ବୃତ୍ତ

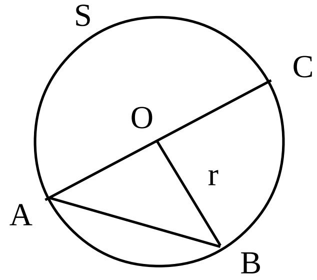
(CIRCLE)

2.1 ମୌଳିକ ଧାରଣା (Basic Concepts) :

ତୁମେ ପୂର୍ବରୁ କମ୍ପାସ୍ ସାହାଯ୍ୟରେ ବୃତ୍ତ ଅଙ୍କନ କରି ତା' ମଧ୍ୟରେ ତ୍ରିଭୁଜ ବର୍ଗଚିତ୍ର ଆଦି ଅନ୍ତର୍ଲିଖନ କରିବା ଶିଖିଛ । ଏହି ଅଧ୍ୟାୟରେ ଆମେ ବୃତ୍ତ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ଅଧିକ ତଥ୍ୟ ଆଲୋଚନା କରିବା । ସରଳରେଖା, ତ୍ରିଭୁଜ, ଆୟତଚିତ୍ର ଓ ବର୍ଗଚିତ୍ର ପରି ବୃତ୍ତ ଏକ ସମତଳରେ ଥିବା କେତେଗୁଡ଼ିଏ ବିନ୍ଦୁର ସେଟ୍ ବା ସମାହାର ଅଟେ । ବର୍ତ୍ତମାନ ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କର ସମାହାରରେ ବୃତ୍ତ ଗଠିତ ତାହା ଆମେ ବୃତ୍ତର ସଂଜ୍ଞାରୁ ଜାଣିବା ।

ସଂଜ୍ଞା : ଗୋଟିଏ ସମତଳରେ ଅବସ୍ଥିତ କୌଣସି ଏକ ଦତ୍ତ ବିନ୍ଦୁଠାରୁ ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଦୂରତାରେ ଉକ୍ତ ସମତଳରେ ଅବସ୍ଥିତ ସମସ୍ତ ବିନ୍ଦୁର ସେଟ୍‌କୁ ବୃତ୍ତ (Circle) କୁହାଯାଏ ।

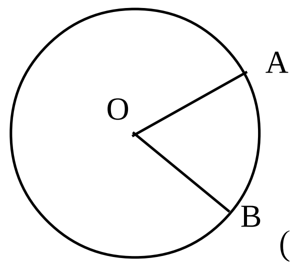
ଚିତ୍ର 2.1 ରେ ବହି ପୃଷ୍ଠାର ସମତଳରେ O ଏକ ଦତ୍ତ ବିନ୍ଦୁ । O ବିନ୍ଦୁ ଠାରୁ r ଏକକ ଦୂରତାରେ ପୂର୍ବୋକ୍ତ ସମତଳରେ ଥିବା ସମସ୍ତ ବିନ୍ଦୁର ସେଟ୍ S କୁ ଆମେ ଏକ ବୃତ୍ତ କହିବା । S ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ ଯେକୌଣସି ବିନ୍ଦୁ O ଠାରୁ r ଦୂରତାରେ ଅଛି । ଅର୍ଥାତ୍ OA = OB = OC = r । ଏଠାରେ O କୁ ବୃତ୍ତ S ର **କେନ୍ଦ୍ର (Centre)** ଏବଂ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଦୂରତା r କୁ ବୃତ୍ତର **ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ (radius)** କୁହାଯାଏ ।



(ଚିତ୍ର 2.1)

ସୁତରାଂ କେବଳ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ଓ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ଦତ୍ତ ଥିଲେ ବୃତ୍ତଟି ସମ୍ପୂର୍ଣ୍ଣ ରୂପେ ନିର୍ଣ୍ଣିତ ହୋଇଥାଏ । ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ କହିଲେ ଆମେ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ଓ ବୃତ୍ତ ଉପରିସ୍ଥ ଯେ କୌଣସି ବିନ୍ଦୁର ଦୂରତାକୁ ବୁଝିଥାଉ ଏବଂ ବୃତ୍ତର ଏକ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ କହିଲେ ବୃତ୍ତ ଉପରିସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ P ଏବଂ କେନ୍ଦ୍ର O ର ସଂଯୋଜକ ରେଖାଖଣ୍ଡକୁ ବୁଝିଥାଉ । ଅର୍ଥାତ **ବୃତ୍ତର 'ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ' ଏକ ଧନାତ୍ମକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ଏବଂ 'ଏକ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ' ହେଉଛି ଏକ ରେଖାଖଣ୍ଡ ।**

ଯଥା : ଚିତ୍ର 2.2ରେ ଥିବା ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ହେଉଛି 2 ସେ.ମି. (ଯଦି OA = 2 ସେ.ମି.) ଏବଂ $\overline{OA}$ ଓ $\overline{OB}$ ହେଉଛନ୍ତି ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତର ଦୁଇଟି ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ।



(ଚିତ୍ର 2.2)

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ :

1. ଆମର ସମସ୍ତ ଆଲୋଚନାରେ ବୃତ୍ତ ଏବଂ ଅନ୍ୟ ସମସ୍ତ ବିନ୍ଦୁ ଏକ ସମତଳରେ ଅବସ୍ଥିତ ହେବେ ।

2. ପ୍ରମେୟ 2.2ରେ ଆମେ ପ୍ରମାଣ କରିବା ଯେ ଏକ ସରଳରେଖାରେ ନ ଥିବା ଯେକୌଣସି ତିନୋଟି ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଗୋଟିଏ ମାତ୍ର ବୃତ୍ତ ଅଙ୍କନ କରାଯାଇପାରିବ । ତେଣୁ ବୃତ୍ତ ଉପରିସ୍ଥ ଯେକୌଣସି ତିନୋଟି ବିନ୍ଦୁ ଦ୍ୱାରା ବୃତ୍ତଟି ସୂଚିତ ହୁଏ । ଉପରୋକ୍ତ ବୃତ୍ତ S କୁ (ଚିତ୍ର 2.1) ଆମେ ABC ବୃତ୍ତ ନାମରେ ପ୍ରକାଶ କରିପାରିବା ।

3. ABC ବୃତ୍ତକୁ ସାଙ୍କେତିକ ଚିହ୍ନ 'ABC ⊙' ଦ୍ୱାରା ମଧ୍ୟ ପ୍ରକାଶ କରାଯାଏ ।

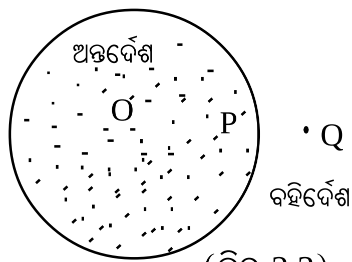
ଜ୍ୟା (Chord) : ବୃତ୍ତର ଦୁଇଟି ପୃଥକ୍ ବିନ୍ଦୁର ସଂଯୋଜକ ରେଖାଖଣ୍ଡକୁ ବୃତ୍ତର ଏକ ଜ୍ୟା କୁହାଯାଏ ।

ବ୍ୟାସ (Diameter) : ଯେଉଁ ଜ୍ୟାରେ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ଅବସ୍ଥିତ ସେହି ଜ୍ୟାକୁ ବୃତ୍ତର ଏକ ବ୍ୟାସ କୁହାଯାଏ ।

ଚିତ୍ର 2.1ରେ $\overline{AB}$ ଏକ ଜ୍ୟା ଏବଂ $\overline{AC}$ ଏକ ବ୍ୟାସ । ଯେହେତୁ ବୃତ୍ତର ପ୍ରତ୍ୟେକ ବିନ୍ଦୁ କେନ୍ଦ୍ରଠାରୁ ସମଦୂରବର୍ତ୍ତୀ, AO = OC । ଯଦି ABC ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ r = 2 ସେ.ମି. ହୁଏ ତେବେ AC = AO + OC = 4 ସେ.ମି. ହେବ । ଅର୍ଥାତ୍ **ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତରେ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ r ଏକକ ହେଲେ ବ୍ୟାସ 2r ଏକକ ହେବ ।** ଫଳରେ ବୃତ୍ତର 'ଏକ ବ୍ୟାସ' ହେଉଛି ଏକ ରେଖାଖଣ୍ଡ ଯାହାର ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁ ଦ୍ୱୟ ବୃତ୍ତ ଉପରିସ୍ଥ ଏବଂ ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ହେଉଛି କେନ୍ଦ୍ର । ମାତ୍ର 'ବ୍ୟାସ' ହେଉଛି ଏକ ଧନାତ୍ମକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା । ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ପ୍ରତ୍ୟେକ ବ୍ୟାସର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ । ଚିତ୍ର 2.1ରେ A ବିନ୍ଦୁ ମଧ୍ୟ ଦେଇ ଅନେକ ଗୁଡ଼ିଏ ଜ୍ୟା ଅଙ୍କନ କରି ଲକ୍ଷ୍ୟ କରିପାରିବ ଯେ $\overline{AC}$ ବ୍ୟାସର ଦୈର୍ଘ୍ୟ, ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତର ଯେକୌଣସି ଜ୍ୟାର ଦୈର୍ଘ୍ୟଠାରୁ ବୃହତ୍ତର । ଅର୍ଥାତ୍ **ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତରେ ଏକ ବ୍ୟାସ ହେଉଛି ଏହାର ଦୀର୍ଘତମ ଜ୍ୟା ।**

ବୃତ୍ତର ଅନ୍ତର୍ଦେଶ ଓ ବହିର୍ଦେଶ :

ଏକ ବୃତ୍ତର ସମତଳରେ ଅବସ୍ଥିତ ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କର ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ରଠାରୁ ଦୂରତା ପରିପ୍ରେକ୍ଷୀରେ ସମତଳଟି ତିନୋଟି ଅଂଶରେ ବିଭକ୍ତ ହୁଏ । ଯଥା :



(ଚିତ୍ର 2.3)

(i) **ଅନ୍ତର୍ଦେଶ** : ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ରଠାରୁ ବୃତ୍ତର ସମତଳ ଉପରିସ୍ଥ ଯେଉଁ ସମସ୍ତ ବିନ୍ଦୁର ଦୂରତା ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧଠାରୁ କ୍ଷୁଦ୍ରତର ସେଗୁଡ଼ିକୁ ବୃତ୍ତର **ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ (Interior Points)** କୁହାଯାଏ । ଅର୍ଥାତ୍ କେନ୍ଦ୍ର ବିନ୍ଦୁ O ଥିବା ଏକ ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ r ଏକକ ହେଲେ ଉକ୍ତ ସମତଳସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ P ଲାଗି ଯଦି OP < r ହୁଏ ତେବେ P ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତର ଏକ ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ ହେବ । ଚିତ୍ର 2.3 ରେ P ଏକ ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ । ବୃତ୍ତର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କର ସମାହାରକୁ ବୃତ୍ତର **ଅନ୍ତର୍ଦେଶ (Interior)** କୁହାଯାଏ ।

(ii) **ବହିର୍ଦେଶ –** ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ରଠାରୁ ବୃତ୍ତର ସମତଳ ଉପରିସ୍ଥ ଯେଉଁ ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କର ଦୂରତା ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧଠାରୁ ବୃହତ୍ତର ସେଗୁଡ଼ିକୁ ବୃତ୍ତର **ବହିଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ (Exterior points)** କୁହାଯାଏ । ଅର୍ଥାତ୍ ଏକ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର O ଏବଂ

ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ r ଏକକ ହେଲେ ଯଦି ବୃତ୍ତର ସମତଳସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ Q ଲାଗି OQ > r ହୁଏ ତେବେ Q ବୃତ୍ତର ଏକ ବହିଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ । ଚିତ୍ର 2.3ରେ Q ଏକ ବହିଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ । ବୃତ୍ତର ବହିଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କର ସମାହାରକୁ ବୃତ୍ତର **ବହିର୍ଦ୍ଦେଶ (exterior)** କୁହାଯାଏ । ଏଠାରେ ମନେରଖିବା ଉଚିତ ହେବ ଯେ, ବୃତ୍ତ ଓ ଏହାର ଅନ୍ତର୍ଦ୍ଦେଶ ବ୍ୟତୀତ ସମତଳର ଅନ୍ୟ ସମସ୍ତ ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କୁ ବୃତ୍ତର ବହିଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ କୁହାଯାଏ ।

(iii) **ବୃତ୍ତ** ଉପରିସ୍ଥ ସମସ୍ତ ବିନ୍ଦୁ ।

ଚିତ୍ର 2.3ରେ ଚିତ୍ରିତ ଅଂଶଟି ବୃତ୍ତର ଅନ୍ତର୍ଦ୍ଦେଶ । $\overline{AB}$ ବୃତ୍ତର ଯେକୌଣସି ଜ୍ୟା ହେଲେ A ଓ B ପ୍ରାନ୍ତ ଦ୍ୱୟ ବ୍ୟତୀତ ଜ୍ୟାର ଅନ୍ୟ ସମସ୍ତ ବିନ୍ଦୁ ବୃତ୍ତର ଅନ୍ତର୍ଦ୍ଦେଶରେ ଅବସ୍ଥିତ । ଏହାର ପ୍ରମାଣ ପ୍ରମେୟ - 2.1, ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - 2ର ପରବର୍ତ୍ତୀ ଅନୁଚ୍ଛେଦ ଦେଖ) ।

ମନ୍ତବ୍ୟ – ଏକ ବୃତ୍ତର ଅନ୍ତର୍ଦ୍ଦେଶ ଏକ **ଉତ୍ତଳ** ସେଟ୍ ଅଟେ ।

ସଂଜ୍ଞା : 1. **ସର୍ବସମ ବୃତ୍ତ :** ଏକାଧିକ ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ସମାନ ହେଲେ ସେମାନଙ୍କୁ **ସର୍ବସମ ବୃତ୍ତ (Congruent Circles)** କୁହାଯାଏ ।

2. **ସର୍ବସମ ଜ୍ୟା :** ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତରେ ବା ଏକାଧିକ ବୃତ୍ତରେ ଯେଉଁ ଜ୍ୟାମାନଙ୍କର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସମାନ ସେମାନଙ୍କୁ **ସର୍ବସମ ଜ୍ୟା (Congruent Chords)** କୁହାଯାଏ ।

ପରବର୍ତ୍ତୀ ସମୟରେ ଆମେ ଏକାଧିକ ସର୍ବସମ ବୃତ୍ତରେ ଥିବା ସର୍ବସମ ଜ୍ୟା ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଆଲୋଚନା କରିବା ।

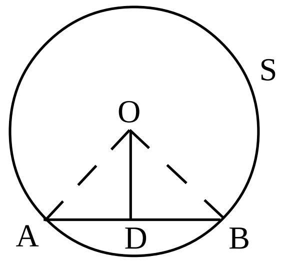
2.2 ଜ୍ୟା ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ କେତେକ ଉପପାଦ୍ୟ :

ଉପପାଦ୍ୟ - 7

ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ରରୁ ଏହାର ବ୍ୟାସ ଭିନ୍ନ ଏକ ଜ୍ୟା ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବ ଉକ୍ତ ଜ୍ୟାକୁ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରେ ।

[The perpendicular drawn from the centre of a circle to a chord, other than a diameter, bisects the chord.]

ଦତ୍ତ : S ବୃତ୍ତରେ $\overline{AB}$ ବ୍ୟାସ ଭିନ୍ନ ଏକ ଜ୍ୟା, ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର O ଠାରୁ $\overline{AB}$ ପ୍ରତି ଲମ୍ବ $\overline{OD}$ ।



(ଚିତ୍ର 2.4)

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : AD = DB

ଅଙ୍କନ : $\overline{OA}$ ଓ $\overline{OB}$ ଅଙ୍କନ କର ।

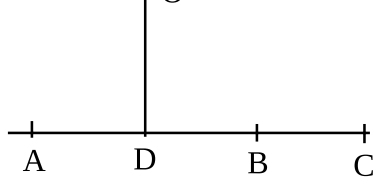
ପ୍ରମାଣ : Δ OAD ଏବଂ Δ OBD ମଧ୍ୟରେ

{ OA = OB (ଏକା ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ), $\overline{OD}$ ସାଧାରଣ ବାହୁ ।
  ∠ODA ≅ ∠ODB (ପ୍ରତ୍ୟେକ ଏକ ସମକୋଣ)

∴ ΔOAD ≅ ΔOBD (ସମକୋଣ-କର୍ଣ୍ଣ - ବାହୁ)

∴ AD = DB (ପ୍ରମାଣିତ)

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ : ଗୋଟିଏ ସରଳରେଖା ବୃତ୍ତକୁ ଦୁଇଟିରୁ ଅଧିକ ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ ନାହିଁ ।



(ଚିତ୍ର 2.5)

ପ୍ରମାଣ : ଯଦି ସମ୍ଭବ ହୁଏ ତେବେ ସରଳରେଖାଟି ବୃତ୍ତକୁ କ୍ରମାନ୍ୱୟରେ ତିନୋଟି ଭିନ୍ନ ବିନ୍ଦୁ A,B ଓ C ରେ ଛେଦ କରୁ । O ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ଏବଂ $\overline{OD}$, $\overline{AB}$ ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ହେଉ ।

ବର୍ତ୍ତମାନ $\overline{AB}$ ଓ $\overline{AC}$ ବୃତ୍ତର ଦୁଇଟି ଜ୍ୟା ଏବଂ ଉପପାଦ୍ୟ - 7ରୁ ଏହା ସୁସ୍ପଷ୍ଟ ଯେ AD = DB ଏବଂ AD = DC । ସୁତରାଂ DB = DC । ମାତ୍ର D-B-C ହେତୁ ଏହା ଅସମ୍ଭବ । ସୁତରାଂ ସରଳରେଖାଟି ବୃତ୍ତକୁ ଦୁଇଟିରୁ ଅଧିକ ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରିବ ନାହିଁ ।

(ସୂଚନା : ଏଠାରେ ଆମେ ପ୍ରାମାଣ୍ୟର ବିପରୀତ ଉକ୍ତିକୁ ଆଧାର କରି ତର୍କ ଦ୍ୱାରା ଏକ ଅସମ୍ଭବ ପରିସ୍ଥିତିରେ ପହଞ୍ଚିଲେ; ଯାହା ପ୍ରାମାଣ୍ୟର ସତ୍ୟତାକୁ ପ୍ରମାଣ କରୁଛି । ଏହି ପ୍ରକାର ପ୍ରମାଣକୁ ଗଣିତରେ **ଅସମ୍ଭବାୟନ ପ୍ରଣାଳୀ (Method of contradiction)** କୁହାଯାଏ ।

ପ୍ରମେୟ 2.1 (ଉପପାଦ୍ୟ -7 ର ବିପରୀତ କଥନ ଓ ପ୍ରମାଣ) :

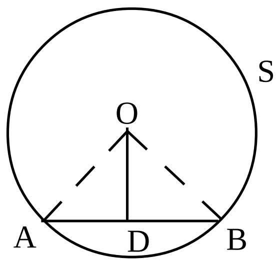
କୌଣସି ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସ ଭିନ୍ନ ଏକ ଜ୍ୟାର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ଓ କେନ୍ଦ୍ରକୁ ଯୋଗ କରୁଥିବା ରେଖା ଉକ୍ତ ଜ୍ୟା ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ଅଟେ ।

[The line joining the centre of a circle to the midpoint of a chord, other than a diameter, is perpendicular to the chord.]

ଦତ୍ତ : S ବୃତ୍ତରେ $\overline{AB}$ ବ୍ୟାସ ଭିନ୍ନ ଏକ ଜ୍ୟା, O ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ଏବଂ D, $\overline{AB}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ।

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : $\overleftrightarrow{OD} \perp \overline{AB}$

ଅଙ୍କନ : $\overline{OA}$ ଓ $\overline{OB}$ ଅଙ୍କନ କର ।



(ଚିତ୍ର 2.6)

ପ୍ରମାଣ : Δ OAD ଏବଂ Δ OBD ମଧ୍ୟରେ

$\because$ { OA = OB (ଏକା ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ)
AD = DB ($\because$ D, $\overline{AB}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ), $\overline{OD}$ ସାଧାରଣ ବାହୁ ।

$\therefore \Delta ADO \cong \Delta BDO$ (ବାହୁ- ବାହୁ - ବାହୁ)

$\Rightarrow m\angle ADO = m\angle BDO$

କିନ୍ତୁ $m\angle ADO + m\angle BDO = 180^0$ (ସନ୍ନିହିତ ପରିପୂରକ କୋଣ)

$\Rightarrow m\angle ADO = m\angle BDO = 90^0$ ଅର୍ଥାତ୍ $\overleftrightarrow{OD} \perp \overline{AB}$ (ପ୍ରମାଣିତ)

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - 1 :

ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ଏହାର ଯେକୌଣସି ଜ୍ୟାର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ଲମ୍ବ ଉପରେ ଅବସ୍ଥିତ । କାରଣ ଯେ କୌଣସି ଜ୍ୟାର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁଠାରେ କେବଳ ଗୋଟିଏ ମାତ୍ର ଲମ୍ବ ଅଙ୍କିତ ହୋଇପାରିବ ।

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - 2 :

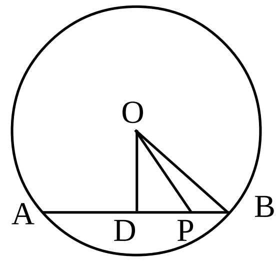
(i) ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ଦୁଇଟି ଅସମାନ୍ତର ଜ୍ୟାର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ଲମ୍ବ ଦ୍ୱୟ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ରରେ ମିଳିତ ହୁଅନ୍ତି । କାରଣ ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - 1 ଅନୁଯାୟୀ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ପ୍ରତ୍ୟେକ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ଲମ୍ବ ଉପରେ ଅବସ୍ଥିତ ।

(ii) ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ଦୁଇଟି ସମାନ୍ତର ଜ୍ୟାର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ଲମ୍ବଦ୍ୱୟ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ଦେଇ ଯାଇଥିବା ଏକ ସରଳରେଖାରେ ଅବସ୍ଥିତ (କାହିଁକି ?) ।

ବର୍ତ୍ତମାନ ତୁମେ ପ୍ରମାଣ କରିପାରିବ ଯେ $\overline{AB}$ ଏକ ବୃତ୍ତର ଜ୍ୟା ହେଲେ A ଓ B ଭିନ୍ନ ଜ୍ୟାଟିର ଅନ୍ୟ ସମସ୍ତ ବିନ୍ଦୁ ବୃତ୍ତର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ । ଚିତ୍ର 2.7ରେ P, $\overline{AB}$ ଜ୍ୟା ଉପରେ ପ୍ରାନ୍ତ ବିନ୍ଦୁ ଭିନ୍ନ ଯେକୌଣସି ଏକ ବିନ୍ଦୁ । $\overline{OD} \perp \overline{AB}$ ହେଲେ $OP^2 = OD^2 + DP^2 \Rightarrow OP^2 < OD^2 + DB^2 \Rightarrow OP^2 < OB^2$ ।

ସୁତରାଂ OP < ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ । ଅର୍ଥାତ୍ P ବୃତ୍ତର ଏକ ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ । (ଚିତ୍ରରେ D-P-B ନିଆଯାଇଛି।

