 \neq x_1$,

સમીકરણ (i) અને (ii) પરથી, $ax_1 + by_1 = ax_2 + by_2$

$\therefore$ $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-a}{b}$

તે જ રીતે સમીકરણ (ii) અને (iii) પરથી,

$\frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} = \frac{-a}{b}$

$\therefore$ $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}$

$\therefore$ $\frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} = t$ (ધારો)

$\therefore$ $\frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1} = t$ અને $\frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} = t$

$$\therefore \left.\begin{aligned} y_3 &= ty_2 + (1 - t)y_1 \\ x_3 &= tx_2 + (1 - t)x_1 \end{aligned}\right\} ; t \in R$$

$\therefore \quad C(x_3, y_3) \in \overleftrightarrow{AB}$.

$\therefore \quad S \subset \overleftrightarrow{AB}$.

$\therefore \quad S = \overleftrightarrow{AB}$ તથા S એક રેખા દર્શાવે છે.

યાદ રાખો :

- જો $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, તો $\overleftrightarrow{AB}$નો ઢાળ ધન હોય છે.
- જો $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$, તો $\overleftrightarrow{AB}$નો ઢાળ ઋણ હોય છે.
- જો $\overleftrightarrow{AB}$ એ Y-અક્ષને લંબ હોય, તો $\overleftrightarrow{AB}$નો ઢાળ શૂન્ય છે.
- જો $\overleftrightarrow{AB}$ એ X-અક્ષને લંબ હોય, તો $\overleftrightarrow{AB}$નો ઢાળ વ્યાખ્યાયિત નથી.

ઉદાહરણ 10 : A(1, 2) અને B(3, 6)માંથી પસાર થતી રેખાનો ઢાળ શોધો.

ઉકેલ : $\overleftrightarrow{AB}$નો ઢાળ $= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6-2}{3-1} = \frac{4}{2} = 2$

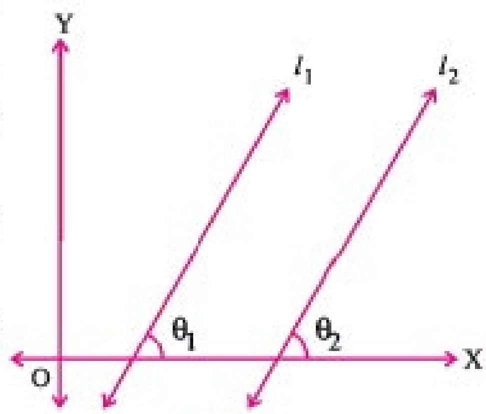
6.12 બે ભિન્ન રેખાઓ પરસ્પર સમાંતર હોવા માટેની આવશ્યક અને પર્યાપ્ત શરત

ધારો કે l_1 અને l_2 આપેલ ભિન્ન રેખાઓ છે. l_1 અને l_2 રેખાઓ સમક્ષિતિજ કે સમાંતર રેખા નથી.

રેખાઓ l_1 અને l_2 ના ઢાળ અનુક્રમે m_1 અને m_2 છે. $m_1 \neq 0$, $m_2 \neq 0$.

ધારો કે રેખાઓ l_1 અને l_2 X-અક્ષની ધન દિશા સાથે અનુક્રમે θ_1 અને θ_2 માપના ખૂણાઓ રચે છે.

તેથી $0 < \theta_1, \theta_2 < \pi$ અને $\theta_1 \neq \frac{\pi}{2}, \theta_2 \neq \frac{\pi}{2}$



આકૃતિ 6.18

$\therefore \quad m_1 = tan\theta_1$ અને $m_2 = tan\theta_2$

હવે, $l_1 \parallel l_2 \iff \theta_1 = \theta_2$

$\iff tan\theta_1 = tan\theta_2$ $\quad \left(tan \text{ એક-એક વિધેય છે. } \theta \in (0, \pi) - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}\right)$

$\iff m_1 = m_2$

જો રેખાઓ l_1 અને l_2 એ Y-અક્ષને લંબ હોય, તો $m_1 = 0$ અને $m_2 = 0$.

તેથી $m_1 = m_2$. ઊલટું જો $m_1 = m_2 = 0$ તો l_1 અને l_2 રેખાઓ Y-અક્ષને લંબ છે.

$\therefore$ l_1 અને l_2 પરસ્પર સમાંતર થાય.

તે જ રીતે રેખાઓ l_1 અને l_2 એ X-અક્ષને લંબ હોય, તો બંને રેખાઓના ઢાળ અવ્યાખ્યાયિત થાય. જો બે રેખાઓના ઢાળ અવ્યાખ્યાયિત હોય, તો બંને X-અક્ષો લંબ હોય. તેથી તેઓ પરસ્પર સમાંતર જ હોય.

આમ $l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow$ બંનેના ઢાળ સમાન છે અથવા બંને પૈકી એકેયને ઢાળ નથી.

ઉદાહરણ 11 : A(2, k), B(−1, 3), C(1, 7) અને D(3, 2) આપેલ બિંદુઓ છે તથા $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ તો k શોધો.

ઉકેલ : $\overleftrightarrow{AB}$ નો ઢાળ $= \frac{3-k}{-1-2} = \frac{3-k}{-3}$

$\overleftrightarrow{CD}$નો ઢાળ $= \frac{2-7}{3-1} = \frac{-5}{2}$. અહીં $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{AB}$ નો ઢાળ = $\overleftrightarrow{CD}$નો ઢાળ

$\therefore \frac{3-k}{-3} = \frac{-5}{2}$

$\therefore 6 - 2k = 15$

$\therefore 2k = -9$

$\therefore k = \frac{-9}{2}$

વળી, B, C, D સમરેખ નથી. (ચકાસો !)

આથી, $\overleftrightarrow{AB} \neq \overleftrightarrow{CD}$.

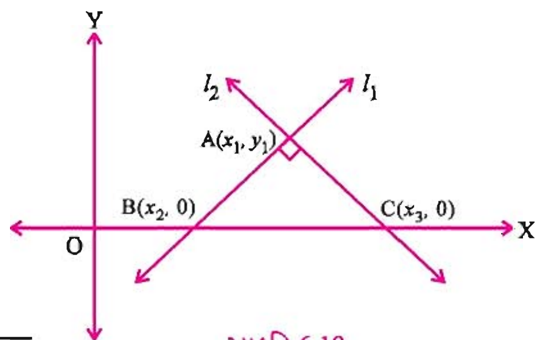
$\therefore \overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD} \Rightarrow k = \frac{-9}{2}$

6.13 બે ભિન્ન રેખાઓ પરસ્પર લંબ હોવા માટેની આવશ્યક અને પર્યાપ્ત શરત

આપણે પરસ્પર લંબ હોય તેવી રેખાઓ લઈએ. તે પૈકીની એક રેખાને X-અક્ષ અને બીજીને Y-અક્ષ તરીકે લખીશું. જો એક રેખા X-અક્ષને અને બીજી Y-અક્ષને લંબ હોય તો તે પરસ્પર લંબ જ હોય.

બે રેખાઓ પરસ્પર લંબ હોવા માટેની શરત :

ધારો કે બે ભિન્ન રેખાઓ l_1 અને l_2 પૈકી કોઈ પણ રેખા એક પણ અક્ષને લંબ નથી. l_1 એ X-અક્ષને B(x_2, 0) અને l_2 એ X-અક્ષને C(x_3, 0)માં છેદે છે. ધારો કે $l_1 \nparallel l_2$. તેથી l_1 અને l_2 એ A(x_1, y_1)માં છેદે છે. સ્પષ્ટ છે કે l_1નો ઢાળ $m_1 = \frac{y_1}{x_1 - x_2}$ અને l_2નો ઢાળ $m_2 = \frac{y_1}{x_1 - x_3}$.



આકૃતિ 6.19

$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow m\angle BAC = \frac{\pi}{2}$

$\Leftrightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2$

$$\Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 + y_1^2 + (x_1 - x_3)^2 + y_1^2 = (x_2 - x_3)^2$$

$$\Leftrightarrow x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + y_1^2 + x_1^2 - 2x_1x_3 + x_3^2 + y_1^2 = x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2$$

$$\Leftrightarrow y_1^2 = x_1x_2 - x_2x_3 + x_1x_3 - x_1^2$$

$$\Leftrightarrow y_1^2 = x_2(x_1 - x_3) - x_1(x_1 - x_3)$$

$$\Leftrightarrow y_1^2 = -(x_1 - x_3)(x_1 - x_2)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{y_1}{x_1 - x_3}\right)\left(\frac{y_1}{x_1 - x_2}\right) = -1$$

$$\Leftrightarrow m_1m_2 = -1$$

આમ, $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow m_1m_2 = -1$

નોંધ : રેખાઓ શિરોલંબ ન હોવાથી $x_1 \neq x_3$, $x_1 \neq x_2$.

જો રેખાઓ પૈકી એક X-અક્ષને લંબ હોય અને બીજી Y-અક્ષને લંબ હોય તો તે પરસ્પર લંબ છે. અહીં $m_1 = 0$ અને m_2 નું અસ્તિત્વ નથી.

આમ શૂન્યેતર ઢાળવાળી રેખાઓ પરસ્પર લંબ હોવાની આવશ્યક તથા પર્યાપ્ત શરત એ છે કે $m_1m_2 = -1$.

ઉદાહરણ 12 : સાબિત કરો કે A(2, 1), B(1, 2) અને C(3, 4) એ કાટકોણ ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓ છે.

ઉકેલ : $\overleftrightarrow{AB}$નો ઢાળ $= \frac{2-1}{1-2} = \frac{1}{-1} = -1$

$\overleftrightarrow{AC}$નો ઢાળ $= \frac{4-1}{3-2} = 3$

$\overleftrightarrow{BC}$નો ઢાળ $= \frac{4-2}{3-1} = \frac{2}{2} = 1$

$\therefore$ અહીં બધી જ રેખાઓ ભિન્ન છે.

$\therefore$ તે ત્રિકોણ રચે છે.

$\overleftrightarrow{AB}$નો ઢાળ $\times$ $\overleftrightarrow{BC}$નો ઢાળ $= (-1)(1) = -1$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BC}$ અને $\angle B$ કાટખૂણો છે.

$\therefore$ A, B, C કાટકોણ ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓ છે.

6.14 બે છેદતી રેખાઓ વચ્ચેનો ખૂણો

R^2ની બે ભિન્ન રેખાઓ પરસ્પર સમાંતર ન હોય તો તે છેદતી રેખાઓ છે.

જો રેખાઓ પરસ્પર લંબ હોય, તે તેમની વચ્ચેના ખૂણાનું રેડિયન માપ $\frac{\pi}{2}$ થાય.

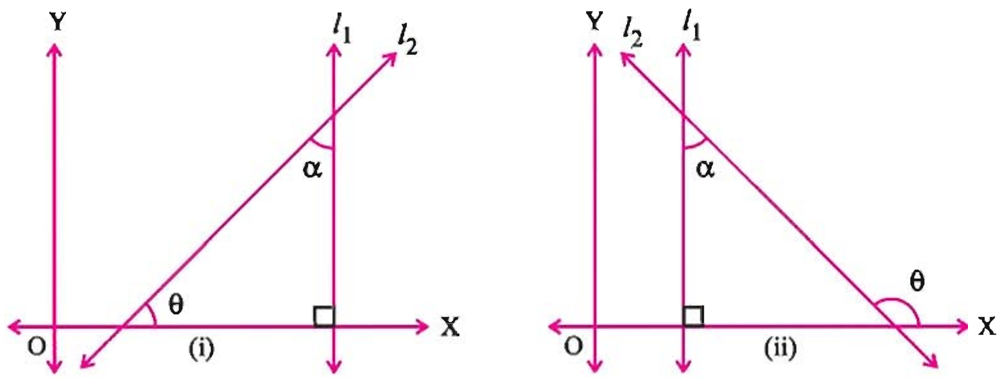
આપણે ત્રિકોણમિતિનું નીચેનું સૂત્ર સ્વીકારીશું. તેનો વિગતે અભ્યાસ બીજા સિમેસ્ટરમાં કરવાનો આવશે.

$$tan(\theta_1 - \theta_2) = \frac{tan\theta_1 - tan\theta_2}{1 + tan\theta_1\, tan\theta_2} \text{ જ્યાં, } tan\theta_1\, tan\theta_2 \neq -1 \qquad \text{(i)}$$

જો રેખાઓ પરસ્પર લંબ ન હોય તો તેમના છેદબિંદુ આગળ એકરૂપ અભિકોણોની બે જોડ રચાય છે. આમાંની એક એકરૂપ ગુરુકોણની જોડ તથા બીજી એકરૂપ લઘુકોણની જોડ છે. આ લઘુકોણના રેડિયન માપને બે રેખાઓ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ કહે છે.

આ ખૂણાના માપને α વડે દર્શાવીએ તો, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

(1) એક રેખા X-અક્ષને લંબ હોય અને બીજી રેખાનો ઢાળ m હોય, તો તે બે રેખાઓ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ.



આકૃતિ 6.20

ધારો કે l_1 એ X-અક્ષને લંબ રેખા છે. l_1 નો ઢાળ વ્યાખ્યાયિત નથી. રેખા l_2 એ X-અક્ષની ધન દિશા સાથે θ માપનો ખૂણો બનાવે તો તેનો ઢાળ $m = tan\theta$. $0 < \theta < \pi$, $\theta \neq \frac{\pi}{2}$.

ધારો કે બે રેખાઓ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ α છે.

આકૃતિ 6.20(i)માં બતાવ્યા પ્રમાણે, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ તેથી $\alpha = \frac{\pi}{2} - \theta$.

વળી, $\frac{\pi}{2} - \theta > 0$ અને $\left|\frac{\pi}{2} - \theta\right| = \frac{\pi}{2} - \theta$

આકૃતિ 6.20(ii)માં બતાવ્યા પ્રમાણે, $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ તેથી $\alpha = \theta - \frac{\pi}{2} = -\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$

વળી, $\frac{\pi}{2} - \theta < 0$ અને $\left|\frac{\pi}{2} - \theta\right| = -\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$

$\therefore \quad \alpha = \left|\frac{\pi}{2} - \theta\right|$

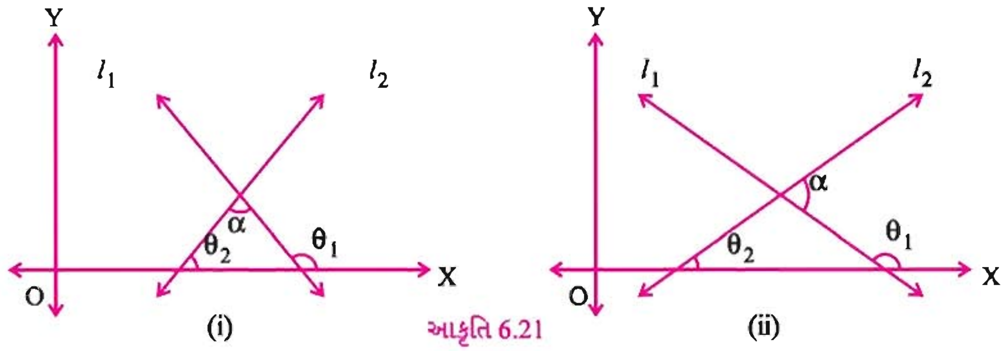
જો એક રેખા શિરોલંબ હોય તથા બીજી રેખા X-અક્ષની ધન દિશા સાથે θ રેડિયન માપનો ખૂણો બનાવે તો બે રેખાઓ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ $\alpha = \left|\frac{\pi}{2} - \theta\right|$ છે.

(2) એક પણ રેખા X-અક્ષને લંબ ન હોય તેવી બે પરસ્પર છેદતી રેખાઓ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ

ધારો કે l_1 અને l_2 પૈકી એકેય રેખા એક પણ અક્ષને લંબ નથી. રેખાઓ l_1 અને l_2 ના ઢાળ અનુક્રમે m_1 અને m_2 છે.

રેખાઓ X-અક્ષની ધન દિશા સાથે θ_1 અને θ_2 માપના ખૂણો બનાવે છે.

$m_1 = tan\theta_1$ અને $m_2 = tan\theta_2$, $0 < \theta_1, \theta_2 < \pi$, $\theta_1 \neq \frac{\pi}{2}, \theta_2 \neq \frac{\pi}{2}$



આકૃતિ 6.21

વિકલ્પ 1 : આકૃતિ 6.21(i)માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે $\theta_1 = \alpha + \theta_2$

$\therefore \quad \alpha = \theta_1 - \theta_2$

$\therefore \quad tan\alpha = tan(\theta_1 - \theta_2)$

$\therefore \quad tan\alpha = \dfrac{tan\,\theta_1 - tan\,\theta_2}{1 + tan\,\theta_1\, tan\,\theta_2}$ (i) પરથી

$\therefore \quad tan\alpha = \dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$

વિકલ્પ 2 : આકૃતિ 6.21(ii)માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે $\theta_1 = (\pi - \alpha) + \theta_2$

$\therefore \quad \alpha = \pi - (\theta_1 - \theta_2)$

$\therefore \quad tan\alpha = tan(\pi - (\theta_1 - \theta_2))$

$= -tan(\theta_1 - \theta_2)$ **$(tan(\pi - \theta) = tan(-\theta) = -tan\theta)$**

$= -\dfrac{tan\,\theta_1 - tan\,\theta_2}{1 + tan\,\theta_1\, tan\,\theta_2}$

$= -\dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$

આમ બંને વિકલ્પોમાં આપણે જોયું કે m_1 અને m_2 ઢાળવાળી રેખાઓ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ α હોય, તો

$$tan\alpha = \pm\left(\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right)$$

પરંતુ $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. તેથી $tan\alpha > 0$.

$\therefore \quad tan\alpha = \left|\dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|$

રેખાઓ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ $tan\alpha = \left|\dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|$ સૂત્ર વડે શોધાય છે, જ્યાં $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

ઉદાહરણ 13 : A(1, 2), B(3, 5) અને C(6, 1) આપેલાં બિંદુઓ છે. રેખાઓ $\overleftrightarrow{AB}$ અને $\overleftrightarrow{AC}$ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ α હોય તો $tan\alpha$ શોધો.

ઉકેલ : $\overleftrightarrow{AB}$નો ઢાળ $= \frac{5-2}{3-1} = \frac{3}{2}$.

$\overleftrightarrow{AC}$નો ઢાળ $= \frac{1-2}{6-1} = \frac{-1}{5}$.

જો રેખાઓ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ α હોય તો

$$\therefore \quad tan\alpha = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|$$

$$\therefore \quad tan\alpha = \left|\frac{\frac{3}{2} - \left(-\frac{1}{5}\right)}{1 + \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{5}\right)}\right|$$

$$= \left|\frac{\frac{3}{2} + \frac{1}{5}}{1 - \frac{3}{10}}\right|$$

$$= \left|\frac{15 + 2}{7}\right|$$

$$= \frac{17}{7}$$

> **☛ નોંધ** l_1 અને l_2 આપેલ રેખાઓ છે. m_1 અને m_2 અનુક્રમે રેખા l_1 અને રેખા l_2ના ઢાળ છે. જો રેખા એકબીજાને સમાંતર હોય, તો તેમની વચ્ચેના ખૂણાનું વ્યાપક માપ 0 છે. આથી $\alpha = 0$.
>
> વળી, $tan\alpha = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right| = 0$, કારણ કે $m_1 = m_2$

6.15 રેખા $ax + by + c = 0$, $a^2 + b^2 \neq 0$, $a, b, c \in R$ નો ઢાળ

ધારો કે રેખા શિરોલંબ કે સમક્ષિતિજ નથી અને તેથી $a \neq 0$, $b \neq 0$. તે X-અક્ષને $A\left(\frac{-c}{a}, 0\right)$ અને Y-અક્ષને $B\left(0, \frac{-c}{b}\right)$ માં છેદે છે. $c \neq 0$ તો $A \neq B$.

$$\therefore \quad \text{રેખાનો ઢાળ} = \frac{0 - \left(\frac{-c}{b}\right)}{\frac{-c}{a} - 0} = \frac{-a}{b}$$

જો $a = 0$ તો રેખા સમક્ષિતિજ હોય અને તેથી રેખાનો ઢાળ $m = 0$.

જો $b = 0$ તો રેખા શિરોલંબ રેખા હોય અને તેથી રેખાનો ઢાળ અવ્યાખ્યાયિત થાય.

જો $c = 0$, એટલે કે રેખા ઊગમબિંદુમાંથી પસાર થાય તો A = B.

આ સંજોગોમાં આપણે રેખા પરનાં બે ભિન્ન બિંદુ A(0, 0) અને $B\left(\frac{-b}{a}, 1\right)$ લઈએ.

ફરી $m = \dfrac{1-0}{\frac{-b}{a}-0} = \dfrac{-a}{b}$.

જો $b \neq 0$ તો રેખા $ax + by + c = 0$ $(a^2 + b^2 \neq 0)$ નો ઢાળ $m = \dfrac{-a}{b}$ છે. જો $b = 0$ તો રેખા શિરોલંબ હોવાથી તેને ઢાળ નથી.

ઉદાહરણ 14 : રેખાઓ $\sqrt{3}x + y = 5$ અને $x + \sqrt{3}y + 7 = 0$ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ શોધો.

ઉકેલ : રેખા $\sqrt{3}x + y = 5$ નો ઢાળ $m_1 = -\sqrt{3}$

રેખા $x + \sqrt{3}y + 7 = 0$ નો ઢાળ $m_2 = \dfrac{-1}{\sqrt{3}}$

જો રેખાઓ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ α હોય, તો

$$\therefore \quad tan\alpha = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|$$

$$= \left|\frac{-\sqrt{3} - \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{1 + (-\sqrt{3})\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}\right|$$

$$= \left|\frac{-\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + 1}\right|$$

$$= \left|\frac{-3 + 1}{2\sqrt{3}}\right| = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

અહીં $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ હોવાથી $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

આમ રેખાઓ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ $\frac{\pi}{6}$ છે.

ઉદાહરણ 15 : રેખાઓ $x - 6 = 0$ અને $\sqrt{3}x - y + 5 = 0$ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ શોધો.

ઉકેલ : રેખા $x - 6 = 0$ એ શિરોલંબ રેખા છે.

$\therefore$ તેનો ઢાળ વ્યાખ્યાયિત થાય નહિ.

$\therefore$ રેખા $\sqrt{3}x - y + 5 = 0$ નો ઢાળ $m = tan\theta = \sqrt{3}$ છે.

$\therefore \quad \theta = \frac{\pi}{3}$ $\qquad$ **$\left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$**

$\therefore$ રેખાઓ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ $\alpha = \left|\frac{\pi}{2} - \theta\right|$

$$= \left|\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right|$$

$$= \frac{\pi}{6}$$

ઉદાહરણ 16 : રેખાઓ $3x + y + 5 = 0$ અને $x + 2y + 7 = 0$ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ શોધો.

ઉકેલ : રેખા $3x + y + 5 = 0$ નો ઢાળ $m_1 = -3$

$\therefore$ રેખા $x + 2y + 7 = 0$ નો ઢાળ $m_2 = -\frac{1}{2}$

જો બે રેખાઓ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ α હોય, તો

$$tan\alpha = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|$$

$$= \left|\frac{-3 - \left(-\frac{1}{2}\right)}{1 + (-3)\left(-\frac{1}{2}\right)}\right|$$

$$= \left|\frac{-3 + \frac{1}{2}}{1 + \frac{3}{2}}\right|$$

$$= \left|\frac{-6 + 1}{3 + 2}\right|$$

$$= |-1|$$

$$= 1$$

$\therefore \quad \alpha = \frac{\pi}{4}$ **$\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$**

$\therefore$ રેખાઓ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ $\frac{\pi}{4}$ થાય.

સ્વાધ્યાય 6.3

1. બે રેખાઓ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ $\frac{\pi}{4}$ હોય અને તે પૈકીની એક રેખાનો ઢાળ $\frac{1}{3}$ હોય, તો બીજી રેખાનો ઢાળ શોધો.
2. A(2, 1), B(3, −1) અને C(−3, 4) એ ΔPQRની બાજુઓનાં મધ્યબિંદુઓ હોય તો ત્રિકોણની દરેક બાજુઓના ઢાળ શોધો.
3. A(k, 3), B(2, −1), C(0, 5), D(6, 7) આપેલાં બિંદુઓ છે. નીચેના વિકલ્પો માટે k ની કિંમત શોધો : (1) $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{CD}$ (2) $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$.
4. P(−1, 2), Q(7, 6), R(−1, 5), S(0, 3) આપેલાં બિંદુઓ છે. સાબિત કરો કે, $\overleftrightarrow{PQ} \perp \overleftrightarrow{RS}$.
5. રેખાઓ $y - 5 = 0$ અને $x + y + 3 = 0$ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ શોધો.
6. ઢાળનો ઉપયોગ કરીને ΔABCની બાજુઓ $\overline{AB}$ અને $\overline{AC}$ નાં મધ્યબિંદુઓને જોડતો રેખાખંડ તેની ત્રીજી બાજુ $\overline{BC}$ ને સમાંતર હોય છે તેમ સાબિત કરો.
7. ઢાળનો ઉપયોગ કરી સાબિત કરો કે ચતુષ્કોણનાં મધ્યબિંદુઓને ક્રમમાં જોડતાં મળતો ચતુષ્કોણ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ હોય છે.
8. ઢાળના ઉપયોગથી સાબિત કરો કે બિંદુઓ (−1, 4), (2, 3) અને (8, 1) સમરેખ છે.
9. A(2, 6) અને B(0, −1) જેનાં અંત્યબિંદુઓ હોય તેવા રેખાખંડના લંબદ્વિભાજકનો ઢાળ શોધો.

10. $A(x_1, y_1)$ અને $B(x_2, y_2)$ આપેલાં બિંદુઓ છે. $P(h, k) \in \overleftrightarrow{AB}$ તો સાબિત કરો કે,
$(h - x_1)(y_2 - y_1) = (k - y_1)(x_2 - x_1)$

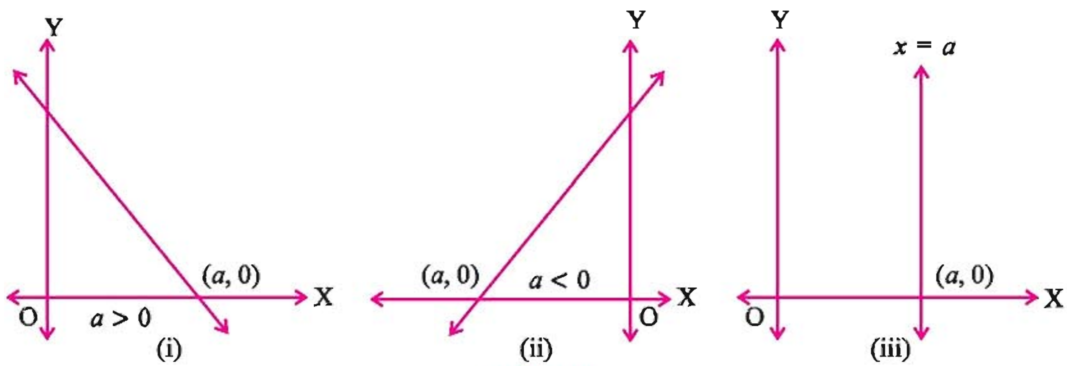
11. A(3, 1) અને B(1, 5)ને જોડતા રેખાખંડના મધ્યબિંદુ અને ઊગમબિંદુમાંથી પસાર થતી રેખાનો ઢાળ શોધો.

12. ત્રણ ભિન્ન સમરેખ બિંદુ (2, 0), (0, 3) અને (a, b) માટે સાબિત કરો કે $\frac{a}{2} + \frac{b}{3} = 1$.

13. જો બે રેખાઓ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ α હોય અને $\tan\alpha = \frac{1}{3}$ હોય અને તે બે રેખાઓ પૈકીની એક રેખાનો ઢાળ બીજી રેખાના ઢાળ કરતાં બમણો હોય તો તે બે રેખાઓના ઢાળ શોધો.

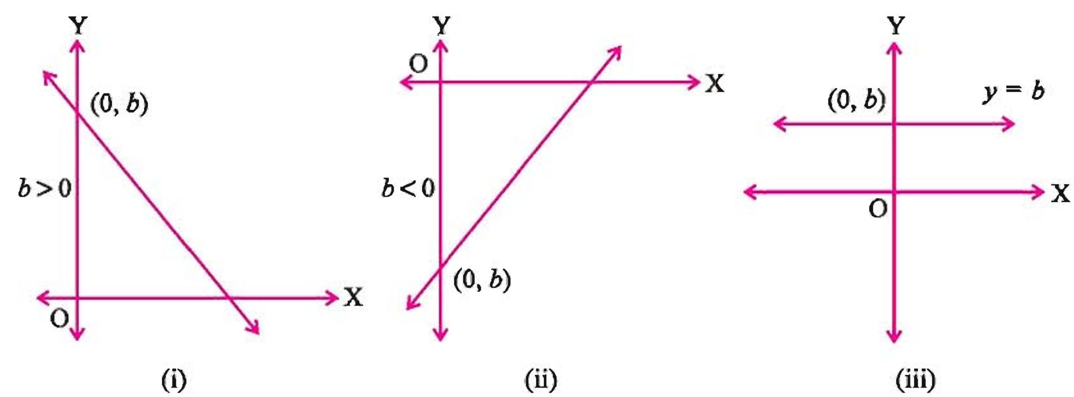
*

6.16 રેખાના અક્ષો પરના અંતઃખંડ



આકૃતિ 6.22

જો રેખા X-અક્ષને અનન્ય બિંદુ $(a, 0)$માં છેદે તો રેખાનો X-અંતઃખંડ (intercept) a છે તેમ કહેવાય. Y-અક્ષને લંબરેખાનો X-અંતઃખંડ ન મળે.



આકૃતિ 6.23

જો રેખા Y-અક્ષને અનન્ય બિંદુ $(0, b)$માં છેદે તો રેખાનો Y-અંતઃખંડ b છે તેમ કહેવાય. X-અક્ષને લંબરેખાનો Y-અંતઃખંડ ન મળે.

હવે આપણે $ax + by + c = 0$, $a^2 + b^2 \neq 0$ વડે દર્શાવાતી રેખાના અંતઃખંડ શોધીશું.

જો $a \neq 0$ તો રેખા $ax + by + c = 0$ એ Y-અક્ષને લંબ નથી.

X-અંતઃખંડ શોધવા સમીકરણમાં $y = 0$ મૂકતાં $x = \frac{-c}{a}$ મળે.

આથી રેખા X-અક્ષને અનન્ય બિંદુ $\left(\frac{-c}{a}, 0\right)$માં છેદે છે.

$\therefore$ તેનો X-અંતઃખંડ $\frac{-c}{a}$ છે.

જો $b \neq 0$ તો રેખા $ax + by + c = 0$ એ X-અક્ષને લંબ નથી.

Y-અંતઃખંડ શોધવા સમીકરણમાં $x = 0$ મૂકતાં $y = \frac{-c}{b}$ મળે.

$\therefore$ રેખા Y-અક્ષને અનન્ય બિંદુ $\left(0, \frac{-c}{b}\right)$માં છેદે છે.

$\therefore$ તેથી Y-અંતઃખંડ $\frac{-c}{b}$ છે.

જો $a = 0$, $c \neq 0$ તો રેખાનું સમીકરણ $by + c = 0$ થાય. એટલે કે રેખા X-અક્ષને છેદતી નથી. તેથી X-અંતઃખંડ વ્યાખ્યાયિત નથી. જો $c = 0$ તો રેખા X-અક્ષ પોતે જ છે અને તેને X-અંતઃખંડ નથી. (કેમ ?)

જો $b = 0$, $c \neq 0$ તો રેખાનું સમીકરણ $ax + c = 0$ છે. એટલે કે રેખા Y-અક્ષને છેદતી નથી. તેથી Y-અંતઃખંડ વ્યાખ્યાયિત નથી. જો $c = 0$ તો રેખા Y-અક્ષ પોતે છે અને તેનો Y-અંતઃખંડ નથી.

જો $c = 0$ તથા $a \neq 0$ અને $b \neq 0$ તો રેખાનું સમીકરણ $ax + by = 0$ થાય. માટે તેના બંને અંતઃખંડ શૂન્ય થાય.

ઉદાહરણ 17 : નીચેની રેખાઓ માટે જો વ્યાખ્યાયિત હોય, તો અક્ષો પરના અંતઃખંડો શોધો :

(1) $2x + 3y - 6 = 0$ (2) $2x - 7y = 0$ (3) $2x - 8 = 0$ (4) $2y + 1 = 0$

ઉકેલ : (1) રેખા $2x + 3y - 6 = 0$ માટે, $a = 2$, $b = 3$, $c = -6$

X-અંતઃખંડ $= \frac{-c}{a} = -\frac{(-6)}{2} = 3$, Y-અંતઃખંડ $= \frac{-c}{b} = -\frac{(-6)}{3} = 2$

(2) રેખા $2x - 7y = 0$ માટે, $a = 2$, $b = -7$, $c = 0$

રેખા ઊગમબિંદુમાંથી પસાર થાય છે અને તે એક પણ અક્ષ નથી.

$\therefore$ તેના અંતઃખંડો શૂન્ય છે.

(3) રેખા $2x - 8 = 0$ માટે, $a = 2$, $b = 0$, $c = -8$

અહીં, $b = 0$ હોવાથી રેખા શિરોલંબ છે.

$\therefore$ Y-અંતઃખંડ ન મળે.

X-અંતઃખંડ $= \frac{-c}{a} = -\frac{(-8)}{2} = 4$

(4) રેખા $2y + 1 = 0$ માટે, $a = 0$, $b = 2$, $c = 1$

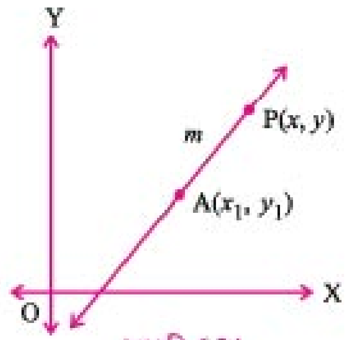
અહીં $a = 0$ હોવાથી રેખા એ સમક્ષિતિજ રેખા છે.

$\therefore$ X-અંતઃખંડ વ્યાખ્યાયિત નથી.

Y-અંતઃખંડ $= \frac{-c}{b} = -\frac{1}{2}$

6.17 રેખાનાં સમીકરણોનાં વિવિધ સ્વરૂપ

(1) બિંદુ-ઢાળ સ્વરૂપ (Point Slope Form) :



આકૃતિ 6.24

ધારો કે $A(x_1, y_1)$માંથી પસાર થતી રેખા X-અક્ષને લંબ નથી તથા તેનો ઢાળ m છે. અહીં રેખા શિરોલંબ નથી. માટે તેના કોઈ પણ બે બિંદુના x-યામ સમાન નથી.

ધારો કે $P(x, y)$ આ રેખા પર આવેલ કોઈ બિંદુ છે. $(x \neq x_1)$

માટે વ્યાખ્યા પ્રમાણે રેખા lનો ઢાળ,

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

એટલે કે, $y - y_1 = m(x - x_1)$

વળી, આ સમીકરણનું સમાધાન કરતું પ્રત્યેક બિંદુ રેખા પર છે.

તેથી (x_1, y_1) માંથી પસાર થતી અને m ઢાળવાળી X-અક્ષને લંબ ન હોય તેવી રેખાનું સમીકરણ

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

નોંધ જુઓ કે $A(x_1, y_1)$ પણ આ સમીકરણનું સમાધાન કરે છે.

ઉદાહરણ 18 : બિંદુ (1, 2)માંથી પસાર થતી અને જેનો ઢાળ $\frac{1}{2}$ હોય તેવી રેખાનું સમીકરણ શોધો.

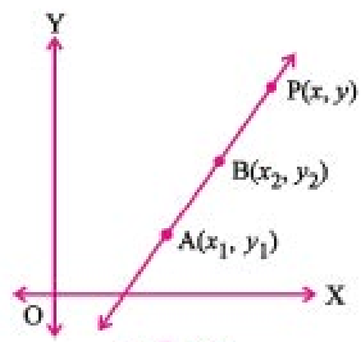
ઉકેલ : રેખાનું સમીકરણ $y - y_1 = m(x - x_1)$

$\therefore \quad y - 2 = \frac{1}{2}(x - 1)$

$\therefore \quad 2y - 4 = x - 1$

$\therefore \quad x - 2y + 3 = 0$

(2) બે બિંદુ સ્વરૂપ (Two Point Form) :



આકૃતિ 6.25

$A(x_1, y_1)$ અને $B(x_2, y_2)$ એ આપેલાં બે ભિન્ન બિંદુઓ છે. ધારો કે $\overleftrightarrow{AB}$ કોઈ પણ અક્ષને લંબ નથી.

$\therefore \quad x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2$

ધારો કે $P(x, y)$ એ $\overleftrightarrow{AB}$ પરનું કોઈ પણ બિંદુ છે. $P \neq A, P \neq B$

$\therefore$ A, P, B એ સમરેખ બિંદુઓ છે.

જો રેખા કોઈપણ અક્ષને લંબ ન હોવાથી,

$x \neq x_1, y \neq y_1, x \neq x_2, y \neq y_2$

$\overleftrightarrow{AP}$નો ઢાળ = $\overleftrightarrow{AB}$નો ઢાળ

$\therefore \quad \frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$\therefore \quad \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$

વળી, આ સમીકરણનું સમાધાન કરતું પ્રત્યેક બિંદુ $\overleftrightarrow{AB}$ પર છે.

જો કોઈ પણ P(x, y) માટે $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = t$ (ધારો કે) તો એ જોવું સરળ છે કે,

$$\begin{matrix} x = tx_2 + (1 - t)x_1 \\ y = ty_2 + (1 - t)y_1 \end{matrix} ; t \in R$$

$\therefore \quad P(x, y) \in \overleftrightarrow{AB}$.

અક્ષોને લંબ ન હોય તેવી તથા A(x_1, y_1) અને B(x_2, y_2)માંથી પસાર થતી રેખાનું સમીકરણ

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

> **નોંધ** જુઓ કે A અને B પણ આ સમીકરણનું સમાધાન કરે છે.

(3) ઢાળ - અંતઃખંડ સ્વરૂપ સમીકરણ (Slope-intercept Form) :

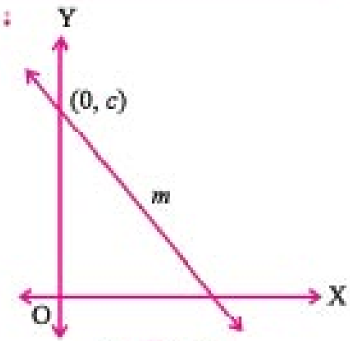
ધારો કે રેખા X-અક્ષને લંબ નથી. તેનો Y-અંતઃખંડ c છે. આ રેખાનો ઢાળ m છે.

$\therefore$ રેખા એ $(0, c)$માંથી પસાર થાય છે.

$\therefore$ બિંદુ $(0, c)$માંથી પસાર થતી અને m ઢાળવાળી રેખાનું સમીકરણ

$y - c = m(x - 0)$

$\therefore \quad y = mx + c$



આકૃતિ 6.26

> **નોંધ** જો m ઢાળવાળી રેખાનો X-અંતઃખંડ d હોય, તો તેનું સમીકરણ $y = m(x - d)$ થાય.

ઉદાહરણ 19 : X-અક્ષની ધન દિશા સાથે $\frac{\pi}{3}$ માપનો ખૂણો બનાવતી અને જેનો Y-અંતઃખંડ 3 હોય તેવી રેખાનું સમીકરણ શોધો.

ઉકેલ : અહીં માંગેલ રેખા X-અક્ષની ધન દિશા સાથે $\frac{\pi}{3}$ માપનો ખૂણો બનાવે છે.

$\therefore \quad m = \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$. વળી, Y-અંતઃખંડ 3 છે.

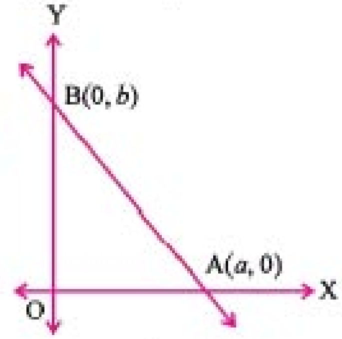
$\therefore$ રેખાનું સમીકરણ $y = mx + c$

$\therefore \quad y = \sqrt{3}x + 3$

(4) રેખાનું અંતઃખંડ સ્વરૂપ (Intercept Form of the Equation of a Line) :

ધારો કે રેખા X-અક્ષ પર a અને Y-અક્ષ પર b અંતઃખંડ કાપે છે, જ્યાં $a \neq 0$, $b \neq 0$.

$\therefore$ રેખા l એ બિંદુ A(a, 0) અને B(0, b)માંથી પસાર થાય છે.



આકૃતિ 6.27

રેખાનું સમીકરણ $\frac{y-b}{0-b} = \frac{x-0}{a-0}$ (બે બિંદુ સ્વરૂપ)

$\therefore$ $ay - ab = -bx$

$\therefore$ $bx + ay = ab$

$\therefore$ $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ $(a \neq 0, b \neq 0)$

અક્ષો પર a અને b અંતઃખંડ કાપતી રેખાનું સમીકરણ $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ છે. જ્યાં, $a \neq 0$, $b \neq 0$.

> **નોંધ** રેખાના સમીકરણનું આ સ્વરૂપ અક્ષોને લંબ ન હોય તેવી તથા ઊગમબિંદુમાંથી પસાર ન થતી રેખા માટે જ છે.

ઉદાહરણ 20 : જેના અક્ષો પરના અંતઃખંડોનો સરવાળો 6 હોય અને જે બિંદુ (1, 2)માંથી પસાર થતી તેવી રેખાનું સમીકરણ શોધો.

ઉકેલ : X-અક્ષ અને Y-અક્ષ પરના અંતઃખંડો અનુક્રમે a અને b હોય તેવી રેખાનું સમીકરણ,

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

માંગેલ રેખા બિંદુ (1, 2)માંથી પસાર થાય છે. તેથી $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} = 1$ (i)

અંતઃખંડોનો સરવાળો 6 છે.

$\therefore$ $a + b = 6$

$\therefore$ $b = 6 - a$

$\therefore$ સમીકરણ (i) પરથી, $\frac{1}{a} + \frac{2}{6-a} = 1$

$6 - a + 2a = 6a - a^2$

$a^2 - 5a + 6 = 0$

$a = 3$ અથવા $a = 2$

$a = 3 \Rightarrow b = 6 - a = 3$

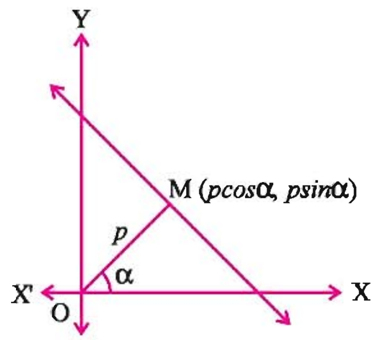
$\therefore$ રેખાનું સમીકરણ $\frac{x}{3} + \frac{y}{3} = 1$ અથવા $x + y = 3$.

$a = 2 \Rightarrow b = 6 - a = 4$

$\therefore$ રેખાનું સમીકરણ $\frac{x}{2} + \frac{y}{4} = 1$ અથવા $2x + y = 4$.

$\therefore$ આથી આપેલ શરત પ્રમાણે બે રેખાઓ $x + y = 3$ અને $2x + y = 4$ મળે.

રેખાનું $p - \alpha$ સ્વરૂપ :



આકૃતિ 6.28

(1) ધારો કે રેખા l ઊગમબિંદુમાંથી પસાર થતી નથી.

ઊગમબિંદુમાંથી રેખા પર દોરેલા લંબનો લંબપાદ M છે.

OM = p. અહીં p એ ઊગમબિંદુનું રેખાથી લંબઅંતર છે.

ધારો કે $\overrightarrow{OM}$ X-અક્ષની ધન દિશા સાથે α માપનો ખૂણો બનાવે છે. $\alpha \in (-\pi, \pi]$.

ધારો કે $\alpha \neq 0, \pm\frac{\pi}{2}, \pi$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{OM}$ નો ઢાળ = $tan\alpha$

અહીં $\overleftrightarrow{OM} \perp$ રેખા l,

રેખા l નો ઢાળ = $-\frac{1}{tan\alpha} = -cot\alpha$ **(લંબરેખાઓ માટે $m_1m_2 = -1$)**

રેખા l એ ($pcos\alpha$, $psin\alpha$) માંથી પસાર થાય છે અને તેનો ઢાળ $-cot\alpha$ છે.

$\therefore$ રેખા l નું સમીકરણ, $y - psin\alpha = -cot\alpha\ (x - pcos\alpha)$

$$y - psin\alpha = \frac{-cos\alpha}{sin\alpha}(x - pcos\alpha)$$

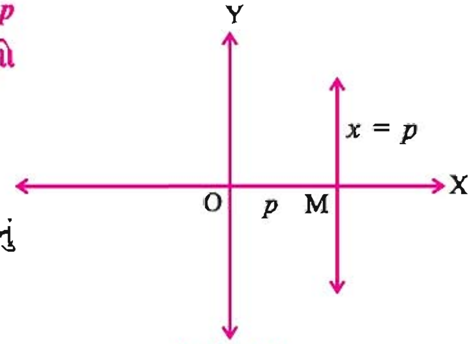
$$ysin\alpha - psin^2\alpha = -xcos\alpha + pcos^2\alpha$$

$\therefore$ $xcos\alpha + ysin\alpha = p(cos^2\alpha + sin^2\alpha)$

$\therefore$ $xcos\alpha + ysin\alpha = p$

ઊગમબિંદુમાંથી રેખા પર દોરેલા લંબની લંબાઈ p હોય અને લંબ એ X-અક્ષની ધન દિશા α માપનો ખૂણો બનાવે તો રેખાનું સમીકરણ

$xcos\alpha + ysin\alpha = p$ ($\alpha \in (-\pi, \pi]$)

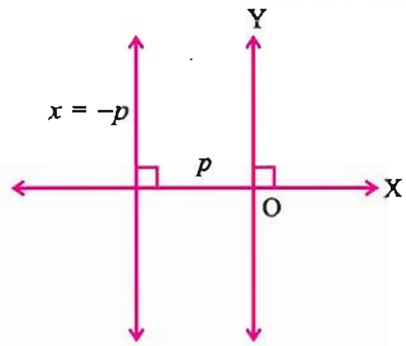


આકૃતિ 6.29

જો $\alpha = 0$ તો રેખા X-અક્ષને લંબ છે અને તેનું સમીકરણ $x = p$ છે.

વળી $cos0 = 1$, $sin0 = 0$.

$x = p$ અને $xcos0 + ysin0 = p$ એક જ છે.



આકૃતિ 6.30

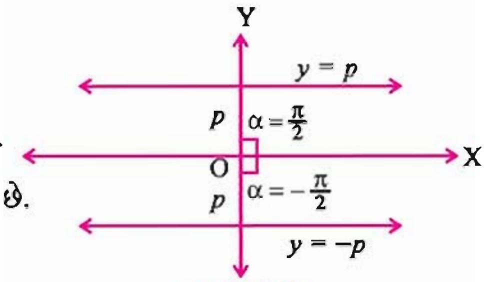
જો $\alpha = \pi$ તો રેખાનું સમીકરણ $x = -p$ છે.

વળી, $cos\pi = -1$, $sin\pi = 0$

$\therefore \quad xcos\pi + ysin\pi = p$

એ $-x = p$ અથવા $x = -p$ જ છે.

જો $\alpha = \pm \frac{\pi}{2}$, તો રેખાનું સમીકરણ $\alpha = \frac{\pi}{2}$ અથવા $\alpha = -\frac{\pi}{2}$ હોય તે અનુસાર અનુક્રમે $y = p$ અથવા $y = -p$ છે.



આકૃતિ 6.31

વળી, $xcos\frac{\pi}{2} + ysin\frac{\pi}{2} = p$ એ $y = p$ જ છે.

$xcos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + ysin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = p$ એ $y = -p$ જ છે.

આમ તમામ વિકલ્પમાં રેખાનું સમીકરણ

$xcos\alpha + ysin\alpha = p$ છે.

ઉદાહરણ 21 : ઊગમબિંદુમાંથી રેખા પર દોરેલા લંબનું માપ 7 હોય તથા લંબરેખાખંડ X-અક્ષની ધન દિશા સાથે $\frac{\pi}{6}$ માપનો ખૂણો બનાવે તો રેખાનું સમીકરણ શોધો.

ઉકેલ : અહીં $p = 7$, $\alpha = \frac{\pi}{6}$

$\therefore$ રેખાનું સમીકરણ $xcos\alpha + ysin\alpha = p$ લેતાં,

$$xcos\frac{\pi}{6} + ysin\frac{\pi}{6} = 7$$

$$\frac{\sqrt{3}x}{2} + \frac{y}{2} = 7$$

$\sqrt{3}x + y = 14$ માંગેલ સમીકરણ છે.

ઊગમબિંદુમાંથી નીકળતું અને ઊગમબિંદુમાંથી રેખા $ax + by + c = 0$, $a, b, c \in R$, $a^2 + b^2 \neq 0$ પરના લંબરેખાખંડને સમાવતું કિરણ એકમ વર્તુળને $P(\alpha)$ માં છેદે, તો લંબરેખાખંડનું માપ p અને α શોધવા. ($p \neq 0$, $\alpha \in (-\pi, \pi]$)

રેખાના સમીકરણનું $p - \alpha$ સ્વરૂપ $xcos\alpha + ysin\alpha = p$ છે.

રેખાનું કાર્તેઝિય સમીકરણ અનન્ય હોય છે અને તે $ax + by + c = 0$ છે.

ધારો કે રેખા ઊગમબિંદુમાંથી પસાર થતી નથી, તેથી $c \neq 0$ અને $p \neq 0$.

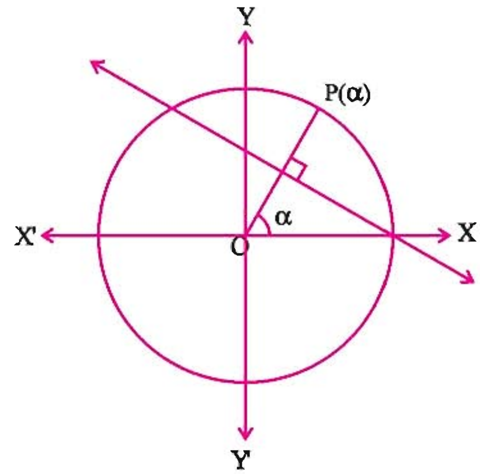
જો $a \neq 0$, $b \neq 0$, તો રેખા એક પણ અક્ષને લંબ નથી.

$\therefore \quad \alpha \neq 0, \pi, \frac{\pi}{2}$ અથવા $-\frac{\pi}{2}$.

બંને એક જ રેખાનાં સમીકરણો છે અને તે સમાન છે.

$\therefore \quad \frac{a}{\cos\alpha} = \frac{b}{\sin\alpha} = -\frac{c}{p}$

$\therefore \quad \cos\alpha = \frac{-ap}{c}, \sin\alpha = \frac{-bp}{c}$



આકૃતિ 6.32

હવે, $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

$\therefore \quad \left(\frac{-ap}{c}\right)^2 + \left(\frac{-bp}{c}\right)^2 = 1$

$\therefore \quad \frac{a^2p^2}{c^2} + \frac{b^2p^2}{c^2} = 1$

$\therefore \quad \frac{p^2}{c^2}(a^2 + b^2) = 1$

$\therefore \quad p^2 = \frac{c^2}{a^2+b^2}$

$\therefore \quad p = \pm\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$\therefore \quad \cos\alpha = \mp\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \sin\alpha = \mp\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, p = \pm\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

જો $c < 0$, તો $p = \frac{-c}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$\cos\alpha = \frac{-ap}{c} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \sin\alpha = \frac{-bp}{c} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \alpha \in (-\pi, \pi]$

જો $c > 0$, તો $p = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

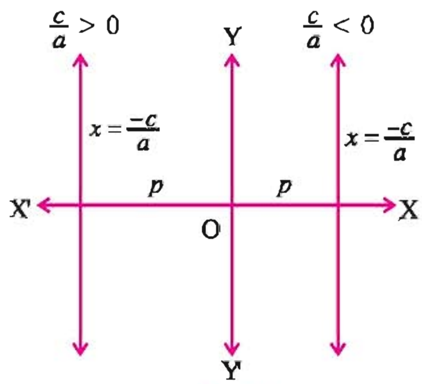
$\cos\alpha = \frac{-ap}{c} = \frac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \sin\alpha = \frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$ax + by + c = 0$ રેખા પર ઉગમબિંદુમાંથી દોરેલા લંબની લંબાઈ p તથા ઉગમબિંદુમાંથી રેખા પર દોરેલ લંબને સમાવતું કિરણ એકમ વર્તુળને P(α) માં છેદે તો

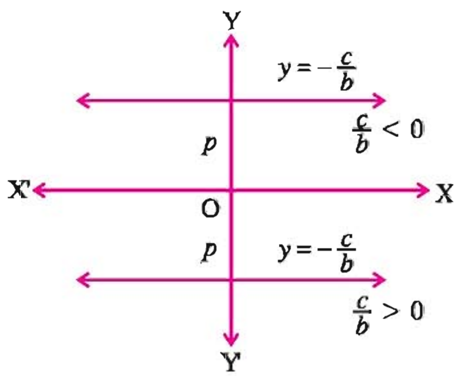
$p = \frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ અને જો $c > 0$ તો $\cos\alpha = \frac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \sin\alpha = \frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

તથા જો $c < 0$ તો $\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

જો રેખા X-અક્ષને લંબ હોય, તો તેનું સમીકરણ $ax + c = 0$ હોય. સમીકરણ $x = -\frac{c}{a}$ રીતે લખાય. તેથી $p = \left|\frac{c}{a}\right|$ થાય. જો $\frac{c}{a} < 0$ તો $\alpha = 0$ અને જો $\frac{c}{a} > 0$, તો $\alpha = \pi$.



આકૃતિ 6.33



આકૃતિ 6.34

જો રેખા Y-અક્ષને લંબ હોય, તો તેનું સમીકરણ $by + c = 0$ હોય. સમીકરણ $y = -\frac{c}{b}$ રીતે લખાય. તેથી $p = \left|\frac{c}{b}\right|$ થાય. જો $\frac{c}{b} < 0$ તો $\alpha = \frac{\pi}{2}$ અને જો $\frac{c}{b} > 0$, તો $\alpha = -\frac{\pi}{2}$.

ઉદાહરણ 22 : રેખા $\sqrt{3}x + y - 10 = 0$ સમીકરણનું $p - \alpha$ સ્વરૂપમાં રૂપાંતર કરો. તે પરથી p અને αની કિંમત શોધો.

ઉકેલ : $\sqrt{3}x + y - 10 = 0$ એ આપેલ રેખાનું સમીકરણ છે.

$$a = \sqrt{3},\ b = 1,\ c = -10$$

$$\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3+1} = 2$$

અહીં, $c < 0$. $\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} > 0$, $\sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{1}{2} > 0$

$\therefore$ $\alpha = \frac{\pi}{6}$ અને $p = \frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{10}{2} = 5$

$\therefore$ રેખાના સમીકરણનું $p - \alpha$ સ્વરૂપ, $x\cos\frac{\pi}{6} + y\sin\frac{\pi}{6} = 5$

6.18 $ax + by + c = 0$, $a^2 + b^2 \neq 0$ને સમાંતર અને લંબરેખાઓની સંહતિ

(i) ધારો કે $ax + by + c = 0$ એ X-અક્ષને લંબ ન હોય તેવી રેખા છે.

$\therefore$ $b \neq 0$ હોવાથી રેખાનો ઢાળ $\frac{-a}{b}$ થશે.

વળી, રેખા $ax + by + k = 0$, $(k \in R - \{c\})$નો ઢાળ પણ $\frac{-a}{b}$ થશે. આમ, રેખાઓ $ax + by + c = 0$ અને $ax + by + k = 0$ $(k \neq c)$ પરસ્પર સમાંતર છે.

વળી, કોઈ પણ રેખા $ax + by + c = 0$ ને સમાંતર હોય, તો તેનો ઢાળ $\frac{-a}{b}$ જ થાય અને જો તે રેખા (x_1, y_1) બિંદુમાંથી પસાર થાય, તો તેનું સમીકરણ $(y - y_1) = \frac{-a}{b}(x - x_1)$.

$\therefore \quad ax + by - ax_1 - by_1 = 0$

$-ax_1 - by_1 = k$ લેતાં,

$ax + by + c = 0$ ને સમાંતર રેખા $ax + by + k = 0$ $(k \in R - \{c\})$.

જો $b = 0$ તો $ax + c = 0$ એ X-અક્ષને લંબ થશે અને $ax + k = 0$ $(k \in R - \{c\})$ પણ X-અક્ષને લંબ થશે. તેથી તેઓ પરસ્પર સમાંતર છે.

નોંધ : બિંદુ (x_1, y_1) રેખા $\{(x, y) \mid ax + by + c = 0, a^2 + b^2 \neq 0\}$ પર નથી કારણ કે રેખાઓ સમાંતર છે.

આમ, $ax_1 + by_1 + c \neq 0$

$\therefore \quad -k + c \neq 0$

$\therefore \quad k \neq c$

આમ, **પ્રત્યેક $a, b \in R$, $a^2 + b^2 \neq 0$ માટે $ax + by + c = 0$ ને સમાંતર રેખાઓની સંહતિ $ax + by + k = 0$ છે. $(k \in R - \{c\})$.**

(ii) ધારો કે $ax + by + c = 0$ એક રેખા છે. જ્યાં, $a \neq 0$, $b \neq 0$.

તેથી રેખા X-અક્ષને કે Y-અક્ષને લંબ નથી.

તેનો ઢાળ $\frac{-a}{b}$ છે અને તેને લંબરેખાનો ઢાળ $\frac{b}{a}$ થશે. **$(m_1m_2 = -1)$**

જો લંબરેખા (x_1, y_1) બિંદુમાંથી પસાર થતી હોય તો તેનું સમીકરણ $y - y_1 = \frac{b}{a}(x - x_1)$.

$\therefore \quad bx - ay - bx_1 + ay_1 = 0$. ધારો કે $ay_1 - bx_1 = k$

$\therefore \quad bx - ay + k = 0$ એ $ax + by + c = 0$ ને લંબરેખાનું સમીકરણ છે.

વળી, કોઈ પણ બે રેખાઓ $ax + by + c = 0$ અને $bx - ay + k = 0$ પરસ્પર લંબ થશે, કારણ કે $m_1 = \frac{-a}{b}$, $m_2 = \frac{b}{a}$ અને $m_1m_2 = -1$.

હવે, જો $a = 0$ અથવા $b = 0$, તો $ax + c = 0$ એ $-ay + k = 0$ ને લંબ થશે અને $by + c = 0$ એ $bx + k = 0$ ને લંબ થશે.

વળી, $ax + c = 0$ ને લંબ કોઈ પણ રેખાનું સમીકરણ $-ay + k = 0$ સ્વરૂપનું લઈ શકાય તથા $bx + c = 0$ ને લંબ કોઈ પણ રેખાનું સમીકરણ $by + k = 0$ સ્વરૂપનું લઈ શકાય. $k \in R$.

આમ, **પ્રત્યેક રેખા $ax + by + c = 0$ ને લંબરેખાઓની સંહતિ $bx - ay + k = 0$ છે, જ્યાં $k \in R$.**

સ્વાધ્યાય 6.4

1. (8, 7) અને (–2, 5)માંથી પસાર થતી રેખાનું સમીકરણ મેળવો.

2. A(1, 2), B(3, 6) અને C(–2, 1) એ ΔABCનાં શિરોબિંદુઓ છે. ΔABCની બાજુ $\overline{BC}$ના લંબદ્વિભાજકનું સમીકરણ શોધો.

3. (1, 2)માંથી પસાર થતી અને X-અક્ષ સાથે $\frac{\pi}{4}$ માપનો ખૂણો બનાવતી રેખાઓનાં સમીકરણ મેળવો.

4. સાબિત કરો કે રેખા $ax + by + c = 0$ ને સમાંતર અને બિંદુ (x_1, y_1) માંથી પસાર થતી રેખાનું સમીકરણ $a(x - x_1) + b(y - y_1) = 0$.

5. રેખા $2x + 3y + 10 = 0$ ને લંબ અને જેનો Y-અંતઃખંડ તેના X-અંતઃખંડ કરતાં 2 વધારે હોય તેવી રેખાનું સમીકરણ શોધો.

6. $(a\cos^3\theta, a\sin^3\theta)$માંથી પસાર થતી અને $x\sec\theta + y\,\mathrm{cosec}\theta = a$ રેખાને લંબરેખાનું સમીકરણ $x\cos\theta - y\sin\theta = a(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$ છે. તેમ સાબિત કરો.

7. જેનો X-અંતઃખંડ 3 હોય તેવી રેખા $\sqrt{3}x - y + 5 = 0$ ને લંબરેખાનું સમીકરણ શોધો.

8. રેખા પર ઊગમબિંદુમાંથી દોરેલા લંબરેખાખંડનું માપ 2 હોય તથા લંબરેખાખંડને સમાવતું કિરણ એકમ વર્તુળને $P\left(\frac{\pi}{6}\right)$માં છેદે તો રેખાનું સમીકરણ મેળવો.

9. સમબાજુ ત્રિકોણની એક બાજુને સમાવતી રેખાનું સમીકરણ $2x + 2y - 5 = 0$ અને (1, 2) એ ત્રિકોણનું શિરોબિંદુ છે. બાકીની બાજુઓને સમાવતી રેખાનાં સમીકરણો મેળવો.

10. (3, 1)માંથી પસાર થતી રેખા પ્રથમ ચરણમાં અક્ષો સાથે 8 એકમ ક્ષેત્રફળવાળો ત્રિકોણ બનાવે તો રેખાનું સમીકરણ મેળવો.

11. $(\sqrt{3}, -1)$માંથી પસાર થતી અને ઊગમબિંદુથી $\sqrt{2}$ લંબઅંતરે આવેલ રેખાનું સમીકરણ મેળવો.

12. એક લંબચોરસના સામસામેનાં બે શિરોબિંદુઓ (−3, 1) અને (1, 1) છે તથા એક બાજુને સમાવતી રેખાનું સમીકરણ $4x + 7y + 5 = 0$, તો બાકીની બાજુઓને સમાવતી રેખાઓનાં સમીકરણ મેળવો.

13. રેખાઓ $3x + 4y + 5 = 0$ અને $4x - 3y - 10 = 0$ પરસ્પર બિંદુ Aમાં છેદે છે. બિંદુ B એ રેખા $3x + 4y + 5 = 0$ પર અને બિંદુ C એ રેખા $4x - 3y - 10 = 0$ પર આવેલાં છે કે જેથી AB = AC. (1, 2)માંથી પસાર થતી રેખા $\overleftrightarrow{BC}$નું સમીકરણ મેળવો.

*

6.19 રેખાની બહારના બિંદુથી રેખાનું લંબઅંતર

ધારો કે રેખા ઊગમબિંદુમાંથી પસાર થતી નથી તથા અક્ષોને લંબ નથી.

રેખા $ax + by + c = 0$ એ X-અક્ષ અને Y-અક્ષને અનુક્રમે A અને B માં છેદે છે.

$A\left(-\frac{c}{a}, 0\right)$ અને $B\left(0, -\frac{c}{b}\right)$ છે. (આકૃતિ 6.35)

$P(x_1, y_1)$ એ સમતલમાં આવેલ બિંદુ છે. $\overline{PM} \perp \overleftrightarrow{AB}$ છે. $M \in \overleftrightarrow{AB}$. $P \notin \overleftrightarrow{AB}$

હવે, ΔPABનું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2}\left| x_1\left(0 + \frac{c}{b}\right) - \frac{c}{a}\left(-\frac{c}{b} - y_1\right) + 0(y_1 - 0) \right|$

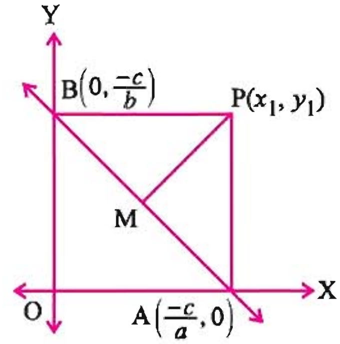
$$= \frac{1}{2}\left| \frac{cx_1}{b} + \frac{cy_1}{a} + \frac{c^2}{ab} \right|$$

$$= \frac{1}{2}\left| (ax_1 + by_1 + c)\frac{c}{ab} \right| \qquad \text{(i)}$$

આ ઉપરાંત ΔPABનું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2}AB \cdot PM$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{c^2}{a^2}+\frac{c^2}{b^2}} \cdot PM$$

$$= \frac{1}{2}\left|\frac{c}{ab}\right|\sqrt{a^2+b^2} \cdot PM \qquad \text{(ii)}$$



આકૃતિ 6.35

પરિણામ (i) અને (ii) પરથી,

$$\frac{1}{2}\left|(ax_1+by_1+c)\frac{c}{ab}\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|\frac{c}{ab}\right|\sqrt{a^2+b^2} \cdot PM$$

$$\therefore \quad PM = \frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$\therefore$ **બિંદુ $P(x_1, y_1)$થી રેખા $ax + by + c = 0$નું લંબઅંતર $p = \frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.**

બીજી રીત :

રેખાની બહારના બિંદુથી રેખાનું લંબઅંતર :

આપણે જાણીએ છીએ કે જો રેખાનું સમીકરણ $ax + by + c = 0$ હોય તો રેખાનું ઊગમબિંદુથી લંબઅંતર $p = \frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ છે.

હવે $ax + by + c = 0$ રેખાની બહારના તે જ સમતલના બિંદુ (x_1, y_1)થી લંબઅંતર શોધવા, ઊગમબિંદુનું સ્થાનાંતર (x_1, y_1) આગળ કરતાં, $x = x' + x_1$, $y = y' + y_1$.

રેખાનું નવા અક્ષોને સાપેક્ષ સમીકરણ,

$$a(x' + x_1) + b(y' + y_1) + c = 0$$

$$\therefore \quad ax' + by' + ax_1 + by_1 + c = 0$$

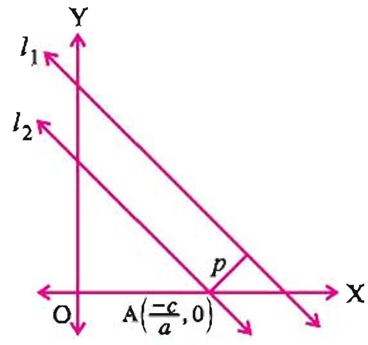
હવે, (x_1, y_1) એ નવું ઊગમબિંદુ થશે.

$\therefore$ એટલે (x_1, y_1)નું $ax + by + c = 0$ થી લંબઅંતર અને

ઊગમબિંદુથી $ax' + by' + ax_1 + by_1 + c = 0$નું લંબઅંતર એક જ છે.

$$\therefore \quad p = \frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad \left(p = \frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

6.20 બે સમાંતર રેખાઓ વચ્ચેનું લંબઅંતર



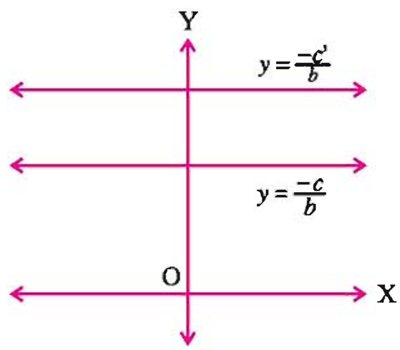
આકૃતિ 6.36

ધારો કે $ax + by + c = 0$ અને $ax + by + c' = 0$, $a^2 + b^2 \neq 0$, $c \neq c'$ સમાંતર રેખાઓનાં સમીકરણ છે.

