Chapter 31

प्रस्तावना (Introduction)

वैश्लेषिक विधियों की सीमित सीमाओं के कारण वैज्ञानिक तथा अभियंता ग्राफीय तथा आंकिक विधियों का उपयोग करते हैं। ग्राफीय विधियाँ, यद्यपि आसान होती हैं, किंतु परिणाम में यथार्थता कम रहती है। आंकिक विधियाँ अधिक यथार्थ तथा शुद्ध मान प्रदान करती हैं।

सार्थक अंक तथा पूर्णांकन संख्यायें (Significant digits and rounding off of numbers)

(1) **सार्थक अंक :** किसी संख्या के सार्थक अंक निम्नलिखित नियमों के द्वारा ज्ञात होते हैं :

(i) सभी अशून्य अंक सार्थक होते हैं।

(ii) दो अशून्य अंकों के मध्य सभी शून्य अंक सार्थक अंक होते हैं।

(iii) यदि किसी संख्या में दशमलव के स्थान के पश्चात् अशून्य अंक या शून्यों के अनुक्रम हों, तब सभी शून्य सार्थक अंक कहलाते हैं।

(iv) किसी अशून्य सँख्या में पूर्व के सभी शून्य असार्थक अंक होते हैं।

(2) **संख्याओं का पूर्णांकन करना :** यदि एक संख्या n सार्थक अंकों तक पूर्णांकित की जाती है, तब निम्न नियमों का पालन करते हैं।

(i) n वें अंक के दायें ओर के सभी अंक हटाते हैं।

(ii) यदि $(n+1)$वाँ अंक 5 से अधिक है या अशून्य अंक से पूर्व का 5 है, तब n वें अंक को 1 से बढ़ाते हैं। यदि $(n+1)$वाँ अंक 5 से कम है, तब अंक अपरिवर्तित रहता है।

(iii) यदि $(n+1)$ वाँ अंक 5 है तथा इसके आगे शून्य या कई शून्य है तब n वें अंक को 1 से बढ़ाते हैं, यदि यह विषम है तथा अपरिवर्तित रखते है, यदि यह सम है।

यदि किसी संख्या को नियमानुसार पूर्णांकित करते हैं, तब पूर्णांकन के कारण अधिकतम त्रुटि संख्या में से हटाये गये अंतिम अंक के स्थानीय मान के आधे से अधिक नहीं होती है।

किसी संख्या के आंकिक मान X तथा इसके पूर्णांकन मान X_1 का अन्तर पूर्णांकन त्रुटि E कहलाता है तथा $E = X - X_1$.

संख्याओं के ट्रंकेशन के कारण ट्रंकेशन तथा त्रुटि (Truncation and error due to truncation of numbers)

किसी संख्या के अतिरिक्त अंक, जो अनावश्यक हैं, को पूर्णांकन किये बिना छोड़ना ट्रंकेशन (truncation) कहलाता है।

आंकिक मान X तथा ट्रंकेशन मान X_1 के मध्य अन्तर ट्रंकेशन त्रुटि (E) कहलाता है। $E = X - X_1$

ट्रंकेशन के कारण अधिकतम त्रुटि संख्या में से हटाये गये अंतिम अंक के स्थानीय मान से अधिक नहीं होती है।

संख्याओं की आपेक्षिक तथा प्रतिशत त्रुटि (Relative and percentage errors of numbers)

किसी संख्या के निरपेक्ष मान X तथा इसके सन्निकट मान X_1 (जो कि पूर्णांकन या ट्रंकेशन के उपरान्त प्राप्त होता है) के मध्य अन्तर निरपेक्ष त्रुटि (absolute error) कहलाता है। आपेक्षिक त्रुटि $E_R = \frac{X - X_1}{X} = \frac{\Delta X}{X}$.

यह एक विमा रहित राशि है। प्रतिशत त्रुटि $(E_p) = \frac{\Delta X}{X} \times 100$.

बीजगणितीय तथा अबीजगणितीय समीकरण (Algebraic and transcendental equation)

यदि $f(x)$, एक n घात का बीजगणितीय फलन या बहुपद हो तब, $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + ... + a_{n-1} x + a_n, (a_0 \neq 0)$ एवं $f(x) = 0$ के रुप में व्यक्त किया जाता है, तब इसे बीजगणितीय समीकरण या बहुपदीय समीकरण कहते हैं।

जैसे $ax^2 + bx + c = 0$ इत्यादि।

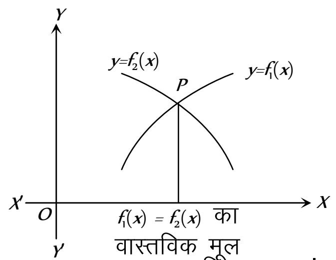
यदि $f(x)$ अबीजगणितीय फलनों जैसे चरघांताकी, लघुगणकीय व त्रिकोणमितीय फलनों का संयोजन हो, तो $f(x) = 0$ एक अबीजीय समीकरण कहलाता है। जैसे $ae^x + b \sin x = 0$; $a \log x + bx = 3$ इत्यादि।

समीकरण के वास्तविक मूलों की स्थिति (Location of real roots of an equation)

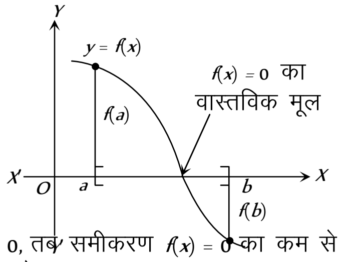
समीकरण के वास्तविक मूल की स्थिति का अर्थ है, ग्राफीय या अन्य तरीके से मूल का सन्निकट मान ज्ञात करना।

(1) **लेखाचित्रीय विधि** (Graphical Method) : $f(x)=0$ को $f_1(x)=f_2(x)$ के रुप में लिखते हैं तथा फलनों $y=f_1(x)$ तथा $y=f_2(x)$ के लेखाचित्रों (graphs) की रचना करते हैं।

इन दोनों लेखाचित्रों (graphs) के प्रतिच्छेद बिन्दुओं के भुज $f(x)=0$ के वास्तविक मूल हैं।



(2) **स्थिति प्रमेय** (Location Theorem) : यदि $f(x)$, संवृत अन्तराल $[a, b]$ में सतत् है तथा $f(a)$ तथा $f(b)$ विपरीत चिन्हों के हैं



अर्थात् $f(a).f(b) < 0$, तब समीकरण $f(x) = 0$ का कम से कम एक मूल a तथा b के मध्य अवश्य होगा।

बीजीय तथा अबीजीय समीकरणों के हल
(Solution of algebraic and transcendental equations)

बीजीय तथा अबीजीय समीकरणों को हल करने की अनेक आंकिक विधियाँ है। समीकरण के मूल ज्ञात करने के पश्चात् हम क्रमिक रुप से अभीष्ट शुद्धता तक सन्निकट मान ज्ञात कर सकते हैं।

(1) **क्रमिक विभाजन विधि** (Sucessive bisection method) : क्रमिक विभाजन विधि द्वारा समीकरण $f(x)=0$ के a तथा b के मध्य मूल ज्ञात करते हैं। यदि $f(x)$, a तथा b के मध्य सतत् है तथा $f(a)$ व $f(b)$ दोनों विपरीत चिन्हों के हैं, अर्थात् $f(a).f(b) < 0$, तब x का कम से कम एक ऐसा मूल अवश्य होता है, जिसका मान a तथा b के मध्य हो। माना $f(a)$ ऋणात्मक तथा $f(b)$ धनात्मक है, तब मूल $x_1=\frac{1}{2}(a+b)$ का प्रथम सन्निकट मान $x_1=\frac{1}{2}(a+b)$ होता है।

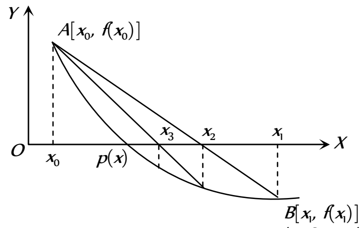
कार्य विधि : (i) $f(a), f(b)$ ज्ञात कीजिए।

(ii) माना $f(a)$ ऋणात्मक तथा $f(b)$ धनात्मक हैं, तो $x_1=\frac{a+b}{2}$

(iii) यदि $f(x_1)=0$ तो x_1 अभीष्ट मूल है अन्यथा $f(x_1)$ ऋणात्मक हैं, तो मूल (x_1, b) में होगा और यदि $f(x_1)$ धनात्मक है तो (a, x_1) में होगा।

(iv) इस क्रिया को तब तक दोहराते हैं, जब तक अभीष्ट यथार्थता प्राप्त नहीं होती।

(2) **असत्य (मिथ्या) स्थिति या रेगुला-फाल्सी विधि** (Method of False position or Regula-falsi method) : यह $f(x)=0$ के वास्तविक मूल ज्ञात करने की सबसे पुरानी विधि है तथा विभाजन विधि से काफी समानता रखती है। यहाँ दो बिन्दु x_0 तथा x_1 इस प्रकार चुनते हैं, कि $f(x_0)$ तथा $f(x_1)$ विपरीत चिन्ह के हैं अर्थात् $y=f(x)$ का ग्राफ इन बिन्दुओं के मध्य x-अक्ष को काटता हैं। यह प्रदर्शित करता है, कि मूल x_0 तथा x_1 के मध्य स्थित है, परिणामतः $f(x_0)f(x_1)<0$.



