അധ്യായം 7

I9K2B1

കണികാവ്യൂഹവും അവയുടെ ഭ്രമണ ചലനവും
SYSTEMS OF PARTICLES AND ROTATIONAL MOTION

7.1 ആമുഖം
7.2 ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രം
7.3 ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രത്തിന്റെ ചലനം
7.4 ഒരു കണികാവ്യവസ്ഥയുടെ രേഖീയആക്കം
7.5 രണ്ടു സദിശങ്ങളുടെ സദിശ ഗുണിതം
7.6 കോണീയ പ്രവേഗവും രേഖീയ പ്രവേഗവുമായി അതിനുള്ള ബന്ധവും
7.7 ടോർക്കും കോണീയആക്കവും
7.8 ഒരു ദൃഢവസ്തുവിന്റെ സന്തുലനാവസ്ഥ
7.9 മൊമെന്റ് ഓഫ് ഇനേർഷ്യ
7.10 ലംബവും സമാന്തരവുമായ അക്ഷങ്ങളുടെ തത്വങ്ങൾ
7.11 ഒരു നിശ്ചല അക്ഷത്തെ ആധാരമാക്കിയുള്ള ഭ്രമണചലനത്തിന്റെ ശുദ്ധഗതികം
7.12 ഒരു നിശ്ചല അക്ഷത്തെ ആധാരമാക്കിയുള്ള ഭ്രമണചലനത്തിന്റെ ഗതികം
7.13 ഒരു നിശ്ചല അക്ഷത്തെ ആധാരമാക്കിയുള്ള ഭ്രമണത്തിലെ കോണീയ ആക്കം
7.14 ഉരുളൽ ചലനം
സംഗ്രഹം
ആലോചനാസുചകങ്ങൾ
പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ
കുടുതൽ പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ

7.1 ആമുഖം

കഴിഞ്ഞ അധ്യായത്തിൽ പ്രാഥമികമായി പരിഗണിച്ചത് ഒരു കണത്തിന്റെ ചലനത്തെക്കുറിച്ചാണ്. ഒരു കണം ദ്രവ്യത്തിന്റെ ഏറ്റവും ചെറിയ അംശമാണ്. അതിന് ഒരു പ്രത്യേക ആകൃതിയോ ആകാരമോ സങ്കൽപ്പിക്കാനാവില്ല. നിശ്ചിത വലുപ്പമുള്ള വസ്തുക്കളുടെ ചലനങ്ങൾപോലും കണങ്ങളുടെ ചലനമായി കണക്കാക്കിക്കൊണ്ടാണ് ഇതുവരെയുള്ള നമ്മുടെ പഠനങ്ങൾ മുന്നേറിയിട്ടുള്ളത്.

സാധാരണ നമ്മൾ കണ്ടുവരാറുള്ള ഏതൊരു യഥാർഥ വസ്തുവിനും ഒരു നിശ്ചിത ആകൃതിയുണ്ടായിരിക്കും. ഇത്തരം നിശ്ചിത ആകൃതിയുള്ള (വ്യാപ്തിതവസ്തുക്കൾ- extended bodies-. എന്നും പറയാം) വസ്തുക്കളുടെ ചലനങ്ങൾ പരിഗണിക്കുമ്പോൾ, അത്തരം ചലനങ്ങളെ ഒരു കണത്തിന്റെ ചലനമായി താരതമ്യം ചെയ്യുന്നതിൽ അപാകതയുണ്ട്. ഈയൊരു പരിമിതിയെ മറികടക്കാനുള്ള ശ്രമമാണ് ഈ അധ്യായത്തിൽ വിവരിക്കുന്നത്. ഒരു വ്യാപ്തിതവസ്തുവിനെ എങ്ങനെയാണ് വിവരിക്കേണ്ടതെന്നും, അതിനെപ്പറ്റി ഒരു ധാരണ രൂപീകരിക്കേണ്ടതെങ്ങനെയാണെന്നും നമുക്ക് ആലോചിക്കാം. ഒരു വ്യാപ്തിതവസ്തു അനേകം കണികകൾ ഉൾച്ചേർന്നിട്ടുള്ള ഒരു വ്യവസ്ഥയാണെന്നതാണ് ഒന്നാമത്തെ കാര്യം. എന്നാൽ നമ്മൾ പരിഗണിക്കുന്നത് ആ വസ്തുവിന്റെ മൊത്തം ചലനത്തെക്കുറിച്ചാണുതാനും. ആ കണികാവ്യവസ്ഥയുടെ അല്ലെങ്കിൽ വ്യാപ്തിതവസ്തുവിന്റെ ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രം (Centre of mass) എന്ന ആശയമാണ് ഇവിടെ മുഖ്യ പരിഗണനാവിഷയമായി അവതരിപ്പിക്കുന്നത്. അങ്ങനെ ഒരു കണികാവ്യവസറയുടെ ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രചലനത്തെയും ഒരു വ്യാപ്തിതവസ്തു ചലിക്കുന്നതുകൊണ്ടുള്ള പ്രയോജനങ്ങളെക്കുറിച്ചുമാണ് പ്രധാനമായും ഇവിടെ ചർച്ചചെയ്യുന്നത്.

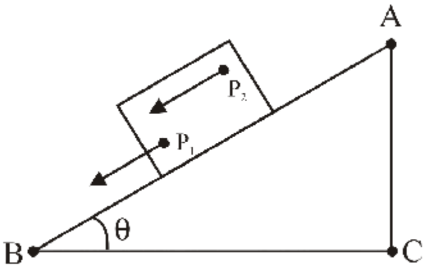
വ്യാപ്തിതവസ്തുക്കളെ സംബന്ധിച്ച നിരവധി പ്രശ്നങ്ങൾക്ക്, അവയെ ദൃഢവസ്തുക്കൾ (rigid bodies) എന്നു പരിഗണിച്ചാൽ എളുപ്പത്തിൽ ഉത്തരം കണ്ടെത്താവുന്നതാണ്. വളരെ വ്യക്തമായ ആകൃതിയുള്ളതും എന്നാൽ ആകൃതിയിൽ മാറ്റം വരുത്താനാവാത്തതുമായ വസ്തുവെന്നാണ് ഒരു ദൃഢവസ്തുവിനെ നിർവചിക്കുന്നത്. ഒരു ദൃഢവസ്തുവിൽ (rigid bodies) ഉൾപ്പെട്ടിരിക്കുന്ന ഏതൊരു ജോടി കണികകളെടുത്താലും അവ തമ്മിലുള്ള അകലത്തിൽ മാറ്റം വരുത്താനാവില്ല, അല്ലെങ്കിൽ അവ തമ്മിലുള്ള അകലം സ്ഥിരമായിരിക്കും. ഈ നിർവചനപ്രകാരം യഥാർഥ വസ്തുക്കളെല്ലാംതന്നെ ദൃഢവസ്തുക്കളായി പരിഗണിക്കാനാവില്ലെന്നു കാണാം. കാരണം, യഥാർഥവസ്തുക്കളുടെ കൂട്ടത്തിൽ ബലങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് ആകൃതിവ്യത്യാസം വരുത്താവുന്ന വസ്തുക്കളും

ഉണ്ടായേക്കാം. എന്നിരുന്നാലും മിക്ക സാഹചര്യങ്ങളിലും ഇത്തരത്തിലുള്ള രൂപമാറ്റം വളരെ നിസ്സാരമായി പരിഗണിക്കാവുന്നതാണ്. ചക്രങ്ങൾ (wheel), പമ്പരങ്ങൾ (Tops), ഉരുക്കു ദണ്ഡുകൾ, തന്മാത്രകൾ, ഗ്രഹങ്ങൾ എന്നിവകൾക്ക് ചുളുക്കുകളോ വളവുകളോ കമ്പനങ്ങളോ എന്തൊക്കെയുണ്ടായിരുന്നാലും അവയൊക്കെത്തന്നെ ദൃഢവസ്തുക്കളായി കണക്കാക്കാവുന്നവയാണ്.