જો $a \neq 0$ તો બિંદુ $A\left(-\frac{c}{a}, 0\right)$ એ રેખા $ax + by + c = 0$ પર આવેલું બિંદુ છે.

બે રેખાઓ વચ્ચેનું લંબઅંતર એ એક રેખાના કોઈ પણ બિંદુથી બીજી રેખાના લંબઅંતર જેટલું હોય છે.

તેથી રેખા $ax + by + c' = 0$ નું બિંદુ $A\left(-\frac{c}{a}, 0\right)$થી લંબઅંતર એ બે રેખાઓ વચ્ચેનું લંબઅંતર છે.



આકૃતિ 6.37

ધારો કે p એ બે રેખાઓ વચ્ચેનું લંબઅંતર હોય, તો

$$p = \frac{\left|a\left(-\frac{c}{a}\right) + b(0) + c'\right|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$p = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

જો $a = 0$ તો $b \neq 0$. તેથી બે સમાંતર રેખાઓનાં સમીકરણો $by + c = 0$ અને $by + c' = 0$ થાય.

$\therefore$ રેખાઓનાં સમીકરણ $y = -\frac{c}{b}$ અને $y = -\frac{c'}{b}$ થાય.

$$\text{તેમની વચ્ચેનું લંબઅંતર} = \left|\frac{-c}{b} - \left(\frac{-c}{b'}\right)\right|$$

$$= \frac{|c - c'|}{|b|}$$

$$= \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \qquad (a = 0)$$

આમ, બધા જ વિકલ્પોમાં સમાંતર રેખાઓ $ax + by + c = 0$ અને $ax + by + c' = 0$ વચ્ચેનું લંબઅંતર $p = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

6.21 બે ભિન્ન રેખાઓ છેદે તેની શરત

હવે આપણે બે ભિન્ન રેખાઓ $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ તથા $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ એક બિંદુમાં છેદે તેની શરત મેળવીશું.

આપેલ રેખાઓ ભિન્ન હોવાથી જો તે પરસ્પર સમાંતર ન હોય તો એક બિંદુમાં છેદશે. પહેલા ધારો કે બે માંથી એક પણ X-અક્ષને લંબ નથી.

$a_1x + b_1y + c_1 = 0$ તથા $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ એક બિંદુમાં છેદે છે.

$\Leftrightarrow$ તેમના ઢાળ સમાન છે.

$\Leftrightarrow$ $m_1 = m_2$ જ્યાં $m_1 = -\frac{a_1}{b_1}$, $m_2 = -\frac{a_2}{b_2}$

$\Leftrightarrow$ $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$

$\Leftrightarrow$ $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$

$\therefore$ ભિન્ન રેખાઓ $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ તથા $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ એકપણ બિંદુમાં છેદે છે.

$\Leftrightarrow$ $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$

$\therefore$ જો $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ તથા $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ પૈકી એક X-અક્ષને લંબ ન હોય તો તે એક બિંદુમાં છેદે તેની આવશ્યક તથા પર્યાપ્ત શરત છે, $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$.

જો બંને સમાંતર ન હોય, તો બંને પૈકી એક જ X-અક્ષને લંબ હોઈ શકે.

ધારો કે $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ શિરોલંબ છે અને $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ શિરોલંબ નથી.

$\therefore$ $b_1 = 0$ અને $b_2 \neq 0$

$\therefore$ $b_1 = 0$ હોવાથી $a_1 \neq 0$

$\therefore$ $a_1b_2 - a_2b_1 = a_1b_2 \neq 0$ **($a_1 \neq 0, b_2 \neq 0$)**

$a_1x + b_1y + c_1 = 0$ તથા $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ સમાંતર ન હોવાથી એક બિંદુમાં છેદે તો તે માટે પણ $a_1b_2 - a_2b_1 = a_1b_2 \neq 0$.

$\therefore$ ભિન્ન અસમાંતર રેખાઓ $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ તથા $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ અનન્ય બિંદુમાં છેદે તેની આવશ્યક તથા પર્યાપ્ત શરત છે, $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$.

6.22 આપેલ રેખાઓના છેદબિંદુમાંથી પસાર થતી રેખાઓની સંહતિ

પ્રમેય 1 : જો $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ અને $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ $(a_i^2 + b_i^2 \neq 0, i = 1, 2)$ એ અનન્ય બિંદુમાં છેદતી રેખાઓ હોય, તો $l(a_1x + b_1y + c_1) + m(a_2x + b_2y + c_2) = 0$ તેમના છેદબિંદુમાંથી પસાર થતી કોઈક રેખા દર્શાવે છે, જ્યાં $l^2 + m^2 \neq 0$; $l, m \in R$

સાબિતી : સૌપ્રથમ આપણે $(la_1 + ma_2)x + (lb_1 + mb_2)y + (lc_1 + mc_2) = 0$ એ સુરેખ સમીકરણ છે તેમ સાબિત કરીશું. એટલે કે $(la_1 + ma_2)^2 + (lb_1 + mb_2)^2 \neq 0$.

હવે જો શક્ય હોય, તો ધારો કે $(la_1 + ma_2)^2 + (lb_1 + mb_2)^2 = 0$ (i)

હવે $(la_1 + ma_2)^2 \geq 0$ અને $(lb_1 + mb_2)^2 \geq 0$. આથી પરિણામ (i) પરથી,

$$la_1 + ma_2 = 0$$

$$lb_1 + mb_2 = 0$$

$\therefore \quad b_2(la_1 + ma_2) - a_2(lb_1 + mb_2) = 0$

$\therefore \quad l(a_1b_2 - a_2b_1) = 0$. તે જ રીતે $m(a_1b_2 - a_2b_1) = 0$

પરંતુ રેખા અનન્ય બિંદુમાં છેદે છે. તેથી $a_1b_2 - a_1b_1 \neq 0$

$\therefore \quad l = 0 = m$

$\therefore \quad l^2 + m^2 = 0$

પરંતુ $l^2 + m^2 \neq 0$ એ આપેલ છે.

$\therefore$ જેથી મળેલ પરિણામ આપણી ધારણાથી વિપરીત છે.

$\therefore \quad (la_1 + ma_2)^2 + (lb_1 + mb_2)^2 \neq 0$

$\therefore \quad (la_1 + ma_2)x + (lb_1 + mb_2)y + (lc_1 + mc_2) = 0$ એ રેખા દર્શાવે છે.

જો (h, k) એ આપેલ રેખાઓ $a_ix + b_iy + c_i = 0 \ (i = 1, 2)$ નું છેદબિંદુ હોય, તો

$$a_1h + b_1k + c_1 = 0$$

$$a_2h + b_2k + c_2 = 0$$

$\therefore \quad l(a_1h + b_1k + c_1) + m(a_2h + b_2k + c_2) = 0$

$\therefore \quad l(a_1x + b_1y + c_1) + m(a_2x + b_2y + c_2) = 0$ એવી રેખા દર્શાવે છે કે જે (h, k) માંથી પસાર થાય છે. એટલે કે રેખાઓ $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ અને $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ ના છેદબિંદુમાંથી પસાર થાય છે.

આ પ્રમેયનું પ્રતીપ પણ સત્ય છે.

પ્રમેય 2 : જો રેખાઓ $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ અને $a_2x + b_2y + c_2 = 0$, $a_i^2 + b_i^2 \neq 0$, $i = 1, 2$. અનન્ય બિંદુમાં છેદતી હોય, તો તેમના છેદબિંદુમાંથી પસાર થતી કોઈ પણ રેખાનું સમીકરણ કોઈક $l, m \in R$, $l^2 + m^2 \neq 0$ માટે $l(a_1x + b_1y + c_1) + m(a_2x + b_2y + c_2) = 0$ સ્વરૂપનું છે.

આ પ્રમેય આપણે સાબિતી વગર સ્વીકારીશું.

☛ **નોંધ** જો $l = 0$ તો $m \neq 0$ તેથી $l(a_1x + b_1y + c_1) + m(a_2x + b_2y + c_2) = 0$ એ $m(a_2x + b_2y + c_2) = 0$ થાય. એટલે કે $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ દર્શાવે.

તે જ રીતે જો $m = 0$ તો $l \neq 0$ ત્યારે સમીકરણ $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ દર્શાવે છે.

માંગેલ રેખા $a_2x + b_2y + c_2 = 0$, સિવાયની હોય, તો $l \neq 0$.

$\therefore$ $l(a_1x + b_1y + c_1) + m(a_2x + b_2y + c_2) = 0$ પરથી તેને સમાન સમીકરણ

$(a_1x + b_1y + c_1) + \frac{m}{l}(a_2x + b_2y + c_2) = 0$ મળે.

$\lambda = \frac{m}{l}$ લેતાં,

જો માંગેલ રેખા $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ સિવાયની હોય, તો આપેલ રેખાઓના છેદબિંદુમાંથી પસાર થતી રેખાનાં સમીકરણનું વ્યાપક સ્વરૂપ $a_1x + b_1y + c_1 + \lambda(a_2x + b_2y + c_2) = 0$ છે.

પ્રકીર્ણ દાખલા :

ઉદાહરણ 23 : છેદબિંદુ શોધ્યા વગર રેખા $x + y + 4 = 0$ અને $3x - y - 8 = 0$ ના છેદબિંદુમાંથી પસાર થતી અને બિંદુ (2, −3)માંથી પસાર થતી રેખાનું સમીકરણ શોધો.

ઉકેલ : અહીં સ્પષ્ટ છે કે (2, −3) એ આપેલ રેખા $3x - y - 8 = 0$ નું સમાધાન કરતું નથી.

$\therefore$ $3x - y - 8 = 0$ એ રેખા માંગેલ રેખા નથી.

$\therefore$ માંગેલ રેખાનું સમીકરણ $(x + y + 4) + \lambda(3x - y - 8) = 0$

$\therefore$ $(1 + 3\lambda)x + (1 - \lambda)y + (4 - 8\lambda) = 0$ (i)

તે બિંદુ (2, −3)માંથી પસાર થાય છે.

$\therefore$ $(1 + 3\lambda)2 + (1 - \lambda)(-3) + (4 - 8\lambda) = 0$

સાદું રૂપ આપતાં $\lambda = -3$ મળે.

સમીકરણ (i) માં $\lambda = -3$ મૂકતાં,

$\therefore$ $(x + y + 4) + (-3)(3x - y - 8) = 0$

$\therefore$ $-8x + 4y + 28 = 0$

$\therefore$ $2x - y - 7 = 0$ એ માંગેલ રેખાનું સમીકરણ છે.

ઉદાહરણ 24 : (4, −2)માંથી પસાર થતી અને જેના પર ઊગમબિંદુમાંથી પર દોરેલા લંબની લંબાઈ 2 હોય તેવી રેખાનું સમીકરણ શોધો.

ઉકેલ : માંગેલ રેખાનું સમીકરણ $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$.

અહીં $p = 2$ છે તથા રેખા (4, −2)માંથી પસાર થાય છે.

∴ $4\cos\alpha - 2\sin\alpha = 2$

∴ $-2\sin\alpha = 2 - 4\cos\alpha$

∴ $\sin^2\alpha = (1 - 2\cos\alpha)^2$

∴ $\sin^2\alpha = 1 - 4\cos\alpha + 4\cos^2\alpha$

∴ $1 - \cos^2\alpha = 1 - 4\cos\alpha + 4\cos^2\alpha$

∴ $5\cos^2\alpha - 4\cos\alpha = 0$

∴ $\cos\alpha\,(5\cos\alpha - 4) = 0$

∴ $\cos\alpha = 0$ અથવા $\cos\alpha = \frac{4}{5}$

∴ $\cos\alpha = 0 \Rightarrow \sin\alpha = -1$ અને $\cos\alpha = \frac{4}{5} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{3}{5}$ **($4\cos\alpha - 2\sin\alpha = 2$)**

(1) $\cos\alpha = 0$, $\sin\alpha = -1$ અને $p = 2$ લેતાં,

∴ રેખાનું સમીકરણ $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$

$x \cdot 0 + y(-1) = 2$

∴ $y = -2$

∴ $y + 2 = 0$ માંગેલ પૈકીની એક રેખાનું સમીકરણ છે.

(2) $\cos\alpha = \frac{4}{5}$, $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ અને $p = 2$ લેતાં,

∴ રેખાનું સમીકરણ $x\left(\frac{4}{5}\right) + y\left(\frac{3}{5}\right) = 2$

∴ $4x + 3y = 10$ માંગેલ બીજી રેખાનું સમીકરણ છે.

ઉદાહરણ 25 : અક્ષો સાથે $\frac{50}{\sqrt{3}}$ ક્ષેત્રફળવાળો ત્રિકોણ બનાવતી અને જેના પર ઊગમબિંદુમાંથી દોરેલો લંબ X-અક્ષની ધન દિશા સાથે $\frac{\pi}{6}$ માપનો ખૂણો બનાવે તેવી રેખાનું સમીકરણ મેળવો.

ઉકેલ : ધારો કે $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ એ માંગેલ રેખાનું સમીકરણ છે.

અહીં $\alpha = \frac{\pi}{6}$

∴ રેખાનું સમીકરણ $x\cos\frac{\pi}{6} + y\sin\frac{\pi}{6} = p$

$\frac{\sqrt{3}x}{2} + \frac{y}{2} = p$

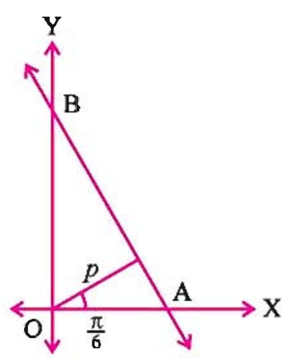
$\sqrt{3}x + y = 2p$

ધારો કે રેખા X-અક્ષને A અને Y-અક્ષને Bમાં છેદે છે.

∴ $A\left(\frac{2p}{\sqrt{3}}, 0\right)$ અને $B(0, 2p)$.

હવે, ΔOABનું ક્ષેત્રફળ $= \frac{50}{\sqrt{3}}$

∴ $\frac{1}{2}OA \cdot OB = \frac{50}{\sqrt{3}}$



આકૃતિ 6.38

$\therefore \quad \frac{1}{2} \frac{2p}{\sqrt{3}} \cdot 2p = \frac{50}{\sqrt{3}}$

$\therefore \quad 2p^2 = 50$

$\therefore \quad p^2 = 25$

$\therefore \quad p = 5$

$\therefore$ રેખાનું સમીકરણ $\sqrt{3}x + y = 10$.

સ્વાધ્યાય 6

1. સાબિત કરો કે, $A(2t^2, 4t)$, $S(2, 0)$ અને $B\left(\frac{2}{t^2}, \frac{-4}{t}\right)$ સમરેખ બિંદુઓ છે.
2. સાબિત કરો કે, $(\pm\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$થી રેખા $\frac{x}{a} cos\theta + \frac{y}{b} sin\theta = 1$ના લંબઅંતરોનો ગુણાકાર b^2 છે.
3. રેખા X-અક્ષને A અને Y-અક્ષને Bમાં છેદે છે કે જેથી AB = 15 થાય અને $\overleftrightarrow{AB}$એ અક્ષો સાથે જે ત્રિકોણ રચે છે તેનું ક્ષેત્રફળ 54 થાય તેવી રેખાનાં સમીકરણ શોધો.
4. જો રેખાઓ $3x + y + 4 = 0$, $3x + 4y = 20$ અને $24x - 7y + 5 = 0$ થી રચાતો ત્રિકોણ સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ છે, તેમ સાબિત કરો.
5. સાબિત કરો કે, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, $\frac{x}{b} + \frac{y}{a} = 1$, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2$, $\frac{x}{b} + \frac{y}{a} = 2$ થી બનતો ચતુષ્કોણ સમબાજુ ચતુષ્કોણ છે.
6. Y-અક્ષ પરનું કયું બિંદુ રેખા $3x + 4y + 5 = 0$ થી 5 એકમ અંતરે આવેલ છે ?
7. (2, 3)માંથી પસાર થતી અને સમાંતર રેખાઓ $2x + y = 3$ અને $2x + y = 5$ વચ્ચે $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ લંબાઈનો રેખાખંડ કાપતી રેખાનું સમીકરણ શોધો.
8. ΔABCમાં A ના યામ $(-4, -5)$ છે તથા બે વેધને સમાવતી રેખાઓનાં સમીકરણ $5x + 3y - 4 = 0$ અને $3x + 8y + 13 = 0$ હોય, તો B અને Cના યામ શોધો.
9. બિંદુ (2, 3)માંથી પસાર થતી અને અક્ષો પર સમાન અંતઃખંડ બનાવતી રેખાનું સમીકરણ શોધો.
10. રેખા X-અક્ષ અને Y-અક્ષને અનુક્રમે બિંદુ A અને B માં છેદે છે. જો (2, 2) એ $\overline{AB}$નું A તરફથી 2:1 ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે તો રેખાનું સમીકરણ શોધો.
11. ઊગમબિંદુમાંથી રેખા $bx + ay + ab = 0$ પર દોરેલા લંબની લંબાઈ p હોય, તો સાબિત કરો કે $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{p^2}$.
12. અક્ષો પર રચાતા અંતઃખંડોનો સરવાળો અને ગુણાકાર અનુક્રમે 7 અને 12 હોય તેવી રેખાનું સમીકરણ શોધો.
13. X-અક્ષ પરનું કયું બિંદુ $4x - 3y - 12 = 0$ રેખાથી 4 એકમ અંતરે આવેલ છે ?

14. રેખા $x + y + 1 = 0$ અને $x - y + 1 = 0$ના છેદબિંદુમાંથી પસાર થતી અને ઊગમબિંદુથી 1 એકમે આવેલ રેખાનું સમીકરણ શોધો. (રેખાઓનું છેદબિંદુ શોધ્યા વગર)

15. ઊગમબિંદુમાંથી દોરેલા લંબનો લંબપાદ (1, 2) હોય તેવી રેખાનું સમીકરણ શોધો.

16. $5x + y + 4 = 0$ અને $2x + 3y - 1 = 0$ના છેદબિંદુમાંથી પસાર થતી અને $4x - 2y - 1 = 0$ ને સમાંતર હોય તેવી રેખાનું સમીકરણ શોધો. (છેદબિંદુ શોધ્યા વગર)

17. $3x - 4y + 1 = 0$ અને $5x + y - 1 = 0$ના છેદબિંદુમાંથી પસાર થતી અને અક્ષો સાથે રચાતા અંતઃખંડોનું માન સમાન હોય તેવી રેખાનું સમીકરણ શોધો. (રેખાઓનું છેદબિંદુ શોધ્યા વગર)

18. નીચે આપેલું દરેક વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલા વિકલ્પો (a), (b), (c) અથવા (d)માંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરીને ☐ માં લખો :

(1) ઊગમબિંદુ Oમાંથી પસાર થતી રેખા એ સમાંતર રેખાઓ $2x + y = 5$ અને $2x + y = 3$ને અનુક્રમે P અને Q માં છેદે છે. ઊગમબિંદુ એ $\overline{PQ}$નું કયા ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે ? ☐

(a) $\frac{5}{3}$ (b) $\frac{2}{3}$ (c) $\frac{2}{\sqrt{5}}$ (d) $\frac{-5}{3}$

(2) A(1, 2), B(6, −1) અને C(7, 3) એ ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓ છે. $\overline{AD}$એ ત્રિકોણની મધ્યગા છે. (1, 1)માંથી પસાર થતી અને મધ્યગા $\overline{AD}$ને સમાંતર રેખાનું સમીકરણ ...... છે. ☐

(a) $2x + 11y = 13$ (b) $2x + 11y = 5$ (c) $2x + 11y = 18$ (d) $11x - 2y = 13$

(3) $A\left(2, \frac{-3}{2}\right)$માંથી પસાર થતી અને X-અક્ષને સમાંતર રેખાનું સમીકરણ ...... છે. ☐

(a) $x = 2$ (b) $2x - 3 = 0$ (c) $2y - 3$ (d) $2y + 3 = 0$

(4) A(−2, 3) અને B(1, 5) નું A તરફથી $1 : \lambda$ ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરતી રેખા $x + y = 4$ હોય તો λ = ... ☐

(a) 3 : 2 (b) 2 : 3 (c) 1 : 3 (d) −2 : 3

(5) $\overline{AB}$ નાં અંત્યબિંદુઓ $A(x_1, y_1)$ અને $B(x_2, y_2)$, $P(tx_2 + (1 - t)x_1, ty_2 + (1 - t)y_1)$, $t < 0$, તો P એ $\overline{AB}$નું A તરફથી ...... ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે છે. ☐

(a) $1 - t$ (b) $\frac{t-1}{t}$ (c) $\frac{1}{1-t}$ (d) $\frac{t}{1-t}$

(6) રેખા $\{(x, y) \mid x = 3t + 1, y = 2t + 6, t \in R\}$ નો ઢાળ = ... ☐

(a) $-\frac{2}{3}$ (b) $\frac{2}{3}$ (c) $\frac{3}{2}$ (d) $-\frac{3}{2}$

(7) ઊગમબિંદુથી રેખા $3x + 4y + 10 = 0$ નું લંબઅંતર ...... છે. ☐

(a) −2 (b) $\frac{2}{5}$ (c) $\frac{1}{5}$ (d) 2

(8) રેખાઓ $x\cos\alpha + y\sin\alpha = \sec\alpha$ અને $x\sin\alpha - y\cos\alpha = \tan\alpha$ નાં ઊગમબિંદુથી લંબઅંતર અનુક્રમે p અને p' હોય, તો $p^2 - p'^2 = ...$ ☐

(a) 1 (b) 2 (c) $\cos^2\alpha$ (d) $\sec^2\alpha \cdot \tan^2\alpha$

(9) સમાંતર રેખાઓ $3x + 4y - 5 = 0$ અને $6x + 8y - 15 = 0$ વચ્ચેનું લંબઅંતર ...... છે. ☐

(a) 1 (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{25}{10}$ (d) 2

(10) રેખાઓ $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ અને $x - \sqrt{3}y + 1 = 0$ પરસ્પર લંબ હોય, તો $\alpha = ...$ $(0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$ ☐

(a) $\frac{\pi}{2}$ (b) $\frac{\pi}{4}$ (c) $\frac{\pi}{3}$ (d) $\frac{\pi}{6}$

(11) રેખા $x + \sqrt{3}y - 4 = 0$ નું $p-\alpha$ સ્વરૂપ ...... છે. ☐

(a) $x\cos\frac{\pi}{6} + y\sin\frac{\pi}{6} = 2$ (b) $x\cos\frac{\pi}{3} + y\sin\frac{\pi}{3} = 2$

(c) $x\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + y\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 2$ (d) $x\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + y\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 2$

સારાંશ

1. રેખાખંડનું વિભાજન
2. રેખાનાં પ્રચલ સમીકરણ
3. અક્ષોને લંબરેખા
4. રેખાનું કાર્તેઝિય સમીકરણ
5. રેખાનો ઢાળ
6. બે રેખાઓ પરસ્પર લંબ હોવાની તથા સમાંતર હોવાની શરત
7. બે રેખાઓ વચ્ચેનો ખૂણો
8. રેખાના અક્ષો પરના અંતઃખંડ
9. રેખાના સમીકરણનાં વિવિધ સ્વરૂપો
10. રેખા પર ઊગમબિંદુમાંથી દોરેલ લંબની લંબાઈ, બે સમાંતર રેખાઓ વચ્ચેનું અંતર
11. $ax + by + c = 0$ ને સમાંતર તથા લંબરેખાઓની સંહતિ
12. ભિન્ન અસમાંતર રેખાઓ છેદે તેની શરત
13. બે રેખાના છેદબિંદુમાંથી પસાર થતી રેખાઓની સંહતિ

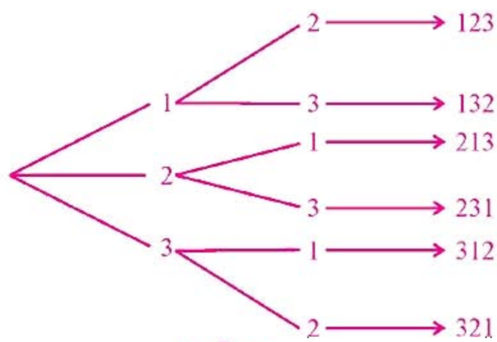
પ્રકરણ 7

ક્રમચય અને સંચય

7.1 પ્રાસ્તાવિક

વ્યવહારમાં આપણી સમક્ષ ગણતરી અને પસંદગી કરવા નીચે આપ્યા છે તેવા કેટલાક પ્રશ્નો ઉપસ્થિત થાય છે.

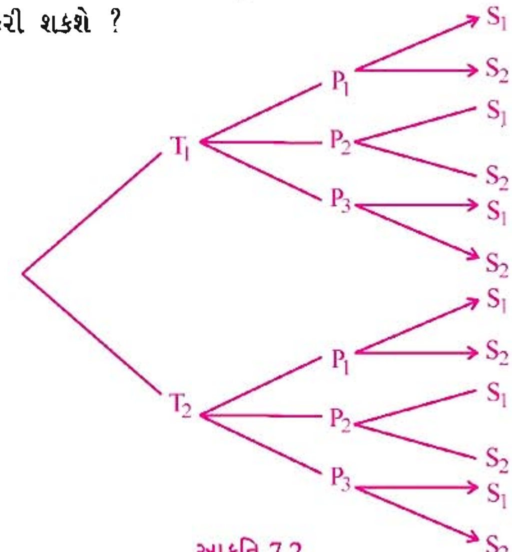
આપણે ત્રણ અંકોની સંખ્યા બનાવવી છે, જેમાં માત્ર 1, 2 અને 3નો જ ઉપયોગ કરવાનો છે. જો અંકોનું પુનરાવર્તન ન કરવાનું હોય તો આવી કેટલી સંખ્યા મળે ? 1, 2 અને 3માંથી પ્રથમ અંક પસંદ થયા બાદ બીજા અંકની પસંદગી માટે 1, 2 અને 3માંથી માત્ર બે જ વિકલ્પ રહે છે. તે પછી છેલ્લા સ્થાનમાં બાકી વધેલ અંક મૂકવો પડે. વૃક્ષાકૃતિ 7.1 જુઓ.



આકૃતિ 7.1

આમ 123, 132, 213, 231, 312, 321 છ સંખ્યાઓ મળે છે.

ઋચા પાસે બે ટૉપ અને તેની સાથે યોગ્ય જોડ બને તેવા ત્રણ પેન્ટ્સ (પાટલૂન) અને બે જોડી બૂટ છે. એક પાર્ટીમાં જવા તે ડ્રેસની પસંદગી કેટલા પ્રકારે કરી શકશે ?



આકૃતિ 7.2

જો ટૉપને T_1 અને T_2 તથા પેન્ટ્સને P_1, P_2, P_3 તથા બૂટને S_1 અને S_2 તરીકે દર્શાવીએ, તો આકૃતિ 7.2 પ્રમાણે વૃક્ષાકૃતિ મળે.

પોશાકની શક્ય પસંદગી $T_1P_1S_1$, $T_1P_1S_2$, $T_1P_2S_1$, $T_1P_2S_2$, $T_1P_3S_1$, $T_1P_3S_2$, $T_2P_1S_1$, $T_2P_1S_2$, $T_2P_2S_1$, $T_2P_2S_2$, $T_2P_3S_1$, $T_2P_3S_2$ તરીકે થાય. આમ કુલ 12 પ્રકારે તૈયાર થઈ તે પાર્ટીમાં જઈ શકે.

દેવ પાસે ત્રણ દફતર, બે નાસ્તાના ડબ્બા અને બે બૉલપેન છે. આ પ્રત્યેકમાંથી એક-એક વસ્તુ પસંદ કરી કેટલી રીતે દફતર તૈયાર કરીને શાળાએ જઈ શકે ? જો આપેલ દફતરને B_1, B_2, B_3 વડે, નાસ્તાના ડબ્બાને C_1, C_2 વડે અને બૉલપેનને P_1, P_2 વડે દર્શાવીએ.

તેથી શક્ય પસંદગીઓ $B_1C_1P_1$, $B_1C_1P_2$, $B_1C_2P_1$, $B_1C_2P_2$, $B_2C_1P_1$, $B_2C_1P_2$, $B_2C_2P_1$, $B_2C_2P_2$, $B_3C_1P_1$, $B_3C_1P_2$, $B_3C_2P_1$, $B_3C_2P_2$. આમ કુલ 12 પ્રકારે પસંદગી થાય.

પરંતુ દરેક વખતે આ રીતે પસંદગીઓની સંખ્યા કંટાળાજનક છે અને હંમેશાં વ્યવહારુ પણ નથી.

કમ્પ્યૂટરની એક ફાઇલ ખોલવા માટે એક પાસવર્ડની જરૂર પડે છે. આ પાસવર્ડ છ ભિન્ન અંકોનો બનેલો છે. કેટલા પ્રયત્નોની જરૂર પડશે ? અલબત્ત $10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 151200$ રીતે !

આ પ્રકારની ગણતરીના પ્રશ્નોનો ઉકેલ ગણતરીના મૂળભૂત સિદ્ધાંત કે ગુણાકારના સિદ્ધાંત વડે મેળવવામાં આવે છે.

ગણતરીનો મૂળભૂત સિદ્ધાંત : જો એક ક્રિયા m ભિન્ન રીતે થઈ શકે તથા તેની આનુશંગિક બીજી ક્રિયા p ભિન્ન રીતે થઈ શકે તો બંને ક્રિયા કરવાના પ્રકારોની સંખ્યા mp છે.

જો A પ્રથમ ઘટના બને તેના ઘટકોનો ગણ તથા B આનુશંગિક બીજી ઘટના બને તેના ઘટકોનો ગણ હોય, તો આપણે જાણીએ છીએ કે, $n(A) = m$, $n(B) = p$. આથી, $n(A \times B) = mp$.

આ જ રીતે જો પ્રથમ ઘટના p પ્રકારે, તેને આનુશંગિક બીજી ઘટના q પ્રકારે અને આ બંનેને આનુશંગિક ત્રીજી ઘટના r પ્રકારે થઈ શકે તો ત્રણેય ક્રિયા સાથે pqr પ્રકારે થાય.

અગાઉના ઉદાહરણમાં જોયું કે ઋચાની ટૉપ માટેની પસંદગી 2 રીતે, પાટલૂનની પસંદગી 3 રીતે તથા બૂટની પસંદગી 2 રીતે થઈ શકે. આમ કુલ $3 \times 2 \times 2 = 12$ રીતે તૈયાર થઈ પાર્ટીમાં જઈ શકે છે. તે જ રીતે દેવ શાળામાં $3 \times 2 \times 2 = 12$ રીતે વસ્તુઓ લઈ જઈ શકે. આમ, ગણતરીના મૂળભૂત સિદ્ધાંતના આધારે સરળતાથી પ્રશ્નોનો ઉકેલ મેળવી શકાય છે.

ઉદાહરણ 1 : 1, 2, 4, 6 અને 8 અંકોનો ઉપયોગ કરી ચાર અંકોની કેટલી સંખ્યા બનાવી શકાય ? (કોઈ પણ સંખ્યામાં અંકોનું પુનરાવર્તન કરવાનું નથી.)

Th	H	Ten	U

ઉકેલ : અહીં આપણે આપેલા 5 અંકો પૈકીનો કોઈ એક અંક એકમ, દશક, શતક અને હજારના સ્થાનમાં મૂકી સંખ્યા બનાવવાની છે. પ્રથમ સ્થાનમાં 5 અંકોમાંથી કોઈ પણ એક અંક મૂકી શકાય. આથી તે સ્થાન 5 પ્રકારે ભરી શકાય.

હવે અંકોનું પુનરાવર્તન ન કરવાનું હોવાથી બીજું સ્થાન બાકીના 4 અંકો વડે ભરી શકાય. તે જ રીતે ત્રીજું સ્થાન 3 અને ચોથું સ્થાન 2 રીતે ભરી શકાય. આમ 1, 2, 4, 6 અને 8 અંકોનો પુનરાવર્તનરહિત ઉપયોગ કરી ચાર અંકોની કુલ સંખ્યા $5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$ પ્રકારે બનાવી શકાય.

ઉદાહરણ 2 : KENY શબ્દમાં આવતા બધાં મૂળાક્ષરોનો ઉપયોગ કરી ચાર અક્ષરવાળા કેટલા શબ્દો બને ? (મૂળાક્ષરોનું પુનરાવર્તન કરવાનું નથી તથા બનતા શબ્દનો ભાષાકીય અર્થ નીકળે તે જરૂરી નથી) જેમાં E પ્રથમ હોય તેવા કુલ કેટલા શબ્દો બને ?

ઉકેલ : K, E, N, Yનો ઉપયોગ કરી ચાર અક્ષરવાળા શબ્દો કુલ $4 \times 3 \times 2 \times 1$ મળે. એટલે કુલ 24 શબ્દો બને. હવે ચાર અક્ષરોવાળા શબ્દોમાં પ્રથમ સ્થાને E હોય, એટલે કે | E | | | | માળખું બને. અહીં બાકીના સ્થાન K, N, Y વડે $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ રીતે ભરી શકાય. આમ પ્રથમ સ્થાને E હોય તેવા કુલ 6 શબ્દો મળે.

ઉદાહરણ 3 : અંકોનું પુનરાવર્તન ન કરવાનું હોય, તો 0, 1, 2,..., 9 અંકોનો ઉપયોગ કરી ત્રણ અંકોની કેટલી યુગ્મ સંખ્યાઓ બને ?

		0

ઉકેલ : સંખ્યા યુગ્મ બને તે માટે છેલ્લાં અંક 0, 2, 4, 6 કે 8 હોય તે આવશ્યક છે.

અહીં સૌપ્રથમ એકમના સ્થાને શૂન્ય લેતાં દશકનું સ્થાન 9 તેમજ શતકનું સ્થાન 8 રીતે ભરી શકાય. આમ કુલ $9 \times 8 = 72$ સંખ્યા બને.

		2

જો એકમનો અંક 2 હોય, તો શતકનું સ્થાન 8 રીતે (શૂન્ય સિવાય) તથા દશકનું સ્થાન બાકીના 8 અંકોથી ભરી શકાય. આમ કુલ 64 સંખ્યાઓ બને અને તે જ રીતે 4, 6, 8 પ્રત્યેક દ્વારા 64 સંખ્યા બને. આમ કુલ $72 + 64 + 64 + 64 + 64 = 328$ સંખ્યાઓ મળે. (કુલ સંખ્યાઓ કેટલી મળે ? અયુગ્મ સંખ્યાઓ કેટલી બને ?)

ઉદાહરણ 4 : જેમાં 2 કોઈ પણ સ્થાને ન આવે એવી ત્રણ અંકોની કેટલી સંખ્યાઓ મળે ? 2 ઓછામાં ઓછી એક વખત આવે તેવી કેટલી સંખ્યા મળે ? 2 વધુમાં વધુ એક જ વખત આવે તેવી કેટલી સંખ્યા મળે ? (અંકોનું પુનરાવર્તન કરી શકાય.)

ઉકેલ : ત્રણ અંકની સંખ્યામાં પ્રથમ અંક 1, 3, 4, 5,..., 9 પૈકીનો કોઈ પણ હોઈ શકે છે. બીજો અને ત્રીજો અંક 0, 1, 3, 4, 5,...,9 પૈકીનો કોઈ પણ એક અંક હોઈ શકે.

$\therefore$ માટે જેમાં 2 ન હોય તેવી ત્રણ અંકની કુલ સંખ્યાઓ $8 \times 9 \times 9 = 648$ મળે. (i)

ત્રણ અંકો ધરાવતી કુલ સંખ્યા $9 \times 10 \times 10 = 900$ મળે. (પ્રથમ અંક શૂન્યેતર હોય.)

$\therefore$ 2 ઓછામાં ઓછી એક જ વખત આવે તેવી કુલ સંખ્યાઓ $= 900 - 648 = 252$ (ii)

2 વધુમાં વધુ એક જ વખત આવે તેવી સંખ્યાઓ એટલે કે 2 એક જ વખત આવે અને એક પણ વખત ન આવે એવી સંખ્યાઓ અથવા 900 (કુલ) − (2 બધા સ્થાને હોય + 2 બરાબર બે સ્થાને આવે)

2 બધા જ સ્થાને આવે તેવી સંખ્યા 222 મળે. (એક જ સંખ્યા)

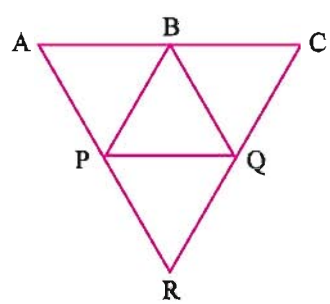
2 એ બે સ્થાને આવે તેવી સંખ્યા [2 | 2 |], [| 2 | 2], [2 | | 2] મળે. (પરંતુ બધા સ્થાને 2 નહિ.)

અહીં ખાલી સ્થાન અનુક્રમે 9, 8, 9 રીતે ભરી શકાય. આમ કુલ $9 + 8 + 9 = 26$ સંખ્યા મળે.

$\therefore$ 2 એ ઓછામાં ઓછા બે સ્થાને આવે તેવી કુલ સંખ્યાઓ 27 થાય.

$\therefore$ 2 વધુમાં વધુ એક જ વખત આવે તેવી કુલ સંખ્યાઓ $900 - 27 = 873$ મળે.

ઉદાહરણ 5 : મૂળભૂત રંગો લાલ (R), વાદળી (B) અને પીળો (Y)નો ઉપયોગ કરી ઉપર્યુક્ત આકૃતિ 7.3 માં દર્શાવેલ નાના ત્રિકોણો (ABP, BQC, BPQ અને PQR) માં કેટલી રીતે રંગ પૂરી શકાય ? (બે પાસપાસેના ત્રિકોણોમાં સમાન રંગ પૂરવાનો નથી.)



આકૃતિ 7.3

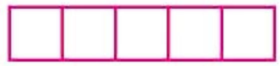
ઉકેલ : ΔBPQની ત્રણે બાજુઓ બીજા ત્રિકોણના પ્રદેશોને સ્પર્શે છે. આ ત્રિકોણમાં ત્રણ રંગોનો ઉપયોગ કરી 3 રીતે રંગ ભરી શકાય.

બાકીના ત્રિકોણોને બીજા બે રંગોથી રંગી શકાય. આમ બાકીના ત્રિકોણમાં રંગ પૂરવાના કુલ પ્રકારની સંખ્યા $2 \times 2 \times 2 = 8$ મળે.

ચારેય ત્રિકોણમાં રંગ પૂરવાના પ્રકારની કુલ સંખ્યા $3 \times 8 = 24$ છે.

ઉદાહરણ 6 : પાંચ અંકોના પાસવર્ડમાં પ્રથમ ત્રણ અંકો અંગ્રેજી મૂળાક્ષરો અને પછીના બે અંકો 0થી 9 પૈકીના કોઈ બે અંકનો ઉપયોગ કરીને કેટલા પાસવર્ડ બનાવી શકાય ? (પુનરાવર્તનની છૂટ છે.)

ઉકેલ : પ્રથમ ત્રણ અંકો $26 \times 26 \times 26$ પ્રકારે ભરી શકાય.



તે જ રીતે બાકીના અંકો 10×10 પ્રકારે ભરી શકાય.

પાસવર્ડની કુલ સંખ્યા $26 \times 26 \times 26 \times 10 \times 10 = 1757600$ પ્રકાર

સ્વાધ્યાય 7.1

1. એક હારમાં ઊભા કરેલા શિરોલંબ ધ્વજસ્તંભ પર ભિન્ન રંગના પાંચ ધ્વજ દ્વારા કેટલા સિગ્નલ (સંકેત) બને ? દરેક સિગ્નલમાં ભિન્ન રંગના બે અથવા બેથી વધુ ધ્વજ હોઈ શકે.
2. ચાર અંકની અયુગ્મ સંખ્યાઓ કેટલી હોય ? (અંકોના પુનરાવર્તન સિવાય)
3. TULSI શબ્દના બધા જ અક્ષરોનો ઉપયોગ કરી કેટલા શબ્દો બનાવી શકાય ? T થી શરૂ થતા કેટલા શબ્દો બને ? છેલ્લે I હોય તેવા કેટલા શબ્દો બને ? (કોઈ પણ શબ્દમાં અક્ષરનું પુનરાવર્તન કરવાનું નથી.)
4. 5 ની ગુણિત હોય તેવી ત્રણ અંકની કેટલી સંખ્યાઓ બને ? (અંકના પુનરાવર્તન સિવાય)
5. GJ-X-AB-*abcd* નંબર પ્લેટ ધરાવતી કેટલી કાર હોઈ શકે ? અહીં X એ 1થી 9 પૈકીનો કોઈ એક અંક છે. A = H અને B ના સ્થાને અંગ્રેજીનો કોઈ પણ મૂળાક્ષર હોઈ શકે. *abcd* એ ચાર અંકની સંખ્યા છે. (*a* શૂન્ય હોઈ શકે.)
6. (i) છેલ્લો અંક 0 (શૂન્ય) હોય. (ii) છેલ્લો અંક 5 હોય. (iii) સંખ્યા 4 વડે વિભાજ્ય હોય. (iv) સંખ્યા 2 વડે વિભાજ્ય હોય પણ 4 વડે વિભાજ્ય ન હોય તેવી 99થી 1000 વચ્ચેની કેટલી સંખ્યાઓ હોય ?
7. દેવ પોતાના ઇ-મેલમાં પાંચ અક્ષરોનો પાસવર્ડ નીચેની શરતોને આધીન બનાવવા માગે છે :
   (1) પ્રથમ ત્રણ અંગ્રેજી મૂળાક્ષરમાં તેના નામમાં આવેલ હોય તેવો કોઈ પણ અંગ્રેજી મૂળાક્ષર નહિ લેવાનો. (DEV નામ છે.)
   (2) છેલ્લા બે અંક 0થી 9 પૈકીના કોઈ પણ અંક કે જેથી બનતી સંખ્યા તેની ઉંમર ન દર્શાવે. આવા કુલ કેટલા પાસવર્ડ બને ? તેની ઉંમર 12 વર્ષની છે.

*

7.2 ક્રમચયો

આપણે વસ્તુઓને ચોક્કસ ક્રમમાં કેટલી રીતે ગોઠવી શકાય એવાં ઉદાહરણોનો અભ્યાસ કર્યો. 1, 2, 3, 4 અંકોનો ઉપયોગ કરી ત્રણ ભિન્ન અંકની સંખ્યાઓ બનાવવાની હોય તો 123, 124, 234,... વગેરે રીતે બનાવીએ છીએ. અહીં ક્રમચયો માટે ચાર અંકોમાંથી 3 અંકોનો ઉપયોગ પુનરાવર્તન સિવાય કરવાનો હોય છે. તેના કુલ પ્રકાર $4 \times 3 \times 2 = 24$ થાય. (ગણતરીનો મૂળભૂત સિદ્ધાંત)

વ્યાખ્યા : આપેલ ભિન્ન વસ્તુઓમાંથી અમુક અથવા બધી જ વસ્તુઓની ચોક્કસ ગોઠવણીને ક્રમચય (Permutation) કહે છે. n વસ્તુઓમાંથી એકી સાથે r વસ્તુઓ પસંદ કરી તેમને હારમાં ગોઠવવાથી મળતા કુલ સુરેખ ક્રમચયોની સંખ્યાને $_nP_r$ વડે દર્શાવાય છે, જ્યાં $1 \le r \le n$, r અને $n \in N$. પુનરાવર્તન સિવાયની સુરેખ ગોઠવણીને સુરેખ ક્રમચય કહે છે.

પ્રમેય 1 : $_nP_r = n(n-1)(n-2)....(n-r+1)$

n ભિન્ન વસ્તુઓની નીચે દર્શાવેલ r ખાલી જગ્યાઓમાં પુનરાવર્તન સિવાયની ગોઠવણી કરવામાં આવે છે :

r સ્થાન

પ્રથમ સ્થાનમાં n વસ્તુઓમાંથી કોઈ એક વસ્તુ મૂકી શકાય. તે n પ્રકારે શક્ય છે. પુનરાવર્તન કરવાનું નથી માટે બાકીની $(n-1)$ વસ્તુઓમાંથી બીજું સ્થાન $(n-1)$ પ્રકારે ભરી શકાય. તે જ રીતે બાકીની $(n-2)$ વસ્તુઓમાંથી ત્રીજું સ્થાન $(n-2)$ પ્રકારે ભરી શકાય વગેરે. છેલ્લું r મું સ્થાન $n-(r-1)$ પ્રકારે ભરી શકાય. (અગાઉ $(r-1)$ સ્થાન ભરાઈ ગયા છે.)

$\therefore$ ગણતરીના મૂળભૂત સિદ્ધાંતના આધારે

$$_nP_r = n(n-1)(n-2)....(n-r+1)$$

n થી શરૂ કરી પ્રત્યેક વખતે 1 અંક ઘટાડી ક્રમશઃ r પૂર્ણાંકો લખો અને તે તમામનો ગુણાકાર કરો.

ઉદાહરણ તરીકે $_7P_3 = 7 \times 6 \times 5 = 210$

$$\begin{aligned} _nP_n &= n(n-1)(n-2)...(n-n+1) \\ &= n(n-1)(n-2)...1 \end{aligned}$$

પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓના ગુણાકાર $n(n-1)(n-2)...1$ ને **ક્રમગુણિત (Factorial)** n કહે છે. તેને સંકેતમાં $n!$ (વાંચો : n factorial) અથવા $\underline{|n}$ (વાંચો : factorial n) વડે દર્શાવાય છે.

તેથી, $_nP_n = n!$

$1! = 1$, $2! = 2 \cdot 1 = 2$, $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$, $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ વગેરે.

$$\begin{aligned} \text{હવે, } n! &= n(n-1)(n-2)...1 \\ &= n(n-1)! \\ &= n(n-1)(n-2)! \\ \therefore\ n! &= n(n-1)...(n-r+1)(n-r)! \end{aligned}$$

$$\therefore n(n-1)...(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!} \qquad 1 \le r < n$$

$_nP_r = n(n-1)...(n-r+1)$નો ઉપયોગ કરતાં

$$\therefore\ _nP_r = \frac{n!}{(n-r)!} \qquad 1 \le r < n$$

પરંતુ જો $r = n$ તો ${}_nP_n = n! = |\underline{n}$.

આપણે 0! વ્યાખ્યાયિત કરીએ.

વ્યાખ્યા : $0! = 1$

હવે, ${}_nP_n = n! = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{(n-n)!}$

$\therefore \quad {}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!} \qquad 1 \le r \le n$

પ્રમેય 2 : n ભિન્ન વસ્તુઓની r સ્થાનમાં પુનરાવર્તન સહિત ગોઠવણીના પ્રકારોની સંખ્યા n^r છે.

સાબિતી : r સ્થાનમાંથી પ્રત્યેક સ્થાન n પ્રકારે ભરી શકાય.

1	2	3				r
n	n	n	n	n	. . . .	n

માટે ક્રમચયના પ્રકારની કુલ સંખ્યા

$= n \times n \times n \ldots\ldots r$ વખત $= n^r$.

ઉદાહરણ 7 : જો $\frac{1}{8!} + \frac{1}{9!} = \frac{x}{10!}$, તો x શોધો.

ઉકેલ : $\frac{1}{8!} + \frac{1}{9!} = \frac{x}{10!}$

$\therefore \quad \frac{1}{8!}\left(1+\frac{1}{9}\right) = \frac{x}{10!} \qquad (9! = 9 \cdot 8!)$

$\therefore \quad \frac{1}{8!}\left(\frac{10}{9}\right) = \frac{x}{10!}$

$\therefore \quad x = \frac{10(10!)}{9 \cdot 8!}$

$= \frac{10 \cdot 10 \cdot 9!}{9!} \qquad (10! = 10 \cdot 9!,\ 9! = 9 \cdot 8!)$

$\therefore \quad x = 100$

ઉદાહરણ 8 : જો $\frac{{}_{n-1}P_3}{{}_nP_4} = \frac{1}{9}$ તો n શોધો.

ઉકેલ : $\frac{{}_{n-1}P_3}{{}_nP_4} = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{n(n-1)(n-2)(n-3)} = \frac{1}{9}$

$\therefore \quad \frac{1}{n} = \frac{1}{9}$. આથી $n = 9$

ઉદાહરણ 9 : જો $5\ {}_4P_r = 6\ {}_5P_{r-1}$ તો r શોધો.

ઉકેલ : $5\ {}_4P_r = 6\ {}_5P_{r-1}$

$\therefore \quad \frac{5(4!)}{(4-r)!} = \frac{6(5!)}{(5-r+1)!} \qquad \left({}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}\right)$

$\therefore \quad \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(4-r)!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(6-r)!}$

$\therefore \quad \frac{(6-r)!}{(4-r)!} = 6$

$\therefore \quad \frac{(6-r)(5-r)(4-r)!}{(4-r)!} = 6$ $\qquad$ $[n! = n(n-1)(n-2)!]$

$\therefore \quad (6-r)(5-r) = 6$

$\therefore \quad r^2 - 11r + 30 = 6$

$\therefore \quad r^2 - 11r + 24 = 0$

$\therefore \quad r = 8$ અથવા 3

પરંતુ $r \neq 8$ કારણ કે $1 \leq r \leq 4$ અને $1 \leq r - 1 \leq 5$

$\therefore \quad r = 3$

ઉદાહરણ 10 : જો ${}_5P_r = {}_6P_{r-1}$ તો r શોધો.

ઉકેલ : ${}_5P_r = {}_6P_{r-1}$.

$\therefore \quad \frac{5!}{(5-r)!} = \frac{6!}{(7-r)!}$ $\qquad$ $(6 - r + 1 \ = 7 - r)$

$\therefore \quad \frac{(7-r)!}{(5-r)!} = \frac{6(5!)}{5!} = 6$

$\therefore \quad (7-r)(6-r)\frac{(5-r)!}{(5-r)!} = 6$

$\therefore \quad r^2 - 13r + 42 = 6$

$\therefore \quad r^2 - 13r + 36 = 0$

$\therefore \quad r = 9$ અથવા 4

પરંતુ $1 \leq r \leq 5$ અને $1 \leq r - 1 \leq 6$

$\therefore \quad r = 4$

ઉદાહરણ 11 : 0, 1, 2,..., 9 અંકોનો ઉપયોગ કરી ત્રણ અંકોની (એટલે કે 100 અને 999 વચ્ચેની) કેટલી સંખ્યાઓ બને ? (સંખ્યામાં અંકોના પુનરાવર્તન સિવાય અંકોની પસંદગી કરવાની છે.)

ઉકેલ : 10 અંકોની ત્રણ સ્થાનમાં ગોઠવણીના કુલ પ્રકાર ${}_{10}P_3 = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ છે.

0		

પરંતુ 0 પ્રથમ સ્થાન પર લઈ ન શકાય.

તેથી કુલ સંખ્યામાંથી જેમાં 0 પ્રથમ સ્થાને હોય તેવી ${}_9P_2 = 9 \cdot 8 = 72$ સંખ્યાઓ બાદ કરવી પડે.

$\therefore \quad 720 - 72 = 648$ ત્રણ અંકોની કુલ સંખ્યા મળે.

ઉદાહરણ 12 : એક વ્યવસ્થાપક સમિતિમાં 10 વ્યક્તિઓમાંથી પ્રમુખ, ઉપપ્રમુખ તથા મંત્રીની ચૂંટણી કરવાની છે કે જેમાં કોઈ પણ વ્યક્તિ એકથી વધુ હોદ્દા પર ન આવે તો ચૂંટણી કેટલા પ્રકારે થઈ શકે ?

ઉકેલ : આ પ્રશ્નમાં 10 વ્યક્તિઓને 3 સ્થાનમાં ગોઠવવાની છે. (પુનરાવર્તન સિવાય)

${}_{10}P_3 = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ પ્રકારે આ ચૂંટણી શક્ય છે.

અહીં દરેક જગ્યા અલગ છે. તેથી તે સુરેખ ક્રમચયનો પ્રકાર છે.

ઉદાહરણ 13 : TUESDAY શબ્દના બધા અક્ષરોની ગોઠવણીથી કેટલા નવા શબ્દો શક્ય છે ? કેટલા શબ્દો Tથી શરૂ થાય અને Yમાં અંત પામે ?

ઉકેલ : 7 અક્ષરોની ગોઠવણીના પ્રકાર ${}_7P_7 = 7!$.

હવે $7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$

અહીં કુલ 5040 પ્રકારે ગોઠવણી શક્ય છે. તેમાંથી એક શબ્દ TUESDAY છે. આથી ગોઠવણીથી મળતા નવા શબ્દોની કુલ સંખ્યા 5039 બને.

જો T અને Yને તેમના સ્થાને ગોઠવવામાં આવે તો બાકીના પાંચ સ્થાનની ગોઠવણી $5! = 120$ પ્રકારે થાય. આમ 120 શબ્દો T થી શરૂ થાય અને Y માં અંત પામે.

ઉદાહરણ 14 : TABLE શબ્દના બધા અક્ષરોને શબ્દકોશ પ્રમાણે ગોઠવતા TABLE શબ્દ કયા સ્થાને આવે ? કયો શબ્દ અંતિમ હશે ? (બનતા શબ્દનો અર્થ જરૂરી નથી.)

ઉકેલ : A અક્ષરથી શરૂ થતા શબ્દોની સંખ્યા $= (5 - 1)! = 4! = 24$. તે જ રીતે B, E, L દરેકથી શરૂ થતા શબ્દોની સંખ્યા 24 હશે. તે રીતે આગળ વધતાં તે TABLE શબ્દ તરફ આગળ વધી શકાય.

હવે Tથી શરૂ થતા શબ્દો મળશે. A, B, L અને Eને શબ્દકોશ પ્રમાણે ગોઠવતાં TABEL શબ્દ TABLE પહેલાં આવે. આમ TABLE શબ્દના અક્ષરોની શબ્દકોશ પ્રમાણે ગોઠવણી કરતાં તે $(24 + 24 + 24 + 24 + 1 + 1)$માં એટલે કે 98મા સ્થાને મળે. (5 અક્ષરોથી કુલ શબ્દો $5! = 120$ મળે.)

A, B, E, Lથી શરૂ થતા કુલ શબ્દો 96 મળે છે. ત્યાર બાદ Tથી શરૂ થતા શબ્દોમાં TA, TB, TEથી બનતા પ્રત્યેક શબ્દો 6 આવે. આમ કુલ શબ્દો 114 થાય. ત્યાર બાદ TLABE, TLAEB, TLBAE, TLBEA, TLEAB અને TLEBA. આમ TLEBA છેલ્લા સ્થાને આવે.

[હકીકતમાં બધા મૂળાક્ષરોના ઊલટા ક્રમમાં લખતાં TLEBA છેલ્લો શબ્દ મળે.]

ઉદાહરણ 15 : દેવ ચેસ, 100મી દોડ, એથલેટિક્સ અને બરછીફેંકમાં ભાગ લે છે. દરેક રમતમાં ત્રણ પદકો (ગોલ્ડ, સિલ્વર અને બ્રોન્ઝ) છે. તે કેટલા પ્રકારે પદકો મેળવી શકે ?

ઉકેલ : અહીં દરેક રમતમાં ત્રણ પદકો આવેલા છે. અહીં દરેક સ્થાન W_1, W_2, W_3, W_4 ત્રણ રીતે ભરી શકાય. આમ પુનરાવર્તન શક્ય હોવાથી દેવ કુલ 81 પ્રકારે પદકો મેળવી શકશે.

W_1	W_2	W_3	W_4

ઉદાહરણ 16 : 5, 2, 3, 7, 8 અંકોનો ઉપયોગ કરી ચાર અંકોની કુલ કેટલી સંખ્યા મળે ?

ઉકેલ : અહીં ચાર સ્થાન છે અને દરેક સ્થાન 5 રીતે 5, 2, 3, 7 અથવા 8 વડે ભરી શકાય.

આમ, કુલ સંખ્યાઓ $5^4 = 625$.

(જુઓ અહીં $n = 5$ વસ્તુઓને $r = 4$ સ્થાનમાં $n^r = 5^4$ પ્રકારે ગોઠવી શકાય.)

> ☛ **નોંધ** જો આપણે 6 અંકની સંખ્યા મેળવવા માગતા હોઈએ તો $5^6 = 15625$ સંખ્યાઓ મળે. અહીં $r > n$ શક્ય છે. ${}_nP_r$માં $r \le n$ છે તે નોંધીએ.

ઉદાહરણ 17 : DAUGHTER શબ્દના બધા જ અક્ષરોને પુનરાવર્તન સિવાય ગોઠવતાં કુલ કેટલા શબ્દો મળે ? જેમાં સ્વર અને વ્યંજનો તેમના સ્થાને જ આવે એવા કેટલા શબ્દો મળે ?

ઉકેલ : 8 ભિન્ન અક્ષરોથી બનેલ શબ્દ આપેલ છે.

તેમના કુલ ક્રમચયો $8! = 40320$ થાય. હવે સ્વરો A, U, E અને વ્યંજનો D, G, H, T, R તેમના સ્થાને જ રહે છે. પરંતુ તેના અંદર-અંદર સ્થાન બદલાઈ શકે છે. તેમની આંતરિક ફેરબદલીથી મળતા ક્રમચયો $3! \times 5! = 6 \times 120 = 720$ છે.

ઉદાહરણ 18 : જો $n(A) = m$ અને $n(B) = n$ $(m, n \in N)$ તો Aથી B પરનાં કેટલાં વિધેયો શક્ય છે ?

ઉકેલ : અહીં ધારો કે, $A = \{x_1, x_2, x_3, ... x_m\}$ અને $B = \{y_1, y_2, y_3, ... y_n\}$

$f = \{(x_i, y_j)\}$, જ્યાં $x_i \in A$, $y_j \in B$. અહીં કોઈ ક્રમયુક્ત જોડમાં x_iનું પુનરાવર્તન થતું નથી અને કોઈ x_i બાકી રહેતો નથી. તેથી પ્રત્યેક x_i એ કોઈક y_j સાથે કુલ n પ્રકારે સંગત થાય.

$\therefore$ ગણ f મેળવવા માટે કુલ $n \times n \times n....m$ વિકલ્પ મળે.

$\therefore$ $f : A \to B$ પ્રકારનાં n^m વિધેયો શક્ય છે.

☛ નોંધ $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b\}$ લઈએ.

$f_1 = \{(1, a), (2, a), (3, a)\}$ $f_2 = \{(1, b), (2, b), (3, b)\}$

$f_3 = \{(1, a), (2, a), (3, b)\}$ $f_4 = \{(1, b), (2, b), (3, a)\}$

$f_5 = \{(1, a), (2, b), (3, a)\}$ $f_6 = \{(1, b), (2, a), (3, b)\}$

$f_7 = \{(1, b), (2, a), (3, a)\}$ $f_8 = \{(1, a), (2, b), (3, b)\}$

$\therefore$ આમ $2^3 = 8$ વિધેય $f : A \to B$ મળે.

સ્વાધ્યાય 7.2

1. કિંમત શોધો : (1) ${}_8P_4$ (2) ${}_9P_3$ (3) ${}_6P_6$ 2. કિંમત શોધો : (1) 6! (2) $\frac{8!}{2!}$ (3) $\frac{9!}{7!}$

3. સાબિત કરો કે ${}_nP_r = {}_{n-1}P_r + r({}_{n-1}P_{r-1})$

4. r શોધો : (1) $\frac{{}_{15}P_r}{{}_{16}P_{r-1}} = \frac{3}{4}$ (2) ${}_7P_r = 7\ {}_6P_r$

5. n શોધો : $7\,{}_nP_3 = 20\ {}_{n+1}P_2$ 6. જો $\frac{{}_{56}P_{r+6}}{{}_{54}P_{r+3}} = 30800$, તો r શોધો.

7. સાબિત કરો કે ${}_nP_r = n\ {}_{n-1}P_{r-1}$. 8. જો $(n + 1)! = 12(n - 1)!$, તો n શોધો.

9. જો $\frac{n!}{2!(n-2)!} : \frac{n!}{4!(n-4)!} = 2$, તો n શોધો.

10. 2468ના અંકોનો ઉપયોગ કરી ત્રણ અંકની કેટલી યુગ્મ સંખ્યાઓ બને ? (પુનરાવર્તન સહિત અને પુનરાવર્તન સિવાય)

11. n પ્રશ્નો છે. પ્રત્યેકનો ઉત્તર સત્ય છે કે મિથ્યા તે રીતે આપવાનો છે. તો n પ્રશ્નોના ઉકેલ કેટલી રીતે આપી શકાય ?

12. બહુવિકલ્પ પ્રશ્નોમાં દરેક પ્રશ્નના જવાબ માટે ચાર વિકલ્પો આપેલા છે. 10 પ્રશ્નોના જવાબ કેટલી રીતે આપી શકાય ?

13. એક સમતોલ સિક્કાને 4 વખત ઉછાળવામાં આવે છે. તેનું પરિણામ છાપ (H) કે કાંટો (T) લખવામાં આવે છે. તો પરિણામો કેટલી રીતે શક્ય છે ?

14. એક સૂટકેસમાં આવેલા તાળામાં ચાર રિંગ આવેલ છે. સૂટકેસ ખોલવા માટે ચોક્કસ કૉડ નાખવો પડે છે. પહેલી બે રિંગમાં અંગ્રેજી મૂળાક્ષર આવેલા છે અને બાકીની બે રિંગમાં 0થી 9 સુધીના અંકો આવેલા છે. ચાર અંકના કેટલા કૉડ (1) પુનરાવર્તન સહિત (2) પુનરાવર્તન વગર. શક્ય છે ?

15. 6 પત્રોને 3 કુરિયર્સ દ્વારા કેટલી રીતે મોકલી શકાય ?

16. m પુરુષ અને n સ્ત્રી $(m > n)$ એક હારમાં બેઠાં છે. કોઈ પણ બે સ્ત્રી પાસપાસેના સ્થાન પર નથી. આ ગોઠવણી કેટલા પ્રકારે શક્ય છે ?

17. n બાળકોની એક હારમાં કેટલી ગોઠવણીમાં (i) સીતા અને ગીતા હંમેશાં પાસપાસે હોય ? (ii) સીતા અને ગીતા એક હારમાં પાસપાસે ન હોય ?

18. પુનરાવર્તન વગર 1, 2, 3, 4, 5, 6 અંકોનો ઉપયોગ કરી 4 અંકોની 4 વડે વિભાજ્ય કેટલી સંખ્યા મળે ?

19. વ્યાસપીઠ પર બેઠેલા છ મહેમાનને પુષ્પગુચ્છ આપવા માટે છ વિદ્યાર્થિનીઓને શ્રેણીમાં ગોઠવવાની છે. મહામંત્રી રાની સૌપ્રથમ અતિથિ વિશેષને પુષ્પગુચ્છ અર્પણ કરશે. રિયા પાંચમા સ્થાને જશે તે નક્કી છે. કોઈ પણ ક્રમમાં ઐશ્વર્યા અને ઈશા ક્રમિક હશે. આ સિવાયની વિદ્યાર્થિનીઓ સ્નેહા અને સ્મૃતિ બાકીનાં બે સ્થાનમાં કોઈ પણ ક્રમમાં આવશે. આ ગોઠવણી કેટલા પ્રકારે શક્ય છે ?

20. ચાર છોકરા અને ચાર છોકરીઓને હારમાં કેટલી રીતે ગોઠવી શકાય કે જેથી (i) કોઈ બે છોકરીઓ સાથે ન હોય. (ii) બધા જ છોકરા સાથે હોય અને બધી છોકરીઓ સાથે હોય ?

21. છ છોકરા અને છ છોકરીઓ હારમાં વારાફરતે ઊભા છે. તેમાં છોકરી હારમાં પ્રથમ સ્થાને છે. આ ગોઠવણી કેટલી રીતે થઈ શકે ?

22. MONDAY શબ્દના મૂળાક્ષરોની પુનરાવર્તન સિવાયની ગોઠવણી નીચેના વિકલ્પોમાં કેટલી રીતે શક્ય છે ? (i) કોઈ પણ બે મૂળાક્ષર એક સમયે લેતાં. (ii) કોઈ પણ ચાર મૂળાક્ષરો એક સમયે લેતાં ? (પુનરાવર્તન સિવાય)

23. ZERO શબ્દના બધા અક્ષરોની પુનરાવર્તન સિવાય ગોઠવણી કરતાં કેટલા શબ્દો મળે ? શબ્દકોશ પ્રમાણે ગોઠવણી કરતાં ZERO શબ્દ કયા સ્થાનમાં આવે ?

24. 0, 1, 2, 3, 4, 5 અંકોની પુનરાવર્તન સિવાય ગોઠવણી કરતાં 5 વડે વિભાજ્ય એવી 4 અંકોની કેટલી સંખ્યાઓ મળે ?

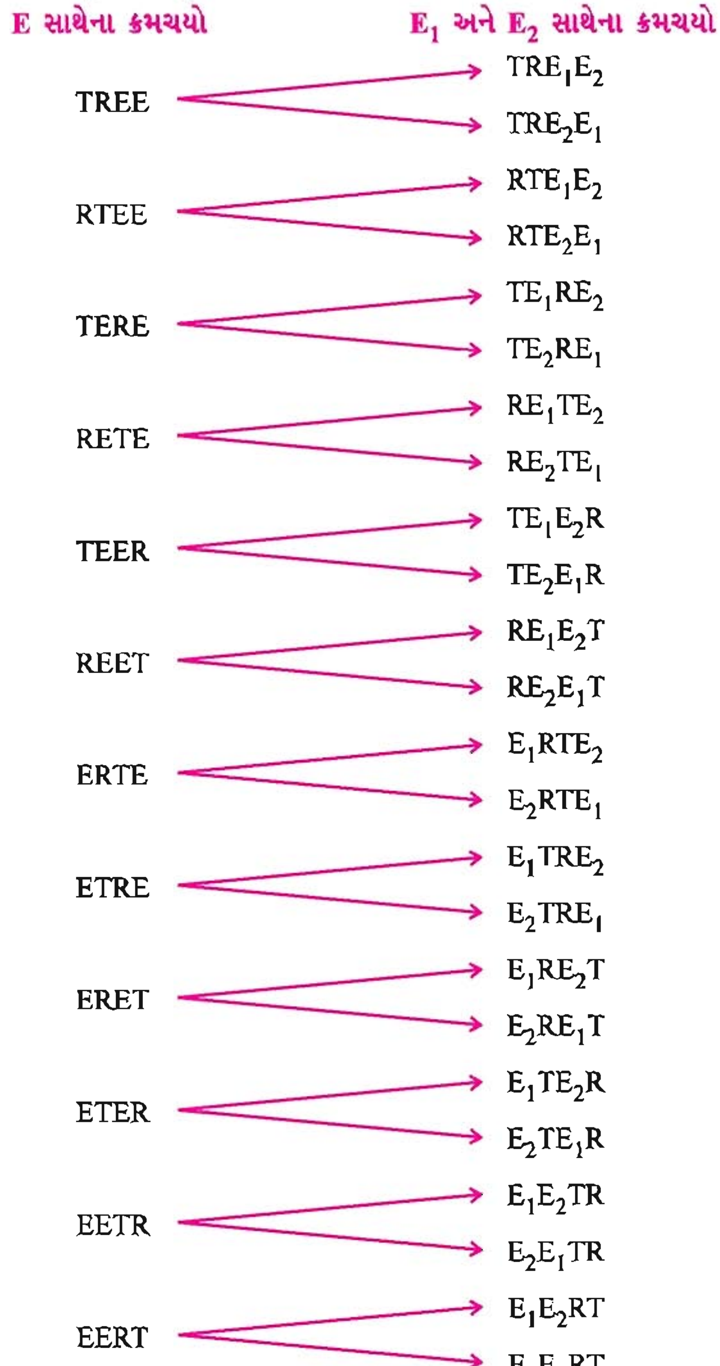
25. 2745 સંખ્યાના અંકોની પુનરાવર્તન સિવાય ગોઠવણી કરતાં 4 અંકોની કેટલી સખ્યાઓ મળે ? તે પૈકીની 3 વડે વિભાજ્ય કેટલી સંખ્યાઓ મળે ? 9 વડે વિભાજ્ય કેટલી સંખ્યાઓ હોય ?