बिन्दुओं $A[x_0, f(x_0)]$ तथा $B[x_1, f(x_1)]$ को मिलाने वाली रेखा का समीकरण है

$$y-f(x_0)=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}(x-x_0) \quad .....(i)$$

असत्य स्थिति विधि में x_2 वह बिन्दु होगा, जहाँ बिन्दुओं को मिलाने वाली जीवा x-अक्ष को बिन्दु x_2 पर काटती है।

$$\text{अतः } x_2=x_0-\frac{x_1-x_0}{f(x_1)-f(x_2)}f(x_0) \quad .....(ii)$$

जो कि मूल का सन्निकट मान है। यदि $f(x_0)$ तथा $f(x_2)$ विपरीत चिन्ह के हैं, तब मूल x_0 तथा x_2 के मध्य स्थित होंगे। अतः (ii) में x_1 को x_2 से प्रतिस्थापित करने पर, अगला सन्निकट मान x_3 प्राप्त होता है। यह क्रिया अभीष्ट यथार्थता प्राप्त होने तक दोहराते हैं।

कार्य विधि : (i) $f(x_0)$ व $f(x_1)$ की गणना कीजिए यदि ये विपरीत चिन्हों के हैं तो मूल x_0 व x_1 के बीच होगा।

(ii) उपर्युक्त सूत्र से x_2 ज्ञात कीजिए।

(iii) अब यदि $f(x_2)=0$ तो x_2 अभीष्ट मूल है।

(iv) यदि $f(x_2)$ ऋणात्मक है तो मूल (x_2, x_1) में होगा।

(v) यदि $f(x_2)$ धनात्मक है तो मूल (x_0, x_2) में होगा।

(vi) इसे तब तक दोहराओं जब तक कि अभीष्ट यथार्थता प्राप्त नहीं हो जाती ।

(3) **न्यूटन.रैफ्सन विधि :** माना समीकरण $f(x)=0$ का सन्निकट मूल x_0 है। यदि यथार्थ मूल $x_1=x_0+h$ है, तब $f(x_1)=0$

$\therefore$ टेलर श्रेणी द्वारा $f(x_0+h)$ का प्रसार करने पर,

$$f(x_0)+hf'(x_0)+\frac{h^2}{2!}f''(x_0)+.......=0$$

चूँकि h का मान कम है, h^2 तथा h की उच्च घातों को छोड़ने पर,

$$f(x_0)+hf'(x_0)=0 \text{ या } h=-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad .....(i)$$

$$\therefore \text{मूल का सन्निकट मान } x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}, \quad \{(i) \text{ से}\}$$

इसी प्रकार x_1 से प्रारम्भ करने पर ओर अधिक सन्निकट मान

$$x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \text{ ; सामान्यतः } x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

यह सूत्र न्यूटन-रैफ्सन सूत्र या न्यूटन-इटरेशन सूत्र कहलाता है।

कार्य विधि : (i) $|f(a)|, |f(b)|$ ज्ञात कीजिये। यदि $|f(a)| < |f(b)|$ तो $a=x_0$ अन्यथा $b=x_0$ लीजिए।

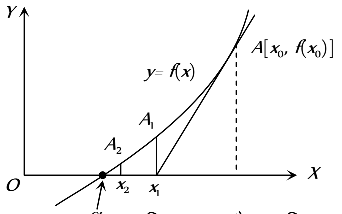
(ii) $x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ ज्ञात कीजिए।

(iii) x_1 अभीष्ट मूल है यदि $f(x_1)=0$

(iv) वास्तविक मूल के सन्निकट मूल ज्ञात करने के लिए इस प्रक्रिया को दोहराते हैं।

ज्यामितीय व्याख्या : माना समीकरण $f(x)=0$ के मूल α के समीप बिन्दु x_0 है, तब $A_0[x_0, f(x_0)]$ पर स्पर्श रेखा का समीकरण है, $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

यह x-अक्ष को $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ पर काटता है।



जो कि मूल α का प्रथम सन्निकटन है। यदि वक्र पर x_1 के संगत बिन्दु A_1 है, तब A_1 पर स्पर्श रेखा x-अक्ष को x_2 पर काटती है। x_2, α के समीप है, अतः यह मूल का द्वितीय सन्निकटन है। इस विधि को दोहराते हुये α के समीप शीघ्रता से पहुँचते है। अतः वक्र का x-अक्ष तथा बिन्दु A_0 के मध्य भाग, वक्र की A_0 पर स्पर्श रेखा से प्रतिस्थापित होता है।

आंकिक समाकलन (Numerical integration)

जब समाकल्य $f(x)$ का, स्वतंत्र चर x के संगत आंकिक मानों का समूह दिया गया है, तब निश्चित समाकलन के मान की गणना की विधि आंकिक समाकलन कहलाती है।

यदि $I = \int_a^b y.dx$, तब कोटियों $x=a, x=b$ तथा x –अक्ष के मध्य वक्र $y = f(x)$ के अधीन क्षेत्र का क्षेत्रफल I से प्रदर्शित होता है।

(1) **समलम्ब नियम** (Trapezoidal rule) **:** माना कोई फलन $y = f(x)$ जो अतंराल $[a, b]$ में परिभाषित है, को n-उपअतंरालों में इस प्रकार बाँटा जाता है कि $\frac{b-a}{n} = h$.

जहाँ h = उपअतंराल की चौड़ाई, अतः $x_0 = a,\ x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_0 + 2h$.......... $x_n = x_0 + nh = b$

इनके संगत $f(x)$ के मान क्रमशः $y_0, y_1, y_2 ....y_n$ हैं।

$\therefore \int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_0+nh} y\ dx$

$= \frac{h}{2}[y_0 + y_n + 2(y_1 + y_2 + ... + y_{n-1})]$, इस नियम को समलंब नियम कहते हैं।

इस नियम का ज्यामितीय महत्व यह है, कि वक्र $y = f(x)$ बिन्दुओं (x_0, y_0) तथा (x_1, y_1); (x_1, y_1) तथा (x_2, y_2); (x_{n-1}, y_{n-1}) तथा (x_n, y_n) को मिलाने वाली n सरल रेखाओं द्वारा प्रतिस्थापित होता है। वक्र $y = f(x)$ कोटियों $x = x_0$, $x = x_n$ तथा x-अक्ष से घिरा क्षेत्रफल, n समलम्ब चर्तुभुजों के क्षेत्रफलों के योग के सन्निकटतः समतुल्य है।

(2) **सिम्पसन का एक तिहाई नियम** (Simpson's one third rule) **:** यदि कोई फलन $y = f(x)$, अतंराल $[a, b]$ में परिभाषित है, जो कि n उपअतंरालों (n सम है) में बॉटा जाता है और प्रत्येक उपअतंराल की चौड़ाई h है, तो $b - a = nh$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_0+nh} ydx = \frac{h}{3}[(y_0 + y_n) + 4(y_1 + y_3 + y_5 + ... + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + ... + y_{n-2})]$$

= (दो क्रमिक कोटियों के मध्य दूरी का एक तिहाई) × [(चरम कोटियों का योग) + 4(विषम कोटियों का योग) + 2(सम कोटियों का योग)]

इस सूत्र को सिम्पसन का एक तिहाई नियम कहते हैं। सिम्पसन के नियम को लागू करने के लिये अन्तराल $[a, b]$ को n बराबर भागों में बॉटते हैं, जहाँ n कोई सम धनात्मक पूर्णांक है।

सिम्पसन नियम, समलम्ब नियम की तुलना में अधिक शुद्ध परिणाम देता है। छोटे अंतराल अधिक शुद्ध परिणाम देते हैं।

Tips & Tricks

- ट्रंकेशन में धनात्मक संख्या का आंकिक मान कम हो जाता है तथा ऋणात्मक संख्या का आंकिक मान बढ़ जाता है।
- यदि किसी संख्या का दशमलव के एक ही स्थान तक पूर्णांकन तथा ट्रंकेशन किया जाये, तब ट्रंकेशन त्रुटि का मान पूर्णांकन त्रुटि से अधिक होता है।
- पूर्णांकन त्रुटि धनात्मक या ऋणात्मक हो सकती है, किंतु ट्रंकेशन त्रुटि धनात्मक संख्याओं के लिये धनात्मक तथा ऋणात्मक संख्याओं के लिये ऋणात्मक होती है।
- यदि किसी संख्या को दशमलव के n अंकों तक पूर्णांकित किया जाता है, तब $|E_R| < 0.5 \times 10^{-n+1}$
- यदि किसी संख्या का दशमलव के n स्थानों तक ट्रंकेशन (truncation) किया जाता है, तब $|E_R| < 10^{-n+1}$.
- यदि $f(x)$, अन्तराल $[a, b]$ में असतत् हो, तो क्रमिक द्विभाजन विधि मूलों के गलत मान दे सकती है।
- यदि $f(x)$, अन्तराल $[a, b]$ में असतत् हो या a तथा b के मानों में अंतर अधिक न हो, तो असत्य स्थिति विधि मूलों के गलत मान दे सकती है।
- यदि $f'(x)$ का मान ज्ञात करना कठिन हो या अभीष्ट मूल के समीप $f'(x)$ का मान शून्य हो जाए, तो न्यूटन–रेफ्सन विधि उपयोगी नही है इस स्थिति में रेगुला फॉल्सी विधि का उपयोग करना चाहिए।
- यदि प्रारंभिक मान अभीष्ट मूल के समीप हो, तो न्यूटन–रेफ्सन विधि क्रमिक विभाजन तथा असत्य विधि की तुलना में शीघ्र परिणाम देती है।
- यदि प्रारंभिक मान a अभीष्ट मूल के समीप न हो, तो न्यूटन–रेफ्सन विधि गलत परिणाम दे सकती है।

Ordinary Thinking

Objective Questions

आधारभूत संकल्पना

1. अन्तराल (1, 2) में समीकरण $x^3-3x-5=0$ का मूल है
(a) 1.13
(b) 1.98
(c) 1.54
(d) अन्तराल (1, 2) में कोई भी मूल स्थित नहीं है

2. समीकरण $f(x)=0$ का पुनरावर्त मूल $a\in(x_1,x_2)$ होगा, यदि
(a) $f'(a)<0$ (b) $f'(a)>0$
(c) $f'(a)=0$ (d) इनमें से कोई नहीं

3. समीकरण $2x-\log_{10}x=7$ का मूल है
(a) 3 तथा 3.5 (b) 2 तथा 3
(c) 3.5 तथा 4 (d) इनमें से कोई नहीं

4. समीकरण $f(x)=0$ के लिए, यदि $f(a)<0$, $f(b)>0$, $f(c)>0$ तथा $b>c$, तो फलन $f(x)$ का मान किस बिन्दु पर छोड़ देंगे
(a) a (b) b
(c) c (d) a, b, c में से किसी एक पर

5. यदि $f(x)=0$ के लिए $f(a)<0$ व $f(b)>0$, तो $f(x)=0$ का एक मूल है
(a) a तथा b के मध्य
(b) a अथवा b में से कोई एक
(c) a से छोटा व b से बड़ा
(d) इनमें से कोई नहीं