7.1.1 ഒരു ദൃഢവസ്തുവിന് ഏതൊക്കെ തരം ചലനങ്ങൾ ആവാം? (What kind of motion can a rigid body have?)

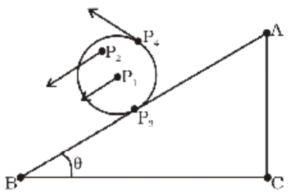
ഈ ചോദ്യത്തിനുള്ള ഉത്തരത്തിനായി നമുക്ക് ദൃഢവസ്തുക്കളുടെ ചലനങ്ങൾ സംബന്ധിച്ച ചില ഉദാഹരണങ്ങളിലേക്കു പോകാം. ഒരു ചതുരക്കട്ട ഒരു ചരിവുതലത്തിലൂടെ നേർരേഖയിൽ സഞ്ചരിക്കുന്നത് നിരീക്ഷിച്ചുകൊണ്ട് ചർച്ച ആരംഭിക്കാം (വശങ്ങളിലേക്കുള്ള സഞ്ചാരമല്ല).

ചതുരക്കട്ട ഒരു ദൃഢവസ്തുവാണ്. അത് ചരിവുതലത്തിലൂടെ താഴേക്കുള്ള സ്ഥാനാന്തരചലനം (translational motion) നടത്തുമ്പോൾ അതിലടങ്ങിയിരിക്കുന്ന കണങ്ങളും അതിനോടൊപ്പംതന്നെ സഞ്ചാരത്തിലായിരിക്കും. ഒരു വസ്തുവിന്റെ സ്ഥാനാന്തരചലനത്തിലെ ഏതൊരു വേളയിലും വസ്തുവും അതിലടങ്ങിയിരിക്കുന്ന കണങ്ങളും ഒരേ പ്രവേഗത്തിലായിരിക്കും. അപ്പോൾ, ഈ ദൃഢവസ്തു ഒരു യഥാർഥ സ്ഥാനാന്തരചലനത്തിലാണ് എന്നു പറയുന്നു.



ചിത്രം 7.1 *ഒരു ചതുരക്കട്ടയുടെ ചരിവുതലത്തിലൂടെയുള്ള സ്ഥാനാന്തര ചലനം (തെന്നൽ). ചതുരക്കട്ടയിലെ P_1, P_2 എന്നീ ബിന്ദുക്കൾക്ക് ഏത് ഇടവേളയിലും ഒരേ പ്രവേഗമായിരിക്കും.*

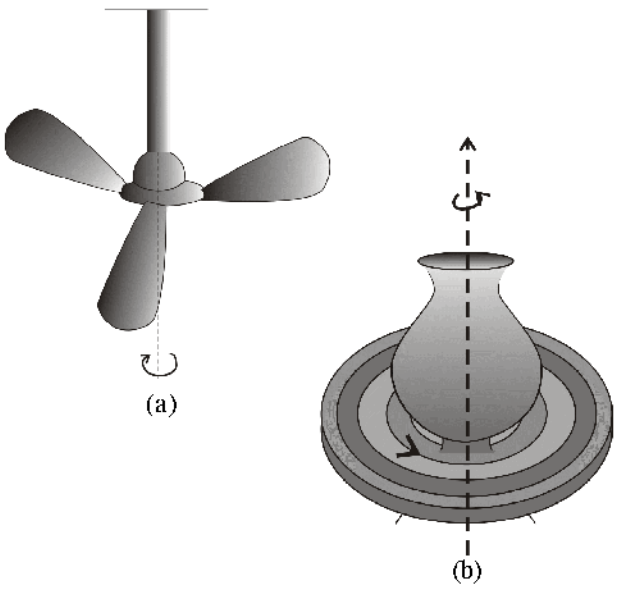
ഇനി, അതേ ചരിവുതലത്തിലൂടെത്തന്നെ താഴേക്ക് ഉരുളുന്ന (*Rolling*) ലോഹത്തിന്റെയോ മരത്തിന്റെയോ സിലിണ്ടറിന്റെയോ സ്ഥാനാന്തരചലനത്തെ നിരീക്ഷിക്കാം (ചിത്രം 7.2). ഈ പ്രവർത്തനത്തിലെ ദൃഢവസ്തു, അതായത് സിലിണ്ടർ ചരിവുതലത്തിന്റെ മുകൾഭാഗത്തുനിന്ന് താഴേക്കുവരെ സ്ഥാനമാറ്റം (*Shift*) ചെയ്യപ്പെടുന്നുണ്ട്. അതിനാൽ അതൊരു സ്ഥാനാന്തരചലനമാണെന്നു പറയാം. ചിത്രം 7.2 സൂക്ഷിച്ചുനോക്കിയാൽ, ഈ ദൃഢവസ്തുവിന്റെ ചലനത്തോടൊപ്പം അവയിലുൾപ്പെടുന്ന എല്ലാ കണങ്ങൾക്കും സമയക്രമത്തിൽ അല്ലെങ്കിൽ ഒരു നിശ്ചിത സമയത്തിൽ ഒരേ പ്രവേഗമാണെന്ന് പറയാനാവില്ല. അതുകൊണ്ട് ആ വസ്തു ഒരു യഥാർഥ സ്ഥാനാന്തരചലനത്തിലല്ല എന്നു പറയേണ്ടി



ചിത്രം 7.2:
ഒരു സിലിണ്ടറിന്റെ ഉരുളൽ ചലനം യഥാർഥ സ്ഥാനാന്തരചലനമല്ല, സിലിണ്ടറിൽ അടയാളപ്പെടുത്തിയ P_1, P_2 P_3, P_4 എന്നീ ബിന്ദുക്കൾക്ക് വ്യത്യസ്ത പ്രവേഗമായിരിക്കും. ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന P_3 ബിന്ദുവിന്റെ പ്രവേഗം പൂജ്യമായിരിക്കും (സിലിണ്ടർ തെന്നി നീങ്ങുന്നില്ലെങ്കിൽ).

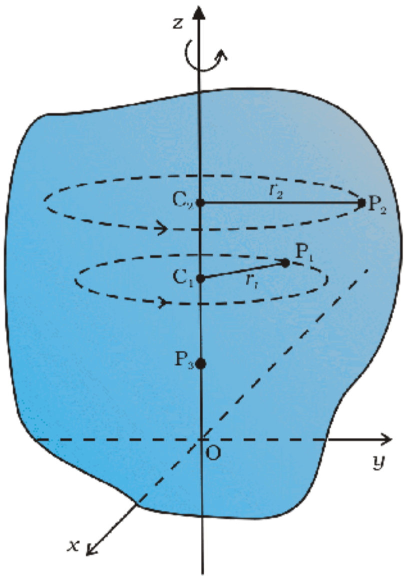
വരുന്നു. അതിന് സ്ഥാനാന്തരചലനത്തോടൊപ്പം പ്രത്യേകതയുള്ള '*വേറെന്തോ ചില*' ചലനങ്ങൾകൂടിയുണ്ടെന്ന് അനുമാനിക്കേണ്ടിയിരിക്കുന്നു.

നേരത്തേ സൂചിപ്പിച്ചതുപോലെയുള്ള '*വേറെന്തോ ചില*' ചലനങ്ങൾ എന്താണെന്നു മനസ്സിലാക്കുന്നതിന് ഒരു ദൃഢവസ്തുവിനെ സ്ഥാനാന്തരചലനത്തിന് സാധ്യമാവാത്തവിധം ഒരു പ്രത്യേക രീതിയിൽ ബന്ധിപ്പിച്ചുനിർത്തി അതിന്റെ ചലന പ്രത്യേകതകൾ നിരീക്ഷിക്കാവുന്നതാണ്. ഇതിനായി ദൃഢവസ്തുവിനെ ഒരു നേർരേഖയിൽ ഉറപ്പിക്കുകയാണ് ചെയ്യുന്നത്. അപ്പോൾ പിന്നെ അതിന് ഭ്രമണചലനത്തിന് (Rotational motion) മാത്രമേ സാധ്യമാവൂ. വസ്തുവിനെ ഉറപ്പിച്ചിരിക്കുന്ന രേഖയെ ഭ്രമണ അക്ഷം (Axis of rotation) എന്നു പറയുന്നു. ഒരു അക്ഷത്തെ കേന്ദ്രമാക്കിയുള്ള നിരവധി ഭ്രമണചലനങ്ങൾ ചുറ്റും നോക്കിയാൽ കാണാൻ കഴിയും; സീലിങ് ഫാൻ, മൺപാത്രനിർമാണ ചക്രം, ഉത്സവസ്ഥലങ്ങളിലെ ഭീമാകാര ചക്രങ്ങൾ എന്നിങ്ങനെ. (ചിത്രം 7.3(a), 7.3 (b)).