26. VOWEL શબ્દના અક્ષરોનો ઉપયોગ કરી ચાર મૂળાક્ષરોવાળા કેટલા શબ્દો બને કે જેમાં સ્વરોના સ્થાને સ્વરો જ આવે.

*

સમસ્વરૂપ વસ્તુના ક્રમચય

ચાલો, આપણે TREE શબ્દના મૂળાક્ષરોના ક્રમચય જોઈએ. અહીં E બે વખત આવે છે. સરળતા ખાતર હંગામી રીતે તેને E_1 અને E_2 વડે દર્શાવીએ.

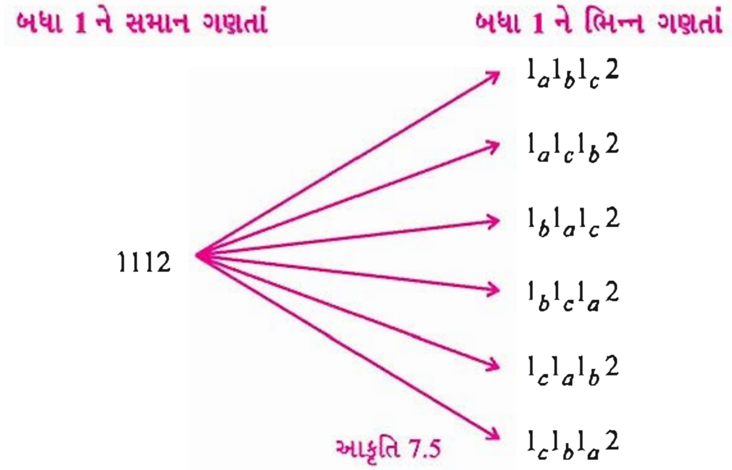


આકૃતિ 7.4

તેથી અહીં જો E_1, E_2 ને ભિન્ન ગણીએ તો કુલ ક્રમચયો ${}_4P_4 = 4! = 24$ મળે. પરંતુ E_1 અને E_2 સમાન હોવાથી આપણને $12 = \frac{24}{2} = \frac{24}{2!}$ ક્રમચયો મળે છે.

ઊંડાણપૂર્વક અભ્યાસ માટે આપણે વધુ એક ઉદાહરણ જોઈએ. 1112 ના અંકોનું પુનરાવર્તન કર્યા વગર ચાર અંકોની કેટલી સંખ્યા મળે ?

અહીં 1 અંક ત્રણ વખત આવે છે. ત્રણ વખત 1 આવે છે તેને 1_a, 1_b, 1_c દર્શાવીએ.



આકૃતિ 7.5

તે જ રીતે 1121, 1211, 2111 દરેક માટે $1_a 1_b 1_c$ ફેરબદલીથી છ સંખ્યાઓ મળે.

અહીં ત્રણ અંક 1ને ભિન્ન ગણીએ તો કુલ ${}_4P_4 = 24$ ક્રમચયો મળે. બધા 1 સમાન ગણીએ તો કુલ ચાર ક્રમચયો 1112, 1121, 1211, 2111 મળે. 1_a, 1_b, 1_cના ક્રમચયો લઈએ દરેક સંખ્યા માટે $3! = 6$ સંખ્યાઓ મળે. અહીં આપણને કુલ $24 = 4 \times 6$ ક્રમચયો મળે.

ખરેખર અંકોના ક્રમચયથી મળતી સંખ્યાઓ $4 = \frac{24}{6} = \frac{{}_4P_4}{3!}$. તેથી આ પરિસ્થિતિ માટે નીચેનો પ્રમેય મળે.

પ્રમેય 3 : આપેલી n વસ્તુઓમાંથી p_1 સમસ્વરૂપ વસ્તુઓ છે. તેમનાથી ભિન્ન p_2 સમસ્વરૂપ વસ્તુઓ છે. તે જ રીતે આગળની વસ્તુઓથી ભિન્ન p_k સમસ્વરૂપ વસ્તુઓ છે તથા $n = p_1 + p_2 + ... + p_k$ તો n વસ્તુઓના ભિન્ન ક્રમચયોની સંખ્યા,

$$\frac{n!}{p_1!\, p_2!\, p_3! ... p_k!}$$

સાબિતી : ધારો કે આપણી પાસે n ભિન્ન વસ્તુઓ છે. તે પૈકીની સમસ્વરૂપ વસ્તુઓને $a_1, a_2, ..., a_{p_1}$; $b_1, b_2, ..., b_{p_2}$; ...$m_1, m_2, ..., m_{p_k}$ દ્વારા દર્શાવીએ તો, કુલ ક્રમચયોની સંખ્યા $n!$ છે.

પરંતુ આમાંથી પ્રત્યેક ક્રમચય $p_1!, p_2!, ..., p_k!$ એમ સમસ્વરૂપ વસ્તુઓના સમાન ક્રમચયોને ભિન્ન માનીને મેળવેલ છે. તેથી હવે જો આપેલી n વસ્તુઓના ભિન્ન ક્રમચયોની સંખ્યા m હોય, તો

$\therefore$ (ભિન્ન ક્રમચયોની સંખ્યા) $\times p_1! \times p_2! \times ... \times p_k! = n!$

$\therefore \quad m = \frac{n!}{p_1!\, p_2! ... p_k!}$

તેથી ઉપર્યુક્ત ઉદાહરણોનો જવાબ $\frac{4!}{2!} = 12$ અને $\frac{4!}{3!} = 4$ મળે.

ઉદાહરણ 19 : PERMUTATIONS શબ્દના બધા મૂળાક્ષરોનો ઉપયોગ કરી કેટલા ભિન્ન ક્રમચય મળે ? તેમાંથી, (i) કેટલા શબ્દો Pથી શરૂ થાય અને Sમાં અંત પામે ?

(ii) કેટલામાં બધા સ્વરો સાથે હોય ?

ઉકેલ : અહીં T બે વખત આવે એવા કુલ 12 અક્ષરો છે.

∴ મળતા ભિન્ન ક્રમચયોની સંખ્યા $\frac{12!}{2!}$.

(i) જે શબ્દો P થી શરૂ થાય અને જેના અંતમાં S આવે તેવા 10 મૂળાક્ષરોની ગોઠવણી કરતાં તેમાં T બે વખત આવતો હોવાથી,

∴ કુલ શબ્દોની સંખ્યા $\frac{10!}{2!} = 1814400$

(ii) પાંચ સ્વરો A, E, I, O, Uને સાથે લઈએ તો કુલ 8 અક્ષરોથી બનતા શબ્દો (7 વ્યંજન અને 1 સ્વર સમૂહ) 8 ! મળે. તેમાં T બે વખત આવે અને 5 સ્વરો 5! રીતે ગોઠવાય.

∴ આમ મળતા કુલ શબ્દોની સંખ્યા $\frac{8!}{2!} \times 5! = 2419200$

ઉદાહરણ 20 : MATHEMATICS શબ્દના બધા અક્ષરોનો ઉપયોગ કરી કેટલા ભિન્ન ક્રમચય મળે ? બધા સ્વરો સાથે હોય તેવા કેટલા શબ્દો મળે ?

ઉકેલ : 11 અક્ષરોથી બનેલા આ શબ્દમાં 2 વખત M, 2 વખત T અને 2 વખત A આવે છે.

∴ ક્રમચયોની કુલ સંખ્યા $\frac{11!}{2!\,2!\,2!} = 4989600$

A, E, I એ સ્વરો છે. (A બે વખત આવે છે)

બાકીના M, T, C, S, H અક્ષરમાં M અને T બે વખત આવે છે.

સાત વ્યંજનો અને સ્વરો AEAIનું એક જૂથ – તેને એક અક્ષર લેતાં, કુલ 8 અક્ષરો મળે.

જૂથ સહિતના ક્રમચયો = $\frac{8!}{2!\,2!}$ અને A, E, A, Iના કુલ ક્રમચયો $\frac{4!}{2!}$ પ્રકારે થાય.

∴ ક્રમચયોની કુલ સંખ્યા $= \frac{8!}{2!\,2!} \times \frac{4!}{2!}$

$= 10080 \times 12 = 120960$

ઉદાહરણ 21 : 10,00,000 કરતાં મોટી 7 અંકની કેટલી સંખ્યા 1, 2, 0, 2, 4, 2, 4 બધાંનો ઉપયોગ કરી બનાવી શકાય ?

ઉકેલ : કુલ સાત અંકોનો ઉપયોગ કરવાનો છે, જેમાં 2 એ ત્રણ વખત અને 4 બે વખત આવે છે. પહેલો અંક 1, 2 અથવા 4 હોય તેવી સંખ્યાઓ મેળવીશું.

∴ 2થી શરૂ થતી કુલ સંખ્યાઓ (ત્રણ પૈકીનો એક 2 નિયત છે.)

$\frac{6!}{2!\,2!} = \frac{720}{4} = 180$

4થી શરૂ થતી કુલ સંખ્યાઓ $\frac{6!}{3!} = \frac{720}{6} = 120$

1થી શરૂ થતી કુલ સંખ્યાઓ $\frac{6!}{3!\,2!} = 60$

10,00,000 થી મોટી કુલ 360 સંખ્યાઓ 1, 2, 0, 2, 4, 2, 4ના ઉપયોગથી મળે.

(7 અંકોની કુલ સંખ્યાઓ = $\frac{7!}{3!\,2!} = \frac{5040}{12} = 420$

0 થી શરૂ થતી સંખ્યાઓ = $\frac{6!}{3!\,2!} = \frac{720}{12} = 60$ છે.

$\therefore$ માગ્યા પ્રમાણેની કુલ સંખ્યાઓ = 420 − 60 = 360 થાય.)

ઉદાહરણ 22 : ALLAHABAD શબ્દના બધા અક્ષરોનો ઉપયોગ કરી કેટલા શબ્દો બને ?

(i) યુગ્મ સ્થાને સ્વર હોય તેવા કેટલા શબ્દો બને ?

(ii) બંને L સાથે ન હોય તેવા કેટલા શબ્દો બને ?

ઉકેલ : અહીં કુલ 9 અક્ષરો છે. તેમાં 4 વખત A અને 2 વખત L આવે છે.

$\therefore$ કુલ ક્રમચયો $\frac{9!}{4!\,2!} = 7560$ મળે.

(i) ચાર સ્વરોમાં બધા જ A છે. તે યુગ્મ સ્થાને એટલે કે 2, 4, 6, 8 માં સ્થાને તેમની ગોઠવણી $\left(\frac{4!}{4!}=1\right)$ એક જ રીતે થાય છે. બાકીના 5 અક્ષરો જેમાં 2 વખત L આવે તેના ક્રમચયો $\frac{5!}{2!} = 60$. આથી માગ્યા પ્રમાણે 60 ગોઠવણી શક્ય છે.

(ii) ધારો કે Lને જૂથમાં લઈ 1 અક્ષર તરીકે લેતાં કુલ 8 અક્ષરોની ગોઠવણી કરવી પડે અને તેમાં A 4 વખત આવે.

$\therefore$ L સાથે હોય તેવા કુલ શબ્દો = $\frac{8!}{4!} = 1680$

$\therefore$ L સાથે ન હોય તેવા કુલ શબ્દો = ગોઠવણીની કુલ સંખ્યા − L સાથે હોય તેવી ગોઠવણીની કુલ સંખ્યા

= 7560 − 1680 = 5880

ઉદાહરણ 23 : AGAIN શબ્દના બધા જ અક્ષરોની ગોઠવણીથી 50મા સ્થાને કયો શબ્દ આવે ?

ઉકેલ : શબ્દકોશમાં શબ્દોની શરૂઆત A મૂળાક્ષરથી થાય છે. A પ્રથમ સ્થાને હોય તેવા શબ્દો

A				

4! મળે. (G, A, I, N નો ઉપયોગ કરતાં).

ત્યાર બાદ Gથી શરૂ થતા શબ્દો $\frac{4!}{2!} = 12$ **(જેમાં A બે વખત આવે)**

તે જ રીતે Iથી શરૂ થતા શબ્દો $\frac{4!}{2!} = 12$ મળે.

આમ કુલ 48 શબ્દો થયા. ત્યાર બાદના શબ્દો NAA થી શરૂ થાય તેમાં GI પ્રથમ આવે અને ત્યાર બાદ IG વાળો શબ્દ NAAIG 50મા ક્રમે આવે.

☛ નોંધ છેલ્લો અક્ષર કયો ? ગણતરી વગર શોધો.

સ્વાધ્યાય 7.3

1. BOOK શબ્દના બધા અક્ષરોની ગોઠવણી કરતાં BOOK શબ્દ કયા સ્થાને આવે ?
2. AGAIN શબ્દના બધા અક્ષરોને શબ્દકોશ પ્રમાણે ગોઠવતા છેલ્લો શબ્દ કયો મળે ? તેનો ક્રમ કયો છે ?

3. એક રૂમમાં 7 મરક્યુરી ગોળા છે. તે પ્રત્યેક સ્વતંત્ર સ્વિચથી ચાલુ-બંધ થઈ શકે છે. તો રૂમ કેટલી રીતે પ્રકાશિત થઈ શકે ?

4. જેના બધા જ અંકો ભિન્ન હોય એવી 10,000 કરતાં નાની કેટલી ધનપૂર્ણાંક સંખ્યાઓ મળે ?

5. 2468 ના બધા જ અંકોનો એક જ વખત ઉપયોગ કરીને બનતી સંખ્યાઓનો સરવાળો શોધો.

6. જેમાં T અને E અંતમાં કોઈપણ ક્રમમાં આવે એવા TRIANGLE શબ્દના બધા અક્ષરોથી બનતા ક્રમચયો શોધો.

7. બંને R સાથે ન હોય તેવા ARROW શબ્દના બધા અક્ષરોની ગોઠવણીથી કેટલા શબ્દો બને ?

8. જેમાં બધા સ્વરો સાથે હોય તેવા EXERCISES ના કેટલા ક્રમચયો બને ?

9. 12,234 સંખ્યાના બધા અંકોનો ઉપયોગ કરી 10,000 અને 20,000 વચ્ચેની કેટલી સંખ્યાઓ મળે ? 11,000 કરતાં નાની કેટલી સંખ્યાઓ મળે ?

10. આ વાક્ય વાંચો : 'LOOK AND GO'.
આ ભાતમાં શબ્દો લખીએ તો આપેલા મૂળાક્ષરોથી કેટલાં વાક્યો બને ? (પ્રથમ 4 અક્ષરોવાળો શબ્દ, 3 અક્ષરોવાળો શબ્દ અને 2 અક્ષરોવાળો શબ્દ) વાક્યનો અર્થ હોય તે જરૂરી નથી.

11. REKHA શબ્દના બધા અક્ષરોથી Rથી શરૂ થતા હોય તેવા કેટલા ક્રમચયો મળે ? શબ્દકોશ પ્રમાણે REKHA કયા સ્થાને આવે ?

12. $2^2\ 3^3\ 5^4$ ને ગુણાકારના સ્વરૂપમાં લખી તેના ક્રમચયો બનાવતાં કેટલા ભિન્ન ક્રમચયો મળે ? (ઉદાહરણ તરીકે $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 5$)

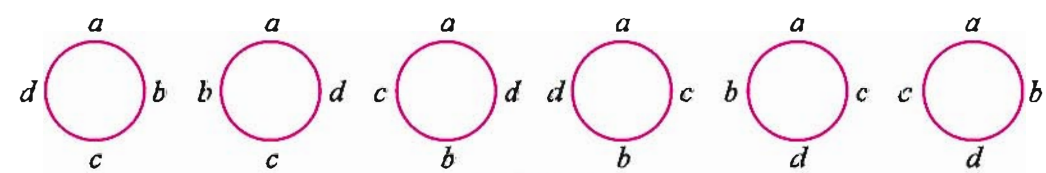
13. INDEPENDENCE શબ્દના બધા અક્ષરોથી કેટલા ક્રમચયો મળે ?

14. x વસ્તુઓની એક સાથે ગોઠવણી કરવાના પ્રકારોની સંખ્યા m છે. $x - 2$ વસ્તુઓની એક સાથે n રીતે ગોઠવણી કરવામાં આવે છે. તે જ રીતે $x - 6$ વસ્તુઓની ગોઠવણી એક સાથે p રીતે કરવામાં આવે અને જો $m = 30np$ હોય તો x શોધો.

*

વર્તુળાકાર ગોઠવણી :

ચાર વ્યક્તિઓ a, b, c, d ની જમવાના ગોળ ટેબલ પર કેટલી ગોઠવણી શક્ય છે ?



આકૃતિ 7.6

abcd, adcb, adbc, acbd, acdb, abdc. આમ કુલ છ પ્રકારે ગોઠવણી થઈ શકે. પરંતુ આપણે $4! = 24$ રીતે ગોઠવણી થાય તેવું વિચારીએ છીએ પરંતુ અહીં $\frac{24}{4} = 6$ રીતે જ ગોઠવણી થાય છે. અહીં *abcd, bcda, cdab, dabc* ની એકબીજાને સાપેક્ષ ટેબલ ઉપરની ગોઠવણી સમાન થાય.

વ્યાખ્યા : *n* ભિન્ન વસ્તુઓને વર્તુળ પર ગોઠવવાની ક્રિયાને વર્તુળાકાર ક્રમચયો કહે છે.

પ્રમેય 4 : *n* ભિન્ન વસ્તુઓના વર્તુળાકાર ક્રમચયની સંખ્યા $(n - 1)!$ થાય.

સાબિતી : જો n વસ્તુઓ $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ તરીકે લઈએ તો તેમની સુરેખ ગોઠવણી $_nP_n = n!$ પ્રકારે થાય.

પરંતુ વર્તુળ પર $a_1, a_2, ..., a_n$; $a_2, a_3, ..., a_n, a_1$; $a_3, a_4, ..., a_n, a_1, a_2$; $a_n, a_1, a_2, ..., a_{n-1}$ (n પ્રકારે) આ બધી ગોઠવણી વર્તુળ પર સમાન છે.

તેથી વર્તુળાકાર ક્રમચયોની સંખ્યા $\frac{n!}{n} = \frac{n(n-1)!}{n} = (n - 1)!$

ઉદાહરણ 24 : સાત વ્યક્તિઓની કારોબારી સમિતિની વર્તુળાકાર ટેબલ પર ગોઠવણી કેટલી રીતે શક્ય છે ? જો ચેરમૅનનું સ્થાન નિશ્ચિત હોય તો બાકીના વ્યક્તિઓની ગોઠવણી કેટલી રીતે થાય ?

ઉકેલ : સાત વ્યક્તિઓની વર્તુળાકાર ગોઠવણી $(7 - 1)! = 6! = 720$ પ્રકારે થાય.

જો ચેરમૅનનું સ્થાન નિશ્ચિત હોય, તો બાકીના 6 વ્યક્તિઓની રેખીય ગોઠવણી $6! = 720$ પ્રકારે થાય. (હવે ગોઠવણી રેખીય થઈ જાય છે !)

$\therefore$ તેથી ચેરમૅનનું સ્થાન નિશ્ચિત હોય તેવી કુલ ગોઠવણી 720 થાય.

7.3 સંચય

A = $\{a, b, c, d\}$ના જેમાં બે સભ્ય હોય તેવા કુલ કેટલા ઉપગણો મળે ? $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{a, d\}$, $\{b, c\}$, $\{b, d\}$ અને $\{c, d\}$. આમાં જેમાં બે સભ્યો હોય એવા કુલ 6 ઉપગણ મળે. અહીં $\{a, b\} = \{b, a\}$. ગણમાં ઘટકોનો ક્રમ મહત્ત્વનો નથી.

4 ઘટકો ધરાવતા ગણમાંથી કોઈ પણ 2 ઘટકોની પસંદગીના પ્રકારની સંખ્યાને $\binom{4}{2}$ અથવા $_4C_2$ અથવા $^4C_2$ અથવા C(4, 2) વડે દર્શાવાય છે અને તે 6 છે.

ઘટકો ભિન્ન હોય તેવી કુલ કેટલી ક્રમયુક્ત જોડ મળે ? (a, b), (b, a), (a, c), (a, d), (c, a), (d, a), (b, c), (c, b), (b, d), (d, b), (c, d), (d, c) એટલે કે કુલ 12 ક્રમયુક્ત જોડ મળે.

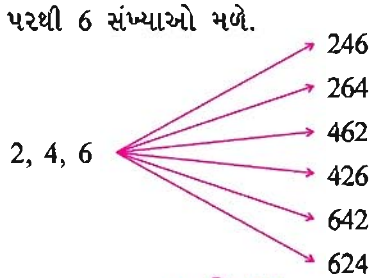
અહીં દરેક ઉપગણ પરથી બે ક્રમયુક્ત જોડ મળે છે. તેથી કુલ $\binom{4}{2} \times 2! = 12$ ક્રમયુક્ત જોડ મળે. પરંતુ ગણ Aના 4 ઘટકોમાંથી 2 ઘટકોની ગોઠવણીની સંખ્યા એટલે કે $_4P_2$ જ છે.

$\therefore \quad _4P_2 = \binom{4}{2} \times 2!$

તે જ રીતે 2, 4, 6, 8 અંકમાંથી ત્રણ અંકોની પસંદગી $\binom{4}{3} = 4$ પ્રકાર થાય.

2, 4, 6, 8 નો ઉપયોગ કરીને ત્રણ અંકોની કેટલી સંખ્યા બને ?

દરેક ત્રય 2, 4, 6 પરથી 6 સંખ્યાઓ મળે.



આકૃતિ 7.7

આમ, 2, 4, 6, 8 ત્રણ અંકોનો ઉપયોગ કરી ત્રણ અંકની કુલ સંખ્યાઓ

$\binom{4}{3} \times 6 = 4 \times 6 = 24$ મળે. પરંતુ આ તો 4 અંકોની 3 સ્થાનમાં ગોઠવણીના પ્રકારોની સંખ્યા છે.

$\therefore \quad {}_4P_3 = \binom{4}{3} \times 6$

અથવા $\binom{4}{3} = \frac{{}_4P_3}{3!}$ **(6 = 3!)**

વ્યાખ્યા : n ભિન્ન વસ્તુઓ પૈકી r વસ્તુઓની પસંદગીને r વસ્તુઓનો સંચય કહે છે. તે $\binom{n}{r}$ અથવા ${}_nC_r$ અથવા ${}^nC_r$ અથવા $C(n, r)$ વડે દર્શાવાય છે. $n \in N$

પ્રમેય 5 : $\binom{n}{r} = \frac{{}_nP_r}{r!}$ **$0 < r \leq n$**

સાબિતી : n ભિન્ન વસ્તુઓ આપેલ છે. તેમાંથી r વસ્તુઓની પસંદગી કરવામાં આવે છે. તે પસંદગી $\binom{n}{r}$ રીતે કરવામાં આવે છે. આ r વસ્તુઓને r સ્થાનમાં ગોઠવવામાં આવે તો તેમની ગોઠવણી ${}_rP_r = r!$ પ્રકારે કરવામાં આવે છે. આમ, દરેક $\binom{n}{r}$ પસંદગીમાંથી પ્રત્યેકમાંથી $r!$ ક્રમચયો મળે એટલે કે કુલ $\binom{n}{r} \times r!$ ગોઠવણી મળે. પરંતુ n ભિન્ન વસ્તુઓની r સ્થાનમાં ગોઠવણીના પ્રકાર એ ${}_nP_r$ છે.

$\therefore \quad {}_nP_r = \binom{n}{r} \times r!$

$\therefore \quad \binom{n}{r} = \frac{{}_nP_r}{r!}$

વ્યાખ્યા : $\binom{n}{0} = 1$

આપણે અહીં $\binom{n}{0} = 1$ વ્યાખ્યાયિત કરીએ છીએ. તેને તાર્કિક રીતે જોતાં આપેલ n વસ્તુઓમાંથી શૂન્ય ઘટકો અથવા એક પણ ઘટક નહિ તે રીતે પસંદગી અને તે માત્ર 1 રીતે જ શક્ય છે કે તમામ ઘટકોને ફગાવી દો.

$\binom{n}{r}$નું સૂત્ર :

$\binom{n}{r} = \frac{{}_nP_r}{r!} \qquad 0 < r \leq n$

$= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{r!} \qquad 0 < r \leq n$

$= \frac{n!}{(n-r)!\,r!} \qquad 0 < r \leq n$

વળી, $\binom{n}{0} = 1 = \frac{n!}{(n-0)!\,0!}$

$\therefore \quad \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!} \qquad 0 \leq r \leq n$

પ્રમેય 6 : $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$ $\qquad 0 \le r \le n$

સાબિતી : $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

$$= \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

$$= \frac{n!}{(n-r)!\,[n-(n-r)]!}$$

$$= \binom{n}{n-r}$$

પ્રમેય 7 : $\binom{n}{r} + \binom{n}{r-1} = \binom{n+1}{r}$

સાબિતી : $\binom{n}{r} + \binom{n}{r-1} = \frac{n!}{r!(n-r)!} + \frac{n!}{(r-1)![n-(r-1)]!}$

$$= \frac{n!}{r!(n-r)!} + \frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!}$$

$$= \frac{n!}{r(r-1)!\,(n-r)!} + \frac{n!}{(r-1)!\,(n-r+1)(n-r)!}$$

$$= \frac{n!}{(r-1)!\,(n-r)!}\left[\frac{1}{r} + \frac{1}{n-r+1}\right]$$

$$= \frac{n!}{(r-1)!\,(n-r)!}\left(\frac{n-r+1+r}{r(n-r+1)}\right)$$

$$= \frac{n!(n+1)}{r(r-1)!(n-r+1)(n-r)!}$$

$$= \frac{(n+1)!}{r!(n-r+1)!}$$

$$= \binom{n+1}{r}$$

બીજી રીતે સાબિતી :

પ્રમેય 6 ની સાબિતી : જો n વસ્તુઓમાંથી r વસ્તુઓની પસંદગી એટલે કે બાકીની $(n-r)$ વસ્તુઓનો અસ્વીકાર.

$\therefore$ જેટલી પસંદગી તેટલા જ અસ્વીકાર થાય.

$\therefore \quad \binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$

ઉદાહરણ તરીકે ગણ A = {1, 2, 3, 4, 5}માંથી 2 ઘટકોવાળા ઉપગણોની પસંદગી

પસંદ કરો	અસ્વીકાર કરો	પસંદ કરો	અસ્વીકાર કરો
{1, 2}	{3, 4, 5}	{2, 4}	{1, 3, 5}
{1, 3}	{2, 4, 5}	{2, 5}	{1, 3, 4}
{1, 4}	{2, 3, 5}	{3, 4}	{1, 2, 5}
{1, 5}	{2, 3, 4}	{3, 5}	{1, 2, 4}
{2, 3}	{1, 4, 5}	{4, 5}	{1, 2, 3}

$\therefore$ તેથી 2 ઘટકોના ઉપગણોની સંખ્યા એ 3 ઘટકો ધરાવતા ઉપગણોની સંખ્યા બરાબર થાય.

$\binom{5}{2} = \binom{5}{3} = 10$

પ્રમેય 7 ની સાબિતી : ધારો કે $A = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_{n+1}\}$

r ઘટકો ધરાવતા Aના ઉપગણોની સંખ્યા $\binom{n+1}{r}$ થાય.

ઘટક x_1 પસંદ થયેલા ઉપગણોનો ઘટક હોય કે ન પણ હોય.

જો ઘટક x_1 એ r ઘટકોવાળા ઉપગણનો સભ્ય હોય, તો બાકીના $(r-1)$ ઘટકોની પસંદગી $\binom{n}{r-1}$ પ્રકારે થાય.

જો x_1 એ r ઘટકોવાળા ઉપગણનો સભ્ય ન હોય, તો બધા જ r ઘટકોની પસંદગી n ઘટકોમાંથી $\binom{n}{r}$ રીતે થાય.

$\therefore \binom{n+1}{r} = \binom{n}{r} + \binom{n}{r-1}$

નોંધ (1) શરૂઆતમાં r વધે તો $\binom{n}{r}$ વધે. n યુગ્મ હોય તો $r = \frac{n}{2}$ લેતાં $\binom{n}{r}$ મહત્તમ થાય. n અયુગ્મ હોય તો $r = \frac{n-1}{2}$ અથવા $\frac{n+1}{2}$ લેતાં $\binom{n}{r}$ મહત્તમ મળે.

ત્યાર બાદ ક્રમિક રીતે આગળ વધતાં $\binom{n}{r}$ ની કિંમત ઘટે છે, કારણ કે $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$.

(2) $\binom{n}{r} = k$, $k \in N \cup \{0\}$ને મહત્તમ બે ઉકેલ છે.

ઉદાહરણ તરીકે $\binom{4}{r} = 6$ નો એક ઉકેલ $r = 2$.

$\binom{4}{r} = 5$નો ઉકેલ ન મળે.

$\binom{4}{r} = 4$ના બે ઉકેલ $r = 1, 3$ મળે.

ઉદાહરણ 25 : $\binom{2n}{r}$ની કિંમત $r = n$ માટે મહત્તમ હોય તેમ સાબિત કરો.

ઉકેલ : $\binom{2n}{r+1} > \binom{2n}{r} \Leftrightarrow \frac{(2n)!}{(r+1)!(2n-r-1)!} > \frac{(2n)!}{r!(2n-r)!}$

$$\Leftrightarrow \frac{(2n-r)!}{(2n-r-1)!} > \frac{(r+1)!}{r!}$$

$$\Leftrightarrow 2n - r > r + 1$$

$$\Leftrightarrow r < n - \tfrac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow r \leq n - 1$$

તેથી, $\binom{2n}{n}$ એ મહત્તમ હોય. $\binom{2n}{1} < \binom{2n}{2} < ... < \binom{2n}{n-1} < \binom{2n}{n}$.

ત્યાર બાદ $\binom{2n}{n+1} = \binom{2n}{n-1} > \binom{2n}{n+2} = \binom{2n}{n-2}$...

ઉદાહરણ 26 : $\binom{n}{5} = \binom{n}{13}$ પરથી n શોધો. તે પરથી $\binom{n}{2}$ શોધો.

ઉકેલ : આપણે જાણીએ છીએ કે, $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$

$\therefore \quad r = 5,\ n - r = 13$

$\therefore \quad n - 5 = 13$

$\therefore \quad n = 18$

$\binom{n}{2} = \binom{18}{2} = \frac{18 \times 17}{2} = 153$

ઉદાહરણ 27 : જો $\binom{2n}{3} = 11\binom{n}{3}$ તો n તથા $\binom{n}{2}$ શોધો.

ઉકેલ :

$$\frac{2n(2n-1)(2n-2)}{3!} = \frac{11\,n(n-1)(n-2)}{3!} \qquad \left(\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-r+1)}{r!}\right)$$

$\therefore \quad 4(2n - 1) = 11(n - 2)$

$\therefore \quad 8n - 4 = 11n - 22$

$\therefore \quad 3n = 18$

$\therefore \quad n = 6$

વળી, $\binom{n}{2} = \binom{6}{2} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$

ઉદાહરણ 28 : જો $\binom{n}{r-1} = 36,\ \binom{n}{r} = 84,\ \binom{n}{r+1} = 126$, તો n અને r શોધો.

ઉકેલ : અહીં $\binom{n}{r-1} = \frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!} = 36$ (i)

તે જ રીતે, $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = 84$ (ii)

$\binom{n}{r+1} = \frac{n!}{(r+1)!(n-r-1)!} = 126$ (iii)

(ii)ને (i) વડે અને (iii)ને (ii) વડે ભાગતાં,

$$\frac{n!}{r!(n-r)!} \ \frac{(r-1)!(n-r+1)!}{n!} = \frac{84}{36} \qquad \text{(iv)}$$

અને $$\frac{n!}{(r+1)!(n-r-1)!} \ \frac{r!(n-r)!}{n!} = \frac{126}{84} \qquad \text{(v)}$$

$\therefore$ (iv) પરથી, $\frac{(r-1)!(n-r+1)(n-r)!}{r(r-1)!(n-r)!} = \frac{84}{36}$

$\therefore \quad \frac{n-r+1}{r} = \frac{7}{3}$

$\therefore \quad 3n - 3r + 3 = 7r$

$\therefore \quad 10r - 3n = 3$ (vi)

(v) પરથી, $\frac{n-r}{r+1} = \frac{3}{2}$ અથવા $2n - 2r = 3r + 3$

$\therefore \quad 5r - 2n = -3$ (vii)

(vi) અને (vii) ઉકેલતાં, $n = 9$, $r = 3$

ઉદાહરણ 29 : ઉકેલો : (1) $\binom{8}{r} = 28$ (2) $\binom{12}{r} = \binom{12}{r+2}$

ઉકેલ : $\binom{8}{r} = 28$

$r = 4$ લેતાં $\binom{8}{4}$ નું મહત્તમ મૂલ્ય મળે. $\binom{8}{4} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{24} = 70$

$\therefore \quad \binom{8}{0} = \binom{8}{8} = 1 \neq 28$

$\therefore \quad \binom{8}{1} = \binom{8}{7} = 8 \neq 28$

$\therefore \quad \binom{8}{2} = \binom{8}{6} = \frac{8 \times 7}{2} = 28$

આપણે જાણીએ છીએ કે, મહત્તમ બે જ ઉકેલ મળે. વળી, $\binom{8}{2} = \binom{8}{6} = 28$. $r = 2$ અથવા 6

(2) $\binom{12}{r} = \binom{12}{r+2}$

$r \neq r + 2$

અહીં, $n = 12$, $r + 2 = n - r = 12 - r$

$\therefore \quad 2r = 10$

$\therefore \quad r = 5$

ચકાસણી : $\binom{12}{5} = \binom{12}{7}$

ઉદાહરણ 30 : ઉકેલો : $\binom{2n}{3} \div \binom{n}{2} = 12$

ઉકેલ : $\frac{2n(2n-1)(2n-2)}{3!} \times \frac{2!}{n(n-1)} = 12$

$\therefore \quad \frac{2(2n-1) \cdot 2}{3} = 12$

$\therefore \quad 2n - 1 = 9$

$\therefore \quad n = 5$

ઉદાહરણ 31 : n અને r શોધો : $\binom{n+1}{r+1} : \binom{n}{r} : \binom{n-1}{r-1} = 11 : 6 : 3.$

ઉકેલ : $\binom{n+1}{r+1} : \binom{n}{r} = \frac{11}{6}$ અને $\binom{n}{r} : \binom{n-1}{r-1} = \frac{6}{3}$

$\therefore \quad \frac{(n+1)!}{(r+1)!(n-r)!} \; \frac{r!(n-r)!}{n!} = \frac{11}{6}$ અને $\frac{n!}{r!(n-r)!} \; \frac{(r-1)!(n-r)!}{(n-1)!} = \frac{6}{3}$

$\therefore \quad \frac{n+1}{r+1} = \frac{11}{6}$ અને $\frac{n}{r} = 2$

$\therefore \quad 6n + 6 = 11r + 11$ અને $n = 2r$

$\therefore \quad 12r + 6 = 11r + 11$

$\therefore \quad r = 5$ અને $n = 2r = 10$

ઉદાહરણ 32 : સાબિત કરો કે n ક્રમિક પૂર્ણાંકોનો ગુણાકાર $n!$ વડે વિભાજ્ય છે.

ઉકેલ : ધારો કે n ક્રમિક પૂર્ણાંકો $r + 1, r + 2, ..., r + n$ છે.

તેમનો ગુણાકાર $p = (r + 1)(r + 2)...(r + n)$

$= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 .... r(r+1) ..... (r+n)}{1 \cdot 2 \cdot 3 .... r}$

$= \frac{(n+r)!}{r!} = \frac{(n+r)!}{r!n!} \times n! = \binom{n+r}{r} n!$ અને તે $n!$ વડે વિભાજ્ય છે.

ઉદાહરણ 33 : સાબિત કરો કે, $\binom{2n}{n} = \frac{2^n [1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 .... (2n-1)]}{n!}$

ઉકેલ : $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!n!}$

$= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 .... (2n)}{n!n!}$

$= \frac{[1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 .... (2n-1)][2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 .... 2n]}{n!n!}$

$= \frac{[1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 .... (2n-1)] \, 2^n [1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 .... n]}{n!n!}$

$= \frac{2^n [1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 .... (2n-1)]}{n!}$

ઉદાહરણ 34 : જો ${}_nP_r = {}_nP_{r+1}$ અને $\binom{n}{r} = \binom{n}{r-1}$, તો n, r શોધો.

ઉકેલ : $\frac{n!}{(n-r)!} = \frac{n!}{(n-r-1)!}$ અને $\frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!}$

$\therefore \quad (n - r)! = (n - r - 1)!$ અને $\frac{r!}{(r-1)!} = \frac{(n-r+1)!}{(n-r)!}$

$\therefore \quad (n - r)(n - r - 1)! = (n - r - 1)!$ અને $r = n - r + 1$

$\therefore \quad n - r = 1$ અને $r = n - r + 1$

$\therefore \quad r = (n - r) + 1 = 1 + 1 = 2$ અને $n = r + 1 = 3$

ઉદાહરણ 35 : સાબિત કરો કે, $\binom{n}{r} + 2\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r-2} = \binom{n+2}{r}$

ઉકેલ : ડા.બા. $= \binom{n}{r} + \binom{n}{r-1} + \binom{n}{r-1} + \binom{n}{r-2}$

$= \binom{n+1}{r} + \binom{n+1}{r-1}$

$= \binom{n+2}{r}$ = જ.બા.

ઉદાહરણ 36 : જો $\binom{n-1}{4}, \binom{n-1}{5}, \binom{n-1}{6}$ સમાંતર શ્રેણીમાં હોય, તો n શોધો.

ઉકેલ : $\binom{n-1}{4} + \binom{n-1}{6} = 2\binom{n-1}{5}$ **(A.P.માં)**

$\therefore \quad \binom{n-1}{4} + \binom{n-1}{5} + \binom{n-1}{5} + \binom{n-1}{6} = 4\binom{n-1}{5}$

$\therefore \quad \binom{n}{5} + \binom{n}{6} = 4\binom{n-1}{5}$

$\therefore \quad \binom{n+1}{6} = 4\binom{n-1}{5}$

$\therefore \quad \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{720} = \frac{4(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{120}$

$\therefore \quad n^2 + n = 24(n - 5)$

$\therefore \quad n^2 - 23n + 120 = 0$

$\therefore \quad n = 15$ અથવા 8

સ્વાધ્યાય 7.4

1. કિંમત શોધો : (1) $\binom{8}{2}$ (2) $\binom{5}{3}$ (3) $\binom{10}{4}$
2. જો $\binom{n}{8} = \binom{n}{6}$, તો n શોધો.
3. ઉકેલ મેળવો : (1) $\binom{15}{r+3} = \binom{15}{r-2}$ (2) $\binom{16}{r+5} = \binom{16}{r-5}$
4. જો ${}_nP_r = 1680$ અને $\binom{n}{r} = 70$, તો n અને r શોધો.
5. જો $\binom{n-1}{r} : \binom{n}{r} : \binom{n+1}{r} = 6 : 9 : 13$, તો n અને r શોધો.

6. સાબિત કરો કે, $\binom{n}{r} \times \binom{r}{p} = \binom{n}{p} \times \binom{n-p}{r-p}$.

7. જો $\binom{10}{2} + \binom{13}{6} + \binom{12}{5} + \binom{11}{4} + \binom{10}{3} = \binom{14}{r}$, તો r શોધો.

8. સાબિત કરો કે, $n\binom{n-1}{r-1} = (n - r + 1)\binom{n}{r-1}$

*

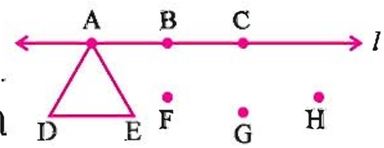
ક્રમચય અને સંચયનાં વ્યાવહારિક ઉદાહરણો

ઉદાહરણ 37 : એક સમતલમાં 7 ભિન્ન બિંદુઓ આપેલાં છે. તે પૈકીનાં કોઈ પણ ત્રણ બિંદુઓ સમરેખ નથી. તો તેમનો ઉપયોગ કરી કેટલા રેખાખંડ રચી શકાય ?

ઉકેલ : કોઈ પણ બે બિંદુથી રેખાખંડ મળે છે અને $\overline{AB} = \overline{BA}$. તેથી પસંદગીમાં ક્રમનું મહત્ત્વ નથી. તેથી $\binom{7}{2} = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21$.

$\therefore$ આપેલાં બિંદુઓથી કુલ 21 રેખાખંડ મળે.

ઉદાહરણ 38 : એક જ સમતલમાં આવેલાં 8 ભિન્ન બિંદુઓ પૈકીનાં 3 બિંદુઓ સમરેખ છે. તેમનો ઉપયોગ કરી કેટલા ત્રિકોણો રચી શકાય ? તે 8 બિંદુઓ પૈકી કોઈ પણ બે બિંદુઓમાંથી કેટલી રેખા પસાર થાય ? કેટલા રેખાખંડ મળે ?



આકૃતિ 7.8

ઉકેલ : 8 બિંદુઓ $\binom{8}{3}$ ત્રિકોણ રચે છે. જેમકે ΔADE. પરંતુ A, B, C એ સમરેખ હોવાથી તેઓ $\binom{3}{3}$ ત્રિકોણ રચતા નથી તેમનાથી કોઈ ત્રિકોણ મળે નહિ.

ત્રિકોણની સંખ્યા $\binom{8}{3} - \binom{3}{3} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{6} - 1 = 55$

કોઈ પણ બે બિંદુઓ એક રેખા રચે છે. તેથી $\binom{8}{2} = 28$ રેખાઓ મળી શકે.

પરંતુ, $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{BC}$ તથા $\overleftrightarrow{CA}$ ત્રણ રેખાઓ નથી. A, B, C સમરેખ હોવાથી તેમનાથી એક જ રેખા મળે છે. $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{BC} = \overleftrightarrow{CA} = l$

$\therefore$ $28 - 3 + 1$ (રેખા l) = 26 રેખાઓ મળે.

બધા જ $\binom{8}{2} = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28$ રેખાખંડ ભિન્ન હોય છે, કારણ કે $\overline{AB} \neq \overline{BC}$ વગેરે.

$\therefore$ આપેલ બિંદુઓ દ્વારા 28 રેખાખંડ મળે.

ઉદાહરણ 39 : સ્વર્ણિમ ગુજરાતના કાર્યક્રમ માટે બનાવેલ ટુકડીઓ માટે 3 યુવાનો અને 2 યુવતીઓની પસંદગી કરવાની છે. 5 યુવાનો અને 4 યુવતીઓ સમાવિષ્ટ છે. તો કુલ કેટલી રીતે ટુકડીઓ બનશે ? ટુકડીમાં એક યુવાન કિરણની પસંદગી નિશ્ચિત હોય તેવી કેટલી ટુકડીઓ મળશે ? જેમાં રેશ્મા નામની યુવતી નિશ્ચિત સ્થાન ધરાવે એવી કેટલી ટુકડીઓ બને ?

ઉકેલ : 5 યુવાનોમાંથી 3 યુવાનો અને 4 યુવતીઓમાંથી 2 યુવતીઓની પસંદગી, ગણતરીના મૂળભૂત સિદ્ધાંત પરથી, $\binom{5}{3} \times \binom{4}{2}$ રીતે થાય.

હવે, $\binom{5}{3}\binom{4}{2} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} \times \frac{4 \cdot 3}{2!} = 10 \times 6 = 60$

$\therefore$ આમ કુલ 60 ટુકડીઓ મળે. (i)

હવે કિરણ નિશ્ચિત સ્થાન ધરાવતો હોવાથી બાકીના 4 યુવાનોમાંથી 2 યુવાનોની અને 4 યુવતીઓમાંથી 2 યુવતીઓની પસંદગી કરવી પડે.

$\therefore$ પસંદગીના પ્રકાર $= \binom{4}{2} \times \binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2!} \times \frac{4 \cdot 3}{2!} = 6 \times 6 = 36$

કિરણ કુલ 36 સમિતિમાં હશે. (ii)

હવે રેશ્માની પસંદગી નિશ્ચિત હોય, તો બાકીના 5 યુવાનોમાંથી 3 યુવાનોની અને 3 યુવતીઓમાંથી 1 યુવતીની પસંદગી કરવી પડે.

$\therefore$ પસંદગીના પ્રકાર $= \binom{5}{3} \times \binom{3}{1}$

$= 10 \times 3 = 30$

રેશ્મા 30 સમિતિમાં હશે. (iii)

ઉદાહરણ 40 : સરખી રીતે ચીપેલાં 52 પત્તાઓમાંથી 3 પત્તાઓની પસંદગી કરવાની છે. (1) પસંદગી કેટલા પ્રકારે થઈ શકે ? (2) કેટલા પ્રકારે ચિત્રવાળાં પત્તાં પસંદ થાય ? (3) કેટલા પ્રકારે સમાન રંગોવાળાં પત્તાં પસંદ થાય ? (4) પસંદ થયેલ પત્તાં એક જ ભાતનાં હોય તે કેટલા પ્રકારે શક્ય છે ?

ઉકેલ : (1) 52 પત્તાંમાંથી 3 પત્તાંની પસંદગીના પ્રકાર $\binom{52}{3} = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50}{3!}$

$= \frac{52 \cdot 51 \cdot 50}{6} = 22,100$

$\therefore$ 22,100 પ્રકારે ત્રણ પત્તાં પસંદ થાય.

(2) 52 પત્તાંની થોકડીમાં કુલ 12 પત્તાં ચિત્રવાળાં હોય છે. તેમાંથી 3 પત્તાંની પસંદગી $\binom{12}{3}$ પ્રકારે થાય.

$$\binom{12}{3} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3!} = 220$$

$\therefore$ પસંદ થયેલાં ત્રણેય પત્તાં ચિત્રવાળાં હોય તેના કુલ પ્રકાર 220 છે.

(3) 52 પત્તાંમાંથી 26 પત્તાં લાલ રંગ (લાલ અને ચોકટ) તેમજ 26 પત્તાં કાળા રંગનાં (ફુલ્લી અને કાળી) હોય.

$\therefore$ પસંદગીના પ્રકાર $\binom{26}{3} + \binom{26}{3}$ થાય.

$\therefore$ $\binom{26}{3} = \frac{26 \cdot 25 \cdot 24}{6} = 2600$

$\therefore$ પસંદ થયેલ પત્તાં લાલરંગનાં અથવા કાળા રંગનાં હોય તેવી પસંદગી 5200 થાય.

(4) 52 પત્તાંને 4 ભાતમાં વહેંચેલાં હોય છે. 4માંથી 1 જૂથની પસંદગી $\binom{4}{1}$ પ્રકારે થાય. તેમાંથી 3 પત્તાની પસંદગી $\binom{13}{3}$ પ્રકારે થાય.

$\therefore$ પસંદગીના પ્રકારની સંખ્યા $= \binom{13}{3} \times \binom{4}{1} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11}{6} \times 4 = 1144$

ઉદાહરણ 41 : શાળાના વાર્ષિકોત્સવ કાર્યક્રમ નિમિત્તે 6 સભ્યોની સ્વાગત સમિતિ રચવાની છે. 8 કુમાર અને 5 કુમારીઓમાંથી સમિતિના સભ્યોની પસંદગી કરવાની છે. જેમાં (1) 4 કુમારીઓ હોય. (2) વધુમાં વધુ 2 કુમારીઓ (3) ઓછામાં ઓછી 3 કુમારીઓ હોય એવી કેટલી રીતે સમિતિની રચના થઈ શકે ?

ઉકેલ : (1) પસંદગીના 6 વિદ્યાર્થીઓમાં 5 કુમારીઓમાંથી 4 કુમારીઓ પસંદ કરીએ, તો 8 કુમારમાંથી બાકીના 2 કુમાર પસંદ કરવા પડે.

$\therefore$ પસંદગીના પ્રકારની સંખ્યા $= \binom{5}{4} \times \binom{8}{2}$

$= \binom{5}{1} \times \binom{8}{2}$

$= \frac{5 \cdot 8 \cdot 7}{2!} = 140$

(2) વધુમાં વધુ 2 કુમારીઓ એટલે 2 અથવા 2 કરતાં ઓછી કુમારીઓ. તે માટે નીચેના વિકલ્પો શક્ય છે :

કુમાર	કુમારીઓ
4	2
5	1
6	0

$\therefore$ પસંદગીના કુલ પ્રકારની સંખ્યા $= \binom{8}{4} \times \binom{5}{2} + \binom{8}{5} \times \binom{5}{1} + \binom{8}{6} \times \binom{5}{0}$

$= \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{24} \times \frac{5 \cdot 4}{2} + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{6} \times 5 + \frac{8 \cdot 7}{2} \times 1$

$\left[\binom{8}{5} = \binom{8}{3}\right.$ અને $\left.\binom{8}{6} = \binom{8}{2}\right]$

$= 700 + 280 + 28 = 1008$

(3) ઓછામાં ઓછી ત્રણ કુમારીઓ એટલે કે ત્રણ કે ત્રણ કરતાં વધારે કુમારીઓ.

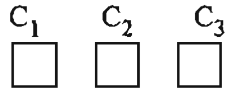
કુમાર	કુમારીઓ
3	3
2	4
1	5

$\therefore$ પસંદગીના પ્રકારની કુલ સંખ્યા $= \binom{8}{3} \times \binom{5}{3} + \binom{8}{2} \times \binom{5}{4} + \binom{8}{1} \times \binom{5}{5}$

$= \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{6} \times \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{6} + \frac{8 \cdot 7}{2} \times 5 + 8 \quad \left[\binom{5}{4} = \binom{5}{1} = 5\right]$

$= 560 + 140 + 8 = 708$

ઉદાહરણ 42 : ત્રણ દંપતી એક થિયેટરમાં ચલચિત્ર જોવા જાય છે. ત્રણે દંપતી ક્રમિક રીતે સાથે બેસે તો તે કેટલા પ્રકારે શક્ય છે ? ત્રણે સ્ત્રીઓ સાથે બેસે તે કેટલી રીતે શક્ય છે ?



ઉકેલ : જો દંપતીને C_1, C_2, C_3 તરીકે દર્શાવીએ તો તેમની ગોઠવણી $3! = 6$ રીતે થાય. યુગલમાં પતિ અને પત્નીના સ્થાનની આંતરિક ફેરબદલી $2! \times 2! \times 2! = 8$ રીતે થાય.

$\therefore$ આમ ગોઠવણી કુલ 48 પ્રકારે શક્ય છે. (i)

ત્રણ પુરુષ અને સ્ત્રીઓનું જૂથ એમ 4 એકમની ગોઠવણી ${}_4P_4 = 4! = 24$ રીતે થઈ શકે.

સ્ત્રીઓની અંદરોઅંદરની ગોઠવણી $3! = 6$ રીતે થઈ શકે.

$\therefore$ ગોઠવણીના કુલ પ્રકાર $= 24 \times 6 = 144$ (ii)

સ્વાધ્યાય 7.5

1. એક જ સમતલમાં આવેલ 9 ભિન્ન બિંદુઓ પૈકી 4 બિંદુ સમરેખ છે. આ બિંદુઓનો ઉપયોગ કરી કેટલા ત્રિકોણ રચી શકાય ? તેમાંથી પસાર થતી કેટલી રેખાઓ મળે ?
2. સિટી ક્લબના સભ્યો 8 પુરુષો અને 6 સ્ત્રીઓમાંથી પસંદ કરી 4 પુરુષો અને 4 સ્ત્રીઓ ધરાવતી 8 સભ્યોની કેટલી સમિતિ બનાવી શકાય ? ઓછામાં ઓછી 3 સ્ત્રીઓ હોય તેવી કેટલી સમિતિ બને ? માત્ર બે જ સ્ત્રીઓ હોય તેવી કેટલી સમિતિ બને ? વધુમાં વધુ 2 સ્ત્રીઓ હોય તેવી કેટલી સમિતિ બને ?
3. 52 પત્તામાંથી 4 પત્તાંની પસંદગી કરવામાં આવે છે. (1) પસંદ થયેલ બધા જ પત્તાં અલગ અલગ જૂથનાં હોય. (2) પસંદ થયેલાં બધાં જ પત્તાં ચિત્રવાળાં હોય. (3) પસંદ થયેલ બધા જ પત્તાં સમાન રંગનાં હોય. તો પત્તાંની પસંદગી કેટલી રીતે થાય ?
4. 2 સફેદ, 3 લાલ અને 4 લીલા રંગની લખોટીઓ છે. યાદચ્છિક રીતે ત્રણ લખોટીઓ પસંદ કરવામાં આવે છે. લખોટીઓની પસંદગી કેટલા પ્રકારે થઈ શકે કે જેમાં ઓછામાં ઓછી 1 લખોટી લાલ રંગની હોય ?
5. 15 વિદ્યાર્થીઓમાંથી સમાન સભ્યસંખ્યા હોય તેવા ત્રણ જૂથ બનાવવા છે, તો જૂથની રચના કેટલી રીતે શક્ય છે ?
6. ઈનામ-વિતરણ સમારંભમાં બે વર્તુળાકાર ટેબલ પર 8 અને 4 વ્યક્તિઓ બેસી શકે તેવી વ્યવસ્થા કરેલ છે. 12 વ્યક્તિની ટેબલ પર ગોઠવણી કેટલી રીતે શક્ય છે ?
7. 2 ચોક્કસ વ્યક્તિઓ સાથે ન હોય તેવી n વ્યક્તિઓની કુલ ગોઠવણી કેટલી રીતે શક્ય છે ?
8. n બાજુવાળા બહિર્મુખ બહુકોણમાં કેટલા વિકર્ણો હોય ?
9. એક બહિર્મુખ બહુકોણના 44 વિકર્ણો છે તે બહુકોણને કેટલી બાજુઓ હશે ?
10. n બાજુવાળા બહિર્મુખ બહુકોણના શિરોબિંદુને જોડવાથી કેટલા ત્રિકોણ બને છે ? જેની એક બાજુ બહુકોણની બાજુ હોય તેવા કેટલા ત્રિકોણ બને ? જેની બે બાજુ બહુકોણની બાજુ હોય તેવા કેટલા ત્રિકોણ બને ? બહુકોણની એક પણ બાજુ ત્રિકોણની બાજુ ન હોય તેવા કેટલા ત્રિકોણ બને ?

*

પ્રકીર્ણ ઉદાહરણો

ઉદાહરણ 43 : ધારો કે $n!$ માં આવેલી અવિભાજ્ય સંખ્યા p નો મહત્તમ ઘાતાંક $\left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + ...$ છે. તે પરથી 25! માં 5નો મહત્તમ ઘાતાંક કેટલો મળે ?

ઉકેલ : 25!માં 5નો મહત્તમ ઘાતાંક $\left[\frac{25}{5}\right] + \left[\frac{25}{25}\right] = 5 + 1 = 6$

ઉદાહરણ 44 : 52!ના અંતમાં કેટલાં શૂન્યો આવેલાં છે ?

ઉકેલ : 52!માં 5નો મહત્તમ ઘાતાંક $\left[\frac{52}{5}\right] + \left[\frac{52}{25}\right] = 10 + 2 = 12$

52!માં 2નો મહત્તમ ઘાતાંક $= \left[\frac{52}{2}\right] + \left[\frac{52}{4}\right] + \left[\frac{52}{8}\right] + \left[\frac{52}{16}\right] + \left[\frac{52}{32}\right]$

$= 26 + 13 + 6 + 3 + 1 = 49$

$\therefore$ 52! માં 10 નો મહત્તમ ઘાતાંક 12 છે.

$\therefore$ 52! ના અંતમાં 12 શૂન્ય છે.

ઉદાહરણ 45 : ગણ A માં ત્રણ ઘટકો હોય અને ગણ B માં પાંચ ઘટકો હોય, તો $f : A \rightarrow B$ કેટલાં વિધેય મળે ? આ પૈકી કેટલાનો વિસ્તાર B હશે ?

ઉકેલ : ધારો કે $A = \{x_1, x_2, x_3\}$, $B = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\}$

વિધેય $f : A \rightarrow B$ માટે (x_i, y_j) પ્રકારની એવી ક્રમયુક્ત જોડ બનવી જોઈએ જેથી A માંથી કોઈ x_i નું પુનરાવર્તન ન થાય અને પ્રત્યેક x_i નો એક વખત ઉપયોગ થાય.

આથી $f = \{(x_1, y_p), (x_2, y_q), (x_3, y_r)\}$ એક $f : A \rightarrow B$ લાક્ષણિક વિધેય છે. y_p, y_q, y_r ની પસંદગી $5 \times 5 \times 5 = 125$ રીતે થઈ શકે. આથી $f : A \rightarrow B$, 125 વિધેયો મળે.

આથી વિસ્તારમાં વધુમાં વધુ ત્રણ ઘટક આવશે. (y_p, y_q, y_r ભિન્ન હોય તો). આથી વિસ્તારમાં ત્રણથી વધુ ઘટક ન હોય. આથી કોઈ પણ વિધેય $f : A \rightarrow B$ નો વિસ્તાર B ના હોય.

ઉદાહરણ 46 : 52 પત્તાંમાંથી 5 પત્તાંની પસંદગીમાં ઓછામાં ઓછી એક વખત એક્કો આવે તે કેટલી રીતે શક્ય છે ?

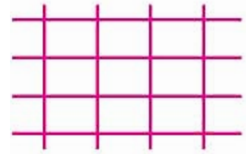
ઉકેલ : અહીં આપણે નીચે પ્રમાણે પસંદ કરી શકીએ :

એક્કોની સંખ્યા (4)	એક્કા સિવાયનાં બીજાં પત્તાં (48)
1	4
2	3
3	2
4	1

$\therefore$ પસંદગીના કુલ પ્રકાર $= \binom{4}{1} \times \binom{48}{4} + \binom{4}{2} \times \binom{48}{3} + \binom{4}{3} \times \binom{48}{2} + \binom{4}{4} \times \binom{48}{1}$

$= 8,86,656$

ઉદાહરણ 47 : m શિરોલંબ રેખાઓ અને n સમક્ષિતિજ રેખાઓમાંથી કેટલા લંબચોરસ બને ?



ઉકેલ : લંબચોરસની રચના બે સમક્ષિતિજ અને બે શિરોલંબ રેખાની પસંદગી કરતાં મળે છે.

$\therefore$ લંબચોરસની કુલ સંખ્યા $= \binom{m}{2} \times \binom{n}{2}$

$$= \frac{m(m-1)}{2!} \times \frac{n(n-1)}{2!} = \frac{mn(m-1)(n-1)}{4}$$

ઉદાહરણ 48 : એક સમતલમાં 25 રેખાઓ પૈકી 15 રેખાઓ A આગળ સંગામી છે. 5 રેખાઓ B આગળ સંગામી છે. કોઈપણ બે રેખાઓ સમાંતર નથી. તે સિવાયની બીજી રેખાઓમાં કોઈપણ ત્રણ સંગામી નથી. રેખાઓ પરસ્પર કેટલાં બિંદુઓમાં છેદશે ?

ઉકેલ : 25 રેખાઓ $\binom{25}{2}$ બિંદુઓમાં છેદે પરંતુ $\binom{15}{2}$ છેદબિંદુના બદલે એક જ બિંદુ A અને $\binom{5}{2}$ છેદબિંદુના બદલે એક જ બિંદુ B મળે છે.

$\therefore$ છેદબિંદુની કુલ સંખ્યા $= \binom{25}{2} - \binom{15}{2} - \binom{5}{2} + 2$

$$= 300 - 105 - 10 + 2 = 187$$

ઉદાહરણ 49 : એક વિદ્યાર્થીએ પરીક્ષામાં 20 પ્રશ્નોના ઉત્તર આપવાના છે. વિભાગ A અને B પ્રત્યેકમાં 12 પ્રશ્નો છે. પ્રત્યેક વિભાગમાંથી ઓછામાં ઓછા આઠ પ્રશ્નોના ઉત્તર આપવા ફરજિયાત છે, તો વિદ્યાર્થી પરીક્ષામાં પ્રશ્નોની પસંદગી કેટલી રીતે કરી શકે ?

ઉકેલ : અહીં વિદ્યાર્થી પાસે પસંદગીના વિવિધ વિકલ્પો છે :

Aમાંથી પ્રશ્નોની પસંદગી	Bમાંથી પ્રશ્નોની પસંદગી
8	12
9	11
10	10
11	9
12	8
(12માંથી)	(12માંથી)

$\therefore$ પરીક્ષામાં પસંદગીના કુલ પ્રકાર

$$\binom{12}{8}\binom{12}{12} + \binom{12}{9}\binom{12}{11} + \binom{12}{10}\binom{12}{10} + \binom{12}{11}\binom{12}{9} + \binom{12}{12}\binom{12}{8}$$

$$= 2\binom{12}{4} + 2\binom{12}{3}\binom{12}{1} + \binom{12}{2}\binom{12}{2} \qquad \left(\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}\right)$$

$$= \frac{2 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{24} + \frac{2 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{6} \times 12 + \left(\frac{12 \cdot 11}{2}\right)^2$$

$$= 990 + 5280 + 4356 = 10{,}626$$

ઉદાહરણ 50 : 12 બિંદુઓ પૈકી 7 બિંદુ એક રેખા પર છે અને અન્ય 5 બિંદુ આ રેખાને સમાંતર બીજી રેખા પર છે. તો તેમના ઉપયોગથી કેટલા ત્રિકોણ બને ?

ઉકેલ : સ્પષ્ટ છે કે, ત્રિકોણોની સંખ્યા $= \binom{7}{2}\binom{5}{1} + \binom{5}{2}\binom{7}{1} = 21 \times 5 + 10 \times 7$

$$= 105 + 70 = 175$$

સ્વાધ્યાય 7

1. સામાજિક કાર્યરત મિત્રોના એક જૂથમાં 8 છોકરા અને 5 છોકરીઓ છે. તેમાંથી 5 મિત્રોના જૂથને કેટલા પ્રકારે કામ સોંપાય કે જેમાં,
   (1) જૂથમાં ઓછામાં ઓછો એક છોકરો અને ઓછામાં ઓછી એક છોકરી હોય.
   (2) જૂથમાં એક પણ છોકરો ન હોય.
   (3) જૂથમાં ઓછામાં ઓછી 3 છોકરીઓ હોય.
   (4) જૂથમાં વધુમાં વધુ બે છોકરા હોય.
2. પુનરાવર્તન સિવાય 2, 5, 6, 8, 9 અંકોનો ઉપયોગ કરી 7000 કરતાં મોટી કેટલી સંખ્યાઓ મળે ?
3. એક બહિર્મુખ બહુકોણને 54 વિકર્ણો છે. બહુકોણને કેટલાં શિરોબિંદુઓ હશે ?
4. 8 શિક્ષકો $T_1, T_2, T_3, ..., T_8$ માં 5 શિક્ષકોને તાલીમ માટે પસંદ કરવાના છે. T_1 નવા શિક્ષક છે અને તેમણે તાલીમમાં જવાનું જ છે. T_8 એ આવતા વર્ષે નિવૃત્ત થવાના હોવાથી તેમણે તાલીમ માટે મોકલવાના નથી. શિક્ષકોની પસંદગી કેટલી રીતે થાય ? દરેક અઠવાડિયે એક શિક્ષકને તાલીમ માટે મોકલવામાં આવે, તો શિક્ષકોને કેટલી ક્રમિક રીતે મોકલી શકાય ? (તાલીમ 5 અઠવાડિયાની છે.)
5. જેમાં બે ચોક્કસ વસ્તુઓ એક સાથે પસંદ ન થાય તે રીતે n ભિન્ન વસ્તુઓમાંથી r વસ્તુઓની પસંદગી કરવાની છે. કેટલી રીતે આ શક્ય છે ?
6. a, e, i, o, u આ પાંચ સ્વરમાંથી કોઈ પણ એક સ્વરનું ઓછામાં ઓછી ત્રણ વખત પુનરાવર્તન થાય તેવા ચાર સ્વરોવાળા કેટલા શબ્દો બને ?
7. બહુવિકલ્પ પ્રશ્નોત્તરીની એક કસોટીમાં દરેક પ્રશ્ન માટે ચાર વિકલ્પ આપેલા છે. પ્રશ્નાવલીમાં 5 પ્રશ્નો છે. વિદ્યાર્થી સંપૂર્ણ સત્ય ઉકેલ આપવામાં નિષ્ફળ જાય તેની શક્યતાઓ કેટલી ?
8. એક સમતલમાં બે સમાંતર રેખાઓ l_1 અને l_2 આવેલી છે.
   રેખા l_1 પર m ભિન્ન બિંદુઓ $A_1, A_2, ..., A_m$ અને રેખા l_2 પર n ભિન્ન બિંદુઓ $B_1, B_2, ..., B_n$ આવેલાં છે. આ બિંદુઓ જેના શિરોબિંદુઓ હોય તેવા કેટલા ત્રિકોણ રચી શકાય ?
9. નીચે આપેલું દરેક વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલાં વિકલ્પો (a), (b), (c) અથવા (d)માંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરીને ☐ માં લખો :

   (1) જો $\binom{n}{r} = \binom{n}{r+2}$, તો r = ... (n યુગ્મ છે.) ☐
   (a) n (b) $n - 1$ (c) 0 (d) $\frac{n-2}{2}$

   (2) જો $\binom{n}{8} = \binom{n}{12}$, તો n = ... ☐
   (a) 20 (b) 10 (c) 15 (d) અશક્ય

   (3) $\binom{n}{r} = \frac{nPr}{k}$, તો k = ... ☐
   (a) $r!$ (b) $(n - r)!$ (c) $(n - r)!\, r!$ (d) $(r - 1)!$

   (4) $\binom{n}{r} = \frac{n!}{k}$, તો k = ... ☐
   (a) $r!$ (b) $(n - r)!$ (c) $(n - r)!\, r!$ (d) $[r(n - 1)]!$

(5) એક સમતોલ સિક્કાને 8 વખત ઉછાળવામાં આવે, તો શક્ય પરિણામોની સંખ્યા ...... છે. ☐

(a) 32 (b) 64 (c) 128 (d) 256

(6) પુનરાવર્તન સિવાય 3, 4, 5, 6 અંકોનો ઉપયોગ કરી બનતી તમામ સંખ્યાઓના એકમના અંકનો સરવાળો ...... છે. ☐

(a) 24 (b) 108 (c) 72 (d) 96

(7) 0, 1, 2, 3, 4 અંકોનો ઉપયોગ કરી 20 વડે વિભાજ્ય કુલ સંખ્યા .... બને. ☐

(a) 12 (b) 6 (c) 24 (d) 96

(8) એક સ્નેહમિલન સમારંભમાં દરેક વ્યક્તિ એકબીજા સાથે હસ્તધૂનન કરે છે. જો કુલ 105 વખત હાથ મીલાવવાની પ્રક્રિયા બની હોય, તો સમારંભમાં હાજર વ્યક્તિઓની કુલ સંખ્યા કેટલી હશે ? ☐

(a) 12 (b) 11 (c) 15 (d) 14

(9) જેના બધા જ અંકો ભિન્ન હોય તેવી 9 આંકડાની કુલ સંખ્યાઓ ...... છે. ☐

(a) 9! (b) 10! (c) $10! - 8!$ (d) 9(9!)