6. समीकरण $e^{-2x}-\sin x+1=0$ का रूप है
(a) बीजगणितीय (b) रेखीय
(c) द्विघातीय (d) ट्रॉन्सेन्डेन्टल

7. समीकरण $x^3-6x+1=0$ का मूल निम्न अन्तराल में स्थित है
(a) (2, 3) (b) (3, 4)
(c) (3, 5) (d) (4, 6)

8. समीकरण $e^x+x-3=0$ का धनात्मक मूल निम्न अन्तराल में स्थित है
(a) (0, 1) (b) (1, 2)
(c) (2, 3) (d) (2, 4)

9. समीकरण $x^3-2x-5=0$ का धनात्मक मूल निम्न अन्तराल में स्थित है
(a) (0, 1) (b) (1, 2)
(c) (2, 3) (d) (3, 4)

10. माना $f(x)=0$ एक समीकरण है एवं x_1, x_2 दो वास्तविक संख्यायें इस प्रकार हैं कि $f(x_1)f(x_2)<0$, तो
(a) समीकरण का अन्तराल (x_1,x_2) में कम से कम एक मूल होगा
(b) समीकरण का अन्तराल (x_1,x_2) में कोई मूल नहीं होगा
(c) अन्तराल (x_1,x_2) में या तो एक भी नहीं या फिर एक से अधिक मूल होंगे
(d) इनमें से कोई नहीं

11. माना $f(x)=0$ एक समीकरण है एवं x_1, x_2 दो वास्तविक संख्यायें इस प्रकार हैं कि $f(x_1)f(x_2)>0$, तो
(a) अन्तराल (x_1,x_2) में समीकरण का कम से कम एक मूल होगा
(b) अन्तराल (x_1,x_2) में समीकरण का कोई मूल नहीं होगा
(c) अन्तराल (x_1,x_2) में समीकरण का या तो एक भी नहीं या सम संख्या में मूल होंगे
(d) इनमें से कोई नहीं

12. अबीजीय समीकरण $x-e^{-x}=0$ के लघुत्तम धनात्मक मूल के लिए अन्तराल है [MP PET 1996]
(a) (0, 1) (b) (–1, 0)
(c) (1, 2) (d) (2, 3)

13. संख्या 3.14150 का दशमलव के तीन अंकों तक पूर्णांकित मान है [MP PET 2000]
(a) 3.14 (b) 3.141
(c) 3.142 (d) इनमें से कोई नहीं

क्रमिक विभाजन विधि

1. $x^3-x-1=0$ का एक मूल 1 व 2 के बीच है। क्रमिक विभाजन विधि को तीन बार लगाने पर इसका लगभग मान है [MP PET 1993]
(a) 1.375 (b) 1.625
(c) 1.125 (d) 1.25

2. अर्धन विधि (Bisection method) का 3 पुनरावृत्ति करने पर समीकरण $x^3-5x+1=0$ का लघुत्तम धनात्मक मूल (लगभग) है [MP PET 1996]
(a) 0.25 (b) 0.125
(c) 0.50 (d) 0.1875

3. समीकरण $x^3-x-4=0$ का एक मूल 1 व 2 के बीच है। द्विभाजन विधि का 3 बार प्रयोग करने पर इसका लगभग मान है
(a) 1.375 (b) 1.750
(c) 1.975 (d) 1.875

4. द्विभाजन विधि द्वारा समीकरण $x^3-9x+1=0$ का वास्तविक मूल $x=2$ और $x=4$ के मध्य किसके निकट है [MP PET 1997]
(a) 2.2 (b) 2.75
(c) 3.5 (d) 4.0

5. दशमलव के दो अंकों तक समीकरण $xe^x-2=0$ का निकटवर्ती वास्तविक मूल है
(a) 1.08 (b) 0.92
(c) 0.85 (d) 0.80

6. $x^3-x-4=0$ का एक मूल अन्तराल (1, 2) मे है। क्रमिक विभाजन विधि में प्रथम पुनरावृत्ति के पश्चात् मूल निम्न अन्तराल में हैं
(a) (1, 1.5) (b) (1.5, 2.0)
(c) (1.25, 1.75) (d) (1.75, 2)

असत्य (मिथ्या) स्थिति विधि

1. समीकरण $x^3+2x-5=0$ का एक मूल 1 व 1.5 के बीच है। मिथ्या स्थिति विधि को केवल एक बार लगाने से प्राप्त इसका मान है [MP PET 1993]
(a) 4/3 (b) 35/27
(c) 23/25 (d) 5/4

2. मिथ्या स्थिति विधि से समीकरण $x^3-9x+1=0$ का मूल अन्तराल (2, 4) में है। प्रथम पुनरावृत्ति के पश्चात् मूल का मान है
(a) 3 (b) 2.5
(c) 3.57 (d) 2.47

3. समीकरण $f(x)=0$ के एक मूल का सन्निकट मान ज्ञात करने के लिए उत्तरोत्तर सन्निकटन का मिथ्या स्थिति विधि का सूत्र, [जहाँ प्रत्येक चर पर $f(x_-)$ तथा $f(x)$ विपरीत चिन्ह के हैं, $n\ge 1$] है [MP PET 1995, 97]
(a) $x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{f(x_n)}(x_n-x_{n-1})$

(b) $x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f(x_n)-f(x_{n-1})}(x_n-x_{n-1})$

(c) $x_{n+1}=x_n+\frac{f(x_n)+f(x_{n-1})}{f(x_n)}(x_n-x_{n-1})$

(d) $x_{n+1}=x_n+\frac{f(x_n)}{f(x_n)+f(x_{n-1})}(x_n-x_{n-1})$

4. समीकरण $f(x)=0$ के एक मूल का द्वितीय सन्निकटन मिथ्या स्थिति द्वारा है, (जहाँ x_0, x_1 क्रम से प्रारम्भिक तथा प्रथम सन्निकटन हैं) [MP PET 1996]

(a) $x_0-\frac{f(x_0)}{f(x_1)-f(x_0)}$
(b) $\frac{x_0f(x_1)-x_1f(x_0)}{f(x_1)-f(x_0)}$
(c) $\frac{x_0f(x_0)-x_1f(x_1)}{f(x_1)-f(x_0)}$
(d) $x_1-\frac{f(x_0)}{f(x_1)-f(x_0)}$

5. समीकरण $x^2-18=0$ का एक मूल 2 व 3 के बीच है। आभासी स्थिति (False position) विधि से मूल का मान है

(a) 2.526
(b) 2.536
(c) 2.546
(d) 2.556

न्यूटन-रैफ्सन विधि

1. न्यूटन–रैफ्सन की प्रक्रिया होती है

(a) रैखिक अभिसारिता
(b) द्विघातीय अभिसारिता
(c) त्रिघातीय अभिसारिता
(d) इनमें से कोई नहीं

2. समीकरण $x^3-x-5=0$ का 1 व 2 के बीच पहली पुनरावृत्ति के बाद न्यूटन– रैफ्सन विधि से मूल होगा

(a) 1.909
(b) 1.904
(c) 1.921
(d) 1.940

3. यदि क्रमागत सन्निकट मान $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, x_{n+1}$ हों, तो न्यूटन–रैफ्सन सूत्र होगा [MP PET 1993, 95]

(a) $x_{n+1}=x_n+\frac{f(x_{n+1})}{f'(x)}$
(b) $x_{n+1}=x_n+\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
(c) $x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
(d) $x_{n+1}=x_n-\frac{f'(x_n)}{f(x_n)}$

4. न्यूटन–रैफ्सन विधि से समीकरण $f(x)=0$ के हल में x का मान तीव्रता से समीकरण के मूल की ओर अग्रसर होता है जबकि $f'(x)$ का मान है

(a) शून्य
(b) बहुत छोटा
(c) बहुत बड़ा
(d) इनमें से कोई नहीं

5. न्यूटन–रैफ्सन विधि से $x^3-5x+3=0$ का हल अन्तराल (0.5, 0.75) में प्राप्त करने के लिए x_0 (x का प्रारम्भिक मान) लेते हैं

(a) 0.5
(b) 0.75
(c) 0.625
(d) इनमें से कोई नहीं

6. न्यूटन–रैफ्सन विधि को मूल α में अभिसरित होने का प्रतिबन्ध है [MP PET 2001]

(a) $\frac{1}{2}\frac{f'(\alpha)}{f''(\alpha)}<1$
(b) $\frac{f'(\alpha)}{f''(\alpha)}<1$
(c) $\frac{1}{2}\frac{f'(\alpha)}{f''(\alpha)}>1$
(d) इनमें से कोई नहीं

7. न्यूटन–रैफ्सन विधि का प्रयोग किया जा सकता है यदि

(a) $x=\alpha$ (वास्तविक मूल) के सामीप्य में $f(x)\neq 0$
(b) $x=\alpha$ (वास्तविक मूल) के सामीप्य में $f'(x)\neq 0$
(c) $x=\alpha$ (वास्तविक मूल) के सामीप्य में $f''(x)\neq 0$
(d) इनमें से कोई नहीं

8. न्यूटन–रैफ्सन विधि की द्वितीय पुनरावृत्ति के बाद समीकरण $x^2=3$ का धनात्मक मूल है, (प्रारम्भिक सन्निकटन $\frac{3}{2}$ लेने पर) [MP PET 1996]

(a) $\frac{3}{2}$
(b) $\frac{7}{4}$
(c) $\frac{97}{56}$
(d) $\frac{347}{200}$

9. समीकरण $x^3-4x+1=0$ का एक मूल 1 और 2 के बीच में है। न्यूटन–रैफ्सन विधि का प्रयोग करने पर उसका मान होगा

(a) 1.775
(b) 1.850
(c) 1.875
(d) 1.950

10. समीकरण $x^3-3x-5=0$ का एक मूल 2 व 2.5 के बीच में है। न्यूटन–रैफ्सन विधि का प्रयोग करने पर प्राप्त मान है

(a) 2.25
(b) 2.33
(c) 2.35
(d) 2.45

11. $x=1$ के समीप समीकरण $x^3+x-1=0$ के निकटतम मूल का मान है

(a) 0.51
(b) 0.42
(c) 0.67
(d) 0.55

12. यदि समीकरण $x^3+x^2-1=0$ का एक मूल 1.0 के समीप है, तो न्यूटन–रैफ्सन विधि से इस मूल का प्रथम आँकलित मान लगभग है [MP PET 1998]