ചിത്രം 7.3: ഒരു നിശ്ചിത അക്ഷത്തെ ആധാരമാക്കിയുള്ള പരിക്രമണ ചലനം. a.സീലിങ് ഫാൻ, b. മൺപാത്ര നിർമ്മാണചക്രം

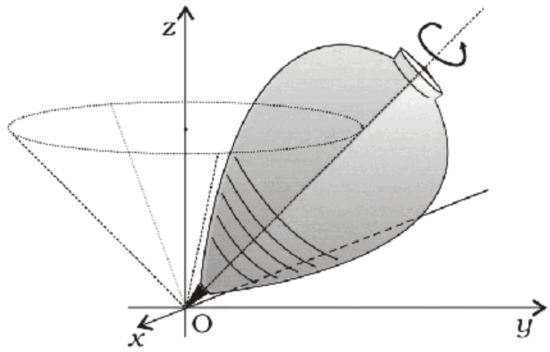
ഭ്രമണമെന്നാലെന്താണെന്നും അതിന്റെ പ്രത്യേകതയെന്താണെന്നും നമുക്ക് മനസ്സിലാക്കാൻ ശ്രമിക്കാം. ഒരു നിശ്ചിത അക്ഷത്തിൽ ഉറപ്പിക്കപ്പെട്ട ഒരു ദൃഢവസ്തുവിന്റെ ഭ്രമണചലനത്തിൽ ആ വസ്തുവിലെ എല്ലാ കണങ്ങളും അക്ഷത്തിനു ലംബമായി വരുന്ന തലത്തിലൂടെ അക്ഷത്തിന് ചുറ്റുമായി സഞ്ചരിക്കുന്നു. (ചിത്രം



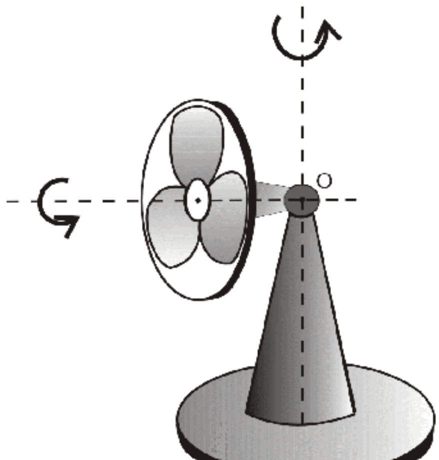
ചിത്രം 7–4: Z-അക്ഷത്തെ ആധാരമാക്കിയുള്ള ഒരു ദൃഢവസ്തുവിന്റെ ഭ്രമണചലനം. വസ്തുവിലെ ഓരോ സ്ഥാനവും (P_1,P_2) അക്ഷത്തെ കേന്ദ്രമാക്കിയുള്ള (C_1, C_2) വർത്തുള പാതയിലായിരിക്കും. വൃത്തത്തിന്റെ ആരമായി വരുന്ന (r_1,r_2) എന്നിവ അക്ഷകേന്ദ്രത്തിന് ലംബമാണ് അത് സന്ധിക്കുന്നത് (P_1,P_2) എന്നീ ബിന്ദുക്കളിലാണ്. ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ അക്ഷത്തിലുള്ള P_3 എന്ന ബിന്ദു നിശ്ചലമായി തുടരുന്നു.

7.4) ദൃഢവസ്തുവിലെ ഒരു കണമായ P_1 അക്ഷകേന്ദ്രത്തിൽനിന്ന് r_1 അകലത്തിലാണെന്ന് കരുതുക. P_1 എന്ന സ്ഥാനത്തുള്ള കണം ദൃഢവസ്തുവിന്റെ മൊത്തം ഭ്രമണത്തോടൊപ്പം അക്ഷകേന്ദ്രത്തിൽനിന്ന് r_1 ആരമായി നിശ്ചല അക്ഷത്തിന് ചുറ്റുമായി വൃത്താകാരപാതയിൽ സഞ്ചരിക്കുന്നു. P_1, r_1, C_1 എന്നിവ ഉൾക്കൊള്ളുന്ന വൃത്താകാരതലം അക്ഷത്തിന് ലംബമായ പ്രതലത്തിൽ സറിതിചെയ്യുന്നു. ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന മറ്റൊരു കണമായ P_2 അക്ഷകേന്ദ്രം C_2 വിൽ നിന്ന് r_2 അകലത്തിലൂടെ നിശ്ചല അക്ഷത്തിന് ലംബമായി മറ്റൊരു വൃത്താകാരപാതയിൽ പരിക്രമണം നടത്തുന്നു. ദൃഢവസ്തുവിലുൾപ്പെട്ട ബിന്ദുക്കളായ P_1, P_2 എന്നിവ രണ്ട് വ്യത്യസ്ത തലങ്ങളിലാണ് പരിക്രമണം ചെയ്യുന്നതെങ്കിലും, ഈ രണ്ടു തലങ്ങളും അക്ഷത്തിന് ലംബമാണ്. പക്ഷേ, P_3 നെപ്പോലെ $r = 0$ ആരമുള്ള ഒരു കണമാണെങ്കിൽ (അക്ഷത്തിൽത്തന്നെയുള്ള ഒരു കണം) ദൃഢവസ്തുവിനൊപ്പം മറ്റു രണ്ടു കണങ്ങളെന്നപോലെ അത് പരിക്രമണത്തിൽ പങ്കെടുക്കുന്നില്ല. അതായത് അക്ഷം നിശ്ചലമായതിനാൽ കണവും നിശ്ചലമാണ്.

ഭ്രമണചലനത്തിന്റെ ചില ഉദാഹരണങ്ങളെടുത്താൽ



ചിത്രം 7.5 (a): പമ്പരം തറയുമായി ബന്ധപ്പെടുന്ന അഗ്രമായ O, (പമ്പരത്തിന്റെ മധ്യഭാഗത്തുകൂടി കടന്നുപോവുന്ന അക്ഷത്തിന്റെ ഒരു അഗ്രഭാഗം) താൽക്കാലികമായി ഉറപ്പിച്ചതാണ്.

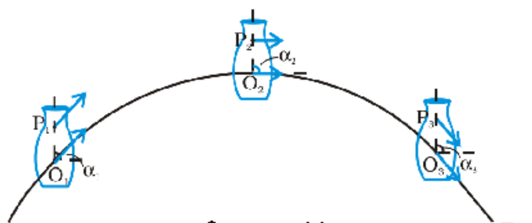


ചിത്രം 7.5 (b): പരിക്രമണത്തിലുള്ള ടേബിൾ ഫാൻ - അതിന്റെ ദോലന കേന്ദ്രം O, ഉറപ്പിച്ചതാണ്.