ଯଦି P-D-B ହୁଏ ତେବେ ମଧ୍ୟ ପ୍ରମାଣ ଅନୁରୂପ ହେବ ।)



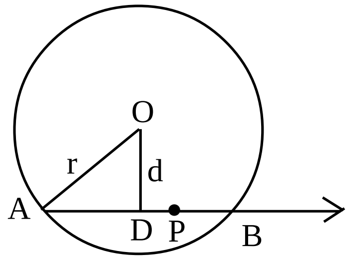
(ଚିତ୍ର 2.7)

ଯଦି A ବୃତ୍ତ ଉପରିସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ ଓ P ବୃତ୍ତର ଏକ ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ ହୁଏ ତେବେ $\overrightarrow{AP}$ ବୃତ୍ତକୁ ଅନ୍ୟ ଏକ ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରିବ । ଏହା ସ୍ୱତଃସିଦ୍ଧ ମନେ ହେଉଥିଲେ ହେଁ ଏହାର ଯୁକ୍ତିମୂଳକ ପ୍ରମାଣ କିପରି କରାଯାଇପାରେ ଦେଖିବା । ଚିତ୍ର 2.8ରେ ଥିବା ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର O ଏବଂ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ r ।

P ବୃତ୍ତର ଏକ ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ, $\overline{OD} \perp \overrightarrow{AP}$ ଏବଂ OD = d ହେଉ ।

ତେଣୁ $d \le OP < r$ ହେବ । ସୁତରାଂ $\sqrt{r^2 - d^2}$ ଏକ ଧନାତ୍ମକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା । $\therefore$ $\overrightarrow{AP}$ ଉପରେ ଏପରି ଏକ ବିନ୍ଦୁ B ଅଛି ଯେପରିକି D-P-B (କିମ୍ବା P-D-B) ଏବଂ DB = $\sqrt{r^2 - d^2}$ ।

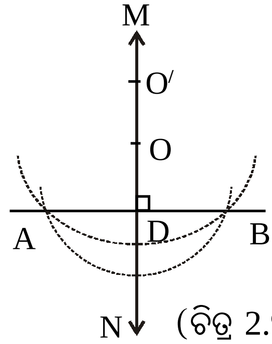
ବର୍ତ୍ତମାନ OB = $\sqrt{OD^2 + DB^2} = r \Rightarrow$ B ବୃତ୍ତ ଉପରିସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ ।



(ଚିତ୍ର 2.8)

ଆମେ ଜାଣୁ, ଗୋଟିଏ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସରଳରେଖା ଅଙ୍କନ କରିବା ନିମନ୍ତେ ଆମେ ଉକ୍ତ ସରଳରେଖା ଉପରିସ୍ଥ ଅତି କମ୍‌ରେ ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁର ଅବସ୍ଥିତି ଜାଣିବା ଆବଶ୍ୟକ । ଅନ୍ୟ ପକ୍ଷରେ ଦୁଇଟି ଦତ୍ତ ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଆମେ କେବଳ ଗୋଟିଏ ମାତ୍ର ସରଳରେଖା ଅଙ୍କନ କରିପାରିବା । ବର୍ତ୍ତମାନ ପ୍ରଶ୍ନ ଉଠେ ଯେ ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତ ଅଙ୍କନ କରିବା ନିମନ୍ତେ ଅତି କମ୍‌ରେ କେତୋଟି ବିନ୍ଦୁର ଆବଶ୍ୟକ ଜାଣିବା ।

ଚିତ୍ର 2.9 ରେ A ଓ B ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁ । D, $\overline{AB}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ଏବଂ $\overleftrightarrow{MN}$ ରେଖା D ବିନ୍ଦୁରେ $\overline{AB}$ ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ହୁଅନ୍ତୁ ।



(ଚିତ୍ର 2.9)

ପ୍ରମେୟ 2.1 ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - 1 ଅନୁସାରେ $\overleftrightarrow{MN}$ ଉପରିସ୍ଥ ଯେକୌଣସି ବିନ୍ଦୁ O, A ଏବଂ B ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଯାଇଥବା (ଅର୍ଥାତ୍ $\overline{AB}$ ଜ୍ୟା ଥିବା) କୌଣସି ଏକ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ହେବ । ଏହା ସୁସ୍ପଷ୍ଟ ଯେ $\overline{AB}$ ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତର ଏକ ଜ୍ୟା ହେବ ଏବଂ OA = OB = ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ । ଅର୍ଥାତ୍ ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁ A ଓ B ମଧ୍ଯ ଦେଇ ଅସଂଖ୍ୟ ବୃତ୍ତ ରହିଛି । ପରବର୍ତ୍ତୀ ପ୍ରମେୟରେ ଆମେ ପ୍ରମାଣ କରିବା ଯେ ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ବୃତ୍ତ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ନିମନ୍ତେ ଅତି କମ୍‌ରେ ତିନୋଟି ବିନ୍ଦୁର ଅବସ୍ଥିତି ଜାଣିବା ଆବଶ୍ୟକ । ନିମ୍ନ ଆଲୋଚନାରୁ ଏହା ସୁସ୍ପଷ୍ଟ ହେବ ।

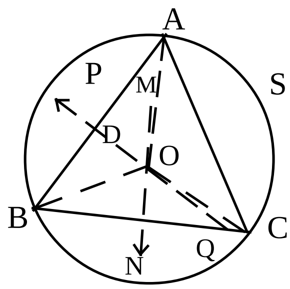
ପ୍ରମେୟ 2.2 : ଏକ ସରଳରେଖାରେ ଅବସ୍ଥିତ ନ ଥିବା ଯେକୌଣସି ତିନୋଟି ବିନ୍ଦୁ ମଧ୍ଯ ଦେଇ ଗୋଟିଏ ଏବଂ କେବଳ ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତ ଅଙ୍କନ କରାଯାଇ ପାରିବ ।

[There is one and only one circle that passes through three non-collinear points.]

ଦତ୍ତ : A, B ଓ C ଏକ ସରଳରେଖାରେ ନ ଥିବା ତିନୋଟି ବିନ୍ଦୁ ।

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : A, B ଓ C ବିନ୍ଦୁ ତ୍ରୟ ଦେଇ ଗୋଟିଏ ଏବଂ କେବଳ ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତ ଅଙ୍କନ ସମ୍ଭବ ।

ଅଙ୍କନ : $\overline{AB}$ ଓ $\overline{BC}$ ଅଙ୍କନ କର । $\overleftrightarrow{PQ}$ ଏବଂ $\overleftrightarrow{MN}$ ରେଖାଦ୍ୱୟ ଯଥାକ୍ରମେ $\overline{AB}$ ଓ $\overline{BC}$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ଲମ୍ବ ହୁଅନ୍ତୁ । A, B ଓ C ଏକ ସରଳରେଖାରେ ନ ଥିବାରୁ $\overleftrightarrow{PQ}$ ଏବଂ $\overleftrightarrow{MN}$ ରେଖାଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ ଛେଦ କରିବେ ଏବଂ ସେହି ଛେଦବିନ୍ଦୁ O ହେଉ । $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ ଏବଂ $\overline{OC}$ ଅଙ୍କନ କର ।



(ଚିତ୍ର 2.10)

ପ୍ରମାଣ : ଯେହେତୁ O ବିନ୍ଦୁ $\overline{AB}$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ଲମ୍ବ ଉପରେ ଅବସ୍ଥିତ ତେଣୁ OA = OB । ସେହିପରି OB = OC ସୁତରାଂ OA = OB = OC ।

ବର୍ତ୍ତମାନ O ବିନ୍ଦୁକୁ କେନ୍ଦ୍ର କରି OA ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ନେଇ ଏକ ବୃତ୍ତ S ଅଙ୍କନ କଲେ B ଓ C ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତ ଉପରିସ୍ଥ ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁ ହେବେ । ଅର୍ଥାତ୍ A, B ଓ C ବିନ୍ଦୁ ତ୍ରୟ S ବୃତ୍ତ ଉପରିସ୍ଥ ହେବେ ।

ବର୍ତ୍ତମାନ ପ୍ରମାଣ କରିବା ଯେ ଏହିପରି ମାତ୍ର ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତ ଅଙ୍କନ କରାଯାଇପାରିବ। ମନେକର ଆଉ ଏକ ବୃତ୍ତ S' ରହିଅଛି । ଯାହା ଉପରେ A, B ଓ C ଅବସ୍ଥିତ । O' ଏହି ବୃତ୍ତ S' ର କେନ୍ଦ୍ର ହେଉ ।

ବର୍ତ୍ତମାନ $O'A = O'B \Rightarrow O'$, $\overline{AB}$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ଲମ୍ବ $\overleftrightarrow{PQ}$ ଉପରିସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ । ସେହିପରି $O'B = O'C \Rightarrow O'$, $\overline{BC}$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ଲମ୍ବ $\overleftrightarrow{MN}$ ଉପରିସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ । ଅର୍ଥାତ୍ O ଏବଂ O' $\overleftrightarrow{PQ}$ ଏବଂ $\overleftrightarrow{MN}$ ରେଖାଦ୍ୱୟର ଦୁଇଟି ଛେଦବିନ୍ଦୁ ଯାହାକି ଅସମ୍ଭବ, କାରଣ ଦୁଇଟି ସରଳରେଖା ମାତ୍ର ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁରେ ପରସ୍ପରକୁ ଛେଦ କରନ୍ତି । ସୁତରାଂ O ଏବଂ O' ଅଭିନ୍ନ ଅଟନ୍ତି । ଅତଏବ $OA = O'A$ ତେଣୁ S ଓ S' ଅଭିନ୍ନ ଅଟନ୍ତି । (ପ୍ରମାଣିତ)

ସଂଜ୍ଞା : ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁତ୍ରୟ ଦେଇ ଅଙ୍କିତ ବୃତ୍ତକୁ ଉକ୍ତ ତ୍ରିଭୁଜର ପରିବୃତ୍ତ (Circum-Circle) ଓ ଏହାର କେନ୍ଦ୍ରବିନ୍ଦୁକୁ ଉକ୍ତ ତ୍ରିଭୁଜର ପରିକେନ୍ଦ୍ର (Circum-Centre) କୁହାଯାଏ ।

ଚାରି ବା ତତୋଧିକ ବିନ୍ଦୁ ମଧ୍ୟ ଦେଇ ସର୍ବଦା ବୃତ୍ତ ଅଙ୍କନ ସମ୍ଭବ ହୋଇ ନ ପାରେ । ଅନ୍ୟ ପକ୍ଷରେ ଯଦି କୌଣସି ଚତୁର୍ଭୁଜ ବା ବହୁଭୁଜର ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁମାନେ ଏକ ବୃତ୍ତ ଉପରେ ରହନ୍ତି ତେବେ ସେହି ଚତୁର୍ଭୁଜ ବା ବହୁଭୁଜକୁ **ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ (inscribed in a circle)** ଚତୁର୍ଭୁଜ ବା ବହୁଭୁଜ କୁହାଯାଏ । ପ୍ରମେୟ - 2.2 ଅନୁଯାୟୀ ଏକ ତ୍ରିଭୁଜ ସର୍ବଦା ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ହୁଏ ।

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ : ଦୁଇଟି ବୃତ୍ତ ପରସ୍ପରକୁ ଦୁଇଟିରୁ ଅଧିକ ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରନ୍ତି ନାହିଁ ।

ଯଦି ଏକ ତୃତୀୟ ଛେଦବିନ୍ଦୁ ଥାଏ ତେବେ ଛେଦ ବିନ୍ଦୁ ତ୍ରୟ ଦୁଇଟି ବୃତ୍ତ ଉପରେ ରହିବେ । ପ୍ରମେୟ - 2.2 ଅନୁଯାୟୀ ଏହା ଅସମ୍ଭବ ।

ପ୍ରଶ୍ନ : ଏକ ସରଳରେଖାର ଥିବା ତିନୋଟି ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତ ଅଙ୍କନ ସମ୍ଭବ କି ? (ସୂଚନା : ଯଦି ସମ୍ଭବ ତେବେ ସେପରି କ୍ଷେତ୍ରରେ ସରଳରେଖାଟି ସମ୍ଭାବ୍ୟ ବୃତ୍ତକୁ ତିନୋଟି ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରିବ । ଉପପାଦ୍ୟ - 7ର ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତକୁ ଏହା ବିରୋଧ କରେ ।)

ଉପପାଦ୍ୟ - 8

ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ସମାନ ଦୈର୍ଘ୍ୟ ବିଶିଷ୍ଟ ଜ୍ୟାମାନେ କେନ୍ଦ୍ରଠାରୁ ସମଦୂରବର୍ତ୍ତୀ ।

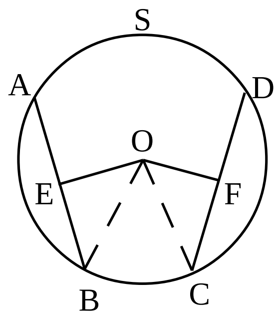
[Chords of equal length in a circle are equidistant from the centre.]

ଦତ୍ତ : S ବୃତ୍ତରେ $\overline{AB}$ ଓ $\overline{CD}$ ଦୁଇଟି ଜ୍ୟା ଏବଂ AB = CD । O ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର (ଚିତ୍ର 2.11)

$\overline{OE}$ ଏବଂ $\overline{OF}$ ଯଥାକ୍ରମେ $\overline{AB}$ ଓ $\overline{CD}$ ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ।

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : OE = OF ।

ଅଙ୍କନ : $\overline{OB}$ ଓ $\overline{OC}$ ଅଙ୍କନ କର ।



(ଚିତ୍ର 2.11)

ପ୍ରମାଣ : ଯେହେତୁ $\overline{OE} \perp \overline{AB}$,

$\overline{OE}$, $\overline{AB}$ କୁ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରିବ । (ଉପପାଦ୍ୟ - 7)

ସୁତରାଂ $AE = EB \Rightarrow EB = \frac{1}{2} AB$

ଯେହେତୁ $\overline{OF} \perp \overline{CD}$ ପୂର୍ବପରି ଆମେ ପାଇବା $CF = \frac{1}{2} CD$ ।

କିନ୍ତୁ AB = CD (ଦତ୍ତ) $\therefore EB = CF$ ।

ବର୍ତ୍ତମାନ Δ OEB ଏବଂ Δ OFC ମଧ୍ୟରେ EB = CF (ପୂର୍ବରୁ ପ୍ରମାଣିତ),

OB = OC (ଏକା ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ) ଏବଂ $m\angle OEB = m\angle OFC$ (ପ୍ରତ୍ୟେକ ସମକୋଣ)

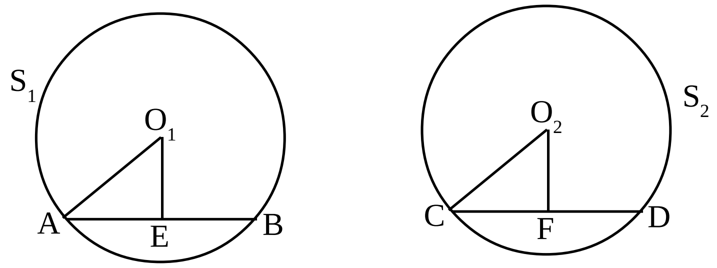
$\therefore \Delta OEB \cong \Delta OFC$ (ସମକୋଣ - ବାହୁ - କର୍ଣ୍ଣ)

$\Rightarrow$ OE = OF (ପ୍ରମାଣିତ)

ମନ୍ତବ୍ୟ : ଉପରୋକ୍ତ ଉପପାଦ୍ୟ -୪, ଦୁଇଟି (ବା ତତୋଧିକ) ସର୍ବସମ ବୃତ୍ତ ନିମନ୍ତେ ମଧ୍ୟ ପ୍ରଯୁଜ୍ୟ । ଏହାକୁ ମୂଳ ଉପପାଦ୍ୟ-୪ର ପ୍ରମାଣର ଧାରାରେ ସ୍ଥଳ ବିଶେଷରେ ସାମାନ୍ୟ ପରିବର୍ତ୍ତନ କରି ପ୍ରମାଣ କରାଯାଇ ପାରିବ । ପରବର୍ତ୍ତୀ ସମୟରେ ଆମେ ଦେଖିବା ବୃତ୍ତ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ଅନେକ ଗୁଡ଼ିଏ ଉପପାଦ୍ୟ / ପ୍ରମେୟ ଯାହା ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତ ନିମନ୍ତେ ଉଲ୍ଲେଖ କରାଯାଇଛି ସେଗୁଡ଼ିକ ଏକାଧିକ ସର୍ବସମ ବୃତ୍ତ ନିମନ୍ତେ ମଧ୍ୟ ପ୍ରଯୁଜ୍ୟ । ତେବେ ସେଗୁଡ଼ିକର ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ପ୍ରମାଣ ଦିଆଯାଇନାହିଁ । ସେଗୁଡ଼ିକ ମୂଳ ଉପପାଦ୍ୟର ପ୍ରମାଣର ଧାରାରେ ହେବ । କେବଳ ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ବୃତ୍ତ ନିମନ୍ତେ ଉପପାଦ୍ୟ - ୪ର ଅନୁରୂପ କଥନ ଏବଂ ପ୍ରମାଣ ନିମ୍ନରେ ଦିଆଯାଇଛି ।

କଥନ : ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ବୃତ୍ତର ସମାନ ଦୈର୍ଘ୍ୟ ବିଶିଷ୍ଟ ଜ୍ୟାମାନେ ନିଜ ନିଜ କେନ୍ଦ୍ରଠାରୁ ସମଦୂରବର୍ତ୍ତୀ ।

ଦତ୍ତ : ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ବୃତ୍ତ S_1 ଓ S_2 ର କେନ୍ଦ୍ର ଯଥାକ୍ରମେ O_1 ଏବଂ O_2 (ଚିତ୍ର 2.12) ।



(ଚିତ୍ର 2.12)

$\overline{AB}$ ଓ $\overline{CD}$ ଯଥାକ୍ରମେ S_1 ଓ S_2 ର ଦୁଇଟି ଜ୍ୟା ଏବଂ AB = CD ।

$\overline{O_1E} \perp \overline{AB}$ ଏବଂ $\overline{O_2F} \perp \overline{CD}$ ।

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : $O_1E = O_2F$

ଅଙ୍କନ : $\overline{O_1A}$ ଏବଂ $\overline{O_2C}$ ଅଙ୍କନ କର ।

ପ୍ରମାଣ : ଯେହେତୁ $\overline{O_1E} \perp \overline{AB}$ ତେଣୁ $\overline{O_1E}$, $\overline{AB}$ କୁ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରିବ ।

ଅର୍ଥାତ୍ $AE = EB \Rightarrow AE = \frac{1}{2} AB$

ଯେହେତୁ $\overline{O_2F} \perp \overline{CD}$ ତେଣୁ ପୂର୍ବପରି ଆମେ ପାଇବା $CF = \frac{1}{2} CD$

କିନ୍ତୁ AB = CD (ଦତ୍ତ) । $\therefore$ AE = CF ।

ବର୍ତ୍ତମାନ ΔO_1EA ଏବଂ ΔO_2FC ମଧ୍ୟରେ

$\because$ {
AE = CF (ପୂର୍ବରୁ ପ୍ରମାଣିତ)
$O_1A = O_2C$ (ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ)
$m\angle O_1EA = m\angle O_2FC$ (ପ୍ରତ୍ୟେକ ସମକୋଣ)
}

$\therefore \Delta O_1EA \cong \Delta O_2FC \Rightarrow O_1E = O_2F$ (ପ୍ରମାଣିତ)

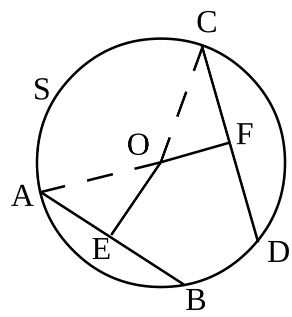
ପ୍ରମେୟ - **2.3 :** ଉପପାଦ୍ୟ - **8**ର ବିପରୀତ କଥନ ଓ ପ୍ରମାଣ :

ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତରେ କେନ୍ଦ୍ରଠାରୁ ସମଦୂରବର୍ତ୍ତୀ ଜ୍ୟାମାନଙ୍କର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସମାନ ।

[Chords of a circle equidistant from the centre are of equal length.]

ଦତ୍ତ : S ବୃତ୍ତରେ $\overline{AB}$ ଓ $\overline{CD}$ ଦୁଇଟି ଜ୍ୟା । O ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ।

$\overline{OE}$ ଏବଂ $\overline{OF}$ ଯଥାକ୍ରମେ $\overline{AB}$ ଓ $\overline{CD}$ ପ୍ରତି ଲମ୍ବ । OE = OF



(ଚିତ୍ର 2.13)

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : AB = CD

ଅଙ୍କନ : $\overline{OA}$ ଏବଂ $\overline{OC}$ ଅଙ୍କନ କର ।

ପ୍ରମାଣ : Δ AEO ଏବଂ Δ CFO ମଧ୍ୟରେ

$\because$ OE = OF (ଦତ୍ତ)
OA = OC (ଏକା ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ)
m$\angle$OEA = m$\angle$OFC (ପ୍ରତ୍ୟେକ ସମକୋଣ) ।

$\therefore \Delta$ AEO $\cong \Delta$ CFO (ସମକୋଣ - କର୍ଣ୍ଣ - ବାହୁ) $\Rightarrow$ AE = CF .... (1)

$\because$ $\overline{OE} \perp \overline{AB}$, $\overline{OE}$, $\overline{AB}$ ଜ୍ୟାକୁ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରେ (ଉପପାଦ୍ୟ - 7)

$\Rightarrow$ AE = EB $\Rightarrow$ AB = 2AE

ସେହିପରି $\overline{OF} \perp \overline{CD} \Rightarrow$ CF = FD $\Rightarrow$ CD = 2CF

କିନ୍ତୁ AE = CF (1 ରୁ) ସୁତରାଂ AB = 2AE = 2CF = CD (ପ୍ରମାଣିତ)

ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ବୃତ୍ତ ନିମନ୍ତେ ପ୍ରମେୟ - 2.3 ର କଥନ :

ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ବୃତ୍ତରେ ନିଜ ନିଜ କେନ୍ଦ୍ରଠାରୁ ସମଦୂରବର୍ତ୍ତୀ ଜ୍ୟା ମାନଙ୍କର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସମାନ ।

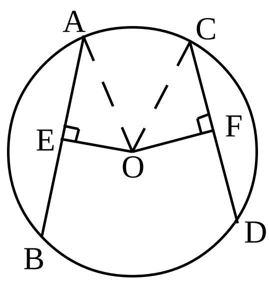
ଏହାର ପ୍ରମାଣ ମୂଳ ପ୍ରମେୟ - 2.3 ର ଅନୁରୂପ । ନିଜେ କର ।

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - 1 : ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ଦୁଇଟି ଜ୍ୟା ମଧ୍ୟରେ କେନ୍ଦ୍ରଠାରୁ ଦୂରବର୍ତ୍ତୀ ଜ୍ୟାର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିକଟତର ଜ୍ୟାର ଦୈର୍ଘ୍ୟଠାରୁ କ୍ଷୁଦ୍ରତର ।

[Of any two chords of a circle the length of the one farther from the centre is smaller than the length of the other.]