(10) એક સમતલમાં આઠ ભિન્ન બિંદુઓ આવેલાં છે. તે પૈકીનાં ત્રણ બિંદુઓ સમરેખ છે. તેમાંથી પસાર થતી રેખાઓની કુલ સંખ્યા ...... છે. ☐

(a) 28 (b) 26 (c) 56 (d) 55

(11) એક સમતલમાં 12 બિંદુઓ આવેલાં છે જે પૈકીનાં છ-છ બિંદુઓ બે સમાંતર રેખા પર આવેલાં છે. આ બિંદુઓથી કેટલા ત્રિકોણ શક્ય બને ? ☐

(a) 120 (b) 180 (c) 60 (d) 40

(12) $\binom{100}{r}$ એ મહત્તમ હોય, તો r = ... ☐

(a) 100 (b) 0 (c) 50 (d) 51

(13) 10 સમક્ષિતિજ અને 8 શિરોલંબ રેખાઓથી બનતા લંબચોરસની કુલ સંખ્યા ..... છે. ☐

(a) 1880 (b) 800 (c) 80 (d) 1260

(14) સાત + ચિહ્ન અને ચાર − ચિહ્નોને એવી રીતે હારમાં ગોઠવો કે − ચિહ્ન પાસપાસે ન આવે. આ ...... રીતે શક્ય છે. ☐

(a) ${}_8P_4$ (b) $\binom{7}{4}$ (c) $\binom{8}{4}$ (d) એક પણ નહિ.

(15) એક ગોળાકાર ડાઇનિંગ ટેબલ પર 7 વ્યક્તિઓ ...... રીતે જમવા બેસી શકે. ☐

(a) 720 (b) 80 (c) 60 (d) 5040

(16) જો $\binom{44}{r-2} = \binom{44}{r+2}$, તો r = ... ☐

(a) 33 (b) 11 (c) 22 (d) 44

(17) એક દસકોણના વિકર્ણોની કુલ સંખ્યા ...... છે. ☐

(a) 35 (b) 45 (c) 55 (d) 30

(18) જો $\binom{20}{r} = \binom{20}{r+2}$, તો $\binom{r}{2}$ = ... ☐

(a) 11 (b) 9 (c) 45 (d) 36

(19) જો $\binom{n}{r} + \binom{n}{r-1} = \binom{n+1}{x}$, તો x = ...

(a) $n - r$ (b) $r + 1$ (c) n (d) $n - r + 1$

(20) જો $\binom{a^2+a}{3} = \binom{a^2+a}{9}$, તો a = ...

(a) 3 (b) 9 (c) 12 (d) 6

(21) $\binom{10}{1} + \binom{10}{2} + \binom{11}{3} + \binom{12}{4} + \binom{13}{5}$ = ...

(a) $\binom{14}{6}$ (b) $\binom{13}{7}$ (c) $\binom{13}{6}$ (d) $\binom{14}{5}$

(22) જો $\binom{77}{r}$ મહત્તમ હોય તો r = ...

(a) 35 (b) 38.5 (c) 39 (d) 40

(23) $\binom{33}{10}$ ...... $\binom{33}{8}$.

(a) > (b) < (c) = (d) ≥

(24) 0થી ...... વચ્ચે r વધે તેમ $\binom{n}{r}$ વધે છે.

(a) n (b) $n - 1$ (c) $\frac{n}{2}$ (d) $\left[\frac{n}{2}\right]$

(25) જો $\binom{18}{10} = \binom{18}{k}$, તો k = ... ($n > 10$)

(a) n (b) 8 (c) 0 (d) $n + 1$

સારાંશ

1. ગણતરીનો મૂળભૂત સિદ્ધાંત
2. રેખીય ક્રમચય અને સૂત્રો
3. પુનરાવર્તનયુક્ત ક્રમચય
4. સમસ્વરૂપ વસ્તુના ક્રમચય
5. વૃત્તીય ક્રમચય
6. સંચય, તેનાં સૂત્રો તથા પ્રમેયો
7. ક્રમચય તથા સંચયના વ્યાવહારિક પ્રશ્નો

પ્રકરણ **8**

સુરેખ અસમતાઓ

8.1 પ્રાસ્તાવિક

આગળનાં ધોરણોમાં આપણે એક ચલનાં સુરેખ સમીકરણો તથા બે ચલની સુરેખ સમીકરણ સંહતિનો ઉકેલ મેળવ્યો છે. કેટલાંક વિધાનો દ્વારા વર્ણવેલા કૂટપ્રશ્નોને પણ આપણે આવાં સમીકરણોમાં પરિવર્તિત કર્યાં હતાં અને તેમના ઉકેલ મેળવ્યા હતા. વ્યવહારમાં પ્રત્યેક કૂટપ્રશ્નનું પરિવર્તન હંમેશાં સમીકરણમાં જ થાય તે જરૂરી નથી કે શક્ય પણ નથી. આ પરિવર્તનોમાં $<, >, \leq$ અથવા $\geq$ જેવા અસમતાના સંકેતો પણ ઉદ્‌ભવી શકે. ઉદાહરણ તરીકે, આ વર્ષમાં મે માસ દરમિયાન અમદાવાદનું ઉષ્ણતામાન 28° C થી 44° C વચ્ચે હોઈ શકે એટલે કે કોઈ એક નિશ્ચિત દિવસે નોંધેલ ઉષ્ણતામાન x હોય, તો $28 < x < 44$ થાય. આમ $28 < x$ તથા $x < 44$.

સરકારી કર્મીઓનો પગાર વધારો ₹ 800થી ₹ 30,000 વચ્ચે છે. આનો અર્થ એ કે પગારમાં વધારો x હોય, તો $800 < x < 30000$. ઋચા એક કલાકમાં ઓછામાં ઓછા 20 દાખલા (કૂટપ્રશ્નો) ગણી શકે છે. એટલે કે ઋચાએ એક કલાકમાં ગણેલા દાખલાઓની સંખ્યા x હોય, તો $x \geq 20$. દેવ પોતાના ખિસ્સા-ખર્ચમાંથી વધુમાં વધુ 10 પેન્સિલ ખરીદી શકે. એટલે કે દેવ ખરીદી શકે તે પેન્સિલોની સંખ્યા x હોય તો $x \leq 10$. આમ, $x \leq 10$ અથવા $x \geq 20$ કે $28 < x < 44$ જેવી ગાણિતિક અભિવ્યક્તિને **એક ચલની સુરેખ અસમતા (Linear Inequalities)** કહે છે. $20x + 31y \leq 500$ એ **બે ચલમાં સુરેખ અસમતા**નું ઉદાહરણ છે.

ગણિત, વિજ્ઞાન, આંકડાશાસ્ત્રમાં મહત્તમ ન્યૂનતમના પ્રશ્નો (Optimization) વગેરેમાં અસમતાઓ ઉપયોગી છે.

8.2 અસમતાઓ

રોજબરોજના વ્યવહારમાં અસમતા કેવી રીતે ઉદ્‌ભવે ? આપણે જ્યારે બે રાશિઓની સરખામણી કરીએ ત્યારે તે સમાન હોવા કરતાં અસમાન હોવાની સંભાવના વધારે હોય છે. જો તમે x મિનિટમાં વાર્ષિક પ્રશ્નપત્ર પૂરું લખી લો તો $0 \leq x \leq 180$. અમદાવાદ તથા મુંબઈ વચ્ચેનું અંતર 500 કિમી (આશરે) છે. જો અમદાવાદ તથા વડોદરા વચ્ચેનું અંતર x કિમી હોય, તો $x < 500$ અને જો અમદાવાદ તથા પૂણે વચ્ચેનું અંતર y કિમી હોય, તો $y > 500$.

હવે આપણે કેટલાક કૂટપ્રશ્નો વિચારીએ.

(1) દેવી પોતાના પર્સમાં ₹ 500 લઈ કેટલાક ફૂલસ્કેપ ચોપડા ખરીદવા જાય છે. જો આવા એક ડઝન ચોપડાની કિંમત ₹ 60 હોય અને દેવી x ડઝન ચોપડા ખરીદે, તો $60x \leq 500$. જો તે y નંગ ચોપડા ખરીદે તો $5y \leq 500$. (એક નંગના $\frac{60}{12}$ = ₹ 5)

(2) દેવ કેટલાક શર્ટ અને પેન્ટ ખરીદવા શોપિંગ મોલમાં જાય છે. પ્રત્યેક શર્ટ (ખમીશ)ની કિંમત ₹ 200 અને પ્રત્યેક પેન્ટ (પાટલૂન)ની કિંમત ₹ 500 છે. તે ₹ 5000 માંથી x શર્ટ અને y પેન્ટ ખરીદે છે. તેનો ખર્ચ $200x + 500y$ થાય અને તેથી $200x + 500y \leq 5000$.

ઉપરના પ્રશ્નોમાં x અને y અનૃણ પૂર્ણાંકો જ હોઈ શકે. હવે આપણે નીચેની પરિસ્થિતિને સમજીએ.

(3) આપણે $a, b \in R$ માટે $[3, 5]$માં આવેલા સુરેખ સમીકરણ $ax + b = 0$ ના ઉકેલોની માહિતી મેળવવી છે. આ માહિતીમાં આપણે જેથી $3 \leq x \leq 5$ તથા $ax + b = 0$ થાય એવી વાસ્તવિક સંખ્યાઓ x નો ગણ મેળવવો પડે.

આપણે જાણીએ છીએ કે, ત્રિવિધ વિકલ્પના નિયમ પ્રમાણે પ્રત્યેક વાસ્તવિક સંખ્યા a તથા b ને સંગત $a < b$ અથવા $a = b$ અથવા $a > b$ સંબંધ શક્ય છે. જો $a = b$ હોય, તો આપણે કહીએ છીએ કે a તથા b સમાન છે. **જો $a \neq b$ તો $a < b$ અથવા $a > b$. અહીં $a < b$ અને $a > b$ને ચુસ્ત અસમતા (Strict Inequalities) કહે છે.** કેટલીક વાર આપણે $a \leq b$ અથવા $a \geq b$ જેવી (ઉપર ઉદાહરણ (3)માં છે તેવી) અસમતાઓનો વિચાર કરવો પડે છે.

$a \leq b$ એટલે $a < b$ અથવા $a = b$. (વાંચો : a લેસ ધેન ઓર ઈક્વલ ટુ b)

$a \geq b$ એટલે $a > b$ અથવા $a = b$. (વાંચો : a ગ્રેટર ધેન ઓર ઈક્વલ ટુ b)

$a \leq b$ તથા $a \geq b$ જેવી અસમતાઓને મિશ્ર અસમતા (Slack Ineqalities) કહે છે.

આપણે અસમતાઓ માટે નીચેની પૂર્વધારણાઓ યાદ કરીએ : $a, b, c \in R$.

(1) જો $a > 0$ અને $b > 0$ તો $a + b > 0$ અને $ab > 0$.

(2) $a < 0 \Leftrightarrow -a > 0$

અસમતાના નીચેના ગુણધર્મોનો આપણે ઉપયોગ કરીશું :

(1) $a > b \Leftrightarrow a - b > 0$

(2) $a > b$ અને $b > c \Rightarrow a > c$ (સાબિત કરી શકશો ?) **(પરંપરિતતા)**

(3) $a > b \Rightarrow a + c > b + c$

(4) $a > b, c > 0 \Rightarrow ac > bc$ અને

$a > b, c < 0 \Rightarrow ac < bc$

(5) $a > b, c > d \Rightarrow a + c > b + d$ (સાબિત કરો જોઈએ !)

આપણે નીચેના જેવી એકચલની સુરેખ અસમતાઓનો અભ્યાસ કરવાનો રહેશે :

(1) $ax + b < c$ (2) $ax + b > c$ (3) $ax + b \leq c$ (4) $ax + b \geq c$

અથવા તો બીજા સ્વરૂપે લખતાં,

(1) $ax + b < 0$ (2) $ax + b > 0$ (3) $ax + b \leq 0$ (4) $ax + b \geq 0$

($b - c$ ના સ્થાને b લખતાં)

8.3 એક ચલમાં સુરેખ અસમતાનો ઉકેલ

વિભાગ 8.2ના પ્રશ્ન (1) માં આપણી પાસે અસમતા $60x \leq 500$ હતી.

જો $x = 2$ તો $120 \leq 500$ સત્યવિધાન છે.

$x = 5$ માટે $300 \leq 500$ પણ સત્યવિધાન છે.

પરંતુ $x = 10$ લેતાં, $600 \leq 500$ મિથ્યા વિધાન મળે છે.

ચલની જે કિંમતો માટે અસમતા સત્યવિધાન દર્શાવે તેવી કિંમતોને અસમતાનો ઉકેલ કહે છે. આવા તમામ ઉકેલોથી અસમતાનો ઉકેલગણ બને છે.

વ્યાખ્યા : અસમતામાં આપેલ ચલની જે કિંમતો દ્વારા અસમતામાંથી સત્યવિધાન નિપજે તેવી ચલની કિંમતોથી બનતા ગણને અસમતાનો ઉકેલ ગણ (Solution Set) કહે છે.

ઉદાહરણ 1 : ઉકેલો : $20x + 9 < 300$ જ્યાં (1) $x \in N$ (2) $x \in Z$ (3) $x \in R$.

ઉકેલ : $20x + 9 < 300 \Leftrightarrow 20x < 291$

$$\Leftrightarrow x < \frac{291}{20} = 14.55$$

(1) x પ્રાકૃતિક સંખ્યા હોય તો $x = 1, 2, 3, 4, ..., 14$.

$\therefore$ N માં અસમતાનો ઉકેલ ગણ $\{1, 2, 3, 4, ..., 14\} = \{x \mid x \in N, x \le 14\}$

(2) જો $x \in Z$ તો $x = 0, -1, -2, ...$ વગેરે પણ લઈ શકાય.

$\therefore$ Z માં અસમતાનો ઉકેલ ગણ $\{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, ..., 14\} = \{x \mid x \in Z, x \le 14\}$

(3) R માં ઉકેલ ગણ $\{x \mid x < 14.55, x \in R\}$

ઉદાહરણ 2 : ઉકેલો : $2x - 3 > 5$ જ્યાં (1) $x \in N$ (2) $x \in R$.

ઉકેલ : $2x - 3 > 5 \Leftrightarrow 2x > 8$

$$\Leftrightarrow x > 4$$

(1) અસમતાનો N માં ઉકેલ ગણ $\{5, 6, 7, 8, ...\} = \{x \mid x \ge 5, x \in N\}$

(2) અસમતાનો R માં ઉકેલ ગણ $(4, \infty) = \{x \mid x \in R, x > 4\}$

ઉદાહરણ 3 : ઉકેલો : $5x < 7$, જ્યાં (1) $x \in N$ (2) $x \in R$.

ઉકેલ : (1) $5x < 7 \Leftrightarrow x < \frac{7}{5} = 1.4$

$\therefore$ અસમતાનો N માં ઉકેલ ગણ $\{1\}$ છે.

(2) અસમતાનો R માં ઉકેલ ગણ $\left\{x \mid x \in R, x < \frac{7}{5}\right\} = \left(-\infty, \frac{7}{5}\right)$

ઉદાહરણ 4 : ઉકેલો : $-2x \ge 10$, (1) $x \in N$ (2) $x \in Z$ (3) $x \in R$.

ઉકેલ : $-2x \ge 10 \Leftrightarrow x \le -5$ (જુઓ કે **-2 વડે ભાગતાં અસમતાની નિશાની ઊલટાઈ જાય છે.**)

(1) ધારો કે $x \in N$. આથી N માં અસમતાનો ઉકેલ ગણ $\emptyset$ છે.

(2) ધારો કે $x \in Z$. આથી Z માં અસમતાનો ઉકેલ ગણ $\{..., -8, -7, -6, -5\}$ છે.

(3) ધારો કે $x \in R$. આથી R માં અસમતાનો ઉકેલ ગણ $(-\infty, -5]$ છે.

ઉદાહરણ 5 : ઉકેલો : $2(x - 1) + 1 > 3 - (-1 - 2x)$, $x \in R$

ઉકેલ : $2(x - 1) + 1 > 3 - (-1 - 2x) \Leftrightarrow 2x - 2 + 1 > 3 + 1 + 2x$

$$\Leftrightarrow 2x - 2x > 5$$

$$\Leftrightarrow 0 > 5$$

આ મિથ્યા છે.

$\therefore$ કોઈ પણ $x \in R$ માટે આ અસમતા શક્ય નથી.

$\therefore$ ઉકેલ ગણ $\emptyset$ છે.

☛ **નોંધ** જો અસમતામાં $>$ ના બદલે $<$ નિશાની હોત તો ઉપરના પ્રશ્નમાં $0 < 5$ મળે. જે કોઈ પણ $x \in R$ માટે સત્ય છે. આથી ઉકેલ ગણ R બન્યો હોત.

ઉદાહરણ 6 : ઉકેલો : $3(2x - 1) + 5 \le \frac{1}{2}(x + 15),\ x \in R$.

ઉકેલ : $3(2x - 1) + 5 \le \frac{1}{2}(x + 15) \Leftrightarrow 6(2x - 1) + 10 \le x + 15$

$\Leftrightarrow 12x - 6 + 10 \le x + 15$

$\Leftrightarrow 11x \le 15 + 6 - 10 = 11$

$\Leftrightarrow x \le 1$

$\therefore$ ઉકેલ ગણ $(-\infty, 1]$ છે.

ઉદાહરણ 7 : ઉકેલો : $\frac{3 - 2x}{5} < \frac{x}{3} + 2,\ x \in R$.

ઉકેલ : $\frac{3 - 2x}{5} < \frac{x}{3} + 2 \Leftrightarrow \frac{3 - 2x}{5} - \frac{x}{3} < 2$

$\Leftrightarrow \frac{3(3 - 2x) - 5x}{15} < 2$

$\Leftrightarrow 9 - 6x - 5x < 30$ $\quad (15 > 0)$

$\Leftrightarrow 9 - 11x < 30$

$\Leftrightarrow -11x < 21$

$\Leftrightarrow x > \frac{-21}{11}$ $\quad (-11 < 0)$

$\therefore$ ઉકેલ ગણ $\left(\frac{-21}{11}, \infty\right)$ છે.

ઉદાહરણ 8 : ઉકેલો : $\frac{2x + 3}{x - 2} < \frac{1}{2},\ x \in R$.

ઉકેલ : $\frac{2x + 3}{x - 2} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2x + 3}{x - 2} - \frac{1}{2} < 0$

$\Leftrightarrow \frac{2(2x + 3) - (x - 2)}{2(x - 2)} < 0$

$\Leftrightarrow \frac{3x + 8}{2(x - 2)} < 0$

આથી $(3x + 8 > 0$ અને $2x - 4 < 0)$ અથવા $(3x + 8 < 0$ અને $2x - 4 > 0)$

$\therefore$ $(x > -\frac{8}{3}$ અને $x < 2)$ અથવા $(x < -\frac{8}{3}$ અને $x > 2)$

$\therefore$ $x < -\frac{8}{3}$ હોય તથા $x > 2$ હોય તે શક્ય નથી.

$\therefore$ $x \in \left(\frac{-8}{3}, 2\right)$

$\therefore$ ઉકેલ ગણ $\left(\frac{-8}{3}, 2\right)$ છે.

ઉદાહરણ 9 : ઉકેલો : $\frac{x}{x-3} > 1, x \in R$.

ઉકેલ : $\frac{x}{x-3} > 1 \Leftrightarrow \frac{x}{x-3} - 1 > 0$

$\Leftrightarrow \frac{x-(x-3)}{x-3} > 0$

$\Leftrightarrow \frac{3}{x-3} > 0$

$\Leftrightarrow x - 3 > 0$ કારણ કે $3 > 0$

$\Leftrightarrow x > 3$

$\therefore$ ઉકેલ ગણ $(3, \infty)$ છે.

સ્વાધ્યાય 8.1

માગ્યા પ્રમાણે નીચેની અસમતાઓના ઉકેલ શોધો :

1. $x + 2 < -8$, જ્યાં (1) $x \in N$ (2) $x \in Z$ (3) $x \in R$

2. $4x \geq 16$, જ્યાં (1) $x \in N$ (2) $x \in Z$ (3) $x \in R$

3. $-5x \leq -20$, જ્યાં (1) $x \in N$ (2) $x \in Z$ (3) $x \in R$

4. $-6x \leq 18$, જ્યાં (1) $x \in N$ (2) $x \in Z$ (3) $x \in R$

5. $5x - 17 > 8, x \in R$

6. $2x - 8 < 10, x \in R$

7. $3x - 22 \geq 5, x \in R$

8. $4x - 17 \leq -1, x \in R$

9. $\frac{x+1}{2} > 6(x + 2), x \in R$

10. $\frac{x+7}{3} - 5 < \frac{2x+1}{9} - 3, x \in R$

11. (1) $\frac{4}{x-3} < 1, x \in R$ (2) $\frac{3x-2}{2x-7} > 0, x \in R$

12. (1) $\frac{x-2}{x} > \frac{1}{3}, x \in R$ (2) $\frac{1}{x-2} \leq 5, x \in R$ (3) $\frac{x-2}{x+5} > 3, x \in R$

13. $\frac{x-1}{x} + 2 > 5, x \in R$

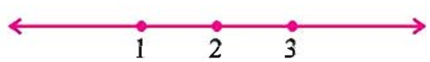
14. $2(x - 1) + 3(x - 2) \leq 5(x + 1), x \in R$

15. $3(x - 1) + 2(x - 2) \leq 5(x + 2), x \in R$

*

8.4 એક ચલમાં સુરેખ અસમતાના ઉકેલનું સંખ્યારેખા પર નિરૂપણ

$5x < 20$ અસમતાનો N માં ઉકેલ {1, 2, 3} છે તે સ્પષ્ટ છે. આ ઉકેલનું આપણે સંખ્યારેખા પર આકૃતિ 8.1 પ્રમાણે નિરૂપણ કરીએ.



આકૃતિ 8.1

જો આપણે Rમાં ઉકેલ વિચારીએ તો તે ઉકેલ $(-\infty, 4)$નું નિરૂપણ આકૃતિ 8.2 મુજબ થાય :

આકૃતિ 8.2

$2x \geq 4$નો R માં ઉકેલ $[2, \infty)$ આકૃતિ 8.3 પ્રમાણે દર્શાવાશે :

આકૃતિ 8.3

જો અંતરાલના અંત્યબિંદુનો ઉકેલમાં સમાવેશ થતો હોય તો તેની આસપાસ ઘેરું કુંડાળું ● કરાય છે અને અંતરાલને ગાઢી રેખા વડે દર્શાવાય છે. જો અંતરાલના અંત્યબિંદુનો સમાવેશ ઉકેલમાં થતો ન હોય તો તેની આસપાસ પોલું વર્તુળ o કરાય છે. $-\infty$ અને ∞ માત્ર સંકેત છે. ઉકેલના ભાગ નથી. સાન્ત ઉકેલ હોય, તો તેના પ્રત્યેક સભ્યની આસપાસ ઘેરું વર્તુળ કરાય છે.

ઉદાહરણ 10 : અસમતા $\frac{1}{x-4} < 0$, $x \in$ Rનો ઉકેલ શોધી તેને સંખ્યારેખા પર દર્શાવો.

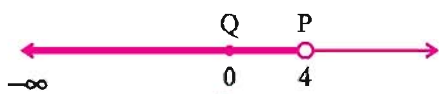
ઉકેલ : $\frac{a}{b} < 0$ અને $a > 0 \Leftrightarrow b < 0$

$$\frac{1}{x-4} < 0 \Leftrightarrow x - 4 < 0$$

$$\Leftrightarrow x < 4$$

$\therefore$ ઉકેલ ગણ $(-\infty, 4)$ છે.

સંખ્યારેખા પર આકૃતિ 8.4 પ્રમાણે ઉકેલ દર્શાવાય :



આકૃતિ 8.4

તેને $\overrightarrow{PQ} - \{P\}$ વડે દર્શાવાય.

ઉદાહરણ 11 : અસમતા $\frac{x+3}{x+5} > 1$, $x \in$ Rનો ઉકેલ શોધી તેને સંખ્યારેખા પર દર્શાવો.

ઉકેલ : $\frac{x+3}{x+5} > 1 \Leftrightarrow \frac{x+3}{x+5} - 1 > 0$

$$\Leftrightarrow \frac{x+3-x-5}{x+5} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2}{x+5} > 0$$

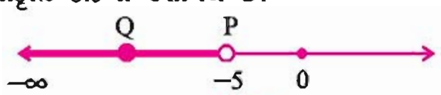
$$\Leftrightarrow \frac{2}{x+5} < 0$$

$$\Leftrightarrow x + 5 < 0$$

$$\Leftrightarrow x < -5$$

$\therefore$ ઉકેલ ગણ $(-\infty, -5)$ છે.

ઉકેલ સંખ્યારેખા પર આકૃતિ 8.5માં દર્શાવેલ છે.



આકૃતિ 8.5

તેને $\overrightarrow{PQ} - \{P\}$ વડે પણ દર્શાવાય.

ઉદાહરણ 12 : $3x \le 18$ના ઉકેલ ગણને (1) $x \in N$ (2) $x \in R$ માટે સંખ્યારેખા પર દર્શાવો.

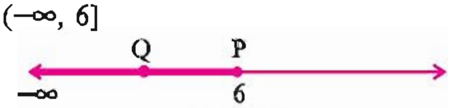
ઉકેલ : (1) $3x \le 18 \Leftrightarrow x \le 6$

$\Leftrightarrow x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

આકૃતિ 8.6

આપેલ અસમતાનો ઉકેલ આકૃતિ 8.6માં દર્શાવેલ છે.

(2) $x \le 6 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 6]$



આકૃતિ 8.7

આપેલ અસમતાનો ઉકેલ આકૃતિ 8.7માં દર્શાવેલ છે.

તેને $\overrightarrow{PQ}$ દ્વારા દર્શાવી શકાય.

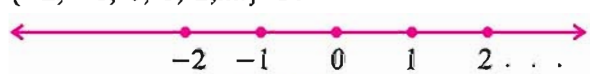
ઉદાહરણ 13 : $5x \ge -10$નો ઉકેલ (1) $x \in N$ (2) $x \in Z$ (3) $x \in R$ માટે સંખ્યારેખા પર દર્શાવો.

ઉકેલ : (1) $5x \ge -10 \Leftrightarrow x \ge -2$. આથી N માં ઉકેલ N પોતે જ છે.

આકૃતિ 8.8

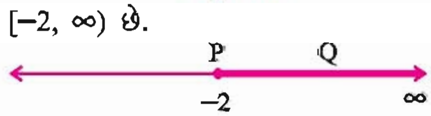
(2) $5x \ge -10 \Leftrightarrow x \ge -2$

Z માં ઉકેલ $\{-2, -1, 0, 1, 2, ...\}$ છે.



આકૃતિ 8.9

(3) R માં ઉકેલ ગણ $[-2, \infty)$ છે.



આકૃતિ 8.10

આકૃતિ 8.10 માં $\overrightarrow{PQ}$ ઉકેલ દર્શાવે છે.

હવેથી જો અન્યથા નિર્દિષ્ટ ન હોય તો ઉકેલ ગણ R માં લઈશું.

ઉદાહરણ 14 : $5x - 3 > 3x - 5$, $x \in R$નો ઉકેલ મેળવો અને તેને સંખ્યા રેખા પર દર્શાવો.

ઉકેલ : $5x - 3 > 3x - 5 \Leftrightarrow 5x - 3x > 3 - 5$

$\Leftrightarrow 2x > -2$

$\Leftrightarrow x > -1$

આથી ઉકેલ ગણ $(-1, \infty)$ છે.

સંખ્યારેખા પર તેને આકૃતિ 8.11માં દર્શાવેલો છે.

આકૃતિ 8.11

$\overrightarrow{PQ} - \{P\}$ ઉકેલ ગણ દર્શાવે છે.

ઉદાહરણ 15 : ઉકેલો : $\frac{2x}{3} \geq \frac{5x-2}{5} - \frac{7x-5}{2}$. સંખ્યારેખા પર ઉકેલ દર્શાવો.

ઉકેલ : અહીં છેદનો લ.સા.અ. 30 છે. આથી 30 વડે બંને બાજુએ ગુણતાં

$\frac{2x}{3} \geq \frac{5x-2}{5} - \frac{7x-5}{2} \Leftrightarrow 20x \geq 6(5x - 2) - 15(7x - 5)$

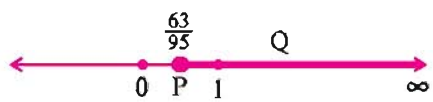
$\Leftrightarrow 20x \geq 30x - 12 - 105x + 75$

$\Leftrightarrow 105x + 20x - 30x \geq 75 - 12$

$\Leftrightarrow 95x \geq 63$

$\Leftrightarrow x \geq \frac{63}{95}$

$\therefore$ આથી ઉકેલ ગણ $\left[\frac{63}{95}, \infty\right)$ છે. તેનું આલેખન આકૃતિ 8.12માં કરેલ છે.



આકૃતિ 8.12

$\overrightarrow{PQ}$ અસમતાનો ઉકેલ દર્શાવે છે.

ઉદાહરણ 16 : નીચેની અસમતાનો ઉકેલ ગણ સંખ્યારેખા પર દર્શાવો.

$\frac{2x-1}{3} + 5 < \frac{3x-1}{2} - 2.$

ઉકેલ : $2(2x - 1) + 30 < 3(3x - 1) - 12$

$\Leftrightarrow 4x + 28 < 9x - 15$

$\Leftrightarrow 5x > 43$

$\Leftrightarrow x > \frac{43}{5} = 8.6$

$\therefore$ ઉકેલ ગણ (8.6, ∞) છે.
તેનું આલેખન આકૃતિ 8.13માં કરેલ છે.

આકૃતિ 8.13

$\overrightarrow{PQ}$ − {P} ઉકેલ ગણ દર્શાવે છે.

સ્વાધ્યાય 8.2

નીચેની અસમતાઓના ઉકેલ ગણ મેળવો અને તેમને સંખ્યારેખા પર દર્શાવો : ($x \in R$).

1. $5x - 7 > 7x - 5$

2. $3x + 5 < 5x + 3$

3. $\frac{x}{3} + 5 \geq \frac{x}{2} + 7$

4. $\frac{3x}{2} + 15 \leq \frac{2x}{3} + 6$

5. $\frac{x-1}{2} + 5 \geq \frac{2x-1}{3} + 15$

6. $\frac{2x+3}{5} + \frac{7x+1}{3} \geq \frac{3x-1}{2}$

7. $\frac{4x+1}{9} > \frac{9x+1}{4} - 2$

8. $\frac{x}{3} \geq \frac{2x-1}{3} + \frac{5x-3}{7}$

9. $\frac{x}{x-2} < 0$

10. $\frac{1}{x-1} \geq 0$

11. $\frac{x-2}{x} > 1$

12. $\frac{x+3}{x} \leq 1$

*

એક ચલમાં સુરેખ અસમતાઓની સંહતિ

100 ગુણની પરીક્ષામાં ઉત્તીર્ણ થવા સુરેન્દ્રને 36 કે તેથી વધુ ગુણ મેળવવા આવશ્યક છે. આથી જો તે પરીક્ષામાં ઉત્તીર્ણ થાય અને તેણે મેળવેલ ગુણ x હોય, તો $x \geq 36$ અને $x \leq 100$.

આકૃતિ 8.14 અને આકૃતિ 8.15 અનુક્રમે $x \geq 36$ તથા $x \leq 100$ ના ઉકેલ ગણ દર્શાવે છે.

આકૃતિ 8.14

$\overrightarrow{AB}$ અસમતા $x \geq 36$ નો ઉકેલ ગણ છે.

આકૃતિ 8.15

$\overrightarrow{BA}$ અસમતા $x \leq 100$ નો ઉકેલ ગણ છે.

આમ $36 \leq x \leq 100$ અસમતા યુગ્મનો ઉકેલ મેળવવા જતાં આપણને $\overline{AB}$ અસમતા યુગ્મનો ઉકેલ ગણ મળે છે.

આકૃતિ 8.16

ઉદાહરણ 17 : અસમતાઓ $4x \geq 8$ અને $5x < 20$, $x \in R$ ઉકેલો અને ઉકેલોને સંખ્યારેખા પર દર્શાવો.

ઉકેલ : $4x \geq 8 \Leftrightarrow x \geq 2$

આથી ઉકેલ ગણ $[2, \infty)$ છે.

આકૃતિ 8.17

આકૃતિ 8.17 માં $\overrightarrow{AB}$ ઉકેલ ગણ દર્શાવે છે.

$5x < 20 \Leftrightarrow x < 4$

આથી ઉકેલ ગણ $(-\infty, 4)$ છે.

આકૃતિ 8.18

આકૃતિ 8.18 માં $\overrightarrow{BA} - \{B\}$ ઉકેલ ગણ દર્શાવે છે.

આથી અસમતા સંહતિનો ઉકેલગણ $[2, 4)$ છે.

આકૃતિ 8.19

આકૃતિ 8.19 માં $\overline{AB} - \{B\}$ ઉકેલ ગણ દર્શાવે છે.

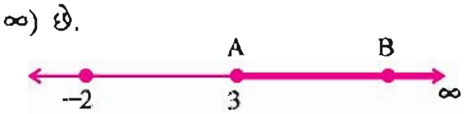
ઉદાહરણ 18 : આપેલ અસમતા સંહતિનો ઉકેલ સંખ્યારેખા પર દર્શાવો : $x \geq 3$ અને $-3x \leq 6$

ઉકેલ : $-3x \leq 6 \Leftrightarrow x \geq -2$

આમ, $x \geq -2$ અને $x \geq 3$.

$\therefore$ $x \geq 3$ બંને અસમતાઓનું સમાધાન કરે છે.

$\therefore$ ઉકેલ ગણ $[3, \infty)$ છે.



આકૃતિ 8.20

આકૃતિ 8.20માં $\overrightarrow{AB}$ ઉકેલ ગણ દર્શાવે છે.

ઉદાહરણ 19 : અસમતા સંહતિ $2x > 4$ અને $2x < 4$, $x \in R$ ઉકેલો અને આલેખમાં દર્શાવો.

ઉકેલ : $2x > 4 \Leftrightarrow x > 2$

$\therefore$ ઉકેલ ગણ $(2, \infty)$ છે. (i)

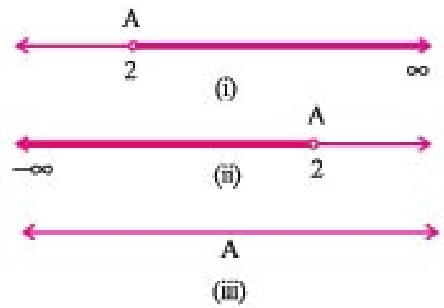
$2x < 4 \Leftrightarrow x < 2$

$\therefore$ ઉકેલ ગણ $(-\infty, 2)$ છે. (ii)

ઉકેલ ગણ (i) અને (ii) અનુક્રમે આકૃતિ 8.21 (i) અને (ii)માં દર્શાવેલ છે.

સ્પષ્ટ છે કે ઉકેલ ગણ $\emptyset$ છે.

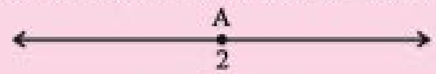
(કોઈ ઘટ્ટ રેખા કે બિંદુ આલેખમાં નથી.)



આકૃતિ 8.21

નોંધ (1) જો $2x \geq 4$ તથા $2x < 4$ કે $2x > 4$ અને $2x \leq 4$ કોઈ એક જ અસમતા સંહતિ હોય, તોપણ ઉકેલ ગણ $\emptyset$ જ થયો હોત.

(2) જો $2x \geq 4$ અને $2x \leq 4$ બંને અસમતા આપી હોત તો ઉકેલ ગણ $\{2\}$ મળ્યો હોત.



આકૃતિ 8.22

ઉદાહરણ 20 : અસમતા સંહતિ $x \geq 17$ અને $x \leq 15$, $x \in R$ ઉકેલો.

ઉકેલ : $[17, \infty)$ અને $(-\infty, 15]$ દ્વારા આપેલ અસમતાઓના ઉકેલ ગણ આકૃતિ 8.23માં દર્શાવ્યા છે.

આકૃતિ 8.23

$\overrightarrow{BQ}$ અને $\overrightarrow{AP}$ ઉકેલ દર્શાવે છે. તેમની વચ્ચે કોઈ સામાન્ય બિંદુ નથી.

$\therefore$ અસમતા સંહતિનો ઉકેલ ગણ $\emptyset$ છે.

(દેખીતું છે કે કોઈ પણ વાસ્તવિક સંખ્યા 15 કે તેથી નાની હોય તથા 17 કે તેથી મોટી હોય તે શક્ય નથી.)

સ્વાધ્યાય 8.3

નીચેની અસમતાઓ ઉકેલો અને તેમના ઉકેલ ગણ સંખ્યા રેખા પર દર્શાવો :

1.	$x \geq 3$	$x \leq 5$	$x \in R$
2.	$x > 3$	$x < 8$	$x \in R$
3.	$x \geq 4$	$x < 6$	$x \in R$
4.	$x > 4$	$x \leq 6$	$x \in R$
5.	$x \geq 3$	$x \leq 2$	$x \in R$
6.	$-2x \geq 4$	$3x \leq -6$	$x \in R$
7.	$-2x \geq -10$	$2x \geq 4$	$x \in R$

8. $3x - 1 \geq 5$ $\quad x + 2 \leq -1$ $\quad x \in R$

9. $2x - 7 \leq 11$ $\quad 3x + 4 < -5$ $\quad x \in R$

10. $x - 3 < 5$ $\quad 3x + 5 > 2$ $\quad x \in R$

*

8.5 બે ચલમાં સુરેખ અસમતા

બે ચલમાં સુરેખ પદાવલિનું પ્રમાણિત સ્વરૂપ $ax + by + c$ છે. જો $a, b, c \in R$ અને $a^2 + b^2 \neq 0$ તો સમીકરણ $ax + by + c = 0$ ને x તથા y માં સુરેખ સમીકરણ કહે છે. ($a^2 + b^2 \neq 0$ નો અર્થ એ કે a તથા b પૈકી ઓછામાં ઓછો એક તો શૂન્યેતર છે જ.)

સમતલ R^2 માં તેનો આલેખ રેખા છે. રેખા પરનું પ્રત્યેક બિંદુ સમીકરણ $ax + by + c = 0$નું સમાધાન કરે છે અને આથી ઊલટું $ax + by + c = 0$ નું સમાધાન કરતું કોઈ પણ બિંદુ (x, y) એ રેખા $ax + by + c = 0$ ના આલેખ પર છે. $ax + by + c = 0$ નો કોઈ પણ ઉકેલ ક્રમયુક્ત જોડ (x, y) છે, જ્યાં $y = \frac{-ax - c}{b}$, $b \neq 0$.

જો $b = 0$, તો $a \neq 0$ હોય જ, તો ઉકેલ ગણ $\left\{\left(\frac{-c}{a}, y\right)\right\}$ છે. અહીં $y \in R$ યથેચ્છ છે.

અભિવ્યક્તિ $ax + by + c$ ને સંબંધિત ચાર સુરેખ અસમતાઓ $ax + by + c < 0$, $ax + by + c \leq 0$, $ax + by + c > 0$, $ax + by + c \geq 0$ મળે. આપણે તેના આલેખાત્મક ઉકેલનો વિચાર કરીશું. ઉદાહરણ તરીકે સુરેખ અસમતા $x + y - 2 > 0$નો વિચાર કરીએ.

$x = 1$ અને $y = 2$ લેતાં, $1 + 2 - 2 > 0$ મળે જે સત્ય છે.

આમ, (1, 2) અને તે જ રીતે (2, 1), (2, 3), (3, 2), (5, 7) વગેરે $x + y - 2 > 0$ ના ઉકેલ છે. પરંતુ (1, 1) એ $x + y - 2 > 0$નો ઉકેલ નથી. કારણ કે તેમ કરતાં $1 + 1 - 2 > 0$ એટલે કે $0 > 0$ મળે જે અસત્ય છે. તે જ રીતે (−1, −2), (1, −5), (−4, 1) વગેરે પણ $x + y - 2 > 0$ ના ઉકેલ નથી.

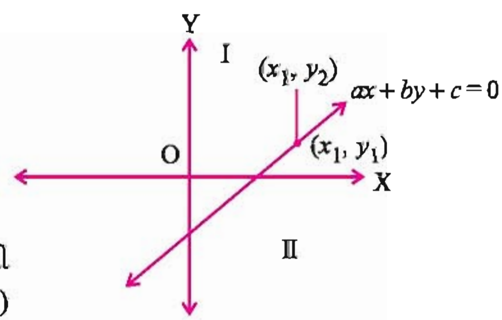
જે ક્રમયુક્ત જોડ (x, y) એ $ax + by + c > 0$ (અથવા $ax + by + c < 0$ અથવા $ax + by + c \leq 0$ અથવા $ax + by + c \geq 0$)નું સમાધાન કરે તેને $ax + by + c > 0$નો ઉકેલ કહે છે અને આવી $ax + by + c > 0$નું સમાધાન કરતી બધી જ જોડ (x, y) એ અસમતા $ax + by + c > 0$નો ઉકેલ ગણ રચે છે અને તેવાં બિંદુઓ દ્વારા $ax + by + c > 0$નો ઉકેલપ્રદેશ મળે છે. (તે જ રીતે $ax + by + c < 0$, $ax + by + c \leq 0$, $ax + by + c \geq 0$ માટે કહી શકાય.)

આલેખ પરથી ઉકેલ :

રેખા દ્વારા યામ-સમતલનું ત્રણ પરસ્પર અલગ ગણોમાં વિભાજન થાય.

(1) રેખા પરનાં બિંદુઓ

(2) રેખાની બંને બાજુના અર્ધતલમાં આવેલાં બિંદુઓ.



આકૃતિ 8.24

હવે આપણે સમજીશું કે રેખા $ax + by + c = 0$ થી બનતા કોઈ પણ અર્ધતલમાં આવેલાં બિંદુઓ (x', y') માટે $ax' + by' + c'$ની નિશાની અચળ રહે છે. (એટલે કે તમામ (x', y') માટે ધન રહે છે કે ઋણ રહે છે.)

ધારો કે $b > 0$: ધારો કે રેખા $ax + by + c = 0$ પર (x_1, y_1) કોઈ પણ બિંદુ છે.

$\therefore \quad ax_1 + by_1 + c = 0$

અર્ધતલ I માં (x_1, y_2) બિંદુ લો. (આકૃતિ 8.24) દેખીતું જ છે કે $y_2 > y_1$.

$\therefore \quad by_2 > by_1$

$\therefore \quad ax_1 + by_2 + c > ax_1 + by_1 + c = 0$

$\therefore \quad ax_1 + by_2 + c > 0$

અર્ધતલ I માંના (x_1, y_2) જેવા કોઈ પણ બિંદુ માટે આ ચકાસી શકાય.

આથી ઊલટું ધારો કે $ax_1 + by_2 + c > 0$.

(x_1, y_1) બિંદુ રેખા ઉપર લો.

$\therefore \quad ax_1 + by_1 + c = 0$

$\therefore \quad ax_1 + by_2 + c > ax_1 + by_1 + c \qquad (ax_1 + by_1 + c = 0)$

$\therefore \quad by_2 > by_1$

$\therefore \quad y_2 > y_1 \qquad (b > 0)$

આમ અર્ધતલ I માં પ્રત્યેક બિંદુ (x', y') માટે $ax' + by' + c > 0$ અને આથી ઊલટું પણ સત્ય છે.

ચકાસી શકાય કે અર્ધતલ IIમાંના પ્રત્યેક બિંદુ (x, y) માટે $ax + by + c < 0$ અને આથી ઊલટું પણ સત્ય છે.

આથી રેખા $ax + by + c = 0$ દ્વારા સમતલ R^2નું ત્રણ ભાગમાં વિભાજન થાય છે :

(1) રેખા $ax + by + c = 0$ પરનાં બિંદુઓ (x, y).

(2) જેના માટે $ax + by + c > 0$ તેવા એક અર્ધતલનાં બિંદુઓ (x, y).

(3) જેના માટે $ax + by + c < 0$ તેવા બીજા અર્ધતલનાં બિંદુઓ (x, y).

એક ચોક્કસ અર્ધતલનાં બિંદુઓ (x, y) માટે $ax + by + c = 0$ ની નિશાની અચળ રહેતી હોવાથી આપણે રેખા પર $(0, 0)$ ન હોય તો $(0, 0)$નો વિચાર કરવાનું સરળ રહે છે. જો રેખા $(0, 0)$ માંથી પસાર થતી હોય, તો આપણે $(1, 0)$, $(0, 1)$ જેવાં બીજાં બિંદુઓનો વિચાર કરવાનો રહે. $b < 0$ માટે પણ ઉપર જેવી જ ચર્ચા થઈ શકે.

જો $b = 0$ તો $a \neq 0$. આ પરિસ્થિતિમાં પદાવલિ $ax + c$ છે.

$a > 0$ હોય, તો $ax + c > 0 \Leftrightarrow x > \frac{-c}{a}$

$ax + c < 0 \Leftrightarrow x < \frac{-c}{a}$

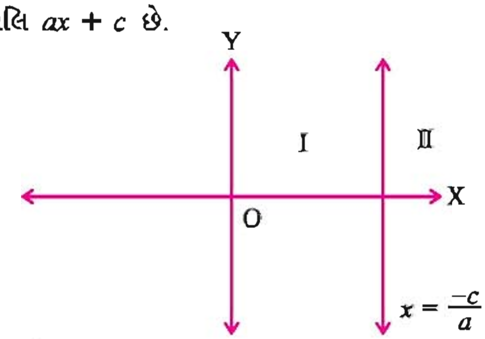
$a < 0$ હોય, તો $ax + c > 0 \Leftrightarrow x < \frac{-c}{a}$

$ax + c < 0 \Leftrightarrow x > \frac{-c}{a}$

આથી શિરોલંબ રેખા $x = \frac{-c}{a}$ દોરીએ.

$x = \frac{-c}{a}$ની ડાબી બાજુએ અર્ધતલ I માટે $x < \frac{-c}{a}$,

$x = \frac{-c}{a}$ની જમણી બાજુએ અર્ધતલ II માટે $x > \frac{-c}{a}$.



આકૃતિ 8.25

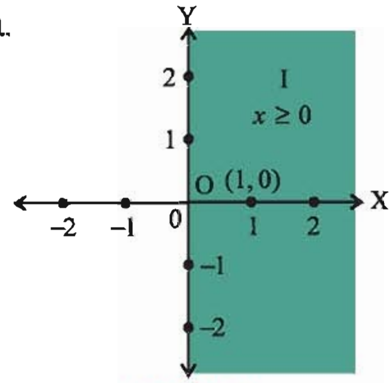
હવે એક પ્રથા (રૂઢિ) નક્કી કરીએ છીએ :

(1) $ax + by + c \geq 0$ (અથવા $\leq$)ના ઉકેલમાં રેખા $ax + by + c = 0$ નાં બિંદુઓનો પણ સમાવેશ થાય છે અને તે દર્શાવવા માટે આપણે ઘાટી રેખા $ax + by + c = 0$ દોરીએ છીએ.

(2) $ax + by + c > 0$ (અથવા < 0)ના ઉકેલમાં રેખા $ax + by + c = 0$ નાં બિંદુઓનો સમાવેશ થતો નથી અને આ દર્શાવવા માટે આપણે તૂટક રેખા $ax + by + c = 0$ દોરીએ છીએ.

ઉદાહરણ 21 : $x \geq 0$ના ઉકેલને યામ-સમતલમાં દર્શાવો.

ઉકેલ : રેખા $x = 0$ એટલે Y-અક્ષ મળે. તે (0, 0)માંથી પસાર થાય છે. આથી આપણે (1, 0)નો વિચાર કરીએ. $x = 1$ લેતાં, $1 \geq 0$ સત્ય છે.



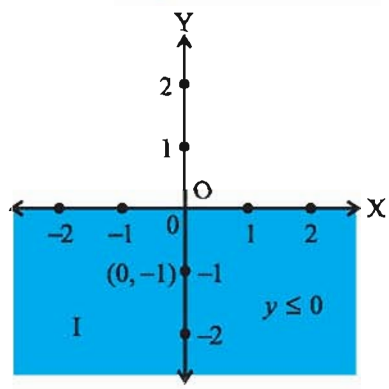
આકૃતિ 8.26

આથી આકૃતિ 8.26 ના (1, 0)ને સમાવતા રંગીન અર્ધતલ I નાં બિંદુઓ માટે $x \geq 0$. આથી અર્ધતલ I અસમતાનો ઉકેલપ્રદેશ છે. ઉકેલપ્રદેશમાં Y-અક્ષનો સમાવેશ થાય છે.

આપણે જાણીએ છીએ કે, Y-અક્ષ પરનાં તથા Y-અક્ષની જમણી બાજુનાં બિંદુઓ (x, y) માટે $x \geq 0$.

ઉદાહરણ 22 : યામ-સમતલમાં $y \leq 0$નો ઉકેલ દર્શાવો.

ઉકેલ : સમીકરણ $y = 0$ એ X-અક્ષ દર્શાવે છે અને તે (0, 0)માંથી પસાર થાય છે. (0, -1) માટે $y \leq 0$ માં $y = -1$ લેતાં $-1 < 0$ સત્ય છે.



આકૃતિ 8.27

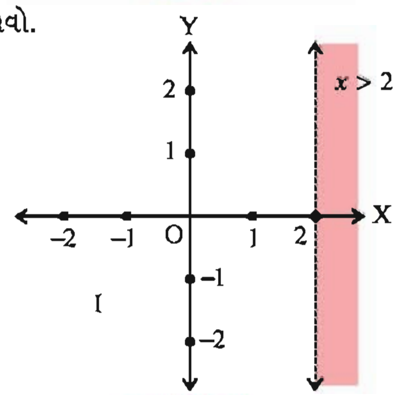
આથી ઉકેલપ્રદેશ (0, -1)ને સમાવતો X-અક્ષની નીચેનો અર્ધતલ છે અને તેમાં X-અક્ષનો પણ સમાવેશ થાય છે. (આકૃતિ 8.27 નો રંગીન ભાગ)

ઉદાહરણ 23 : $x > 2$ નો યામ-સમતલમાં ઉકેલપ્રદેશ મેળવો.

ઉકેલ : $x = 2$ શિરોલંબ રેખા છે.

$x > 2$ નો ઉકેલ મેળવવા તૂટક રેખા $x = 2$ દોરો.

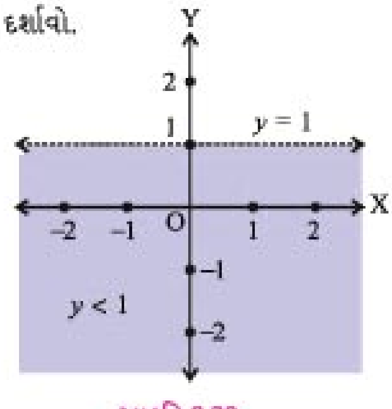
(0, 0) અસમતાના ઉકેલમાં નથી કારણ કે $0 > 2$ નથી. આથી $x > 2$ અસમતાનો યામ-સમતલમાં ઉકેલપ્રદેશ શિરોલંબ તૂટક રેખા $x = 2$ ની જમણી બાજુનો (0, 0)ને ન સમાવતો પ્રદેશ છે અને તેમાં રેખા $x = 2$ નાં બિંદુઓનો સમાવેશ થતો નથી. (આકૃતિ 8.28 નો રંગીન ભાગ)



આકૃતિ 8.28

ઉદાહરણ 24 : અસમતા $y < 1$નો ઉકેલ યામ-સમતલમાં દર્શાવો.

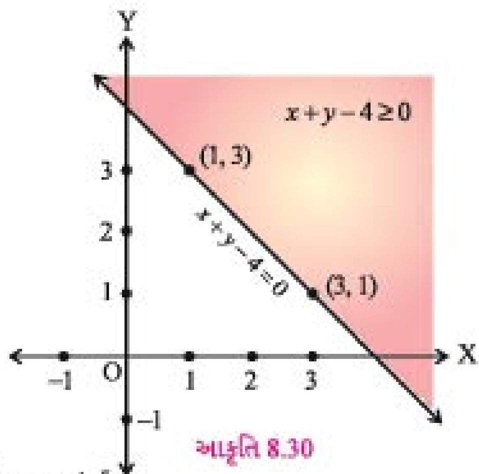
ઉકેલ : $y = 1$ સમક્ષિતિજ રેખા છે. અસમતા $y < 1$ હોવાથી $y = 1$નો આલેખ તૂટક રેખા દ્વારા દર્શાવ્યો છે. (0, 0) અસમતાનો ઉકેલ ગણ દર્શાવતા પ્રદેશમાં છે કારણ કે $0 < 1$ સત્ય છે. આથી ઉકેલ ગણ દર્શાવતો પ્રદેશ તૂટક રેખા $y = 1$ની નીચેનો (0, 0)ને સમાવતો રંગીન પ્રદેશ છે. (આકૃતિ 8.29)



આકૃતિ 8.29

ઉદાહરણ 25 : $x + y - 4 \geq 0$ નો ઉકેલ ગણ આલેખ દ્વારા દર્શાવો.

$x + y - 4 = 0$ એક રેખા દર્શાવે છે અને તે (1, 3) અને (3, 1)માંથી પસાર થાય છે (રેખા પર કોઈપણ બે બિંદુ પસંદ કરવા તમે સ્વતંત્ર છો!) (0, 0) એ $x + y - 4 \geq 0$ના ઉકેલમાં નથી કારણ કે $0 + 0 - 4 \geq 0$ સત્ય નથી. આથી ઉકેલપ્રદેશ $x + y - 4 = 0$ રેખાના (0, 0)ને ન સમાવતા અર્ધતલ તથા રેખા પરનાં બિંદુઓથી બનતો ગણ છે. (આકૃતિ 8.30 નો રંગીન ભાગ)



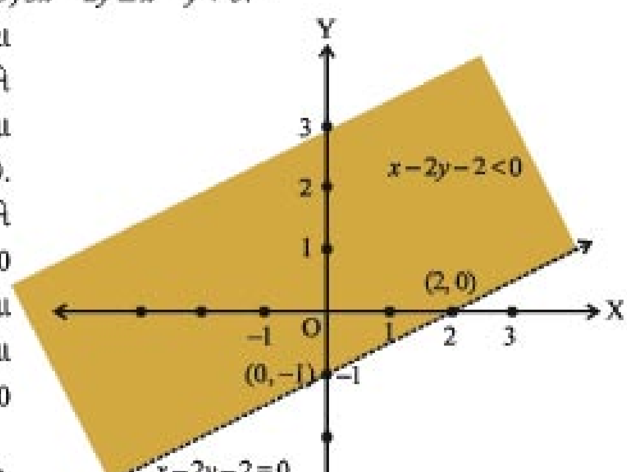
આકૃતિ 8.30

ઉદાહરણ 26 : આલેખ પર ઉકેલપ્રદેશ દર્શાવો :

(1) $x - 2y - 2 < 0$ (2) $x - y \geq 0$ (3) $3x - 2y \geq x - y + 5$.

ઉકેલ : (1) $x - 2y - 2 = 0$ દ્વારા દર્શાવાતી તૂટક રેખા દોરીએ. $x = 0$ અને $y = 0$ અનુક્રમે લેતાં જોઈ શકાશે કે રેખા (0, −1) અને (2, 0)માંથી પસાર થાય છે. સમીકરણ $x - 2y - 2 = 0$માં $x = 0$ અને $y = 0$ કિંમતો લેતાં −2 મળે છે અને $-2 < 0$ છે. આથી, (0, 0) એ $x - 2y - 2 < 0$ ના ઉકેલપ્રદેશમાં છે. આથી ઉકેલપ્રદેશ દર્શાવ્યા પ્રમાણે છે અને તેમાં રેખા $x - 2y - 2 = 0$ પરનાં બિંદુઓનો સમાવેશ થતો નથી.

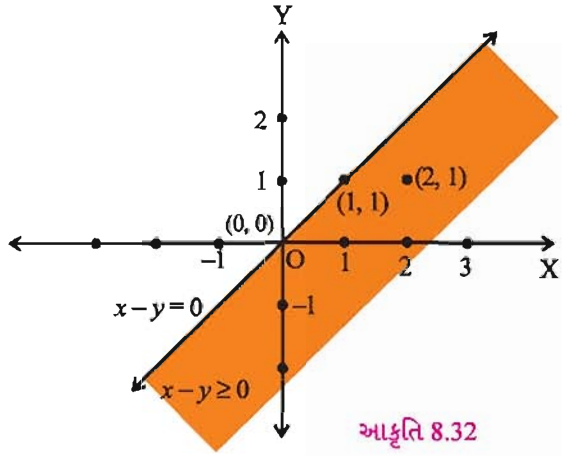
આકૃતિ 8.31 માં (0, 0)ને ન સમાવતો રંગીન પ્રદેશ ઉકેલ દર્શાવે છે.



આકૃતિ 8.31

(2) હવે $x - y \geq 0$નો વિચાર કરીએ.

રેખા $x - y = 0$ ઊગમબિંદુમાંથી પસાર થાય છે. (1, 1)માંથી પણ પસાર થાય છે. ઘાટી રેખા દોરીએ, કારણ કે અસમતા $x - y \geq 0$ છે. આપણે બિંદુ (2, 1)નો વિચાર કરીએ (જેથી $x \neq y$). (2, 1) એ $x - y = 2 - 1 \geq 0$નું સમાધાન કરે છે. (ખરેખર તો $2 - 1 > 0$). આથી ઉકેલનો પ્રદેશ (2, 1)ને સમાવતો અર્ધતલ છે અને તેમાં રેખા $x - y = 0$ બિંદુઓનો સમાવેશ પણ થઈ જાય છે. (આકૃતિ 8.32 નો રંગીન ભાગ)



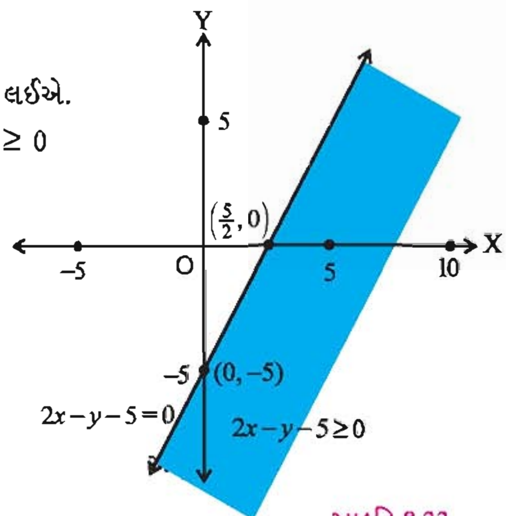
આકૃતિ 8.32

(3) હવે અસમતા $3x - 2y \geq x - y + 5$ લઈએ.

$3x - 2y \geq x - y + 5 \Leftrightarrow 2x - y - 5 \geq 0$

હવે રેખા $2x - y - 5 = 0$ દોરીએ. દેખીતું જ રેખા (0, –5) અને $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$માંથી પસાર થાય છે.

આ રેખા ઘાટી રેખા દોરવાની છે. (0, 0) માટે $0 - 0 - 5 \geq 0$ સત્ય નથી. આથી ઉકેલનો પ્રદેશ (0, 0)ને ન સમાવતો રેખા પરનાં બિંદુઓને સમાવતો આકૃતિ 8.33 ના રંગીન ભાગ દ્વારા દર્શાવાતો અર્ધતલ છે.



આકૃતિ 8.33

સ્વાધ્યાય 8.4

નીચેની અસમતાઓનો ઉકેલ ગણ આલેખ દ્વારા યામ-સમતલમાં મેળવો :

1.	$x < -1$	$x \in R$ (R^2 માં)	**2.**	$x \geq 3$	$x \in R$ (R^2 માં)
3.	$y \leq -2$	$y \in R$ (R^2 માં)	**4.**	$y > -5$	$y \in R$ (R^2 માં)
5.	$x + y - 5 > 0$	$x, y \in R$	**6.**	$x + y \geq 0$	$x, y \in R$
7.	$2x + y - 3 < 0$	$x, y \in R$	**8.**	$x + y > 1$	$x, y \in R$
9.	$2x - y + 7 > 3x + 2y - 9$	$x, y \in R$			
10.	$2x + y - 3 > x + 2y + 5$	$x, y \in R$			
11.	$3x - y \geq 0$	$x, y \in R$	**12.**	$x - 2y \leq 0$	$x, y \in R$

*

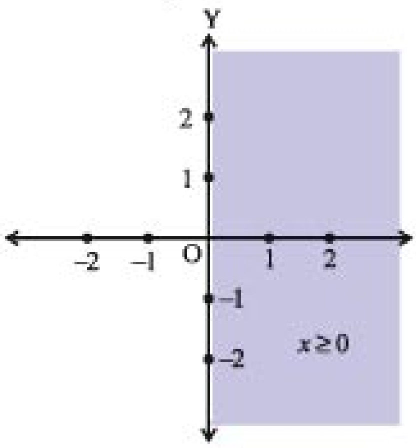
8.6 બે ચલમાં સુરેખ અસમતાઓની સંહતિ

કેટલીક વખત આપણે બે અથવા બેથી વધુ અસમતા ઉકેલવાની જરૂર પડે છે જેમકે $x + y - 5 \geq 0$, $x \geq 0$, $y \geq 0$. આવી પરિસ્થિતિમાં આપણે પ્રત્યેક અસમતાનો ઉકેલ ગણ શોધીએ છીએ અને તેમનો ઉકેલપ્રદેશનો છેદગણ માંગેલ અસમતા સંહતિનો ઉકેલ ગણ (ઉકેલપ્રદેશ) છે.

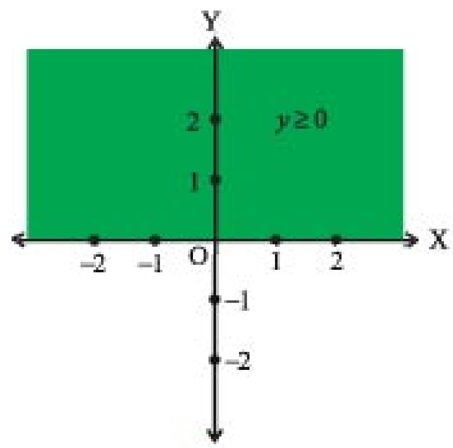
આ સંકલ્પના આપણે ઉદાહરણો દ્વારા સમજીએ.

ઉદાહરણ 27 : સુરેખ અસમતાઓની સંહતિ $x \geq 0$, $y \geq 0$ ઉકેલો.

ઉકેલ : અસમતા $x \geq 0$નો ઉકેલ આપણે જાણીએ છીએ તે Y-અક્ષની જમણી બાજુના તથા Y-અક્ષનાં બિંદુઓથી બનતો ગણ છે. તે જ રીતે $y \geq 0$નો ઉકેલપ્રદેશ X-અક્ષની ઉપરનો અર્ધતલ છે અને તે X-અક્ષ ઉપરનાં બિંદુઓને પણ સમાવે છે.

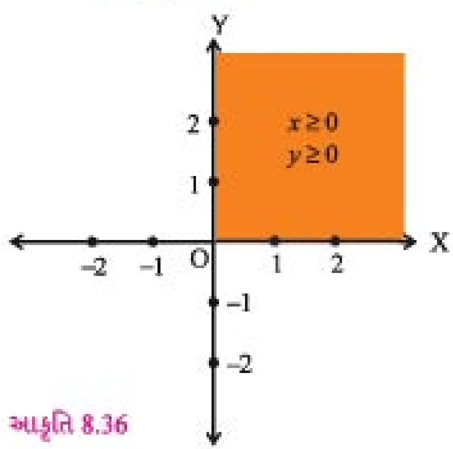


આકૃતિ 8.34



આકૃતિ 8.35

આ બંને પ્રદેશોનો છેદગણ પ્રથમ ચરણનાં બિંદુઓ, $\overrightarrow{OX}$ અને $\overrightarrow{OY}$ પરનાં બિંદુઓના યોગગણથી બનતો ગણ છે. (આકૃતિ 8.36 નો રંગીન ભાગ)

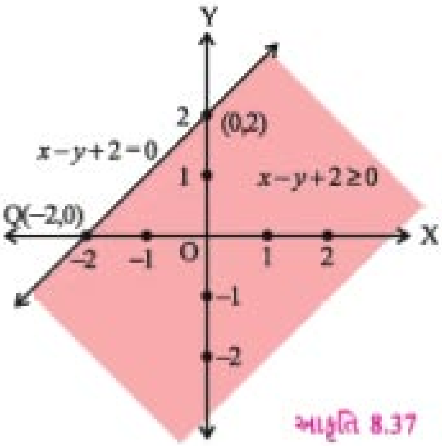


આકૃતિ 8.36

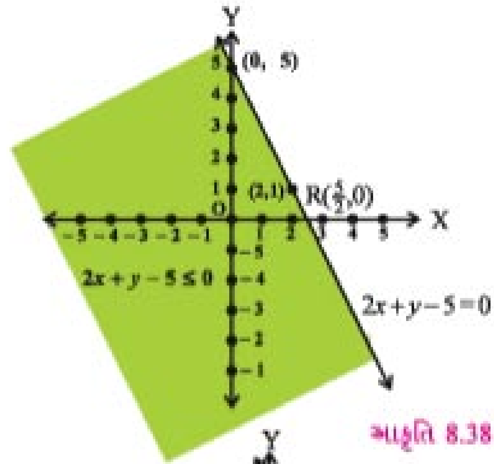
☛ નોંધ વ્યવહારના ઘણા પ્રશ્નોમાં મર્યાદા $x \geq 0$ અથવા $x > 0$ અને $y \geq 0$ અથવા $y > 0$ હોય છે.

ઉદાહરણ 28 : સુરેખ અસમતા સંહતિ $x - y + 2 \ge 0$ અને $2x + y - 5 \le 0$ ને આલેખની મદદથી ઉકેલો.

ઉકેલ : દેખીતું જ સ્પષ્ટ છે કે રેખા $x - y + 2 = 0$ એ (0, 2) અને (−2, 0)માંથી પસાર થાય છે.



આકૃતિ 8.37



આકૃતિ 8.38

$x = 0, y = 0$ લેતાં, $0 - 0 + 2 \ge 0$ સત્ય છે.

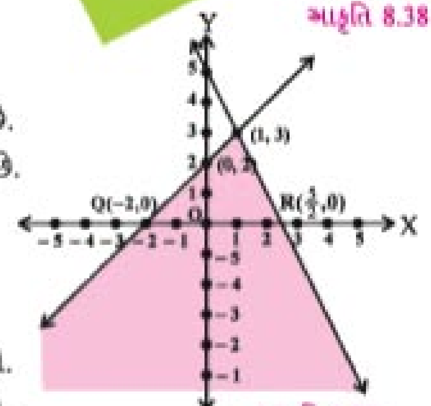
આથી, (0, 0) એ $x - y + 2 \ge 0$ના ઉકેલપ્રદેશમાં છે.