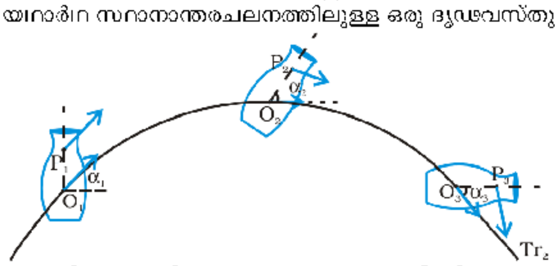
അവയുടെയെല്ലാം അക്ഷം ഉറപ്പിച്ച നിലയിലാകണമെന്നില്ല. ഏറ്റവും നല്ല ഉദാഹരണം തിരിയുന്ന പമ്പരം (*Spinning top*) തന്നെയാണ്. (പമ്പരം കറങ്ങുമ്പോൾ അതിന്റെ ചുവട് നീങ്ങിപ്പോകുന്നില്ലെങ്കിൽ) തറയുമായുള്ള സമ്പർക്ക ബിന്ദുവിലൂടെയുള്ള ലംബദിശയെ ആധാരമാക്കി പമ്പരം കറങ്ങുന്ന അക്ഷത്തിന്റെ അഗ്രം ചിത്രം (7.5(*a*)) യിൽ കാണുന്ന രീതിയിൽ വൃത്താകാരമായ ഒരു പാതയിലൂടെ സഞ്ചരിക്കുന്നുണ്ട്. കൂടാതെ ഈ ചലനം ഈ വൃത്തം ബെയ്സ് ആകത്തക്കവിധത്തിൽ ഒരു കോണും സൃഷ്ടിക്കുന്നുണ്ട്. പമ്പരത്തിന്റെ അക്ഷം ചുറ്റും വിസ്താര വൃത്താകാരത്തിൽ കറങ്ങുന്ന

ഈ പ്രതിഭാസത്തെ പുരസ്സരണം (*Precession*) എന്നാണ് പറയുക. (പമ്പരത്തിന്റെ അക്ഷം ലംബത്തിനു ചുറ്റും കറങ്ങുന്നതിനെ പുരസ്സരണം എന്നു വിളിക്കുന്നു). ഈ ഉദാഹരണത്തിൽ പമ്പരം തറയിൽ സ്പർശിക്കുന്ന അഗ്രഭാഗം സ്ഥാനഭ്രംശം വരാത്ത രീതിയിൽ ഉറപ്പിച്ചു നിർത്തിയതായി കരുതുക. പമ്പരത്തിന്റെ പരിക്രമണാക്ഷം എല്ലായ്പ്പോഴും ഈ സ്പർശബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോവും. ഇത്തരത്തിൽ കാണാൻ കഴിയുന്ന മറ്റൊരു ദാഹരണമാണ് ദോലനം (*Oscillation*) ചെയ്യുന്ന ടേബിൾ ഫാൻ, പെഡസ്റ്റൽ ഫാൻ മുതലായവ. നിങ്ങൾ കണ്ടിട്ടുള്ളതുപോലെ ഇത്തരം ഉപകരണങ്ങളുടെ പരിക്രമണ അക്ഷത്തിന്റെ ഒരഗ്രം ഉറപ്പിച്ചിരിക്കുന്ന സ്ഥാനത്ത് തിരശ്ചീനമായി (*Horizontal*) അതിന് ദോലനചലനം കൂടിയുണ്ട്. (വശങ്ങളിലേക്ക് –ചിത്രം 7.5 (*b*)).

ഫാൻ കറങ്ങുമ്പോൾ അതിന്റെ അക്ഷം വശങ്ങളിലേക്കു നീങ്ങിയാലും അത് ഉറപ്പിച്ചിരിക്കുന്ന സ്പർശബിന്ദു സ്ഥിരമായി നിലനിൽക്കുന്നു. അതിനാൽ ഒരു പമ്പരം, പെഡസ്റ്റൽ ഫാൻ എന്നിവയെപ്പോലുള്ള ദൃഢവസ്തുക്കളുടെ പരിക്രമണത്തിൽ ഈയൊരു ബിന്ദു മാത്രമേ സ്ഥാനഭ്രംശം സംഭവിക്കാതിരിക്കുന്നുള്ളൂ. എന്നാൽ ഇവയുടെ ഭ്രമണ അക്ഷം ചലിച്ചുകൊണ്ടിരിക്കുന്നു. എന്നാൽ, എല്ലായ്പ്പോഴും അത് സ്പർശബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോവുന്നു.



ചിത്രം 7.6 (*a*):
യഥാർഥ സ്ഥാനാന്തരചലനത്തിലുള്ള ഒരു ദൃഢവസ്തു



ചിത്രം 7.6 (*b*): സ്ഥാനാന്തരചലനത്തിന്റെയും പരിക്രമണ ചലനത്തിന്റെയും സംയോജിത ചലനാവസ്ഥയുള്ള ഒരു ദൃഢവസ്തു

ചിത്രം 7.6 (a)യും 7.6(b)യും ഒരു വസ്തുവിന്റെ വ്യത്യസ്ത തരത്തിലുള്ള ചലനങ്ങൾ വ്യക്തമാക്കുന്നു. P എന്ന ബിന്ദു ശ്രദ്ധിക്കുക. P എന്നത് വസ്തുവിലെ ഏതെങ്കിലും ഒരു സ്ഥാനവും 'O' വസ്തുവിന്റെ ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്ര (centre of mass- ഇതേപ്പറ്റി അടുത്ത ഭാഗത്ത് വിവരിക്കുന്നുണ്ട്) വുമാണ്. O_1, O_2, O_3, യും P_1, P_2, P_3 യും യഥാക്രമം O യുടെയും P യുടെയും മൂന്നു വ്യത്യസ്ത സമയങ്ങളിലുള്ള സ്ഥാനങ്ങളാണ്. ചിത്രം 7.6 (a) പരിശോധിച്ചാൽ സമയത്തിന്റെ ഏതു ക്ഷണത്തിലും O യേയും P യേയും പോലുമുള്ള കണങ്ങൾക്ക് നേർരേഖാ സ്ഥാനാന്തരചലനത്തിൽ ഒരേ പ്രവേഗമായിരിക്കുമെന്നു കാണാം. ആ വസ്തു ഒരു യഥാർഥ സ്ഥാനാന്തരചലനത്തിൽ OP രേഖ തിരശ്ചീനദിശയുമായി ഉണ്ടാക്കുന്ന കോണളവിനു വ്യതിയാനം സംഭവിക്കുന്നില്ല. ചിത്രം 7.6(a) അതുകൊണ്ട് ഇവിടെ $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$ ആയിരിക്കും. ചിത്രം 7.6(b) യിൽ വിവരിക്കുന്നത് സ്ഥാനാന്തരചലനത്തിന്റെയും പരിക്രമണ ചലനത്തിന്റെയും സംയോജനമാണ്. ഇതിൽ ഏതൊരു വേളയിലും കണങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള പ്രവേഗം വ്യത്യസ്തമാവും $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ എന്നിവ വ്യത്യാസപ്പെട്ടുകൊണ്ടിരിക്കുകയും ചെയ്യും.

നമ്മെ സംബന്ധിച്ചിടത്തോളം സൂചനകളൊന്നും ഇല്ലാത്തപക്ഷം, പരിക്രമണ ചലനം ഒരു സ്ഥിര അക്ഷത്തെ ആധാരമാക്കിയിട്ടുള്ളതായിരിക്കും.

ചരിവുതലത്തിലൂടെ താഴേക്കുരുളുന്ന ഒരു സിലിണ്ടറിനെ സംബന്ധിച്ചിടത്തോളം അതിന്റെ ചലനം ഒരു നിശ്ചല അക്ഷത്തെ ആധാരമാക്കിയുള്ള ഒരു പരിക്രമണചലനത്തിന്റെയും സ്ഥാനാന്തരചലനത്തിന്റെയും സംയോജനമാണെന്ന് പറയാം.