(a) 0.9
(b) 0.6
(c) 1.2
(d) 0.8

13. यदि a तथा $a+h$ न्यूटन के नियम द्वारा खोजे गए, समीकरण $f(x)=0$ के दो क्रमिक व सन्निकट मूल हों, तो h का मान निम्न होगा [MP PET 1999]

(a) $f(a)/f'(a)$
(b) $f'(a)/f(a)$
(c) $-f'(a)/f(a)$
(d) $-f(a)/f'(a)$

14. न्यूटन–रैफ्सन विधि द्वारा $\sqrt{12}$ का मान दशमलव के तीन स्थानों तक होगा [DCE 2000]

(a) 3.463
(b) 3.462
(c) 3.467
(d) इनमें से कोई नहीं

समलम्ब नियम

1. निम्न तालिका से समलम्ब नियम द्वारा वक्र, x-अक्ष तथा रेखाओं $x=7.47, x=7.52$ से परिबद्ध क्षेत्रफल है

x :	7.47	7.48	7.49	7.50	7.51	7.52
$f(x)$:	1.93	1.95	1.98	2.01	2.03	2.06

(a) 0.0996
(b) 0.0896
(c) 0.6977
(d) 0.0776

2. चार उप–अन्तराल लेने पर समलम्ब नियम द्वारा $\int_0^1 \frac{1}{1+x}dx$ का मान होगा

(a) 0.6870
(b) 0.6677
(c) 0.6977
(d) 0.5970

3. एक वक्र निम्न तालिका द्वारा दिये गये बिन्दुओं से गुजरता है

x :	1	2	3	4	5
y :	10	50	70	80	100

समलम्ब नियम से वक्र, x-अक्ष तथा रेखाओं $x=1, x=5$ से परिबद्ध क्षेत्रफल है

(a) 310
(b) 255
(c) 305
(d) 275

4. समलम्ब नियम द्वारा $\int_{x_0}^{x_0+nh} y\,dx$ का लगभग मान है [MP PET 1993, 97]

(a) $\frac{h}{2}[y_0 + y_n + 2(y_1 + y_2 + y_3 + ... + y_{n-1})]$

(b) $\frac{h}{3}[y_0 + y_n + 4(y_1 + y_3 + y_5 + ... + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + ... + y_{n-2})]$

(c) $\frac{h}{4}[y_0 + y_n + 2(y_1 + y_3 + y_5 + ... + y_{n-1}) + 4(y_2 + y_4 + ... + y_{n-2})]$

(d) $\frac{h}{2}[(y_0 + y_2 + y_4 + ... + y_n) + 2(y_1 + y_3 + y_5 + ... + y_{n-1})]$,

जहाँ $y(x_i) = y_i,\ x_{i+1} - x_i = h,\ i = 0, 1, 2,..... n$

5. एक वक्र निम्न बिन्दुओं से होकर गुजरता है

x :	1	2	3	4
y :	1	4	9	16

वक्र $x = 1$ तथा $x = 4$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल समलम्ब नियम से निम्न है

(a) 21 वर्ग इकाई (b) 21.5 वर्ग इकाई
(c) 20.5 वर्ग इकाई (d) इनमें से कोई नहीं

6. एक नदी 80 मीटर चौड़ी है। उसकी गहराई d मीटर तथा एक किनारे से संगत दूरी x मीटर निम्न तालिका में है

x :	0	10	20	30	40	50	60	70	80
d :	0	4	7	9	12	15	14	8	3

तो समलम्ब चतुर्भुज नियम से नदी के अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल है [MP PET 1994]

(a) 710 वर्ग मीटर (b) 730 वर्ग मीटर
(c) 705 वर्ग मीटर (d) 750 वर्ग मीटर

7. $\int_a^b f(x)\,dx$ को समलम्ब चतुर्भुज के नियम से मूल्यांकन के लिए अन्तराल (a, b) को

(a) $2n$ बराबर–बराबर उप–अन्तरालों मे बाँटा जाता है
(b) $2n+1$ बराबर–बराबर उप–अन्तरालों मे बाँटा जाता है
(c) कितने भी बराबर–बराबर उप–अन्तरालों मे बाँटा जाता है
(d) $3n$ बराबर–बराबर उप–अन्तरालों मे बाँटा जाता है

8. संख्यात्मक समाकलन के समलम्बी नियम और निम्नलिखित सारणी

x :	0	0.25	0.50	0.75	1
$f(x)$:	0	0.0625	0.2500	0.5625	1

की सहायता से $\int_0^1 f(x)\,dx$ का मान है [MP PET 1996]

(a) 0.35342 (b) 0.34375
(c) 0.34457 (d) 0.33334

9. 4 बराबर उप–अन्तरालों को लेकर समलम्ब चतुर्भुज नियम से $\int_1^9 x^2 dx$ का सन्निकट मान है [EAMCET 2002]

(a) 243 (b) 248
(c) 242.8 (d) 242.5

10. 4 बराबर उप–अन्तराल लेने पर समलम्ब नियम के द्वारा $\int_1^5 x^2 dx$ का मान होगा [MP PET 2004]

(a) 42 (b) 41.3
(c) 41 (d) 40

सिम्पसन का एक-तिहाई नियम

1. छः उप–अन्तराल लेने पर सिम्पसन नियम द्वारा $\int_0^6 \frac{dx}{1+x^2}$ का मान होगा

(a) 1.3562 (b) 1.3662
(c) 1.3456 (d) 1.2662

2. चार उप-अन्तराल लेने पर सिम्पसन नियम द्वारा $\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx$ का मान होगा

(a) 0.5945 (b) 0.6145
(c) 0.6945 (d) 0.6035

3. छः उप-अन्तराल लेने पर सिम्पसन नियम द्वारा $\int_{-3}^3 x^4\,dx$ का मान होगा

(a) 98 (b) 96
(c) 100 (d) 99

4. एक वक्र निम्न तालिका द्वारा दिये गये बिन्दुओं से गुजरता है

x :	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4
y :	2	2.4	2.7	2.8	3	2.6	2.1

सिम्पसन के नियम से वक्र, x-अक्ष तथा रेखाओं $x = 1, x = 4$ से परिबद्ध क्षेत्रफल है

(a) 7.583 (b) 6.783
(c) 7.783 (d) 7.275

5. सिम्पसन नियम द्वारा $\int_1^7 \frac{dx}{x}$ का मान होगा

(a) 1.358 (b) 1.958
(c) 1.625 (d) 1.458

6. अन्तराल (1, 2) को चार बराबर भागों में बाँटते हुए सिम्पसन नियम द्वारा $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ का मान होगा

(a) 0.6932 (b) 0.6753
(c) 0.6692 (d) 7.1324

7. यदि $h = 1$, तो सिम्पसन नियम द्वारा $\int_1^5 \frac{dx}{x}$ का मान होगा

(a) 1.62 (b) 1.43
(c) 1.48 (d) 1.56

8. सिम्पसन के एक–तिहाई नियम के उपयोग से निम्न आँकड़ों के लिए $\int_1^3 f(x)\,dx$ का मान है

x :	1	1.5	2	2.5	3
$f(x)$:	2.1	2.4	2.2	2.8	3

[MP PET 1993]

(a) 55.5 (b) 11.1
(c) 5.05 (d) 4.975

9. सिम्पसन नियम द्वारा $\int_a^b f(x)\,dx$ का परिकलन करने के लिए अन्तराल (a, b) को बाँटा जाता है [CEE 1993]

(a) $3n$ अन्तरालों में (b) $2n+1$ अन्तरालों में
(c) $2n$ अन्तरालों में (d) कितने भी अन्तरालों में

10. सिम्पसन के एक–तिहाई नियम से $\int_{x_0}^{x_0+nh} y\,dx$, जहाँ n सम संख्या है, का मान होगा [MP PET 1995]

(a) $\frac{h}{3}[(y_0 + y_n) + 2(y_1 + y_3 + ... + y_{n-1}) + 4(y_2 + y_4 + ... + y_{n-2})]$

(b) $\frac{h}{3}[(y_0 + y_n) + 4(y_1 + y_3 + ... + y_{n-1})$

$+2(y_2 + y_4 + ... + y_{n-2})]$

(c) $\frac{h}{3}[(y_0 + y_n) - 2(y_1 + y_3 + ... + y_{n-1})$

$+4(y_2 + y_4 + ... + y_{n-2})]$

(d) इनमें से कोई नहीं

11. संख्यात्मक समाकलन के लिए सिम्पसन के एक–तिहाई नियम के अनुप्रयोग द्वारा दो उप-अंतराल के साथ $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ का मान होगा [MP PET 1996]

(a) $\frac{17}{24}$ (b) $\frac{17}{36}$

(c) $\frac{25}{36}$ (d) $\frac{17}{25}$

12. यदि (2, 6) को बराबर चौड़ाई के चार अन्तरालों मे विभाजित किया जाए, तो सिम्पसन नियम से $\int_2^6 \frac{1}{x^2 - x} dx$ का सन्निकट मान है [EAMCET 2002]

(a) 0.3222 (b) 0.2333

(c) 0.5222 (d) 0.2555

13. यदि $\int_a^b f(x)\,dx$ का आंकिक समाकलन सिम्पसन नियम के द्वारा किया जाता है तो किन्हीं दो क्रमागत उप–अन्तरालों के युग्म में वक्र $y = f(x)$ निम्नलिखित वक्रों में से किसमें अनुमानित किया जाता है [MP PET 1998; 2001]

(a) सरल रेखा (b) परवलय

(c) वृत्त (d) दीर्घवृत्त

14. सिम्पसन नियम द्वारा, π का निकटतम मान निकालने के लिए उचित सूत्र है [MP PET 2000]

(a) $\int_0^1 \left(\frac{1}{1+x^2}\right) dx, n = 16$ (b) $\int_0^1 \left(\frac{1}{1+x^2}\right) dx, n = 9$

(c) $\int_0^1 \left(\frac{1}{1+x}\right) dx, n = 11$ (d) $\int_0^1 \left(\frac{1}{1+x}\right) dx, n = 9$