વળી, $(\frac{5}{2}, 0)$ તથા (0, 5) રેખા $2x + y - 5 = 0$ પર છે.

$x = 0$ તથા $y = 0$ લેતાં, $2x + y - 5 = -5 \le 0$ છે જ.

$\therefore$ (0, 0) એ અસમતા $2x + y - 5 \le 0$ ના ઉકેલ ગણમાં છે.

હવે બંને રેખાઓને એક જ અક્ષોની જોડ લઈ દર્શાવીએ. સંહતિના ઉકેલપ્રદેશમાં $\overrightarrow{PQ}$ અને $\overrightarrow{PR}$ તથા દર્શાવેલ પ્રદેશ મળે.

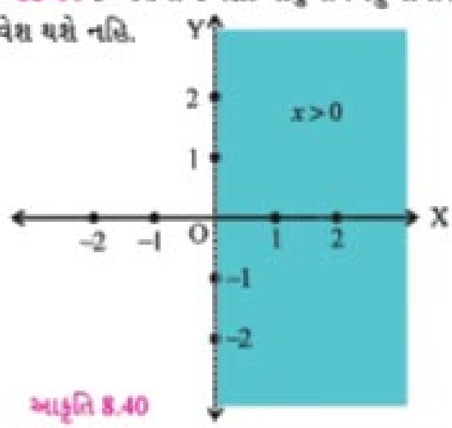


આકૃતિ 8.39

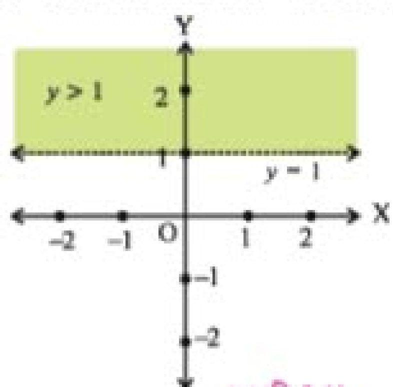
આકૃતિ 8.39 નો રંગીન ભાગ એ આપેલ સુરેખ અસમતા સંહતિનો ઉકેલપ્રદેશ છે.

ઉદાહરણ 29 : અસમતા સંહતિ $x > 0$, $y > 1$ તથા $x + y < 2$નો ઉકેલ આલેખ પરથી મેળવો.

ઉકેલ : Y-અક્ષની જમણી બાજુના બિંદુઓથી $x > 0$ નો આલેખ મળે. પ્રદેશમાં Y-અક્ષ પરના બિંદુઓનો સમાવેશ થશે નહિ.



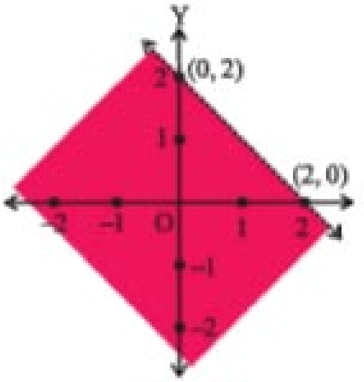
આકૃતિ 8.40



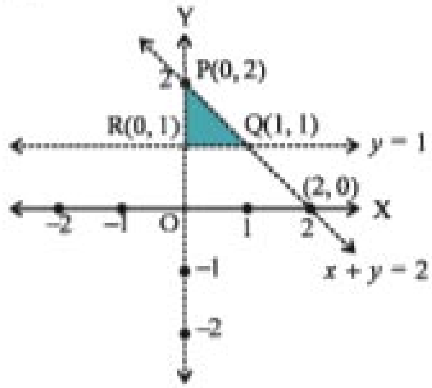
આકૃતિ 8.41

$y = 1$ ઉપરના અર્ધતલમાંનાં બિંદુઓનો ગણ એ $y > 1$ નો ઉકેલપ્રદેશ દર્શાવે છે.

રેખા $x + y = 2$ એ $(2, 0)$ અને $(0, 2)$માંથી પસાર થતી રેખા છે. વળી, $x + y < 2$ માં $x = 0$, $y = 0$ લેતાં, $0 + 0 < 2$ હોવાથી $(0, 0)$ એ $x + y = 2$ ના ઉકેલગણના પ્રદેશમાં છે.



આકૃતિ 8.42

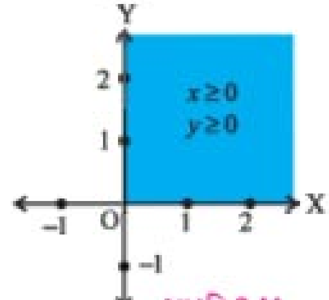


આકૃતિ 8.43

તમામ પ્રદેશોનો છેદગણ લેતાં, ΔPQRનો અંતઃપ્રદેશ અસમતા સંહતિનો ઉકેલ દર્શાવે છે.

ઉદાહરણ 30 : અસમતા સંહતિ $x \geq 0$, $y \geq 0$, $5x + 3y - 15 \leq 0$, $4x + 5y - 20 \leq 0$નો ઉકેલ આલેખ પરથી મેળવો.

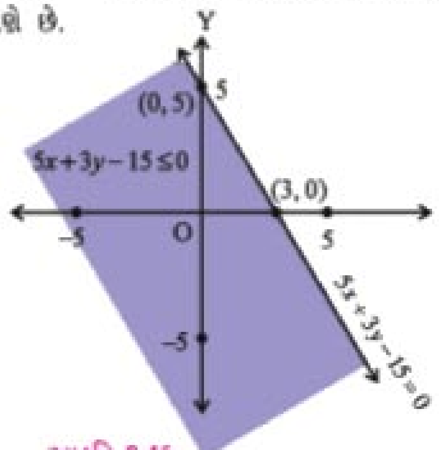
ઉકેલ : અસમતાઓ $x \geq 0$, $y \geq 0$નો ઉકેલ તો આપણે જાણીએ છીએ તે પ્રમાણે આકૃતિ 8.44 માં રંગીન ભાગ વડે દર્શાવેલ છે.



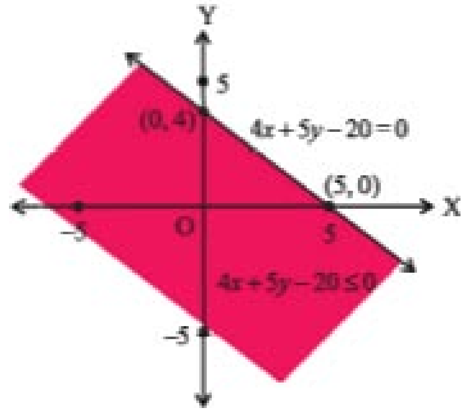
આકૃતિ 8.44

રેખા $5x + 3y - 15 = 0$ એ $(3, 0)$ અને $(0, 5)$માંથી પસાર થાય છે અને $(0, 0)$ એ $5x + 3y - 15 \leq 0$ના ઉકેલપ્રદેશમાં છે. આથી ઉકેલપ્રદેશ આકૃતિ 8.45 ના રંગીન ભાગમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણેનો છે.

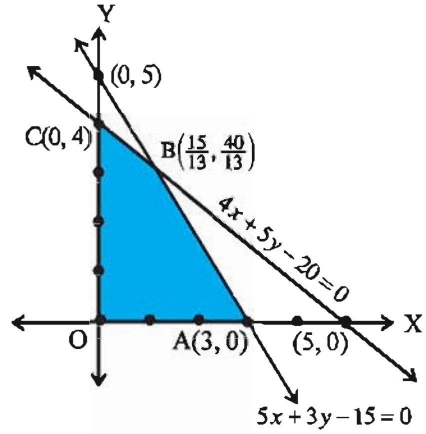
રેખા $4x + 5y - 20 = 0$ એ બિંદુઓ $(5, 0)$ અને $(0, 4)$માંથી પસાર થાય છે તથા $(0, 0)$ એ $4x + 5y - 20 \leq 0$ ના ઉકેલપ્રદેશમાં છે. આથી તેનો ઉકેલ આકૃતિ 8.46 ના રંગીન ભાગમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે છે.



આકૃતિ 8.45



આકૃતિ 8.46



આકૃતિ 8.47

આ તમામ પ્રદેશોનો છેદગણ ચતુષ્કોણ OABCના અંતઃપ્રદેશ તથા બાજુઓનાં બિંદુઓથી બનેલો પ્રદેશ છે અને તે ઉકેલપ્રદેશ છે.

અસમતા સંહતિનો ઉકેલ ગણ આકૃતિ 8.47 ના રંગીન ભાગમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે છે.

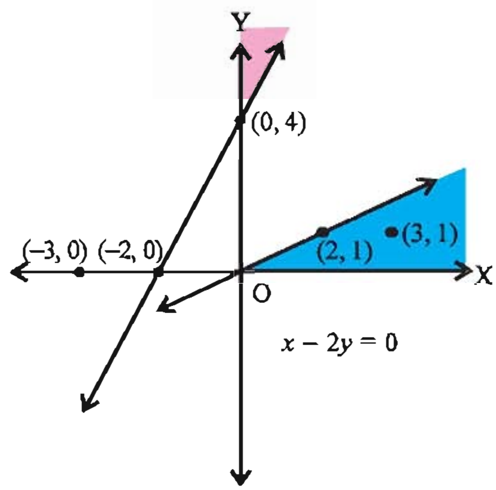
ઉદાહરણ 31 : નીચેની અસમતા સંહતિનો ઉકેલ મેળવો.

$x - 2y \geq 0$, $2x - y \leq -4$, $x \geq 0$, $y \geq 0$

ઉકેલ : (1) $x \geq 0$ તથા $y \geq 0$ હોવાથી ઉકેલ ગણમાં પ્રથમ ચરણના અને અક્ષો પરનાં $x \geq 0$ તથા $y \geq 0$ માટેનાં બિંદુઓ મળશે.

$x - 2y = 0$ એ ઉગમબિંદુમાંથી તથા (2, 1)માંથી પસાર થતી રેખા છે. (ચકાસો !) (3, 1) બિંદુનો વિચાર કરીએ. $x - 2y = 3 - 2 \geq 0$. આથી (3, 1) એ $x - 2y \geq 0$ના ઊકેલપ્રદેશમાં છે.

આથી $x \geq 0$, $y \geq 0$ અસમતાઓને આધીન રેખા $x - 2y \geq 0$ નીચેના પ્રથમ ચરણ તથા $\overrightarrow{OX}$ પરનાં બિંદુઓ ઉકેલપ્રદેશમાં મળે. (જુઓ આકૃતિ 8.48.)



આકૃતિ 8.48

રેખા $2x - y = -4$ બિંદુઓ (−2, 0) અને (0, 4)માંથી પસાર થાય છે. (−3, 0) એ $2x - y \leq -4$ના ઉકેલગણમાં છે કારણ કે $-6 - 0 \leq -4$.

આમ, $2x - y \leq -4$, $x - 2y \geq 0$ તથા $x \geq 0$, $y \geq 0$ અસમતાઓનું સમાધાન કરે તેવું કોઈ બિંદુ સમતલમાં નથી.

(**નોંધ :** દેખીતું જ $x \geq 2y \Rightarrow 2x \geq 4y$

$$\Rightarrow 3y \leq 2x - y \leq -4 \Rightarrow y < 0$$

આથી $y \geq 0$ અને $y < 0$ અસમતાઓ સાથે સંભવે નહિ.)

આથી ઉકેલ ગણ ખાલીગણ છે.

સ્વાધ્યાય 8.5

નીચેની અસમતા સંહતિનો ઉકેલપ્રદેશ આલેખ પરથી મેળવો : ($x \in R$, $y \in R$)

1. $y \geq 0, y \leq 4, x < 5$

2. $x \geq 0, y \geq 0, x \leq 3, y \leq 2$

3. $x > 0, y > 0, x \leq 3, y \leq 2$

4. $x > 0, y > 0, x + 2y < 12, x + y \geq 2$

5. $2x + y \leq 12, x + 2y \leq 7, x \geq 0, y \geq 0$

6. $x \geq 0, y \geq 0, x - y \geq 0$

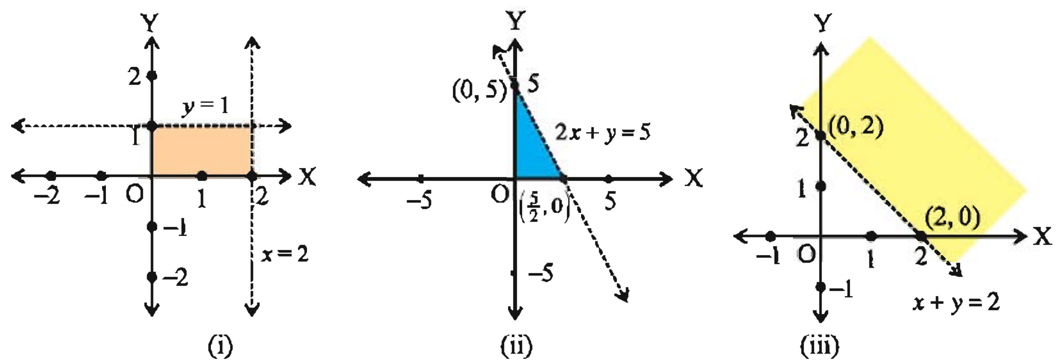
7. $x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 6, 3x + 4y \leq 12$

8. $y > 0, x > 2y, x + y > 4, x + y < 6$

9. $x < 1, y < 0, x \geq -3, x + y \geq 0$

10. $3x + y > 0, 3x + y < 3$

11. જેનો ઉકેલ આકૃતિ 8.49 ના રંગીન ભાગમાં દર્શાવ્યો છે તેવી અસમતા સંહતિ લખો :



આકૃતિ 8.49

*

કેટલાંક પ્રકીર્ણ ઉદાહરણો અને કૂટપ્રશ્નો

હવે આપણે જે કંઈ શીખ્યા તેના પર આધારિત કેટલાક કૂટપ્રશ્નો જોઈએ. સૌપ્રથમ આપણે નીચેની અસમતાઓ યાદ કરીએ :

(1) $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$ $\quad x \in R, a \in R^+$

(2) $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$ $\quad x \in R, a \in R^+$

(3) $|x| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a$ અથવા $x \geq a$ $\quad x \in R, a \in R^+$

(4) $|x| > a \Leftrightarrow x < -a$ અથવા $x > a$ $\quad x \in R, a \in R^+$

આની સાબિતી સરળતાથી આપી શકાય.

દાખલા તરીકે આપણે (1) સાબિત કરીએ,

(1) ધારો કે $|x| < a$.

જો $x \geq 0$ તો $x < a$ તથા $x < 0$ તો $-x < a$. આમ, $x > -a$

$\therefore \quad -a < x < a$

આથી ઊલટું, ધારો કે $-a < x < a$

$\therefore \quad x > 0$ તો $|x| = x < a$

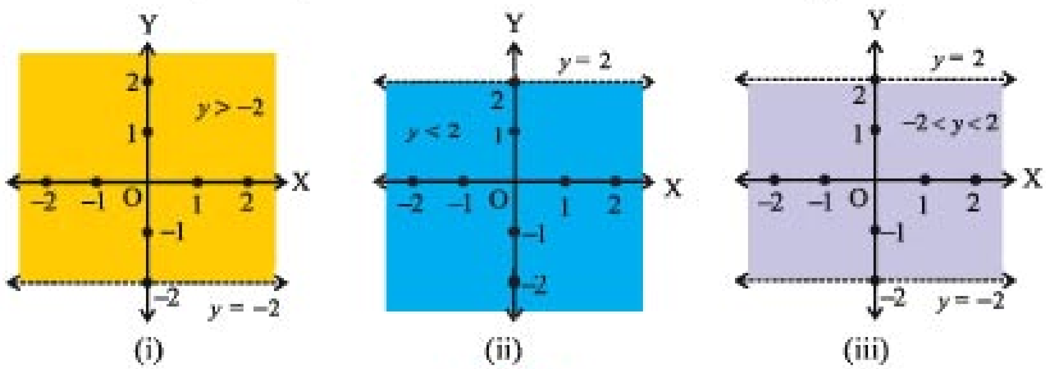
તથા $x < 0$ તો $|x| = -x$. હવે $-a < x$ પરથી $a > -x$ એટલે કે $a > |x|$ એટલે કે $|x| < a$

$\therefore \quad -a < x < a \Leftrightarrow |x| < a$

(3) તો (1) નું નિષેધ છે. આથી $-a < x$ તથા $x < a$ પરથી નિષેધ લેતાં, $x \le -a$ અથવા $x \ge a$ મળે. આ જ રીતે (2) તથા (4) પણ સાબિત થઈ શકે.

બે ચલમાં સુરેખ અસમતાઓની સંહતિઓનો ઉકેલપ્રદેશ દર્શાવવા માટે આપણે પ્રત્યેક અસમતાનો ઉકેલપ્રદેશ દર્શાવવા માટે ભિન્ન રંગનો ઉપયોગ કરી શકીએ અથવા પ્રદેશોને ભિન્ન-ભિન્ન રીતે છાયાંકિત કરી શકીએ.

ઉદાહરણ તરીકે, $-2 < y < 2$ ના ઉકેલ માટે આપણે નીચેની પદ્ધતિ અનુસરી શકીએ :

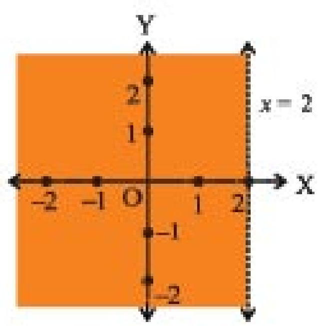


આકૃતિ 8.50

વળી, અસમતા $x < 2$નો સંખ્યારેખા ઉપર આલેખ નીચે પ્રમાણે મળે :

આકૃતિ 8.51

સમતલમાં $x < 2$ નો આલેખ આકૃતિ 8.52 માં રંગીન ભાગ દ્વારા દર્શાવેલ છે.



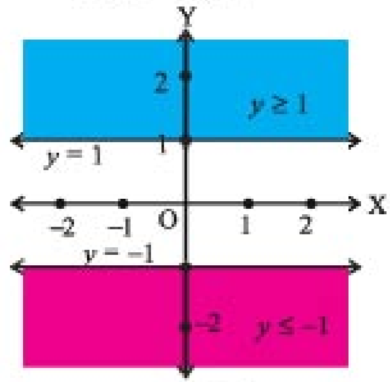
આકૃતિ 8.52

ઉદાહરણ 32 : નીચેની અસમતાઓના ઉકેલપ્રદેશ સમતલમાં મેળવો :

(1) $|y| \geq 1$ (2) $|x| \leq 2$ (3) $|x - y| \leq 2$ (4) $|x - y| \leq 0$.

ઉકેલ : (1) જો $y \geq 0$, તો $y \geq 1$ અને જો $y < 0$, તો $-y \geq 1$ અથવા $y \leq -1$.

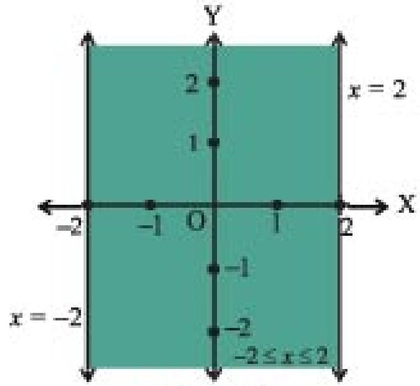
આથી ઉકેલપ્રદેશ આકૃતિ 8.53 માં દર્શાવેલ બે પ્રદેશોનો યોગગણ છે. (અથવા આપેલા (1) થી (4) સંબંધો પરથી આપણને $y \geq 1$ અથવા $y \leq -1$ મળશે.)



આકૃતિ 8.53

(2) $|x| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$

ઉકેલપ્રદેશ આકૃતિ 8.54 ના રંગીન ભાગમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે મળે.



આકૃતિ 8.54

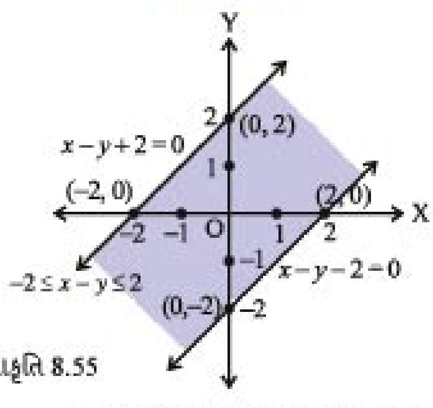
(3) $|x - y| \leq 2$

$\therefore \quad -2 \leq x - y \leq 2$

$(|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a)$

અસમતાઓ $x - y + 2 \geq 0$ તથા $x - y - 2 \leq 0$ મળે.

આથી રેખાઓ $x - y - 2 = 0$ તથા $x - y + 2 = 0$નો વિચાર કરીએ.



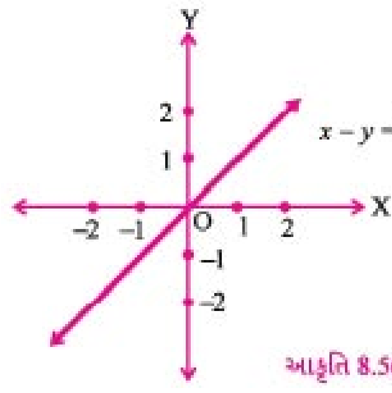
આકૃતિ 8.55

$x - y + 2 \geq 0$નો વિચાર કરતાં (0, 0) પરથી $2 \geq 0$ મળે. આથી (0, 0) એ $x - y + 2 \geq 0$ ના ઉકેલપ્રદેશમાં છે જ. આ જ રીતે $x - y - 2 \leq 0$ ના ઉકેલપ્રદેશમાં પણ (0, 0) છે જ.

આથી ઉકેલ ગણ આકૃતિ 8.55 માં બતાવ્યા પ્રમાણે રંગીન પ્રદેશ દ્વારા દર્શાવાય.

(4) $|x - y| \leq 0$

$|x - y| < 0$ શક્ય નથી.



આકૃતિ 8.56

આથી $| x - y | = 0$

$\therefore \quad x - y = 0$

ઉકેલપ્રદેશ રેખા $x = y$ છે.

ઉદાહરણ 33 : નીચેની અસમતાઓ ઉકેલો :

(1) $-5 < 3x - 8 < 28$ (2) $-20 < -5(x - 3) < 40$. $x \in R$

ઉકેલ : (1) આ અસમતાનો અર્થ છે $-5 < 3x - 8$ અને $3x - 8 < 28$.

$\therefore \quad -5 < 3x - 8 \Leftrightarrow 8 - 5 < 3x \Leftrightarrow 3 < 3x \Leftrightarrow x > 1$

વળી, $3x - 8 < 28 \Leftrightarrow 3x < 36 \Leftrightarrow x < 12$

આમ, $-5 < 3x - 8 < 28 \Leftrightarrow 1 < x < 12$

$\therefore$ ઉકેલ ગણ $(1, 12)$ છે.

(2) $-20 < -5(x - 3)$ અને $-5(x - 3) < 40$

$\Leftrightarrow \quad -4 < -x + 3$ અને $-x + 3 < 8$

$\Leftrightarrow \quad x < 4 + 3$ અને $x > 3 - 8$

$\Leftrightarrow \quad -5 < x < 7$

$\therefore$ ઉકેલ ગણ $(-5, 7)$ છે.

ઉદાહરણ 34 : નીચેની અસમતાઓનો ઉકેલ શોધો તથા સંખ્યારેખા પર ઉકેલ ગણ દર્શાવો : $(x \in R)$

(1) $2(x - 1) < x + 5$ (2) $5(2x - 7) - 3(2x + 3) < 0$, $2x + 19 < 6x + 47$.

ઉકેલ : (1) $2(x - 1) < x + 5 \quad \Leftrightarrow 2x - 2 < x + 5$

$\Leftrightarrow 2x - x < 5 + 2$

$\Leftrightarrow x < 7$

આથી ઉકેલ ગણ $(-\infty, 7)$ છે.

આકૃતિ 8.57

(2) $5(2x - 7) - 3(2x + 3) < 0 \quad \Leftrightarrow 10x - 35 - 6x - 9 < 0$

$\Leftrightarrow 4x - 44 < 0$

$\Leftrightarrow x < 11$

આથી ઉકેલ ગણ $(-\infty, 11)$ છે.

આકૃતિ 8.58

$2x + 19 < 6x + 47 \quad \Leftrightarrow -4x < 28$

$\Leftrightarrow x > -7$

આથી ઉકેલ ગણ $(-7, \infty)$ છે.

આકૃતિ 8.59

આ બંને ઉકેલપ્રદેશોનો છેદગણ આકૃતિ 8.60 માં દર્શાવેલ છે તથા ઉકેલ ગણ (–7, 11) છે.

આકૃતિ 8.60

ઉદાહરણ 35 : નીચેની અસમતાઓ ઉકેલો અને તેમના ઉકેલપ્રદેશને સંખ્યારેખા પર આલેખમાં દર્શાવો :

(1) $|4 - x| + 2 < 5$ (2) $\left|x + \frac{7}{3}\right| > \frac{2}{3}$

ઉકેલ : (1) $|4 - x| + 2 < 5 \Leftrightarrow |4 - x| < 3$

$\Leftrightarrow -3 < x - 4 < 3$

$\therefore$ $1 < x < 7$

$\therefore$ આથી ઉકેલ ગણ (1, 7) છે અને તે આકૃતિ 8.61 માં દર્શાવેલ છે.

આકૃતિ 8.61

(2) $\left|x + \frac{7}{3}\right| > \frac{2}{3}$

$\Leftrightarrow$ $x + \frac{7}{3} > \frac{2}{3}$ અથવા $x + \frac{7}{3} < -\frac{2}{3}$

$\Leftrightarrow$ $x > \frac{-5}{3}$ અથવા $x < -\frac{9}{3} = -3$

આથી ઉકેલગણ $\left(\frac{-5}{3}, \infty\right) \cup (-\infty, -3)$ છે અને તે આકૃતિ 8.62 માં દર્શાવેલ છે.

આકૃતિ 8.62

ઉદાહરણ 36 : નીચેની અસમતાઓનો ઉકેલ અને ઉકેલપ્રદેશની આલેખાત્મક રજૂઆત કરો.

(1) $\frac{|x-1|}{x-1} \leq 0$ (2) $\frac{|x+3|-x}{x} < 3$ (3) $|x - 1| + |x - 2| + |x - 3| < 6$

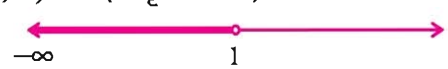
ઉકેલ : (1) $\frac{|x-1|}{x-1} \leq 0$

સ્પષ્ટ છે કે $x \neq 1$ હોવાથી $\frac{|x-1|}{x-1} \neq 0$

જો $x > 1$, $\frac{|x-1|}{x-1} = \frac{x-1}{x-1} = 1 \leq 0$ સત્ય નથી.

જો $x < 1$, $\frac{|x-1|}{x-1} = \frac{-(x-1)}{x-1} = -1 \leq 0$ સત્ય છે.

આથી ઉકેલ ગણ $(-\infty, 1)$ છે. (આકૃતિ 8.63)



આકૃતિ 8.63

(2) $\frac{|x+3|-x}{x} < 3 \Leftrightarrow \frac{|x+3|}{x} - 1 < 3$

$\Leftrightarrow \frac{|x+3|}{x} < 4$

જો $x < 0$ હોય, તો $\frac{|x+3|}{x} < 0 < 4$ સત્ય છે.

તેથી ઉકેલ ગણમાં બધી જ ઋણ વાસ્તવિક સંખ્યાઓ આવેલી છે.

વળી, $x \neq 0$. આથી હવે $x > 0$ નો વિચાર કરીએ.
હવે $x > 0$ હોય તો $x + 3 > 0$

$\therefore \quad |x + 3| = x + 3$

$\therefore \quad \frac{|x+3|}{x} < 4 \Leftrightarrow \frac{x+3}{x} < 4$

$\Leftrightarrow x + 3 < 4x$ $\quad$ $(x > 0)$

$\Leftrightarrow 3x > 3$

$\Leftrightarrow x > 1$

$\therefore$ ઉકેલ ગણ $(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$ છે. (આકૃતિ 8.64)

આકૃતિ 8.64

$(\overrightarrow{AB} - \{A\}) \cup (\overrightarrow{PQ} - \{P\})$ ઉકેલપ્રદેશ દર્શાવે છે.

(3) $|x - 1| + |x - 2| + |x - 3| < 6$
અહીં આપણે કેટલાક વિકલ્પો લઈશું.

(a) ધારો કે $x \leq 1$

$\therefore \quad x - 1 \leq 0, x - 2 < 0, x - 3 < 0$

$\therefore$ અસમતાનું સમાનાર્થી વિધાન $1 - x + 2 - x + 3 - x < 6$ મળે.

$\therefore \quad 3x > 0$ એટલે કે $x > 0$

આમ ઉકેલ ગણમાં $(0, 1]$નો સમાવેશ થાય.

(b) ધારો કે $1 < x \leq 2$.

આથી, $x - 1 > 0, x - 2 \leq 0, x - 3 < 0$

$\therefore \quad x - 1 + 2 - x + 3 - x < 6 \Leftrightarrow -x < 2$ એટલે કે $x > -2$ જે સત્ય છે.

કારણ કે $x > 1$.

$\therefore$ અસમતા $x \in (1, 2]$ માટે પણ સત્ય છે.

(c) $2 < x \leq 3$ લઈએ.

$\therefore \quad x - 1 > 0, x - 2 > 0, x - 3 \leq 0$.

$\therefore$ અસમતા પરથી $x - 1 + x - 2 + 3 - x < 6$ મળે.

$\therefore$ શરત $x < 6$ મળે. $2 < x \leq 3$ હોવાથી $x < 6$ છે જ.

$\therefore$ ઉકેલપ્રદેશમાં $(2, 3]$નો સમાવેશ પણ થાય છે.

(d) જો $x > 3$ તો $x - 1 + x - 2 + x - 3 < 6 \Leftrightarrow x < 4$

આથી $x > 3$ હોય, તો $x < 4$ જરૂરી છે.

$\therefore$ ઉકેલ ગણમાં $(3, 4)$નો સમાવેશ થાય છે.

(e) જો $x < 0$, તો ધારો કે $x = -y$, $y > 0$.

$\therefore$ $|x - 1| + |x - 2| + |x - 3| = |-y - 1| + |-y - 2| + |-y - 3|$

$= |y + 1| + |y + 2| + |y + 3|$

$= y + 1 + y + 2 + y + 3 < 6$

$\Rightarrow y < 0$, જે અસત્ય છે.

$\therefore$ આમ, બધા ઉકેલનો યોગગણ લેતાં ઉકેલ ગણ $(0, 4)$ છે.

આકૃતિ 8.65 માં $\overline{AB} - \{A, B\}$ ઉકેલપ્રદેશ દર્શાવે છે.

આકૃતિ 8.65

ઉદાહરણ 37 : એક કન્ટેઇનરમાં 1120 લિટર 40 % ઍસિડનું દ્રાવણ ભરેલું છે. પરિણામી મિશ્રણમાં 40 ટકાથી વધારે પણ 50 ટકાથી ઓછું પાણી થાય તે માટે કેટલું પાણી ઉમેરવું જોઈએ ?

ઉકેલ : અહીં દ્રાવણમાં ઍસિડનું પ્રમાણ 40 % હોવાથી પાણીનું પ્રમાણ 60 % છે. ધારો કે x લિટર પાણી ઉમેરવામાં આવે છે. આથી $(1120 + x)$ લિટર દ્રાવણમાં $(1120 + x)\frac{40}{100}$ થી વધારે અને $(1120 + x)\frac{50}{100}$ થી ઓછું પાણી હોય. આથી નીચેની અસમતા મળે :

$$(1120 + x)\frac{40}{100} < 1120 \times \frac{60}{100} < (1120 + x)\frac{50}{100}$$

$$(1120 + x)\frac{40}{100} < 1120 \times \frac{60}{100}$$

$\therefore$ $(1120 + x)2 < 1120 \times 3$

$\therefore$ $2x < 1120$

$\therefore$ $x < 560$

વળી, $1120 \times \frac{60}{100} < (1120 + x)\frac{50}{100}$

$\therefore$ $1120 \times 6 < 1120 \times 5 + 5x$

$\therefore$ $1120 < 5x$

$\therefore$ $224 < x$

આમ, $224 < x < 560$.

બીજા શબ્દોમાં કહીએ તો ઉમેરેલા પાણીનો જથ્થો 224 લિટરથી વધુ હોય અને 560 લિટરથી ઓછો હોવો જોઈએ.

ઉદાહરણ 38 : એક દ્રાવણનું ઉષ્ણતામાન 77° F તથા 95° F વચ્ચે રાખવાનું છે. સેલ્સિયસ તથા ફેહ્રનહિટ વચ્ચે રૂપાંતર સૂત્ર $F = \frac{9}{5}C + 32$ છે. સેલ્સિયસમાં ઉષ્ણતામાનનો વિસ્તાર શું છે ?

ઉકેલ : જો દ્રાવણનું ફેહ્રનહિટમાં તાપમાન x હોય, તો $77 < x < 95$

$77 < \frac{9}{5}y + 32 < 95$, જ્યાં y દ્રાવણનું સેલ્સિયસમાં તાપમાન દર્શાવે છે.

$\therefore$ $(77 - 32)\frac{5}{9} < y < (95 - 32)\frac{5}{9}$

$\therefore$ $25 < y < 35$

$\therefore$ દ્રાવણનું સેલ્સિયસમાં તાપમાન 25° C અને 35° Cની વચ્ચે રાખવું જોઈએ.

ઉદાહરણ 39 : વ્યક્તિનો IQ દર્શાવતું સૂત્ર નીચે પ્રમાણે છે :

$$IQ = \frac{MA}{CA} \times 100$$

અહીં MA વ્યક્તિની માનસિક ઉંમર તથા CA તેની દૈહિક ઉંમર છે.

જો $75 < IQ < 125$ હોય, તો 16 વર્ષની ઉંમરની વ્યક્તિની માનસિક ઉંમર શોધો.

(અહીં CA = 16 છે.)

ઉકેલ : $75 < \frac{MA}{CA} \times 100 < 125$

$\Leftrightarrow \frac{75}{100} \times CA < MA < \frac{125}{100} \times CA$

$\Leftrightarrow \frac{3}{4} \times CA < MA < \frac{5}{4} \times CA$

$\Leftrightarrow \frac{3}{4} \times 16 < MA < \frac{5}{4} \times 16$ **(CA = 16)**

$\Leftrightarrow 12 < MA < 20$

આથી માનસિક ઉંમરનો વિસ્તાર (12, 20) છે.

ઉદાહરણ 40 : ત્રિકોણની સૌથી મોટી બાજુની લંબાઈ તેની સૌથી નાની બાજુની લંબાઈ કરતાં બમણી છે. આ સિવાયની ત્રીજી બાજુ સૌથી નાની બાજુ કરતાં 3 સેમી મોટી છે. ત્રિકોણની પરિમિતિ ઓછામાં ઓછી 51 સેમી છે. સૌથી નાની તથા સૌથી મોટી ના હોય તેવી બાજુની ન્યૂનતમ લંબાઈ શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે સૌથી નાની બાજુની લંબાઈ x છે. તો બાજુઓનાં માપ $2x$, $x + 3$ તથા x થાય.

∴ પરિમિતિ ઓછામાં ઓછી 51 સેમી હોવાથી,

$2x + x + 3 + x \geq 51 \Leftrightarrow 4x \geq 48$

$\Leftrightarrow x \geq 12$

$\Leftrightarrow x + 3 \geq 15$

આથી, માંગેલ બાજુની ન્યૂનતમ લંબાઈ 15 સેમી છે.

સ્વાધ્યાય 8

નીચેની અસમતાઓનો $x \in R$ માટે ઉકેલ ગણ શોધો : (1 થી 5)

1. $|x + 1| + |x - 1| > 2$ **2.** $\frac{|x - 2| - 2}{|x - 1| - 1} \leq 0$ **3.** $\frac{1}{|x| - 5} \leq \frac{1}{3}$

4. $|x - 1| < 5$ અને $|x| \leq 2$ **5.** $\frac{2}{x + 3} \leq 5 \leq \frac{4}{x + 3}$ $(x > 0)$

6. હોજના પાણીમાં એસિડનું પ્રમાણ સામાન્ય ગણવા માટેનો નિયમ છે કે તેના ત્રણ દૈનિક એસિડિક માપની સરેરાશ 8.2 તથા 8.5 વચ્ચે હોય. જો કોઈ એક દિવસે આ પૈકીનાં બે માપ 8.25 તથા 8.4 હોય, તો ત્રીજા માપ વિશે શું કહી શકાય ?

7. એક લઘુઉદ્યોગ એકમમાં ખર્ચનું વિધેય તથા આવકનું વિધેય અનુક્રમે $C = 500 + \frac{5}{2}x$ અને $R = 3x$ દ્વારા દર્શાવાય છે, જ્યાં x ઉત્પાદિત વસ્તુઓની સંખ્યા દર્શાવે છે. કેટલા એકમનું ઉત્પાદન કરવાથી (1) નહિ નફો નહિ નુક્સાનની પરિસ્થિતિ ઉદ્ભવે (સમતોલ પરિસ્થિતિ) (2) નફો થાય ?

8. પ્રત્યેક 30 થી મોટો હોય અને જેમનો સરવાળો 75થી ઓછો હોય તેવા ક્રમિક અયુગ્મ પૂર્ણાંકોની જોડ મેળવો.

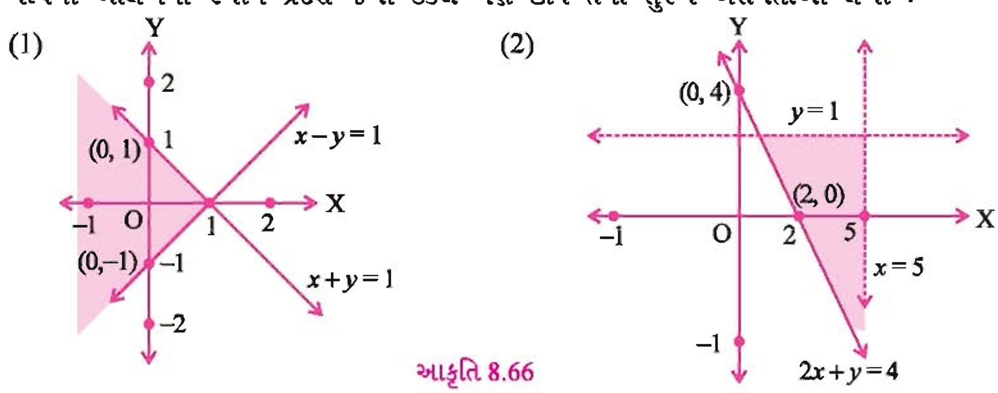
9. નીચેના પ્રશ્નોના ટૂંકમાં જવાબ આપો : $x \in R$

(1) $\frac{x^2}{x-5} < 0$નો ઉકેલ ગણ શું મળે ?
(2) $\left| x + \frac{1}{x} \right| \geq 2$ ઉકેલો.
(3) $(x^4 - 2x^2 + 1)(x - 2) > 0$ ઉકેલો.
(4) $|x - 3| = x - 3$ ઉકેલો.
(5) $\left| \frac{1}{x} - 3 \right| > 5$ ઉકેલો.
(6) $\frac{x+2}{x^2+1} < \frac{1}{2}$નો પૂર્ણાંકમાં ઉકેલ મેળવો.
(7) $|x - 2| \geq |x - 4|$ ઉકેલો.
(8) $x + \frac{1}{x} < -2$ ઉકેલો.

10. વિધાન સત્ય બને તે રીતે ખાલી જગ્યા પૂરો :

(1) જો $|x - 2| > 1$, તો $x \in$ ....
(2) જો $|x| \leq 0$, તો $x =$ ....
(3) જો $\frac{1}{x-4} < 0$, તો x ...... 4.
(4) જો $|x - 2| < 3$, તો 5 ...... x ...... -1.
(5) $\frac{x^2}{x^2+1} < 0$નો ઉકેલ ગણ ...... છે. $(x \in R)$

11. નીચેના આલેખમાં રંગીન પ્રદેશ જેનો ઉકેલ ગણ હોય તેવી સુરેખ અસમતાઓ લખો :



આકૃતિ 8.66

12. નીચે આપેલું દરેક વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલા વિકલ્પો (a), (b), (c) અથવા (d)માંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરીને ☐ માં લખો :

(1) જો $|x - 2| \geq 8$, તો... ☐

(a) $x \in (-6, 10)$
(b) $x \in (-\infty, -6) \cup (10, \infty)$
(c) $x \in (-\infty, -6] \cup (10, \infty)$
(d) $x \in (-\infty, -6] \cup [10, \infty)$

(2) જો $|x + 2| \leq 9$, તો... ☐

(a) $x \in (-11, 7)$
(b) $x \in [-11, 7]$
(c) $x \in (-\infty, -11] \cup [7, \infty)$
(d) $x \in (-\infty, -11] \cup (7, \infty)$

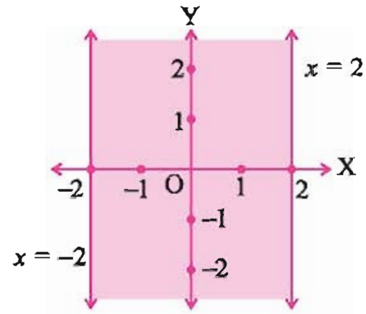
(3) જેનો ઉકેલપ્રદેશ આકૃતિ 8.67 માં દર્શાવેલ આલેખ હોય, તેવી અસમતા ...... છે.

(a) $|x| < 2$

(b) $|x| \leq 2$

(c) $|x| \geq 2$

(d) $-2 < x \leq 2$



આકૃતિ 8.67

(4) સંખ્યારેખા પર જેનો આલેખ આકૃતિ 8.68 માં દર્શાવેલ છે તે અસમતા ...... છે.

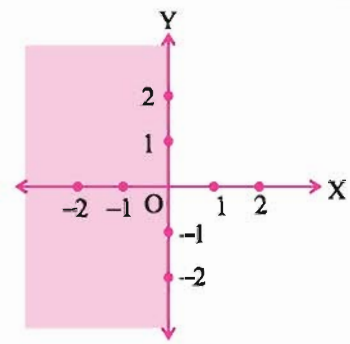
આકૃતિ 8.68

(a) $x \geq 2$ (b) $x \in (-\infty, 2)$ (c) $x > 2$ (d) $x < 2$

(5) સમતલમાં જેનો આલેખ આકૃતિ 8.69 માં દર્શાવેલ રંગીન પ્રદેશ છે તે અસમતા ...... છે.

(a) $x \geq 0$ (b) $y \geq 0$

(c) $x > 0$ (d) $x \leq 0$



આકૃતિ 8.69

(6) અસમતા સંહતિ $x < 5$ અને $x \geq 2$ નો ઉકેલ ગણ ...... છે.

(a) (2, 5) (b) [2, 5) (c) (2, 5] (d) [2, 5]

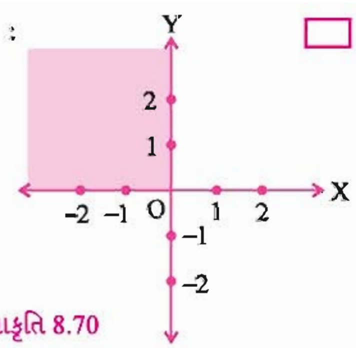
(7) નીચેનો આલેખ ...... અસમતા સંહતિનો ઉકેલપ્રદેશ છે :

(a) $x \geq 0, y \geq 0$

(b) $x \leq 0, y \geq 0$

(c) $x > 0, y > 0$

(d) $x \geq 0, y \leq 0$



આકૃતિ 8.70

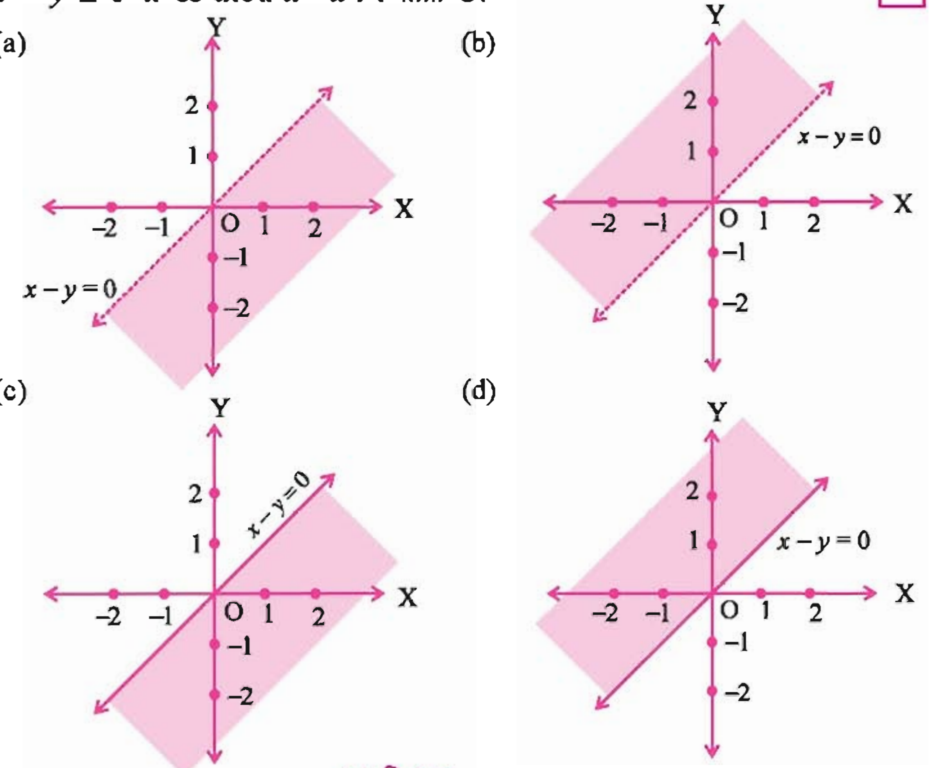
(8) જો $\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \geq 0$, તો $x \in$ ......

(a) $x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ (b) $x \in [-1, 1]$

(c) $x \in \{-1, 1\}$ (d) $x \in (-\infty, -1) \cup [1, \infty)$

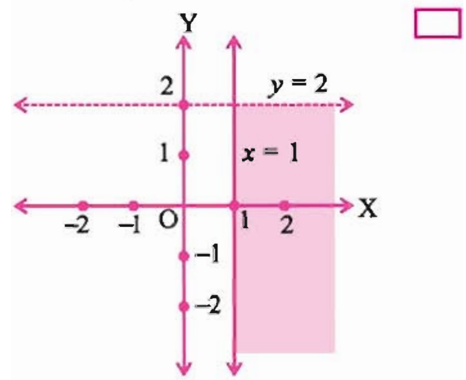
(9) $x - y \geq 0$ નો ઉકેલપ્રદેશનો આલેખ ...... છે.

(a) (b) (c) (d)



આકૃતિ 8.71

(10) આકૃતિ 8.72 માં દર્શાવેલ રંગીન પ્રદેશ જેનો આલેખ છે, તે ઉકેલપ્રદેશ માટેની અસમતા ...... છે.



આકૃતિ 8.72

(a) $x \geq 1$

(b) $y < 2$

(c) $x \geq 1$ અને $y < 2$

(d) $x \leq 1$ અને $y \geq 2$

(11) $| x - 1 | \le -1$નો ઉકેલ ગણ ...... છે.

(a) (0, 2) (b) [0, 2] (c) $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ (d) $\emptyset$

(12) અસમતા $| x - 1 | + | x - 2 | < 3$નો ઉકેલ ગણ ...... છે.

(a) (0, 3) (b) (1, 2) (c) (0, 2) (d) (2, 3)

(13) અસમતા $|x| + | x - 2 | < 2$નો ઉકેલ ગણ સંખ્યા પર દર્શાવતો આલેખ ...... છે.

આકૃતિ 8.73

(14) અસમતા $| x - 1 | + | x + 1 | < 2$નો ઉકેલ ગણ ...... છે.

(a) (−1, 1) (b) [−1, 1] (c) $\emptyset$ (d) {−1, 1}

(15) અસમતા $x^2 \le 4$નો ઉકેલ ગણ ...... છે.

(a) [−2, 2] (b) (−2, 2)

(c) $(-\infty, -2] \cup [2, \infty)$ (d) $\emptyset$

સારાંશ

1. અસમતા
2. એક ચલમાં સુરેખ અસમતા અને સંખ્યારેખા પર તેના ઉકેલની રજૂઆત
3. એક ચલમાં સુરેખ અસમતા સંહતિ
4. બે ચલમાં સુરેખ અસમતા અને તેમના આલેખ
5. બે ચલમાં સુરેખ અસમતા સંહતિ
6. માનાંક સંબંધી અસમતાઓ, કૂટપ્રશ્નો અને પ્રકીર્ણ પ્રશ્નો

પ્રકરણ **9**

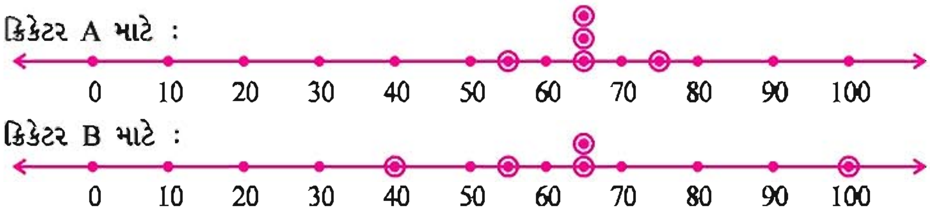
પ્રસારમાન

9.1 પ્રાસ્તાવિક

આપણે જાણીએ છીએ કે, આંકડાશાસ્ત્ર એટલે પૂર્વનિશ્ચિત હેતુ માટે સંખ્યાત્મક માહિતીનું એકત્રીકરણ. એકત્રિત કરેલી માહિતીનું અસતત અથવા સતત ચલના સ્વરૂપમાં વર્ગીકરણ કરવાનું આપણે ધોરણ 8, 9 અને 10માં શીખ્યા છીએ. વર્ગ, વર્ગલંબાઈ, આવૃત્તિ, વર્ગસીમાબિંદુઓ, મધ્યકિંમત, આવૃત્તિ-વિતરણ વગેરે શબ્દોથી આપણે સૌ પરિચિત છીએ. આપણે માહિતી માટે મધ્યક, મધ્યસ્થ તથા બહુલકની ગણતરી કરવાની રીતો પણ શીખ્યા છીએ. આ બધાં માપ એ આપેલી માહિતીનાં પ્રતિનિધિરૂપ માપ છે અને તે અવલોકનો ક્યાં કેન્દ્રિત થયેલા છે તેનો આછો ખ્યાલ દર્શાવે છે. તે સમગ્ર માહિતીનું મધ્યવર્તી વલણ દર્શાવે છે. બે માહિતીઓના મધ્યક સમાન હોય એવું બને પણ તે માહિતીનો પ્રસાર એકસરખો ન પણ હોય. જેમકે રીતુને એક પરીક્ષામાં 100માંથી 2 ગુણ મળે છે અને બીજી પરીક્ષામાં 98 ગુણ મળે છે, તો રીતુના ગુણનો મધ્યક 50 થાય અને રિયાને એક પરીક્ષામાં 48 ગુણ અને બીજી પરીક્ષામાં 52 ગુણ મળે છે તો તેના ગુણનો મધ્યક પણ 50 જ થાય. છતાં સ્પષ્ટ છે કે રીતુ ભણવામાં વધુ સ્થિર (ભરોસાપાત્ર) નથી. તેના બે કસોટીના ગુણમાં 96 ગુણનો તફાવત છે. રિયા અભ્યાસમાં વધુ સ્થિર છે કારણ કે એના બે પરીક્ષાના ગુણ વચ્ચેનો તફાવત માત્ર 4 ગુણ જેટલો છે. માહિતીની સ્થિરતા માટે અવલોકનો મધ્યકના સામિપ્યમાં હોવા જોઈએ. તે મધ્યકની આસપાસ કેન્દ્રિત જ હોવા જરૂરી છે. આ વસ્તુ રીતુના ગુણમાં જોવા મળતી નથી. આમ માત્ર મધ્યક પરથી માહિતીનાં અવલોકનોનો સાચો અંદાજ મળતો નથી. આથી બે માહિતીની સાચી અને વિશ્વસનીય તુલના માટે મધ્યક સિવાય કોઈ બીજા આંકડાશાસ્ત્રીય માપની જરૂર પડે. આપણે અહીં એવા એક માપની સમજૂતી મેળવીશું. આવા માપને **પ્રસાર (Dispersion)**નું માપ કહે છે. આપણે એક ઉદાહરણ પરથી પ્રસારના માપની સમજૂતીને વધુ સ્પષ્ટ કરીશું. બે ક્રિકેટરોએ પાંચ દાવમાં કરેલા રન નીચે પ્રમાણે છે :

દાવ		ક્રિકેટર A	ક્રિકેટર B
1		55	40
2		65	55
3		65	65
4		65	65
5		75	100
		325	**325**
મધ્યક $\bar{x}$	=	65	65
મધ્યસ્થ M	=	65	65
બહુલક Z	=	65	65

અહીં બંને ક્રિકેટરોના રનના મધ્યક, મધ્યસ્થ તથા બહુલક સમાન 65 રન છે. છતાં પાંચે દાવમાં કરેલા રન જોતાં તરત જ જણાય છે કે ક્રિકેટર A ક્રિકેટર B કરતાં રન કરવામાં વધુ સ્થિર છે. તેના રન મધ્યકની નજીકના છે. તેના લઘુતમ રન 55 અને મહત્તમ રન 75 છે. જેમની વચ્ચેનો તફાવત 20 છે. જ્યારે ક્રિકેટર B તેના રનમાં સ્થિર નથી એમ કહી શકાય. જુદી જુદી મેચમાં B ની રમતમાં સ્થિરતા નથી. તે ક્યારેક 40 રન કરે છે તો ક્યારેક 100 રન કરે છે. તેના મહત્તમ રન અને લઘુતમ રન વચ્ચેનો તફાવત 60 છે.



આકૃતિ 9.1

બંને ક્રિકેટરોના રન બે રેખાઓ પર ટપકાં વડે દર્શાવ્યા છે. તેથી આ બિંદુઓ સરેરાશ રન 65થી કેટલા દૂર છે તેનો ખ્યાલ આવી જશે. આમ સ્પષ્ટ થાય છે કે માત્ર મધ્યકની ગણતરી પરથી બંને ક્રિકેટરોને સમાન ગણવા યોગ્ય નથી. માહિતીનું સાચું બંધારણ જાણવા માટે તેનાં અવલોકનો મધ્યકની આસપાસ કેટલે દૂર સુધી ફેલાયેલાં છે તે જાણવું જરૂરી છે. આ માપને **પ્રસારમાન (Dispersion)** કહે છે. પ્રસારમાનનાં કેટલાંક માપનો અહીં આપણે અભ્યાસ કરીશું.

9.2 પ્રસારમાન

આગળ ચર્ચા કરી તે મુજબ 'પ્રસારમાન એટલે માહિતીનાં અવલોકનો તેની સરેરાશ કિંમતથી કેટલે દૂર ફેલાયેલાં છે તે દર્શાવતું સંખ્યાત્મક માપ.' જો આપેલી માહિતીનાં અવલોકનો અને તેના મધ્યક વચ્ચેનો તફાવત 'ઓછો' હોય તો તે માહિતીનું પ્રસારમાન ઓછું છે એમ કહેવાય અને આપેલ માહિતી વધુ સ્થિર ગણાય. જો આપેલ માહિતીનાં અવલોકનો અને તેના મધ્યક વચ્ચેનો તફાવત 'મોટો' હોય તો પ્રસારમાન વધુ છે એમ કહેવાય અને તે માહિતી ઓછી સ્થિર કહેવાય. અહીં બંને સમૂહોનું માત્ર મધ્યકના માપને આધારે પૃથક્કરણ કરીએ અને તેનું તારણ કાઢીએ તો તે ભૂલ ભરેલું અને ગેરમાર્ગે દોરનારું છે. પ્રસારમાનનાં મુખ્ય માપ નીચે પ્રમાણે છે : **(1) વિસ્તાર (2) સરેરાશ વિચલન (3) પ્રમાણિત વિચલન.**

9.3 વિસ્તાર

વિસ્તાર (Range) : આપેલ અવર્ગીકૃત માહિતીના સૌથી મોટા અને સૌથી નાના અવલોકનના તફાવતને માહિતીનો વિસ્તાર કહે છે.

માહિતીનો વિસ્તાર = સૌથી મોટું અવલોકન − સૌથી નાનું અવલોકન

ક્રિકેટર A માટે વિસ્તાર = 75 − 55 = 20

ક્રિકેટર B માટે વિસ્તાર = 100 − 40 = 60

ઓછા વિસ્તારવાળી માહિતી તે ચલ લક્ષણનું સાતત્ય (સ્થિરતા) દર્શાવે છે. અહીં ક્રિકેટર Aના રનનો વિસ્તાર ઓછો છે જે દર્શાવે છે કે તે વધુ સ્થિર છે. પ્રસારમાનના માપ તરીકે વિસ્તારનું માપ સૌથી વધુ

સરળ છે. તે પ્રસારના ચલનનો આછો ખ્યાલ આપે છે. પરંતુ તેમાં માત્ર બે છેડાના અવલોકનોનો ઉપયોગ થાય છે. તેથી તે અવલોકનો કેન્દ્રીય કિંમતથી માહિતીના પ્રસારનું સાચું માપ આપી શક્તો નથી. ઉદાહરણ તરીકે અવલોકન 2 અને 102નો વિસ્તાર 100 છે, જ્યારે 101 અવલોકનો 2, 3, 4,..., 102નો વિસ્તાર પણ 100 છે. પણ અહીં અવલોકનો બહુ જ ભિન્ન પ્રકારના છે, તેથી આપણને પ્રસારમાનના બીજા કોઈક માપની જરૂર પડશે, જે આપણને અવલોકનો મધ્યકથી કેટલે દૂર ફેલાયેલા છે તે કહી શકે. પ્રસારમાનનાં આવાં માપ સરેરાશ વિચલન અને પ્રમાણિત વિચલન છે.

9.4 સરેરાશ વિચલન

વિસ્તારની વ્યાખ્યામાં માહિતીનાં અવલોકનો તેના મધ્યકથી કેટલા અંતરે આવેલાં છે તેનો ઉપયોગ કરવામાં આવતો નથી. **માહિતીનાં અવલોકનોના મધ્યકથી અંતર કે તફાવતને મધ્યકને સાપેક્ષ અવલોકનોના વિચલન (Deviation) કહેવામાં આવે છે.** આ વિચલન ઋણ, શૂન્ય કે ધન હોઈ શકે અને તેમનો સરવાળો પણ શૂન્ય, ધન કે ઋણ હોઈ શકે. આ પરિસ્થિતિ નિવારવા આ વિચલનોના માનાંક લેવામાં આવે છે.

સરેરાશ વિચલન (Average Deviation or Mean Deviation) : માહિતીનાં અવલોકનો અને તેના મધ્યક વચ્ચેના ધન તફાવતોની સરેરાશને માહિતીનું સરેરાશ વિચલન કહે છે. તેને સંકેતમાં $\delta\bar{x}$ વડે દર્શાવાય છે. (વાંચો : ડેલ્ટા x બાર)

આ પ્રકારના સરેરાશ વિચલનને મધ્યકથી સરેરાશ વિચલન (Average Deviation from the Mean) કહેવાય છે. મધ્યકને બદલે મધ્યસ્થ સાથે તફાવતો લેવામાં આવે, તો આ ધન તફાવતોની સરેરાશને મધ્યસ્થથી સરેરાશ વિચલન (Average Deviation from Median) કહે છે.

આપણે અવર્ગીકૃત અને વર્ગીકૃત માહિતી માટે મધ્યકથી સરેરાશ વિચલનની ગણતરી કરવાની સીધી રીત અને તેનાં સૂત્રો વિશે ચર્ચા કરીશું.

(1) અવર્ગીકૃત માહિતી (Ungrouped Data) :

ધારો કે અવર્ગીકૃત માહિતીનાં અવલોકનો x_1, x_2, x_3,..., x_n છે. આ n કિંમતોને ટૂંકમાં x_i, $1 \le i \le n$ એમ લખી શકાય. આ માહિતીનો મધ્યક $\bar{x}$ હોય, તો $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$.

મધ્યકમાંથી સરેરાશ વિચલન $\delta\bar{x} = \frac{\sum |x_i - \bar{x}|}{n}$, જ્યાં $|x_i - \bar{x}|$ એ i માં અવલોકન x_i અને મધ્યક $\bar{x}$નો ધન તફાવત છે.

ઉદાહરણ 1 : 10 વ્યક્તિઓના કિગ્રામાં વજનના આંકડા નીચે પ્રમાણે છે. આ માહિતીનું મધ્યકથી સરેરાશ વિચલન શોધો :

37, 70, 48, 50, 32, 56, 63, 46, 54, 44.

ઉકેલ : મધ્યક $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{37 + 70 + 48 + 50 + 32 + 56 + 63 + 46 + 54 + 44}{10}$

$= \frac{500}{10} = 50$ કિગ્રા

x_i	$x_i - \overline{x}$	$\lvert x_i - \overline{x} \rvert$
37	−13	13
70	20	20
48	−2	2
50	0	0
32	−18	18
56	6	6
63	13	13
46	−4	4
54	4	4
44	−6	6
$\Sigma x_i = 500$	−	$\Sigma \lvert x_i - \overline{x} \rvert = 86$

$$\delta\overline{x} = \frac{\sum \lvert x_i - \overline{x} \rvert}{n}$$

$$= \frac{86}{10}$$

$$= 8.6 \text{ કિગ્રા}$$

ઉદાહરણ 2 : પ્રેયા અને કરિશ્માએ સાપ્તાહિક 10 કસોટીઓમાં 50માંથી મેળવેલ ગુણ નીચે પ્રમાણે છે. મધ્યકમાંથી લીધેલ સરેરાશ વિચલનના આધારે બેમાંથી કોણ તેના અભ્યાસમાં સ્થિર છે તે શોધો :

પ્રેયા	30	35	40	42	38	25	31	36	40	41
કરિશ્મા	25	48	40	38	42	37	44	28	46	40

ઉકેલ : પ્રેયાના ગુણનો મધ્યક : (ગુણને x_i વડે દર્શાવતાં)

$$\overline{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{30 + 35 + 40 + 42 + 38 + 25 + 31 + 36 + 40 + 41}{10}$$

$$= \frac{358}{10} = 35.8 \text{ ગુણ}$$

કરિશ્માના ગુણનો મધ્યક : (ગુણને y_i વડે દર્શાવતાં)

$$\overline{y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{25 + 48 + 40 + 38 + 42 + 37 + 44 + 28 + 46 + 40}{10}$$

$$= \frac{388}{10} = 38.8 \text{ ગુણ}$$

x_i	$\|x_i - \bar{x}\|$
30	5.8
35	0.8
40	4.2
42	6.2
38	2.2
25	10.8
31	4.8
36	0.2
40	4.2
41	5.2
$\Sigma x_i = 358$	$\Sigma\|x_i - \bar{x}\| = 44.4$

y_i	$\|y_i - \bar{y}\|$
25	13.8
48	9.2
40	1.2
38	0.8
42	3.2
37	1.8
44	5.2
28	10.8
46	7.2
40	1.2
$\Sigma y_i = 388$	$\Sigma\|y_i - \bar{y}\| = 54.4$

$$\delta\bar{x} = \frac{\sum |x_i - \bar{x}|}{n} = \frac{44.4}{10}$$

$\delta\bar{x} = 4.44$ ગુણ

$$\delta\bar{y} = \frac{\sum |y_i - \bar{y}|}{n} = \frac{54.4}{10}$$

$\delta\bar{y} = 5.44$ ગુણ

પ્રેયાના ગુણની માહિતીનું સરેરાશ વિચલન કરિશ્માના ગુણની માહિતીના સરેરાશ વિચલન કરતાં ઓછું છે. તેથી પ્રેયા અભ્યાસમાં વધુ સ્થિર છે.

(2) વર્ગીકૃત માહિતી (Grouped Data) :

(i) અસતત આવૃત્તિ-વિતરણ (Discrete Frequency Distribution) : ધારો કે અસતત આવૃત્તિ-વિતરણના અસતત ચલ x ની કિંમતો $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k$ ને અનુરૂપ આવૃત્તિઓ અનુક્રમે $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_k$ છે. અસતત આવૃત્તિ-વિતરણના મધ્યકને સાપેક્ષ સરેરાશ વિચલનની ગણતરી નીચે જણાવેલ સૂત્ર દ્વારા કરવામાં આવે છે :

$$\delta\bar{x} = \frac{\sum f_i |x_i - \bar{x}|}{n}$$

જ્યાં, $n = \Sigma f_i$ = આવૃત્તિઓનો સરવાળો $\quad i = 1, 2, 3, \ldots, k$

$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{n}$ = આવૃત્તિ-વિતરણનો મધ્યક

$|x_i - \bar{x}|$ = અવલોકનો x_i અને મધ્યક $\bar{x}$ના તફાવતનો માનાંક

ઉદાહરણ 3 : નીચે આપેલ આવૃત્તિ-વિતરણનું મધ્યકથી સરેરાશ વિચલન શોધો :

x_i	3	9	17	23	27
f_i	8	10	12	9	5

ઉકેલ :

x_i	f_i	$f_i x_i$	$x_i - \overline{x}$	$\lvert x_i - \overline{x} \rvert$	$f_i \lvert x_i - \overline{x} \rvert$
3	8	24	−12	12	96
9	10	90	−6	6	60
17	12	204	2	2	24
23	9	207	8	8	72
27	5	135	12	12	60
	$n = 44$	$\Sigma f_i x_i = 660$			$\Sigma f_i \lvert x_i - \overline{x} \rvert = 312$

$$\overline{x} = \frac{\sum f_i x_i}{n} = \frac{660}{44} = 15$$

$$\delta\overline{x} = \frac{\sum f_i \lvert x_i - \overline{x} \rvert}{n} = \frac{312}{44} = 7.09$$

(ii) સતત આવૃત્તિ-વિતરણ (Continuous Frequency Distribution) : ધારો કે સતત આવૃત્તિ-વિતરણના k વર્ગોની મધ્યકિંમતો અનુક્રમે $x_1, x_2, ..., x_k$ છે અને અનુરૂપ વર્ગોની આવૃત્તિ અનુક્રમે $f_1, f_2, ..., f_k$ છે, તો સતત આવૃત્તિ-વિતરણના મધ્યકથી સરેરાશ વિચલનની ગણતરી નીચે જણાવેલ સૂત્રની મદદથી કરવામાં આવે છે :

$$\delta\overline{x} = \frac{\sum f_i \lvert x_i - \overline{x} \rvert}{n}$$

જ્યાં, $n = \Sigma f_i$ = તમામ આવૃત્તિઓનો સરવાળો અને $\overline{x} = \frac{\sum f_i x_i}{n}$

ઉદાહરણ 4 : ભાષાની 60 ગુણની કસોટીમાં 50 વિદ્યાર્થીઓએ મેળવેલ ગુણનું આવૃત્તિ-વિતરણ નીચે પ્રમાણે છે, તો આવૃત્તિ-વિતરણનું મધ્યકથી સરેરાશ વિચલન શોધો :

વર્ગ	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
આવૃત્તિ	6	8	14	16	4	2

ઉકેલ :

વર્ગ	x_i	f_i	$f_i x_i$	$x_i - \overline{x}$	$\lvert x_i - \overline{x} \rvert$	$f_i \lvert x_i - \overline{x} \rvert$
0-10	5	6	30	−22	22	132
10-20	15	8	120	−12	12	96
20-30	25	14	350	−2	2	28
30-40	35	16	560	8	8	128
40-50	45	4	180	18	18	72
50-60	55	2	110	28	28	56
		$n = 50$	$\Sigma f_i x_i = 1350$			$\Sigma f_i \lvert x_i - \overline{x} \rvert = 512$

મધ્યક $\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{n} = \frac{1350}{50} = 27$. આથી $\bar{x} = 27$

મધ્યકથી સરેરાશ વિચલન $\delta\bar{x} = \frac{\sum f_i |x_i - \bar{x}|}{n} = \frac{512}{50} = 10.24$. આથી $\delta\bar{x} = 10.24$

ટૂંકી રીત દ્વારા મધ્યકથી સરેરાશ વિચલનની ગણતરી :

(i) અસતત આવૃત્તિ-વિતરણ માટે :

જ્યારે x_i નાં મૂલ્યો મોટાં હોય ત્યારે અવલોકનોનો મધ્યક ધારી લેવામાં આવે છે. તેને A વડે દર્શાવવામાં આવે છે. ચલની કોઈ પણ કિંમત કે મધ્યકિંમત કે અન્ય યોગ્ય સંખ્યાને A તરીકે ધારવામાં આવે છે. ત્યાર બાદ દરેક અવલોકન x_iનું A થી વિચલન $d_i = x_i - A$ ગણવામાં આવે છે. ત્યાર બાદ d_i ની દરેક કિંમત સાથે તેને અનુરૂપ આવૃત્તિ f_i સાથે ગુણાકાર કરી સરવાળો $\Sigma f_i d_i$ મેળવવામાં આવે છે. મધ્યક $\bar{x}$ની ગણતરી $\bar{x} = A + \frac{\sum f_i d_i}{n}$ સૂત્ર દ્વારા કરવામાં આવે છે.