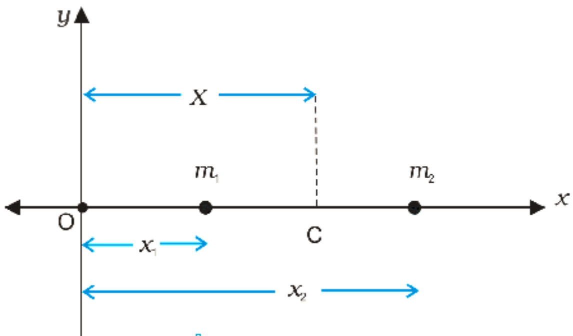
ഉരുളൽചലന (*Rolling motion*) ത്തിൽ നാം നേരത്തേ സംശയം പ്രകടിപ്പിച്ച '*വേറെന്തോ ചലനം*' വാസ്തവത്തിൽ ഭ്രമണചലനമാണ്. ഈയൊരു കാഴ്ചപ്പാടിലൂടെ ചിത്രം 7.6 (*a*), 7.6(*b*) എന്നിവ സൂക്ഷ്മമായി പരിശോധിച്ചാൽ ഇക്കാര്യം ബോധ്യമാവും. രണ്ടിലും കാണിച്ചിരിക്കുന്നത് ഒരേ സഞ്ചാരപഥത്തിലൂടെ സഞ്ചരിക്കുന്ന ഒരു വസ്തുവിന്റെ രണ്ടുതരം ചലനങ്ങളാണ്. ചിത്രം 7.6 (*a*) യിലെ വസ്തുവിന്റെ സഞ്ചാരം പൂർണ സ്ഥാനാന്തര ചലനവും ചിത്രം 7.6(*b*) യിലേത് സ്ഥാനാന്തരവും പരിക്രമണവും ചേർന്നുള്ള ചലനവുമാണ്. (നിങ്ങൾക്ക് പുസ്തകത്തെ ഒരു ദൃഢവസ്തുവായി സങ്കൽപിച്ച് അതിന്റെ രണ്ടുവിധത്തിലുള്ള സഞ്ചാരങ്ങൾ പുനരാവിഷ്കരിക്കാവുന്നതാണ്).

മേൽചർച്ചയെ അധികരിച്ച് ഈ വിഭാഗത്തിൽ നടത്തിയ നിരീക്ഷണങ്ങൾ സംഗ്രഹിക്കാം. **ഏതെങ്കിലും തരത്തിൽ ഉറപ്പിക്കുകയോ ബന്ധിക്കുകയോ ചെയ്യാത്ത ഒരു ദൃഢവസ്തുവിന്റെ സഞ്ചാരം ഒന്നുകിൽ പൂർണ സ്ഥാനാന്തരചലനമോ അല്ലെങ്കിൽ സ്ഥാനാന്തരചലനവും ഭ്രമണചലനവും ചേർന്നുള്ളതോ ആവാം. എന്നാൽ ഏതെങ്കിലും തരത്തിൽ ഉറപ്പിക്കുകയോ ബന്ധിപ്പിക്കുകയോ ചെയ്ത ഒരു വസ്തുവിന്റെ ചലനം പരിക്രമണ ചലനം മാത്രമായിരിക്കും.** ഭ്രമണചലനമെന്നത് ഒരു നിശ്ചലഅക്ഷത്തെ ആധാരമാക്കിയുള്ളതോ (സീലിങ്

ഫാൻ) അല്ലെങ്കിൽ ചലിക്കുന്ന അക്ഷത്തെ ആധാരമാക്കിയുള്ളതോ (ദോലനമുള്ള ടേബിൾ ഫാൻ) ആവാം. ഈ അധ്യായത്തിൽ പരിഗണിക്കുന്നത് നിശ്ചല അക്ഷത്തെ ആധാരമാക്കിയുള്ള ഭ്രമണചലനം മാത്രമാണ്.

7.2 ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രം (Centre of mass)

ഒരു കണികാവ്യൂഹത്തിന്റെ ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രം എന്ന ആശയത്തെപ്പറ്റി ആലോചിക്കാം. ഇതിനായി രണ്ടു കണികകളുടെ ഒരു വ്യൂഹം പരിഗണിച്ചുകൊണ്ട് ആരംഭിക്കാം. ഈ രണ്ടു കണികകളെ യോജിപ്പിച്ചുകൊണ്ടുള്ള രേഖയെ x -അക്ഷമായി സങ്കൽപിക്കാം.



ചിത്രം 7.7

O എന്ന നിർദേശാങ്കകേന്ദ്രത്തിൽ ($Origin$) നിന്നു കണികകളിലേക്കുള്ള ദൂരം യഥാക്രമം x_1 ഉം x_2 ഉം ആണെന്നിരിക്കട്ടെ. കണികകളുടെ മാസ് യഥാക്രമം m_1, m_2 എന്നിങ്ങനെയാണ്. ഈ വ്യവസ്ഥയുടെ ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രം C എന്നത് O വിൽനിന്ന് X ദൂരത്തുള്ള ഒരു സ്ഥാനത്തായിരിക്കും. അത് ലഭിക്കുന്നതിനുള്ള സമവാക്യം താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.

$$X = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \tag{7.1}$$

സമവാക്യം 7.1 ലെ X എന്നത് x_1, x_2 എന്നിവയുടെ മാസ് അധിഷ്ഠിത ശരാശരിയാണ്. എന്നാൽ ഈ രണ്ടു കണികകൾക്കും ഒരേ മാസ് ആണെങ്കിൽ, അതായത് $m_1 = m_2 = m$ അപ്പോൾ,

$$X = \frac{m x_1 + m x_2}{2m} = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

അതായത് ഒരേ മാസ് ഉള്ള രണ്ടു കണികകളുടെ ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രം കൃത്യമായും ഇരു കണികകളെയും യോജിപ്പിക്കുന്ന നേർരേഖയുടെ മധ്യഭാഗത്തായിരിക്കും.

n കണികകളുള്ള ഒരു സഞ്ചയത്തിലെ മാസുകൾ m_1, m_2....m_n എന്നിവ ഒരു നേർരേഖയിൽ വരത്തക്കവണ്ണം ഒരു അക്ഷം വരച്ചാൽ, മുകളിലെ നിർവചനപ്രകാരം കണികാവ്യവസ്ഥയുടെ ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രം ലഭ്യമാകുന്ന സമവാക്യം :

$$X = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + ... + m_n x_n}{m_1 + m_2 + ... + m_n} = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} \tag{7.2}$$

ഇതിൽ x_1, x_2....x_n എന്നീ സ്ഥാനങ്ങൾ നിർദേശാങ്കകേന്ദ്രത്തിൽ നിന്ന് കണക്കാക്കുന്ന ദൂരങ്ങളാണ്. X ഉം അതേ കേന്ദ്രത്തിൽനിന്ന് അളന്നു തിട്ടപ്പെടുത്തിയതാണ്. n കണങ്ങളുടെ എണ്ണം ആയതിനാൽ അത്രയും ഘടകങ്ങളുടെ സങ്കലനത്തെയാണ് Σ (സിഗ്മ)എന്ന ഗണിതചിഹ്നം സൂചിപ്പിക്കുന്നത്. ഇവിടെ n എണ്ണം കണങ്ങളുടെ കാര്യത്തിൽ ആകത്തുക വരുന്നത് : Σm_i M. ഇതാണ് വ്യവസ്ഥയുടെ ആകെ മാസ്.

ഒരു നേർരേഖകൊണ്ട് പരസ്പരം യോജിപ്പിക്കാനാവാത്ത മൂന്നു കണങ്ങളാണ് പരിഗണിക്കുന്നതെങ്കിൽ അവയെ വിവരിക്കുന്നതിന് നേർരേഖക്കു പകരം, രണ്ടു അക്ഷരേഖകൾ നിർണയിക്കുന്ന ഒരു തലത്തിൽ ഈ കണങ്ങൾ സ്ഥിതിചെയ്യുന്നുവെന്ന് സങ്കൽപിച്ച് ഈ അക്ഷങ്ങളിൽ നിന്നുള്ള അവയുടെ അകലങ്ങൾ കണക്കാക്കുന്നു. അതായത്, X അക്ഷവും Y അക്ഷവും ആധാരമാക്കി (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) എന്നിങ്ങനെ സ്ഥാനങ്ങൾ അടയാളപ്പെടുത്തുന്നു. മൂന്നു കണികകളുടെയും മാസുകൾ യഥാക്രമം m_1, m_2, m_3 എന്നിരിക്കട്ടെ, X-Y നിർദേശാങ്കങ്ങളിലൂടെ നിർവചിക്കപ്പെട്ട മൂന്നു കണികകളുടെ ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രം C ലഭ്യമാകുന്നതിന് താഴെ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന സമവാക്യങ്ങൾ ഉപയോഗിക്കാവുന്നതാണ്.