15. $n = 4$ लेने पर, सिम्पसन नियम से $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$ का मान है [DCE 2001]

(a) 0.785 (b) 0.788

(c) 0.781 (d) इनमें से कोई नहीं

16. 5 बराबर अन्तरालों को लेकर सिम्पसन नियम के द्वारा $\int_1^6 x dx$ का मान होगा [MP PET 2004]

(a) 16 (b) 16.5

(c) 17 (d) 17.5

Critical Thinking

Objective Questions

1. दशमलव के तीन स्थानों तक समीकरण $2x = \cos x + 3$ का सही मूल है

(a) 1.504 (b) 1.479

(c) 1.524 (d) 1.897

2. समीकरण $x^3 - 3x - 5 = 0$ का मूल 2 एवं 2.5 के बीच है। समद्विभाजन विधि का तीन बार प्रयोग करने पर इसका लगभग मान है

(a) 2.0625 (b) 2.3125

(c) 2.3725 (d) 2.4225

3. समीकरण $x^3 + x - 3 = 0$ का अन्तराल (1, 2) में मूल का मान मिथ्या स्थिति विधि से द्वितीय पुनरावृत्ति के पश्चात् निम्न अन्तराल में होगा [MP PET 2003]

(a) (1.178, 2.00) (b) (1.25, 1.75)

(c) (1.125, 1.375) (d) (1.875, 2.00)

4. न्यूटन–रैफ्सन विधि से प्रथम पुनरावृत्ति के पश्चात् समीकरण $x^4 - x - 10 = 0$ का 2 के निकट मूल का मान है [MP PET 2003]

(a) 2.321 (b) 2.125

(c) 1.983 (d) 1.871

5. समीकरण $x^3 - 3x - 5 = 0$ का न्यूटन–रैफ्सन विधि से प्रारम्भिक मान 2 लेकर द्वितीय पुनरावृत्ति में मूल होगा [AI CBSE 1990]

(a) 2.2806 (b) 2.2701

(c) 2.3333 (d) इनमें से कोई नहीं

6. यदि $f(0) = 1, f(1) = 2.72$ तो समलम्ब नियम द्वारा $\int_0^1 f(x)\,dx$ का सन्निकट मान है [MP PET 1999; DCE 2001]

(a) 3.72 (b) 1.86

(c) 1.72 (d) 0.86

7. $n = 4$ लेने पर, समलम्ब चतुर्भुज के नियम द्वारा $\int_0^2 \frac{dx}{1+x}$ का मान होगा [DCE 2000]

(a) 1.1125 (b) 1.1176

(c) 1.118 (d) इनमें से कोई नहीं

8. यदि $n = 3$ के लिए, $\int_1^{10} x^3 dx$ का सन्निकट मान समलम्ब चतुर्भुज विधि $\int_1^{10} x^3 dx = 3\left[\frac{1+10^3}{2} + \alpha + 7^3\right]$ से निकालें, तो $\alpha =$ [MP PET 2000]

(a) 3^3 (b) 4^3

(c) 5^3 (d) 6^3

9. आठ उप-अंतराल लेते हुए सिम्पसन नियम द्वारा $\int_2^{10} \frac{dx}{1+x}$ का मान होगा

(a) 1.2996 (b) 1.0996

(c) 1.1896 (d) 1.134

10. $\int_a^b f(x)\,dx$ का सिम्पसन नियम से मूल्यांकन करने के लिए अंतराल $[a, b]$ को विभाजित किया जाता है [DCE 1999]

(a) बराबर चौड़ाई के सम उप–अन्तरालों में

(b) कितने भी उप–अन्तरालों में

(c) बराबर चौड़ाई के कितने भी उप–अन्तरालों में

(d) बराबर चौड़ाई के विषम उप–अन्तरालों में

Answers

आधारभूत संकल्पना

1	d	2	c	3	c	4	b	5	a
6	d	7	a	8	a	9	c	10	a
11	c	12	a	13	c				

क्रमिक विभाजन विधि

1	a	2	d	3	d	4	b	5	c
6	b								

असत्य (मिथ्या) स्थिति विधि

1	b	2	d	3	b	4	b	5	a

न्यूटन-रैफ्सन विधि

1	b	2	a	3	c	4	c	5	b
6	c	7	b	8	c	9	c	10	b
11	c	12	d	13	d	14	a		

समलम्ब नियम

1	a	2	c	3	b	4	a	5	b
6	c	7	c	8	b	9	b	10	a

सिम्पसन का एक-तिहाई नियम

1	b	2	c	3	a	4	c	5	b
6	a	7	a	8	c	9	c	10	b
11	c	12	c	13	b	14	a	15	a
16	d								

Critical Thinking Questions

1	c	2	b	3	a	4	d	5	a
6	b	7	a	8	b	9	a	10	a

Answers and Solutions

आधारभूत संकल्पना

1. (d) चूंकि $f(1) = -7 < 0$ व $f(2) = -3 < 0$ अर्थात् $f(1)$ और $f(2)$ के चिन्ह समान हैं। अतः अन्तराल (1, 2) में कोई मूल नहीं होगा।

2. (c) माना $f(x) = (x-a)^2 \Rightarrow f'(x) = 2(x-a) = 0$, अतः $x = a$ पर $f'(a) = a$ होगा।

3. (c) माना $f(x) = 2x - \log_{10} x - 7 = 0$, तो

$f(3.5) = -\log_{10} 3.5 < 0$ व $f(4) = 1 - \log_{10}(3.5) > 0$.

अतः $f(x)$ का मूल 3.5 व 4 के बीच में है।

4. (b) यह स्पष्ट है।

5. (a) यह स्पष्ट है।

6. (d) यह स्पष्ट है।

7. (a) माना $f(x) = x^3 - 6x + 1$, परन्तु $f(2) =$ ऋणात्मक व $f(3) =$ धनात्मक, अतः मूल (2, 3) में है।

8. (a) $f(x) = e^x + x - 3$

$f(0) = 1 + 0 - 3 = -2$ (ऋणात्मक)

$f(1) = 0.718$ (धनात्मक)

अतः मूल अंतराल (0, 1) में है।

9. (c) माना $f(x) = x^3 - 2x - 5$, परन्तु $f(2) = -1$ अर्थात् ऋणात्मक व $f(3) = 16$ अर्थात् धनात्मक। अतः मूल (2, 3) में है।

10. (a) $f(x_1)f(x_2) < 0 \Rightarrow$ या तो $f(x_1)$ या $f(x_2) < 0$ अर्थात् दोनों मे एक ऋणात्मक व एक धनात्मक होगा। अतः कम से कम एक मूल अंतराल (x_1, x_2) में है।

11. (c) यह आधारभूत संकल्पना है।

12. (a) $x = e^{-x} \Rightarrow x = \frac{1}{e^x} \Rightarrow xe^x - 1 = 0$

अतः मूल (0, 1) में होगा।

13. (c) जब कोई संख्या दशमलव के *n* अंकों तक पूर्णांकित की जानी है, तब यदि $(n+1)$वाँ अंक 5 है तथा 5 के बाद का अंक शून्य है, तो *n*वें अंक में 1 बढ़ा दिया जाता है, यदि यह विषम है और यदि यह सम है, तो समान रहता है।

दिये हुए प्रश्न में $(n+1)$वाँ अंक 5 है और बाद का अंक शून्य है, अतः *n*वाँ अंक अर्थात् 1 में 1 बढ़ा दिया जाता है, क्योंकि यह एक विषम संख्या है।

अतः दशमलव के तीन अंकों तक पूर्णांकित मान = 3.142.

क्रमिक विभाजन विधि

1. (a) यहाँ $f(1) = -1 < 0$ व $f(2) = 5 > 0$

माना $c = \frac{1+2}{2} = 1.5$ व $f(1.5) = 0.875 > 0$

$\therefore$ मूल (1, 1.5) में है $\Rightarrow f(1.25) = -0.2968 < 0$

अतः मूल (1.25, 1.5) में हैं।

अब $\frac{1.25 + 1.5}{2} = 1.375$

अतः तृतीय पुनरावृत्ति में मूल 1.375 होगा।

2. (d) माना $f(x) = x^3 - 5x + 1$

चूँकि $f(0) > 0$ व $f(0.5) < 0$, अतः मूल $(0, 0.5)$ में होगा।

प्रथम पुनरावृत्ति के बाद, $\frac{0+0.5}{2} = 0.25$

एवं $f(0.25) < 0$ अतः मूल (0, 0.25) में स्थित होगा

द्वितीय पुनरावृत्ति के बाद, $\frac{0+0.25}{2} = 0.125$

अब $f(0.125) > 0$ अतः मूल (0.125, 0.25) में होगा।

तृतीय पुनरावृत्ति के बाद, $\frac{0.125+0.25}{2} = 0.1875$.

3. (d) प्रथम पुनरावृत्ति के बाद मूल 1.5 होगा।

अब $f(1.5) < 0$ अतः मूल (1.5, 2) में होगा।

द्वितीय पुनरावृत्ति के बाद मूल $\frac{1.5+2}{2} = 1.75$ होगा

परन्तु $f(1.75) < 0$ अतः मूल (1.75, 2) में होगा। अतः तृतीय पुनरावृत्ति के बाद मूल $\frac{1.75+2}{2} = 1.875$ होगा।

4. (b) $f(x) = x^3 - 9x + 1 \Rightarrow f(2) =$ ऋणात्मक $\Rightarrow f(4) =$ धनात्मक

अतः मूल 2 व 4 के मध्य है

$\therefore\ x_1 = \frac{2+4}{2} = 3; f(3) =$ धनात्मक

अतः मूल 2 तथा 3 के मध्य है

$x_2 = \frac{3+2}{2} = 2.5$; $f(2.5) =$ ऋणात्मक

अतः मूल 2.5 व 3 के मध्य है

$\therefore\ x_3 = \frac{3+2.5}{2} = 2.75$.