ઉદાહરણ 5 : નીચે આપેલ આવૃત્તિ-વિતરણનું મધ્યકથી સરેરાશ વિચલન ટૂંકી રીતે મેળવો :

x_i	12	13	14	15	17	20	25
f_i	10	18	20	25	15	10	2

ઉકેલ :

x_i	f_i	$d_i = x_i - A$ A = 15	$f_i d_i$	$\|x_i - \bar{x}\|$	$f_i \|x_i - \bar{x}\|$
12	10	–3	–30	3.14	31.40
13	18	–2	–36	2.14	38.52
14	20	–1	–20	1.14	22.80
15 = A	25	0	0	0.14	3.50
17	15	2	30	1.86	27.90
20	10	5	50	4.86	48.60
25	2	10	20	9.86	19.72
	n =100		$\Sigma fidi$ = 14		$\Sigma f_i \|x_i - \bar{x}\|$ = 192.44

મધ્યક $\bar{x} = A + \frac{\sum f_i d_i}{n}$.

$= 15 + \frac{14}{100}$

$= 15 + 0.14$

$\bar{x} = 15.14$

$\delta\bar{x} = \frac{\sum f_i |x_i - \bar{x}|}{n}$

$= \frac{192.44}{100}$

$\delta\bar{x} = 1.92$

(ii) સતત આવૃત્તિ-વિતરણ માટે :

જો માહિતીના સતત આવૃત્તિ-વિતરણના બધા વર્ગોની લંબાઈ સરખી હોય, તો મધ્યકના સૂત્રને ગણતરી સરળ બને તેવા અનુકૂળ સ્વરૂપમાં વ્યક્ત કરી શકાય.

ધારો કે આવૃત્તિ-વિતરણના બધા વર્ગોની વર્ગલંબાઈ સમાન છે અને તે તમામ વર્ગોની લંબાઈ c છે અને x_i એ i માં વર્ગની મધ્યકિંમત છે, $i = 1, 2, 3, ..., k$. આ મધ્યકિંમતોમાંથી કોઈ એક મધ્યકિંમતને ધારેલા મધ્યક તરીકે લઈ તેને A વડે દર્શાવાય છે. x_i અને ધારેલા મધ્યક A વચ્ચેના તફાવતને વર્ગલંબાઈ c વડે ભાગીને i મા વર્ગનું વિચલન $d_i = \frac{x_i - A}{c}$ મેળવવામાં આવે છે. આ વિચલનને i મા વર્ગની આવૃત્તિ f_i વડે ગુણી $\Sigma f_i d_i$ મેળવવામાં આવે છે. આ ઉપરથી નીચેના સૂત્રનો ઉપયોગ કરી મધ્યક શોધવામાં આવે છે :

$$\bar{x} = A + \frac{\sum f_i d_i}{n} \times c, \quad d_i = \frac{x_i - A}{c}$$

ઉદાહરણ 6 : નીચે આપેલ આવૃત્તિ-વિતરણનું મધ્યકથી સરેરાશ વિચલન ટૂંકી રીતે મેળવો :

ગુણ	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા	6	8	14	16	4	2

ઉકેલ :

ગુણ	f_i	મધ્યકિંમત x_i	$d_i = \frac{x_i - 25}{10}$	$f_i d_i$	$\lvert x_i - \bar{x} \rvert$	$f_i \lvert x_i - \bar{x} \rvert$
0-10	6	5	−2	−12	22	132
10-20	8	15	−1	−8	12	96
20-30	14	25 = A	0	0	2	28
30-40	16	35	1	16	8	128
40-50	4	45	2	8	18	72
50-60	2	55	3	6	28	56
	$n = 50$			$\Sigma f_i d_i = 10$		$\Sigma f_i \lvert x_i - \bar{x} \rvert = 512$

મધ્યક $\bar{x} = A + \frac{\sum f_i d_i}{n} \times c$

$= 25 + \frac{10}{50} \times 10$

$= 25 + 2 = 27$

મધ્યકથી સરેરાશ વિચલન $\delta\bar{x} = \frac{\sum f_i \lvert x_i - \bar{x} \rvert}{n}$

$= \frac{512}{50}$

$= 10.24$

9.5 મધ્યસ્થ

મધ્યસ્થથી સરેરાશ વિચલન શોધવાની રીત જોઈએ તે પહેલાં આપણે મધ્યસ્થ શોધતા શીખીશું. મધ્યસ્થ માહિતીનાં અવલોકનોના બે સરખા ભાગ પાડતી એવી એક કિંમત છે કે, આ કિંમતથી ઓછા કે આ કિંમતથી વધુ કિંમત ધરાવતાં અવલોકનોની સંખ્યા સરખી હોય. આ વિધાનથી સ્પષ્ટ થાય છે કે, મધ્યસ્થ મેળવવા માટે માહિતીનાં અવલોકનોને સૌપ્રથમ તેમની કિંમતના આધારે ચડતા ક્રમમાં ગોઠવવા જોઈએ.

ત્યાર બાદ આ ગોઠવણીની બરાબર મધ્યમાં આવેલા અવલોકનની કિંમતને માહિતીનો **મધ્યસ્થ (Median)** કહેવાય. આમ મધ્યસ્થ, મધ્યમાં સ્થિત થયેલી કિંમત હોવાથી તે અવલોકનોના બે સરખા ભાગ કરે છે અને તેને સંકેત M વડે દર્શાવાય છે. ધોરણ 10માં આપણે અવર્ગીકૃત માહિતીનો મધ્યસ્થ શોધવાનો અભ્યાસ કર્યો. ધારો કે આપેલી માહિતીનાં n અવલોકનોને તેમની કિંમતોના આધારે ચડતા ક્રમમાં ગોઠવવામાં આવે છે. આ ગોઠવણીમાં બરોબર મધ્યમાં આવતાં અવલોકનની કિંમતને અવર્ગીકૃત માહિતીનો મધ્યસ્થ કહેવામાં આવે છે. જો n એક અયુગ્મ પૂર્ણાંક હોય, તો મધ્યસ્થની વ્યાખ્યા અનુસાર M એ અવલોકનોની ચડતા ક્રમની ગોઠવણીમાં $\frac{n+1}{2}$માં અવલોકનોની કિંમત બરાબર થશે. જો n એક યુગ્મ પૂર્ણાંક હોય, તો

$$\text{મધ્યસ્થ M} = \frac{\left(\frac{n}{2}\right)\text{માં અવલોકનની કિંમત} + \left(\frac{n}{2}+1\right)\text{માં અવલોકનની કિંમત}}{2}$$

આ સમજવા આપણે બે ઉદાહરણો લઈએ :

(1) કોઈ એક કસોટીમાં 7 વિદ્યાર્થીઓએ 100માંથી મેળવેલ ગુણ 38, 48, 50, 87, 60, 49, 70 છે. સૌપ્રથમ અવલોકનોને તેમની કિંમત અનુસાર ચડતા ક્રમમાં ગોઠવીશું.

38, 48, 49, 50, 60, 70, 87.

અહીં અવલોકનોની સંખ્યા n અયુગ્મ પૂર્ણાંક 7 છે.

$$M = \frac{n+1}{2}\text{મા અવલોકનની કિંમત}$$
$$= \left(\frac{7+1}{2}\right)\text{મા અવલોકનની કિંમત}$$
$$= \text{ચોથા અવલોકનની કિંમત}$$
$$= 50$$

$\therefore$ મધ્યસ્થ = 50 ગુણ

(2) 10 વિદ્યાર્થીના રોજિંદી ખિસ્સાખર્ચ ₹ 20, 25, 17, 18, 8, 15, 22, 10, 9, 14 છે.

આપેલ માહિતીનાં અવલોકનોને ચડતા ક્રમમાં ગોઠવતાં ગોઠવણી નીચે જણાવ્યા મુજબ થશે :

8, 9, 10, 14, 15, 17, 18, 20, 22, 25.

અહીં, n = 10 એક યુગ્મ પૂર્ણાંક છે.

$$M = \frac{\left(\frac{n}{2}\right)\text{મા અવલોકનની કિંમત} + \left(\frac{n}{2}+1\right)\text{માં અવલોકનની કિંમત}}{2}$$
$$= \frac{\text{પાંચમા અવલોકનની કિંમત + છઠ્ઠા અવલોકનની કિંમત}}{2}$$
$$= \frac{15+17}{2} = 16$$

$\therefore$ મધ્યસ્થ = ₹ 16

વર્ગીકૃત માહિતી માટે મધ્યસ્થ :

આપણે જાણીએ છીએ કે, વર્ગીકૃત માહિતીનું વર્ગીકરણ ચલના પ્રકાર પ્રમાણે **(a) અસતત આવૃત્તિ-વિતરણ અને (b) સતત આવૃત્તિ-વિતરણ એ બે પ્રકારે થાય છે.**

(a) અસતત વર્ગીકૃત માહિતીનો મધ્યસ્થ (Median for Discrete Grouped Data) : ધારો કે અસતત આવૃત્તિ-વિતરણના અસતત ચલ x ની કિંમતો x_1, x_2,..., x_k ને અનુરૂપ આવૃત્તિઓ અનુક્રમે f_1, f_2,...,f_k છે. મધ્યસ્થ શોધવા માટે આવૃત્તિ-વિતરણની આવૃત્તિઓની મદદથી સંચય આવૃત્તિઓ cf મેળવવામાં આવે છે. **જે અવલોકનની સંચયી આવૃત્તિ $\frac{n+1}{2}$ માં અવલોકન જેટલી કે તેનાથી તુરંત મોટી હોય તે અવલોકન એ જરૂરી મધ્યસ્થ M છે.** અહીં $n = \Sigma f_i$ = આવૃત્તિઓનો સરવાળો.

અહીં n ની આપેલી કિંમત માટે અસતત આવૃત્તિ-વિતરણ પરથી મેળવેલ સંચયી આવૃત્તિના સ્તંભમાં $\frac{n+1}{2}$ મા ક્રમે આવતાં અવલોકનોની જે કિંમત મળે તે કિંમતને મધ્યસ્થ તરીકે લેવામાં આવે છે. ઉદાહરણ તરીકે નીચે આપેલ આવૃત્તિ-વિતરણ પરથી મધ્યસ્થ શોધીએ :

x_i	0	1	2	3	4
f_i	4	1	6	11	3

x_i	f_i	cf
0	4	4
1	1	5
2	6	11
3	11	22
4	3	25

$n = \Sigma f_i = 25$

M = $\frac{n+1}{2}$મા અવલોકનની કિંમત

= $\left(\frac{26}{2}\right)$મા અવલોકનની કિંમત = 13મા અવલોકનની કિંમત

હવે સંચયી આવૃત્તિના સ્તંભમાં જોતાં 13 મું અવલોકન ચલ 3ને સાપેક્ષ સંચયી આવૃત્તિ 22માં સમાયેલું છે અને સંચયી આવૃત્તિ 22ને સાપેક્ષ ચલ xની કિંમત 3 છે.

$\therefore$ મધ્યસ્થ = 3

(b) વર્ગીકૃત સતત માહિતી માટે મધ્યસ્થ (Median for Continuous Grouped Data) : વર્ગીકૃત સતત માહિતી આવૃત્તિ-વિતરણના વર્ગોના સ્વરૂપમાં હોય છે અને આવૃત્તિ-વિતરણના સતત ચલની કિંમતો વર્ગના સ્વરૂપમાં ચઢતા ક્રમમાં ગોઠવાયેલી હોય છે. મધ્યસ્થ શોધવા માટે આવૃત્તિ-વિતરણની આવૃત્તિઓની મદદથી સંચયી આવૃત્તિઓ મેળવવામાં આવે છે. જો આવૃત્તિઓનો સરવાળો $n = \Sigma f_i$ હોય, તો સંચયી આવૃત્તિના સ્તંભ પરથી $\frac{n}{2}$મું અવલોકન જે વર્ગમાં આવે તે વર્ગ નક્કી કરવામાં આવે છે. આ વર્ગને **મધ્યસ્થ વર્ગ (Median class)** કહેવામાં આવે છે. મધ્યસ્થ વર્ગ નક્કી કર્યા પછી મધ્યસ્થની ગણતરી નીચે જણાવેલ સૂત્ર દ્વારા કરવામાં આવે છે :

$$\mathbf{M = L + \frac{\left(\frac{n}{2} - F\right)}{f} \times c}$$

જ્યાં, L = મધ્યસ્થ વર્ગનું અધઃસીમાબિંદુ

n = Σf_i = કુલ આવૃત્તિ

F = મધ્યસ્થ વર્ગની અગાઉના વર્ગની સંચયી આવૃત્તિ

f = મધ્યસ્થ વર્ગની આવૃત્તિ

c = મધ્યસ્થ વર્ગની વર્ગલંબાઈ

હવે આપણે ઉદાહરણ દ્વારા નીચે આપેલી માહિતીનો મધ્યસ્થ શોધવાની રીત સમજીશું :

વર્ગ	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
આવૃત્તિ	4	12	14	16	20	16	10	8

ઉકેલ :

વર્ગ	f_i	cf
20-30	4	4
30-40	12	16
40-50	14	30
50-60	16	46
60-70	20	66
70-80	16	82
80-90	10	92
90-100	8	100

$n = \Sigma f_i = 100$

$\frac{n}{2} = 50$ પછી તુરતની સંચયી આવૃત્તિ 66 છે. 50મું અવલોકન આવૃત્તિ-વિતરણના વર્ગ 60-70માં સમાયેલું છે. તેથી મધ્યસ્થ વર્ગ 60-70 થશે.

L = 60, f = 20, F = 46, c = 10

$$M = L + \frac{\left(\frac{n}{2} - F\right)}{f} \times c$$

$$= 60 + \left(\frac{50 - 46}{20}\right) \times 10$$

$$= 60 + \frac{4}{20} \times 10$$

$$= 60 + 2$$

$$M = 62$$

મધ્યસ્થથી સરેરાશ વિચલન

હવે આપણે અવર્ગીકૃત માહિતી અને વર્ગીકૃત માહિતી માટે મધ્યસ્થથી સરેરાશ વિચલન શોધવાની રીતો જોઈશું.

(1) અવર્ગીકૃત માહિતી :

ધારો કે આપેલી માહિતીનાં n અવલોકનો $x_1, x_2, ..., x_n$ છે. આ માહિતીનો મધ્યસ્થ M છે. જ્યાં, જો n અયુગ્મ હોય તો M = $\frac{n+1}{2}$ મું અવલોકન છે. જો n યુગ્મ હોય, તો

$$M = \frac{\left(\frac{n}{2}\right)\text{મા અવલોકનની કિંમત} + \left(\frac{n}{2}+1\right)\text{મા અવલોકનની કિંમત}}{2}$$

i મા અવલોકન અને મધ્યસ્થ M નો તફાવત $x_i - M$ મેળવીશું. ત્યાર બાદ i મા અવલોકન અને મધ્યસ્થ M નો ધન તફાવત $|x_i - M|$ મેળવીશું. માહિતીનાં અવલોકનો અને મધ્યસ્થ વચ્ચેના ધન તફાવતોની સરેરાશને માહિતીનું મધ્યસ્થથી સરેરાશ વિચલન કહે છે. આમ, વ્યાખ્યા પ્રમાણે **મધ્યસ્થથી સરેરાશ વિચલન,**

$$\delta M = \frac{\sum |x_i - M|}{n}$$

ઉદાહરણ 7 : નીચે આપેલ માહિતી પરથી મધ્યસ્થથી સરેરાશ વિચલન શોધો :

37, 70, 48, 50, 32, 56, 63, 46, 54, 44.

ઉકેલ : અહીં આપેલ અવલોકનોની સંખ્યા એક યુગ્મ પૂર્ણાંક 10 છે. આપેલી માહિતીનાં અવલોકનોને ચડતા ક્રમમાં ગોઠવતાં ગોઠવણી નીચે મુજબ થશે :

32, 37, 44, 46, 48, 50, 54, 56, 63, 70.

$$\text{હવે, મધ્યસ્થ } M = \frac{\text{5મા અવલોકનની કિંમત} + \text{6ઠ્ઠા અવલોકનની કિંમત}}{2}$$

$$= \frac{48 + 50}{2}$$

$$M = 49$$

x_i	$x_i - M$	$\|x_i - M\|$
37	−12	12
70	21	21
48	−1	1
50	1	1
32	−17	17
56	7	7
63	14	14
46	−3	3
54	5	5
44	−5	5
		$\Sigma\|x_i - M\| = 86$

$$\delta M = \frac{\sum |x_i - M|}{n} = \frac{86}{10} = 8.6$$

(2) વર્ગીકૃત માહિતી :

(i) અસતત આવૃત્તિ-વિતરણ : મધ્યસ્થથી સરેરાશ વિચલન શોધવા માટે આપણે સૌપ્રથમ આપેલી અસતત આવૃત્તિ-વિતરણનો મધ્યસ્થ શોધીશું. આ માટે આપણે આવૃત્તિ-વિતરણની આવૃત્તિઓની મદદથી સંચયી આવૃત્તિ મેળવીશું. હવે અસતત આવૃત્તિ-વિતરણનો મધ્યસ્થ એ જેની સંચયી આવૃત્તિ $\frac{n+1}{2}$ જેટલી હોય કે તેની તુરત ઉપર હોય તે અવલોકન છે. અહીં, $n = \Sigma f_i$ = આવૃત્તિઓનો સરવાળો.

આમ, મધ્યસ્થ મેળવ્યા બાદ આપણે મધ્યસ્થથી સરેરાશ વિચલન શોધવા નીચેનાં સૂત્રનો ઉપયોગ કરીશું :

$$\delta M = \frac{\sum f_i \mid x_i - M \mid}{n}$$

ઉદાહરણ 8 : નીચે આપેલ માહિતી પરથી મધ્યસ્થથી સરેરાશ વિચલન શોધો :

x_i	2	5	6	8	10	12
f_i	2	8	10	7	8	5

ઉકેલ :

x_i	f_i	cf	$\mid x_i - M \mid$	$f_i \mid x_i - M \mid$
2	2	2	6	12
5	8	10	3	24
6	10	20	2	20
8	7	27	0	0
10	8	35	2	16
12	5	40	4	20
	$n = 40$			$\Sigma f_i \mid x_i - M \mid = 92$

મધ્યસ્થ M $= \left(\frac{n+1}{2}\right)$મા અવલોકનની કિંમત

$= \left(\frac{40+1}{2}\right)$મા અવલોકનની કિંમત

$= 20.5$મા અવલોકનની કિંમત

સંચયી આવૃત્તિ 20 પછી તુરત સંચયી આવૃત્તિ 27 મળે. $cf = 27$ માટે $x_i = 8$.

$\therefore \quad M = 8$

$$\delta M = \frac{\sum f_i \mid x_i - M \mid}{n}$$

$$= \frac{92}{40}$$

$$\delta M = 2.3$$

(ii) સતત આવૃત્તિ-વિતરણ : મધ્યસ્થથી આપેલ સતત આવૃત્તિ-વિતરણનું સરેરાશ વિચલન શોધવા આપણે સૌપ્રથમ મધ્યસ્થ શોધીશું ત્યાર બાદ દરેક વર્ગની મધ્યકિંમતનું મધ્યસ્થથી વિચલન $\mid x_i - M \mid$ શોધીશું. મધ્યસ્થથી સરેરાશ વિચલન શોધવા માટે નીચેના સૂત્રનો ઉપયોગ કરીશું :

$$\delta M = \frac{\sum f_i \mid x_i - M \mid}{n}$$

જ્યાં x_i એ i મા વર્ગની મધ્યકિંમત છે અને $n = \Sigma f_i$.

ઉદાહરણ 9 : નીચે આપેલ આવૃત્તિ-વિતરણ માટે મધ્યસ્થથી સરેરાશ વિચલન શોધો :

વર્ગ	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
આવૃત્તિ	2	3	8	14	8	3	2

ઉકેલ :

વર્ગ	આવૃત્તિ f_i	મધ્યકિંમત x_i	cf	$\|x_i - M\|$	$f_i\|x_i - M\|$
10-20	2	15	2	30	60
20-30	3	25	5	20	60
30-40	8	35	13	10	80
40-50	14	45	27	0	0
50-60	8	55	35	10	80
60-70	3	65	38	20	60
70-80	2	75	40	30	60
	$n = 40$				$\Sigma f_i\|x_i - M\| = 400$

$\left(\frac{n}{2}\right)$મા અવલોકનની કિંમત ધરાવતો વર્ગ

= 20મા અવલોકનની કિંમત ધરાવતો વર્ગ

વર્ગ 30-40 માટે $cf = 13$ તથા વર્ગ 40-50 માટે $cf = 27$.

$\therefore$ 40-50 એ મધ્યસ્થ વર્ગ છે.

$\therefore$ $L = 40, F = 13, \frac{n}{2} = \frac{40}{2} = 20, f = 14, c = 10$

$$M = L + \left(\frac{\frac{n}{2} - F}{f}\right) \times c$$

$$= 40 + \frac{20 - 13}{14} \times 10$$

$$= 40 + 5$$

$$M = 45$$

$$\delta M = \frac{\sum f_i |x_i - M|}{n}$$

$$= \frac{400}{40}$$

$$\delta M = 10$$

સ્વાધ્યાય 9.1

1. નીચેનાં અવલોકન માટે મધ્યકથી સરેરાશ વિચલન ગણો :

18, 20, 28, 15, 17, 22, 25, 29, 32, 34.

2. 10 કારીગરોના માસિક પગારના આંકડા (₹માં) નીચે પ્રમાણે છે. માહિતીનું મધ્યકથી સરેરાશ વિચલન ગણો :

1150, 1140, 1230, 1200, 1100, 1300, 1190, 1180, 1160, 1150.

3. નીચેનાં અવલોકન માટે મધ્યસ્થથી સરેરાશ વિચલન ગણો :

3, 9, 5, 3, 12, 10, 18, 4, 7, 19, 21.

4. 10 કારીગરોના દૈનિક વેતનના આંકડા (₹માં) નીચે પ્રમાણે છે. માહિતીનું મધ્યસ્થથી સરેરાશ વિચલન ગણો : 36, 72, 46, 42, 60, 45, 53, 46, 51, 49.

5. નીચેની માહિતી માટે મધ્યકથી સરેરાશ વિચલન ગણો :

x_i	8	16	24	32	40	48	56	64
f_i	5	13	12	8	6	10	9	3

6. નીચેની માહિતી માટે મધ્યકથી સરેરાશ વિચલન ગણો :

x_i	10	30	50	70	90
f_i	4	24	28	16	8

7. નીચેની માહિતી માટે મધ્યસ્થથી સરેરાશ વિચલન ગણો :

x_i	3	6	9	12	13	15	21	22
f_i	3	4	5	2	4	5	4	3

8. નીચેની માહિતી માટે મધ્યસ્થથી સરેરાશ વિચલન ગણો :

x_i	15	21	27	30	35
f_i	3	5	6	7	8

9. એક ક્રિકેટરે 10 દાવમાં કરેલા રન 48, 80, 58, 44, 52, 65, 73, 56, 64 અને 54 છે. મધ્યસ્થથી સરેરાશ વિચલન ગણો.

10. 10 છોડની ઊંચાઈના આંકડા (સેમીમાં) નીચે આપેલા છે. માહિતીનું મધ્યસ્થથી તથા મધ્યકથી સરેરાશ વિચલન શોધો :

42, 52.3, 55.2, 72.9, 52.8, 79, 32.5, 15.2, 27.9, 30.2

11. નીચેના આવૃત્તિ-વિતરણ માટે મધ્યકથી સરેરાશ વિચલન ગણો :

ગુણ	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50	50–60	60–70
વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા	4	6	10	20	10	6	4

12. નીચેના આવૃત્તિ-વિતરણ માટે મધ્યકથી સરેરાશ વિચલન ગણો.

દૈનિક આવક	0–100	100–200	200–300	300–400	400–500	500–600	600–700	700–800
વ્યક્તિની સંખ્યા	4	8	9	10	7	5	4	3

13. નીચેના આવૃત્તિ-વિતરણ માટે મધ્યસ્થથી સરેરાશ વિચલન ગણો :

વર્ગ	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50	50–60
આવૃત્તિ	6	7	15	16	4	2

14. 100 વ્યક્તિઓના એક સમૂહની ઉંમર માપતાં નીચેની માહિતી મળી. તે પરથી આ સમૂહનું મધ્યસ્થથી સરેરાશ વિચલન મેળવો :

ઉંમર	16–20	21–25	26–30	31–35	36–40	41–45	46–50	51–55
સંખ્યા	5	6	12	14	26	12	16	9

(અહીં આપેલ આવૃત્તિ-વિતરણને સીમાબિંદુ સાથેના આવૃત્તિ-વિતરણમાં ફેરવવા વર્ગના અધઃસીમાબિંદુમાંથી 0.5 બાદ કરો અને ઊર્ધ્વસીમાબિંદુમાં 0.5 ઉમેરો.)

*

9.6 પ્રમાણિત વિચલન

આપણે જોયું કે સરેરાશ વિચલનની વ્યાખ્યા, માહિતીનાં અવલોકનોના મધ્યકથી મેળવેલ વિચલનોના માનાંકના આધારે આપવામાં આવે છે. વિચલનોના માનાંક લેવાથી માહિતીનાં બધાં જ વિચલનોની કિંમત અનૃણ થાય છે. માહિતીના પ્રત્યેક અવલોકનના મધ્યકથી લીધેલા વિચલનના માનાંકને બદલે જો આપણે વિચલનનો વર્ગ લઈ બધાં વિચલનોના વર્ગના સરવાળાને અવલોકનની કુલ સંખ્યા વડે ભાગીએ, તો આપણને પ્રસારનું એક અગત્યનું માપ મળે છે. પ્રસારના આ માપને **વિચરણ (Variance)** કહે છે અને તેને સંકેત s^2 વડે દર્શાવવામાં આવે છે. વિચરણના (ધન) વર્ગમૂળને **પ્રમાણિત વિચલન (Standard Deviation)** કહેવામાં આવે છે અને તેને સંકેત s વડે દર્શાવવામાં આવે છે. ઈ.સ. 1893માં પ્રસિદ્ધ આંકડાશાસ્ત્રી કાર્લ પિયર્સને પ્રસારના માપ તરીકે પ્રમાણિત વિચલનની વ્યાખ્યા આપી અને તેની ગણતરીની રીત આપી. પ્રસારનાં બધાં માપો પૈકી પ્રમાણિત વિચલનનો ઉપયોગ સૌથી વધુ થાય છે. તેની વ્યાખ્યા નીચે મુજબ આપવામાં આવે છે :

પ્રમાણિત વિચલન : આપેલી માહિતીનાં અવલોકનોના મધ્યકથી લીધેલા વિચલનોના વર્ગોના સરવાળાને અવલોકનોની કુલ સંખ્યા વડે ભાગવાથી મળતી કિંમતના ધન વર્ગમૂળને અવર્ગીકૃત માહિતીનું પ્રમાણિત વિચલન કહેવામાં આવે છે. આમ, આપેલાં n અવલોકનો $x_1, x_2, ..., x_n$ નો મધ્યક $\bar{x}$ હોય, તો

$$s = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

અવર્ગીકૃત માહિતી માટે પ્રમાણિત વિચલનની ગણતરી

પ્રત્યક્ષ રીત : જો અવર્ગીકૃત માહિતીનાં અવલોકનો $x_1, x_2, ..., x_n$ હોય, તો પ્રથમ આ અવલોકનના મધ્યક $\bar{x}$ ની ગણતરી કરવામાં આવે છે. ત્યાર બાદ પ્રત્યેક અવલોકનનું મધ્યકથી વિચલન $x_i - \bar{x}$ મેળવવામાં આવે છે. તે પરથી વિચલનોનાં વર્ગ લઈ વિચલનોના વર્ગોનો સરવાળો $\Sigma(x_i - \bar{x})^2$ મેળવવામાં આવે છે. આ સરવાળાને અવલોકનોની કુલ સંખ્યા n વડે ભાગવાથી વિચરણ s^2 મળે છે.

s^2નું ધન વર્ગમૂળ લેવાથી પ્રમાણિત વિચલન મળે છે.

પ્રમાણિત વિચલન $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{\sum(x_i - \overline{x})^2}{n}}$

ઉદાહરણ દ્વારા રીત સ્પષ્ટ કરીએ.

ઉદાહરણ 10 : એક ક્રિકેટરે 6 દાવમાં કરેલા રન 60, 45, 25, 40, 70 અને 30 છે. રનનો મધ્યક અને પ્રમાણિત વિચલન શોધો.

ઉકેલ : સૌપ્રથમ આપણે $\overline{x}$ની ગણતરી કરીશું.

મધ્યક $\overline{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{270}{6} = 45$. આમ, $\overline{x} = 45$.

હવે $x_i - \overline{x}$ નાં મૂલ્યો શોધીશું. પછી $(x_i - \overline{x})^2$ ના વર્ગો મેળવીશું.

ત્યાર બાદ વર્ગોનો સરવાળો $\Sigma(x_i - \overline{x})^2$ મેળવીશું.

ત્યાર બાદ સૂત્રના ઉપયોગથી s^2 અને s ની ગણતરી કરીશું.

x_i	$x_i - \overline{x}$	$(x_i - \overline{x})^2$
60	15	225
45	0	0
25	−20	400
40	−5	25
70	25	625
30	−15	225
$\Sigma x_i = 270$		$\Sigma(x_i - \overline{x})^2 = 1500$

$\therefore$ વિચરણ $s^2 = \frac{\sum(x_i - \overline{x})^2}{n}$

$= \frac{1500}{6} = 250$

અને પ્રમાણિત વિચલન

$s = \sqrt{250}$

$= 15.81$

ઉદાહરણ 11 : એક કસોટીમાં 9 વિદ્યાર્થીઓએ 100માંથી મેળવેલા ગુણ 69, 67, 66, 69, 64, 63, 68, 65, 72 છે, તો આ ગુણનું પ્રમાણિત વિચલન શોધો :

x_i	$(x_i - \overline{x})$	$(x_i - \overline{x})^2$
69	2	4
67	0	0
66	−1	1
69	2	4
64	−3	9
63	−4	16
68	1	1
65	−2	4
72	5	25
$\Sigma x_i = 603$		$\Sigma(x_i - \overline{x})^2 = 64$

મધ્યક $\overline{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{603}{9}$

$\overline{x} = 67$ ગુણ

વિચરણ $s^2 = \frac{\sum(x_i - \overline{x})^2}{n}$

$= \frac{64}{9} = 7.11$

પ્રમાણિત વિચલન

$s = \sqrt{\frac{64}{9}}$

$= \sqrt{7.11}$

$= 2.666 \cong 2.67$ ગુણ

ઉદાહરણ 12 : નીચેનાં અવલોકનો માટે પ્રમાણિત વિચલન શોધો :

10, 17, 15, 21, 19, 23, 19, 25, 30, 26.

x_i	$x_i - \overline{x}$	$(x_i - \overline{x})^2$
10	−10.5	110.25
17	−3.5	12.25
15	−5.5	30.25
21	0.5	0.25
19	−1.5	2.25
23	2.5	6.25
19	−1.5	2.25
25	4.5	20.25
30	9.5	90.25
26	5.5	30.25
$\Sigma x_i = 205$		$\Sigma(x_i - \overline{x})^2 = 304.50$

મધ્યક $\overline{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{205}{10}$

$\overline{x} = 20.5$

વિચરણ $s^2 = \frac{\sum(x_i - \overline{x})^2}{n}$

$= \frac{304.50}{10} = 30.45$

પ્રમાણિત વિચલન $= \sqrt{s^2}$

$s = \sqrt{30.45}$

$= 5.518$

આપણે જોયું કે, ઉદાહરણ 11માં મધ્યકનું મૂલ્ય 67 પૂર્ણાંક સંખ્યા હોવાથી ગણતરી સરળ હતી પરંતુ ઉદાહરણ 12માં મધ્યક $\overline{x}$ એ 20.5 અપૂર્ણાંક હોવાથી ગણતરી થોડી લાંબી થાય છે. આવા પ્રશ્નમાં જો x_i નાં મૂલ્યો પ્રમાણમાં નાનાં હોય, તો વૈકલ્પિક સૂત્ર તરીકે નીચેનું સૂત્ર ઉપયોગમાં લેવાય છે :

$$\text{પ્રમાણિત વિચલન, } s = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum x_i}{n}\right)^2} = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n} - (\overline{x})^2}$$

આપણે આ સૂત્ર સાબિત કરીશું. વ્યાખ્યા પ્રમાણે,

$$s = \sqrt{\frac{\sum(x_i - \overline{x})^2}{n}}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{n}\sum(x_i^2 - 2x_i\,\overline{x} + \overline{x}^2)}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{n}\sum x_i^2 - 2\overline{x}\frac{\sum x_i}{n} + \frac{\overline{x}^2}{n}\ (1 + 1 + ... + n \text{ વખત})}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{n}\sum x_i^2 - 2\overline{x}^2 + \overline{x}^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{n}\sum x_i^2 - (\overline{x})^2}$$

$$\therefore\ s = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum x_i}{n}\right)^2} \qquad (1)$$

આ સૂત્રનો ઉપયોગ કરતી વખતે અવલોકનોનો સરવાળો Σx_i અને તેમના વર્ગોનો સરવાળો Σx_i^2 ગણવા પડે. આપણે આ વૈકલ્પિક સૂત્રના ઉપયોગથી ઉદાહરણ 11 અને 12 ફરીથી ગણીશું.

ઉદાહરણ 13 : એક કસોટીમાં 9 વિદ્યાર્થીઓએ 100માંથી મેળવેલા ગુણ 69, 67, 66, 69 64, 63, 68, 65, 72 છે, તો આ ગુણનું પ્રમાણિત વિચલન શોધો.

ઉકેલ :

x_i	x_i^2
69	4761
67	4489
66	4356
69	4761
64	4096
63	3969
68	4624
65	4225
72	5184
$\Sigma x_i = 603$	$\Sigma x_i^2 = 40,465$

$$s = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum x_i}{n}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{40465}{9} - \left(\frac{603}{9}\right)^2}$$

$$= \sqrt{4496.11 - 4489}$$

$$= \sqrt{7.11}$$

$$= 2.666$$

$$s = 2.67$$

ઉદાહરણ 14 : નીચેનાં અવલોકનો માટે પ્રમાણિત વિચલન શોધો :
10, 17, 15, 21, 19, 23, 19, 25, 30, 26.

ઉકેલ :

x_i	x_i^2
10	100
17	289
15	225
21	441
19	361
23	529
19	361
25	625
30	900
26	676
$\Sigma x_i = 205$	$\Sigma x_i^2 = 4507$

$$s = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum x_i}{n}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{4507}{10} - \left(\frac{205}{10}\right)^2}$$

$$= \sqrt{450.7 - 420.25}$$

$$= \sqrt{30.45}$$

$$s = 5.518$$

આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે, વૈકલ્પિક સૂત્રમાં x_i^2 આવે છે. જો x_i નાં મૂલ્યો મોટાં હોય અને મધ્યક પૂર્ણાંક ન હોય, તો આ રીતે ગણતરી ખૂબ કંટાળાજનક બને છે. આવી પરિસ્થિતિમાં અવલોકનોનો મધ્યક ધારી લેવામાં આવે છે. તેને સંકેત A વડે દર્શાવાય છે. ત્યાર બાદ દરેક x_i નું A થી વિચલન d_i ગણવામાં આવે છે. આમ $d_i = x_i - A$ સૂત્રનો ઉપયોગ થાય છે.

ધારો કે $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ આપેલ માહિતીનાં n અવલોકનો છે. આ માહિતીનો મધ્યક $\bar{x}$ છે.

જો $d_i = x_i - A$, તો $x_i = d_i + A$ (i)

$\therefore \quad \Sigma d_i = \Sigma(x_i - A)$

$\therefore \quad \Sigma d_i = \Sigma x_i - (A + A + ...$ n વખત$)$

$\therefore \quad \Sigma d_i = \Sigma x_i - A \cdot n$

$\therefore \quad \frac{\sum d_i}{n} = \frac{\sum x_i}{n} - A$

$\therefore \quad \bar{d} = \bar{x} - A$, જ્યાં $\bar{d} = \frac{\sum d_i}{n}$

$\therefore \quad \bar{x} = \bar{d} + A$ (ii)

પરિણામ (i) અને (ii) પરથી

$x_i - \bar{x} = d_i + A - \bar{d} - A$

$\therefore \quad x_i - \bar{x} = d_i - \bar{d}$

$$\therefore \quad s = \sqrt{\frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

$$= \sqrt{\frac{\sum(d_i - \bar{d})^2}{n}}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{n}\sum(d_i^2 - 2d_i\bar{d} + \bar{d}^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{n}(\sum d_i^2 - 2\bar{d}\sum d_i + \bar{d}^2 \sum 1)}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{n}(\sum d_i^2 - 2\bar{d}\sum d_i + \bar{d}^2 \cdot n)}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{n}\sum d_i^2 - 2\bar{d}\frac{\sum d_i}{n} + \bar{d}^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{n}\sum d_i^2 - 2\bar{d}^2 + \bar{d}^2} \qquad \left(\frac{\sum d_i}{n} = \bar{d}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{1}{n}\sum d_i^2 - \bar{d}^2}$$

$$\therefore \quad s = \sqrt{\frac{\sum d_i^2}{n} - \left(\frac{\sum d_i}{n}\right)^2} \qquad (2)$$

હવે આપણે આ સૂત્રનો ઉપયોગ કરી ઉદાહરણ 13 અને 14 ફરીથી ગણીશું.

> **☛ નોંધ** સૂત્ર (1) તથા (2) પરથી તારવી શકાય કે, બધાં જ અવલોકનોમાંથી કોઈક અચળ બાદ કરતાં s માં ફેરફાર થતો નથી.

ઉદાહરણ 15 : એક કસોટીમાં 9 વિદ્યાર્થીઓએ 100માંથી મેળવેલા ગુણ 69, 67, 66, 69, 64, 63, 68, 65, 72 છે. તો આ માહિતીનું પ્રમાણિત વિચલન શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે A = 67

x_i	$d_i = x_i - A$	d_i^2
69	2	4
67	0	0
66	–1	1
69	2	4
64	–3	9
63	–4	16
68	1	1
65	–2	4
72	5	25
	$\Sigma d_i = 0$	$\Sigma d_i^2 = 64$

$$s = \sqrt{\frac{\sum d_i^2}{n} - \left(\frac{\sum d_i}{n}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{64}{9} - \left(\frac{0}{9}\right)^2}$$

$$= \frac{8}{3}$$

$$= 2.666$$

$$\therefore \quad s \cong 2.67$$

ઉદાહરણ 16 : નીચેનાં અવલોકનો માટે પ્રમાણિત વિચલન શોધો :

10, 17, 15, 21, 19, 23, 19, 25, 30, 26.

ઉકેલ : અહીં ધારેલો મધ્યક A = 20 લઈશું.

x_i	$d_i = x_i - A$	d_i^2
10	–10	100
17	–3	9
15	–5	25
21	1	1
19	–1	1
23	3	9
19	–1	1
25	5	25
30	10	100
26	6	36
	$\Sigma d_i = 5$	$\Sigma d_i^2 = 307$

$$s = \sqrt{\frac{\sum d_i^2}{n} - \left(\frac{\sum d_i}{n}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{307}{10}\right) - \left(\frac{5}{10}\right)^2}$$

$$= \sqrt{30.7 - 0.25}$$

$$= \sqrt{30.45}$$

$$\therefore \quad s = 5.518$$

ઉદાહરણ 17 : કોઈ એક કસોટીમાં 10 વિદ્યાર્થીઓએ 100માંથી મેળવેલા ગુણ નીચે પ્રમાણે છે. માહિતીનું પ્રમાણિત વિચલન મેળવો : 65, 58, 68, 44, 48, 45, 60, 62, 60, 50.

ઉકેલ : અહીં અવલોકનો x_i નાં મૂલ્યો મોટાં છે. તેથી ધારેલા મધ્યકની રીતનો ઉપયોગ કરવો વધુ સરળ રહેશે. અહીં ધારેલો મધ્યક A = 55 લઈશું.

x_i	$d_i = x_i - A$	d_i^2
65	10	100
58	3	9
68	13	169
44	−11	121
48	−7	49
45	−10	100
60	5	25
62	7	49
60	5	25
50	−5	25
	$\Sigma d_i = 10$	$\Sigma d_i^2 = 672$

$$s = \sqrt{\frac{\sum d_i^2}{n} - \left(\frac{\sum d_i}{n}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{672}{10}\right) - \left(\frac{10}{10}\right)^2}$$

$$= \sqrt{67.2 - 1}$$

$$= \sqrt{66.2}$$

$$\therefore \quad s = 8.136$$

વર્ગીકૃત માહિતી માટે પ્રમાણિત વિચલનની ગણતરી

(i) અસતત આવૃત્તિ-વિતરણ :

સીધી રીત : ધારો કે અસતત આવૃત્તિ-વિતરણના ચલ x ની કિંમતો $x_1, x_2, ..., x_k$ છે અને તેને અનુરૂપ આવૃત્તિઓ અનુક્રમે $f_1, f_2, ..., f_k$ છે. અસતત આવૃત્તિ-વિતરણના પ્રમાણિત વિચલનની ગણતરી નીચે જણાવેલ સૂત્રથી કરવામાં આવે છે :

પ્રમાણિત વિચલન $s = \sqrt{\frac{\sum f_i (x_i - \overline{x})^2}{n}}$ (1)

જ્યાં f_i = ચલ x_i ની આવૃત્તિ. $n = \Sigma f_i$

(1) સૌપ્રથમ મધ્યક $\overline{x} = \frac{\sum f_i x_i}{n}$ શોધો.

(2) ચલના પ્રત્યેક મૂલ્યને માટે $x_i - \overline{x}$ ગણો.

(3) $(x_i - \overline{x})^2$ ગણો.

(4) $f_i (x_i - \overline{x})^2$ ગણો અને તેમનો સરવાળો $\Sigma f_i (x_i - \overline{x})^2$ ગણો.

(5) સૂત્રમાં કિંમતો મૂકી s ગણો.

$$s = \sqrt{\frac{\sum f_i (x_i - \overline{x})^2}{n}}$$

પહેલાની જેમ સાબિત કરી શકાય કે,

$$s^2 = \frac{\sum f_i x_i^2}{n} - \overline{x}^2$$

$$s = \sqrt{\frac{\sum f_i x_i^2}{n} - (\overline{x})^2} \quad (2)$$

જો ઉપરના બંને ચલ x અને આવૃત્તિ f નાં મૂલ્યો મોટાં હોય, તો ઉપરની બંને રીતથી ગણતરી ખૂબ કંટાળાજનક બને છે. આવી પરિસ્થિતિમાં ગણતરી સરળ કરવા માટે અવલોકનોનો મધ્યક A ધારી લેવામાં આવે છે. ત્યાર બાદ દરેક અવલોકનનું વિચલન $d_i = x_i - A$ અને $n = \Sigma f_i$, $i = 1, 2, ..., k$ નો ઉપયોગ કરી નીચેના સૂત્રનો ઉપયોગ કરીશું :

$$s = \sqrt{\frac{\sum f_i d_i^2}{n} - \left(\frac{\sum f_i d_i}{n}\right)^2}.$$

ઉદાહરણ 18 : નીચેની વર્ગીકૃત અસતત માહિતી માટે સીધી રીતે અને ટૂંકી રીતે પ્રમાણિત વિચલન મેળવો :

x_i	6	7	8	9	10	11	12
f_i	3	6	9	13	8	5	4

ઉકેલ :

સીધી રીત :

x_i	f_i	$f_i x_i$	$x_i - \overline{x}$	$(x_i - \overline{x})^2$	$f_i(x_i - \overline{x})^2$
6	3	18	–3	9	27
7	6	42	–2	4	24
8	9	72	–1	1	9
9	13	117	0	0	0
10	8	80	1	1	8
11	5	55	2	4	20
12	4	48	3	9	36
	$n = 48$	$\Sigma f_i x_i = 432$			$\Sigma f_i(x_i - \overline{x})^2 = 124$

$$\overline{x} = \frac{\sum f_i x_i}{n} = \frac{432}{48} = 9$$

$$s = \sqrt{\frac{\sum f_i (x_i - \overline{x})^2}{n}}$$

$$= \sqrt{\frac{124}{48}} = \sqrt{2.58} = 1.6$$

$\therefore \quad s = 1.6$

પ્રમાણિત વિચલન આપણે નીચેના વૈકલ્પિક સૂત્રનો ઉપયોગ કરી પણ મેળવી શકીએ :

$$s = \sqrt{\frac{\sum f_i x_i^2}{n} - (\overline{x})^2}$$

x_i	f_i	x_i^2	$f_i x_i^2$
6	3	36	108
7	6	49	294
8	9	64	576
9	13	81	1053
10	8	100	800
11	5	121	605
12	4	144	576
	$n = 48$		$\Sigma f_i x_i^2 = 4012$

$$s = \sqrt{\frac{\sum f_i x_i^2}{n} - (\bar{x})^2}$$

$$= \sqrt{\frac{4012}{48} - (9)^2}$$

$$= \sqrt{83.58 - 81}$$

$$= \sqrt{2.58} = 1.6$$

$\therefore \quad s = 1.6$

ટૂંકી રીત : ધારેલો મધ્યક A = 10.

x_i	f_i	$d_i = x_i - A$	d_i^2	$f_i d_i$	$f_i d_i^2$
6	3	–4	16	–12	48
7	6	–3	9	–18	54
8	9	–2	4	–18	36
9	13	–1	1	–13	13
A = 10	8	0	0	0	0
11	5	1	1	5	5
12	4	2	4	8	16
	$n = 48$			$\Sigma f_i d_i = -48$	$\Sigma f_i d_i^2 = 172$

$$s = \sqrt{\frac{\sum f_i d_i^2}{n} - \left(\frac{\sum f_i d_i}{n}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{172}{48} - \left(\frac{-48}{48}\right)^2}$$

$$= \sqrt{3.58 - 1}$$

$$= \sqrt{2.58} = 1.6$$

$\therefore \quad s = 1.6$

ઉદાહરણ 19 : નીચેની માહિતી માટે પ્રમાણિત વિચલન ગણો :

વસ્તુનું માપ	3.5	4.5	5.5	6.5	7.5	8.5	9.5
આવૃત્તિ	3	7	22	60	85	32	8

ઉકેલ : ધારેલો મધ્યક A = 6.5

x_i	f_i	$d_i = x_i - A$	d_i^2	$f_i d_i$	$f_i d_i^2$
3.5	3	–3	9	–9	27
4.5	7	–2	4	–14	28
5.5	22	–1	1	–22	22
6.5	60	0	0	0	0
7.5	85	1	1	85	85
8.5	32	2	4	64	128
9.5	8	3	9	24	72
	$n = 217$			$\Sigma f_i d_i = 128$	$\Sigma f_i d_i^2 = 362$

$$s = \sqrt{\frac{\sum f_i d_i^2}{n} - \left(\frac{\sum f_i d_i}{n}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{362}{217} - \left(\frac{128}{217}\right)^2}$$

$$= \sqrt{1.668 - 0.347}$$

$$= \sqrt{1.321}$$

$$\therefore \quad s = 1.149$$

સતત આવૃત્તિ-વિતરણ માટે પ્રમાણિત વિચલનની ગણતરી :

સીધી રીત : ધારો કે સતત આવૃત્તિ-વિતરણના k વર્ગોની મધ્યકિંમતો અનુક્રમે $x_1, x_2, ..., x_k$ છે અને k વર્ગોની આવૃત્તિઓ અનુક્રમે $f_1, f_2, ..., f_k$ છે, તો સતત આવૃત્તિ-વિતરણના પ્રમાણિત વિચલનની ગણતરી નીચે આપેલ સૂત્ર દ્વારા કરવામાં આવે છે :

$$s = \sqrt{\frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum f_i x_i^2}{n} - \bar{x}^2}$$

જ્યાં, x_i = i મા વર્ગની મધ્યકિંમત

f_i = i મા વર્ગની આવૃત્તિ

$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{n}$ = મધ્યક

$x_i - \bar{x}$ = ચલકિંમત x_i નું મધ્યક $\bar{x}$થી વિચલન

ટૂંકી રીત : સમાન વર્ગલંબાઈવાળા સતત આવૃત્તિ-વિતરણ પરથી પ્રમાણિત વિચલન ગણવાની ટૂંકી રીતમાં અસતત આવૃત્તિ-વિતરણ રીતની જેમ જ અચળાંક A ધારવામાં આવે છે. સામાન્ય રીતે મહત્તમ

આવૃત્તિવાળા અથવા વિતરણમાં લગભગ વચ્ચે આવેલા વર્ગની મધ્યકિંમતને A તરીકે ધારવામાં આવે છે જેથી ગણતરી સરળ બને. જોકે અન્ય કિંમતને પણ A તરીકે ધારી શકાય. A કોઈ પણ વાસ્તવિક સંખ્યા છે. હવે ટૂંકી રીત માટેનું સૂત્ર નીચે પ્રમાણે મેળવીએ. જ્યાં A ધારેલો મધ્યક અને c વર્ગલંબાઈ છે.

ધારો કે, $d_i = \frac{x_i - A}{c}$

$\therefore \quad x_i = cd_i + A$ (1)

$\Sigma f_i x_i = \Sigma f_i(cd_i + A)$

$= c\,\Sigma f_i d_i + A\Sigma f_i$

$\Sigma f_i x_i = c\,\Sigma f_i d_i + A \cdot n$ **($\Sigma f_i = n$)**

$\therefore \quad \frac{\sum f_i x_i}{n} = c\,\frac{\sum f_i d_i}{n} + A$

ધારો કે, $\frac{\sum f_i d_i}{n} = \overline{d}$

$\therefore \quad \overline{x} = \overline{d} + A$ (2)

પરિણામ (1) અને (2) પરથી,

$x_i - \overline{x} = c\,(d_i - \overline{d}\,)$

$\therefore \quad s^2 = \frac{\sum f_i(x_i - \overline{x})^2}{n}$

$= \frac{1}{n}\,\Sigma f_i\,(c\,(d_i - \overline{d}\,))^2$

$= \frac{\sum f_i(d_i - \overline{d}\,)^2 \times c^2}{n}$

$s^2 = \left[\frac{\sum f_i d_i^2}{n} - \left(\frac{\sum f_i d_i}{n}\right)^2\right] \times c^2$ (આગળની જેમ)

$s = \sqrt{\frac{\sum f_i d_i^2}{n} - \left(\frac{\sum f_i d_i}{n}\right)^2} \times c$

જ્યાં c = વર્ગલંબાઈ, $d_i = \frac{x_i - A}{c}$, $\Sigma f_i = n$.

હવે આપણે સતત આવૃત્તિ-વિતરણ માટે પ્રમાણિત વિચલનની ગણતરી નીચેના ઉદાહરણ દ્વારા સમજીએ :

ઉદાહરણ 20 : એક કારખાનાના કામદારોની ઉંમરનું વિતરણ નીચે દર્શાવ્યા મુજબ છે. આ માહિતી પરથી કામદારોની ઉંમરનું પ્રમાણિત વિચલન ટૂંકી રીતે શોધો :

ઉંમર (વર્ષમાં)	15–20	20–25	25–30	30–35	35–40	40–45	45–50
કામદારોની સંખ્યા	5	12	10	8	2	2	1

ઉકેલ :

અહીં 25-30 વર્ગની મધ્યકિંમત 27.5ને A ધારીશું. A = 27.5 અને $c = 5$.

વર્ગ	x_i	f_i	$d_i = \frac{x_i - A}{c}$	$f_i d_i$	$f_i d_i^2$
15–20	17.5	5	–2	–10	20
20–25	22.5	12	–1	–12	12
25–30	27.5 = A	10	0	0	0
30–35	32.5	8	1	8	8
35–40	37.5	2	2	4	8
40–45	42.5	2	3	6	18
45–50	47.5	1	4	4	16
		$n = 40$		$\Sigma f_i d_i = 0$	$\Sigma f_i d_i^2 = 82$

$$s = \sqrt{\frac{\sum f_i d_i^2}{n} - \left(\frac{\sum f_i d_i}{n}\right)^2} \times c$$

$$= \sqrt{\frac{82}{40} - \left(\frac{0}{40}\right)^2} \times 5 = \sqrt{2.05} \times 5$$

$\therefore \quad s = 7.16$ વર્ષ

ઉદાહરણ 21 : નીચેના આવૃત્તિ-વિતરણ માટે મધ્યક અને પ્રમાણિત વિચલન ગણો :

મહેનતાણું (₹માં)	0-15	15-30	30-45	45-60	60-75	75-90	90-105	105-120
કામદારોની સંખ્યા	12	18	35	42	50	45	20	8

ઉકેલ :

વર્ગ	x_i	f_i	$d_i = \frac{x_i - A}{c}$	$f_i d_i$	$f_i d_i^2$
0-15	7.5	12	–4	–48	192
15-30	22.5	18	–3	–54	162
30-45	37.5	35	–2	–70	140
45-60	52.5	42	–1	–42	42
60-75	A = 67.5	50	0	0	0
75-90	82.5	45	1	45	45
90-105	97.5	20	2	40	80
105-120	112.5	8	3	24	72
		$n = 230$		$\Sigma f_i d_i = -105$	$\Sigma f_i d_i^2 = 733$

અહીં 60-75 વર્ગની મધ્યકિંમત 67.5ને A તરીકે ધારીશું. A = 67.5 અને વર્ગલંબાઈ c = 15.

$$\bar{x} = A + \frac{\sum f_i d_i}{n} \times c$$

$$= 67.5 + \frac{-105}{230} \times 15 = 67.5 - 6.85 = 60.65$$

$$s = \sqrt{\frac{\sum f_i d_i^2}{n} - \left(\frac{\sum f_i d_i}{n}\right)^2} \times c$$

$$= \sqrt{\frac{733}{230} - \left(\frac{-105}{230}\right)^2} \times 15$$

$$= \sqrt{3.18 - 0.208} \times 15$$

$$= \sqrt{2.972} \times 15$$

$$\therefore \quad s = 25.86$$

સ્વાધ્યાય 9.2

1. નીચેની માહિતી માટે પ્રમાણિત વિચલન ગણો :

(1) 6, 7, 10, 12, 13, 4, 8, 12

(2) 38, 70, 48, 34, 42, 55, 63, 46, 54, 44

(3) 20, 24, 23, 26, 19, 25, 26, 18, 20, 21, 16, 27

2. નીચેની માહિતી માટે પ્રમાણિત વિચલન ગણો :

(1)

x_i	10	11	12	13	14	15	16	17	18
f_i	3	10	20	17	22	16	13	9	5

(2)

x_i	6	10	14	18	24	28	30
f_i	2	4	7	12	8	4	3

3. નીચેની માહિતી માટે મધ્યક અને પ્રમાણિત વિચલન ગણો :

(1)

x_i	2	4	6	8	10	12	14	16
f_i	4	4	5	15	8	5	4	5

(2)

x_i	4	8	12	16	20	24
f_i	6	14	4	8	11	7

4. ગણતરીની ટૂંકી રીતનો ઉપયોગ કરી નીચેની માહિતી માટે મધ્યક અને પ્રમાણિત વિચલન ગણો :

x_i	60	61	62	63	64	65	66	67	68
f_i	2	1	12	29	25	12	10	4	5

5. નીચેની માહિતી પરથી મધ્યક, વિચરણ અને પ્રમાણિત વિચલન ગણો :

વર્ગ	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50
આવૃત્તિ	5	8	15	16	6

6. નીચેની વર્ગીકૃત માહિતીનો મધ્યક અને પ્રમાણિત વિચલન ટૂંકી રીતે ગણો :

(1)

વર્ગ	30–40	40–50	50–60	60–70	70–80	80–90	90–100
આવૃત્તિ	3	7	12	15	8	3	2

(2)

ઊંચાઈ (સેમીમાં)	70–75	75–80	80–85	85–90	90–95	95–100	100–105	105–110	110–115
વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા	3	4	7	7	15	9	6	6	3

(3)

વર્ગ	0–5	5–10	10–15	15–20	20–25	25–30	30–35	35–40	40–45
આવૃત્તિ	20	24	32	28	20	11	26	15	24

7. 100 કુટુંબની આવકનું (₹માં) વિતરણ નીચે દર્શાવ્યા મુજબ છે. આ માહિતી પરથી પ્રમાણિત વિચલન ગણો :

આવક (₹)	0–1000	1000–2000	2000–3000	3000–4000	4000–5000	5000–6000
કુટુંબોની સંખ્યા	18	26	30	12	10	4

8. 107 સ્ક્રૂના મથાળાનું મીમીમાં માપ નીચે પ્રમાણે છે. આ માહિતી પરથી પ્રમાણિત વિચલન શોધો :

વ્યાસ (મિમીમાં)	33–35	36–38	39–41	42–44	45–47
સ્ક્રૂની સંખ્યા	17	19	23	21	27

*

9.7 ચલનાંક

આ પ્રકરણમાં આપણે પ્રસારનાં માપ તરીકે સરેરાશ વિચલન અને પ્રમાણિત વિચલનનો અભ્યાસ કર્યો. જ્યારે બે કે તેથી વધુ સમૂહોની માહિતીના પ્રસારની સરખામણી કરવી હોય ત્યારે સામાન્ય રીતે પ્રસારનાં માપનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે. બે કે તેથી વધુ સમૂહોની માહિતીના પ્રસારની યોગ્ય અને સચોટ સરખામણી કરવા માટે કાર્લ પિયર્સને સૂચવેલ ચલનાંકનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે. પ્રમાણિત વિચલનને મધ્યક વડે ભાગવાથી ચલનાંક **(Co-efficient of Variation)** મળે છે. તેને C.V. વડે દર્શાવાય છે.

આમ, C.V. $= \frac{\sigma}{\bar{x}}$

સામાન્ય રીતે તેને ટકામાં દર્શાવવામાં આવે છે.

આથી, C.V. = $\frac{s}{\bar{x}} \times 100$

સ્પષ્ટ છે કે ચલનાંક એ પ્રમાણિત વિચલન અને મધ્યકના માપ પરથી મળે છે. અવલોકનોમાં જેમ ચલન ઓછું અને તેનો મધ્યક વધુ તેમ ચલનાંક નાનો મળે. આથી માહિતીની સરખામણી કરવા તે વધુ ચોક્કસ માપ છે. જે શ્રેણી માટે ચલનાંક ઓછો હોય તે શ્રેણીમાં પ્રસાર ઓછો છે અથવા તેની કિંમતો વધુ સ્થિર અથવા સુસંગત છે એમ કહેવાય. જે શ્રેણીનો ચલનાંક વધુ હોય તેમાં પ્રસાર વધુ છે અથવા તો તે શ્રેણીની કિંમતો અસ્થિર અથવા અસંગત છે એમ કહેવાય.

સમાન મધ્યક ધરાવતા આવૃત્તિ-વિતરણની સરખામણી :

ધારો કે એક સમૂહનો મધ્યક $\bar{x}_1$ અને પ્રમાણિત વિચલન s_1 છે અને બીજા સમૂહનો મધ્યક $\bar{x}_2$ અને પ્રમાણિત વિચલન s_2 છે. જો $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = \bar{x}$

$$\text{તો C.V. (પ્રથમ સમૂહ)} = \frac{s_1}{\bar{x}_1} \times 100 = \frac{s_1}{\bar{x}} \times 100 \quad (1)$$

$$\text{C.V. (બીજો સમૂહ)} = \frac{s_2}{\bar{x}_2} \times 100 = \frac{s_2}{\bar{x}} \times 100 \quad (2)$$

તો પરિણામ (1) અને (2) પરથી કહી શકાય કે ચલનાંક (C.V.)ની સરખામણી ફક્ત s_1 અને s_2થી જ થાય છે.

ઉદાહરણ 22 : એક કારખાનાના બે જુદા વિભાગો A અને B ના કારીગરોનાં માસિક વેતનની માહિતી નીચે મુજબ છે :

	A	B
કારીગરોની સંખ્યા	1000	1200
સરેરાશ માસિક વેતન	₹ 3000	₹ 3000
માસિક વેતનનું વિચરણ	81	100

તો કારખાનાના કયા વિભાગ A કે B માં વ્યક્તિગત વેતનનું ચલન વધુ છે ?

ઉકેલ : વિભાગ A ના કારીગરોના માસિક પગારનું વિચરણ $s^2 = 81$ છે. તેથી તેનું પ્રમાણિત વિચલન $s = 9$ થશે. તે જ રીતે વિભાગ B ના કારીગરોના માસિક પગારનું વિચરણ $s^2 = 100$ છે. તેથી તેનું પ્રમાણિત વિચલન $s = 10$ થશે. બંને વિભાગોના સરેરાશ માસિક વેતન એટલે મધ્યક $\bar{x} = 3000$ સમાન છે. તેથી જે વિભાગનું પ્રમાણિત વિચલન વધુ હશે તે વિભાગનો પ્રસાર પણ વધુ થશે. તેથી વિભાગ Bના વ્યક્તિગત વેતનનું ચલન વધુ થશે.

ઉદાહરણ 23 : એક કારખાનાના બે જુદા વિભાગો A અને B ના કારીગરોનાં માસિક વેતનની માહિતી નીચે મુજબ છે :

	A	B
કારીગરોની સંખ્યા	650	550
સરેરાશ માસિક વેતન	₹ 5250	₹ 5250
માસિક વેતનનું વિચરણ	121	100

(1) કારખાનાનો કયો વિભાગ કુલ માસિક વેતન વધુ આપે છે ?

(2) કારખાનાના કયા વિભાગમાં વ્યક્તિગત વેતનનું ચલન વધુ છે ?

ઉકેલ :

(1) વિભાગ A : કારીગરોની સંખ્યા, $n_1 = 650$

સરેરાશ માસિક વેતન, $\bar{x}$ = ₹ 5250

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n_1}$$

$$\therefore \quad 5250 = \frac{\sum x_i}{650}$$

$$\therefore \quad \Sigma x_i = 5250 \times 650$$

કુલ માસિક વેતન = ₹ 34,12,500

વિભાગ B : કારીગરોની સંખ્યા, $n_2 = 550$

સરેરાશ માસિક વેતન, $\bar{y}$ = ₹ 5250

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n_2}$$

$$\therefore \quad 5250 = \frac{\sum y_i}{550}$$

$$\therefore \quad \Sigma y_i = 5250 \times 550$$

કુલ માસિક વેતન = ₹ 28,87,500

આમ વિભાગ Aનો કુલ માસિક પગાર વધુ છે.

(2) બંને વિભાગોના સરેરાશ માસિક વેતન એટલે મધ્યક સમાન છે. તેથી જે વિભાગનું વિચરણ વધુ હશે તે વિભાગનો પ્રસાર વધુ હશે. તેથી વિભાગ A નું વિચરણ એ વિભાગ B ના વિચરણ કરતા વધુ છે.

તેથી વિભાગ Aના વ્યક્તિગત વેતનનું ચલન વધુ છે.

ઉદાહરણ 24 : ત્રણ ટેસ્ટ મેચની શ્રેણીમાં બે ખેલાડીઓ A અને B એ કરેલા રન નીચે મુજબ છે. કયો ખેલાડી વધુ ભરોસાપાત્ર છે તે નક્કી કરો :

ખેલાડી A	60	45	5	105	45	25
ખેલાડી B	100	25	35	25	70	45

ઉકેલ : આપણે ખેલાડી A અને B ના ચલનાંકની ગણતરી કરીશું.

ખેલાડી A :

x_i	x_i^2
60	3600
45	2025
5	25
105	11025
45	2025
25	625
$\Sigma x_i = 285$	$\Sigma x_i^2 = 19{,}325$

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n_1} = \frac{285}{6}$$

$$\bar{x} = 47.5$$

$$s = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n_1} - (\bar{x})^2}$$

$$= \sqrt{\frac{19325}{6} - (47.5)^2}$$

$$= \sqrt{3220.83 - 2256.25}$$

$$= \sqrt{964.58} = 31.058$$

A માટે C.V. $= \frac{s}{\bar{x}} \times 100$

$= \frac{31.058}{47.5} \times 100$

$= 65.385\ \%$

ખેલાડી B :

y_i	y_i^2
100	10000
25	625
35	1225
25	625
70	4900
45	2025
$\Sigma y_i = 300$	$\Sigma y_i^2 = 19{,}400$

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n_2} = \frac{300}{6}$$

$$\bar{y} = 50$$

$$s = \sqrt{\frac{\sum y_i^2}{n_2} - (\bar{y})^2}$$

$$= \sqrt{\frac{19400}{6} - (50)^2}$$

$$= \sqrt{3233.33 - 2500}$$

$$= \sqrt{733.33} = 27.08$$

B માટે C.V. $= \frac{s}{\bar{y}} \times 100$

$= \frac{27.08}{50} \times 100$

$= 54.16\ \%$

$\therefore$ ખેલાડી B નો C.V. $<$ ખેલાડી A નો C.V.

$\therefore$ આમ, સાતત્યની રીતે વિચારતા ખેલાડી B વધુ ભરોસાપાત્ર કહી શકાય.