$$X = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3} \tag{7.3 a}$$

$$Y = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{m_1 + m_2 + m_3} \tag{7.3 b}$$

തുല്യ മാസുള്ള, അതായത് $m = m_1 = m_2 = m_3$ കണങ്ങളാവുമ്പോൾ

$$X = \frac{m(x_1 + x_2 + x_3)}{3m} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$$

$$Y = \frac{m(y_1 + y_2 + y_3)}{3m} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

അതായത് നേർരേഖയിലല്ലാത്ത ഒരേ ദ്രവ്യമാനവുമുള്ള മൂന്നു കണങ്ങളുടെ ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രം ആ മൂന്നു കണങ്ങളുടെയും സ്ഥാനങ്ങൾ യോജിപ്പിച്ചുകൊണ്ടുള്ള ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദുവായിരിക്കും. സമവാക്യങ്ങൾ $7.3a$, $7.3b$ യുടെ ഫലങ്ങൾ n എണ്ണം കണങ്ങളുള്ള ഒരു വ്യവസ്ഥയിലേക്ക് എളുപ്പത്തിൽത്തന്നെ സാമാന്യവൽക്കരിക്കാവുന്നതാണ്. അവ ഒരു പ്രതല

ത്തിൽത്തന്നെ ആയിരിക്കണമെന്നില്ല, വിവിധ സ്ഥലത്ത് (*Space*) വിവിധ ഇടങ്ങളിൽ വ്യാപിച്ചിരിക്കുന്നതായാൽ പോലും ഇത് കണക്കാക്കുവാൻ സാധിക്കും. അങ്ങനെയുള്ള ഒരു വ്യവസ്ഥയുടെ ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രം (X,Y,Z) കണ്ടെത്തുന്നത് താഴെ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന നിബന്ധനകൾ ഉപയോഗിച്ചാണ്.

$$X = \frac{\sum m_i x_i}{M} \qquad (7.4a)$$

$$Y = \frac{\sum m_i y_i}{M} \qquad (7.4b)$$

$$Z = \frac{\sum m_i z_i}{M} \qquad (7.4c)$$

ഇതിലെ $M = \Sigma m_i$ എന്നത് വ്യവസ്ഥയുടെ ആകെ മാസാണ്. i എന്ന അങ്കനം 1 മുതൽ n വരെ സൂചിപ്പിക്കുന്നതാണ്. m_i എന്നത് i സ്ഥാനത്തുള്ള കണത്തിന്റെ മാസും i എന്ന കണികയുടെ സ്ഥാന നിർണയം നിർദേശാങ്കങ്ങൾ x_i, y_i, z_i പ്രകാരവുമാണ്.

സമവാക്യങ്ങളായ *(7.4a)*, *(7.4b)*, *(7.4c)* ഇവ സ്ഥാനസദിശങ്ങളുടെ (*position vectors*) അളവുകളും പ്രതീകങ്ങളുമുപയോഗിച്ച് ഒന്നിപ്പിച്ച് ഒറ്റ സമവാക്യമായി എഴുതാനാവും. r_i എന്നത് i സ്ഥാനത്തുള്ള കണികയുടെ സ്ഥാനസദിശമാണെന്നിരിക്കട്ടെ, R എന്നത് ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രത്തിന്റെ സ്ഥാനസദിശവുമാണെങ്കിൽ

$$\mathbf{r}_i = x_i\hat{\mathbf{i}} + y_i\hat{\mathbf{j}} + z_i\hat{k}$$

$$\mathbf{R} = X\hat{\mathbf{i}} + Y\hat{\mathbf{j}} + Z\hat{k}$$ എന്നെഴുതാം

അങ്ങനെയെങ്കിൽ $$\mathbf{R} = \frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{M} \qquad (7.4d)$$

വലതുഭാഗത്തുള്ളവയുടെ തുക ഒരു സദിശസങ്കലന ഫലമാണ്.

സദിശരീതി ഉപയോഗത്തിൽ വരുമ്പോൾ ആവിഷ്കാരത്തിലുള്ള ലാളിത്യം ശ്രദ്ധേയമാണ്. നിർദിഷ്ട നിർദേശാങ്ക വ്യവസ്ഥയിൽ മൂലബിന്ദു *(origin)* തന്നെ ദ്രവ്യമാന കേന്ദ്രമായിവരുന്നെങ്കിൽ തന്നിരിക്കുന്ന കണികാ വ്യവസ്ഥയിൽ $\sum m_i \mathbf{r}_i = 0$ ആയിരിക്കും.

ഒരു ദൃഢവസ്തു, അതൊരു മീറ്റർ ദണ്ഡോ ഫ്ളൈ വീലോ ആകട്ടെ, പരമാവധി അടുത്തടുത്തായി അടുക്കിവച്ച കണങ്ങളുടെ ഒരു വ്യവസ്ഥയാണ്. അതുകൊണ്ട് സമവാക്യങ്ങൾ *(7.4a),(7.4b), (7.4c), (7.4d)* എന്നിവ അത്തരം ദൃഢവസ്തുക്കളിൽ പ്രയോഗിക്കാൻ അനുയോജ്യങ്ങളാണ്. ദൃഢവസ്തു, ചെറുതായാൽപ്പോലും അതിലടങ്ങിയിരിക്കുന്ന കണങ്ങളുടെ എണ്ണം (ആറ്റങ്ങളായാലും തന്മാത്രകളായാലും) അതിഭീമമായതിനാൽ അവയുടെ അവസ്ഥകളെ മൊത്തത്തിൽ വെവ്വേറെ കണക്കാക്കി കൂട്ടിയെടുക്കാനോ ഓരോന്നിന്റെയും വിവരങ്ങൾ സമവാക്യങ്ങളിലേക്കു കൊണ്ടുവരാനോ സാധ്യമല്ല. കണങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അകലങ്ങൾ തീരെ ചെറുതായതിനാൽ വസ്തുവിനെ ഒരു അവിച്ഛിന്ന മാസ് വിന്യാസമായി കരുതാവുന്നതാണ്. ഇനി ഈ വസ്തുവിനെ n ചെറിയ മാസുകളായി പരിഗണിക്കാം. അതായത് $\Delta m_1, \Delta m_2, \ldots\ldots\ldots \Delta m_n$ വരെയുള്ള ഒരു വ്യൂഹമായി കണക്കാക്കാം. അതിലെ i സ്ഥാനത്തുള്ള Δm_i എന്ന ദ്രവ്യഖണ്ഡത്തിന്റെ സ്ഥാനം x_i, y_i, z_i എന്ന നിർദേശാങ്കങ്ങളിലായിരിക്കും. ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രത്തിന്റെ നിർദേശാങ്കം ഏകദേശമായി കണക്കാക്കുന്നത് താഴെ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന വിധമാണ്.

$$X = \frac{\sum (\Delta m_i) x_i}{\sum \Delta m_i}, Y = \frac{\sum (\Delta m_i) y_i}{\sum \Delta m_i}, Z = \frac{\sum (\Delta m_i) z_i}{\sum \Delta m_i}$$

n ന്റെ വില വലുതാകുന്തോറും Δm_i ചെറുതായി വരുകയും ഈ ആവിഷ്കാരം കൃത്യതയുള്ളതായിത്തീരുകയും ചെയ്യും. അത്തരം സന്ദർഭങ്ങളിൽ i യുടെ സങ്കലനം, സമാകലനത്തിലൂടെ ലഭ്യമാകും. അങ്ങനെ,

$$\sum \Delta m_i \rightarrow \int dm = M,$$

$$\sum (\Delta m_i) x_i \rightarrow \int x\, dm,$$

$$\sum (\Delta m_i) y_i \rightarrow \int y\, dm,$$

$$\sum (\Delta m_i) z_i \rightarrow \int z\, dm$$

ഇതിൽ M എന്നത് വസ്തുവിന്റെ മൊത്തം മാസ് ആണ്. ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രത്തിന്റെ നിർദേശാങ്കങ്ങൾ താഴെ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ കുറിക്കാവുന്നതാണ്.

$$X = \frac{1}{M}\int x\, dm, Y = \frac{1}{M}\int y\, dm \text{ and } Z = \frac{1}{M}\int z\, dm \qquad (7.5a)$$

ഈ മൂന്ന് അദിശ ആവിഷ്കാരങ്ങളെയും സദിശ ആവിഷ്കാരങ്ങളാക്കി മാറ്റിയാൽ

$$\mathbf{R} = \frac{1}{M}\int \mathbf{r}\, dm \qquad (7.5b)$$

എന്ന് ലഭിക്കും.