ଦତ୍ତ : O ଏକ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର । $\overline{AB}$ ଓ $\overline{CD}$ ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତର ଦୁଇଟି ଜ୍ୟା ।

$\overline{OE} \perp \overline{AB}$ ଏବଂ $\overline{OF} \perp \overline{CD}$ । OF > OE (ଚିତ୍ର 2.14) ।



(ଚିତ୍ର 2.14)

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : CD < AB

ଅଙ୍କନ : $\overline{OA}$ ଏବଂ $\overline{OC}$ ଅଙ୍କନ କର ।

ପ୍ରମାଣ : Δ OEA ଏବଂ Δ OFC ଦ୍ୱୟ ସମକୋଣୀ

$OE^2 + EA^2 = OA^2$ ଏବଂ $OF^2 + FC^2 = OC^2$ (ପିଥାଗୋରାସ ଉପପାଦ୍ୟ ଅନୁଯାୟୀ)

କିନ୍ତୁ OA = OC (ଏକା ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ)

$\therefore OE^2 + EA^2 = OF^2 + FC^2 \Rightarrow EA^2 - FC^2 = OF^2 - OE^2 > 0$ ($\because$ OF > OE (ଦତ୍ତ))

$\Rightarrow FC < EA \Rightarrow \frac{CD}{2} < \frac{AB}{2}$ [$\because \overline{OF} \perp \overline{CD}$ ଏବଂ $\overline{OE} \perp \overline{AB}$]

$\Rightarrow CD < AB$ (ପ୍ରମାଣିତ)

ଏକାଧିକ ସର୍ବସମ ବୃତ୍ତ ନିମନ୍ତେ ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ -1ର ଅନୁରୂପ ପ୍ରମାଣ ମଧ୍ୟ ପ୍ରଯୁଜ୍ୟ । ଏହାର କଥନ ଓ ପ୍ରମାଣ ନିଜେ କର ।

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - 2 : ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ଦୁଇଟି ଜ୍ୟା ମଧ୍ୟରୁ କ୍ଷୁଦ୍ରତର ଜ୍ୟାଟି କେନ୍ଦ୍ରଠାରୁ ଅଧିକ ଦୂରବର୍ତ୍ତୀ ।

(ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - 1 ର ବିପରୀତ)

[Of any two chords of a circle the smaller one is farther from the centre than the other.]

ଦତ୍ତ : O ଏକ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର । $\overline{AB}$ ଓ $\overline{CD}$ ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତର ଦୁଇଟି ଜ୍ୟା ।

CD < AB । $\overline{OE} \perp \overline{AB}$ ଏବଂ $\overline{OF} \perp \overline{CD}$ (ଚିତ୍ର 2.14 ଦେଖ)

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : OF > OE

ଅଙ୍କନ : $\overline{OA}$ ଏବଂ $\overline{OC}$ ଅଙ୍କନ କର ।

ପ୍ରମାଣ : Δ OEA ଏବଂ Δ OFC ଦୁଇଟି ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜରେ

$\therefore OE^2 + EA^2 = OA^2$ ଏବଂ $OF^2 + FC^2 = OC^2$ ....(i) (ପିଥାଗୋରାସଙ୍କ ସୂତ୍ର ଅନୁସାରେ)

କିନ୍ତୁ OA = OC (ଏକା ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ)

$\therefore$ (i) ରୁ $OE^2 + EA^2 = OF^2 + FC^2 \Rightarrow OF^2 - OE^2 = EA^2 - FC^2$

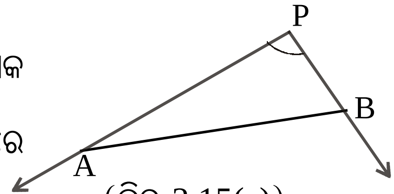
$\Rightarrow OF^2 - OE^2 = \left(\frac{AB}{2}\right)^2 - \left(\frac{CD}{2}\right)^2$ ($\because \overline{OE} \perp \overline{AB}$ ଏବଂ $\overline{OF} \perp \overline{CD}$)

$\Rightarrow OF^2 - OE^2 = \frac{1}{4}(AB^2 - CD^2) > 0$ ($\because$ AB > CD ଦତ୍ତ)

$\Rightarrow OF > OE$ (ପ୍ରମାଣିତ)

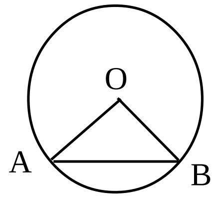
ଏକାଧିକ ସର୍ବସମ ବୃତ୍ତ ନିମନ୍ତେ ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - **2** ର ଅନୁରୂପ ପ୍ରମାଣ ମଧ୍ୟ ପ୍ରଯୁଜ୍ୟ । ଏହାର କଥନ ଓ ପ୍ରମାଣ ନିଜେ କର ।

2.3 ଜ୍ୟା ଦ୍ୱାରା କେନ୍ଦ୍ରରେ ଉତ୍ପନ୍ନ କୋଣ (Angle subtended by the chord at the centre):



(ଚିତ୍ର 2.15(a))

$\overline{AB}$ ଏକ ରେଖାଖଣ୍ଡ । P, $\overleftrightarrow{AB}$ ଉପରେ ନ ଥିବା ଯେ କୌଣସି ଏକ ବିନ୍ଦୁ ହେଉ । $\overrightarrow{PA}$ ଓ $\overrightarrow{PB}$ ଦ୍ୱାରା ଉତ୍ପନ୍ନ $\angle APB$ କୁ $\overline{AB}$ ଦ୍ୱାରା P ଠାରେ ଉତ୍ପନ୍ନ କୋଣ (Angle subtended by $\overline{AB}$ at P) କୁହାଯାଏ (ଚିତ୍ର 2.15(a)) ।



(ଚିତ୍ର 2.15(b))

ସଂଜ୍ଞା : ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର $\overline{AB}$ ବ୍ୟାସ ଭିନ୍ନ ଏକ ଜ୍ୟା ଏବଂ O କେନ୍ଦ୍ର ବିନ୍ଦୁ ହେଲେ $\angle AOB$ କୁ ଜ୍ୟା $\overline{AB}$ ଦ୍ୱାରା କେନ୍ଦ୍ରଠାରେ ଉତ୍ପନ୍ନ କୋଣ ଅଥବା $\overline{AB}$ ଜ୍ୟା ସହ ସମ୍ପୃକ୍ତ କେନ୍ଦ୍ରସ୍ଥ କୋଣ (Central angle) କୁହାଯାଏ । ଚିତ୍ର 2.15(b) ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ ।

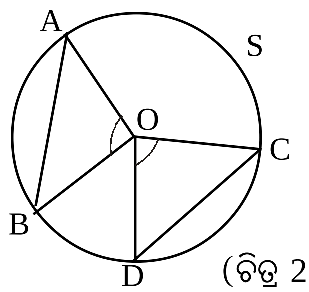
$\angle AOB$, $\overline{AB}$ ଜ୍ୟା ସହ ସମ୍ପୃକ୍ତ ଏକ କେନ୍ଦ୍ରସ୍ଥ କୋଣ । କେନ୍ଦ୍ରସ୍ଥ କୋଣ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ବିଶଦ ଆଲୋଚନା ପରେ ହେବ ।

ଉପପାଦ୍ୟ - 9

ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ଜ୍ୟା କେନ୍ଦ୍ରଠାରେ ଯେଉଁ କୋଣ ଉତ୍ପନ୍ନ କରନ୍ତି ସେମାନେ ସର୍ବସମ ।

[In a circle the angles subtended by two congruent chords at the centre are congruent.]

ଦତ୍ତ : S ବୃତ୍ତରେ O କେନ୍ଦ୍ର ଏବଂ $\overline{AB}$ ଓ $\overline{CD}$ ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ଜ୍ୟା (ଚିତ୍ର 2.16) । $\overline{AB}$ ଓ $\overline{CD}$ କେନ୍ଦ୍ରଠାରେ ଯଥାକ୍ରମେ $\angle AOB$ ଏବଂ $\angle COD$ ଉତ୍ପନ୍ନ କରନ୍ତି ।



(ଚିତ୍ର 2.16)

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : $\angle AOB \cong \angle COD$

ପ୍ରମାଣ : Δ AOB ଏବଂ Δ OCD ମଧ୍ୟରେ

$\begin{cases} OA = OC, OB = OD \text{ (ଏକା ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ)} \\ AB = CD \text{ (ଦତ୍ତ)} \end{cases}$

$\therefore \Delta OAB \cong \Delta OCD$ (ବାହୁ-ବାହୁ-ବାହୁ) $\Rightarrow \angle AOB \cong \angle COD$ (ପ୍ରମାଣିତ)

ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ବୃତ୍ତ ନିମନ୍ତେ ଉପପାଦ୍ୟ - 9 ର କଥନ : **ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ବୃତ୍ତର ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ଜ୍ୟା ନିଜ ନିଜ କେନ୍ଦ୍ରଠାରେ ଯେଉଁ କୋଣ ଉତ୍ପନ୍ନ କରନ୍ତି ସେମାନେ ସର୍ବସମ ।** ଏହାର ପ୍ରମାଣ ନିଜେ କର ।

ପ୍ରମେୟ - 2.4 : ଉପପାଦ୍ୟ - 9 ର ବିପରୀତ କଥନ ଓ ପ୍ରମାଣ :

ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ଦୁଇଟି ଜ୍ୟା ଦ୍ୱାରା କେନ୍ଦ୍ରଠାରେ ଉତ୍ପନ୍ନ କୋଣଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ହେଲେ ଜ୍ୟା ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ହେବେ ।

(In a circle the chords subtending congruent angles at the centre are congruent.)

ଦତ୍ତ : S ବୃତ୍ତରେ O କେନ୍ଦ୍ର ଏବଂ $\overline{AB}$ ଓ $\overline{CD}$ ଦୁଇଟି ଜ୍ୟା । $\angle AOB \cong \angle COD$ (ଚିତ୍ର 2.16)

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : AB = CD

ପ୍ରମାଣ : Δ OAB ଏବଂ Δ OCD ମଧ୍ୟରେ

$\because$ OA = OC, OB = OD (ଏକା ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ) ଏବଂ $m\angle AOB = m\angle COD$ (ଦତ୍ତ)

$\therefore$ $\Delta OAB \cong \Delta OCD$ (ବାହୁ-କୋଣ-ବାହୁ)

$\Rightarrow$ AB = CD (ପ୍ରମାଣିତ)

ଏକାଧିକ ସର୍ବସମ ବୃତ୍ତ ନିମନ୍ତେ ପ୍ରମେୟ - 2.4 ର ଅନୁରୂପ ପ୍ରମାଣ ମଧ୍ୟ ପ୍ରଯୁଜ୍ୟ । ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ବୃତ୍ତ ନିମନ୍ତେ ଏହାର କଥନ:

ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ବୃତ୍ତର ଦୁଇଟି ଜ୍ୟା ଦ୍ୱାରା ନିଜ ନିଜ କେନ୍ଦ୍ରଠାରେ ଉତ୍ପନ୍ନ କୋଣ ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ହେଲେ ଜ୍ୟା ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ହେବେ । ଏହାର ପ୍ରମାଣ ନିଜେ କର ।

ଅନୁଶୀଳନୀ - 2 (a)

(କ - ବିଭାଗ)

1. ଉକ୍ତିଟି ଠିକ୍ ଥିଲେ T ଏବଂ ଭୁଲ ଥିଲେ F ଲେଖ ।

i) ଏକ ସମତଳରେ ଥିବା ଏକ ବକ୍ରରେଖାର ପ୍ରତ୍ୟେକ ବିନ୍ଦୁ ଉକ୍ତ ସମତଳ ଉପରିସ୍ଥ ଏକ ଦତ୍ତ ବିନ୍ଦୁଠାରୁ ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଦୂରତାରେ ଥିଲେ ବକ୍ରରେଖାଟିକୁ ବୃତ୍ତ କୁହାଯାଏ ।

ii) ବୃତ୍ତର ପ୍ରତ୍ୟେକ ବିନ୍ଦୁ କୌଣସି ଏକ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧର ଏକ ପ୍ରାନ୍ତ ବିନ୍ଦୁ ଅଟେ ।

iii) ଏକ ବୃତ୍ତର ଅସଂଖ୍ୟ ବ୍ୟାସ ରହିଛି ।

iv) କେନ୍ଦ୍ର, ବୃତ୍ତର ଏକମାତ୍ର ବିନ୍ଦୁ ଯାହା ବୃତ୍ତର ପ୍ରତ୍ୟେକ ବ୍ୟାସ ଉପରେ ଅବସ୍ଥିତ ।

v) ଏକ ଜ୍ୟା ବୃତ୍ତର ଅନ୍ତର୍ଦେଶକୁ ଯେଉଁ ଦୁଇ ଅଂଶରେ ବିଭକ୍ତ କରେ ସେମାନେ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଉତ୍ତଳ ସେଟ୍ ଅଟନ୍ତି ।

vi) ବୃତ୍ତର ଏକ ବ୍ୟାସ ଗୋଟିଏ ଜ୍ୟାକୁ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କଲେ ସେମାନେ ପରସ୍ପର ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ଅଟନ୍ତି ।

vii) ପ୍ରତ୍ୟେକ ତ୍ରିଭୁଜର ପରିକେନ୍ଦ୍ର ଏହାର ଏକ ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ ।

viii) ଏକ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର, ଏହାର ଏକମାତ୍ର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ ଯାହାଠାରୁ ବୃତ୍ତର ପ୍ରତ୍ୟେକ ବିନ୍ଦୁର ଦୂରତା ସମାନ ।

ix) ଏକ ରଶ୍ମୀ ବୃତ୍ତକୁ ଗୋଟିଏ ମାତ୍ର ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ । ତେବେ ରଶ୍ମୀର ଆଦ୍ୟ ବିନ୍ଦୁଟି ବୃତ୍ତର ଏକ ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ ହେବ ।

x) ଏକ ବୃତ୍ତରେ $\overline{AB}$ ଓ $\overline{BC}$ ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ଜ୍ୟା ହେଲେ B ବିନ୍ଦୁଗାମୀ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ, $\angle ABC$ କୁ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରେ ।

(xi) ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁ ଦୁଇ ବା ତତୋଧିକ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ହୋଇପାରିବ ନାହିଁ ।

(xii) ଗୋଟିଏ ସରଳରେଖା ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତକୁ ସର୍ବଦା ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ ।

2. ପ୍ରଦତ୍ତ ସମ୍ଭାବ୍ୟ ଉତ୍ତରରୁ ଠିକ୍ ଉତ୍ତରଟି ବାଛି ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନ ପୂରଣ କର ।

i) ଦୁଇଟି ଅସମାନ୍ତର ଜ୍ୟାର ଛେଦବିନ୍ଦୁ .... ଅଟେ ।

a) ବୃତ୍ତର ଏକ ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ b) ବୃତ୍ତର ଏକ ବହିଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ

c) ବୃତ୍ତ ଉପରିସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ d) ବୃତ୍ତ ଉପରିସ୍ଥ କିମ୍ବା ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ

ii) P ବିନ୍ଦୁ ବୃତ୍ତର ଏକ ବହିଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ ହେଲେ ବୃତ୍ତ ଉପରେ P ଠାରୁ ସମଦୂରବର୍ତ୍ତୀ .... ଯୋଡ଼ା ବିନ୍ଦୁ ଅଛି ।

a) 1 b) 2 c) 8 d) ଅସଂଖ୍ୟ

iii) ଗୋଟିଏ ରେଖାଖଣ୍ଡ ସର୍ବାଧିକ .... ଟି ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ହୋଇ ପାରିବ ।

a) 1 b) 2 c) 4 d) ଅସଂଖ୍ୟ

iv) ଗୋଟିଏ ରେଖାଖଣ୍ଡ ସର୍ବାଧିକ .... ଟି ବୃତ୍ତର ଜ୍ୟା ହୋଇପାରିବ ।

a) 1 b) 2 c) 4 d) ଅସଂଖ୍ୟ

v) ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତରେ ଏକ ଜ୍ୟାର ଗୋଟିଏ ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁ କେନ୍ଦ୍ରଠାରୁ 5 ସେ.ମି. ଦୂରରେ ଏବଂ ଜ୍ୟାଟିର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ କେନ୍ଦ୍ରଠାରୁ 3 ସେ.ମି ଦୂରରେ ଅଛି । ଜ୍ୟାଟିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ .... ସେ.ମି. ।

a) 8 b) 12 c) 16 d) 20

(ଖ - ବିଭାଗ)

3. ଏକ ବୃତ୍ତର 16 ସେ.ମି. ଦୈର୍ଘ୍ୟ ବିଶିଷ୍ଟ ଗୋଟିଏ ଜ୍ୟା ଏକ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ $\overline{OP}$ ଦ୍ୱାରା D ବିନ୍ଦୁରେ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡିତ ହୁଏ । ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ 10 ସେମି. ହେଲେ $\overline{DP}$ ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

4. ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର O । ଏକ ଜ୍ୟା $\overline{AB}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ D ହେଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\overline{OD}$, $\angle AOB$ କୁ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରେ ।

5. ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର O । ଏହାର $\overline{AB}$ ଓ $\overline{AC}$ ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ଜ୍ୟା । ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\overline{OA}$, $\angle BAC$ କୁ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରେ ।

6. ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର O ଏବଂ $\overline{AB}$ ଓ $\overline{CD}$ ଏହାର ଦୁଇଟି ସମାନ୍ତର ଜ୍ୟା । P ଓ Q ଯଥାକ୍ରମେ $\overline{AB}$ ଓ $\overline{CD}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ହେଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ O ବିନ୍ଦୁ, $\overleftrightarrow{PQ}$ ଉପରିସ୍ଥ ହେବ ।

7. ଗୋଟିଏ ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜର ପରିକେନ୍ଦ୍ରଠାରୁ ତ୍ରିଭୁଜର ବାହୁମାନେ ସମଦୂରବର୍ତ୍ତୀ - ପ୍ରମାଣ କର ।

8. ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ବୃତ୍ତରେ ଏକ ବ୍ୟାସ ଏହାର ବୃହତ୍ତମ ଜ୍ୟା । (ସୂଚନା : ଏକ ଜ୍ୟାର କେନ୍ଦ୍ରଠାରୁ ଦୂରତା $d \geq 0$ ଏବଂ ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ r ହେଲେ ଜ୍ୟାର ଦୈର୍ଘ୍ୟ $2\sqrt{r^2 - d^2} \leq 2r$ = ବ୍ୟାସ) ।

9. ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତରେ ଦୁଇଟି ସମାନ୍ତର ଜ୍ୟାର ଏକ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ଅବସ୍ଥିତ । ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ଜ୍ୟା ଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ ନୁହଁନ୍ତି ।

10. $\overline{AB}$ ଓ $\overline{CD}$ ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ଦୁଇଟି ସମାନ୍ତର ଜ୍ୟା । AB = CD = 8 ସେମି. । ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ 5 ସେମି. ହେଲେ ଜ୍ୟା ଦ୍ୱୟର ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ଦୂରତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(ଗ - ବିଭାଗ)

11. 10 ସେ.ମି. ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ବିଶିଷ୍ଟ ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ଦୁଇଟି ସମାନ୍ତର ଜ୍ୟା $\overline{AB}$ ଓ $\overline{CD}$ ମଧ୍ୟରେ ଦୂରତା 10 ସେମି. । $\overline{AB}$ ଜ୍ୟା କେନ୍ଦ୍ରଠାରୁ 6 ସେ.ମି. ଦୂରରେ ଅବସ୍ଥିତ ହେଲେ $\overline{AB}$ ଓ $\overline{CD}$ ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

12. ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତରେ ΔABC ଅନ୍ତର୍ଲିଖିତ ହୋଇଛି । ଯଦି AB = AC ହୁଏ ପ୍ରମାଣ ଯେ $\angle BAC$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ରଶ୍ମି ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ବିନ୍ଦୁଗାମୀ ଅଟେ ।

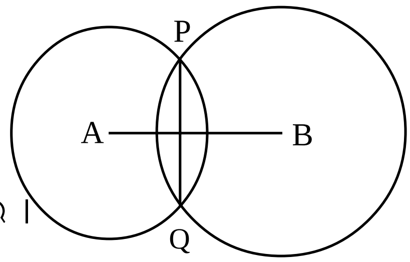
13. ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ଦୁଇଟି ଜ୍ୟା ଏକ ବ୍ୟାସ ଦ୍ୱାରା ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡିତ ହେଲେ ପ୍ରମାଣ କରେ ଯେ ଜ୍ୟା ଦୁଇଟି ସମାନ୍ତର ।

14. ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ଦୁଇଟି ଜ୍ୟା ପରସ୍ପରକୁ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କଲେ ସେମାନଙ୍କ ଛେଦବିନ୍ଦୁ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ହେବ । (ସୂଚନା : ଅସମ୍ଭବାୟନ ପ୍ରଣାଳୀ (Method of contradiction) ବ୍ୟବହାର କର)

15. ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ଦୁଇଟି ଜ୍ୟା $\overline{AB}$ ଓ $\overline{BC}$, B ଠାରେ 90^0 କୋଣ ଉତ୍ପନ୍ନ କରନ୍ତି । ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର O ହେଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ A, O ଏବଂ C ଏକ ଏକରେଖୀୟ ।

16. ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ଏକ ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜରେ କର୍ଣ୍ଣର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ, ଏହାର ପରିବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ଅଟେ ।

17. $\overline{PQ}$ ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ଜ୍ୟା । P ଓ Q ଠାରେ ଉକ୍ତ ଜ୍ୟା ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବ ବୃତ୍ତକୁ ଯଥାକ୍ରମେ R ଓ S ଠାରେ ଛେଦ କରନ୍ତି । ପ୍ରମାଣ କର ଯେ PQSR ଏକ ଆୟତ ଚିତ୍ର ।



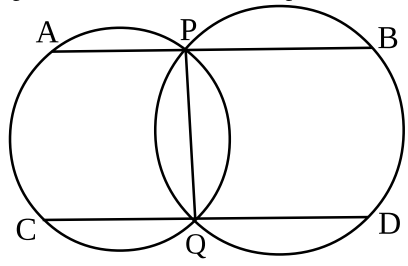
(ଚିତ୍ର 2.17)

18. ଚିତ୍ର 2.17ରେ A ଓ B ଦୁଇଟି ପରସ୍ପର ଛେଦୀ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ଏବଂ P ଓ Q ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟର ଛେଦବିନ୍ଦୁ ଅଟନ୍ତି ।

ପ୍ରମାଣ କର ଯେ (i) $\overleftrightarrow{AB}$, $\overline{PQ}$ ସାଧାରଣ ଜ୍ୟାକୁ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରେ ।