5. (c) यहाँ $f(0) = -2$ व $f(1) = 0.72 \Rightarrow f(0) < 0$ व $f(1) > 0$

अतः मूल (0, 1) में है। अब उत्तरोत्तर विभाजन से,

माना $a = 0$ व $b = 1$, अतः $c = \frac{0+1}{2} = 0.5$

चूँकि $f(0.5) < 0$, अतः मूल (0.5, 1) में होगा।

इस प्रकार दो या तीन पुनरावृत्ति मे मूल 0.85 मिलता है।

6. (b) माना $a = 1, b = 2,\ c = \frac{a+b}{2} = \frac{1+2}{2} = 1.5$

$f(1.5) = -2.125 < 0$ व $f(2) = 2 > 0$

अतः मूल (1.5, 2) में है।

असत्य (मिथ्या) स्थिति विधि

1. (b) चूँकि मूल (1, 1.5) में है, अतः $x_0 = 1$ व $x_1 = 1.5$

इसलिए $x_2 = x_0 - \frac{(x_1 - x_0)f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)}$

$= 1 - \frac{0.5(-2)}{1.375 - (-2)} = 1 + \frac{1}{3.375} = \frac{35}{27}$.

2. (d) $x_2 = x_0 - \frac{(x_1 - x_0)f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)}$,

जहाँ $x_0 = 2, x_1 = 4, f(x_0) = f(2) = -9$

व $f(x_1) = f(4) = 29$

अतः $x_2 = 2 - \frac{2(-9)}{29+9} = 2 + \frac{18}{38} = 2 + 0.47 = 2.47$.

3. (b) यह स्पष्ट है।

4. (b) $x_2 = x_0 - \frac{(x_1 - x_0)f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)}$

$= \frac{x_0 f(x_1) - x_0 f(x_0) - x_1 f(x_0) + x_0 f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)}$

$= \frac{x_0 f(x_1) - x_1 f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)}$.

5. (a) $x_2 = 2 - \frac{(3-2)(-10)}{9-(-10)} = 2 + \frac{10}{19} = 2.526$.

न्यूटन-रैफ्सन विधि

1. (b) यह आधारभूत संकल्पना है।

2. (a) चूँकि $f(x) = x^3 - x - 5, f(1) = -5$ व $f(2) = 1$

$f(1) = -5$ व $f(2) = 1$ दर्शाता है कि मूल 1 की तुलना में 2 के समीप है। माना प्रारम्भिक मान x_0 का मूल 2 है

अब $f'(x) = 3x^2 - 1 \Rightarrow f'(x_0) = f'(2) = 3.2^2 - 1 = 11$

प्रथम पुनरावृत्ति : $x_0 = 2, f(x_0) = 1, f'(x_0) = 11$

$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 2 - \frac{1}{11} = \frac{21}{11} = 1.90909$.

3. (c) यह सूत्र है।

4. (c) यह आधारभूत संकल्पना है।

5. (b) माना $a = 0.5$ व $b = 0.75$

$\Rightarrow f(0.5) - 0.625$ व $f(0.75) = -0.328$

अब चूँकि $|f(0.75)| < |f(0.5)|$

अतः $x_0 = 0.75$.

6. (c) यह आधारभूत संकल्पना है।

7. (b) यह आधारभूत संकल्पना है।

8. (c) प्रथम पुनरावृत्ति: $x_1 = \frac{3}{2} - \frac{\frac{9}{4} - 3}{2 \times \frac{3}{2}} = \frac{3}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$, $[\because f'(x) = 2x]$

अब चूँकि $f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{4}$ व $f\left(\frac{7}{4}\right) = \frac{1}{16}$

स्पष्टतः $\left|f\left(\frac{7}{4}\right)\right| < \left|f\left(\frac{3}{2}\right)\right|$

द्वितीय पुनरावृत्ति : $x_1 = \frac{7}{4} - \frac{\frac{1}{16}}{\frac{7}{2}} = \frac{7}{4} - \frac{1}{56} = \frac{97}{56}$.

9. (c) $f(x) = x^3 - 4x + 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 4$

$\because |f(1)| > |f(2)|, \therefore x_0 = 2$. अब $x_1 = 2 - \frac{1}{8} = 1.875$.

10. (b) यहाँ $f(x) = x^3 - 3x - 5 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 3$

अब $f(2) = -3$ व $f(2.5) = 3.125$

स्पष्टतः $|f(2)| < |f(2.5)|, \therefore x_0 = 2$

एवं $f'(2) = 9, \therefore x_1 = 2 - \frac{-3}{9} = 2 + \frac{1}{3} = 2.33$.

11. (c) $f(x) = x^3 + x - 1, f'(x) = 3x^2 + 1$ एवं दिया है $x_0 = 1$

न्यूटन–रैफ्सन विधि द्वारा,

$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1 - \frac{(1+1-1)}{3(1)+1} = 1 - \frac{1}{4} = 0.75$

$x_2 = 0.75 - \frac{f(0.75)}{f'(0.75)} = 0.686$,

$x_2 = 0.686 - \frac{f(0.686)}{f'(0.686)} = 0.671$

जो कि 0.64 के सन्निकट है।

12. (d) न्यूटन–रैफ्सन विधि द्वारा,

$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}, x_1 = x_0 - \frac{x_0^3 + x_0^2 - 1}{3x_0^2 + 2x_0}$

$x_0 = 1$ रखने पर, (दिया है)

$x_1 = 1 - \frac{1+1-1}{3+2} = 1 - 0.2 = 0.8$.

13. (d) $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \Rightarrow a + h = a - \frac{f(a)}{f'(a)} \Rightarrow h = -\frac{f(a)}{f'(a)}$.

14. (a) माना $x = \sqrt{12} \Rightarrow x^2 = 12 \Rightarrow x^2 - 12 = 0$

$\Rightarrow f(x) = x^2 - 12$, $f'(x) = 2x$; $\because f(3) < 0$ और $f(4) > 0$

अतः मूल 3 तथा 4 के मध्य स्थित है

$\because |f(3)| < |f(4)|$

$\therefore x_0 = 3$

प्रथम पुनरावृत्ति : $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

$x_1 = 3 - \frac{(9-12)}{2 \times 3} = 3 + \frac{3}{2 \times 3} = 3.5$

अब, द्वितीय पुनरावृत्ति : $x_2 = 3.5 - \frac{f(3.5)}{f'(3.5)}$

$x_2 = 3.5 - \frac{[(3.5)^2 - 12]}{2 \times 3.5} = 3.463$.

समलम्ब नियम

1. (a) चूँकि x-अक्ष द्वारा घिरा हुआ क्षेत्रफल $\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$ है।

तालिका के अनुसार, $\int_{7.47}^{7.52} f(x)dx = \frac{h}{2}[y_0 + 2(y_1 + y_2 + y_3 + y_4) + y_5]$

$= \frac{0.01}{2}[1.93 + 2(1.95 + 1.98 + 2.01 + 2.03) + 2.06]$

$= 0.01/2[1.93 + 15.94 + 2.06] = 0.0996$.

2. (c)

i	x_i	$y_i = \frac{1}{1+x_i}$
0	0	1
1	0.25	0.8
2	0.5	0.67
3	0.75	0.571
4	1	0.5

समलम्ब चतुर्भुज नियम से, $\int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$

$= \frac{h}{2}\{y_0 + 2(y_1 + y_2 + y_3) + y_4\}$

$= \frac{1-0}{2 \times 4}\{1 + 2(0.8 + 0.67 + 0.571) + 0.5\} = 0.6977$.

3. (b) क्षेत्रफल = $\int_1^5 y\,dx$;

समलम्ब चतुर्भुज नियम से,

$\int_1^5 y\,dx = \frac{5-1}{4 \times 2}\{10 + 2(50 + 70 + 80) + 100\} = \frac{1}{2}(510) = 255$

$= \frac{1}{2}(510) = 255$ वर्ग इकाई.

4. (a) यह सूत्र है।

5. (b) समलम्ब चतुर्भुज नियम से,

$\int_1^4 y dx = \frac{4-1}{3 \times 2}\{1 + 2(4+9) + 16\} = \frac{1}{2}(43) = 21.5$ वर्ग इकाई.

6. (c) समलम्ब चतुर्भुज नियम से,

$\int_0^{80} x\,dx = \frac{80-0}{8 \times 2}\{0 + 2(4 + 7 + 9 + 12 + 15 + 14 + 8) + 3\}$

$= 5(141) = 705$ वर्ग मीटर.

7. (c) यह आधारभूत संकल्पना है।

8. (b) $\int_0^1 f(x)dx = \frac{0.25}{2}[(0+1) + 2(0.0625 + 0.2500 + 0.5625)]$

= 0.34375.

9. (b) $h = \frac{b-a}{n} = \frac{9-1}{4} = 2.$

i	x_i	$y = x^2$
0	1	1
1	3	9
2	5	25
3	7	49
4	9	81

$\int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{2}[(y_0 + y_n) + 2(y_1 + y_2 + ... + y_{n-1})]$

$= [(1 + 81) + 2(9 + 25 + 49)] = 248$.

10. (a) $h = \frac{b-a}{n} = \frac{5-1}{4} = \frac{4}{4} = 1$

i	x_i	$y = x^2$
0	1	1
1	2	4

2	3	9
3	4	16
4	5	25

$\int_1^5 x^2 dx = \frac{h}{2}[(y_0 + y_n) + 2(y_1 + y_2 .....y_{n-1})]$

$= \frac{1}{2}[(1+25)+2(4+9+16)] = \frac{1}{2}[26+58] = \frac{84}{2} = 42$.

1. (b) यहाँ $a = 0, b = 6, n = 6, h = \frac{b-a}{n} = \frac{6-0}{6} = 1$

x	0	1	2	3	4	5	6
$y = \frac{1}{1+x^2}$	1.000 (y_0)	0.5 (y_1)	0.2 (y_2)	0.1 (y_3)	0.0588 (y_4)	0.038 (y_5)	0.027 (y_6)

अतः $\int_0^6 \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{h}{3}[(y_0 + y_6) + 4(y_1 + y_3 + y_5) + 2(y_2 + y_4)]$

$= \frac{1}{3}[(1+0.027)+4(0.5+0.1+0.038)+2(0.2+0.0588)]$

$= \frac{1}{3}[1.027 + 2.554 + 0.5176] = \frac{4.0986}{3} = 1.3662$.