നിർദേശാങ്കവ്യവസ്ഥയുടെ കേന്ദ്രം തന്നെ (*origin*) ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രമായി പരിഗണിച്ചാൽ

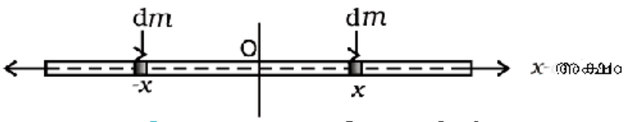
$$\mathbf{R} = \mathbf{0}$$

അതായത് $\int \mathbf{r}\, dm = 0$

അല്ലെങ്കിൽ $\int x\, dm = \int y\, dm = \int z\, dm = 0 \quad (7.6)$

മിക്കപ്പോഴും ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രങ്ങൾ കണക്കാക്കാനായി നമുക്കു ലഭിക്കാറുള്ളത് ഏകസമാനമായതും (*Homogeneous*) ക്രമരൂപമുള്ളതുമായ വസ്തുക്കളായിരിക്കും. ഉദാഹരണത്തിന് വളയങ്ങൾ, തകിടുകൾ, ഗോളങ്ങൾ, ദണ്ഡുകൾ മുതലായവ (ഏകസമാന വസ്തുവെന്നാൽ ദ്രവ്യാവസ്ഥ, അല്ലെങ്കിൽ മാസ് ഒരേനിരക്കിൽ വിതരണം ചെയ്യപ്പെട്ട വസ്തുക്കൾ എന്നാണ്). സമമിതിയുടെ (*Symmetry*) പരിഗണനകൾ ഉപയോഗിച്ചുകൊണ്ട് ആ വസ്തുവിന്റെ ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രം സ്ഥിതിചെയ്യുന്നത് ആ വസ്തുവിന്റെ ജ്യാമിതീയരൂപ കേന്ദ്രത്തിലായിരിക്കുമെന്ന് (*Geometric centre*) എളുപ്പത്തിൽ അനുമാനിക്കാൻ കഴിയും.

കനം കുറഞ്ഞ ഒരു നേരിയ ദണ്ഡ് പരിഗണിക്കുക. ഛേദതലം ചതുരമാണെങ്കിൽ നീളവും വീതിയും, അതല്ലെങ്കിൽ ഛേദതലം വൃത്താകൃതിയിലാണെങ്കിൽ അതിന്റെ ആരം (*Radius*) ദണ്ഡിന്റെ മൊത്തം നീളത്തെക്കാൾ



ചിത്രം 7.8 : ഒരു നേരിയ ദണ്ഡിന്റെ ദ്രവ്യകേന്ദ്രം കണ്ടുപിടിക്കുന്ന വിധം

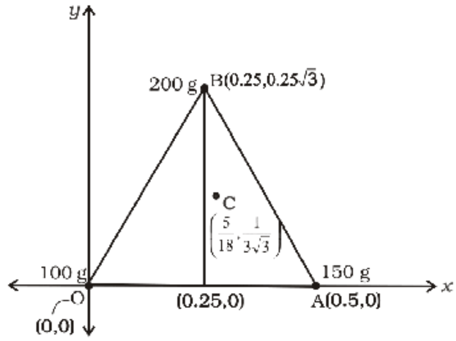
വളരെ ചെറുതാണെന്ന് സങ്കൽപ്പിക്കുക. ദണ്ഡിന്റെ നിർദേശാങ്കകേന്ദ്രം ദണ്ഡിന്റെ ജ്യാമിതീയകേന്ദ്രമാണെന്നും അത് സ്ഥിതിചെയ്യുന്നത് ദണ്ഡിന്റെ നീളത്തിലൂടെ കടന്നുപോവുന്ന x-അക്ഷത്തിലാണെന്നും എടുത്താൽ, പ്രതിഫലന സമമിതി (reflection symmetry) കാരണം ദണ്ഡിന്റെ $+x$ ലുള്ള ഓരോ dm ഘടകത്തിനും തത്തുല്യമായ dm ഘടകം $-x$ ൽ സ്ഥിതിചെയ്യുന്നുണ്ടെന്നു പറയാനാകും. (ചിത്രം 7-8) അതിനാൽ ഓരോ ജോടികളും സമാകലനത്തിലേക്ക് (*Integral*) കൊണ്ടുവന്നാൽ $\int x dm$ ന്റെ ഫലം പൂജ്യമായിരിക്കും. സമവാക്യം (7.6) ൽ നിന്നു ലഭിച്ചതുപോലെ, സമാകലനം പൂജ്യമാവുന്നിടത്തു തന്നെയായിരിക്കും ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രം സ്ഥിതിചെയ്യുക. ഏകസമാനമായ ഒരു ദണ്ഡിന്റെ ജ്യാമിതീയ മധ്യബിന്ദു തന്നെയാണ് അതിന്റെ ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രം. ഇത് പ്രതിഫലന സമമിതിയുടെ അടിസ്ഥാനത്തിലും മനസിലാക്കാൻ സാധിക്കും.

ഇതേ സമമിതി വാദങ്ങൾ തന്നെ ഏകമാനവസ്തുക്കളായ വളയങ്ങൾ, തകിടുകൾ, വൃത്താകാരമോ ചതുരമോ ആയ ഛേദതലങ്ങളുള്ള കനം കൂടിയ ദണ്ഡുകൾ തുടങ്ങിയവക്കു വേണ്ടി പ്രയോഗിക്കാവുന്നതാണ്. ഇത്തരത്തിലുള്ള വസ്തുക്കളിൽ ഓരോ (x,y,z) സ്ഥാനത്തുമുള്ള dm മാസിന് സമാനമായ മാസുകൾ ഭാഗം $(-x,-y,-z)$ സ്ഥാനത്തും ഉണ്ടായിരിക്കുമെന്ന ബോധ്യത്തിലേക്ക് ഇത് നമ്മളെ എത്തിക്കുന്നു. (മറ്റൊരു തരത്തിൽ, ഈ വസ്തുക്കളിൽ സമമിതി കേന്ദ്രം തന്നെയായിരിക്കും. നിർദേശാങ്കകേന്ദ്രം). അതിനാൽ, സമവാക്യം (7.5a) യിലെ സമാകലന ക്രിയയുടെ ഫലം പൂജ്യമാവുന്നു. മുകളിൽ പ്രസ്താവിച്ച തരം വസ്തുക്കളുടെ ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രം അതിന്റെ ജ്യാമിതീയ മധ്യബിന്ദു തന്നെയായിരിക്കുമെന്ന് ഇതിൽനിന്നു വ്യക്തമാവുന്നു.

ഉദാഹരണം 7.1: ഒരു സമഭുജത്രികോണത്തിന്റെ മൂന്നു കോണുകളിൽ സ്ഥിതിചെയ്യുന്ന മൂന്നു കണികകളുടെ ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രം കണ്ടെത്തുക. കണികകളുടെ മാസ് യഥാക്രമം 100 ഗ്രാം, 150 ഗ്രാം, 200 ഗ്രാം എന്നിങ്ങനെയാണ്. ത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു ഭുജത്തിന്റെ നീളം 0.5 മീറ്ററാണ്.