.. ଏବଂ (ii) $\overleftrightarrow{AB} \perp \overline{PQ}$

(ସୂଚନା : $\overline{AB}$ ଓ $\overline{PQ}$ ର ଛେଦବିନ୍ଦୁ C ହେଲେ ΔACP ଓ ΔACQ ଏବଂ ΔAPB ଓ ΔAQB ମଧ୍ୟରେ ତୁଳନା କର)



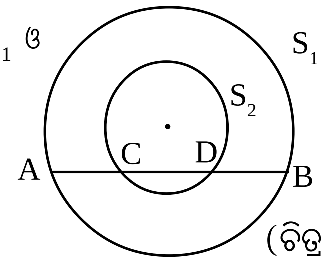
(ଚିତ୍ର 2.18)

19. ଚିତ୍ର 2.18ରେ ଦୁଇଟି ବୃତ୍ତ ପରସ୍ପରକୁ P ଓ Q ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରନ୍ତି । P ଠାରେ $\overline{PQ}$ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବ ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟକୁ A ଓ B ଠାରେ ଛେଦ କରେ ଓ ସେହିପରି Q ଠାରେ $\overline{PQ}$ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବ ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟକୁ C ଓ D ଠାରେ ଛେଦ କରେ । ପ୍ରମାଣ କର ଯେ AB = CD

20. A ଓ B କେନ୍ଦ୍ର ବିଶିଷ୍ଟ ଦୁଇଟି ବୃତ୍ତ ପରସ୍ପରକୁ P ଓ Q ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରନ୍ତି । P ମଧ୍ୟ ଦେଇ $\overline{AB}$ ସହିତ ସମାନ୍ତର ସରଳରେଖା ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟକୁ M ଓ N ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, MN = 2AB ।
(ସୂଚନା : $\overline{AC}$ ଓ $\overline{BD}$, $\overline{MN}$ ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ଅଙ୍କନ କରି ଦର୍ଶାଅ ଯେ, AB = CD)

21. ଚିତ୍ର 2.19 ରେ ଗୋଟିଏ ସରଳରେଖା ଦୁଇଟି ଏକ କେନ୍ଦ୍ରିକ ବୃତ୍ତ S_1 ଓ S_2 କୁ ଯଥାକ୍ରମେ A, C, D ଓ B ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରୁଛି ।

ପ୍ରମାଣ କର ଯେ AC = DB ।



(ଚିତ୍ର 2.19)

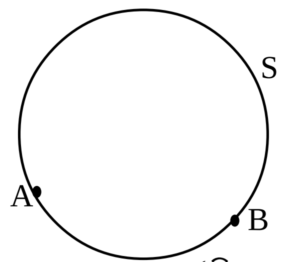
22. ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ଏକ ବହିଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ P ମଧ୍ୟ ଦେଇ ଅଙ୍କିତ ଦୁଇଟି ଛେଦକ ବୃତ୍ତକୁ A, B ଏବଂ C, D ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରନ୍ତି ଯେପରି P-A-B ଏବଂ P-C-D । ଯଦି AB = CD ହୁଏ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ PA = PC ଏବଂ $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$ ।

23. ABC ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର O । ଏହାର ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ଜ୍ୟା ପରସ୍ପରକୁ ଏକ ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ P ଠାରେ ଛେଦ କରନ୍ତି । B ଓ C, $\overline{OP}$ ର ଏକ ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ହେଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, (i) PA = PC ଏବଂ (ii) $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$ ।

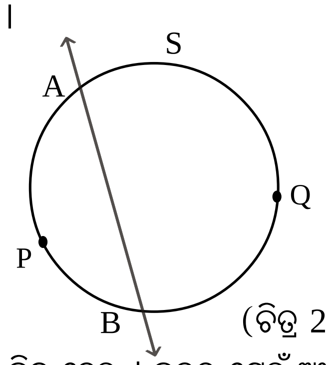
(ସୂଚନା : $\overline{OE} \perp \overline{AB}$ ଏବଂ $\overline{OF} \perp \overline{CD}$ ଅଙ୍କନ କରି O, P ଯୋଗ କର)

2.4 ଚାପ (Arc) :

ଚିତ୍ର 2.20ରେ S ଏକ ବୃତ୍ତ ଏବଂ ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତ ଉପରେ A ଓ B ଦୁଇଟି ଭିନ୍ନ ବିନ୍ଦୁ ହେଲେ ବୃତ୍ତଟି A ଓ B ବିନ୍ଦୁ ଦ୍ୱାରା ଦୁଇ ଭାଗରେ ବିଭକ୍ତ ହୁଏ । A ଓ B ବିନ୍ଦୁ ସମେତ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଭାଗକୁ ଆମେ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ଚାପ କହିବା । ଅନ୍ୟ ପ୍ରକାର କହିଲେ A ଓ B ବିନ୍ଦୁ ଦ୍ୱୟ ସହିତ "A ଠାରୁ B ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ" ବୃତ୍ତର ଏକ ଅବିଚ୍ଛିନ୍ନ ଅଂଶ ହେଉଛି ଏକ ଚାପ । ଚିତ୍ର 2.21ରେ $\overleftrightarrow{AB}$, S ବୃତ୍ତର ଏକ ଛେଦକ (Secant) ।



(ଚିତ୍ର 2.20)



(ଚିତ୍ର 2.21)

P, ଛେଦକ $\overleftrightarrow{AB}$ ର ଏକ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ବୃତ୍ତ ଉପରିସ୍ଥ ଅନ୍ୟ ଏକ ବିନ୍ଦୁ ହେଉ । ବୃତ୍ତର ଯେଉଁ ଅଂଶରେ P ବିନ୍ଦୁ ଅଛି ସେହି ଅଂଶଟିକୁ APB ଅଥବା BPA ଚାପ କୁହାଯାଏ । ବର୍ତ୍ତମାନ ଆମେ ଚାପର ସଂଜ୍ଞା ନିମ୍ନମତେ କରିବା ।

ସଂଜ୍ଞା : ଏକ ବୃତ୍ତ ଉପରିସ୍ଥ A ଓ B ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁ ହେଲେ A ଓ B ବିନ୍ଦୁ ସମେତ $\overline{AB}$ ଜ୍ୟାର ଏକ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଥିବା ବୃତ୍ତ ଉପରିସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କ ସେଟ୍‌କୁ ଏକ ଚାପ କୁହାଯାଏ । ଉକ୍ତ ସେଟ୍ ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ P ଏକ ବିନ୍ଦୁ ହେଲେ ଉତ୍ପନ୍ନ ଚାପକୁ APB କିମ୍ବା BPA ଚାପ ରୂପେ ନାମିତ କରାଯାଏ ଏବଂ ଉକ୍ତ ଚାପକୁ $\overset{\frown}{APB}$ କିମ୍ବା $\overset{\frown}{BPA}$ ସଂକେତ ଦ୍ୱାରା ପ୍ରକାଶ କରାଯାଏ ।

$\overset{\frown}{APB}$ ଏକ ଚାପ ହେଲେ A ଓ B, ଚାପର ଦୁଇଟି ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁ (End points) ଅଟନ୍ତି ଏବଂ ଚାପର ଅନ୍ୟ ସମସ୍ତ ବିନ୍ଦୁଙ୍କୁ ଚାପର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ (Interior points) କୁହାଯାଏ । Q, ଛେଦକ $\overleftrightarrow{AB}$ ର ଅପର ପାର୍ଶ୍ୱରେ (ଚିତ୍ର 2.21) ବୃତ୍ତ ଉପରିସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ ହେଲେ AQB ଚାପକୁ $\overset{\frown}{AQB}$ ବା $\overset{\frown}{BQA}$ ସଂକେତ ଦ୍ୱାରା ପ୍ରକାଶ କରିବା ।

A ଓ B ଉଭୟ $\widehat{APB}$ ଏବଂ $\widehat{AQB}$ ଚାପର ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁ ଅଟନ୍ତି । $\widehat{APB}$ ଓ $\widehat{AQB}$ ଚାପଦ୍ୱୟକୁ ପରସ୍ପରର **ବିପରୀତ ଚାପ (Opposite arc)** କୁହାଯାଏ । ଉକ୍ତ ଚାପ ଦ୍ୱୟର ସଂଯୋଗରେ ସମ୍ପୂର୍ଣ୍ଣ ବୃତ୍ତଟି ଗଠିତ ହେଉଥିବାରୁ ଗୋଟିକୁ ଅପରର **ପରିପୂରକ ଚାପ (Supplementary arc)** ମଧ୍ୟ କୁହାଯାଏ । ଏହି ଚାପଦ୍ୱୟକୁ $\overline{AB}$ **ଜ୍ୟା ଦ୍ୱାରା ଉତ୍ପନ୍ନ ବା ଛେଦିତ** ଚାପ କୁହାଯାଏ ଏବଂ $\overline{AB}$ ଜ୍ୟାକୁ ଉଭୟ **ଚାପର ସମ୍ପୃକ୍ତ ଜ୍ୟା (Corresponding chord)** କୁହାଯାଏ ।

2.4.1 କ୍ଷୁଦ୍ରଚାପ, ବୃହତ୍‌ଚାପ ଏବଂ ଅର୍ଦ୍ଧବୃତ୍ତ (Minor arc, Major arc and semi circle) :

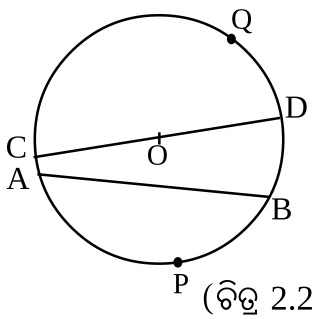
କ୍ଷୁଦ୍ରଚାପ, ବୃହତ୍‌ଚାପ :

ଯଦି କୌଣସି ଚାପ $\widehat{APB}$ ର P ବିନ୍ଦୁ ଏବଂ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ବିନ୍ଦୁ ସମ୍ପୃକ୍ତ $\overline{AB}$ ଜ୍ୟାର ବିପରୀତ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଅବସ୍ଥିତ ହୁଅନ୍ତି ତେବେ $\widehat{APB}$ କୁ ଏକ **କ୍ଷୁଦ୍ରଚାପ (Minor arc)** କୁହାଯାଏ । ଏକ କ୍ଷୁଦ୍ରଚାପର ବିପରୀତ ଚାପକୁ **ବୃହତ୍‌ଚାପ (Major arc)** କୁହାଯାଏ ।

ଚିତ୍ର 2.22ରେ $\widehat{APB}$ କ୍ଷୁଦ୍ରଚାପ ଓ $\widehat{AQB}$ ବୃହତ୍ ଚାପ ଅଟନ୍ତି । $\widehat{APB}$ ଏକ କ୍ଷୁଦ୍ରଚାପ ହେଲେ ଏହାକୁ 'AB କ୍ଷୁଦ୍ରଚାପ' ଦ୍ୱାରା ପ୍ରକାଶ କରାଯାଏ ଓ ସେହିପରି $\widehat{AQB}$ ବୃହତ୍ ଚାପକୁ "AB ବୃହତ୍ ଚାପ'' ଦ୍ୱାରା ପ୍ରକାଶ କରାଯାଏ ।

ଅର୍ଦ୍ଧବୃତ୍ତ :

ଏକ ବୃତ୍ତରେ କୌଣସି ଚାପର ସମ୍ପୃକ୍ତ ଜ୍ୟା ବୃତ୍ତର ଏକ ବ୍ୟାସ ହେଲେ ଚାପଟିକୁ ଏକ **ଅର୍ଦ୍ଧବୃତ୍ତ (Semi circle)** କୁହାଯାଏ । ଚିତ୍ର 2.22ରେ $\widehat{CQD}$ ଏବଂ $\widehat{CPD}$ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଅର୍ଦ୍ଧବୃତ୍ତ ଅଟନ୍ତି । ସଂଜ୍ଞାନୁସାରେ ଅର୍ଦ୍ଧବୃତ୍ତ ଏକ କ୍ଷୁଦ୍ରଚାପ ବା ବୃହତ୍ ଚାପ ନୁହେଁ । ଏକ ଅର୍ଦ୍ଧବୃତ୍ତର ବିପରୀତ ଚାପ ମଧ୍ୟ ଏକ ଅର୍ଦ୍ଧବୃତ୍ତ ।



(ଚିତ୍ର 2.22)

2.4.1 ଚାପର ଦୈର୍ଘ୍ୟ (Length of the arc) :

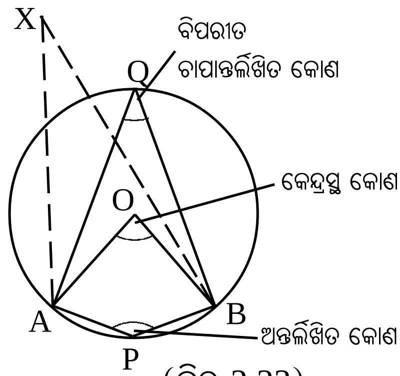
ଯେପରି ପ୍ରତ୍ୟେକ ରେଖାଖଣ୍ଡର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ମାପ ରହିଅଛି ସେହିପରି ବୃତ୍ତରେ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଚାପର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ମାପ ରହିଅଛି । ଏହାର ମାପ ପ୍ରଣାଳୀ ପରିମିତିରେ ଆଲୋଚନା କରାଯିବ । ତେବେ $\overline{AB}$ ଜ୍ୟା ଦ୍ୱାରା ଉତ୍ପନ୍ନ ଚାପ ଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରୁ କ୍ଷୁଦ୍ର ଚାପର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ବୃହତ୍ ଚାପର ଦୈର୍ଘ୍ୟଠାରୁ କ୍ଷୁଦ୍ରତର । ଚାପର **ଦୈର୍ଘ୍ୟ (length)କୁ** ℓ ଚିହ୍ନ ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ କରାଯାଏ । $\ell\widehat{APQ}$, $\widehat{APQ}$ ଚାପର ଦୈର୍ଘ୍ୟମାପକୁ ସୂଚାଏ । ଦୁଇ ବିପରୀତ ଚାପର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ସମଷ୍ଟି ବୃତ୍ତର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଅଟେ । ବୃତ୍ତର ଦୈର୍ଘ୍ୟକୁ ବୃତ୍ତର **ପରିଧି (Circumference)** କୁହାଯାଏ ।

ସନ୍ନିହିତ ଚାପ (Adjacent arcs):

ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତରେ ଦୁଇଟି ଚାପର ଗୋଟିଏ ମାତ୍ର ସାଧାରଣ ବିନ୍ଦୁ ଥିଲେ ଉକ୍ତ ବିନ୍ଦୁଟି ପ୍ରତ୍ୟେକ ଚାପର ଏକ ପ୍ରାନ୍ତ ବିନ୍ଦୁ ହେବ ଏବଂ ଏହିପରି ଦୁଇଟି ଚାପକୁ **ସନ୍ନିହିତ ଚାପ (Adjacent arcs)** କୁହାଯାଏ । ଦୁଇଟି ସନ୍ନିହିତ ଚାପର ସଂଯୋଗରେ ନୂତନ ଚାପ ଗଠିତ ହୁଏ । ଚିତ୍ର 2.22ରେ $\widehat{QCA}$ ଏବଂ $\widehat{APB}$ ଦୁଇଟି ସନ୍ନିହିତ ଚାପର ସଂଯୋଗରେ $\widehat{QAB}$ ଗଠିତ ହେଉଅଛି ।

ମନେରଖ : ଦୁଇଟି ବୃହତ୍ ଚାପ କିମ୍ବା ଦୁଇଟି ଅର୍ଦ୍ଧବୃତ୍ତ ସନ୍ନିହିତ ଚାପ ହୋଇପାରିବେ ନାହିଁ ।

2.5 ଚାପ ଦ୍ୱାରା ଉତ୍ପନ୍ନ କୋଣ (Angle subtended by an arc):

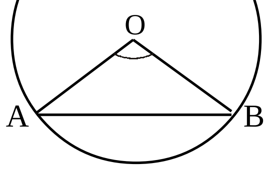


(ଚିତ୍ର 2.23)

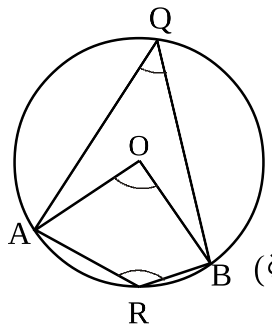
ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତରେ (ଚିତ୍ର 2.23) $\overset{\frown}{APB}$ ଏକ କ୍ଷୁଦ୍ର ଚାପ । X, $\overline{AB}$ ଜ୍ୟା ଉପରେ ନ ଥିବା ବୃତ୍ତର ସମତଳରେ ଅନ୍ୟ ଏକ ବିନ୍ଦୁ ହେଲେ $\angle AXB$ କୁ $\overset{\frown}{APB}$ ଚାପ ଦ୍ୱାରା X ଠାରେ ଉତ୍ପନ୍ନ କୋଣ (angle subtended at X) କୁହାଯାଏ । ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର O ହେଲେ $\angle AOB$ କୁ $\overset{\frown}{APB}$ ଦ୍ୱାରା କେନ୍ଦ୍ରଠାରେ ଉତ୍ପନ୍ନ କୋଣ ବା ସଂକ୍ଷେପରେ $\overset{\frown}{APB}$ ର **କେନ୍ଦ୍ରସ୍ଥ କୋଣ (Central angle)** କୁହାଯାଏ । ଅର୍ଥାତ୍ **ଏକ କ୍ଷୁଦ୍ର ଚାପ ଦ୍ୱାରା କେନ୍ଦ୍ରଠାରେ ଉତ୍ପନ୍ନ କୋଣ ଉକ୍ତ ଚାପର କେନ୍ଦ୍ରସ୍ଥ କୋଣ ।**

$\overset{\frown}{AB}$ ର P ଯେକୌଣସି ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ ହେଲେ $\angle APB$ କୁ $\overset{\frown}{AB}$ ଚାପର ଏକ **ଅନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣ (Inscribed angle)** କୁହାଯାଏ । Q, $\overset{\frown}{APB}$ ର ବିପରୀତ ଚାପ ଉପରିସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ ହେଲେ $\angle AQB$ କୁ $\overset{\frown}{APB}$ ଚାପର **ବିପରୀତ ଚାପାନ୍ତର୍ଲିଖିତ** ବା **ପରିପୂରକ ଚାପାନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣ (Angle subtended at a point on the opposite arc or supplementary arc)** କୁହାଯାଏ । (ଚିତ୍ର 2.23 ଦେଖ)

ଆମେ ପୂର୍ବରୁ ଜାଣିଛେ, $\angle AOB$ ଟି $\overline{AB}$ ଜ୍ୟା ଦ୍ୱାରା ଉତ୍ପନ୍ନ କେନ୍ଦ୍ରସ୍ଥ କୋଣ । ଏହା ସ୍ପଷ୍ଟ ଯେ $\overline{AB}$ ଜ୍ୟା ଦ୍ୱାରା ଉତ୍ପନ୍ନ କେନ୍ଦ୍ରସ୍ଥ କୋଣ ଏବଂ $\overset{\frown}{AB}$ କ୍ଷୁଦ୍ରଚାପ ଦ୍ୱାରା ଉତ୍ପନ୍ନ କେନ୍ଦ୍ରସ୍ଥ କୋଣ ଦ୍ୱୟ ଅଭିନ୍ନ (ଚିତ୍ର 2.24 ଦେଖ) । ଚିତ୍ର 2.25ରେ $\overset{\frown}{AQB}$ ଏକ ବୃହତ୍ ଚାପ ।



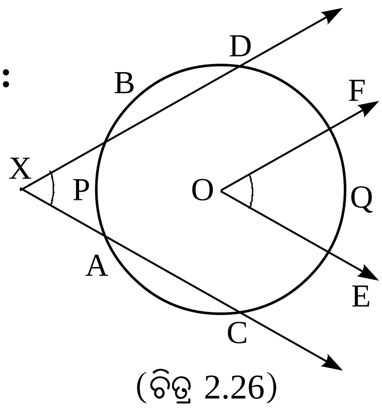
(ଚିତ୍ର 2.24)



(ଚିତ୍ର 2.25)

$\overset{\frown}{ARB}$ ଦ୍ୱାରା Q ଠାରେ ଉତ୍ପନ୍ନ କୋଣ $\angle AQB$, $\overset{\frown}{AQB}$ ର ଏକ ଅନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣ । $\angle ARB$, $\overset{\frown}{AQB}$ ର ଏକ ବିପରୀତ ଚାପାନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣ ।

2.5.1 କୋଣ ଦ୍ୱାରା ଛେଦିତ ଚାପ (Arc intercepted by the angle) :



(ଚିତ୍ର 2.26)

ଗୋଟିଏ କୋଣର ବାହୁଦ୍ୱୟ ଏକ ବୃତ୍ତକୁ ଛେଦ କଲେ, କୋଣର ଅନ୍ତର୍ଦେଶରେ ଥିବା ଚାପ, ଯାହାର ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟ କୋଣର ଦୁଇବାହୁ ଉପରିସ୍ଥ ହୁଅନ୍ତି, ତାହାକୁ **ଉକ୍ତ କୋଣଦ୍ୱାରା ଛେଦିତ ଚାପ କୁହାଯାଏ ।** ଚିତ୍ର 2.26ରେ $\angle EOF$ କୋଣ ଦ୍ୱାରା ଛେଦିତ ଚାପ ହେଉଛି $\overset{\frown}{EQF}$ ଏବଂ $\angle AXB$ ଦ୍ୱାରା ଛେଦିତ ଚାପଦ୍ୱୟ ହେଲେ $\overset{\frown}{APB}$ ଏବଂ $\overset{\frown}{CQD}$ ।

2.6 ଚାପର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପ (Degree measure of an arc):

ପ୍ରତ୍ୟେକ କ୍ଷୁଦ୍ରଚାପ କେନ୍ଦ୍ରଠାରେ ଏକ କୋଣ ଉତ୍ପନ୍ନ କରେ । କୋଣ ମାପ ପାଇଁ ତିନି ପ୍ରକାର ପରିମାପ; ଯଥା: ଡିଗ୍ରୀ, ରେଡ଼ିଆନ ଓ ଗ୍ରେଡ୍ ବ୍ୟବହୃତ ହୁଏ । ତଦନୁଯାୟୀ ଚାପର ତିନି ପ୍ରକାରର ପରିମାପର ସଂଜ୍ଞା ଦିଆଯାଇପାରିବ । ନିମ୍ନରେ ଯେକୌଣସି ଚାପର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପର ସଂଜ୍ଞା ଦିଆଯାଇଛି ।

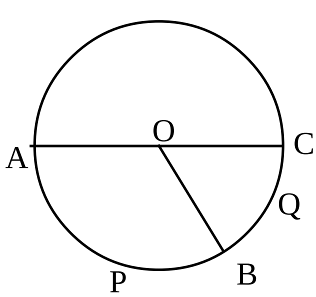
ସଂଜ୍ଞା : ଗୋଟିଏ ଚାପ $\overset{\frown}{APB}$ ର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପ 0 ଓ 360 ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ଏକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ଯାହା $m\overset{\frown}{APB}$ ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ ହୁଏ ଏବଂ ନିମ୍ନମତେ ସ୍ଥିରୀକୃତ ହୁଏ :

O ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ହେଲେ,

(i) $m\overset{\frown}{APB}$ କ୍ଷୁଦ୍ରଚାପ = $m\angle AOB$

(ii) $m\overset{\frown}{APB}$ ଅର୍ଦ୍ଧ ବୃତ୍ତ = 180^0

(iii) $m\overset{\frown}{APB}$ ବୃହତ୍‌ଚାପ = $360^0 - m\angle AOB$



(ଚିତ୍ର 2.27)

ସଂଜ୍ଞାନୁଯାୟୀ **ଏକ ଚାପ ଓ ଏହାର ବିପରୀତ ଚାପର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପର ସମଷ୍ଟି 360^0 ।**

ଚିତ୍ର 2.27ରେ $\overline{AC}$ ବ୍ୟାସ ଓ $m\angle AOB = 120^0$ ହେଲେ $m\overset{\frown}{APB} = 120^0$, $m\overset{\frown}{APC} = 180^0$, $m\overset{\frown}{BQC} = 60^0$ ଏବଂ $m\overset{\frown}{ACB} = 360^0 - 120^0 = 240^0$ ହେବ ।

(**ସୂଚନା:** ଚାପର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପ ପରି ଏହାର ରେଡ଼ିଆନ୍ ପରିମାପ 0 ଓ 2π ମଧ୍ୟରେ ଏକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ଏବଂ ଗ୍ରେଡ଼ ପରିମାପ 0 ଓ 400 ମଧ୍ୟରେ ଏକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା । ଉଚ୍ଚତର ଗଣିତରେ ରେଡ଼ିଆନ୍ ପରିମାପର ବହୁଳ ବ୍ୟବହାର ହୁଏ । ଏହାର ଆଲୋଚନା ପରିମିତିରେ କରାଯିବ । ଏଠାରେ କେବଳ ଏତିକି କୁହାଯାଇପାରେ ଯେ **ଗୋଟିଏ ଚାପର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସମ୍ପୃକ୍ତ ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ସହ ସମାନ ହେଲେ ଚାପଟିର କେନ୍ଦ୍ରସ୍ଥ କୋଣର ରେଡ଼ିଆନ୍ ପରିମାଣ 1^C ଅଟେ ଏବଂ ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାଣ $\frac{180}{\pi}$ ଅଟେ ।** ସାଧାରଣ ଭାବେ ଯେକୌଣସି ଚାପ $\overset{\frown}{APB}$ ର ରେଡ଼ିଆନ୍ ପରିମାଣ $\frac{l\,\overset{\frown}{APB}}{\text{ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ}}$)

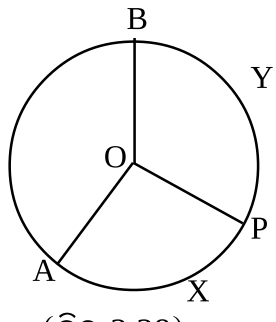
ଚିତ୍ର 2.28ରେ $\overset{\frown}{AXP}$ ଓ $\overset{\frown}{PYB}$ ଦୁଇଟି ସନ୍ନିହିତ ଚାପ ଏବଂ P ସେମାନଙ୍କର ସାଧାରଣ ବିନ୍ଦୁ । ଉକ୍ତ ଚାପଦ୍ୱୟର ସଂଯୋଗରେ ଗଠିତ $\overset{\frown}{APB}$ ର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପ ସମ୍ପୃକ୍ତ ଚାପଦ୍ୱୟର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପର ସମଷ୍ଟି ହେବ ।

ଅର୍ଥାତ୍ $m\overset{\frown}{APB} = m\overset{\frown}{AXP} + m\overset{\frown}{PYB}$

ସେହିପରି ସନ୍ନିହିତ ଚାପର ଦୈର୍ଘ୍ୟକୁ ବିଚାରକୁ ନେଲେ ଆମେ ପାଇବା

$l\,\overset{\frown}{APB} = l\,\overset{\frown}{AXP} + l\,\overset{\frown}{PYB}$

ଏହାର ପ୍ରମାଣ ଆମର ଆଲୋଚନା ପରିସରଭୁକ୍ତ ନୁହେଁ ।



(ଚିତ୍ର 2.28)

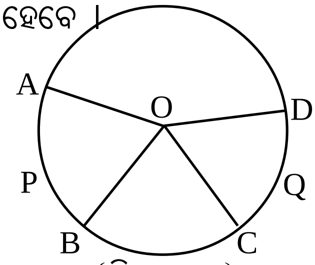
2.6.1 ଚାପର ସର୍ବସମତା (Congruence of arcs) :

ସଂଜ୍ଞା : ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତରେ (ଅଥବା ଦୁଇ ସର୍ବସମ ବୃତ୍ତରେ) ଦୁଇଟି ଚାପର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପ ସମାନ ହେଲେ ଚାପ ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ (Congruent) ହୁଅନ୍ତି ।

ଚିତ୍ର 2.29ରେ $m\angle AOB = m\angle COD \Leftrightarrow \widehat{APB} \cong \widehat{CQD}$ ।

ଏଥିରୁ ସୁସ୍ପଷ୍ଟ ଯେ

(i) ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ କ୍ଷୁଦ୍ରଚାପର କେନ୍ଦ୍ରସ୍ଥ କୋଣଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ ଏବଂ ବିପରୀତ କ୍ରମେ ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ଦୁଇଟି କ୍ଷୁଦ୍ରଚାପର କେନ୍ଦ୍ରସ୍ଥ କୋଣଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ ହେଲେ କ୍ଷୁଦ୍ର ଚାପଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ ହେବେ ।



(ଚିତ୍ର 2.29)

(ii) ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ଦୁଇଟି କ୍ଷୁଦ୍ରଚାପ ସର୍ବସମ ହେଲେ ସେମାନଙ୍କର ବିପରୀତ ବୃହତ୍ ଚାପ ଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟ ସର୍ବସମ ହେବେ । ଏହାର ବିପରୀତ ଉକ୍ତିଟି ମଧ୍ୟ ସତ୍ୟ ।

(iii) ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ଦୁଇଟି ଅର୍ଦ୍ଧବୃତ୍ତ ସର୍ବସମ ।

ଉପରୋକ୍ତ ତଥ୍ୟ (i) ରୁ (iii) ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ଯେକୌଣସି ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ବୃତ୍ତ ନିମନ୍ତେ ମଧ୍ୟ ପ୍ରଯୁଜ୍ୟ ।

ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତରେ ଚାପର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଚାପର କେନ୍ଦ୍ରସ୍ଥ କୋଣ ପରିମାପ ସହ ସମାନୁପାତୀ । କେନ୍ଦ୍ରସ୍ଥ କୋଣ ପରିମାଣର ହ୍ରାସ ବା ବୃଦ୍ଧି ସହିତ ଚାପର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ସମାନୁପାତିକ ହ୍ରାସ ବା ବୃଦ୍ଧି ଘଟିଥାଏ ।

ମନେରଖ : ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତରେ ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ଚାପର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସମାନ ହୁଏ ଏବଂ ବିପରୀତ କ୍ରମେ ସମାନ ଦୈର୍ଘ୍ୟ ବିଶିଷ୍ଟ ଚାପଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ ହୁଅନ୍ତି ।

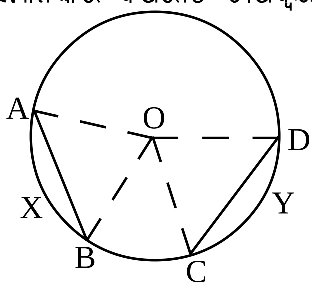
ଉପପାଦ୍ୟ - 10

ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତରେ ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ଚାପ ସହ ସମ୍ପୃକ୍ତ ଜ୍ୟାଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ ।

(Corresponding chords of two congruent arcs in a circle are congruent.)

ଦତ୍ତ : ABC ବୃତ୍ତରେ O କେନ୍ଦ୍ର ଏବଂ $\widehat{AXB}$ ଓ $\widehat{CYD}$ ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ କ୍ଷୁଦ୍ର ଚାପ । $\overline{AB}$ ଓ $\overline{CD}$ ଚାପଦ୍ୱୟର ସମ୍ପୃକ୍ତ ଜ୍ୟା (ଚିତ୍ର 2.30) ।

(ଯଦି $\widehat{AXB}$ ଓ $\widehat{CYD}$ ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ବୃହତ୍ ଚାପ ହୁଅନ୍ତି ତେବେ ସେମାନଙ୍କର ବିପରୀତ ଚାପଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ କ୍ଷୁଦ୍ରଚାପ ହେବେ । ସୁତରାଂ କେବଳ କ୍ଷୁଦ୍ର ଚାପ ପାଇଁ ପ୍ରମାଣ ଯଥେଷ୍ଟ ।)



(ଚିତ୍ର 2.30)

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : $\overline{AB} \cong \overline{CD}$

ଅଙ୍କନ : $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ ଏବଂ $\overline{OD}$ ଅଙ୍କନ କର ।

ପ୍ରମାଣ : Δ OAB ଏବଂ Δ OCD ମଧ୍ୟରେ

$\because$ { OA = OC, OB = OD (ଏକା ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ)
m $\angle AOB$ = m $\angle COD$ ($\because$ $\widehat{AXB} \cong \widehat{CYD}$ ହେତୁ ସେମାନଙ୍କର ଡ଼ିଗ୍ରୀ ପରିମାପ ସମାନ) }

ଅତଏବ $\Delta OAB \cong \Delta OCD$ (ବାହୁ - କୋଣ - ବାହୁ ସର୍ବସମତା)

$\Rightarrow AB = CD \Rightarrow \overline{AB} \cong \overline{CD}$ (ପ୍ରମାଣିତ)

ମନ୍ତବ୍ୟ - 1 : ଉପରୋକ୍ତ ଉପପାଦ୍ୟ -10 ରେ $\overset{\frown}{AXB}$ ଓ $\overset{\frown}{CYD}$ ଚାପଦ୍ୱୟ ଦୁଇଟି ଅର୍ଦ୍ଧବୃତ୍ତ ହେଲେ ସେମାନଙ୍କ ସହ ସମ୍ପୃକ୍ତ ଜ୍ୟା ଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ ହେବେ କାରଣ ସମ୍ପୃକ୍ତ ଜ୍ୟା ଦ୍ୱୟ ଏକା ବୃତ୍ତର ଦୁଇଟି ବ୍ୟାସ ଅଟନ୍ତି ।

2. ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ବୃତ୍ତ ନିମନ୍ତେ ଉପପାଦ୍ୟ - 10 ମଧ୍ୟ ପ୍ରଯୁଜ୍ୟ । ଅର୍ଥାତ୍ **ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ବୃତ୍ତରେ ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ଚାପ ସହ ସମ୍ପୃକ୍ତ ଜ୍ୟା ଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ ।** ଏହାର ପ୍ରମାଣ ଉପପାଦ୍ୟ-10 ର ପ୍ରମାଣର ଅନୁରୂପ ହେବ ।

ପ୍ରମେୟ - 2.5 : ଉପପାଦ୍ୟ - 10 ର ବିପରୀତ କଥନ ଓ ପ୍ରମାଣ :

କୌଣସି ବୃତ୍ତର ଦୁଇଟି ଜ୍ୟା ସର୍ବସମ ହେଲେ ସେମାନଙ୍କ ସହ ସମ୍ପୃକ୍ତ (i) କ୍ଷୁଦ୍ରଚାପ ଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ ଏବଂ (ii) ବୃହତ୍ ଚାପ ଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ ।

[If two chords of a circle are congruent, then the corresponding (i) minor arcs are congruent and (ii) major arcs are congruent.]

ଦତ୍ତ : ABC ବୃତ୍ତରେ O କେନ୍ଦ୍ର ଏବଂ $\overline{AB}$ ଓ $\overline{CD}$ ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ଜ୍ୟା । $\overset{\frown}{AXB}$ ଓ $\overset{\frown}{CYD}$ ଯଥାକ୍ରମେ $\overline{AB}$ ଓ $\overline{CD}$ ଜ୍ୟା ସହ ସମ୍ପୃକ୍ତ କ୍ଷୁଦ୍ରଚାପ ଏବଂ $\overset{\frown}{AYB}$ ଓ $\overset{\frown}{CXD}$ ସମ୍ପୃକ୍ତ ବୃହତ୍ ଚାପ । (ଚିତ୍ର 2.31)

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : (i) $\overset{\frown}{AXB} \cong \overset{\frown}{CYD}$ ଏବଂ (ii) $\overset{\frown}{AYB} \cong \overset{\frown}{CXD}$

ଅଙ୍କନ : $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ ଏବଂ $\overline{OD}$ ଅଙ୍କନ କର ।

ପ୍ରମାଣ : Δ OAB ଏବଂ Δ OCD ମଧ୍ୟରେ

$\because$ { OA = OC, OB = OD (ଏକା ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ)
AB = CD ($\because$ $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ ଦତ୍ତ)

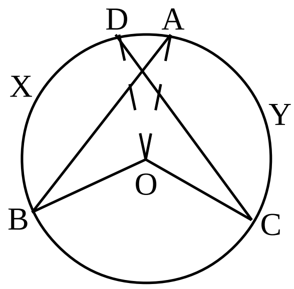
$\therefore$ Δ OAB ≅ Δ OCD (ବାହୁ - ବାହୁ - ବାହୁ ସର୍ବସମତା)

$\Rightarrow m\angle AOB = m\angle COD$ ....(1)

$\Rightarrow \overset{\frown}{AXB} \cong \overset{\frown}{CYD}$ ((i) ପ୍ରମାଣିତ)

ପୁନଶ୍ଚ (1) ରୁ $360^0 - m\angle AOB = 360^0 - m\angle COD$

$\Rightarrow \overset{\frown}{AYB} \cong \overset{\frown}{CXD}$ ((ii) ପ୍ରମାଣିତ)



(ଚିତ୍ର 2.31)

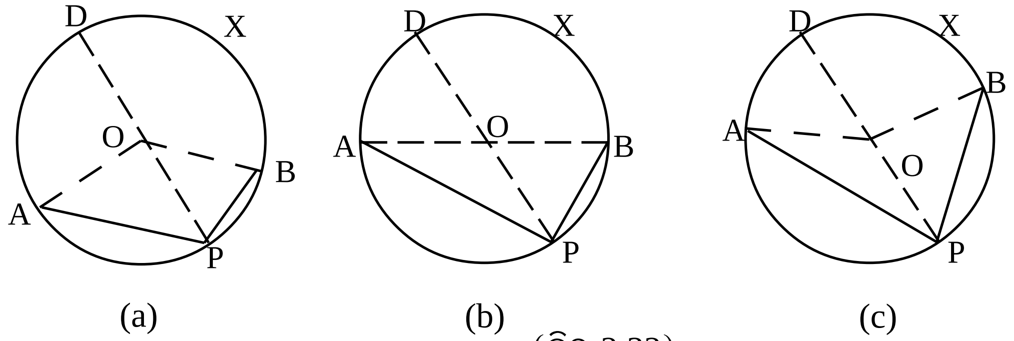
ମନ୍ତବ୍ୟ : ପ୍ରମେୟ - 2.5, ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ବୃତ୍ତ ନିମନ୍ତେ ମଧ୍ୟ ପ୍ରଯୁଜ୍ୟ । ଏହାର କଥନ ଲେଖି ନିଜେ ପ୍ରମାଣ କରିବାକୁ ଚେଷ୍ଟା କର ।

2.6. 2 ଗୋଟିଏ ଚାପର ଅନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣ ସମ୍ପର୍କିତ ଏକ ଗୁରୁତ୍ୱପୂର୍ଣ୍ଣ ତଥ୍ୟ :

ପ୍ରମେୟ - 2.6 : ଏକ ବୃତ୍ତରେ କୌଣସି ଚାପର ଅନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣର ପରିମାଣ ଏହାର ବିପରୀତ ଚାପର ଡ଼ିଗ୍ରୀ ପରିମାପର ଅର୍ଦ୍ଧେକ ।

[In a circle, the measure of an inscribed angle of an arc is half the degree measure of the opposite arc.]

ଦତ୍ତ : APB ବୃତ୍ତରେ O କେନ୍ଦ୍ର । $\angle APB$, $\widehat{APB}$ ର ଏକ ଅନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣ । $\widehat{AXB}$, $\widehat{APB}$ ର ବିପରୀତ ଚାପ (ଚିତ୍ର 2.32) ।



(ଚିତ୍ର 2.32)

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : $m\angle APB = \frac{1}{2} m\, \widehat{AXB}$

ଅଙ୍କନ : $\overrightarrow{PO}$ ବୃତ୍ତକୁ D ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରୁ । $\overline{AO}$, $\overline{BO}$ ଅଙ୍କନ କର ।

ପ୍ରମାଣ : ଏଠାରେ ତିନିଗୋଟି ସମ୍ଭାବନା ଅଛି । ସମ୍ଭାବନାତ୍ରୟ ହେଲେ -

(i) $\widehat{APB}$ ଏକ କ୍ଷୁଦ୍ରଚାପ (ଚିତ୍ର 2.32 (a)),

(ii) $\widehat{APB}$ ଏକ ଅର୍ଦ୍ଧବୃତ୍ତ (ଚିତ୍ର 2.32 (b)) ଏବଂ

(iii) $\widehat{APB}$ ଏକ ବୃହତ୍ ଚାପ (ଚିତ୍ର 2.32 (c))

ବର୍ତ୍ତମାନ ଚିତ୍ର 2.32 (a), (b) ଓ (c) ନିମନ୍ତେ Δ OAP ରେ

AO = PO (ଏକା ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ) $\Rightarrow m\angle OAP = m\angle OPA$ ... (1)

$\angle AOD$ ବହିଃସ୍ଥ କୋଣ $\Rightarrow m\angle AOD = m\angle OAP + m\angle OPA$ (ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ଦୂରବର୍ତ୍ତୀ)

$m\angle AOD = 2m\angle OPA$ ((1) ଦ୍ୱାରା) .....(2)

ସେହିପରି ΔOPB ରୁ ପାଇବା $m\angle BOD = 2m\angle OPB$ ..... (3)

(2) ଓ (3)ରୁ ଆମେ ପାଇବା $m\angle AOD + m\angle BOD = 2m\angle OPA + 2m\angle OPB$

$\Rightarrow m\angle AOD + m\angle BOD = 2m\angle APB$ ..... (4)

ବର୍ତ୍ତମାନ ଚିତ୍ର (c) ରେ

$2m\angle APB = m\angle AOD + m\angle BOD = m\angle AOB$ [(4) - ଦ୍ୱାରା]

$\Rightarrow m\angle APB = \frac{1}{2} m\angle AOB = \frac{1}{2} m\, \widehat{AXB}$ (ପ୍ରମାଣିତ)

ପୁନଶ୍ଚ ଚିତ୍ର (b)ରେ

$2m\angle APB = m\angle AOD + m\angle BOD$ [(4) - ଦ୍ୱାରା]

$= 180^0$ ($\widehat{APB}$ ଅର୍ଦ୍ଧବୃତ୍ତ ହେତୁ $\overline{AB}$ ବ୍ୟାସ)

$\Rightarrow m\angle APB = \frac{180^0}{2} = \frac{1}{2} m \widehat{AXB}$ ($\because \widehat{AXB}$ ମଧ୍ୟ ଏକ ଅର୍ଦ୍ଧବୃତ୍ତ) (ପ୍ରମାଣିତ)

ଶେଷରେ ଚିତ୍ର (a)ରେ $m\angle AOD = 180^0 - m\angle AOP$ ....(5)

($\because \angle AOD$ ଓ $\angle AOP$ ପରସ୍ପର ସନ୍ନିହିତ ପରିପୂରକ)

ସେହିପରି $m\angle BOD = 180^0 - m\angle BOP$ ....(6)

ସୁତରାଂ $2m\angle APB = m\angle AOD + m\angle BOD$ [(4) - ଦ୍ୱାରା]

$= 360^0 - (m\angle AOP + m\angle BOP)$ [(5) ଓ (6) ଦ୍ୱାରା]

$= 360^0 - m\angle AOB$

[$\angle AOP$ ଓ $\angle BOP$ ଦ୍ୱୟ ସନ୍ନିହିତ ଏବଂ P, $\angle AOB$ ର ଅନ୍ତର୍ଦେଶରେ ଅବସ୍ଥିତ]

$= m \widehat{AXB} \Rightarrow m\angle APB = \frac{1}{2} m \widehat{AXB}$ [ପ୍ରମାଣିତ]

ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ, ଚିତ୍ର 2.32 (a)ରେ $\widehat{AXB}$ ର ବିପରୀତ ଚାପ $\widehat{APB}$ ର P ଠାରେ ଉତ୍ପନ୍ନ କୋଣ $\angle APB$ର ପରିମାଣ, $\widehat{AXB}$ ର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପର ଅର୍ଦ୍ଧେକ ।

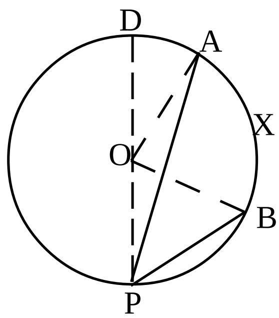
ମନ୍ତବ୍ୟ : $\widehat{APB}$ ବୃହତ୍ ଚାପ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଦିଆଯାଇଥିବା ଚିତ୍ର 2.32 (c) ରେ O ବିନ୍ଦୁଟି $\angle APB$ର ଅନ୍ତର୍ଦେଶରେ ରହିଅଛି । ଯଦି ବିନ୍ଦୁଟି $\angle APB$ ର ବହିର୍ଦେଶରେ ରହେ (ଚିତ୍ର 2.33) ତେବେ ପ୍ରମାଣରେ ସାମାନ୍ୟ ପରିବର୍ତ୍ତନ ହେବ ।

ଚିତ୍ର 2.33ରେ

$2m\angle APB = 2\,(m\angle OPB - m\angle OPA)$

$= m\angle BOD - m\angle AOD$ [(2) ଓ (3) ଦ୍ୱାରା]

$= m\angle BOA = m \widehat{AXB}$ [$\because \widehat{AXB}$ ଏକ କ୍ଷୁଦ୍ର ଚାପ]

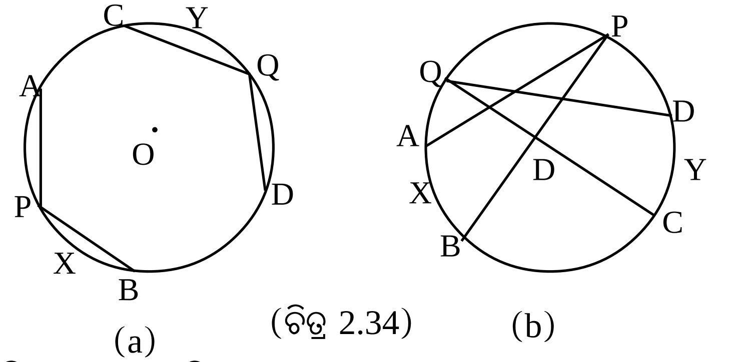


(ଚିତ୍ର 2.33)

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - 1 :