2. (c) 0 व 1 के बीच 4 अन्तराल लेने पर,

i	x_i	$y_i = \frac{1}{1+x}$
0	0	$y_0 = 1$
1	0.25	$y_1 = 0.8$
2	0.5	$y_2 = 0.67$
3	0.75	$y_3 = 0.571$
4	1	$y_4 = \frac{1}{2} = 0.5$

सिम्पसन नियम से,

$\int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \frac{h}{3}\{y_0 + 4(y_1 + y_3) + 2(y_2) + y_4\}$

$= \frac{1-0}{3\times 4}(1+5.48+1.34+0.5) \cong 0.6945$.

3. (a) $h = \frac{3-(-3)}{6} = 1$

x	– 3	– 2	– 1	0	1	2	3
$y=x^4$	81	16	1	0	1	16	81

सिम्पसन के $\frac{1}{3}$ नियम से,

$\int_{-3}^3 x^4 dx = \frac{1}{3}[(81+81)+4(16+0+16)+2(1+1)] = 98$.

4. (c) क्षेत्रफल $\int_{x_1}^{x_2} y\, dx = \int_1^4 y\, dx$

दिये गये मान सूत्र में रखने पर,

$\int_1^4 y dx = \frac{4-1}{6\times 3}\{(2+2.1)+4(2.4+2.8+2.6)+2(2.7+3)\}$

$= 7.783$.

5. (b)

i	x_i	$y_i = \frac{1}{x_i}$
0	1	1
1	2	0.5
2	3	0.34
3	4	0.25
4	5	0.20
5	6	0.167
6	7	0.142

दिये गये मानों को सिम्पसन सूत्र में रखने पर,

$\int_0^7 \frac{dx}{x} = \frac{7-1}{6\times 3}\{y_0 + 4(y_1 + y_3 + y_5) + 2(y_2 + y_4) + y_6\}$

$= \frac{1}{3}[1+4(0.5+0.25+0.167)+2(0.34+0.20)+0.142]$

$\cong 1.958$.

6. (a) $h = \frac{2-1}{4} = \frac{1}{4}$. अब $x_0 = 1, x_1 = 1+\frac{1}{4}, x_2 = 1+2\times\frac{1}{4}$, $x_3 = 1+3\times\frac{1}{4}$, $x_4 = 1+4\times\frac{1}{4}$

अर्थात् $x_0 = 1, x_1 = 1.25, x_2 = 1.5, x_3 = 1.75, x_4 = 2$

$y_0 = 1, y_1 = 0.8, y_2 = 0.66, y_3 = 0.57, y_4 = 0.5$

$\therefore$ सिम्पसन नियम से,

$\int_1^2 \frac{dx}{x} == \frac{1}{12}[(1+0.5)+4(0.8+0.57)+2(0.66)]$

$= \frac{1}{12}[1.5+5.48+1.32] = \frac{1}{12}[8.3] = 0.6932$.

7. (a) यहाँ, $h = \frac{b-a}{n} = \frac{5-1}{4} = 1$

i	x_i	$y_i = \frac{1}{x}$
0	1	1
1	2	0.5
2	3	0.34
3	4	0.25
4	5	0.2

सिम्पसन के एक–तिहाई नियम से,

$\int_1^5 \frac{dx}{x} = \frac{1}{3}[(1+0.2)+4(0.5+0.25)+2(0.34)] = 1.62$.

8. (c) $\int_1^3 f(x)dx = \frac{3-1}{4\times 3}\{2.1+4(2.4+2.8)+2(2.2)+3\}$

$= \frac{1}{6}(30.3) = 5.05$.

9. (c) यह आधारभूत संकल्पना है।

10. (b) यह सूत्र है।

11. (c)

x	0	0.5	1

$f(x)$	1	2/3	1/2

यहाँ, $h = 0.5$

$\therefore \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \frac{1}{3 \times 2}\left[\left(1+\frac{1}{2}\right)+4\left(\frac{2}{3}\right)\right] = \frac{25}{36}$.

12. (c)

x	2	3	4	5	6
$f(x)$	$\frac{1}{2}$ (y_0)	$\frac{1}{6}$ (y_1)	$\frac{1}{12}$ (y_2)	$\frac{1}{20}$ (y_3)	$\frac{1}{30}$ (y_4)

सिम्पसन नियम से,

$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}[(y_0 + y_{2n}) + 4$ (विषम) + 2(सम)]

$$\int_2^6 \frac{1}{x^2 - x} dx = \frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{30}\right)+4\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{20}\right)+2\left(\frac{1}{12}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{47}{30}\right] = 0.5222 .$$

13. (b) यह स्पष्ट है।

14. (a) सिम्पसन का एक तिहाई नियम प्रयोग किया जाता है, जब विभाजित अंतरालों की संख्या n सम हो।

अतः दिये गये विकल्पों में केवल विकल्प (a) सही है।

15. (a) यहाँ, $h = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{4} = 0.25$

i	x_i	$y_i = \frac{1}{1+x^2}$
0	0	1
1	0.25	0.940
2	0.50	0.8
3	0.75	0.64
4	1.00	0.5

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{0.25}{3}[(y_0 + y_4) + 4(y_1 + y_3) + 2(y_2)]$$

$$= \frac{0.25}{3}[(1+0.5)+4(0.94+0.64)+2\times 0.8] = 0.785 .$$

16. (d) $h = \frac{6-1}{4} = \frac{5}{4} = 1.25$

$x_0 = a = 1,\ x_1 = x_0 + h = 1 + 1.25 = 2.25$

$x_2 = x_0 + 2h = 1 + 2(1.25) = 3.50$

$x_3 = x_0 + 3h = 1 + 3(1.25) = 4.75$

$x_4 = x_0 + 4h = 1 + 4(1.25) = 6.0$

सिम्पसन नियम से,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_1^6 x dx = \frac{h}{3}[(y_0 + y_4) + 4(y_1 + y_3) + 2(y_2)]$$

$$= \frac{1.25}{3}[(1+6)+4(2.25+4.75)+2(3.5)]$$

$$= \frac{1.25}{3}[7+28+7] = 17.5 .$$

Critical Thinking Questions

1. (c) दिया गया समीकरण है, $2x - \cos x - 3 = 0 = f(x)$, (माना)

यहाँ $f(1) = -1.540$ व $f(2) = 1.416$

अतः मूल (1, 2) में है।

माना $a = 1$ व $b = 2$

स्पष्टतः $|f(a)| \not> f(b)|$, अतः $b = x_0 = 2$ लेते हैं।

अब, न्यूटन–रैफ्सन विधि द्वारा,

$x_1 = 2 - \frac{1.416}{2.909} = 1.606$,

$\{\because f'(x) = 2 + \sin x \Rightarrow f'(2) = 2.909\}$

चूँकि $f(1.606) = 0.247$

$\Rightarrow$ मूल (1, 1.606) में है।

पुनः $x_2 = 1.606 - \frac{0.247}{2.999} = 1.524$,

$\{\because f'(1.606) = 2.999\}$.

2. (b) प्रथम पुनरावृत्ति के बाद मूल 2.25 व 2.5 के बीच होगा।

द्वितीय पुनरावृत्ति के बाद मूल 2.25 व 2.375 के बीच होगा।

तृतीय पुनरावृत्ति के बाद मूल 2.25 व 2.3125 के बीच होगा।

अतः इसका लगभग मान 2.3125 होगा।

3. (a) $f(x) = x^3 + x - 3, f(1) = -1$ व $f(2) = 7$

अतः मूल (1, 2) में है

अब $x_0 = 1;, x_1 = 2$ लेने पर,

$x_2 = 1 - \frac{(2-1)(-1)}{7-(-1)} = 1.125$ अब $f(x_2) = -0.451$

अतः मूल (1.125,2) में है।

$\Rightarrow x_3 = 1.125 - \frac{(2-1.125)(-0.451)}{7-(-0.451)} = 1.178$

अब, $f(1.178) = -0.187$.

अतः मूल (1.178,2) में है।

4. (d) $f(x) = x^4 - x - 10 \Rightarrow f(1) = -10$ व $f(2) = 4$

अतः मूल (1,2) में है

अतः $|f(2)| < |f(1)|$ व $f'(x) = 4x^3 - 1$

$x_0 = 2$ लेने पर, $x_1 = 2 - \frac{4}{31} = 1.871$

$[\because f'(2) = 31]$

5. (a) दिया है, $f(x) = x^3 - 3x - 5$

$\therefore f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$

$f(2) = 2^3 - 3.2 - 5 = -3$ व $f'(2) = 9$.

प्रथम पुनरावृत्ति : $x_0 = 2, f(x_0) = -3, f'(x_0) = 9$

$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 2 - \frac{(-3)}{9} = 2 + \frac{1}{3} = 2.33333$

अब x_1 द्वितीय पुनरावृत्ति के लिए x_0 हो जाएगा।

द्वितीय पुनरावृत्ति : $x_0 = 2.33333$

$f(x_0) = (2.33333)^3 - 3.(2.33333) - 5 = 0.70366$

$f'(x_0) = 3\{(2.33333)^2 - 1\} = 13.33329$

$\therefore\ x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 2.33333 - \frac{0.70366}{13.33329} = 2.2806$.

6. (b) $\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}(y_0 + y_n) = \frac{1}{2}(1 + 2.72) = 1.86$.

7. (a) यहाँ, $h = \frac{2-0}{4} = 0.5$

i	x_i	y_i
0	0	1
1	0.5	0.66
2	1	0.5
3	1.5	0.4
4	2	0.33

$\therefore\ \int_0^2 \frac{dx}{1+x} = \frac{h}{2}[(y_0 + y_n) + 2(y_1 + ... + y_{n-1})]$

$= \frac{h}{2}[(y_0 + y_4) + 2(y_1 + y_2 + y_3)]$

$= \frac{0.5}{2}[(1 + 0.33) + 2(0.66 + 0.5 + 0.4)] = 1.1125$.

8. (b) यहाँ, $h = \frac{10-1}{3} = 3$; $y = x^3$

i	x_i	y_i
0	1	1
1	4	64
2	7	343
3	10	1000

$\int_1^{10} x^3 dx = \frac{3}{2}[(1 + 10^3) + 2(4^3 + 7^3)]$

$= 3\left(\frac{1+10^3}{2} + 4^3 + 7^3\right)$; तुलना करने पर $\alpha = 4^3$.