સ્વાધ્યાય 9.3

1. 10 વિદ્યાર્થીઓએ 400 મીટરની દોડમાં લીધેલો સેકન્ડમાં સમય 80, 89, 69, 74, 91, 96, 71, 86, 75 અને 81 છે, તો આ માહિતીનો ચલનાંક શોધો.

2. બે ક્રિકેટરો A અને B એ 5 દાવમાં કરેલા રન નીચે આપેલા છે. કયો ક્રિકેટર વધુ આધારભૂત છે તે નક્કી કરો :

A	39	56	47	43	50
B	34	75	63	38	40

3. 50 વિદ્યાર્થીઓના એક વર્ગમાં તેમની ઊંચાઈ અને વજનના મધ્યક અને પ્રમાણિત વિચલન નીચે મુજબ છે :

	વજન	ઊંચાઈ
મધ્યક	63.2 કિગ્રા	63.2 ઇંચ
પ્રમાણિત વિચલન	5.6 કિગ્રા	11.3 ઇંચ

તો વજન કે ઊંચાઈ બેમાંથી શેમાં વધુ ચલન છે ?

4. ધોરણ 12ના એક વર્ગના વિદ્યાર્થીઓના વજન અને ઊંચાઈ અંગેની માહિતી પરથી નીચેનાં પરિણામ મળે છે :

	ઊંચાઈ	વજન
મધ્યક	165 સેમી	52.50 કિગ્રા
વિચરણ	132.25 સેમી^{2}	23.04 કિગ્રા^{2}

તો શું આપણે એવું કહી શકીએ કે વજન એ ઊંચાઈ કરતાં વધુ ચલન (પ્રસાર) દર્શાવે છે ?

5. બે શેર A અને B ના ભાવની વધઘટ નીચે દર્શાવી છે :

A	318	319	316	323	320	324	322	325	322	321
B	152	132	134	132	145	142	146	130	146	141

કયા શેરના ભાવમાં ચલનનું પ્રમાણ વધારે છે ?

6. 50 વૃક્ષોની લંબાઈ x (સેમીમાં) અને વજન y (ગ્રામમાં) છે. તેમના સરવાળા અને વર્ગોના સરવાળા અંગેની માહિતી નીચે પ્રમાણે છે : $\Sigma x_i = 212$, $\Sigma x_i^2 = 902.8$, $\Sigma y_i = 261$, $\Sigma y_i^2 = 1457.6$, તો ઊંચાઈ કે વજન શેમાં વધુ ચલન છે ?

7. 50 વિદ્યાર્થીઓના એક વર્ગમાં ગણિત, ભૌતિક વિજ્ઞાન અને રસાયણ વિજ્ઞાનમાં મેળવેલ ગુણ પરથી મધ્યક અને પ્રમાણિત વિચલનની માહિતી નીચે મુજબ છે :

વિષય	ગણિત	ભૌતિક વિજ્ઞાન	રસાયણ વિજ્ઞાન
મધ્યક	40	30	40
પ્રમાણિત વિચલન	10	15	22

તો ત્રણે વિષયમાંથી કયા વિષયમાં સૌથી વધુ અને કયા વિષયમાં સૌથી ઓછું ચલન છે ?

8. નીચે આપેલ માહિતી પરથી જણાવો કે G_1 અને G_2 પૈકી કયા સમૂહમાં વધુ ચલન છે ?

ગુણ	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
G_1	9	17	32	33	40	10	9
G_2	10	20	30	25	43	15	7

*

પ્રકીર્ણ ઉદાહરણો

ઉદાહરણ 25 : અવલોકનો $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ નો મધ્યક $\bar{x}$ અને પ્રમાણિત વિચલન s હોય, તો $ax_1 + b, ax_2 + b, ..., ax_n + b$ નો મધ્યક અને પ્રમાણિત વિચલન શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે અવલોકનો x_i અને $y_i = ax_i + b$, જ્યાં $i = 1, 2, 3, ..., n$

$$y_i = ax_i + b$$

$$\therefore \quad \Sigma y_i = a\Sigma x_i + (b + b + ... \ n \text{ વખત})$$

$$= a\Sigma x_i + bn$$

$$\therefore \quad \frac{\sum y_i}{n} = a\frac{\sum x_i}{n} + b$$

$$\therefore \quad \bar{y} = a\bar{x} + b$$

$\therefore$ $ax_1 + b, ax_2 + b, ..., ax_n + b$ નો મધ્યક $a\bar{x} + b$ છે.

હવે ધારો કે, $ax_1 + b, ax_2 + b, ..., ax_n + b$ નું પ્રમાણિત વિચલન s' છે.

હવે, $y_i - \bar{y} = (ax_i + b) - (a\bar{x} + b)$

$$= a(x_i - \bar{x})$$

$$s' = \sqrt{\frac{\sum(y_i - \bar{y})^2}{n}}$$

$$= \sqrt{\frac{\sum(a^2)(x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

$$= |a| \sqrt{\frac{1}{n}\sum(x_i - \bar{x})^2}$$

$$s' = |a| \, s$$

$\therefore$ અવલોકનો $ax_i + b$નું પ્રમાણિત વિચલન $|a| \, s$ છે અને વિચરણ a^2s^2 છે. $(i = 1, 2, 3, ..., n)$

ઉદાહરણ 26 : 20 અવલોકનોના મધ્યક તથા પ્રમાણિત વિચલન અનુક્રમે 10 તથા 2 છે. પાછળથી જણાયું કે એક અવલોકન 8 ખોટું છે. (1) તેને દૂર કરતાં મળતો નવો મધ્યક અને પ્રમાણિત વિચલન શોધો. (2) તેના બદલે અવલોકન 12 લેવામાં આવે, તો નવો મધ્યક તથા પ્રમાણિત વિચલન શોધો.

ઉકેલ : અહીં $n = 20$, $\bar{x} = 10$ અને $s = 2$

$$\therefore \quad \bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$$

$$\Sigma x_i = n \cdot \bar{x} = 20 \times 10 = 200 \qquad (1)$$

$$s^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - (\bar{x})^2$$

$4 = \frac{\sum x_i^2}{20} - 100$

$\Sigma x_i^2 = 104 \times 20 = 2080$ (2)

$\therefore$ $\Sigma x_i = 200$ અને $\Sigma x_i^2 = 2080$

(1) જો અવલોકન 8ને 20 અવલોકનોમાંથી દૂર કરવામાં આવે, તો 19 અવલોકનો રહે.

હવે, સાચો $\Sigma x_i = 200 - 8 = 192$

અને સાચો $\Sigma x_i^2 = 2080 - 8^2 = 2080 - 64 = 2016$

સાચો મધ્યક $= \frac{192}{19} = 10.5$

સાચું વિચરણ $= \frac{\text{સાચો } \Sigma x_i^2}{19} - (\text{સાચો મધ્યક})^2$

$= \frac{2016}{19} - (10.105)^2$

$= 106.105 - 102.11 = 3.994$

સાચું પ્રમાણિત વિચલન $= \sqrt{3.994} = 1.998$

(2) ખોટા અવલોકન 8ના બદલે અવલોકન 12 લેવામાં આવે.

સાચો $\Sigma x_i = 200 - 8 + 12 = 204$

સાચો $\Sigma x_i^2 = 2080 - 8^2 + 12^2 = 2160$

હવે, સાચો મધ્યક $= \frac{204}{20} = 10.2$

સાચું વિચરણ $= \frac{\text{સાચો } \Sigma x_i^2}{20} - (\text{સાચો મધ્યક})^2$

$= \frac{2160}{20} - (10.2)^2$

$= 108 - 104.04 = 3.96$

સાચું પ્રમાણિત વિચલન $= \sqrt{3.96} = 1.99$

સ્વાધ્યાય 9

1. પાંચ અવલોકનોનો મધ્યક 4.4 છે તથા વિચરણ 8.24 છે. તે પૈકીનાં ત્રણ અવલોકનો 1, 2 અને 6 હોય, તો બાકીનાં અવલોકનો શોધો.

2. 8 અવલોકનોનાં મધ્યક તથા વિચરણ અનુક્રમે 9, 9.25 છે. તે પૈકી છ અવલોકનો 6, 7, 10, 12, 12 અને 13 છે. બાકીનાં બે અવલોકનો શોધો.

3. સાબિત કરો કે અવલોકનો $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ નું વિચરણ s^2 હોય, તો $x_1 + a, x_2 + a, ..., x_n + a$, અવલોકનોનું વિચરણ s^2 છે.

4. 6 અવલોકનોનાં મધ્યક તથા પ્રમાણિત વિચલન 8 તથા 4 છે. દરેક અવલોકનને 3 વડે ગુણતાં મળતાં નવાં અવલોકનોનાં મધ્યક તથા પ્રમાણિત વિચલન શોધો.

5. 200 ઉમેદવારોના એક જૂથનાં મધ્યક અને પ્રમાણિત વિચલન અનુક્રમે 40 અને 15 છે. પાછળથી જણાયું કે એક અવલોકન 43ને બદલે 34 લેવાયું છે, તો સુધારેલ મધ્યક અને પ્રમાણિત વિચલન મેળવો.

6. નીચે આપેલું દરેક વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલા વિકલ્પો (a), (b), (c) અથવા (d)માંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરીને ☐ માં લખો :

(1) એક પ્રયોગનાં 15 અવલોકનો માટે નીચે મુજબ માહિતી મળી : $\Sigma x_i^2 = 2830$, $\Sigma x_i = 170$. એક અવલોકન 20 ખોટું હતું તેના બદલે અવલોકન 30 લેવામાં આવે, તો સાચું વિચરણ = ... ☐

(a) 188.66 (b) 177.33 (c) 8.33 (d) 78.00

(2) નવ ભિન્ન અવલોકનોનો મધ્યસ્થ 20.5 છે. જો છેલ્લા ચાર અવલોકનોમાં 2 ઉમેરવામાં આવે, તો નવો મધ્યસ્થ = ... ☐

(a) 2 ઘટે. (b) બમણો થાય.

(c) તેનો તે જ રહે. (d) 2 વધે.

(3) એક જૂથ Aમાં 100 અવલોકનો 101, 102,..., 200 છે અને બીજા જૂથ B માં 100 અવલોકનો 151, 152,..., 250 છે. જો જૂથ A અને જૂથ Bનાં વિચરણ અનુક્રમે V_A અને V_B હોય, તો $\frac{V_A}{V_B}$ = ... ☐

(a) 1 (b) $\frac{9}{4}$ (c) $\frac{4}{9}$ (d) $\frac{2}{3}$

(4) 200 ઉમેદવારોનાં મધ્યક અને પ્રમાણિત વિચલન અનુક્રમે 40 અને 15 છે. પાછળથી જણાયું કે એક અવલોકન 40 ખોટી રીતે 50 વંચાયું છે તો સાચો મધ્યક અને પ્રમાણિત વિચલન અનુક્રમે ...... થાય. ☐

(a) 14.98, 39.95 (b) 39.95, 14.98 (c) 39.95, 224.5 (d) 224.5, 39.95

(5) જો ચલ x નું પ્રમાણિત વિચલન 4 છે અને $y = \frac{3x+7}{4}$ હોય, તો ચલ y નું પ્રમાણિત વિચલન = ... ☐

(a) 4 (b) 3.5 (c) 3 (d) 2.5

(6) અવલોકનો 3, 4, 5, 8 નું વિચરણ = ... ☐

(a) 4.5 (b) 3.5 (c) 5.5 (d) 6.5

(7) અવલોકનો 3, 10, 4, 10, 7, 10, 5 નું મધ્યકથી સરેરાશ વિચલન = ...

(a) 2 (b) 2.57 (c) 3 (d) 3.75

(8) ગણિતની પરીક્ષામાં 9 વિદ્યાર્થીઓએ મેળવેલા ગુણ 50, 69, 20, 33, 39, 53, 65, 40 અને 59 છે, તો મધ્યસ્થથી સરેરાશ વિચલન = ...

(a) 9 (b) 10.5 (c) 12.67 (d) 14.76

(9) અવલોકનો 6, 9, 5, 12, 13, 8, 10 નું પ્રમાણિત વિચલન = ...

(a) $\sqrt{\frac{52}{7}}$ (b) $\frac{52}{7}$ (c) $\sqrt{6}$ (d) 6

(10) 100 અવલોકનોનો મધ્યક 50 અને પ્રમાણિત વિચલન 5 છે, તો બધાં અવલોકનોનાં વર્ગોનો સરવાળો = ...

(a) 50,000 (b) 2,50,000 (c) 2,52,500 (d) 2,55,000

(11) અવલોકનો a, b, c, d, e નો મધ્યક $\bar{x}$ અને પ્રમાણિત વિચલન s છે, તો અવલોકનો $a + m, b + m, c + m, d + m, e + m$ નું પ્રમાણિત વિચલન = ...

(a) s (b) ms (c) $s + m$ (d) $\frac{s}{m}$

(12) અવલોકનો a, b, c, d, e નો મધ્યક $\bar{x}$ અને પ્રમાણિત વિચલન s છે, તો અવલોકનો ma, mb, mc, md, me નું પ્રમાણિત વિચલન = ... $(m > 0)$

(a) $m + s$ (b) $\frac{s}{m}$ (c) s (d) ms

(13) અવલોકનો 1, 2, 3, 4,..., 10 છે. જો દરેક અવલોકનમાં 1 ઉમેરવામાં આવે, તો મળતા નવાં અવલોકનોનું વિચરણ = ...

(a) 6.5 (b) 2.87 (c) 8.25 (d) 3.57

(14) અવલોકનો $x_1, x_2,..., x_n$ નું પ્રમાણિત વિચલન 3.5 છે, તો અવલોકનો $-2x_1 - 3, -2x_2 - 3,..., -2x_n - 3$ નું પ્રમાણિત વિચલન = ...

(a) −7 (b) 10 (c) 7 (d) −10

(15) એક માહિતીનાં અવલોકનો 1થી 10 ધન પૂર્ણાંકો છે. જો દરેક અવલોકને −1 વડે ગુણી તેમાં 1 ઉમેરવાં આવે તો મળતા નવા અવલોકનનું વિચરણ = ...

(a) 8.25 (b) 6.5 (c) 3.87 (d) 2.87

(16) એક શ્રેણીનાં $2n$ અવલોકનો છે, જે પૈકી અડધા અવલોકનો a અને પછી બાકીના અડધા અવલોકનો $-a$ છે. જો અવલોકનોનું પ્રમાણિત વિચલન 2 હોય, તો $| a |$ = ...

(a) 2 (b) $\sqrt{2}$ (c) $\frac{1}{n}$ (d) $\frac{\sqrt{2}}{n}$

સારાંશ

1. વિસ્તાર, સરેરાશ વિચલન, વિચરણ અને પ્રમાણિત વિચલન પ્રસારનાં મુખ્ય માપ છે.
2. વિસ્તાર = સૌથી મોટું અવલોકન − સૌથી નાનું અવલોકન
3. અવર્ગીકૃત માહિતી માટે મધ્યકથી સરેરાશ વિચલન

   $\delta\bar{x} = \frac{\sum |x_i - \bar{x}|}{n}$, જ્યાં $\bar{x}$ એ મધ્યક છે.
4. અવર્ગીકૃત માહિતી માટે મધ્યસ્થથી સરેરાશ વિચલન

   $\delta M = \frac{\sum |x_i - M|}{n}$, જ્યાં M એ મધ્યસ્થ છે.
5. વર્ગીકૃત માહિતી માટે મધ્યકથી સરેરાશ વિચલન

   $\delta\bar{x} = \frac{\sum f_i |x_i - \bar{x}|}{n}$, જ્યાં $n = \sum f_i$
6. વર્ગીકૃત માહિતી માટે મધ્યસ્થથી સરેરાશ વિચલન

   $\delta M = \frac{\sum f_i |x_i - M|}{n}$, જ્યાં $n = \sum f_i$
7. અવર્ગીકૃત માહિતી માટે વિચરણ અને પ્રમાણિત વિચલન

   $s^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}$, $\quad s = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}}$

   $s^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - (\bar{x})^2$, $\quad s = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n} - (\bar{x})^2}$, જ્યાં $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$
8. ટૂંકી રીતે અવર્ગીકૃત માહિતી માટે વિચરણ અને પ્રમાણિત વિચલન

   $s^2 = \frac{\sum d_i^2}{n} - \left(\frac{\sum d_i}{n}\right)^2 \quad s = \sqrt{\frac{\sum d_i^2}{n} - \left(\frac{\sum d_i}{n}\right)^2}$

   જ્યાં $d_i = x_i - A$, A = ધારેલો મધ્યક
9. સતત આવૃત્તિ-વિતરણ માટે વિચરણ અને પ્રમાણિત વિચલન

   $s^2 = \frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^2}{n} \quad s = \sqrt{\frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^2}{n}}$

   $s^2 = \frac{\sum f_i x_i^2}{n} - (\bar{x})^2 \quad s = \sqrt{\frac{\sum f_i x_i^2}{n} - (\bar{x})^2}$

   જ્યાં $d_i = x_i - A$, A = ધારેલો મધ્યક
10. ટૂંકી રીતે અસતત આવૃત્તિ-વિતરણ માટે વિચરણ અને પ્રમાણિત વિચલન

   $s^2 = \frac{\sum f_i d_i^2}{n} - \left(\frac{\sum f_i d_i}{n}\right)^2 \quad s = \sqrt{\frac{\sum f_i d_i^2}{n} - \left(\frac{\sum f_i d_i}{n}\right)^2}$

   જ્યાં $d_i = x_i - A$, A = ધારેલો મધ્યક

11. સતત આવૃત્તિ-વિતરણમાં વર્ગલંબાઈ c અચળ હોય તો પ્રમાણિત વિચલન

$$s = c\sqrt{\frac{\sum f_i(d_i - \overline{d})^2}{n}}, \quad d_i = \frac{x_i - A}{c}, \quad \overline{d} = \frac{\sum f_i d_i}{n}$$

$$= c\sqrt{\frac{\sum f_i d_i^2}{n} - (\overline{d})^2}$$

12. ચલનાંક

$$c.v. = \frac{s}{\overline{x}}$$

Historical Note

'Statistics' is derived from the Latin word 'status' which means a political state. This suggests that statistics is as old as human civilisation. In the year 3050 B.C., perhaps the first census was held in Egypt. In India also, about 2000 years ago, we had an efficient system of collecting administrative statistics, particularly, during the regime of Chandra Gupta Maurya (324-300 B.C.). The system of collecting data related to births and deaths is mentioned in Kautilya's *Arthashastra* (around 300 B.C.) A detailed account of administrative surveys conducted during Akbar's regime is given in *Ain-I-Akbari* written by Abul Fazl.

Captain John Graunt of London (1620-1674) is known as father of vital statistics due to his studies on statistics of births and deaths. Jacob Bernoulli (1654-1705) stated the Law of Large numbers in his book "Ars Conjectandi", published in 1713.

The theoretical development of statistics came during the mid seventeenth century and continued after that with the introduction of theory of games and chance (i.e., probability). Francis Galton (1822-1921), an Englishman, pioneered the use of statistical methods, in the field of Biometry. Karl Pearson (1857-1936) contributed a lot to the development of statistical studies with his discovery of *Chi square test* and foundation of *statistical laboratory* in England (1911). Sir Ronald A. Fisher (1890-1962), known as the Father of modern statistics, applied it to various diversified fields such as Genetics, Biometry, Education, Agriculture, etc.

પ્રકરણ **10**

સંભાવના

10.1 પ્રાસ્તાવિક

આપણે સંભાવના, શક્યતા, તક વગેરે શબ્દોથી પરિચિત છીએ. આપણે જ્યારે કોઈ પણ ઘટનાના પરિણામ વિશે નિશ્ચિત ન હોઈએ ત્યારે આપણે આ શબ્દોનો ઉપયોગ કરીએ છીએ. આ શબ્દો ઘટના બનવાની અચોક્કસતાનો ભાસ દર્શાવે છે.

આદર્શ પરિસ્થિતિમાં ઘટનાઓની નિશ્ચિતતાનું માપ શોધવા આપણે 'સંભાવના' શબ્દનો ઉપયોગ કરીએ છીએ. પ્રયોગ એટલે એવી ક્રિયા કે જેના કારણે આપણે ચોક્કસ પરિણામ મેળવી શકીએ છીએ. યાદચ્છિક પ્રયોગની ઘટનાઓની સંભાવનાના સૈદ્ધાંતિક અભ્યાસ માટે મુખ્યત્વે બે અભિગમ છે : (1) પ્રશિષ્ટ અભિગમ (2) પૂર્વધારણાયુક્ત અભિગમ. પ્રશિષ્ટ અભિગમ **બ્લેઝ પાસ્કલે (Blaize Pascal)** તથા પૂર્વધારણાયુક્ત અભિગમ ઈ.સ. ૧૯૩૭માં **કોલ્મોગોરોવે (Kolmogorov)** રજૂ કર્યા. આ પ્રકરણમાં આપણે આ બંનેનો અભ્યાસ કરીશું.

10.2 યાદચ્છિક પ્રયોગ

વ્યાખ્યા : જે પ્રયોગનાં તમામ શક્ય પરિણામો અગાઉથી જ્ઞાત હોવા છતાં કયું પરિણામ મળશે તે પ્રયોગ સંપન્ન થયા પછી જ જ્ઞાત થાય તેવા પ્રયોગને યાદચ્છિક પ્રયોગ (Random Experiment) કહે છે.

એક સમતોલ સિક્કાને બે બાજુઓ હોય છે. એક બાજુને છાપ (Head-H) અને બીજી બાજુને કાંટો (Tail-T) કહેવામાં આવે છે. સમતોલ સિક્કાને ઉછાળવાની ઘટનામાં પ્રયોગ પૂરો થયા પહેલાં છાપ કે કાંટો આવશે તે ચોક્કસ રીતે કહી શકાય નહિ. એટલે કે સમતોલ સિક્કાને ઉછાળવા માટેના પ્રયોગમાં તે પરિણામો અગાઉથી જાણતા હોવા છતાં નિશ્ચિત પરિણામની આગાહી કરી શકાય નહિ.

એક વધુ દાખલો જોઈએ. ગંજીફામાં 52 પત્તાઓ હોય છે. તેમાંથી એક પત્તાની પસંદગી કરવાના પ્રયોગમાં કયું ચોક્કસ પત્તું આવશે તેમ આપણે કહી શકીએ નહિ. પરંતુ પસંદગીના તમામ શક્ય પરિણામો તો પહેલેથી ખબર જ છે.

તે જ રીતે સમતોલ એવા સમઘન પાસાની છ બાજુ પર 1, 2, 3, 4, 5, 6 (પ્રત્યેક પર એક-એક) અંકિત કરવામાં આવે છે. પાસો ફેંકીએ ત્યારે કોઈ એક પૃષ્ઠ ઉપર આવે છે. આપણે આ પ્રયોગમાં પણ ક્યો અંક ઉપરની બાજુએ આવશે તે અગાઉથી કહી શકતા નથી. આવા તમામ પ્રયોગોને યાદચ્છિક પ્રયોગ કહે છે.

10.3 નિદર્શાવકાશ

વ્યાખ્યા : યાદચ્છિક પ્રયોગનાં શક્ય તમામ પરિણામોના ગણને નિદર્શાવકાશ (Sample Space) કહે છે.

સામાન્ય રીતે નિદર્શાવકાશને U વડે દર્શાવાય છે. સમતોલ સિક્કાને એક વખત ઉછાળવાના પ્રયોગમાં તેના સંભવિત પરિણામ છાપ H અને કાંટો T છે. તેથી આ યાદચ્છિક પ્રયોગ સાથે સંકળાયેલ નિદર્શાવકાશ

U = {H, T} લખાય. તે જ રીતે સમતોલ પાસાને ઉછાળતા 1, 2, 3, 4, 5 અને 6 પૈકીનો કોઈ પણ એક અંક મળે છે. માટે નિદર્શાવકાશ U = {1, 2, 3, 4, 5, 6} લખાય.

નિદર્શાવકાશના બે મુખ્ય પ્રકાર છે : (1) સાન્ત નિદર્શાવકાશ (2) અનન્ત નિદર્શાવકાશ.

જો નિદર્શાવકાશ પ્રાકૃતિક સંખ્યા ગણના કોઈ સાન્ત ઉપગણ $\{x \in N \mid 1 \leq x \leq n, n \in N\}$ સાથે એક-એક સંગતતા ધરાવતો હોય, તો તેને સાન્ત નિદર્શાવકાશ કહે છે. સાન્ત ન હોય તે નિદર્શાવકાશને અનન્ત નિદર્શાવકાશ કહે છે. નિદર્શાવકાશના ઘટકોને મૂળભૂત ઘટકો કહે છે.

જો $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots, a_n$ એ કોઈ યાદૃચ્છિક પ્રયોગના ઘટકો શક્ય પરિણામો હોય, તો નિદર્શાવકાશ U = $\{a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots, a_n\}$ થશે. અહીં $a_1, a_2, \ldots. a_n$ ને યાદૃચ્છિક પ્રયોગના મૂળભૂત ઘટકો કહે છે.

ઉદાહરણ 1 : બે સમતોલ સિક્કાને એક સાથે ઉછાળવાના પ્રયોગનો નિદર્શાવકાશ લખો.

ઉકેલ : આપણે જાણીએ છીએ કે, સમતોલ સિક્કાને ઉછાળવામાં આવે તો તેનાં શક્ય પરિણામો છાપ (H) અને કાંટો (T) હોય છે.

∴ બે સમતોલ સિક્કાને એક સાથે ઉછાળતા પહેલાં સિક્કા પર H અને બીજા સિક્કા પર H આવે. તેને (H, H) વડે, તે જ રીતે પ્રથમ સિક્કા પર H અને બીજા સિક્કા પર T આવે તેને (H, T) વડે દર્શાવીશું. તે જ રીતે અન્ય ઘટનાઓ દર્શાવતાં મળતો નિદર્શાવકાશ,

U = {H, T} × {H, T},

U = {(H, H), (H, T), (T, H), (T, T)}.

અહીં નિદર્શાવકાશના ઘટકો એ H અને Tથી બનતી ક્રમયુક્ત જોડ છે. સરળતા ખાતર આપણે (H, T)ને HT વડે દર્શાવીશું. તે જ રીતે બીજી ક્રમયુક્ત જોડ લખતાં, U = {HH, HT, TH, TT}.

ઉદાહરણ 2 : બે સમતોલ પાસાને એક સાથે એકવાર ઉછાળવાના પ્રયોગનો નિદર્શાવકાશ લખો.

ઉકેલ : એક સમતોલ પાસાને ઉછાળવાના પ્રયોગ સાથે સંકળાયેલ પરિણામો 1, 2, 3, 4, 5, 6 છે. જેથી સમતોલ પાસાને એકવાર ઉછાળવાના પ્રયોગ સાથે સંકળાયેલ નિદર્શાવકાશ,

S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

આથી બે વાર સમતોલ પાસાને ઉછાળવાના પ્રયોગનો નિદર્શાવકાશ,

U = {1, 2, 3, 4, 5, 6} × {1, 2, 3, 4, 5, 6}

= {(1, 1), (1, 2),..,(1, 6), (2, 1), (2, 2),..,(2, 6), (3, 1),..,
(3, 6),..,(6, 1), (6, 2),..,(6, 6)}

અહીં (x, y) માં x એ પ્રથમ પાસા પરનું પરિણામ તથા y એ બીજા પાસાનું પરિણામ દર્શાવે છે.

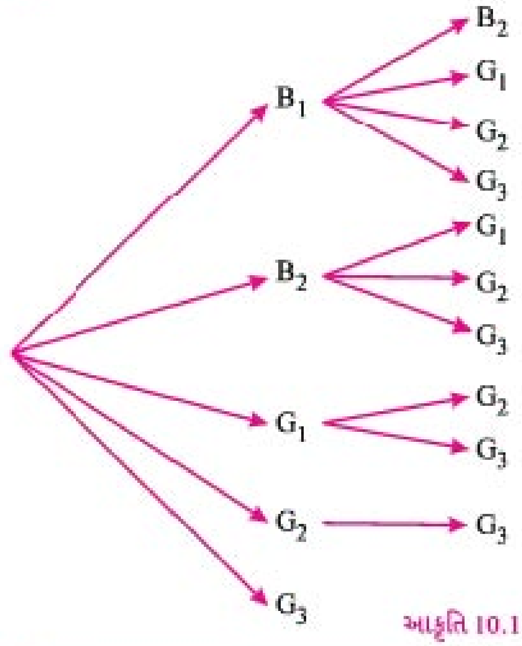
$$\therefore \quad U = \left\{ (x, y) \,\middle|\, \begin{array}{l} x = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \\ y = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \end{array} \right\}$$

ઉદાહરણ 3 : બે છોકરા અને ત્રણ છોકરીઓમાંથી કોઈ પણ બે બાળકોની યાદૃચ્છિક પસંદગી સાથે સંકળાયેલ પ્રયોગનો નિદર્શાવકાશ લખો.

ઉકેલ : બે છોકરાઓને B_1, B_2 વડે અને ત્રણ છોકરીઓને G_1, G_2, G_3 વડે દર્શાવીએ, તો કોઈ પણ બે બાળકોની પસંદગી સાથે સંકળાયેલ નિદર્શાવકાશ,

U = $\{B_1B_2, B_1G_1, B_1G_2, B_1G_3, B_2G_1, B_2G_2, B_2G_3, G_1G_2, G_1G_3, G_2G_3\}$

નિદર્શાવકાશમાં લખેલા શક્ય તેવાં તમામ પરિણામોને **વૃક્ષાકૃતિ (Tree diagram)** વડે દર્શાવીએ તો,



B_1B_2
B_1G_1
B_1G_2
B_1G_3
B_2G_1
B_2G_2
B_2G_3
G_1G_2
G_1G_3
G_2G_3

આકૃતિ 10.1

☛ નોંધ અહીં પસંદગી છે. ક્રમ મહત્ત્વનો નથી. આથી B_1B_2 તથા B_2B_1 એક જ પસંદગી દર્શાવે છે.

ઉદાહરણ 4 : એક સમતોલ સિક્કાને જ્યાં સુધી છાપ ન આવે ત્યાં સુધી ઉછાળવાના પ્રયોગને સંગત નિદર્શાવકાશ લખો.

ઉકેલ : આ પ્રયોગમાં સમતોલ સિક્કાને પ્રથમ વખત ઉછાળતા છાપ આવે અથવા તો પ્રથમ વખતે કાંટો અને બીજા પ્રયત્ને છાપ અથવા પ્રથમ તથા બીજા પ્રયત્ને કાંટો તથા ત્રીજા પ્રયત્ને છાપ. તે જ રીતે આગળ વધુ વખત ઉછાળતાં છાપ મળે ત્યાં સુધી પ્રયોગ ચાલુ રહે છે.

નિદર્શાવકાશ U = {H, TH, TTH, TTTH, TTTTH, ...}

અહીં TH એટલે પ્રથમ પ્રયત્ને કાંટો અને બીજા પ્રયત્ને છાપ અને તે જ રીતે આગળ ચાલતાં પહેલી વખત છાપ આવે ત્યાં સુધી પ્રયોગ ચાલુ રહે છે. જ્યાં સુધી પ્રથમ વખત H ન આવે ત્યાં સુધી T એ H પહેલાં આવ્યા જ કરે છે.

☛ નોંધ આ એક અનન્ત નિદર્શાવકાશનું ઉદાહરણ છે. સામાન્ય રીતે આપણે સાન્ત નિદર્શાવકાશ ધરાવતા યાદચ્છિક પ્રયોગનો અભ્યાસ કરીશું.

સ્વાધ્યાય 10.1

1. એક પેટીમાં 3 સમાન લાલ અને 4 સમાન લીલા રંગના દડા મૂકેલા છે. સમતોલ સિક્કાને ઉછાળતાં જો છાપ આવે, તો પેટીમાંથી એક દડો યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે છે અને જો કાંટો આવે તો સમતોલ પાસો એક વખત ઉછાળવામાં આવે છે, તો આ પ્રયોગનો નિદર્શાવકાશ લખો.
2. એક પેટીમાં 2 સમાન લાલ અને 3 સમાન સફેદ દડા છે. પેટીમાંથી એક પછી એક એમ બે ક્રમિક રીતે દડાની પસંદગી કરવામાં આવે, તો તે યાદચ્છિક પ્રયોગ સાથે સંકળાયેલ નિદર્શાવકાશ લખો. (બીજા દડાની પસંદગી વખતે પહેલો દડો પેટીમાં પાછો મૂકવામાં આવતો નથી.)

3. નીચેના યાદચ્છિક પ્રયોગ સાથે સંકળાયેલ નિદર્શાવકાશ લખો :
   (i) એક સમતોલ સિક્કાને ત્રણ વખત ઉછાળતા
   (ii) સમતોલ સિક્કા અને સમતોલ પાસાને એક સાથે ઉછાળતા
4. એક યાદચ્છિક પ્રયોગમાં એક સિક્કાને એક વખત ઉછાળવામાં આવે છે. જો છાપ મળે તો ફરી વખત સિક્કો ઉછાળવામાં આવે છે. જો કાંટો મળે તો સમતોલ પાસાને ઉછાળવામાં આવે છે. આ પ્રયોગ સાથે સંકળાયેલ નિદર્શાવકાશ લખો.
5. એક સમતોલ પાસાને ઉછાળતાં જો અયુગ્મ સંખ્યા મળે તો સમતોલ સિક્કાને એક વખત અને યુગ્મ સંખ્યા મળે તો સિક્કાને બે વખત ઉછાળવામાં આવે, તો આ યાદચ્છિક પ્રયોગ સાથે સંકળાયેલ નિદર્શાવકાશ લખો.
6. એક પેટીમાં 3 સમાન લાલ દડા, 2 સમાન સફેદ દડા અને 1 કાળો દડો છે. પેટીમાંથી યાદચ્છિક રીતે એક દડો પસંદ કરી પેટીમાં મૂકવામાં આવે છે અને ફરીથી બીજો દડો પસંદ કરવામાં આવે, તો બંને દડાની પસંદગીના પ્રકાર સાથે સંકળાયેલ નિદર્શાવકાશ લખો.
7. A, B, C અને D અંકિત કરેલાં ચાર પત્તાંમાંથી કોઈ પણ બે પત્તાં યાદચ્છિક રીતે પાછા મૂક્યા સિવાય પસંદ કરવાના પ્રયોગ સાથે સંકળાયેલા નિદર્શાવકાશ લખો.
8. બે ખાનામાં ત્રણ ભિન્ન દડા મૂકવાના છે. આ યાદચ્છિક પ્રયોગ સાથે સંકળાયેલ નિદર્શાવકાશ લખો.
9. એક સમતોલ સિક્કાને ત્રણ વખત ઉછાળવામાં આવે છે. જો ત્રણે વખત કાંટો (T) મળે, તો સમતોલ પાસાને ઉછાળવામાં આવે છે. નહિ તો પ્રયોગ પૂરો થાય છે. તો નિદર્શાવકાશ લખો.
10. એક સમતોલ પાસા પર *a, b, c, d, e, f* અંકિત કરેલ છે. બીજા સમતોલ પાસા પર 1, 2, 3, 4, 5, 6 અંકિત કરેલ છે. બંને પાસાને એક સાથે ઉછાળવાના પ્રયોગ સાથે સંકળાયેલ નિદર્શાવકાશ લખો.

*

10.4 ઘટના

વ્યાખ્યા : નિદર્શાવકાશના ઉપગણને ઘટના (Event) કહે છે.

આપણે અગાઉ યાદચ્છિક પ્રયોગ સાથે સંકળાયેલ નિદર્શાવકાશ શીખી ગયા. નિદર્શાવકાશને સાર્વત્રિક ગણ તરીકે લઈએ, તો તેના પ્રત્યેક ઉપગણને ઘટના કહેવાય.

નિદર્શાવકાશ Uના તમામ ઉપગણોના ગણને તેનો ઘાતગણ કહે છે જેને સંકેતમાં P(U) વડે દર્શાવાય છે. P(U) ના ઘટકો ઘટનાઓ છે.

બે સમતોલ સિક્કાને એક સાથે ઉછાળવાના પ્રયોગ સાથે સંકળાયેલ નિદર્શાવકાશ U = {HH, HT, TH, TT}. A = {TT} એ ગણ Uનો ઉપગણ છે. તેથી A એ ઘટના છે. તેમાં બંને સિક્કામાં છાપ મળે છે. B = {HT, TH, TT} એ એક ઘટના છે કે જેમાં ઓછામાં ઓછા એક વખત કાંટો આવે.

હવે આપણે ગણ સિદ્ધાંતના આધારે વિવિધ ઘટનાઓના પ્રકારો જોઈએ.

મૂળભૂત ઘટનાઓ (Elementary Events) (Simple Events) : ધારો કે U એક સાન્ત નિદર્શાવકાશ છે અને U = $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$. U ના એકાકી ઉપગણો $\{x_i\}$, (i = 1, 2, 3,..., n) ને મૂળભૂત ઘટનાઓ કહેવામાં આવે છે. મૂળભૂત ઘટનાને પ્રાથમિક ઘટના પણ કહે છે.

બે સિક્કાને એક સાથે ઉછાળવાના પ્રયોગના નિદર્શાવકાશ U = {HH, HT, TH, TT} માટે ઘટનાઓ {HH}, {HT}, {TH} અને {TT} એ મૂળભૂત ઘટનાઓ છે.

અશક્ય ઘટના (Impossible Event) : નિદર્શાવકાશ Uના ઉપગણ $\emptyset$ (ખાલી ગણ)ને અશક્ય ઘટના કહે છે.

ચોક્કસ ઘટના (Certain Event) : નિદર્શાવકાશ U ના ઉપગણ U ને ચોક્કસ ઘટના કહે છે.

સંયુક્ત ઘટના (Compound Event) : જે ઘટનામાં એક કરતાં વધુ ઘટકો હોય તેવી ઘટનાને સંયુક્ત ઘટના કહે છે. આ ઘટનાને **વિભાજનીય ઘટના (Decomposable Event)** પણ કહે છે. ઉદાહરણ તરીકે બે સમતોલ સિક્કાને એક સાથે ઉછાળવાની ઘટનામાં, U = {HH, TH, HT, TT}.

Uના ઉપગણો A = {TH, HT} અને B = {TH, HT, TT} વગેરે સંયુક્ત ઘટનાઓ છે.

પૂરક ઘટના (Complementary Event) : A ∈ P(U). ઘટના A ના ઘટકો સિવાયના નિદર્શાવકાશ U ના ઘટકોથી બનતા ગણને A ની પૂરક ઘટના કહે છે.

ઘટના A ની પૂરક ઘટના ને A' વડે દર્શાવાય છે.

ગણસિદ્ધાંતની રીતે $A' = \{x \mid x \in U, x \notin A\}$

દાખલા તરીકે બે સિક્કાને એક સાથે ઉછાળવાની ઘટનામાં નિદર્શાવકાશ U = {HH, HT, TH, TT}. માત્ર કાંટો આવે તેવી ઘટના A = {TT}. ઘટના Aની પૂરક ઘટના A' = {HH, HT, TH}

અહીં સ્પષ્ટ છે કે $\emptyset' = U$ અને $U' = \emptyset$ થાય.

યોગ ઘટના (Union of Events) : A, B ∈ P(U). ધારો કે A અને B ઘટનાઓ છે. A માં હોય અથવા B માં હોય તેવા તમામ ઘટકોથી બનતા ગણને ઘટનાઓ A અને B ની યોગ ઘટના કહેવાય છે. તેને સંકેતમાં A ∪ B વડે દર્શાવાય છે.

ગણસિદ્ધાંતની રીતે, $A \cup B = \{x \mid x \in U, x \in A$ અથવા $x \in B\}$

છેદ ઘટના (Intersection of Events) : A, B ∈ P(U). ધારો કે A અને B ઘટનાઓ છે. A માં હોય અને B માં હોય તેવા તમામ ઘટકોથી બનતા ગણને A અને B ની છેદઘટના કહેવાય છે. તેને સંકેતમાં A ∩ B વડે દર્શાવાય છે.

ગણસિદ્ધાંતની રીતે $A \cap B = \{x \mid x \in U, x \in A$ અને $x \in B\}$

પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ (Mutually Exclusive Events) : A, B ∈ P(U). U કોઈ યાદચ્છિક પ્રયોગનો નિદર્શાવકાશ છે. A, B ∈ P(U). જો $A \cap B = \emptyset$ હોય, તો A અને B પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ કહેવાય છે.

કોઈ પણ યાદચ્છિક પ્રયોગની મૂળભૂત ઘટનાઓ પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ હોય છે.

સમતોલ પાસાને ઉછાળવાના યાદચ્છિક પ્રયોગ સાથે સંકળાયેલ બે ઘટનાઓ A અને B છે.

A = પાસા પર મળતો અંક યુગ્મ છે. B = પાસા પર મળતો અંક અયુગ્મ છે.

A = {2, 4, 6} અને B = {1, 3, 5}

અહીં સ્પષ્ટ છે કે, $A \cap B = \emptyset$

નિઃશેષ ઘટનાઓ (Exhaustive Events) : A, B ∈ P(U). ઘટનાઓ A અને B માટે જો A ∪ B = U હોય, તો A અને B નિઃશેષ ઘટનાઓ કહેવાય.

પરસ્પર નિવારક અને નિઃશેષ ઘટનાઓ (Mutually Exclusive and Exhaustive Events) : A, B $\in$ P(U). જો ઘટનાઓ A અને B માટે $A \cap B = \emptyset$ અને $A \cup B = U$ હોય, તો A અને Bને પરસ્પર નિવારક અને નિઃશેષ ઘટનાઓ કહે છે.

અહીં સ્પષ્ટ છે કે, કોઈ પણ ઘટના A માટે $A \cap A' = \emptyset$ અને $A \cup A' = U$. A અને A' એ પરસ્પર નિવારક અને નિઃશેષ ઘટનાઓ કહેવાય છે.

અગાઉ બતાવ્યા પ્રમાણેના ઉદાહરણમાં $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{2, 4, 6\}$ અને $B = \{1, 3, 5\}$ એ આપેલ ઘટનાઓ છે. અહીં $A \cap B = \emptyset$ અને $A \cup B = U$. ઘટનાઓ A અને B પરસ્પર નિવારક અને નિઃશેષ ઘટનાઓ છે.

તફાવત ઘટના (Difference Event) : A, B $\in$ P(U). A માં હોય પણ B માં ન હોય તેવા U ના ઘટકોથી બનતા ગણને A અને B ની તફાવત ઘટના કહેવાય છે. તેને સંકેતમાં A–B વડે દર્શાવાય છે.

તે જ રીતે B – A પણ વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે છે.

A – B અને B–A ને ગણસિદ્ધાંતની રીતે લખતાં,

$A - B = \{x \mid x \in U, x \in A$ અને $x \notin B\}$ અને $B - A = \{x \mid x \in U, x \in B$ અને $x \notin A\}$

$A - B = A \cap B'$ પણ લખી શકાય છે.

અગાઉ આપણે બે ઘટનાઓ A અને B માટે યોગ ઘટના, છેદ ઘટનાની વ્યાખ્યા આપી છે. તે જ રીતે ઘટનાઓ $A_1, A_2, \ldots, A_n$ $(n \geq 2)$ આપેલ છે.

ઘટનાઓ $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ની યોગ ઘટનાને $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ અથવા $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ વડે દર્શાવાય છે.

તે જ રીતે ઘટનાઓ $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ની છેદ ઘટનાને $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$ અથવા $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ વડે દર્શાવાય છે.

$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{x \mid x \in U, x$ ઓછામાં ઓછા એક A_i માં છે, $i = 1, 2, 3, \ldots, n\}$

$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \{x \mid x \in U, x$ પ્રત્યેક A_i માં છે, $i = 1, 2, 3, \ldots, n\}$

10.5 પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ અને નિઃશેષ ઘટનાઓ

જો $i \neq j$ તથા $i = 1, 2, \ldots, n$ અને $j = 1, 2, 3, \ldots, n$ માટે $A_i \cap A_j = \emptyset$ હોય, તો $A_1, A_2, \ldots, A_n$ પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ છે.

તદુપરાંત જો $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = U$ તો $A_1, A_2, \ldots, A_n$ પરસ્પર નિવારક અને નિઃશેષ ઘટનાઓ છે.

નિદર્શાવકાશનું વિભાજન (Partition of a Sample Space) : આપેલા નિદર્શાવકાશ U ની ઘટનાઓ $A_1, A_2, \ldots, A_n$ એ પરસ્પર નિવારક અને નિઃશેષ ઘટનાઓ હોય, તો $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ ને U નું વિભાજન કહે છે.

10.6 પ્રાથમિક અથવા મૂળભૂત ઘટનાઓ

નીચેના કોષ્ટકમાં કેટલીક ઘટનાઓ અને તેની ગણની પરિભાષામાં અભિવ્યક્તિ દર્શાવેલ છે :

ક્રમ	ઘટનાની શાબ્દિક અભિવ્યક્તિ	ગણસંકેત
1.	A એક ઘટના છે.	$A \subset U$
2.	A ઘટના બનતી નથી.	A'
3.	ઘટના A બને તો B પણ બની જ હોય.	$A \subset B$
4.	અશક્ય ઘટના	$\emptyset$
5.	ચોક્કસ ઘટના	U
6.	A અને B પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ છે.	$A \cap B = \emptyset$
7.	ઘટનાઓ A અને B નિઃશેષ છે.	$A \cup B = U$
8.	ઘટનાઓ A અને B પૈકી ફક્ત ઘટના B બને છે.	$B - A$ અથવા $B \cap A'$
9.	ઘટનાઓ A અને B પૈકી ફક્ત એક ઘટના બને છે.	$(A - B) \cup (B - A)$
		$A \Delta B$
10.	બંને ઘટના A અને B એકસાથે બને છે.	$A \cap B$
11.	ઘટનાઓ A અને B પૈકી ઓછામાં ઓછી એક બને છે.	$A \cup B$
12.	ઘટનાઓ A, B અને C પૈકી ફક્ત ઘટના A બને છે.	$A - (B \cup C)$
		અથવા $A \cap B' \cap C'$
13.	ઘટનાઓ A, B અને C પૈકી ફક્ત A અને B બને છે.	$A \cap B \cap C'$

ઉદાહરણ 5 : એક સમતોલ સિક્કાને બે વખત ઉછાળવામાં આવે છે અને તેનાં પરિણામો નોંધવામાં આવે છે. તે પરથી નીચેની ઘટનાઓના ઘટકો લખો :

(1) ઘટના A : બંને વખત કાંટો મળે. (2) ઘટના B : એક જ વખત H મળે છે.

(3) ઘટના C : વધુમાં વધુ એક જ વખત T મળે.

ઉકેલ : એક સિક્કાને બે વખત ઉછાળતાં મળતો નિદર્શાવકાશ U = {HH, HT, TH, TT}

ઘટના A : બંને વખત T મળે. A = {TT}

ઘટના B : એક જ વખત H મળે. B = {HT, TH}

ઘટના C : વધુમાં વધુ એક જ વખત T મળે. C = {HH, HT, TH}

ઉદાહરણ 6 : નિદર્શાવકાશ U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} આપેલ છે. A = {1, 3, 4}, B = {4, 5, 7, 8} અને C = {5, 6, 7} એ આપેલ ઘટનાઓ છે. નીચે આપેલ ઘટનાઓના ઘટકો લખો :

(1) $A \cup B'$ (2) $A \cap B'$ (3) $A' \cap B'$ (4) $A \cap (B \cap C)'$ (5) $(B \cap C) \cup A$

ઉકેલ : અહીં U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}

A = {1, 3, 4}, B = {4, 5, 7, 8}, C = {5, 6, 7}

(1) A = {1, 3, 4}, B' = {1, 2, 3, 6, 9, 10}

$\therefore$ A ∪ B' = {1, 2, 3, 4, 6, 9, 10}

(2) A ∩ B' = {1, 3, 4} ∩ {1, 2, 3, 6, 9, 10} = {1, 3}

$\therefore$ A ∩ B' = {1, 3}

(3) A' ∩ B'

A' = {2, 5, 6, 7, 8, 9, 10} અને B' = {1, 2, 3, 6, 9, 10}

$\therefore$ A' ∩ B' = {2, 6, 9, 10}

(4) A ∩ (B ∩ C)'

B ∩ C = {4, 5, 7, 8,} ∩ {5, 6, 7} = {5, 7}

(B ∩ C)' = {1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10}

A ∩ (B ∩ C)' = {1, 3, 4} ∩ {1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10} = {1, 3, 4}

(5) (B ∩ C) ∪ A = {5, 7} ∪ {1, 3, 4} = {1, 3, 4, 5, 7}

ઉદાહરણ 7 : ત્રણ કુટુંબ પૈકી પ્રત્યેકમાં એક છોકરો અને એક છોકરી છે. પ્રત્યેકમાંથી એક બાળક પસંદ કરવામાં આવે છે. તે પરથી નીચેની ઘટનાઓના ઘટકો લખો :

(1) પસંદગીમાં વધુમાં વધુ એક છોકરો હોય. (2) પસંદગીમાં માત્ર છોકરીઓ હોય.

(3) પસંદગીમાં બરાબર બે છોકરીઓ હોય.

ઉકેલ : કોઈ પણ કુટુંબમાં આવેલ બાળક એ છોકરો કે છોકરી હોઈ શકે. આપણે છોકરાને 'b' વડે અને છોકરીને સંકેતમાં 'g' વડે દર્શાવીએ તો નિદર્શાવકાશ,

U = {b, g} × {b, g} × {b, g}

= {bbb, bbg, bgb, gbb, ggb, gbg, bgg, ggg}

(1) ધારો કે ઘટના A પસંદગીમાં વધુમાં વધુ એક જ છોકરો હોય તે છે.

A = {ggg, ggb, gbg, bgg}

(2) ધારો કે ઘટના B પસંદગીમાં માત્ર છોકરીઓ જ હોય તે છે.

B = {ggg}

(3) ધારો કે ઘટના C બરાબર બે જ છોકરી હોય તે છે.

C = {ggb, gbg, bgg}

સ્વાધ્યાય 10.2

1. એક પેટીમાં લાલ, કાળો, પીળો અને સફેદ રંગના એકએક દડા આવેલ છે. તેમાંથી યાદચ્છિક રીતે એક દડો પસંદ કરવામાં આવે છે. તેના રંગની નોંધણી કરી પેટીમાં પરત મૂકવામાં આવે છે. ત્યાર બાદ બીજો દડો પસંદ કરવામાં આવે છે. તેના રંગની નોંધણી કરવામાં આવે છે. આ પ્રયોગ સાથે સંકળાયેલ નિદર્શાવકાશ લખો. તે પરથી નીચેની ઘટનાઓના ઘટકો લખો :

(1) A : પસંદ થયેલ બંને દડાઓ સમાન રંગના હોય.

(2) B : માત્ર એક જ દડો સફેદ રંગનો હોય.

(3) C : ઓછામાં ઓછો એક દડો સફેદ રંગનો હોય.

(4) D : બંને દડાઓના રંગ ભિન્ન હોય.

તે પરથી $A \cap B$, $B \cup C$, $A \cup D$, $A \cap D$ના ઘટકો લખો. તે પરથી B અને C માટે તેમજ ઘટના A અને D માટે શું કહી શકાય ?

2. એક સમતોલ સિક્કાને ત્રણ વખત ઉછાળવામાં આવે છે. તે પરથી નીચેની ઘટનાઓના ઘટકો લખો :

(1) ઘટના A : ઓછામાં ઓછી બે વખત છાપ મળે.

(2) ઘટના B : બરાબર બે જ વખત કાંટો મળે.

(3) ઘટના C : વધુમાં વધુ એક જ વખત કાંટો મળે.

(4) ઘટના D : ઓછામાં ઓછી એક વખત કાંટો મળે.

તે પરથી ઘટનાઓ $A \cap B$, $C \cap D'$, $A \cup C$, $B \cap C$, $A' \cup C'$ શોધો.

3. 1થી 30 સુધીના ધન પૂર્ણાંકો ધરાવતા એક નિદર્શાવકાશ U માં ઘટના A_i એ ઘટક i વડે વિભાજ્ય છે તે દર્શાવે છે. ઘટનાઓ A_2, A_3, A_4, A_5 ના ઘટકો લખો.

તે પરથી નીચેનાં વિધાનોની સત્યાર્થતા ચકાસો :

(1) ઘટનાઓ A_2 અને A_3 પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ છે.

(2) ઘટના A_4 એ ઘટના A_2નો ઉપગણ છે. (3) A_3, A_4 અને A_5 એ નિઃશેષ ઘટનાઓ નથી.

4. એક પેટીમાં 2 સફેદ, 1 લાલ અને 2 લીલા રંગના સમાન દડાઓ છે. એક પછી એક એમ બે દડાની પસંદગી કરવાના પ્રયોગનો નિદર્શાવકાશ લખો. (બીજા દડાની પસંદગી વખતે પહેલો દડો પાછો મૂકવામાં આવતો નથી.) નીચેની ઘટનાઓના ઘટકો લખો :

ઘટના A : બંને દડાઓ સફેદ રંગના હોય.

ઘટના B : ઓછામાં ઓછો એક દડો સફેદ રંગનો હોય.

ઘટના C : બંને દડા ભિન્ન રંગના હોય.

5. 1 થી 50 પૈકીના પૂર્ણાંકોમાંથી એક પૂર્ણાંક પસંદ કરવામાં આવે છે.

નીચેની ઘટનાઓના ઘટકો લખો :

A : U માંથી યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરેલ સંખ્યા 2ની ગુણિત છે.

B : U માંથી યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરેલ સંખ્યા 10ની ગુણિત છે.

C : U માંથી યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરેલ સંખ્યા 4 વડે વિભાજ્ય છે.

6. બે સમતોલ પાસાઓને એક સાથે ઉછાળવાના પ્રયોગનો નિદર્શાવકાશ લખો. તે પરથી નીચેની ઘટનાઓના ઘટકો લખો :

ઘટના A : બંને પાસા પરના અંકોનો સરવાળો 4 વડે વિભાજ્ય છે.

ઘટના B : બંને પાસા પરના અંકોનો સરવાળો 3 વડે વિભાજ્ય છે.

ઘટના C : બંને પાસા પરના અંકોનો સરવાળો 7 કરતાં ઓછો હોય.

ઘટના D : બંને પાસા પરના અંકો યુગ્મ સંખ્યા હોય.

7. એક પેટીમાં a, b, c અંકિત કરેલા ત્રણ સમાન દડા મૂકેલા છે. પેટીમાંથી એક દડો પસંદ કરી તેના પર અંકિત કરેલ મૂળાક્ષર નોંધી પેટીમાં પાછો મૂકવામાં આવે છે. ત્યાર બાદ બીજો દડો પસંદ કરવામાં આવે છે. આ પ્રયોગનો નિદર્શાવકાશ લખો. નીચેની ઘટનાઓના ઘટકો લખો :

ઘટના A : 'a' સંકેતવાળો દડો એક જ વખત પસંદ થાય છે.

ઘટના B : બંને દડા પર મૂળાક્ષર સમાન છે.

ઘટના C : 'c' સંકેતવાળો દડો ઓછામાં ઓછી એક વખત મળે જ.

8. 3 છોકરાઓ અને 2 છોકરીઓના જૂથમાંથી બે બાળકોની પસંદગીના પ્રયોગનો નિદર્શાવકાશ લખો. નીચેની ઘટનાઓના ઘટકો લખો :

E : પસંદ થયેલ બંને બાળકો છોકરીઓ હોય.

F : પસંદ થયેલ બાળકોમાં એક છોકરો અને એક છોકરી હોય.

G : પસંદ થયેલ બાળકોમાં ઓછામાં ઓછો એક છોકરો હોય.

9. એક સમતોલ પાસાને ઉછાળવાના પ્રયોગના આધારે નીચેની ઘટનાઓના ઘટકો લખો :

A : પાસા પરનો અંક 7 કરતા નાનો હોય.

B : પાસા પરનો અંક એ 3નો ગુણિત હોય.

C : પાસા પરનો અંક એ 4 કરતાં મોટો હોય.

D : પાસા પરનો અંક 2 કરતાં નાનો હોય.

તથા $A \cap C$, $B \cup C$, $D' \cup C'$ શોધો.

*

10.7 ગણવિધેય

ધારો કે U એક સાન્ત નિદર્શાવકાશ છે. U ના તમામ ઉપગણોના ગણને U નો ઘાતગણ કહે છે. તેને સંકેતમાં P(U) વડે દર્શાવાય છે. P(U)ના તમામ ઘટકોને ઘટનાઓ કહે છે. હવે આપણે P(U) ને S વડે દર્શાવીશું.

ધારો કે S નિદર્શાવકાશ U નો ઘાતગણ છે. R વાસ્તવિક સંખ્યાઓનો ગણ છે. વિધેય $T : S \rightarrow R$ ને વાસ્તવિક **ગણવિધેય (Set Function)** કહે છે.

10.8 યોગનીય ગણવિધેય

ધારો કે $T : S \rightarrow R$ એક ગણવિધેય છે.

જો $A_1, A_2 \in S$ અને $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ માટે $T(A_1 \cup A_2) = T(A_1) + T(A_2)$ હોય, તો Tને S પરનું યોગનીય ગણવિધેય (Additive Set Function) કહેવાય.

ઉદાહરણ 8 : નિદર્શાવકાશ $U = \{a, b\}$ આપેલ છે. $T : S \rightarrow R$ એ ગણવિધેય છે. પ્રત્યેક $A \in S$ માટે, T(A) = Aના ઘટકોની સંખ્યા. વિધેય Tનો વિસ્તાર લખો. T એ યોગનીય ગણવિધેય છે કે નહિ તે ચકાસો.

ઉકેલ : અહીં નિદર્શાવકાશ $U = \{a, b\}$ આપેલ છે.

$\therefore \quad S = P(U) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, U\}$

ઘટનાઓ $A_1 = \emptyset, \quad A_2 = \{a\}, \quad A_3 = \{b\}, \quad A_4 = U$

$T(A_1) = 0, \quad T(A_2) = T(A_3) = 1, \quad T(A_4) = 2$

$\therefore$ વિધેય Tનો વિસ્તાર = $\{0, 1, 2\}$

$A_1 \cap A_2 = \emptyset \qquad A_1 \cup A_2 = \emptyset \cup \{a\} = \{a\} = A_2$

$T(A_1 \cup A_2) = T(A_2) = 1$

$T(A_1) + T(A_2) = 0 + 1 = 1$

$\therefore \quad T(A_1 \cup A_2) = T(A_1) + T(A_2)$

$A_2 \cup A_3 = A_4 \qquad A_2 \cap A_3 = \emptyset$

$T(A_2 \cup A_3) = T(A_4) = 2$

$T(A_2) + T(A_3) = 1 + 1 = 2$

$\therefore \quad T(A_2 \cup A_3) = T(A_2) + T(A_3)$

$A_1 \cap A_3 = \emptyset \qquad A_1 \cup A_3 = A_3$

$T(A_1 \cup A_3) = T(A_3) = 1$

$T(A_1) + T(A_3) = 0 + 1 = 1$

$\therefore \quad T(A_1 \cup A_3) = T(A_1) + T(A_3)$

$A_1 \cap A_4 = \emptyset \qquad A_1 \cup A_4 = U$

$\therefore \quad T(A_1 \cup A_4) = T(U) = 2$

$\therefore \quad T(A_1) + T(A_4) = 0 + 2 = 2$

$\therefore \quad T(A_1 \cup A_4) = T(A_1) + T(A_4)$

માટે T એ યોગનીય ગણવિધેય છે.

10.9 સંભાવનાની પૂર્વધારણાયુક્ત વ્યાખ્યા

સંભાવનાની પૂર્વધારણાયુક્ત વ્યાખ્યા (Axiomatic Definition of Probability) ઈ.સ. 1933માં સૌપ્રથમ રશિયન ગણિતશાસ્ત્રી કોલ્મોગોરોવે આપી હતી.

વ્યાખ્યા : ધારો કે U એક સાન્ત નિદર્શાવકાશ છે. S એ U નો ઘાતગણ છે. ધારો કે ગણવિધેય $P : S \rightarrow R$ નીચેની પૂર્વધારણાઓનું પાલન કરે છે.

પૂર્વધારણા 1 : પ્રત્યેક $A \in S$ માટે $P(A) \geq 0$

પૂર્વધારણા 2 : $P(U) = 1$

પૂર્વધારણા 3 : પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ $A_1 \in S$ અને $A_2 \in S$ માટે

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$$

ઉપરની ત્રણેય પૂર્વધારણાઓનું પાલન કરતાં S પર વ્યાખ્યાયિત ગણવિધેય P ને સંભાવના વિધેય (Probability Function) કહે છે. $A \in S$ માટે P(A) ને ઘટના A ની સંભાવના કહે છે. ત્રય (U, S, P) ને સંભાવના અવકાશ (Probability Space) કહે છે.

આ વ્યાખ્યા પરથી સંભાવનાના નીચેના ગુણધર્મો તારવી શકાય છે :

(1) પૂર્વધારણા 1 પરથી દરેક ઘટનાની સંભાવના અનૃણ વાસ્તવિક સંખ્યા છે.

(2) પૂર્વધારણા 2 પ્રમાણે, $P(U) = 1$ એટલે કે ચોક્કસ ઘટનાની સંભાવના 1 છે.

(3) સંભાવના વિધેય યોગનીય ગણ વિધેય છે.

(4) જો $A_1, A_2, ..., A_n \in S$ પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ ($n \geq 2$) માટે

$$P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n)$$

ઉદાહરણ 9 : નિદર્શાવકાશ $U = \{a, b, c\}$ ના ઘાતગણ પર ગણવિધેય P નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત છે :

ઘટના A	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a, b\}$	$\{b, c\}$	$\{a, c\}$	U
P(A)	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{12}$	1

ગણવિધેય P સંભાવના વિધેય છે કે કેમ તે નક્કી કરો.

ઉકેલ : અહીં $U = \{a, b, c\}$

S એ નિદર્શાવકાશ U નો ઘાતગણ છે.

$S = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, U\}$

આપેલા કોષ્ટક પરથી સ્પષ્ટ છે કે $\forall A \in S, P(A) \geq 0$. આથી પૂર્વધારણા 1નું પાલન થાય છે.

પૂર્વધારણા 2 પ્રમાણે જરૂરી $P(U) = 1$ આપેલું છે જ.

ધારો કે $A_1 = \{a\}$ અને $A_2 = \{b\}$. $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. A_1 અને A_2 એ પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ છે.

$A_1 \cup A_2 = \{a, b\}$

$P(A_1 \cup A_2) = P(\{a, b\}) = \frac{1}{6}$

$P(A_1) + P(A_2) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$

$\therefore \quad P(A_1 \cup A_2) \neq P(A_1) + P(A_2)$

તેથી પૂર્વધારણા 3નું પાલન થતું નથી.

$\therefore$ ગણવિધેય P સંભાવના વિધેય નથી.

ઉદાહરણ 10 : ઘટનાઓ A, B અને C એ પરસ્પર નિવારક અને નિઃશેષ ઘટનાઓ છે. ઘટનાઓ A, B, Cની સંભાવનાની ફાળવણી નીચે પ્રમાણે છે :

(1) $P(A) = 0.40, P(B) = 0.36, P(C) = 0.24$

(2) $P(A) = \frac{3}{5}, P(B) = \frac{1}{5}, P(C) = \frac{2}{5}$

(3) $P(A) = 0.31, P(B) = 0.36, P(C) = -0.23$

ઉપર્યુક્ત સંભાવનાની ફાળવણી પરથી P એ સંભાવના વિધેય છે કે નહિ તે ચકાસો.

ઉકેલ : (1) $P(A) > 0, P(B) > 0, P(C) > 0$

A, B, C એ પરસ્પર નિવારક અને નિઃશેષ ઘટનાઓ છે. (પક્ષ)

$\therefore \quad A \cup B \cup C = U$

$\therefore \quad P(A \cup B \cup C) = P(U)$

$\therefore \quad P(A) + P(B) + P(C) = P(U)$

વળી, $P(A) + P(B) + P(C) = 0.40 + 0.36 + 0.24 = 1.00$

$\therefore$ $P(U) = 1.00$

$\therefore$ P એ તમામ પૂર્વધારણાઓનું પાલન કરે છે.

$\therefore$ P એ સંભાવના વિધેય છે.

(2) પૂર્વધારણા 3 પ્રમાણે જરૂરી છે કે $P(A) + P(B) + P(C) = 1$.

પરંતુ સંભાવનાની ફાળવણી પરથી,

$P(A) + P(B) + P(C) = \frac{3}{5} + \frac{1}{5} + \frac{2}{5} = \frac{6}{5} = 1.2 > 1$

$\therefore$ P સંભાવનાવિધેય નથી.

(3) $\forall A, P(A) \geq 0$ જરૂરી છે. (પૂર્વધારણા 1)

પૂર્વધારણા 1 પરથી દરેક ઘટનાની સંભાવના અનૃણ હોય.

$P(C) = -0.23 < 0$

$\therefore$ P સંભાવના વિધેય નથી.

10.8 સંભાવનાનાં પ્રમેયો

સંભાવનાની વ્યાખ્યા પરથી આપણે સંભાવનાનાં પ્રમેયો સાબિત કરીશું.

ધારો કે U એ સાન્ત નિદર્શાવકાશ છે. નિદર્શાવકાશ U ના ઘાતગણ S નો દરેક સભ્ય ઘટના છે.

પ્રમેય 1 : અશક્ય ઘટના $\emptyset$ માટે $P(\emptyset) = 0$

સાબિતી : ઘટના $\emptyset$ અને U માટે,

$\emptyset \cap U = \emptyset$ અને $\emptyset \cup U = U$

તેથી પૂર્વધારણા 3 પ્રમાણે,

$P(\emptyset \cup U) = P(\emptyset) + P(U)$

$\therefore$ $P(U) = P(\emptyset) + P(U)$

$\therefore$ $1 = P(\emptyset) + 1$ (પૂર્વધારણા 2)

$\therefore$ $P(\emptyset) = 0$

પ્રમેય 2 : દરેક ઘટના A માટે, $P(A') = 1 - P(A)$

સાબિતી : અહીં સ્પષ્ટ છે કે ઘટના A અને A' માટે,

$A \cap A' = \emptyset$ અને $A \cup A' = U$

$P(A \cup A') = P(U)$

$\therefore$ $P(A) + P(A') = P(U)$ (પૂર્વધારણા 3)

$\therefore$ $P(A) + P(A') = 1$ (પૂર્વધારણા 2)

$\therefore$ $P(A') = 1 - P(A)$

પ્રમેય 3 : ઘટનાઓ A અને B માટે જો $A \subset B$ હોય, તો

(1) $P(B - A) = P(B) - P(A)$

(2) $P(A) \leq P(B)$

સાબિતી : $A \subset B$ આપેલ છે.

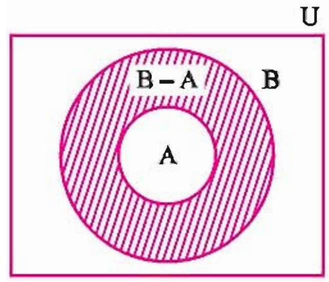
વેન આકૃતિ 10.2 પરથી સ્પષ્ટ છે કે,

$A \cap (B - A) = \emptyset$ અને $A \cup (B - A) = B$

તેથી $P(A \cup (B - A)) = P(B)$

$\therefore$ $P(A) + P(B - A) = P(B)$ **(પૂર્વધારણા 3)**

$\therefore$ $P(B - A) = P(B) - P(A)$ **(i)**



આકૃતિ 10.2

હવે, પૂર્વધારણા 1 પ્રમાણે,

$P(B - A) \geq 0$

$\therefore$ $P(B) - P(A) \geq 0$

$\therefore$ $P(B) \geq P(A)$

$\therefore$ $P(A) \leq P(B)$

ઉપપ્રમેય 1 : પ્રત્યેક ઘટના A માટે $0 \leq P(A) \leq 1$

સાબિતી : પૂર્વધારણા 1 પ્રમાણે $P(A) \geq 0$. (i)

$A \subset U$.