(i) ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତରେ ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ଚାପର ଅନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ । ବିପରୀତ କ୍ରମେ, ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତରେ ଦୁଇଟି ଚାପର ଅନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ ହେଲେ ଚାପଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ । [ଚିତ୍ର 2.34 (a)]

(ii) ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତରେ ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ଚାପର ବିପରୀତ ଚାପାନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ । ବିପରୀତ କ୍ରମେ, ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତରେ ଦୁଇଟି ଚାପର ବିପରୀତ ଚାପାନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ ହେଲେ ଚାପଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ । [ଚିତ୍ର 2.34 (b)]



(ଚିତ୍ର 2.34)

ପ୍ରମାଣ : (i) ଚିତ୍ର 2.34 (a) ନିମନ୍ତେ :

ଦତ୍ତ : $\overset{\frown}{AXB} \cong \overset{\frown}{CYD}$ । $\angle APB$ ଓ $\angle CQD$ ସେମାନଙ୍କର ଦୁଇଟି ଅନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣ ।

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : $\angle APB \cong \angle CQD$

ପ୍ରମାଣ : $\overset{\frown}{AXB} \cong \overset{\frown}{CYD} \Rightarrow \overset{\frown}{AYB} \cong \overset{\frown}{CXD}$ (ବିପରୀତ ଚାପ)

$\Rightarrow m\overset{\frown}{AYB} = m\overset{\frown}{CXD}$ (ସଂଜ୍ଞା) ...... (1)

ବର୍ତ୍ତମାନ $m\angle APB = \frac{1}{2} m\overset{\frown}{AYB}$ ଏବଂ $m\angle CQD = \frac{1}{2} m\overset{\frown}{CXD}$ (ପ୍ରମେୟ – 2.6 ଅନୁଯାୟୀ)

ସୁତରାଂ (1) $\Rightarrow \angle APB \cong \angle CQD$

ବିପରୀତ କ୍ରମେ $\angle APB \cong \angle CQD \Rightarrow m\angle APB = m\angle CQD$

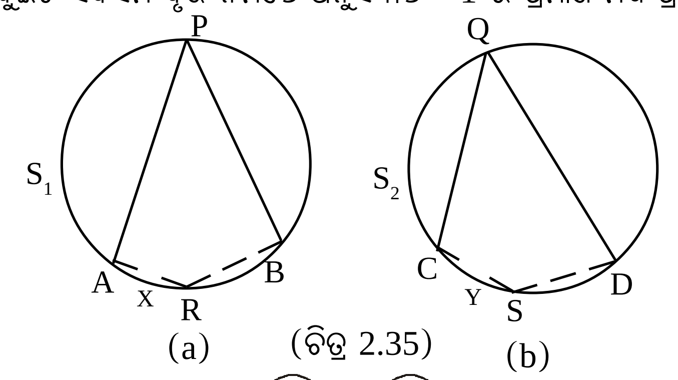
$\Rightarrow \frac{1}{2} m\overset{\frown}{AYB} = \frac{1}{2} m\overset{\frown}{CXD}$ (ପ୍ରମେୟ – 2.6 ଅନୁଯାୟୀ)

$\Rightarrow \overset{\frown}{AYB} \cong \overset{\frown}{CXD}$ (ସଂଜ୍ଞା) $\Rightarrow \overset{\frown}{AXB} \cong \overset{\frown}{CYD}$ (ବିପରୀତ ଚାପ) (ପ୍ରମାଣିତ)

(ii) ଚିତ୍ର 2.34 (b) ନିମନ୍ତେ ପ୍ରମାଣ ନିଜେ କର ।

(**ସୂଚନା:**$\angle APB$ ଓ$\angle CQD$ ଯଥାକ୍ରମେ $\overset{\frown}{AXB}$ ଓ $\overset{\frown}{CYD}$ ର ବିପରୀତ ଚାପର ଅନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣ ଅଟନ୍ତି ।)

ମନ୍ତବ୍ୟ : ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ବୃତ୍ତ ନିମନ୍ତେ ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ – 1 ର ପ୍ରମାଣ ମଧ୍ୟ ପ୍ରଯୁଜ୍ୟ ।



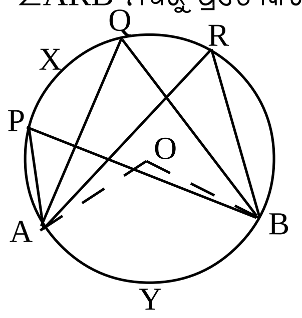
(ଚିତ୍ର 2.35)

ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ବୃତ୍ତ S_1 ଓ S_2 ରେ $\overset{\frown}{AXB} \cong \overset{\frown}{CYD}$ ଓ $\angle ARB$ ଏବଂ $\angle CSD$ ଯଥାକ୍ରମେ ସେମାନଙ୍କର ଦୁଇଟି ଅନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣ ହେଲେ $\angle ARB \cong \angle CSD$ ହେବ । ସେହିପରି $\overset{\frown}{AXB}$ ଓ $\overset{\frown}{CYD}$ ର ବିପରୀତ ଚାପଦ୍ୱୟର ଅନ୍ତର୍ଲିଖିତ ଦୁଇଟି କୋଣ $\angle APB$ ଏବଂ $\angle CQD$ ମଧ୍ୟ ସର୍ବସମ ହେବେ । ଏଥିପାଇଁ ପ୍ରମାଣ ନିଜେ କର ।

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - 2: (i) **ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତରେ କୌଣସି ଚାପର ଅନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣଗୁଡ଼ିକ ସର୍ବସମ ।**

(ii) **ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତରେ କୌଣସି ଚାପର ବିପରୀତ ଚାପାନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣଗୁଡ଼ିକ ସର୍ବସମ ।**

ଚିତ୍ର 2.36ରେ $\overset{\frown}{AXB}$ ର ତିନୋଟି ଅନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣ $\angle APB$, $\angle AQB$ ଏବଂ $\angle ARB$ ମଧ୍ୟରୁ ପ୍ରତ୍ୟେକର ପରିମାଣ ବିପରୀତ ଚାପ $\overset{\frown}{AYB}$ ର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପର ଅର୍ଦ୍ଧେକ (ପ୍ରମେୟ-2.6)।



(ଚିତ୍ର 2.36)

ସୁତରାଂ $m\angle APB = m\angle AQB = m\angle ARB = \frac{1}{2} m\, \overset{\frown}{AYB}$ ......(i)

$\Rightarrow$ $\overset{\frown}{AYB}$ ର ବିପରୀତ ଚାପର ଅନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣଗୁଡ଼ିକ ସର୍ବସମ ।

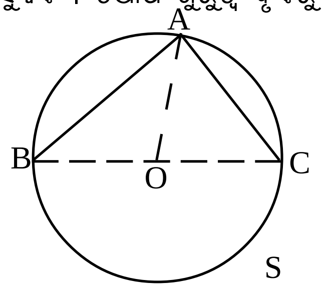
$\Rightarrow$ $\overset{\frown}{AXB}$ ର ଅନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣଗୁଡ଼ିକ ସର୍ବସମ ।

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - 3 : ଏକ ଅର୍ଦ୍ଧବୃତ୍ତର ଅନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣ ଏକ ସମକୋଣ ।

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - 4 : କୌଣସି ଚାପର ଅନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣ ଏକ ସମକୋଣ ହେଲେ ଚାପଟି ଏକ ଅର୍ଦ୍ଧବୃତ୍ତ ।

ପ୍ରମେୟ- 2.6ରେ ପ୍ରମାଣ ଅନ୍ତର୍ଗତ ସମ୍ଭାବନା (ii) ଚିତ୍ର 2.32 (b) ରୁ ଏହା ସୁସ୍ପଷ୍ଟ । ତଥାପି ଗୁରୁତ୍ୱ ଦୃଷ୍ଟିରୁ ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - 3 ଓ 4 ର ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ପ୍ରମାଣ ନିମ୍ନରେ ଦିଆଯାଇଛି ।

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - 3 ର ପ୍ରମାଣ :



(ଚିତ୍ର 2.37)

ଦତ୍ତ : S ବୃତ୍ତରେ BAC ଏକ ଅର୍ଦ୍ଧବୃତ୍ତ । (ଚିତ୍ର 2.37)

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : $\angle BAC$ ଏକ ସମକୋଣ ।

ଅଙ୍କନ : O ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ହେଲେ $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ ଓ $\overline{OC}$ ଅଙ୍କନ କର ।

ପ୍ରମାଣ : BAC ଅର୍ଦ୍ଧବୃତ୍ତ ହେତୁ $\overline{BC}$ ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସ ।

ΔBAO ରେ $OB = OA$ (ଏକା ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ) $\Rightarrow m\angle OAB = m\angle OBA$

ସେହିପରି ΔCAO ରେ $m\angle OAC = m\angle OCA$

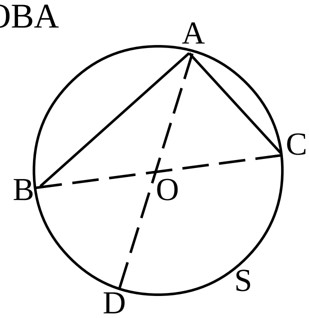
ସୁତରାଂ $m\angle OAB + m\angle OAC = m\angle OBA + m\angle OCA$

$\Rightarrow m\angle BAC = m\angle OBA + m\angle OCA$

$\Rightarrow 2m\angle BAC = m\angle BAC + m\angle OBA + m\angle OCA = 180^0$

[ΔABC ର କୋଣମାନଙ୍କର ପରିମାଣର ସମଷ୍ଟି 180^0]

$\Rightarrow m\angle BAC = 90^0$ ଅର୍ଥାତ୍ $\angle BAC$ ଏକ ସମକୋଣ । (ପ୍ରମାଣିତ)



(ଚିତ୍ର 2.38)

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - 4ର ପ୍ରମାଣ :

ଦତ୍ତ: S ବୃତ୍ତରେ $\angle BAC$, $\overset{\frown}{BAC}$ ର ଏକ ଅନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣ ଏବଂ $\angle BAC$ ଏକ ସମକୋଣ (ଚିତ୍ର 2.38)।

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : $\overset{\frown}{BAC}$ ଏକ ଅର୍ଦ୍ଧବୃତ୍ତ ।

ଅଙ୍କନ : O ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ହେଲେ $\overline{AO}$, $\overline{BO}$ ଏବଂ $\overline{CO}$ ଅଙ୍କନ କର । $\overrightarrow{AO}$ ବୃତ୍ତକୁ D ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରୁ ।

ପ୍ରମାଣ : Δ ABO ରେ OB = OA (ଏକା ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ)

$\Rightarrow m\angle OBA = m\angle OAB$ ....(i)

$\angle BOD$, Δ ABO ର ଏକ ବହିଃସ୍ଥ କୋଣ ।

$\therefore m\angle BOD = m\angle OBA + m\angle OAB = 2m\angle OAB$ [(i)ଦ୍ୱାରା]

ସେହିପରି ପ୍ରମାଣ କରାଯାଇପାରେ ଯେ, $m\angle COD = 2m\angle OAC$

$\therefore m\angle BOD + m\angle COD = 2m\angle OAB + 2m\angle OAC = 2m\angle BAC = 180^0$

[$\because m\angle BAC = 90^0$ (ଦତ୍ତ)]

$\Rightarrow \overrightarrow{OB}$ ଓ $\overrightarrow{OC}$ ପରସ୍ପର ବିପରୀତ ରଶ୍ମୀ । ଅର୍ଥାତ B, O, C ଏକ ରେଖୀୟ ।

O କେନ୍ଦ୍ର ହେତୁ $\overline{BC}$ ଏକ ବ୍ୟାସ $\Rightarrow \widehat{BAC}$ ଏକ ଅର୍ଦ୍ଧବୃତ୍ତ । (ପ୍ରମାଣିତ)

2.7 ବୃତ୍ତଖଣ୍ଡ, ବୃତ୍ତଖଣ୍ଡସ୍ଥ କୋଣ ଏବଂ ବୃତ୍ତକଳା

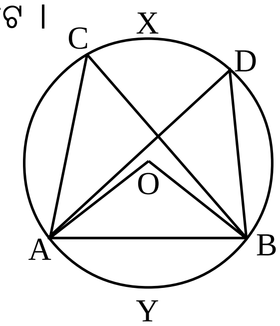
(Segment, angle inscribed in a segment and sector) :

2.7.1 ବୃତ୍ତଖଣ୍ଡ :

ବୃତ୍ତର ଏକ ଜ୍ୟା ଏବଂ ଜ୍ୟା ସହ ସମ୍ପୃକ୍ତ କୌଣସି ଏକ ଚାପର ସଂଯୋଗରେ ଉତ୍ପନ୍ନ ସେଟ୍‌କୁ ଏକ ବୃତ୍ତଖଣ୍ଡ କୁହାଯାଏ । ଚିତ୍ର 2.39ରେ $\overline{AB}$ ଜ୍ୟା ଦ୍ୱାରା ଉତ୍ପନ୍ନ ଏକ ବୃତ୍ତଖଣ୍ଡ ହେଉଛି AXBA । $\widehat{AXB}$ ଏକ ବୃହତ୍ ଚାପ ହୋଇଥିବା ଯୋଗୁଁ **AXBA ଏକ ବୃହତ୍ ବୃତ୍ତଖଣ୍ଡ (Major Segment) ।** ସେହିପରି ଅନୁରୂପ କାରଣରୁ **AYBA ଏକ କ୍ଷୁଦ୍ର ବୃତ୍ତଖଣ୍ଡ (Minor Segment) ।**

2.7.2 ବୃତ୍ତଖଣ୍ଡସ୍ଥ କୋଣ :

କୌଣସି ଚାପର ଏକ ଅନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣକୁ ସମ୍ପୃକ୍ତ ବୃତ୍ତଖଣ୍ଡସ୍ଥ କୋଣ (Angle inscribed in a segment) କୁହାଯାଏ । ଚିତ୍ର 2.39ରେ $\angle ACB$, AXBA ବୃତ୍ତଖଣ୍ଡସ୍ଥ କୋଣ ଅଟେ ।



(ଚିତ୍ର 2.39)

ସେହିପରି $\angle ADB$, AXBA ବୃତ୍ତଖଣ୍ଡସ୍ଥ ଅନ୍ୟ ଏକ କୋଣ ଅଟେ ।

ପ୍ରମେୟ -2.6 ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ -2 ର ନିମ୍ନ ବିକଳ୍ପ କଥନଟି ସୁସ୍ପଷ୍ଟ :

କୌଣସି ଏକ ବୃତ୍ତଖଣ୍ଡସ୍ଥ ସମସ୍ତ କୋଣ ସର୍ବସମ ।

ଚିତ୍ର 2.39 ରେ $m\angle ACB = m\angle ADB$ ।

ସେହିପରି ପ୍ରମେୟ - 2.6, ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - 3 ର ବିକଳ୍ପ କଥନଟି ମଧ୍ୟ ସୁସ୍ପଷ୍ଟ ।

ଅର୍ଦ୍ଧ ବୃତ୍ତଖଣ୍ଡସ୍ଥ କୋଣ ଏକ ସମକୋଣ ।

2.7.3 ବୃତ୍ତକଳା :

ବୃତ୍ତର କୌଣସି ଏକ ଚାପ, ଚାପର ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁକୁ କେନ୍ଦ୍ର ସହିତ ଯୋଗ କରୁଥିବା ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ଦ୍ୱୟର ସଂଯୋଗରେ ବୃତ୍ତକଳା (Sector) ଗଠିତ ହୁଏ । ଚିତ୍ର 2.39 ରେ OAYB ଏକ ବୃତ୍ତକଳା ଅଟେ ।

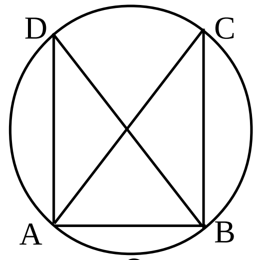
ପରିମିତିରେ ବୃତ୍ତଖଣ୍ଡ ଓ ବୃତ୍ତକଳା ସମ୍ବନ୍ଧରେ ବିଶଦ ଆଲୋଚନା କରାଯାଇଛି ।

2.8 ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ଚତୁର୍ଭୁଜ (Cyclic quadrilateral) :

ଆମେ ଜାଣୁ ଯେ ଏକ ସରଳରେଖାରେ ନ ଥିବା ତିନୋଟି ବିନ୍ଦୁ ଦତ୍ତ ଥିଲେ ଉକ୍ତ ବିନ୍ଦୁମାନେ ସର୍ବଦା ଏକ ବୃତ୍ତ ଉପରେ ରହିବେ । ଅର୍ଥାତ୍ ସେହି ତିନୋଟି ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ସର୍ବଦା ଏକ ବୃତ୍ତ ଅଙ୍କନ ସମ୍ଭବ । କିନ୍ତୁ ଚାରିଟି ବିନ୍ଦୁ ଦତ୍ତ ଥିଲେ ସେମାନେ ସର୍ବଦା ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତ ଉପରେ ରହିବେ କି ? ଏହା ସର୍ବଦା ସମ୍ଭବ ନୁହେଁ । ନିମ୍ନରେ ଆଲୋଚିତ ସର୍ତ୍ତ ପୂରଣ କରୁଥିଲେ ଚାରିଟି ବିନ୍ଦୁ ଏକ ବୃତ୍ତ ଉପରିସ୍ଥ **(Concyclic)** ହେବେ ।

ପ୍ରମେୟ - 2.7 : ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁର ସଂଯୋଜକ ରେଖାଖଣ୍ଡ ତାର ଏକ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଅନ୍ୟ ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁଠାରେ ଉତ୍ପନ୍ନ କରୁଥିବା କୋଣଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ ହେଲେ ବିନ୍ଦୁ ଚାରିଟି ଏକ ବୃତ୍ତ ଉପରେ ରହିବେ ।

[If the angles subtended by a line segment joining two points at two other points lying on the same side of the segment are congruent, then the four points lie on a circle.]



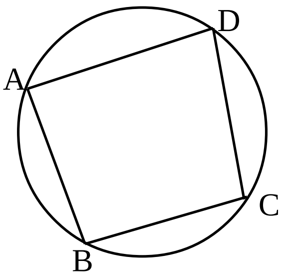
(ଚିତ୍ର 2.40)

ଦତ୍ତ : A ଓ B ବିନ୍ଦୁ ଦ୍ୱୟର ସଂଯୋଜକ ରେଖାଖଣ୍ଡ $\overline{AB}$ ଏହାର ଏକ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଥିବା C ଓ D ବିନ୍ଦୁଠାରେ $\angle ACB$ ଓ $\angle ADB$ ଉତ୍ପନ୍ନ କରୁଅଛି ଏବଂ $\angle ACB \cong \angle ADB$ (ଚିତ୍ର 2.40) ।

ସିଦ୍ଧାନ୍ତ : A, B, C ଓ D ବିନ୍ଦୁ ଚାରିଟି ଏକ ବୃତ୍ତ ଉପରିସ୍ଥ ହେବେ ।

ଏହାର ପ୍ରମାଣ ପାଠ୍ୟକ୍ରମ ବହିର୍ଭୁକ୍ତ ଥିବାରୁ ଏଠାରେ ଆଲୋଚନା କରାଯାଇ ନାହିଁ । ଆଗ୍ରହୀ ଛାତ୍ରଛାତ୍ରୀଙ୍କ ନିମନ୍ତେ ଏହି ଅଧ୍ୟାୟର ପରିଶିଷ୍ଟରେ ପ୍ରମେୟ 2.7 ର ପ୍ରମାଣ ଦିଆଯାଇଛି ।

ଏକ ବୃତ୍ତ ଉପରେ ଥିବା ଚାରିଗୋଟି ବିନ୍ଦୁ A, B, C ଓ D ଏକ ଚତୁର୍ଭୁଜ ABCD ଗଠନ କରୁଥିଲେ ଅର୍ଥାତ୍ $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ ଓ $\overline{DA}$ ମଧ୍ୟରୁ କୌଣସି ଦୁଇଟି ପରସ୍ପରକୁ ପ୍ରାନ୍ତ ବିନ୍ଦୁ ଭିନ୍ନ ଅନ୍ୟତ୍ର ଛେଦ କରୁ ନ ଥିଲେ ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜକୁ ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ଚତୁର୍ଭୁଜ କହିବା ।



(ଚିତ୍ର 2.41)

ସଂଜ୍ଞା : ଏକ ଚତୁର୍ଭୁଜର ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ ଗୁଡ଼ିକ ଏକ ବୃତ୍ତ ଉପରେ ଅବସ୍ଥିତ ହେଉଥିଲେ ଚତୁର୍ଭୁଜଟିକୁ ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ଚତୁର୍ଭୁଜ (Cyclic Quadrilateral) କୁହାଯାଏ ।

ଚିତ୍ର 2.41ରେ ABCD ଏକ ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ଚତୁର୍ଭୁଜ ।

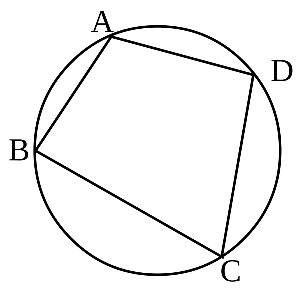
ଏକ ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ଚତୁର୍ଭୁଜର କୋଣମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ ଥିବା ସମ୍ବନ୍ଧ ଉପପାଦ୍ୟ- 11 ରେ ଦିଆଯାଇଛି ।

ଉପପାଦ୍ୟ - 11

ଏକ ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ଚତୁର୍ଭୁଜର ବିପରୀତ କୋଣମାନ ପରସ୍ପର ପରିପୂରକ ।

[The opposite angles of a cyclic quadrilateral are supplementary.]