9. (a) यहाँ, $h = \frac{10-2}{8} = 1$

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$y_i = \frac{1}{1+x}$	0.3333 (y_0)	0.25 (y_1)	0.2 (y_2)	0.1667 (y_3)	0.1428 (y_4)	0.125 (y_5)	0.1111 (y_6)	0.1 (y_7)	0.0909 (y_8)

अतः $\int_2^{10} \frac{dx}{1+x}$

$= \frac{1}{3}[0.3333 + 0.0909 + 4(0.25 + 0.1667 + 0.125 + 0.1)$

$+2(0.2 + 0.1428 + 0.1111)]$

= 1.2996.

10. (a) यह स्पष्ट है।

आंकिक विधियाँ

SET Self Evaluation Test -31

1. $x^3 = 65$ को हल करके $\sqrt[3]{65}$ का मान न्यूटन–रैफ्सन विधि द्वारा ज्ञात किया गया है, यदि प्रारम्भिक सन्निकट मान $x_0 = 4$ है, तब प्रथम सन्निकट मान x_1 है **[AMU 1999]**

(a) 65/16 (b) 131/32

(c) 191/48 (d) 193/48

2. अर्धन विधि (bisection method) से समीकरण $x^3 - x - 1 = 0$ का अंतराल [1, 2] में मूल निकालने की प्रक्रिया में प्रारम्भिक सन्निकटन के बाद प्रथम सन्निकटन है

(a) 1.5 (b) 1.75

(c) 1.25 (d) 1.375

3. समीकरण $x^3 - 3x + 4 = 0$ का केवल एक वास्तविक मूल है। मिथ्या स्थिति के नियम द्वारा इसका पहला सन्निकट मूल, अन्तराल (–3, –2) में होगा **[MP PET 1999]**

(a) – 2.125

(b) 2.125

(c) – 2.812

(d) 2.812

4. यदि समीकरण $f(x) = 0$ का एक मूल x_0 के समीप है तो न्यूटन–रैफ्सन विधि से इस मूल का प्रथम आँकलित लगभग मान उस बिन्दु का भुज है जिस पर निम्नलिखित सरल रेखा *x*-अक्ष को काटती है **[MP PET 1998]**

(a) बिन्दु $(x_0, f(x_0))$ पर वक्र $y = f(x)$ का अभिलम्ब

(b) बिन्दु $(x_0, f(x_0))$ पर वक्र $y = f(x)$ की स्पर्श रेखा

(c) बिन्दु $(x_0, f(x_0))$ से जाने वाली सरल रेखा जिसकी प्रवणता $\frac{1}{f'(x_0)}$ है

(d) बिन्दु $(x_0, f(x_0))$ से जाने वाली कोटि

5. पाँच उप–अंतराल लेने पर, समलम्ब नियम द्वारा $\int_0^1 x^3\,dx$ का मान होगा

(a) 0.21 (b) 0.23

(c) 0.24 (d) 0.26

6. यदि $f(x)$ केवल $x = 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$ पर ज्ञात हो, तो $\int_0^1 f(x)\,dx$ का सन्निकट मान निकालने के लिए निम्न में से कौनसा प्रयोग किया जा सकता है **[MP PET 1999]**

(a) समलम्ब नियम

(b) सिम्पसन नियम

(c) समलम्ब तथा सिम्पसन दोनों नियम

(d) इनमें से कोई नहीं

7. यदि $n = 4$ के लिए, समलम्ब नियम द्वारा समाकलन $\int_1^9 x^2 dx$ का मान $2\left[\frac{1}{2}(1+9^2)+\alpha^2+\beta^2+7^2\right]$ है, तब **[MP PET 2002]**

(a) $\alpha = 1, \beta = 3$ (b) $\alpha = 2, \beta = 4$

(c) $\alpha = 3, \beta = 5$ (d) $\alpha = 4, \beta = 6$

8. यदि $e^0 = 1, e^1 = 2.72, e^2 = 7.39$, $e^3 = 20.09$ एवं $e^4 = 54.60$, तब सिम्पसन नियम द्वारा $\int_0^4 e^x\,dx =$

[MP PET 1994, 95, 2001, 02]

(a) 5.387 (b) 53.87

(c) 52.78 (d) 53.17

9. एक नदी की चौड़ाई 80 फुट है। एक किनारे से x फुट की दूरी पर नदी की गहराई d (फुट में) निम्न तालिका से प्राप्त होती है :

x:	0	10	20	30	40	50	60	70	80
d:	0	4	7	9	12	15	14	8	3

नदी का सिम्पसन विधि द्वारा क्षेत्रफल होगा

(a) 705 वर्ग फुट (b) 690 वर्ग फुट

(c) 710 वर्ग फुट (d) 715 वर्ग फुट

10. यदि सिम्पसन नियम से $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{1}{12}[3.1+4(a+b)]$ जबकि अंतराल [0, 1] चार उप–अंतरालों में विभक्त किया गया है तथा *a* और *b* दो विभक्त बिन्दुओं पर $\frac{1}{1+x^2}$ के मान हैं तब *a* और *b* के मान निम्नलिखित हैं **[MP PET 1998]**

(a) $a = \frac{1}{1.0625}, b = \frac{1}{1.25}$

(b) $a = \frac{1}{1.0625}, b = \frac{1}{1.5625}$

(c) $a = \frac{1}{1.25}, b = 1$

(d) $a = \frac{1}{1.5625}, b = \frac{1}{1.25}$

Answers and Solutions

(SET - 31)

1. (d) $x^3 - 65 = 0$

माना $f(x) = x^3 - 65$; $f'(x) = 3x^2$

यहाँ $x_0 = 4$, $\therefore f(x_0) = -1$, $f'(x_0) = 48$

अतः प्रथम सन्निकट मान

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 4 - \frac{(-1)}{48} = \frac{193}{48}.$$

2. (c) माना $f(x) = x^3 - x - 1 = 0$ तथा $f(1) = -1 =$ ऋणात्मक

$f(2) = 5 = +ve$

$\therefore x_1 = \frac{1+2}{2} = 1.5$

अब $f(1.5) =$ धनात्मक, अतः मूल अंतराल [1, 1.5] में है,

$\therefore x_2 = \frac{1+1.5}{2} = 1.25$.

3. (a) $f(-3) = (-3)^3 - 3(-3) + 4 = -14$ तथा $f(-2) = 2$

$x_0 = -3,\ x_1 = -2$ अब $x_2 = x_0 - \frac{(x_1 - x_0)f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)}$

$$x_2 = -3 - \frac{(-2-(-3))(-14)}{16} = -3 + \frac{14}{16} = \frac{-48+14}{16}$$

$$x_2 = \frac{-34}{16} = -2.125 .$$

4. (b) बिन्दु $(x_0, f(x_0))$ पर वक्र $y = f(x)$ की स्पर्श रेखा का समीकरण $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

यदि यह स्पर्श रेखा $x-$अक्ष को स्पर्श करती है, तो $y = 0$

$0 - f(x_0) = f'(x_0).(x - x_0)$ या $x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

यह न्यूटन–रैफ्सन विधि से सन्निकट मूल का मान है।

5. (d) यहाँ, $h = \frac{1-0}{5} = 0.2$

I	0	1	2	3	4	5
x_i	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
$y=x^3$	0	0.00	0.06	0.21	0.51	1

समलम्ब चतुर्भुज नियम द्वारा

$$\int_0^1 x^3 dx = \frac{h}{2}[y_0 + y_5 + 2(y_1 + y_2 + y_3 + y_4)]$$

$$= \frac{0.2}{2}[0 + 1 + 2(0.008 + 0.064 + 0.216 + 0.512)] = 0.26 .$$

6. (a) कोटियों की संख्या 4 है अर्थात् , (y_0, y_1, y_2, y_3).

उप–अंतरालों की संख्या = 3 (विषम अन्तराल)

$\int_0^1 f(x)dx$ का मान ज्ञात करने के लिए केवल समलम्ब–चतुर्भुज नियम का उपयोग करते हैं क्योंकि सिम्पसन नियम का उपयोग केवल सम उप–अंतरालों के लिए करते हैं और समलम्ब नियम का उपयोग कितने भी उप–अंतरालों के लिए कर सकते हैं (अर्थात् सम, विषम दोनों)।

7. (c) $h = \frac{b-a}{n} = \frac{8}{4} = 2$

i	x_i	$y_i = x^2$
0	1	1^2
1	3	3^2
2	5	5^2
3	7	7^2
4	9	9^2

$$\therefore \int_1^9 x^2 dx = \frac{h}{2}[(y_0 + y_n) + 2(y_1 + y_2 ..... + y_{-1})]$$

$$= \frac{2}{2}[(1^2 + 9^2) + 2(3^2 + 5^2 + 7^2)]$$

$$= 2\left[\frac{1}{2}(1 + 9^2) + 3^2 + 5^2 + 7^2\right]$$

स्पष्टतः ऊपर दिये समीकरण से, $\alpha = 3, \beta = 5$.

8. (b) दिये गये मानों को सूत्र में रखने पर,

* * *

$$\int_0^4 e^x dx = \frac{4-0}{4\times 3}\{1+4(2.72+20.09)+2(7.39)+54.60\}$$

$$= 53.87 .$$

9. (c) सिम्पसन नियम द्वारा,

क्षेत्रफल $= \frac{10}{3}[(0+3)+4(4+9+15+8)+2(7+12+14)]$

$$= \frac{10}{3}[3+144+66]$$

$= \frac{10}{3}[213] = 710$ वर्ग फीट.

10. (b) $h = \frac{b-a}{n}, h = \frac{1-0}{4} = 0.25$

x	0	0.25	0.5	0.75	1
$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$	1 (y_0)	$\frac{1}{1.0625}$ (y_1)	$\frac{1}{1.25}$ (y_2)	$\frac{1}{1.5625}$ (y_1)	0.5 (y_4)

$$\therefore \int_0^1 f(x)dx = \frac{h}{3}[(y_0+y_4)+2y_2+4(y_1+y_3)]$$

$$= \frac{1}{12}\left[(1+0.5)+2\times 0.8+4\left(\frac{1}{1.0625}+\frac{1}{1.5626}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{12}\left[3.1+4\left(\frac{1}{1.0625}+\frac{1}{1.5625}\right)\right]$$

तुलना करने पर,

$a = \frac{1}{1.0625}$, $b = \frac{1}{1.5625}$.