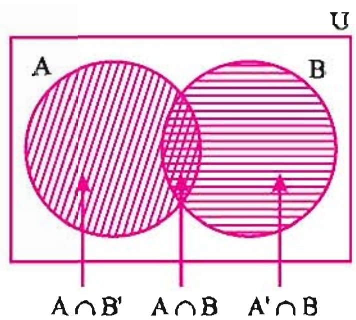
$\therefore$ $P(A) \leq P(U)$ **(પ્રમેય 3)**

$\therefore$ $P(A) \leq 1$ **(પૂર્વધારણા 2) (ii)**

(i) અને (ii) પરથી, $0 \leq P(A) \leq 1$

ઉપપ્રમેય 2 : ઘટનાઓ A અને B માટે,

$P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B)$



આકૃતિ 10.3

સાબિતી : ઘટનાઓ A અને B માટે વેન આકૃતિ 10.3 પરથી સ્પષ્ટ છે કે,

$A \cap B' = A - (A \cap B)$

$\therefore$ $P(A \cap B') = P(A - (A \cap B))$

$= P(A) - P(A \cap B)$ **($(A \cap B) \subset A$)**

પ્રમેય 4 : ઘટનાઓ A અને B માટે, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

સાબિતી : ઘટનાઓ B અને $A \cap B'$ માટે,

$B \cap (A \cap B') = \emptyset$ અને $B \cup (A \cap B') = A \cup B$

તેથી, $P(B \cup (A \cap B')) = P(A \cup B)$

$\therefore$ $P(B) + P(A \cap B') = P(A \cup B)$ **(પૂર્વધારણા 3)**

$\therefore$ $P(B) + P(A) - P(A \cap B) = P(A \cup B)$ **(ઉપપ્રમેય 2)**

$\therefore$ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

10.9 સંભાવનાની પ્રશિષ્ટ વ્યાખ્યા

લાપ્લાસ અને બર્નુલીએ **સંભાવનાની પ્રશિષ્ટ વ્યાખ્યા (Classical Definition of Probability)** આપી હતી. તેમણે આપેલ વ્યાખ્યામાં મૂળભૂત ઘટનાઓને સમસંભાવી ઘટનાઓ તરીકે લેવામાં આવે છે. આ વ્યાખ્યા પરથી નિદર્શાવકાશની દરેક ઘટનાઓ માટે સંભાવનાની ફાળવણીનો સ્પષ્ટ ખ્યાલ આવે છે.

સમસંભાવી ઘટનાઓ (Equiprobable events) : ધારો કે U = $\{x_1, x_2,..., x_n\}$ એક સાન્ત નિદર્શાવકાશ છે. P એ નિદર્શાવકાશ U પર વ્યાખ્યાયિત ગણવિધેય છે.

જો $P(\{x_1\}) = P(\{x_2\}) = \cdots = P(\{x_n\})$ હોય, તો મૂળભૂત ઘટનાઓ $\{x_1\}, \{x_2\},..., \{x_n\}$ સમસંભાવી છે એમ કહેવાય.

હવે, $\bigcup_{i=1}^{n}\{x_i\} = U$ અને $\{x_i\} \cap \{x_j\} = \emptyset$; $i \neq j$

$P(\{x_1\} \cup \{x_2\} \cup ... \cup \{x_n\}) = P(U)$

$\therefore \quad P(\{x_1\}) + P(\{x_2\}) + ... + P(\{x_n\}) = 1$ (પૂર્વધારણા 2, 3)

અહીં $\{x_1\}, \{x_2\},..., \{x_n\}$ સમસંભાવી છે.

$\therefore \quad n\, P(\{x_i\}) = 1, \; i = 1, 2,..., n$

$\therefore \quad P(\{x_i\}) = \frac{1}{n} \qquad 1 \leq i \leq n$

U = $\{x_1, x_2,..., x_n\}$ એ સાન્ત નિદર્શાવકાશ છે. મૂળભૂત ઘટનાઓ સમસંભાવી છે. ધારો કે Uની કોઈ એક અરિક્ત ઘટના Aના ઘટકોની સંખ્યા r છે. ધારો કે ઘટના A ના ઘટકો $x_1, x_2,..., x_r$ છે.

$\therefore \quad A = \{x_1\} \cup \{x_2\} \cup ... \cup \{x_r\}$

પૂર્વધારણા 3 પ્રમાણે,

$P(A) = P(\{x_1\}) + P(\{x_2\}) + ... + P(\{x_r\})$

$P(A) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + ... + \frac{1}{n}$ (r વખત)

$\therefore \quad P(A) = \frac{r}{n}$

$A = \emptyset$ માટે પણ આ પરિણામ સાચું છે.

વ્યાખ્યા : જો કોઈ યાદૃચ્છિક પ્રયોગ સાથે સંકળાયેલા સાન્ત નિદર્શાવકાશના સમસંભાવી શક્ય ઘટકો (કે પરિણામ) n હોય અને n પૈકીના r $(0 \leq r \leq n)$ ઘટકો ઘટના A ના ઉદ્ભવ માટે અનુકૂળ હોય, તો Aની સંભાવના $P(A) = \frac{r}{n}$.

ઉદાહરણ 11 : ધારો કે ઘટના Aની સંભાવના $\frac{9}{10}$ છે. ઘટના A ઉદ્ભવે નહિ તે માટેની સંભાવના શોધો.

ઉકેલ : $P(A) = \frac{9}{10}$. તેથી $P(A') = 1 - P(A)$

$$= 1 - \frac{9}{10} = \frac{1}{10}$$

ઉદાહરણ 12 : A અને B આપેલ ઘટનાઓ છે. $P(A) = 0.38$, $P(B) = 0.52$ અને $P(A \cap B) = 0.18$. તે પરથી નીચેની ઘટનાઓની સંભાવના શોધો :

(1) $A \cup B$ (2) $A - B$ (3) $B - A$ (4) B'

ઉકેલ : (1) $P(A) = 0.38$, $P(B) = 0.52$ અને $P(A \cap B) = 0.18$

હવે, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= 0.38 + 0.52 - 0.18 = 0.72$

(2) $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

$P(A - B) = 0.38 - 0.18 = 0.20$

(3) $P(B - A) = P(B) - P(A \cap B)$

$= 0.52 - 0.18 = 0.34$

(4) $P(B') = 1 - P(B)$

$= 1 - 0.52 = 0.48$

ઉદાહરણ 13 : એક સમતોલ સિક્કાને બે વખત ઉછાળવામાં આવે છે. તેની સાથે સંકળાયેલ નીચેની ઘટનાઓની સંભાવના શોધો. (1) છાપ (H) માત્ર એક જ વખત આવે. (2) કાંટો (T) ઓછામાં ઓછી એક વખત આવે.

ઉકેલ : સમતોલ સિક્કાને બે વખત ઉછાળવાના પ્રયોગનો નિદર્શાવકાશ,

$U = \{HH, HT, TH, TT\}$

∴ અહીં Uના ઘટકોની સંખ્યા 4 છે. આથી $n = 4$.

ધારો કે છાપ (H) એક જ વખત આવે તે ઘટના A હોય, તો $A = \{HT, TH\}$

∴ A માં સભ્યોની સંખ્યા 2 છે. આથી $r = 2$.

સંભાવનાની વ્યાખ્યા પ્રમાણે, $P(A) = \frac{r}{n} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

તે જ રીતે ઘટના B માં ઓછામાં ઓછું T એક જ આવે,

$B = \{HT, TH, TT\}$ અહીં $r = 3$.

$P(B) = \frac{r}{n} = \frac{3}{4}$

ઉદાહરણ 14 : સરખી રીતે ચીપેલાં 52 પત્તાંમાંથી યાદચ્છિક રીતે એક પત્તું પસંદ કરવામાં આવે છે. તે પરથી નીચેની ઘટનાઓની સંભાવના શોધો :

(1) પસંદ થયેલ પત્તું એક્કો હોય. (2) પસંદ થયેલ પત્તું કાળા રંગનું હોય.

(3) પસંદ થયેલ પત્તું ચોકટ હોય. (4) પસંદ થયેલ પત્તું એક્કો નથી.

ઉકેલ : સરખી રીતે ચીપેલાં 52 પત્તાંમાંથી એક પત્તું પસંદ કરવાની પસંદગીના પ્રકારની સંખ્યા, $n = 52$

(1) એક પત્તાંની થોકડીમાં ચાર એક્કા હોય છે. આથી $r = 4$.

∴ P (એક્કો) $= \frac{r}{n} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

(2) કાળા રંગનાં પત્તાં (ફૂલ્લી અથવા કાળી) 26 છે.

∴ P (કાળા રંગનું પત્તું) $= \frac{r}{n} = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$

(3) એક થોકડીનાં 13 ચોકટનાં પત્તાં હોય છે. આથી $r = 13$.

∴ P (ચોકટનું પત્તું) $= \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$

(4) P (એક્કો ન હોય) $= 1 - P$ (એક્કો)

$= 1 - \frac{1}{13} = \frac{12}{13}$

ઉદાહરણ 15 : એક પેટીમાં 5 લાલ, 6 સફેદ અને 2 કાળા રંગના સમાન દડા છે. નીચેની ઘટનાની સંભાવના શોધો.

(1) પેટીમાં યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરેલ એક દડો કાળા રંગનો હોય.

(2) યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરેલ બે દડામાં 1 લાલ અને બીજો સફેદ હોય.

ઉકેલ : પેટીમાં આવેલા કુલ દડાની સંખ્યા 13 છે.

પેટીમાંથી યાદચ્છિક રીતે એક દડાની પસંદગીના પ્રકાર $\binom{13}{1}$.

$\therefore \quad n = 13$

પેટીમાં બે કાળા દડા છે. તેમાંથી એક દડો પસંદ થવાના પ્રકારની સંખ્યા, $r = \binom{2}{1} = 2$

$\therefore$ કાળો દડો પસંદ થવાની સંભાવના $\frac{r}{n} = \frac{2}{13}$

(2) પેટીમાંથી એક સાથે બે દડા પસંદ કરવાના કુલ પ્રકાર $n = \binom{13}{2}$.

પેટીમાં 5 લાલ અને 6 સફેદ દડા છે. તેમાંથી એક લાલ અને એક સફેદ દડો પસંદ થવાના પ્રકાર $\binom{5}{1}\binom{6}{1}$.

$\therefore \quad r = \binom{5}{1}\binom{6}{1}$

$\therefore$ ઉપર્યુક્ત ઘટનાની સંભાવના, $\frac{r}{n} = \frac{\binom{5}{1}\binom{6}{1}}{\binom{13}{2}} = \frac{30}{78} = \frac{5}{13}$

સ્વાધ્યાય 10

1. ઘટનાઓ A અને B માટે $P(A \cup B) = 0.89$, $P(A) = 0.54$, $P(B) = 0.59$ હોય, તો (1) $P(A \cap B)$ (2) $P(A' \cap B')$ (3) $P(A \cap B')$ (4) $P(B \cap A')$ શોધો.

2. એક પેટીમાં 15 સફેદ, 10 વાદળી અને 5 કાળી લખોટીઓ છે. પેટીમાંથી યાદચ્છિક રીતે 5 લખોટીઓ પસંદ કરવામાં આવે છે. તે પરથી નીચેની ઘટનાઓની સંભાવના લખો :

(1) પસંદ થયેલ બધી લખોટીઓ કાળી હોય.

(2) પસંદ થયેલ લખોટીઓ વાદળી અથવા સફેદ રંગની હોય.

(3) પસંદ થયેલ લખોટીઓમાં ઓછામાં ઓછી એક કાળા રંગની હોય.

3. યાદચ્છિક પ્રયોગ સાથે સંકળાયેલ ત્રણ ઘટના A, B, C માટે સાબિત કરો કે,

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

4. એક સમતોલ સિક્કાને ત્રણ વખત ઉછાળવાના પ્રયોગનો નિદર્શાવકાશ લખો. તે પરથી નીચેની ઘટનાઓની સંભાવના લખો :

(1) ઓછામાં ઓછી એક વખત છાપ મળે.

(2) બરાબર બે વખત કાંટો મળે.

(3) વધુમાં વધુ એક વખત છાપ મળે.

5. બે સમતોલ પાસાને એક વખત ઉછાળવાના પ્રયોગ સાથે સંકળાયેલ નીચેની ઘટનાઓની સંભાવના લખો :

(1) A = બંને પાસા પર સમાન અંકો મળે.

(2) B = બંને પાસા પરના અંકોનો સરવાળો 3 વડે વિભાજ્ય છે.

(3) C = બંને પાસા પરનો અંકોનો ગુણાકાર 2 વડે વિભાજ્ય છે.

(4) D = બંને પાસા પરના અંકોનો સરવાળો 10 કરતા વધુ હોય.

6. જેના પર 1થી 100 નંબર લખેલા છે એવી લોટરીની 100 ટિકિટો છે. યાદચ્છિક રીતે એક ટિકિટ ખેંચતા તેના પરનો નંબર 5 અથવા 7નો ગુણક હોય તેની સંભાવના શોધો.

7. 400 સ્ક્રૂ ભરેલા એક ખોખામાં 50 સ્ક્રૂ ખામીવાળા છે. આ ખોખામાંથી એક સ્ક્રૂ યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે, તો પસંદ થયેલ સ્ક્રૂ ખામી વગરનો હોય તેની સંભાવના શોધો. જો બે સ્ક્રૂ પસંદ કરવામાં આવે, તો બંને સ્ક્રૂ ખામીવાળા હોય તેની સંભાવના શોધો.

8. સરખી રીતે ચીપેલાં 52 પત્તાંની થોકડીમાંથી યાદચ્છિક રીતે 13 પત્તાં પસંદ કરવામાં આવે છે. આ 13 પત્તાંમાં 6 પત્તાં ચિત્રવાળાં હોય તેની સંભાવના શોધો.

9. નીચે આપેલું દરેક વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલા વિકલ્પો (a), (b), (c) અથવા (d)માંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરીને ☐ માં લખો :

(1) એક સમતોલ પાસાને ઉછાળતા મળતાં અયુગ્મ અંકો પૈકીનો અંક અવિભાજ્ય સંખ્યા હોય તેની સંભાવના ...... છે. ☐

(a) $\frac{1}{3}$ (b) $\frac{5}{6}$ (c) $\frac{2}{3}$ (d) $\frac{2}{5}$

(2) સરખી રીતે ચીપેલી 52 પત્તાંની થોકડીમાંથી કોઈ પણ બે પત્તા યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે, તો બંને પત્તાં રાજા હોય તેની સંભાવના ...... છે. ☐

(a) $\frac{1}{221}$ (b) $\frac{5}{221}$ (c) $\frac{4}{13}$ (d) $\frac{1}{21}$

(3) એક સમતોલ સિક્કાને ત્રણ વખત ઉછાળતા બરાબર એક કે બે વખત છાપ મળે તેની સંભાવના ...... છે. ☐

(a) $\frac{1}{8}$ (b) $\frac{3}{4}$ (c) $\frac{3}{8}$ (d) $\frac{5}{8}$

(4) એક થેલામાં સાત લાલ અને પાંચ વાદળી દડા છે. તેમાંથી યાદચ્છિક રીતે બે દડા પસંદ કરવામાં આવે તો પસંદ થયેલા દડામાંથી એક દડો લાલ અને એક દડો વાદળી હોય, તો તેની સંભાવના ...... છે. ☐

(a) $\frac{31}{66}$ (b) $\frac{32}{66}$ (c) $\frac{35}{66}$ (d) $\frac{23}{66}$

(5) અંગ્રેજી મૂળાક્ષરો પૈકીના મૂળાક્ષરોમાંથી એક મૂળાક્ષર પસંદ કરવામાં આવે છે. પસંદ થયેલો મૂળાક્ષર સ્વર હોય તેની સંભાવના ...... છે. ☐

(a) $\frac{21}{26}$ (b) $\frac{5}{26}$ (c) $\frac{3}{26}$ (d) $\frac{1}{13}$

(6) A અને B પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ છે. જો P(B) = 0.4 અને P(A) = 0.5, તો $P(A' \cap B')$ ...... છે.

(a) 0.9 (b) 0.1 (c) 0.2 (d) 0.23

(7) 1થી 25 સુધીના અંકોમાંથી પસંદ થયેલ અંક અવિભાજ્ય હોય તેની સંભાવના ...... છે. (દરેક અંકની પસંદગી સમસંભાવી ઘટના છે.)

(a) $\frac{9}{25}$ (b) $\frac{16}{25}$ (c) $\frac{7}{25}$ (d) $\frac{18}{25}$

(8) 8 છોકરા અને 2 છોકરીઓ હારમાં બેઠેલા છે. તે પૈકી બંને છોકરીઓ સાથે ન બેસે તેની સંભાવના ...... છે.

(a) $\frac{1}{5}$ (b) $\frac{4}{5}$ (c) $\frac{3}{5}$ (d) $\frac{2}{5}$

(9) એક સમતોલ પાસાને એક વખત ઉછાળવામાં આવે છે. પાસા પર મળતો અંક 3 વડે વિભાજ્ય હોય તેની સંભાવના ...... છે.

(a) $\frac{1}{6}$ (b) $\frac{2}{3}$ (c) $\frac{1}{3}$ (d) $\frac{5}{6}$

(10) A અને B પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ છે. P(A) = 0.38, તો $P(A \cap B')$ = ...

(a) 0.38 (b) 1 (c) 0.12 (d) 0.62

(11) A, B અને C એ પરસ્પર નિવારક અને નિ:શેષ ઘટનાઓ છે. P(A) = 0.40, P(B) = P(C) તો P(B) = ...

(a) 0.40 (b) 0.60 (c) 0.20 (d) 0.30

(12) બે સમતોલ પાસાને એક સાથે ઉછાળવામાં આવે છે. બંને પાસા પર સમાન અંક મળે તેની સંભાવના ...... છે.

(a) $\frac{1}{36}$ (b) $\frac{1}{18}$ (c) $\frac{1}{6}$ (d) $\frac{3}{28}$

સારાંશ

1. યાદચ્છિક પ્રયોગ, નિદર્શાવકાશ
2. ઘટના, યોગઘટના, છેદઘટના, પૂરકઘટના, નિ:શેષ ઘટના, પરસ્પર નિવારક ઘટના, તફાવત ઘટના
3. યોગનીય ગણવિધેય, સંભાવના વિધેય
4. સંભાવનાની પૂર્વધારણાયુક્ત વ્યાખ્યા
5. સંભાવના વિધેયનાં પ્રમેયો

જવાબો

(જે દાખલામાં ગણતરી કરવાની હોય તેના જ જવાબો આપ્યા છે.)

સ્વાધ્યાય 1.1

1. છે **2.** છે **3.** નથી **4.** નથી **5.** છે **6.** નથી **7.** છે **8.** છે.

સ્વાધ્યાય 1.2

2. $2 + 2 \neq 5$ **2.** ચોરસનું ક્ષેત્રફળ $A = \pi r^2$ વડે મળે નહિ.

3. સમઘન એ સમતલીય આકૃતિ નથી. **4.** જ્યોર્જ કેન્ટરે ગણસિદ્ધાંતનો વિકાસ કર્યો ન હતો.

5. અમિતાભ બચ્ચન ગુજરાત પ્રવાસનના બ્રાન્ડ એમ્બેસેડર નથી. **6.** $2 + 2 \neq 2^2$

7. પ્રાકૃતિક સંખ્યા $x \geq 3$ માટે, $x + x \neq x^2$ **8.** બરફ ગરમ નથી.

સ્વાધ્યાય 1.3

1. (1) $p : 3 + 7 = 5$, $q : 5^2 = 25$ — $p \wedge q$: F

(2) $p : 3 + 7 = 10$, $q : 10^2 = 100$ — $p \wedge q$: T

(3) p : ત્રિકોણને ત્રણ બાજુઓ છે.
q : ત્રિકોણને ત્રણ ખૂણાઓ છે. — $p \wedge q$: T

(4) p : ચતુષ્કોણને ચાર બાજુઓ છે.
q : ચતુષ્કોણને ચાર ખૂણાઓ છે. — $p \wedge q$: T

(5) p : ત્રિકોણના ત્રણેય ખૂણાના માપનો સરવાળો 180 છે.
q : ત્રિકોણના ત્રણેય ખૂણાના માપનો સરવાળો 360 છે. — $p \vee q$: T

(6) $p : 2 + 2 = 5$, $q : 5 + 2 = 25$ — $p \wedge q$: F

(7) p : 1 એ $x^2 - 3x + 2 = 0$ નું બીજ છે.
q : 2 એ $x^2 - 3x + 2 = 0$ નું બીજ છે. — $p \wedge q$: T

(8) $p : 1^3 = 1$, $q : 3^2 = 9$ — $p \vee q$: T

(9) p : 1 એ $x^2 = x$ નું સમાધાન કરે છે.
q : 0 એ $x^2 = x$ નું સમાધાન કરે છે. — $p \wedge q$: T

(10) p : 0 એ સરવાળા માટે તટસ્થ ઘટક છે.
q : 1 એ ગુણાકાર માટે તટસ્થ ઘટક છે. — $p \wedge q$: T

2. (1) $3 + 7 \neq 5$ અથવા $5^2 \neq 25$ (2) $3 + 7 \neq 10$ અથવા $10^2 \neq 100$

(3) ત્રિકોણને ત્રણ બાજુઓ નથી અથવા ત્રિકોણને ત્રણ ખૂણાઓ નથી.

(4) ચતુષ્કોણને ચાર બાજુઓ નથી અથવા ચતુષ્કોણને ચાર ખૂણાઓ નથી.

(5) ત્રિકોણના ખૂણાઓના માપનો સરવાળો 180 નથી અને
ત્રિકોણના ખૂણાઓના માપનો સરવાળો 360 નથી.

(6) $2 + 2 \neq 5$ અથવા $5 + 2 \neq 25$

(7) $x^2 - 3x + 2 = 0$ નું બીજ 1 નથી અથવા બીજ 2 નથી

(8) $1^3 \neq 1$ અને $3^2 \neq 9$ (9) 1 અથવા 0 એ $x^2 = x$ નું સમાધાન કરતું નથી.

(10) 0 એ સરવાળા માટે તટસ્થ ઘટક નથી અથવા 1 એ ગુણાકાર માટે તટસ્થ ઘટક નથી.

3. (1) સમાવેશ (2) નિવારક (3) નિવારક (4) સમાવેશ (5) નિવારક

5. p : 30 એ 2 વડે વિભાજ્ય છે.
q : 30 એ 3 વડે વિભાજ્ય છે. $p \wedge q \wedge r$: T
r : 30 એ 5 વડે વિભાજ્ય છે.
નિષેધ : 30 એ 2 વડે અથવા 3 વડે અથવા 5 વડે વિભાજ્ય નથી.

6. p : 1 એ અવિભાજ્ય છે.
q : 1 એ વિભાજ્ય છે. $p \vee q$: F
નિષેધ : 1 એ અવિભાજ્ય નથી અને વિભાજ્ય પણ નથી.

સ્વાધ્યાય 1.4

1. (1) વૈશ્વિક કારક :
નિષેધ : પ્રાકૃતિક સંખ્યાની a અને bની કોઈક જોડ એવી છે કે $a + b$ યુગ્મ પૂર્ણાંક ન મળે.

(2) વૈશ્વિક કારક :
નિષેધ : કોઈક કરદાતા એવો છે કે જેની પાસે પાનકાર્ડ નથી.

(3) અસ્તિત્વકારક :
નિષેધ : પ્રત્યેક ધનપૂર્ણાંક x માટે $\sqrt{x} \notin R$

(4) અસ્તિત્વકારક
નિષેધ : પ્રત્યેક ઘટક x માટે $x \notin \emptyset$

(5) વૈશ્વિક કારક :
નિષેધ : કોઈક $\theta \in R$ માટે $sin^2\theta + cos^2\theta \neq 1$

(6) વૈશ્વિક કારક :
નિષેધ : કોઈક ખૂણો એવો છે જેની રચના ફક્ત સીધીપટ્ટી અને પરિકરની મદદથી થઈ શકતી નથી.

(7) વૈશ્વિક કારક :
નિષેધ : 18 વર્ષ કરતાં વધુ ઉંમરની કોઈક વ્યક્તિ મતદાર નથી.

(8) વૈશ્વિક કારક :

નિષેધ : N ના કોઈક ઉપગણમાં એકપણ ન્યૂનતમ પૂર્ણાંક મળતો નથી.

(9) વૈશ્વિક કારક :

નિષેધ : જેનો એકમનો અંક શૂન્ય હોય તેવી કોઈક સંખ્યા 10 વડે વિભાજ્ય નથી.

(10) અસ્તિત્વ કારક :

નિષેધ : 5ની ગુણિત દરેક સંખ્યાનો એકમનો અંક 5 છે.

2. (1) p : n અયુગ્મ છે. q : n^2 અયુગ્મ છે. , T

(2) p : n એ 2 વડે વિભાજ્ય છે. q : n એ 4 વડે વિભાજ્ય છે. , F

(3) p : n એ 9 વડે વિભાજ્ય છે. q : n એ 3 વડે વિભાજ્ય છે. , T

(4) p : ચતુષ્કોણના બધા જ ખૂણાનું માપ 90 છે. q : ચતુષ્કોણ લંબચોરસ છે. , T

(5) p : ત્રિકોણના બધા જ ખૂણાનાં માપ સમાન છે. q : ત્રિકોણ સમબાજુ ત્રિકોણ છે. , T

(6) p : ત્રિકોણ સમદ્વિબાજુ છે. q : ત્રિકોણ સમબાજુ છે. , F

(7) p : ત્રિકોણ એ કાટકોણ ત્રિકોણ છે. q : ત્રિકોણના કાટખૂણાની સામેની બાજુ મોટામાં મોટી છે. , T

(8) p : પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ u, v માટે ત્રિકોણની બાજુઓ $2uv$, $u^2 - v^2$, $u^2 + v^2$ $(u > v)$ છે. q : ત્રિકોણ કાટકોણ ત્રિકોણ છે. , T

(9) p : $m, n \in$ N, $m > n$ માટે ત્રિકોણની બાજુઓનાં માપ $2mn$, $m^2 - n^2$, $m^2 + n^2$ છે. q : ત્રિકોણ કાટકોણ ત્રિકોણ છે. , T

(10) p : આપેલ સંખ્યા 1001 વડે વિભાજ્ય છે. q : આપેલ સંખ્યા 7, 11, 13 વડે વિભાજ્ય છે. , T

3. (1) ચતુષ્કોણ ABCD લંબચોરસ હોય તો અને તો જ તે ચોરસ છે. F

(2) ΔABC સમદ્વિબાજુ હોય તો અને તો જ તે સમબાજુ ત્રિકોણ છે. F

(3) ચતુષ્કોણ ABCD ની બધી જ બાજુઓ અને બધા જ ખૂણા એકરૂપ હોય તો અને તો જ તે ચોરસ છે. T

(4) n એ ધન પૂર્ણાંક હોય તો અને તો જ n યુગ્મ પૂર્ણાંક છે. F

(5) વાસ્તવિક સંખ્યા x ધન હોય તો અને તો જ x એ બીજી વાસ્તવિક સંખ્યાનો વર્ગ છે. T

સ્વાધ્યાય 1.5

1. (1) સમાનાર્થી પ્રેરણ : જો n એ 2 વડે વિભાજ્ય ન હોય, તો તે 30 વડે વિભાજ્ય નથી.
   પ્રતીપ : જો n એ 2 વડે વિભાજ્ય હોય, તો n એ 30 વડે વિભાજ્ય છે.
   (2) સમાનાર્થી પ્રેરણ : જો n એ 16 વડે વિભાજ્ય ન હોય, તો તે 8 વડે વિભાજ્ય નથી.
   પ્રતીપ : જો n એ 16 વડે વિભાજ્ય હોય, તો n એ 8 વડે વિભાજ્ય છે.
   (3) સમાનાર્થી પ્રેરણ : જો સંજય પાસ થાય તો તેણે પરીક્ષા આપી હશે.
   પ્રતીપ : જો સંજય નાપાસ થાય, તો તેણે પરીક્ષા આપી નથી.
   (4) સમાનાર્થી પ્રેરણ : જો n નું વર્ગમૂળ પૂર્ણાંક ન હોય, તો n એ કોઈ પૂર્ણાંકનો વર્ગ નથી.
   પ્રતીપ : જો n નું વર્ગમૂળ પૂર્ણાંક હોય, તો n એ કોઈ પૂર્ણાંકનો વર્ગ છે.
   (5) સમાનાર્થી પ્રેરણ : જો n નાં ત્રણ વાસ્તવિક ઘનમૂળ ન હોય, તો n એ પૂર્ણાંકનો ઘન નથી.
   પ્રતીપ : જો n નાં ત્રણ ઘનમૂળ વાસ્તવિક હોય, તો n પૂર્ણાંકનો ઘન છે.
   (6) સમાનાર્થી પ્રેરણ : જો સમતલની બે રેખાઓ સમાંતર હોય, તો તે પરસ્પર છેદે નહિ.
   પ્રતીપ : જો સમતલની બે રેખા સમાંતર હોય નહિ, તો તેઓ પરસ્પર છેદે.
   (7) સમાનાર્થી પ્રેરણ : જો ત્રિકોણના બે ખૂણાઓની સામેની બાજુઓ એકરૂપ હોય, તો તેમની સામેના ખૂણા એકરૂપ હોય.
   પ્રતીપ : જો ત્રિકોણના બે ખૂણાઓની સામેની બાજુઓ એકરૂપ ન હોય, તો તેમની સામેના ખૂણાઓ પણ એકરૂપ ન હોય.
   (8) સમાનાર્થી પ્રેરણ : જો $l \nparallel n$ અને $l \neq n$, તો $l \nparallel m$ અથવા $m \nparallel n$.
   પ્રતીપ : જો $l \parallel n$ અથવા $l = n$, તો $l \parallel m$ અને $m \parallel n$.
   (9) સમાનાર્થી પ્રેરણ : જો $a \neq \pm b$, તો $a^2 \neq b^2$.
   પ્રતીપ : જો $a = \pm b$, તો $a^2 = b^2$. $(a, b \in R)$
   (10) સમાનાર્થી પ્રેરણ : જો $a \neq b$, તો $a^3 \neq b^3$.
   પ્રતીપ : જો $a = b$, તો $a^3 = b^3$. $(a, b \in R)$

સ્વાધ્યાય 1

1. (1) છે (2) છે (3) નથી (4) નથી (5) છે (6) છે (7) નથી (8) નથી
   (9) છે (10) છે
2. (1) વિજ્ઞાન અથવા ગણિત વિકાસ માટે ઉપયોગી નથી.
   (2) કોઈપણ વ્યક્તિ ઇજનેરી અથવા તબીબી અભ્યાસ પસંદ ન કરી શકે.
   (3) n પૂર્ણવર્ગ છે અને n નો અંતિમ અંક 3 છે.
   (4) કોઈ એક અવિભાજ્ય સંખ્યા છે કે જે અયુગ્મ નથી.
   (5) કોઈક અયુગ્મ સંખ્યા એવી છે કે જે અવિભાજ્ય નથી.

(6) કોઈક પૂર્ણાંક સંખ્યા એવી છે કે જે સંમેય સંખ્યા નથી.

(7) દરેક યુગ્મ પૂર્ણાંક અવિભાજ્ય નથી.

(8) $\forall x \in$ R માટે, $x^2 \neq -1$

(9) કોઈક $a \in$ R માટે, $a + 0 \neq a$.

(10) દરેક $a \in$ R માટે, $a \cdot 1 = a$.

(11) કોઈક $x \in$ R એવી મળે કે જેથી $x^2 = x$ થાય.

(12) પ્રત્યેક $x \in$ R માટે, $x^3 \nless x$.

4. (1) પ્રતીપ : જો તમારી પાસે છત્રી હોય, તો બહાર વરસાદ પડે છે.
સમાનાર્થી પ્રેરણ : જો તમારી પાસે છત્રી ન હોય, તો બહાર વરસાદ પડતો નથી.

(2) પ્રતીપ : જો ધનપૂર્ણાંકને ઓછામાં ઓછા ત્રણ અવયવ હોય, તો તે ધન પૂર્ણાંક વિભાજ્ય છે.
સમાનાર્થી પ્રેરણ : જો ધનપૂર્ણાંકને ઓછામાં ઓછા ત્રણ અવયવ ન હોય, તો તે ધનપૂર્ણાંક વિભાજ્ય નથી.

(3) પ્રતીપ : જો $n = 1$, તો n વિભાજ્ય ન હોય અથવા અવિભાજ્ય ન હોય.
સમાનાર્થી પ્રેરણ : જો $n \neq 1$, તો n વિભાજ્ય હોય અને અવિભાજ્ય હોય.

(4) પ્રતીપ : જો ચતુષ્કોણની સામસામેની બાજુઓ એકરૂપ હોય, તો તે ચતુષ્કોણ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.
સમાનાર્થી પ્રેરણ : જો ચતુષ્કોણની સામસામેની બાજુઓ એકરૂપ ન હોય, તો તે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ નથી.

(5) પ્રતીપ : જો ચતુષ્કોણ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ હોય, તો તેના વિકર્ણો પરસ્પર દુભાગે છે.
સમાનાર્થી પ્રેરણ : જો ચતુષ્કોણ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ન હોય, તો તેના વિકર્ણો પરસ્પર દુભાગશે નહિ.

(6) પ્રતીપ : જો હું નવું ચલચિત્ર જોવા જઈશ, તો આજે શુક્રવાર છે.
સમાનાર્થી પ્રેરણ : જો હું નવું ચલચિત્ર જોવા જઈશ નહિ, તો આજે શુક્રવાર નથી.

(7) પ્રતીપ : જો x^2 ધન હોય, તો x ઋણ છે.
સમાનાર્થી પ્રેરણ : જો x^2 ધન ન હોય, તો x ઋણ નથી.

(8) પ્રતીપ : જો xy ધન હોય, તો x અને y ઋણ છે.
સમાનાર્થી પ્રેરણ : જો xy ધન ન હોય, તો x અથવા y ઋણ નથી.

(9) પ્રતીપ : જો ચતુષ્કોણ ચોરસ હોય, તો તે સમકોણ છે.
સમાનાર્થી પ્રેરણ : જો ચતુષ્કોણ ચોરસ ન હોય, તો તે સમકોણ નથી.

(10) પ્રતીપ : $p(a) = 0$ તો $x - a$ એ બહુપદી $p(x)$ નો અવયવ છે.
સમાનાર્થી પ્રેરણ : $p(a) \neq 0$ તો $x - a$ એ બહુપદી $p(x)$ નો અવયવ નથી.

10. (1) b (2) c (3) a (4) b (5) c (6) b (7) a (8) c (9) a (10) b
(11) a (12) a (13) b (14) c (15) d (16) b (17) b

સ્વાધ્યાય 2.1

1. (1) $\{1, 2, 3, ..., 9\}$ (2) $\{6\}$ (3) $\{-1, 6\}$ (4) $\{-1, 0, 1\}$
(5) $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

2. $\emptyset$, $\{1\}$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{1, a\}$, $\{1, b\}$, $\{a, b\}$, A

3. (1) X = $\{a\}$, X = $\{c\}$, X = $\{a, b\}$, X = $\{a, c\}$, X = $\{b, c\}$, X = $\{a, b, c\}$
(2) X = $\{a\}$, X = $\{c\}$, X = $\{a, b\}$, X = $\{a, c\}$, X = $\{b, c\}$
(3) $\{a, b\}$, $\{c, d\}$, $\{a, b, d\}$, $\{a, c, d\}$, $\{b, c, d\}$, A

4. (1), (2), (3)

સ્વાધ્યાય 2.2

1. $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 11, 13\}$, $A \cap B = \{2, 3\}$

4. (1) $\{a, b, c, d, e, f\}$ (2) $\{c, d, e\}$ (3) $\{a, b\}$ (4) $\{f\}$ (5) $\{a, b, f\}$

સ્વાધ્યાય 2.3

1. $A \times B = \{(1, 4), (1, 7), (2, 4), (2, 7), (3, 4), (3, 7)\}$
$B \times A = \{(4, 1), (4, 2), (4, 3), (7, 1), (7, 2), (7, 3)\}$

3. $\{(1, 2), (1, 5), (1, 8), (1, 11), (2, 2), (2, 5), (2, 8), (2, 11),$
$(3, 2), (3, 5), (3, 8), (3, 11), (4, 2), (4, 5), (4, 8), (4, 11)\}$

સ્વાધ્યાય 2.4

1. 125 **2.** માહિતી સાચી નથી. **3.** 11, 6 **4.** 43 **5.** 60

સ્વાધ્યાય 2

1. (1) A = $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$ (2) β = $\{A, E, I, O, U\}$
(3) X = $\{6, 7, 8, 9, 10\}$ (4) X = $\{-1, 1\}$ (5) $\emptyset$

2. (1) A = $\{x \mid x \in N$, x એ 25થી નાનો 5નો ગુણક છે.$\}$
(2) P = $\{x \mid x$ અયુગ્મ પ્રાકૃતિક સંખ્યા છે.$\}$

3. (1) $A - B = \{1, 5, 9\}$ (2) $B - A = \{11\}$
(3) $A \cup B = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$

6. $\emptyset$, $\{1\}$, $\{5\}$, $\{9\}$, $\{1, 5\}$, $\{1, 9\}$, $\{5, 9\}$, A **9.** 40 **10.** 5

12. (1) c (2) b (3) a (4) c (5) a (6) b (7) c (8) c (9) b (10) b
(11) c (12) a (13) d (14) b (15) c (16) b (17) b (18) a (19) c (20) a
(21) a (22) b (23) c (24) c (25) d (26) b (27) a (28) c (29) c (30) b
(31) c

સ્વાધ્યાય 3.1

1. પ્રદેશ = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}, વિસ્તાર = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}

2. S = {(2, 8), (3, 27), (5, 125), (7, 343)}

3. S = {(1, 4), (1, 6), (2, 9), (3, 4), (3, 6), (5, 4), (5, 6)}

4. S = {(5, 3), (6, 4), (7, 5)}

સ્વાધ્યાય 3.2

1. (1) {3, 4, 5, 6,...} (2) {2, 4, 8, 16, 32,...} (3) {5} (4) Z

3. $f(4) = 27$, $f(16) = 275$ **4.** $a = 3$

સ્વાધ્યાય 3.3

2. (1) $R_f = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right\}$ (2) $R_h = \{0\}$

સ્વાધ્યાય 3

1. $fog = \{(4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$, $gof = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$

2. (1) $fog(x) = 2x + 1$ $gof(x) = 2x + 2$

$fof(x) = x + 2$ $gog(x) = 4x$

(2) $fog(x) = 9x^2 + 2$ $gof(x) = 3x^2 + 6$

$fof(x) = x^4 + 4x^2 + 6$ $gog(x) = 9x$

(3) $fog(x) = 4x^2 - 6x + 1$ $gof(x) = 2x^2 + 6x - 1$

$fof(x) = x^4 + 6x^3 + 14x^2 + 15x + 5$ $gog(x) = 4x - 9$

(4) $fog(x) = x$ $gof(x) = x$

$fof(x) = x + 2$ $gog(x) = x - 2$

(5) $fog(x) = 18x^2 + 1$ $gof(x) = 6x^2 + 3$

$fof(x) = 8x^4 + 8x^2 + 3$ $gog(x) = 9x$

3. પ્રદેશ = {1, 2, 3, 4}, વિસ્તાર = {1, 2, 3, 4} **4.** S = {(1, 1), (2, 4), (3, 9), (4, 16)}

6. (1) R (2) $[0, \infty)$ (3) R (4) {1000} (5) $[0, \infty)$

8. $f(9) = 6$, $f(2) = 2 - \sqrt{2}$

9. (1) $fog(x) = (x - 1)^2$ $gof(x) = x^2 - 1$

$fof(x) = x^4$ $gog(x) = x - 2$

(2) $fog(x) = 5x - 5$ $gof(x) = 5x - 25$

$fof(x) = x - 10$ $gog(x) = 25x$

(3) $fog(x) = x^4 + 6x^2 + 6$ $gof(x) = x^4 - 6x^2 + 12$

$fof(x) = x^4 - 6x^2 + 6$ $gog(x) = x^4 + 6x^2 + 12$

10. $fog(x) = x$ $gof(x) = |x|$

$fof(x) = x^4$ $gog(x) = \sqrt[4]{x}$

12. (1) b (2) b (3) c (4) c (5) b (6) b (7) c (8) a (9) a (10) c (11) d

સ્વાધ્યાય 4.1

1. (1) $\left\{\frac{k\pi - 1}{2} \mid k \in z\right\}$ (2) $\left\{(2k+1)\frac{\pi}{6} - \frac{2}{3} \mid k \in z\right\}$ (3) $\left\{(4k-1)\frac{\pi}{2} \mid k \in z\right\}$

(4) $\{2k\pi \mid k \in z\}$ (5) $\left\{(2k+1)\frac{\pi}{6} \mid k \in z\right\}$ (6) $\emptyset$

2. (1) $[-2, 8]$ (2) $\{p \mid p \le 2, p \in R\}$ (3) $[-4, -1]$ (4) $[0, 3]$

(5) $\{p \mid p \ge 1, p \in R\}$ (6) $R - (-5, 1)$

4. $\frac{2x(x+1)}{2x^2+2x+1}$ **5.** 65 **6.** $\frac{5}{13}$

સ્વાધ્યાય 4.2

1. (1) $\frac{4\pi}{3}$ (2) $\frac{5\pi}{12}$ (3) $\frac{121\pi}{540}$ (4) $\frac{221\pi}{360}$

2. (1) 12° (2) $458^\circ\ 10'\ 54''$ (3) $5^\circ\ 37'\ 30''$ (4) $14^\circ\ 19'\ 5''$ **3.** $19^\circ\ 5'\ 27''$

4. 10π **5.** $16^\circ\ 2'\ 11''$ **6.** 22 : 13 **7.** $105^\circ, \frac{7\pi}{12}$ **8.** $\frac{\pi}{4}$ **9.** $\frac{3}{4}$

સ્વાધ્યાય 4.3

1. $\sin\theta = \frac{3}{5}, \cos\theta = \frac{-4}{5}, \tan\theta = \frac{-3}{4}, \sec\theta = \frac{-5}{4}, \cot\theta = \frac{-4}{3}$

2. $\cos\theta = \frac{-1}{5}, \tan\theta = 2\sqrt{6}, \mathrm{cosec}\,\theta = \frac{-5}{2\sqrt{6}}, \cot\theta = \frac{1}{2\sqrt{6}}, \sec\theta = -5$

3. 7 **4.** $\frac{-1}{2}$ **5.** $\sec\theta = \frac{p^2+1}{2p}, \tan\theta = \frac{p^2-1}{2p}, \sin\theta = \frac{p^2-1}{p^2+1}$ **6.** $\frac{1}{2}$

સ્વાધ્યાય 4

14. (1) c (2) d (3) c (4) c (5) b (6) c (7) b (8) b (9) b (10) a
(11) a (12) d (13) a (14) a (15) b (16) b (17) b (18) d (19) b (20) b
(21) d

સ્વાધ્યાય 5.1

1. $\frac{7}{2}$ **2.** 6 **3.** 6 **5.** $\frac{1+3\sqrt{3}}{8}$ **6.** $\frac{90-53\sqrt{3}}{6}$

સ્વાધ્યાય 5.3

1. (1) $n = 2, \alpha = 30^\circ$ (2) $n = 3, \alpha = 45^\circ$ (3) $n = 4, \alpha = 45^\circ$

2. (1) $n = 2, \alpha = 120^\circ$ (2) $n = 2, \alpha = -45^\circ$ (3) $n = 4, \alpha = -30^\circ$

સ્વાધ્યાય 5

4. (1) $n = 3, \alpha = -240^\circ$ (2) $n = 5, \alpha = -200^\circ$ (3) $n = 1, \alpha = -180^\circ$

5. (1) a (2) a (3) b (4) a (5) a (6) a (7) b (8) d (9) a (10) b

સ્વાધ્યાય 6.1

1. $\left(\frac{13}{5}, \frac{-9}{5}\right)$ **2.** (2, 15) **3.** 8:5 **4.** (3, 4), (5, 6) **5.** $\left(\frac{27}{2}, \frac{9}{2}\right), \left(\frac{-3}{2}, \frac{3}{2}\right)$

6. $\frac{-9}{10}$

સ્વાધ્યાય 6.2

1. (7, 0) **2.** મહત્તમ : 27, ન્યૂનતમ : 15 **3.** 6

4. $\overleftrightarrow{AB} = \left\{(x, y) \middle| \begin{matrix} x = -13t + 3 \\ y = -2t + 2 \end{matrix}; t \in R \right\}$; $\overrightarrow{AB} = \left\{(x, y) \middle| \begin{matrix} x = -13t + 3 \\ y = -2t + 2 \end{matrix}; t \geq 0 \right\}$

$\overline{AB} = \left\{(x, y) \middle| \begin{matrix} x = -13t + 3 \\ y = -2t + 2 \end{matrix}; t \in [0, 1] \right\}$;

$\overleftrightarrow{AB} = \left\{(x, y) \middle| \begin{matrix} x = -13t + 3 \\ y = -2t + 2 \end{matrix}; t \in R - [0, 1] \right\}$ **6.** $4x + 3y + 1 = 0$

સ્વાધ્યાય 6.3

1. $\frac{-1}{2}$, 2 **2.** $\frac{-5}{6}, \frac{-3}{5}, -2$ **3.** $\frac{2}{3}$, 14 **5.** $\frac{\pi}{4}$ **9.** $\frac{-2}{7}$ **11.** $\frac{3}{2}$

13. 1, 2 અથવા $\frac{1}{2}$, 1 અથવા -1, -2 અથવા $\frac{-1}{2}$, -1

સ્વાધ્યાય 6.4

1. $x - 5y + 27 = 0$ **2.** $x + y - 4 = 0$ **3.** $x - y + 1 = 0, x + y - 3 = 0$

5. $15x - 10y + 12 = 0$ **7.** $x + \sqrt{3}y - 3 = 0$ **8.** $\sqrt{3}x + y - 4 = 0$

9. $(2 + \sqrt{3})x - y - \sqrt{3} = 0, (2 - \sqrt{3})x - y + \sqrt{3} = 0$

10. $x + y - 4 = 0, x + 9y = 12$

11. $(\sqrt{3} + 1)x + (\sqrt{3} - 1)y = 4, (\sqrt{3} - 1)x - (\sqrt{3} + 1)y = 4$

12. $7x - 4y - 3 = 0, 7x - 4y + 25 = 0, 4x + 7y - 11 = 0$

13. $7x + y - 9 = 0, x - 7y + 13 = 0$

સ્વાધ્યાય 6

3. $3x \pm 4y = 36, -3x \pm 4y = 36$ અથવા $4x \pm 3y = 36, -4x \pm 3y = 36$ **6.** (0, 5), $\left(0, \frac{-15}{2}\right)$

7. $x - y + 1 = 0, x - 7y + 19 = 0$ **8.** (1, −2), (−1, 3)

9. $x + y = 5, 3x = 2y$ **10.** $x + 2y = 6$ **12.** $3x + 4y = 12, 4x + 3y = 12$

13. (8, 0), (−2, 0) **14.** $x = -1$ **15.** $x + 2y = 5$ **16.** $2x - y + 3 = 0$

17. $8x - 3y = 0, 23x + 23y - 11 = 0, 23x - 23y + 5 = 0$

18. (1) d (2) a (3) d (4) b (5) d (6) b (7) d (8) a (9) b (10) d (11) b

સ્વાધ્યાય 7.1

1. 320 **2.** 2240 **3.** 120, 24, 24 **4.** 136 **5.** 2339766 **6.** 90, 90, 225, 225

7. 1204533

સ્વાધ્યાય 7.2

1. (1) 1680 (2) 504 (3) 720 **2.** (1) 720 (2) 20160 (3) 72

4. (1) $r = 13$ (2) $r = 6$ **5.** $n = 6$ **6.** $r = 41$ **8.** $n = 3$ **9.** $n = 5$

10. 64, 24 **11.** 2^n **12.** 4^{10} **13.** 16 **14.** 67600, 58500 **15.** 729

16. $m! \ {}_{m+1}P_n$ **17.** **(i)** $2(n-1)!, n! - 2(n-1)!$ **18.** 96 **19.** 8 **20.** 2880, 1152

21. 518400 **22.** 30, 360 **23.** 24, 20મા **24.** 108 **25.** 24, 24, 24 **26.** 12

સ્વાધ્યાય 7.3

1. ત્રીજા **2.** NIGAA, 60મો **3.** 127 **4.** 5274 **5.** 133320 **6.** 1440

7. 36 **8.** 1440 **9.** 12, 0 **10.** 144 **11.** 24, 108મો **12.** 1260

13. 1663200 **14.** $x = 6$

સ્વાધ્યાય 7.4

1. (1) 28 (2) 10 (3) 210 **2.** $n = 14$ **3.** (i) $r = 7$, (ii) $r = 8$

4. $n = 8, r = 4$ **5.** $n = 12, r = 4$ **7.** $r = 6$ અથવા 8

સ્વાધ્યાય 7.5

1. 80, 31 **2.** (1) 1050 (2) 2534 (3) 420 (4) 469 **3.** (1) 28561 (2) 495 (3) 29900

4. 64 **5.** 756756 **6.** 14968800 **7.** $n! - 2(n-1)!$ **8.** $\frac{n(n-3)}{2}$

9. 11 **10.** (i) $\binom{n}{3}$ (ii) $n(n-4)$ (iii) n (iv) $\frac{n(n-4)(n-5)}{6}$

સ્વાધ્યાય 7

1. (1) 1230 (2) 1 (3) 321 (4) 321 **2.** 168 **3.** 12 **4.** (i) 15 (ii) 120

5. $\binom{n}{r} - \binom{n-2}{r-2}$ **6.** 85 **7.** 1023 **8.** $\frac{mn}{2}(m + n - 2)$

9. (1) d (2) a (3) a (4) c (5) d (6) b (7) a (8) c (9) d (10) b
(11) b (12) c (13) d (14) c (15) a (16) c (17) a (18) d (19) d (20) a
(21) d (22) c (23) a (24) d (25) b

સ્વાધ્યાય 8.1

1. (1) $\emptyset$ (2) $\{..., -12, -11\}$ (3) $(-\infty, -10)$

2. (1) $\{4, 5, 6,...\}$ (2) $\{4, 5, 6,...\}$ (3) $[4, \infty)$

3. (1) $\{4, 5, 6,...\}$ (2) $\{4, 5, 6,...\}$ (3) $[4, \infty)$

4. (1) N (2) $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2,...\}$ (3) $[-3, \infty)$

5. $(5, \infty)$ **6.** $(-\infty, 9)$ **7.** $[9, \infty)$ **8.** $(-\infty, 4]$ **9.** $\left(-\infty, \frac{-23}{11}\right)$

10. $(-\infty, -2)$ **11.** (1) $(-\infty, 3) \cup (7, \infty)$ (2) $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{7}{2}, \infty\right)$

12. (1) $(-\infty, 0) \cup (3, \infty)$ (2) $(-\infty, 2) \cup \left[\frac{11}{5}, \infty\right)$ (3) $\left(\frac{-17}{2}, -5\right)$ **13.** $\left(\frac{-1}{2}, 0\right)$

14. R **15.** R

સ્વાધ્યાય 8.2

1. $(-\infty, -1)$ **2.** $(1, \infty)$ **3.** $(-\infty, -12]$ **4.** $(-\infty, -10.8]$ **5.** $(-\infty, -61]$

6. $\left[\frac{-43}{37}, \infty\right)$ **7.** $\left(-\infty, \frac{67}{65}\right)$ **8.** $\left(-\infty, \frac{8}{11}\right]$ **9.** $(0, 2)$

10. $(1, \infty)$ **11.** $(-\infty, 0)$ **12.** $(-\infty, 0)$

સ્વાધ્યાય 8.3

1. $[3, 5]$ **2.** $(3, 8)$ **3.** $[4, 6)$ **4.** $(4, 6]$ **5.** $\emptyset$ **6.** $(-\infty, -2]$ **7.** $[2, 5]$

8. $\emptyset$ **9.** $(-\infty, -3)$ **10.** $(-1, 8)$

સ્વાધ્યાય 8

1. $R - [-1, 1]$ **2.** $(2, 4]$ **3.** $R - (-8, 8) \cup (-5, 5)$ **4.** $[-2, 2]$ **5.** $\emptyset$

6. $\{x \in R \mid 7.95 < x < 8.85\}$ **7.** (1) $x = 1000$ (2) $x > 1000$

8. 31 અને 33; 33 અને 35; 35 અને 37

9. (1) $(-\infty, 5)$ (2) $R - \{0\}$ (3) $(2, \infty)$ (4) $[3, \infty)$ (5) $\left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{8}\right) - \{0\}$
(6) $\{..., -4, -3, -2\} \cup \{4, 5, 6,...\}$ (7) $[3, \infty)$ (8) $(-\infty, 0) - \{-1\}$

10. (1) $R - [1, 3]$ (2) 0 (3) $x < 4$ (4) $5 > x > -1$ (5) $\emptyset$

11. (1) $x + y \le 1, x - y \le 1$ (2) $x < 5, y < 1, 2x + y \ge 4$

12. (1) d (2) b (3) b (4) c (5) d (6) b (7) b (8) a (9) c (10) c
(11) d (12) a (13) d (14) c (15) a

સ્વાધ્યાય 9.1

1. 5.6 **2.** 40 **3.** 5.27 **4.** 7 **5.** 14.52 **6.** 16 **7.** 4.97 **8.** 5.1

9. 8.6 **10.** 16.44 **11.** 11.33 **12.** 157.92 **13.** 10.16 **14.** 7.35

સ્વાધ્યાય 9.2

1. (i) 3.041 (ii) 10.61 (iii) 3.428 **2.** (i) 2.007 (ii) 6.58

3. (i) $\bar{x} = 9$, $s = 3.88$ (ii) $\bar{x} = 14$, $s = 6.7$ **4.** $\bar{x} = 64$, $s = 1.691$

5. $\bar{x} = 27$, $s^2 = 132.02$, $s = 11.49$ **6.** (i) $\bar{x} = 62$, $s = 14.18$ (ii) $\bar{x} = 93$, $s = 10.27$
(iii) $\bar{x} = 21.5$, $s = 12.84$ **7.** 1351.88 **8.** 4.22

સ્વાધ્યાય 9.3

1. 0.1062 **2.** A વધુ આધારભૂત છે. **3.** ઊંચાઈમાં વધુ ચલન છે. **4.** હા

5. B શેરના ભાવમાં ચલન વધુ છે. **6.** વજનમાં વધુ ચલન છે.

7. રસાયણવિજ્ઞાનમાં સૌથી વધુ અને ગણિતમાં સૌથી ઓછું ચલન છે. **8.** G_2 સમૂહમાં વધુ ચલન છે.

સ્વાધ્યાય 9

1. 4, 9 **2.** 4, 8 **4.** 24, 12 **5.** $\bar{x} = 40.045$, $s = 14.995$

6. (1) d (2) c (3) a (4) b (5) c (6) b (7) b (8) c (9) a (10) c
(11) a (12) d (13) c (14) c (15) a (16) a

સ્વાધ્યાય 10.1

1. U = $\{HR_1, HR_2, HR_3, HG_1, HG_2, HG_3, HG_4, T1, T2, T3, T4, T5, T6\}$

2. U = $\{R_1R_2, R_1W_1, R_1W_2, R_1W_3, R_2W_1, R_2W_2, R_2W_3, W_1W_2, W_1W_3, W_2W_3\}$

3. (1) U = {HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT}
(2) U = {H1, H2, H3, H4, H5, H6, T1, T2, T3, T4, T5, T6}

4. U = {HH, HT, T1, T2, T3, T4, T5, T6}

5. U = {1H, 1T, 3H, 3T, 5H, 5T, 2HH, 2HT, 2TH, 2TT, 4HH, 4HT, 4TH, 4TT, 6HH, 6HT, 6TH, 6TT}

6. U = $\{R_1R_1, R_1R_2, R_1R_3, R_1W_1, R_1W_2, R_1B$
$R_2R_1, R_2R_2, R_2R_3, R_2W_1, R_2W_2, R_2B$
$R_3R_1, R_3R_2, R_3R_3, R_3W_1, R_3W_2, R_3B$
$W_1R_1, W_1R_2, W_1R_3, W_1W_1, W_1W_2, W_1B$
$W_2R_1, W_2R_2, W_2R_3, W_2W_1, W_2W_2, W_2B$
$BR_1, BR_2, BR_3, BW_1, BW_2, BB\}$

7. U = {AB, AC, AD, BC, BD, CD}

8. U = {(–, *abc*), (*abc*, –), (*ab*, *c*), (*ac*, *b*), (*bc*, *a*), (*a*, *bc*), (*b*, *ac*), (*c*, *ab*)}

9. U = {HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH,
TTT1, TTT2, TTT3, TTT4, TTT5, TTT6}

10. $U = \left\{(x, y) \;\middle|\; \begin{array}{l} x = a, b, c, d, e, f \\ y = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \end{array}\right\}$

સ્વાધ્યાય 10.2

1. U = {RR, RB, RY, RW, BR, BB, BY, BW, YR, YB, YY, YW, WR, WB, WY, WW}

A = {RR, BB, YY, WW}

B = {RW, BW, YW, WR, WB, WY}

C = {RW, BW, YW, WR, WB, WY, WW}

D = {RB, RY, RW, BR, BY, BW, YR, YB, YW, WR, WB, WY}

$A \cap B = \emptyset$, $B \cup C = C$, $A \cup D = U$, $A \cap D = \emptyset$, $B \subset C$

A અને D પરસ્પર નિવારક અને નિ:શેષ ઘટનાઓ છે.

2. A = {HHH, HHT, HTH, THH}

B = {TTH, THT, HTT}

C = {HHH, HHT, HTH, THH}

D = {THH, HTH, HHT, HTT, THT, TTH, TTT}

$A \cap B = \emptyset$, $C \cap D' = \{HHH\}$

$A \cup C = A = C$, $B \cap C = \emptyset$, $A' \cup C' = \{HTT, THT, TTH, TTT\}$

3. $A_2 = \{2, 4, 6, ..., 30\}$, $A_3 = \{3, 6, 9, ..., 30\}$,

$A_4 = \{4, 8, 12, 16, ..., 28\}$, $A_5 = \{5, 10, 15, ..., 30\}$

(1) F (2) T (3) T

4. $U = \{W_1W_2, W_1R, W_1G_1, W_1G_2, W_2R, W_2G_1, W_2G_2, G_1G_2, RG_1, RG_2\}$

$A = \{W_1W_2\}$

$B = \{W_1W_2, W_1R, W_1G_1, W_1G_2, W_2R, W_2G_1, W_2G_2\}$

$C = \{W_1R, W_1G_1, W_1G_2, W_2G_1, W_2G_2, W_2R, RG_1, RG_2\}$

5. A = {2, 4, 6,..., 50}, B = {10, 20, 30, 40, 50}, C = {4, 8, 12,..., 48}

6. $U = \left\{(x, y) \,\middle|\, \begin{matrix} x = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \\ y = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \end{matrix}\right\}$

A = {(1, 3), (2, 2), (2, 6), (3, 1), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2), (6, 6)}

B = {(1, 2), (1, 5), (2, 1), (2, 4), (3, 3), (3, 6), (4, 2), (4, 5), (5, 1), (5, 4), (6, 3), (6, 6)}

C = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 2), (5, 1)}

D = {(2, 2), (2, 4), (2, 6), (4, 2), (4, 4), (4, 6), (6, 2), (6, 4), (6, 6)}

7. U = {*aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc*} A = {*ab, ac, ba, ca*}

B = {*aa, bb, cc*} C = {*ac, bc, ca, cb, cc*}

8. $U = \{B_1B_2, B_1B_3, B_1G_1, B_1G_2, B_2B_3, B_2G_1, B_2G_2, B_3G_1, B_3G_2, G_1G_2\}$

$E = \{G_1G_2\}$

$F = \{B_1G_1, B_1G_2, B_2G_1, B_2G_2, B_3G_1, B_3G_2\}$

$G = \{B_1B_2, B_1B_3, B_2B_3, B_1G_1, B_1G_2, B_2G_1, B_2G_2, B_3G_1, B_3G_2\}$

9. A = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, B = {3, 6}, C {5, 6}, D = {1}

$A \cap C = \{5, 6\}$, $B \cup C = \{3, 5, 6\}$, $D' \cup C' = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

સ્વાધ્યાય 10

1. (1) 0.24 (2) 0.11 (3) 0.30 (4) 0.35

2. (1) $\frac{1}{142506}$ (2) $\frac{53130}{142506}$ (3) $\frac{89376}{142506}$ **4.** (1) $\frac{7}{8}$ (2) $\frac{3}{8}$ (3) $\frac{1}{2}$

5. $P(A) = \frac{1}{6}$, $P(B) = \frac{1}{3}$, $P(C) = \frac{3}{4}$, $P(D) = \frac{1}{12}$

6. $\frac{8}{25}$ **7.** $\frac{7}{8}$, $\frac{7}{456}$ **8.** $\frac{\binom{12}{6}\binom{40}{7}}{\binom{52}{13}}$

9. (1) a (2) a (3) b (4) c (5) b (6) b (7) a (8) b (9) c (10) a (11) d (12) c

પારિભાષિક શબ્દો

અચળ વિધેય	Constant function
અનિષ્ટાપત્તિની રીત	Method of Contradiction
અનુચિત ઉપગણો	Improper subsets
અધિગણ	Super set
અયુગ્મ વિધેય	Odd function
અલગગણ	Disjoint sets
અવર્ગીકૃત માહિતી	Ungrouped data
અસમતા	Inequality
અસ્તિત્વ કારક	Existential quantifier
અશક્ય ઘટના	Impossible event
આલેખ	Graph
આવર્તમાન	Period
આવર્તી વિધેય	Periodic function
ઉચિત ઉપગણો	Proper subset
ઉત્તર વિધાન	Consequent
ઊગમબિંદુનું સ્થાનાંતર	Shifting of origin
એકમ ઘટક	Unit element
એકમ વર્તુળ	Unit circle
એકાકી ગણ	Singleton
અંતર સૂત્ર	Distance formula
અંતરાલ	Interval
અંત્યબિંદુ	End point
અંતઃવિભાજન	Interval Division
અંતઃખંડ	Intercepts
કાર્તેઝિય ગુણાકાર	Cartesian Product
ક્રમચય	Permutation
ક્રમનો નિયમ	Commutative law
કિરણ આકૃતિ	Arrow diagram
ખાલી ગણ	Empty set
ખાલી સંબંધ	Void relation

ગણ વિધેય	Set function
ગણોનો કાર્તેઝિય ગુણાકાર	Cartesian product of sets
ગાણિતીક સ્વીકાર્ય વિધાન	Mathematically acceptable statement
ગુણધર્મની રીત	Property method
ઘટક (સભ્ય)	Element
ઘટના	Event
ઘાતગણ	Power set
ચલનાંક	Coefficient of variation
ચિહ્ન વિધેય	Signum function
છેદગણ	Intersection set
છેદક્રિયા	Intersection operation
જૂથનો નિયમ	Associative law
તટસ્થ ઘટક	Neutral element
તદેવ વિધેય	Identity function
તફાવત ગણ	Difference set
તફાવત ઘટના	Difference event
તાર્કિક કારકો	Logical connectives
દ્વિપ્રેરણ	Biconditional statement
ન્યૂનતમ પૂર્ણાંક વિધેય	Ceiling function
નિવારક વિકલ્પ	Exclusive or
નિષેધ	Negation
નિઃશેષ ઘટનાઓ	Exhaustive events
પરંપરિતા	Transitivity
પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ	Mutually exclusive events
પૂરક ઘટના	Complementary event
પૂરકક્રિયા	Complementation
પૂર્વ-પ્રતિબિંબ	Pre-image
પૂર્વવિધાન	Antecedent
પ્રતીપ (શરતી વિધાન)	Converse
પ્રેરણ	Implication
પ્રદેશ	Domain
પ્રતિબિંબ	Image
પ્રચલ સમીકરણો	Parametic equations

પ્રસાર	Dispersion
પ્રસારમાનનાં માપ	Measures of dispersion
પ્રમાણિત વિચલન	Standard deviation
બહિર્વિભાજન	External Division
બહુપદી વિધેય	Polynomial function
મધ્યક	Mean
મધ્યસ્થ	Median
મહત્તમ પૂર્ણાંક વિધેય	Greatest integer function
માનાંક વિધેય	Modulus function
મુખ્ય આવર્તમાન	Principal period
મૂળભૂત ઘટનાઓ	Elementary event
ઢાળ	Slope
યાદીની રીત	Listing method / Roster method
યોગક્રિયા	Union operation
યોગગણ	Union set
યુગ્મ વિધેય	Even function
રિક્ત ગણ	Empty set
રેખાખંડનું મધ્યબિંદુ	Mid-point of a line segment
રેખાખંડનું વિભાજન	Division of a line segment
વર્ગીકૃત માહિતી	Grouped data
વર્તુળાકાર ગોઠવણી	Circular permutation
વિચરણ	Variance
વિધેય	Function
વિધાન	Statement
વિભાજન સૂત્ર	Division formula
વિભાજન બિંદુના યામ	Coordinates of the point of division
વિસ્તાર	Range
વિવૃત્ત અંતરાલ	Open interval
વિયોજન	Disjunction
વૈશ્વિક કારક	Universal quantifier
સત્યમૂલ્ય	Truth value
સમાનાર્થી પ્રેરણ	Contrapositive
સમાન ગણો	Equal sets

સમાવેશ વિકલ્પ	Inclusive or
સહપ્રદેશ	Codomain
સમાન વિધેય	Equal function
સમાંતર	Parallel
સમસ્વરૂપ	Identical
સરેરાશ વિચલન	Average deviation
સંભાવના	Probability
સમસંભાવી ઘટનાઓ	Equiprobable event
સાદું વિધાન	Simple statement
સાર્વત્રિક ગણ	Universal set
સાર્વત્રિક સંબંધ	Universal relation
સુરેખ અસમતા	Linear Inequality
સુરેખ ક્રમચય	Linear permutation
સંચય	Combination
સંયુક્ત ઘટના	Compound event
સંયુક્ત વિધાન	Compound statement
સંયોજન	Conjuction
સંવૃત્ત અંતરાલ	Closed interval
સંવૃત્તતા	Closure
સંબંધ	Relation
સંબંધનું દૃશ્ય નિરૂપણ	Visual Presentation of a relation
સંમિતતા	Symmetry
સંમેય વિધેય	Rational function
સંયોજિત વિધેય	Composition of function
સંમિત તફાવત ગણ	Symmetric difference set
સ્વયંઘાતી નિયમ	Idempotent law
સ્વવાચકતા	Reflexivity
ત્રય	Triplet
ત્રિકોણમિતીય બિંદુ વિધેય	Trigonometric point function