ଦତ୍ତ : ABCD ଏକ ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ଚତୁର୍ଭୁଜ (ଚିତ୍ର 2.42)



(ଚିତ୍ର 2.42)

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : $m\angle A + m\angle C = 180^0$ ଏବଂ $m\angle B + m\angle D = 180^0$

ପ୍ରମାଣ : ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜରେ $\overline{AC}$ ଓ $\overline{BD}$ କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ ଛେଦ କରନ୍ତି (ପ୍ରମାଣ ନିମନ୍ତେ ମନ୍ତବ୍ୟ ଦେଖ) ।

$\therefore$ B ଓ D ବିନ୍ଦୁ ଦ୍ୱୟ $\overline{AC}$ ର ବିପରୀତ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଅବସ୍ଥିତ ।

$\Rightarrow \overset{\frown}{ABC}$ ଓ $\overset{\frown}{ADC}$ ଦୁଇଟି ବିପରୀତ ଚାପ ।

ତେଣୁ ଚାପର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପର ସଂଜ୍ଞାନୁସାରେ

$m\overset{\frown}{ABC} + m\overset{\frown}{ADC} = 360^0 \Rightarrow \frac{1}{2}m\overset{\frown}{ABC} + \frac{1}{2}m\overset{\frown}{ADC} = 180^0$ .... (1)

କିନ୍ତୁ $m\angle ADC = \frac{1}{2}m\overset{\frown}{ABC}$ ଏବଂ $m\angle ABC = \frac{1}{2}m\overset{\frown}{ADC}$ (ପ୍ରମେୟ - 2.6)

$\Rightarrow m\angle ADC + m\angle ABC = \frac{1}{2}m\overset{\frown}{ABC} + \frac{1}{2}m\overset{\frown}{ADC} = 180^0$ ((1) ଦ୍ୱାରା)

କିନ୍ତୁ ଆମେ ଜାଣୁ ଯେ ଏକ ଚତୁର୍ଭୁଜରେ $m\angle A + m\angle B + m\angle C + m\angle D = 360^0$

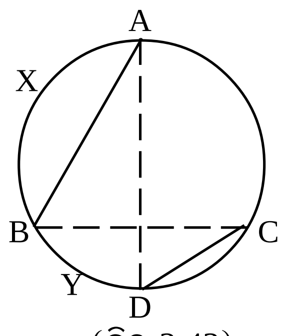
ସୁତରାଂ $m\angle BAD + m\angle BCD = 180^0$ (ପ୍ରମାଣିତ)

ମନ୍ତବ୍ୟ : ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜ ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ହେଲେ ଏହାର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ $\overline{AC}$ ଓ $\overline{BD}$ ପରସ୍ପରକୁ ଛେଦ କରନ୍ତି ।

ପ୍ରମାଣ : ଯଦି $\overline{AC}$ ଓ $\overline{BD}$ ପରସ୍ପରକୁ ଛେଦ ନ କରନ୍ତି (ଚିତ୍ର 2.43 ଦେଖ) ତେବେ B ଓ D $\overline{AC}$ ର ଏକ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ରହିବେ । ଅର୍ଥାତ୍ D, $\overset{\frown}{ABC}$ ଉପରେ ରହିବ । ମନେକର D, $\overset{\frown}{BYC}$ ର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ । A, $\overset{\frown}{ABC}$ ର ଏକ ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁ ହୋଇଥିବାରୁ $\overset{\frown}{BYC}$ ର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ହେବ ନାହିଁ ।

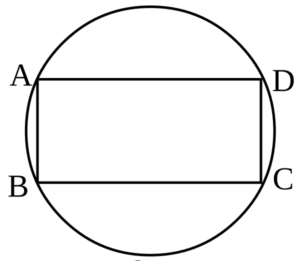
$\Rightarrow$ A ଓ D, $\overline{BC}$ ର ବିପରୀତ ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ହେବେ ।

$\Rightarrow \overline{AD}$ ଓ $\overline{BC}$ ପରସ୍ପରକୁ ଛେଦ କରିବେ, ଯାହାକି ଚତୁର୍ଭୁଜର ସଂଜ୍ଞାନୁଯାୟୀ ଅସମ୍ଭବ । ତେଣୁ D, $\overset{\frown}{ABC}$ ର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ହେବ ନାହିଁ । ସେହିପରି D, $\overset{\frown}{AXB}$ ର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ହେବ ନାହିଁ । ସୁତରାଂ D, ABC .ଉପରେ ରହି ପାରିବ ନାହିଁ । ତେଣୁ $\overline{AC}$ ଓ $\overline{BD}$ ପରସ୍ପରକୁ ଛେଦ କରିବେ । (ପ୍ରମାଣିତ) ।



(ଚିତ୍ର 2.43)

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - 1 : ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର ଏକ ଆୟତଚିତ୍ର ।



(ଚିତ୍ର 2.44)

ପ୍ରମାଣ : ABCD ଏକ ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର (ଚିତ୍ର 2.44)

$\Rightarrow m\angle A = m\angle C$ (ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ରର ସମ୍ମୁଖୀନ କୋଣମାନେ ସର୍ବସମ)

କିନ୍ତୁ $m\angle A + m\angle C = 180^0$ (ଉପପାଦ୍ୟ - 11)

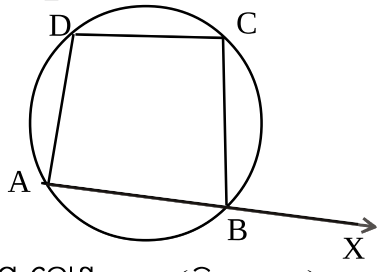
$\Rightarrow 2m\angle A = 180^0 \Rightarrow m\angle A = 90^0$

ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ରର ଗୋଟିଏ କୋଣ ସମକୋଣ । $\therefore$ ABCD ଏକ ଆୟତଚିତ୍ର ।

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - 2 : ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ରମ୍ବସ ଏକ ବର୍ଗଚିତ୍ର ।

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - 1 ଅନୁଯାୟୀ ରମ୍ବସର ଗୋଟିଏ କୋଣ ଏକ ସମକୋଣ ହେବ ।

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - 3: ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ଚତୁର୍ଭୁଜର ଏକ ବହିଃସ୍ଥ କୋଣର ପରିମାଣ ଏହାର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ବିପରୀତ କୋଣର ପରିମାଣ ସହ ସମାନ ।



(ଚିତ୍ର 2.45)

ଚିତ୍ର 2.45 ରେ ABCD ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ଚତୁର୍ଭୁଜର $\angle CBX$ ଏକ ବହିଃସ୍ଥ କୋଣ

$\Rightarrow m\angle ABC + m\angle CBX = 180^0$

କିନ୍ତୁ $m\angle ABC + m\angle ADC = 180^0$ (ଉପପାଦ୍ୟ - 11) $\Rightarrow m\angle CBX = m\angle ADC$

ପ୍ରମେୟ - 2.8 : (ଉପପାଦ୍ୟ - 11ର ବିପରୀତ କଥନ) :

ଗୋଟିଏ ଚତୁର୍ଭୁଜର ବିପରୀତ କୋଣମାନ ପରସ୍ପର ପରିପୂରକ ହେଲେ ଚତୁର୍ଭୁଜଟି ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ହେବ ।

[If the opposite angles of a quadrilateral are supplementary, then the quadrilateral is cyclic.]

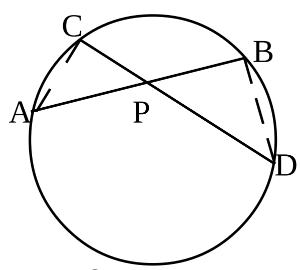
ଦତ୍ତ : ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜରେ $m\angle A + m\angle C = 180^0$ ଏବଂ $m\angle B + m\angle D = 180^0$ (ଚିତ୍ର 2.41)

ସିଦ୍ଧାନ୍ତ : ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜଟି ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ।

ପ୍ରମେୟ -2.8 ର ପ୍ରମାଣ ପାଠ୍ୟକ୍ରମ ବହିର୍ଭୁକ୍ତ ଥିବାରୁ ଆଗ୍ରହୀ ଛାତ୍ରଛାତ୍ରୀଙ୍କ ନିମନ୍ତେ ଏହି ଅଧ୍ୟାୟର ପରିଶିଷ୍ଟରେ ଉକ୍ତ ପ୍ରମେୟର ପ୍ରମାଣ ଦିଆଯାଇଛି ।

ବୃତ୍ତ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ କେତେଗୋଟି ଉଦାହରଣ :

ଉଦାହରଣ : - 1 ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତରେ ଦୁଇଟି ଜ୍ୟା $\overline{AB}$ ଓ $\overline{CD}$ ପରସ୍ପରକୁ ବୃତ୍ତର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ P ଠାରେ ଛେଦ କରନ୍ତି । ପ୍ରମାଣ କର ଯେ AP . PB = CP. PD ।



(ଚିତ୍ର 2.46)

ସମାଧାନ : ଚିତ୍ର 2.46 ରେ $\overline{AB}$ ଓ $\overline{CD}$ ଜ୍ୟା ଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ P ଠାରେ ଛେଦ କରୁଛନ୍ତି । ପ୍ରମାଣ କରିବାକୁ ହେବ ଯେ PA . PB = PC .PD

ଅଙ୍କନ : $\overline{CA}$ ଓ $\overline{BD}$ ଅଙ୍କନ କର ।

ପ୍ରମାଣ : Δ PAC ଓ Δ PBD ମଧ୍ୟରେ

$m\angle ACP = m\angle PBD$ (ଏକା ଚାପ $\overparen{ABD}$ ର ଅନ୍ତର୍ଲିଖିତ);

$m\angle PAC = m\angle PDB$ (ଏକା ଚାପ $\overset{\frown}{BC}$ ର ବିପରୀତ ଚାପାନ୍ତର୍ଲିଖିତ) ଏବଂ

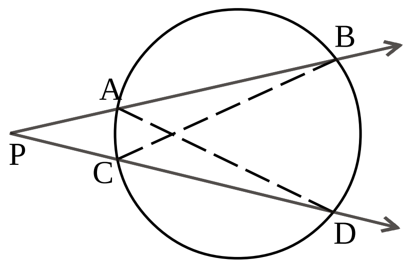
$m\angle APC = m\angle BPD$ (ପ୍ରତୀପ କୋଣ)

$\Rightarrow \Delta PAC \sim \Delta PBD$ (କୋ-କୋ-କୋ ସାଦୃଶ୍ୟ)

$\Rightarrow \frac{AP}{PD} = \frac{PC}{PB} \Rightarrow PA . PB = PC. PD$ (ପ୍ରମାଣିତ)

ଉଦାହରଣ - 2 : ଏକ ବୃତ୍ତର ବହିଃସ୍ଥ P ବିନ୍ଦୁଗାମୀ ଦୁଇଟି ଛେଦକ ବୃତ୍ତକୁ ଯଥାକ୍ରମେ A, B ଏବଂ C, D ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରନ୍ତି (ଚିତ୍ର 2.47) ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, PA . PB = PC. PD ।

ସମାଧାନ : ଚିତ୍ର 2.47ରେ P ବିନ୍ଦୁ ମଧ୍ୟ ଦେଇ ଦୁଇଟି ଛେଦକ $\overrightarrow{PB}$ ଓ $\overrightarrow{PD}$ ବୃତ୍ତକୁ ଯଥାକ୍ରମେ A, B ଏବଂ C, D ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରୁଛନ୍ତି ।



(ଚିତ୍ର 2.47)

ପ୍ରମାଣ୍ୟ : ପ୍ରମାଣ କରିବାକୁ ହେବ ଯେ PA . PB = PC. PD ।

ଅଙ୍କନ : $\overline{BC}$ ଓ $\overline{AD}$ ଅଙ୍କନ କର ।

ପ୍ରମାଣ : ΔPAD ଓ ΔPCB ମଧ୍ୟରେ $\angle APC$ ସାଧାରଣ ।

$m\angle ADP = m\angle CBP$ (ଏକା ଚାପ $\overset{\frown}{AC}$ ର ବିପରୀତ ଚାପାନ୍ତର୍ଲିଖିତ)

$\Rightarrow \Delta ADP \sim \Delta PCB$ (କୋ-କୋ ସାଦୃଶ୍ୟ)

$\Rightarrow \frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB} \Rightarrow PA . PB = PC. PD$ (ପ୍ରମାଣିତ)

ଉଦାହରଣ - 3 : ଏକ ବୃତ୍ତର ବହିଃସ୍ଥ P ବିନ୍ଦୁଗାମୀ ଦୁଇଟି ଛେଦକ ବୃତ୍ତକୁ ଯଥାକ୍ରମେ A, B ଏବଂ C, D ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରନ୍ତି । ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $m\angle APC = \frac{1}{2}[m\overset{\frown}{BD} - m\overset{\frown}{AC}]$

ସମାଧାନ : ଚିତ୍ର 2.47 ରେ P ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଦୁଇଟି ଛେଦକ $\overrightarrow{PB}$ ଓ $\overrightarrow{PD}$ ବୃତ୍ତକୁ A, B ଏବଂ C, D ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରୁଛନ୍ତି । ପ୍ରମାଣ କରିବାକୁ ହେବ ଯେ $m\angle APC = \frac{1}{2}[m\overset{\frown}{BD} - m\overset{\frown}{AC}]$

ଅଙ୍କନ : $\overline{AD}$ ଓ $\overline{BC}$ ଅଙ୍କନ କର ।

ପ୍ରମାଣ : ΔPAD ରେ $m\angle APD = m\angle BAD - m\angle ADP$ ($\because \angle BAD$ ବହିଃସ୍ଥ କୋଣ) ....(1)

କିନ୍ତୁ $m\angle BAD = \frac{1}{2}m\overset{\frown}{BD}$ ଏବଂ $m\angle ADP = m\angle ADC = \frac{1}{2}m\overset{\frown}{AC}$

ସୁତରାଂ $m\angle APC = \frac{1}{2}[m\overset{\frown}{BD} - m\overset{\frown}{AC}]$ [(1) (ରୁ)] (ପ୍ରମାଣିତ)

ପରିଶିଷ୍ଟ

ଆଗ୍ରହୀ ଛାତ୍ରଛାତ୍ରୀଙ୍କ ପାଇଁ ପ୍ରମେୟ 2.7 ଓ 2.8 ର ପ୍ରମାଣ ନିମ୍ନରେ ଦିଆଯାଇଛି ।

ପ୍ରମେୟ - 2.7ର ପ୍ରମାଣ :

ଦତ୍ତ : C ଓ D ବିନ୍ଦୁ ଦ୍ୱୟ $\overline{AB}$ ର ଏକ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଅବସ୍ଥିତ ଏବଂ $m\angle ACB = m\angle ADB$ ।

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : A, B, C ଓ D ବିନ୍ଦୁ ଚାରିଟି ଏକ ବୃତ୍ତ ଉପରେ ରହିବେ ।

ଅଙ୍କନ : ଯେହେତୁ A, B ଓ C ଏକ ସରଳରେଖାରେ ନାହାନ୍ତି, ସେମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟ ଦେଇ ABC ବୃତ୍ତ ଅଙ୍କିତ ହେଉ ।

ପ୍ରମାଣ : ବର୍ତ୍ତମାନ ଆମେ ଦର୍ଶାଇବା ଯେ D ବିନ୍ଦୁଟି ABC ବୃତ୍ତ ଉପରେ ରହିବ ।

ମନେକର D ବିନ୍ଦୁ ବୃତ୍ତର ବହିର୍ଦ୍ଦେଶରେ ରହିବ (ଚିତ୍ର 2.48) ତେବେ $\overleftrightarrow{BD}$ କିମ୍ବା $\overleftrightarrow{AD}$ ବୃତ୍ତକୁ ଏକ ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରିବ । (ସମତଳ ଉପରେ $\overline{AB}$ ର C ପାର୍ଶ୍ୱରେ Dର ବିଭିନ୍ନ ଅବସ୍ଥିତି ନେଇ ଏହା ପ୍ରମାଣ କରିହେବ ।)

ମନେକର $\overleftrightarrow{BD}$ ବୃତ୍ତଟିକୁ E ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ । $\overline{AE}$ ଅଙ୍କିତ ହେଉ ।

ଯେହେତୁ C ଓ E ବିନ୍ଦୁ ଦ୍ୱୟ $\widehat{ACB}$ ଉପରେ ଅଛନ୍ତି ।

ପ୍ରମେୟ - 2.6 ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - 2 ଦ୍ୱାରା

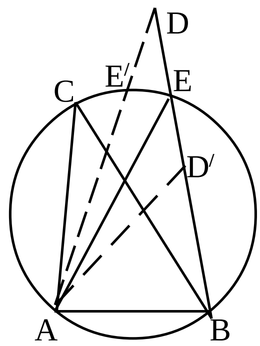
$m\angle ACB = m\angle AEB$ ....(1)

ΔADE ରେ $\angle AEB$ ବହିଃସ୍ଥ ।

ସୁତରାଂ $m\angle AEB \neq m\angle ADB$

କିନ୍ତୁ ଦତ୍ତ ଅଛି ଯେ $m\angle ADB = m\angle ACB$

$\Rightarrow m\angle AEB \neq m\angle ACB$ ଯାହା (1)କୁ ବିରୋଧ କରୁଛି ।



(ଚିତ୍ର 2.48)

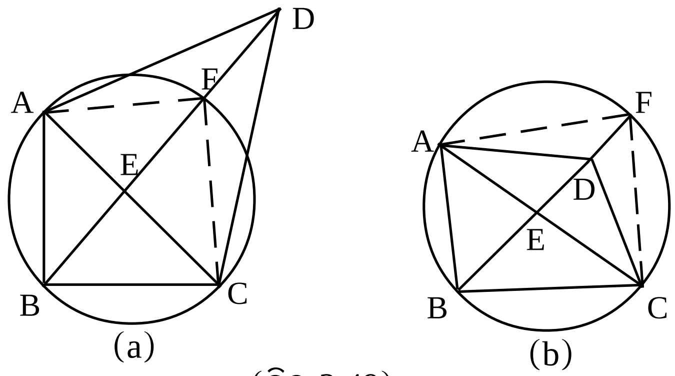
ସେହିପରି $\overleftrightarrow{AD}$ ବୃତ୍ତକୁ ଏକ ବିନ୍ଦୁରେ E' ଠାରେ ଛେଦ କଲେ $\overline{BE'}$ ଅଙ୍କନ କରି ପୂର୍ବ ପରି ଆମେ ଦୁଇଟି ପରସ୍ପର ବିରୋଧୀ ଉକ୍ତି ପାଇବା ।

ତେଣୁ D ବିନ୍ଦୁଟି ବୃତ୍ତର ବହିର୍ଦ୍ଦେଶରେ ରହିବ ନାହିଁ । ଯଦି D ବିନ୍ଦୁଟି ବୃତ୍ତର ଅନ୍ତର୍ଦ୍ଦେଶରେ D' ଠାରେ ରହେ ତେବେ ଉପରୋକ୍ତ ଧାରାରେ ଆମେ ଦୁଇଟି ପରସ୍ପର ବିରୋଧୀ ଉକ୍ତି ପାଇବା । ତେଣୁ D ବିନ୍ଦୁ ବୃତ୍ତର ଅନ୍ତର୍ଦ୍ଦେଶରେ ରହିବ ନାହିଁ ।

ସୁତରାଂ D ବିନ୍ଦୁଟି ABC ବୃତ୍ତ ଉପରେ ଅବସ୍ଥିତ । (ପ୍ରମାଣିତ)

ପ୍ରମେୟ - 2.8ର ପ୍ରମାଣ :

ଦତ୍ତ : ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜରେ $m\angle A + m\angle C = 180^0$ ଏବଂ $m\angle B + m\angle D = 180^0$ (ଚିତ୍ର 2.49)



(ଚିତ୍ର 2.49)

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜଟି ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ।

ପ୍ରମାଣ : (ଅସମ୍ଭବାୟନ ପ୍ରଣାଳୀ) ମନେକର ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜ ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ନୁହେଁ । ତେବେ A,B ଓ C ମଧ୍ୟ ଦେଇ ଅଙ୍କିତ ବୃତ୍ତ ଉପରେ D ବିନ୍ଦୁ ଅବସ୍ଥିତ ହେବ ନାହିଁ । ସୁତରାଂ D, ABC ବୃତ୍ତର ବହିଃସ୍ଥ (ଚିତ୍ର 2.49)(a)) କିମ୍ବା ଅନ୍ତଃସ୍ଥ (ଚିତ୍ର 2.49) (b)) ହେବ । ଉଭୟ କ୍ଷେତ୍ରରେ $m\angle A + m\angle B + m\angle C + m\angle D$

$= (m\angle A + m\angle C) + (m\angle B + m\angle D) = 180^0 + 180^0 = 360^0$

$\therefore$ ABCD ଏକ ଉତ୍ତଳ ଚତୁର୍ଭୁଜ । ଏହାର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ $\overline{AC}$ ଓ $\overline{BD}$ ପରସ୍ପରକୁ E ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରନ୍ତୁ । E ବିନ୍ଦୁ ABC ବୃତ୍ତର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ହେବ । ($\because$ E ବିନ୍ଦୁ $\overline{AC}$ ଜ୍ୟା ଉପରିସ୍ଥ) ସୁତରାଂ $\overrightarrow{BE}$ ABC ବୃତ୍ତକୁ ଏକ ବିନ୍ଦୁ F ରେ ଛେଦ କରିବ ।

ବର୍ତ୍ତମାନ ଦୁଇଟି ସମ୍ଭାବନା ଯଥା : (i) E-F-D (ଚିତ୍ର 2.49(a) ଏବଂ (ii) E-D-F (ଚିତ୍ର 2.49) (b)) ମଧ୍ୟରୁ ସମ୍ଭାବନା (i) ର ପ୍ରମାଣ :

ଚିତ୍ର 2.49 (a) ରୁ $m\angle ADC = m\angle ADB + m\angle BDC$ ଏବଂ

$m\angle AFC = m\angle AFB + m\angle BFC$ ...(1)

ବର୍ତ୍ତମାନ ABCF ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ଚତୁର୍ଭୁଜରେ $m\angle ABC + m\angle AFC = 180^0$

କିନ୍ତୁ $m\angle ABC + m\angle ADC = 180^0$ (ଦତ୍ତ)

$\therefore\ m\angle ABC + m\angle AFC = m\angle ABC + m\angle ADC$

$\Rightarrow m\angle AFC = m\angle ADC$ ... (2)

Δ ADF ରେ $\angle AFB$ ବହିସ୍ଥ $\Rightarrow m\angle AFB > m\angle ADF$

ସେହିପରି ΔCDF ରେ $m\angle CFB > m\angle CDF$

ସୁତରାଂ $m\angle AFB + m\angle CFB > m\angle ADF + m\angle CDF$

$\Rightarrow m\angle AFC > m\angle ADC$ ((1) ଦ୍ୱାରା) ...... (3)

(2) ଓ (3) ପରସ୍ପର ବିରୋଧୀ ଉକ୍ତି ।

ସୁତରାଂ ଆମେ ଗ୍ରହଣ କରିଥିବା ପ୍ରାରମ୍ଭିକ ଉକ୍ତିଟି ସତ୍ୟ ନୁହେଁ । ଅର୍ଥାତ୍ ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜ ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ହେବ । ସମ୍ଭାବନା (ii) କ୍ଷେତ୍ରରେ ଅନୁରୂପ ପ୍ରମାଣ ଚିତ୍ର 2.49(b) ସାହାଯ୍ୟରେ ଦିଆଯାଇ ପାରିବ (ପ୍ରମାଣିତ)

ଅନୁଶୀଳନୀ - 2(b)

(କ - ବିଭାଗ)

1. ନିମ୍ନ ଉକ୍ତି ଗୁଡ଼ିକରେ ଠିକ୍ ଉକ୍ତି ପାଇଁ T ଓ ଭୁଲ ଉକ୍ତି ପାଇଁ F ଲେଖ ।

(i) ବୃତ୍ତର ଏକ ଉପସେଟ୍‌କୁ ଚାପ କହନ୍ତି ।

(ii) ଚାପର ଏକ ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ ସମ୍ପୃକ୍ତ ବୃତ୍ତର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ ନୁହେଁ ।

(iii) ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତରେ P ଓ Q ଦୁଇଟି ଚାପର ସାଧାରଣ ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁ ହେଲେ ଚାପଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରର ପରିପୂରକ ଚାପ ଅଟନ୍ତି ।

(iv) ପ୍ରତ୍ୟେକ ଚାପର ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁକୁ କେନ୍ଦ୍ର ସହିତ ଯୋଗ କଲେ ଯେଉଁ କୋଣ ଉତ୍ପନ୍ନ ହୁଏ ତାହା ଉକ୍ତ ଚାପର କେନ୍ଦ୍ରସ୍ଥ କୋଣ ଅଟେ ।

(v) ଦୁଇଟି ଚାପର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପର ସମଷ୍ଟି 360^0 ରୁ ଅଧିକ ହୋଇ ପାରିବ ନାହିଁ ।

(vi) ବୃତ୍ତ ଏକ ଉତ୍ତଳ ସେଟ୍ ନୁହେଁ ।

(vii) ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତରେ ଦୁଇଟି ଚାପର ଗୋଟିଏ ସାଧାରଣ ପ୍ରାନ୍ତ ବିନ୍ଦୁ ଥିଲେ ଚାପ ଦୁଇଟି ସନ୍ନିହିତ ଚାପ ହେବେ ।

(viii) ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ଜ୍ୟା ସହ ସମ୍ପୃକ୍ତ ଚାପଦ୍ୱୟ ସନ୍ନିହିତ ଚାପ ହେଲେ ଚାପଦ୍ୱୟର ସଂଯୋଗରେ ସର୍ବଦା ବୃହତ୍ ଚାପ ଗଠିତ ହେବ ।

(ix) ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ଜ୍ୟା ପରସ୍ପରକୁ ଲମ୍ବ ଭାବରେ ବୃତ୍ତର ଏକ ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ P ରେ ଛେଦ କରନ୍ତି । ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର O ଠାରୁ ସେମାନଙ୍କ ପ୍ରତି $\overline{OQ}$, $\overline{OR}$ ଲମ୍ବ ଗଠନ କରାଯାଇଛି । ତେବେ O, Q, P ଓ R ଏକ ବର୍ଗଚିତ୍ରର ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ ହେବେ ।

(x) $\overparen{BPC}$ ର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପ 30^0 । A ବୃତ୍ତ ଉପରିସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ ହେଲେ ΔABC ରେ $\angle A$ ର ପରିମାଣ ସର୍ବଦା 15^0 ହେବ ।

(xi) ଗୋଟିଏ ଚାପ ଅସଂଖ୍ୟ ବିନ୍ଦୁର ସମାହାର ଅଟେ ।

(xii) ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ରମ୍ବସ୍ ଏକ ବର୍ଗଚିତ୍ର ।

2. ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନ ପୂରଣ କର ।

(i) ଏକ ବୃହତ୍ ଚାପର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପ ... ରୁ ବେଶୀ ।

(ii) ଗୋଟିଏ ସୁଷମ ଷଡ଼ଭୁଜର ପ୍ରତ୍ୟେକ ବାହୁ ଏହାର ପରିବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ରଠାରେ ଉତ୍ପନ୍ନ କରୁଥିବା କେନ୍ଦ୍ରସ୍ଥ କୋଣର ପରିମାଣ .... ।

(iii) ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ଚତୁର୍ଭୁଜର ABCD ର $m\angle A = 50^0$ ଓ $m\angle B = 120^0$ ହେଲେ $m\angle C$ ଓ $m\angle D$ ମଧ୍ୟରେ ଅନ୍ତର ....।

(iv) ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତରେ ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ଜ୍ୟା $\overline{AB}$ ଓ $\overline{CD}$ ପରସ୍ପରକୁ ବୃତ୍ତର ଏକ ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ P ରେ ଛେଦ କରନ୍ତି । O ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ଏବଂ B ଓ C $\overline{OP}$ ର ଏକ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଥିଲେ $\widehat{AD}$ ଓ .... ଦୁହେଁ ସର୍ବସମ ।

(v) ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତରେ ଏକ ଜ୍ୟାର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ସହ ସମାନ ହେଲେ ଉକ୍ତ ଜ୍ୟା ଦ୍ୱାରା ଛେଦିତ କ୍ଷୁଦ୍ର ଚାପର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପ .... ।

(vi) $\overline{AB}$ ର ଏକ ପାର୍ଶ୍ୱରେ C ଓ D ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁ । $m\angle ACB = m\angle ADB = 20^0$ । ΔACDର ପରିବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର O ହେଲେ $m\angle AOB$ = ... ।

(vii) $m\angle ABC = 90^0$ ହେଲେ ΔABC ର ପରିବୃତ୍ତରେ $\overline{AC}$ ଏକ .... ।

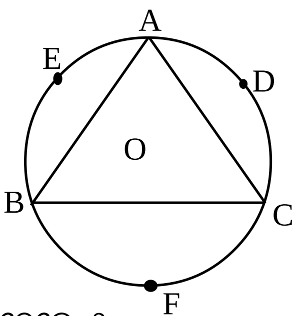
(viii) ABCD ଏକ ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ଚତୁର୍ଭୁଜ । $m\angle BAD$ .... ଚାପର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପର ଅର୍ଦ୍ଧେକ ।

(ix) ଏକ ଅର୍ଦ୍ଧବୃତ୍ତର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପ .... ।

(x) ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତରେ ଏକ ଚାପର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପ 90^0 ହେଲେ, ସଂପୃକ୍ତ ଜ୍ୟା ଓ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧର ଅନୁପାତ .... ।

(ଖ - ବିଭାଗ)

3. ଚିତ୍ର 2.50ରେ ΔABC ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ଏବଂ ସୂକ୍ଷ୍ମକୋଣୀ । D, E, F ବୃତ୍ତ ଉପରିସ୍ଥ ତିନୋଟି ବିନ୍ଦୁ ହେଲେ ନିମ୍ନ ପ୍ରଶ୍ନଗୁଡ଼ିକର ଉତ୍ତର ଦିଅ ।



(ଚିତ୍ର 2.50)

(i) $\angle B$ କେଉଁ ଚାପର ଅନ୍ତର୍ଲିଖିତ ?

(ii) $\angle B$ ଦ୍ୱାରା କେଉଁ ଚାପ ଛେଦିତ ?

(iii) $\overline{BC}$ ଜ୍ୟା ଦ୍ୱାରା ଛେଦିତ କ୍ଷୁଦ୍ରଚାପ ଓ ବୃହତ୍ ଚାପ କିଏ ?

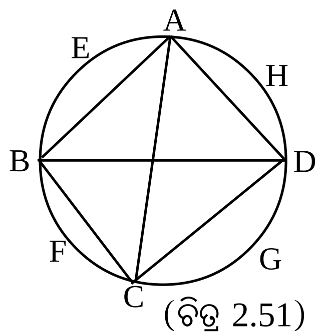
(iv) $\angle A$ ର ପରିମାଣ କେଉଁ କେନ୍ଦ୍ରସ୍ଥ କୋଣ ପରିମାଣର ଅର୍ଦ୍ଧେକ ?

(v) ΔABC ରେ ଯଦି AB = BC ହୁଏ ତେବେ କେଉଁ ଚାପ ଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ ହେବେ ?

(vi) ଦୁଇଟି ସନ୍ନିହିତ ଚାପର ନାମ ଲେଖ ଯେପରିକି ସେମାନଙ୍କ ସଂଯୋଗରେ $\widehat{BAD}$ ଗଠିତ ହେବ ।

(vii) $\widehat{BFC}$ ଉପରେ ଏପରି ଏକ ବିନ୍ଦୁ P ନିଅ ଯେପରିକି $m\angle BPA = m\angle C$ । ଏପରି କେତୋଟି ବିନ୍ଦୁ ଅଛି ? ADC ଉପରେ ଏପରି କୌଣସି ବିନ୍ଦୁ ଅଛି କି ? $\widehat{BEA}$ ଉପରେ ଏପରି କୌଣସି ବିନ୍ଦୁ ଅଛି କି ?

4. ଚିତ୍ର 2.51 ରେ ABCD ଏକ ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ଚତୁର୍ଭୁଜ ଯାହାର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ରଠାରେ ଛେଦ କରନ୍ତି । m $\widehat{AEB}$ = 100^0 ହେଲେ



(ଚିତ୍ର 2.51)

(i) ଚତୁର୍ଭୁଜର ସମସ୍ତ କୋଣ ପରିମାଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(ii) $\widehat{AHD}$ ଓ $\widehat{BFC}$ ମଧ୍ୟରେ କି ସମ୍ପର୍କ ଦେଖୁଛ ?

(iii) ABCD କି ପ୍ରକାର ଚତୁର୍ଭୁଜ ?

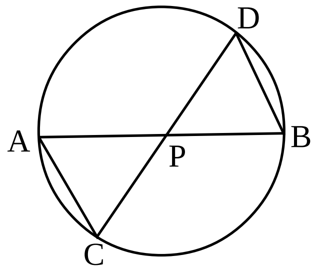
5. ଚିତ୍ର 2.52 ରେ $\overline{AB}$ ଓ $\overline{CD}$ ଜ୍ୟା ଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ ବୃତ୍ତର ଏକ ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ P ଠାରେ ଛେଦ କରନ୍ତି ।

$m\angle PBD = 80^0$, $m\angle CAP = 45^0$ ହେଲେ

(i) ΔBPD ର କୋଣ ପରିମାଣଗୁଡ଼ିକ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(ii) ΔAPC ର କୋଣ ପରିମାଣ ଗୁଡ଼ିକ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(iii) ΔAPC ଓ ΔBPD ମଧ୍ୟରେ କି ସମ୍ପର୍କ ଦେଖୁଛ ?



(ଚିତ୍ର 2.52)

6. ΔABC ରେ $\angle A$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ତ୍ରିଭୁଜର ପରିବୃତ୍ତକୁ D ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ΔBDC ସମଦ୍ୱିବାହୁ ।

7. ଚିତ୍ର 2.53 ରେ ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ଏକ ବହିଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ A ଠାରୁ $\overrightarrow{AP}$ ଓ $\overrightarrow{AR}$ ରଶ୍ମି ଦ୍ୱୟ ବୃତ୍ତକୁ ଯଥାକ୍ରମେ P, Q ଏବଂ R, S ଠାରେ ଛେଦ କରନ୍ତି ଯେପରି A-P-Q ଏବଂ A-R-S ।

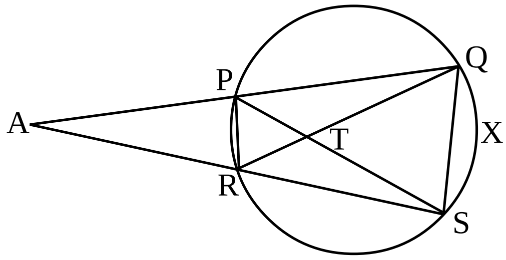
(a) ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\Delta APR \sim \Delta AQS$

(b) ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\Delta APS \sim \Delta ARQ$

(c) ଯଦି $\overline{PS}$ ଓ $\overline{QR}$ ର ଛେଦ ବିନ୍ଦୁ T ହୁଏ, ତେବେ

(i) ପ୍ରମାଣ କର ଯେ TP . TS = TR . TQ

(ii) ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $m\angle PTR = \frac{1}{2}$ (m $\widehat{QS}$ – m $\widehat{PR}$)



(ଚିତ୍ର 2.53)

(d) $m\angle PAR = 15^0$ ଏବଂ m $\widehat{QXS} = 50^0$ ହେଲେ $m\angle PTR$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

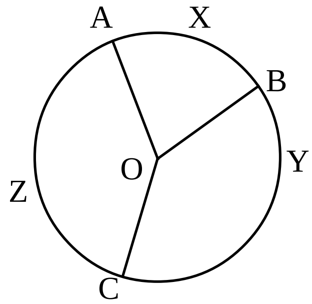
8. ଚିତ୍ର 2.54ରେ ABC ବୃତ୍ତର $\widehat{AXB}$ ଓ $\widehat{BYC}$ ଦୁଇଟି ଚାପର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପ ଯଥାକ୍ରମେ 80^0 ଓ 140^0

(i) $m\angle BAC$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(ii) m $\widehat{ABC}$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(iii) m $\widehat{ACB}$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(iv) $\widehat{AZC}$ ଓ $\widehat{BYC}$ ମଧ୍ୟରେ କି ସମ୍ପର୍କ ଅଛି ?



(ଚିତ୍ର 2.54)

9. ଏକ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର O ଏବଂ $\overline{AB}$ ଏକ ବ୍ୟାସ । ବୃତ୍ତ ଉପରିସ୍ଥ P ଓ Q ବିନ୍ଦୁ ଦ୍ୱୟ $\overline{AB}$ ର ଏକ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଅବସ୍ଥିତ । ଯଦି A ଓ P ପ୍ରାନ୍ତ ବିନ୍ଦୁ ବିଶିଷ୍ଟ ଚାପର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପ 60^0 ଏବଂ B ଓ Q ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁ ବିଶିଷ୍ଟ ଚାପର

ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପ 50^0 ହୁଏ ତେବେ -

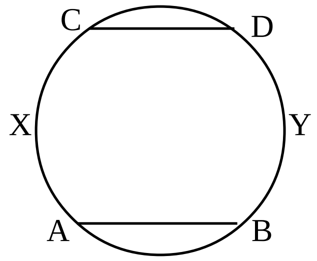
(i) A ଓ Q ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁ ବିଶିଷ୍ଟ କ୍ଷୁଦ୍ରଚାପର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପ,

(ii) P ଓ B ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁ ବିଶିଷ୍ଟ ବୃହତ୍ ଚାପର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପ ଏବଂ

(iii) P ଓ Q ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁ ବିଶିଷ୍ଟ ବୃହତ୍ ଚାପର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

10. $\overline{AB}$ ଓ $\overline{CD}$ ଦୁଇଟି ସମାନ୍ତର ଜ୍ୟା (ଚିତ୍ର 2.55)

ପ୍ରମାଣ କର ଯେ i) m $\overset{\frown}{AXC}$ = m $\overset{\frown}{BYD}$, (ii) AC = BD



(ଚିତ୍ର 2.55)

11. ABCD ଏକ ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ଚତୁର୍ଭୁଜ ।

(i) AC = BD ଏବଂ $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ହେଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, AD = BC

(ii) AD = BC ହେଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, AC = BD ଏବଂ $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

12. (i) ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତରେ $\overset{\frown}{AXB}$ ଏକ ଚାପ । ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\overset{\frown}{AXB}$ ର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ଗୋଟିଏ ଏବଂ କେବଳ ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁ C ଅଛି ଯେପରି $\overset{\frown}{AC}$ ଓ $\overset{\frown}{BC}$ ଚାପଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ ହେବେ । (C ବିନ୍ଦୁକୁ $\overset{\frown}{AXB}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ କୁହାଯାଏ)

(ସୂଚନା : ∠AOBର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ରେଖା $\overset{\frown}{AXB}$ କୁ C ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କଲେ C ଆବଶ୍ୟକ ବିନ୍ଦୁ ହେବ)

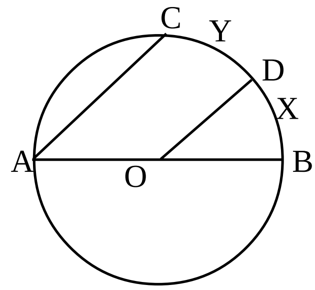
(ii) ଚାପର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ଧାରଣାକୁ ବ୍ୟବହାର କରି ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\overset{\frown}{AXB}$ ରେ ଅସଂଖ୍ୟ ବିନ୍ଦୁ ଅଛି ।

13. ଚିତ୍ର 2.56 ରେ $\overline{AB}$ ବୃତ୍ତର ଏକ ବ୍ୟାସ ଏବଂ O କେନ୍ଦ୍ର ।

$\overline{OD}$ ଯେକୌଣସି ଏକ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ । $\overline{AC} \parallel \overline{OD}$ ହେଲେ,

ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\overset{\frown}{BXD}$ ଓ $\overset{\frown}{DYC}$ ସର୍ବସମ ଅର୍ଥାତ୍ D, $\overset{\frown}{BDC}$ ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ।

(ସୂଚନା : $\overline{OC}$ ଅଙ୍କନ କରି ଦର୍ଶାଅ ଯେ, m∠BOD = m∠DOC)

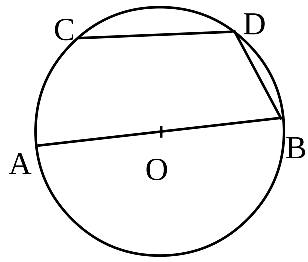


(ଚିତ୍ର 2.56)

ଗ - ବିଭାଗ

14. ଚିତ୍ର 2.57ରେ $\overline{CD}$ ଜ୍ୟା $\overline{AB}$ ବ୍ୟାସ ସହ ସମାନ୍ତର

ଏବଂ CD = OB । ପ୍ରମାଣ କର ଯେ m∠BDC = 2m∠OBD ।



(ଚିତ୍ର 2.57)

15. ABCD ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ଚତୁର୍ଭୁଜର $\overline{AC}$ ଓ $\overline{BD}$ କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ P ଠାରେ ଛେଦ କରନ୍ତି । O ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ଏବଂ B ଓ C, $\overleftrightarrow{OP}$ ର ବିପରୀତ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଅବସ୍ଥିତ । ଯଦି AC = BD ହୁଏ, ତେବେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ

(i) AB = CD, (ii) PA = PD ଏବଂ (iii) $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$ ।

16. (i) ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ଏକ କ୍ଷୁଦ୍ର ଚାପର ଅନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣ ଏକ ସ୍ଥୂଳକୋଣ ।

(ii) ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ଏକ ବୃହତ୍ ଚାପର ଅନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣ ଏକ ସୂକ୍ଷ୍ମ କୋଣ ।

[ସୂଚନା : (i) $\widehat{APB}$ ଏକ କ୍ଷୁଦ୍ର ଚାପ ଓ $\widehat{AQB}$ ଏକ ବୃହତ୍ ଚାପ ହେଉ । $\overline{AD}$ ବ୍ୟାସ ଅଙ୍କନ କର । $m\angle APD = 90^0 < m\angle APB$]

17. (i) Δ ABC ର ପରିବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର O ତ୍ରିଭୁଜଟିର ଏକ ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ ହେଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $m\angle BAC + m\angle OBC = 90^0$ ।

(ii) ΔABC ର ପରିବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର O ତ୍ରିଭୁଜଟିର ଏକ ବହିଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ ହେଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $m\angle BAC - m\angle OBC = 90^0$ ।

18. ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ଏକ ଟ୍ରାପିଜିୟମ୍‌ର ଅସମାନ୍ତର ବାହୁଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ ହେଲେ ଟ୍ରାପିଜିୟମ୍‌ଟି ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ହେବ ।

19. ଦୁଇଟି ବୃତ୍ତ ପରସ୍ପରକୁ P ଓ Q ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରନ୍ତି । P ବିନ୍ଦୁ ମଧ୍ୟ ଦେଇ ଏକ ସରଳରେଖା ବୃତ୍ତଦ୍ୱୟକୁ K ଓ L ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ । ସେହିପରି Q ମଧ୍ୟ ଦେଇ ଏକ ସରଳରେଖା ବୃତ୍ତଦ୍ୱୟକୁ M ଓ N ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ । K ଓ M $\overline{PQ}$ ର ଏକ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଥିଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\overline{KM} \parallel \overline{LN}$ ।

20. ABCD ଏକ ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ଚତୁର୍ଭୁଜରେ $\angle B$ ଓ $\angle D$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ E ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରନ୍ତି । $\overleftrightarrow{DE}$ ବୃତ୍ତକୁ F ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\overline{BE} \perp \overline{BF}$ ।

21. ΔABC ର କୋଣମାନଙ୍କର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକମାନେ ତ୍ରିଭୁଜର ପରିବୃତ୍ତକୁ X, Y, ଓ Z ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରନ୍ତି । ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ΔXYZ ର କୋଣମାନଙ୍କର ପରିମାଣ ଯଥାକ୍ରମେ $90^0 - \frac{1}{2}m\angle A$, $90^0 - \frac{1}{2}m\angle B$ ଓ $90^0 - \frac{1}{2}m\angle C$ ।

22. ΔABCଏକ ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ । $\overline{BC}$ ଜ୍ୟା ସହ ସମ୍ପୃକ୍ତ କ୍ଷୁଦ୍ର ଚାପ ଉପରେ P ଏକ ବିନ୍ଦୁ । ପ୍ରମାଣ କର ଯେ PA = PB + PC ।

(ସୂଚନା : $\overrightarrow{BP}$ ଉପରେ D ନିଅ ଯେପରି PC = PD ହେବ । ΔBCD ଓ ΔACP ର ତୁଳନା କର ।)

23. ΔABC ରେ $\angle A$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ΔABC ର ପରିବୃତ୍ତକୁ P ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ । P ବିନ୍ଦୁରୁ $\overrightarrow{AB}$ ଓ $\overrightarrow{AC}$ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବ ଦ୍ୱୟର ପାଦବିନ୍ଦୁ ଯଥାକ୍ରମେ Q ଏବଂ R । ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $AQ = AR = \frac{AB + AC}{2}$ ।

(**ସୂଚନା :** ଦର୍ଶାଅ ଯେ $\Delta ABQ \cong \Delta PCR \Rightarrow BQ = CR$)

24. ΔABC ରେ $\angle A$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ΔABC ର ପରିବୃତ୍ତକୁ P ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ । $\overline{AP}$ ଓ $\overline{BC}$ ର ଛେଦ ବିନ୍ଦୁ D ହେଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ΔABD ଓ ΔAPC ସଦୃଶ ଅଟନ୍ତି । ସୁତରାଂ ଦର୍ଶାଅ ଯେ

$AB \,.\, AC = BD \,.\, DC + AD^2$ ।

(ସୂଚନା : ΔABD ଓ ΔAPC ସଦୃଶ $\Rightarrow AB \,.\, AC = AD \,.\, AP,\ AD^2 = AD\,(AP - PD)$)

25. **(ଟଲେମୀଙ୍କ ଉପପାଦ୍ୟ)** ABCD ଏକ ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ଚତୁର୍ଭୁଜ ହେଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ

$AC.BD = AB \,.\, CD + BC \,.\, AD$ ।

(ଅର୍ଥାତ୍ ଏକ ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ଚତୁର୍ଭୁଜରେ କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ଗୁଣଫଳ, ଚତୁର୍ଭୁଜର ସମ୍ମୁଖୀନ ବାହୁମାନଙ୍କର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ଗୁଣଫଳର ସମଷ୍ଟି ସଙ୍ଗେ ସମାନ ।)

(**ସୂଚନା :** ମନେକର $m\angle ADB > m\angle BDC$ । E, $\overline{AC}$ ଉପରେ ଏପରି ଏକ ବିନ୍ଦୁ ହେଉ ଯେପରି $m\angle BDC = m\angle ADE$ । ବର୍ତ୍ତମାନ ΔADE ଏବଂ ΔBDC ସଦୃଶ $\Rightarrow \frac{AE}{BC} = \frac{AD}{BD}$ ।

ପୁନଶ୍ଚ ΔADB ଏବଂ ΔEDC ସଦୃଶ $\Rightarrow \frac{CD}{BD} = \frac{EC}{AB}$)