ഉത്തരം:

ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ X, Y അക്ഷങ്ങൾ തെരഞ്ഞെടുക്കുക. ഒരു സമഭുജ ത്രികോണത്തിന്റെ O,A,B സ്ഥാനങ്ങളിലെ നിർദ്ദേശാങ്കങ്ങൾ യഥാക്രമം, (0,0), (0.50), (0.25, 0.25$\sqrt{3}$) എന്നിങ്ങനെയാണ്. മാസുകളായ 100 ഗ്രാം, 150 ഗ്രാം, 200 ഗ്രാം എന്നിവ യഥാക്രമം O,A,B എന്നീ സ്ഥാനങ്ങളിലാണ്. അപ്പോൾ



ചിത്രം 7.9

$$X = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$= \frac{[100(0) + 150(0.5) + 200(0.25)] \text{ g m}}{(100 + 150 + 200) \text{ g}}$$

$$= \frac{75 + 50}{450}\text{m} = \frac{125}{450}\text{m} = \frac{5}{18}\text{m}$$

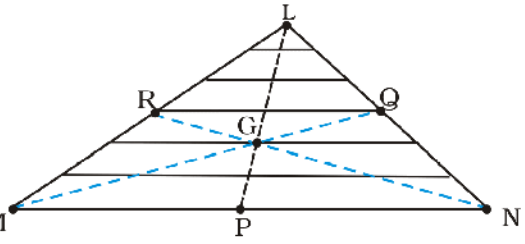
$$Y = \frac{[100(0) + 150(0) + 200(0.25\sqrt{3})] \text{ g m}}{450 \text{ g}}$$

$$= \frac{50\sqrt{3}}{450}\text{m} = \frac{\sqrt{3}}{9}\text{m} = \frac{1}{3\sqrt{3}}\text{m}$$

ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതു പോലെ ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രം C യിലാണ്. എന്തുകൊണ്ടാണ് ഈ ഉദാഹരണത്തിൽ ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രം ജ്യാമിതീയ മധ്യബിന്ദുവിൽ അല്ലാതെപോയത്?

ഉദാഹരണം 7.2: ഒരു ത്രികോണാകൃതിയിലുള്ള തകിടിന്റെ ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രം കണ്ടെത്തുക.

ഉത്തരം: ചിത്രം 7.10 ൽ കാണിച്ചതുപോലെ ത്രികോണമായ LMN നെ MN ന് സമാന്തരമായി നേരിയ പാളികളായി വിഭജിക്കാൻ കഴിയും.



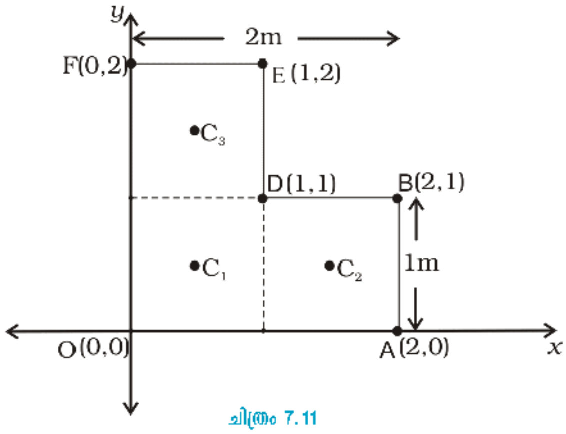
ചിത്രം 7.10

സമമിതി പ്രകാരം ഒരോ നേരിയ പാളിക്കും അവയുടെ ജ്യാമിതീയ മധ്യകേന്ദ്രത്തിലായി ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രം ഉണ്ട്. മധ്യബിന്ദുക്കളെല്ലാം യോജിപ്പിക്കുകവഴി നമുക്ക് LP എന്ന മധ്യരേഖ ലഭിക്കുന്നു. അതുകൊണ്ട് മുഴുവൻ ത്രികോണരൂപത്തിന്റെയും ദ്രവ്യകേന്ദ്രം രേഖ LP യിൽ എവിടെയെങ്കിലുമായിരിക്കുമെന്ന് കരുതാം. അതേപോലെ ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രം മറ്റു മധ്യരേഖകളായ MQ വിലും NR ലുമാണെന്നും വാദിക്കാം. ഈ മൂന്നു മധ്യരേഖകളെയും യോജിപ്പിച്ചാൽ അവ കൃത്യമായി സന്ധിക്കുന്ന ബിന്ദുവാണ്, അതായത് ത്രികോണ രൂപത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദുവിലാണ് ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രമെന്ന് കണ്ടെത്താം. ◀

ഉദാഹരണം 7.3: ഏകസമാനമായ (*Uniform*) L ആകൃതിയുള്ള ഒരു അടുക്കിന്റെ (നേരിയ പരന്ന ഫലകം) ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രം തന്നിരിക്കുന്ന അളവുകൾക്കനുസരിച്ച് കണ്ടെത്തുക. ഫലകത്തിന്റെ ദ്രവ്യമാനം 3 കി.ഗ്രാം.

ഉത്തരം:

ചിത്രം 7.11 ൽ കാണിച്ചതുപോലെ x, y അക്ഷങ്ങൾ തിരഞ്ഞെടുക്കുക. ഫലകത്തിന്റെ മൂലകളുടെ നിർദേശാങ്കങ്ങൾ (ചിത്രത്തിൽ) രേഖപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്നു. L ആകൃതിയുള്ള ഫലകത്തെ നമുക്ക് 1 മീറ്റർ വശങ്ങളുള്ള മൂന്നു സമചതുര ഖണ്ഡങ്ങളാക്കാൻ സാധിക്കും. സമമിതി പ്രകാരം ഓരോ ഖണ്ഡത്തിന്റെയും ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രം C_1, C_2, C_3 എന്ന് കണ്ടെത്താം. കാരണം, അവയുടെ ജ്യാമിതീയ മധ്യബിന്ദുക്കളാണവ. ഇനി ഇവയുടെ നിർദേശാങ്കങ്ങൾ ക്രമമായി എടുക്കാം അതായത് (1/2, 1/2),(3/2, 1/2),(1/2, 3/2). സമചതുരങ്ങളുടെ മാസുകൾ മധ്യകേന്ദ്രങ്ങളായ ഈ സ്ഥാനങ്ങളിൽ കേന്ദ്രീകരിക്കുന്നതായി കണക്കാക്കാം. L രൂപത്തിന്റെ മൊത്തം ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രം ഈ മൂന്നു ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രങ്ങളുടെയും മധ്യത്തിലായിരിക്കും.



ചിത്രം 7.11

അതിനാൽ

$$X = \frac{[1(1/2)+1(3/2)+1(1/2)]\,\text{kg m}}{(1+1+1)\,\text{kg}} = \frac{5}{6}\,\text{m}$$

$$Y = \frac{[[1(1/2)+1(1/2)+1(3/2)]]\,\text{kg m}}{(1+1+1)\,\text{kg}} = \frac{5}{6}\,\text{m}$$

L രൂപത്തിന്റെ ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രം കിടക്കുന്നത് OD രേഖയിലാണ്. കണക്കുകൂട്ടലുകളില്ലാതെതന്നെ ഇതു നമുക്ക് ഊഹിക്കാൻ കഴിഞ്ഞിരിക്കുന്നു. എന്തുകൊണ്ടാണെന്ന് പറയാനാവുമോ? മൂന്നു ചതുരങ്ങൾ ചേർന്നാണ് L രൂപമുണ്ടാകുന്നത്. ഇവയോരോന്നിന്റെയും മാസ് (Mass) വ്യത്യസ്തമായാൽ ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രം കണ്ടെത്തുന്നതെങ്ങിനെയായിരിക്കും? ◀

7.3 ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രത്തിന്റെ ചലനം (Motion of Centre of Mass)

ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രത്തിന്റെ നിർവചനം, കണികാവ്യവസ്ഥയുടെ ഭൗതികപ്രാധാന്യത്തെക്കുറിച്ച് പഠിക്കാനുള്ള കരുത്ത് നൽകുന്നുവെന്നു പറയാം. സമവാക്യം (7.4 *d*) യെ താഴെ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന വിധത്തിൽ നമുക്കു മാറ്റിയെഴുതാം:

$$M\mathbf{R} = \sum m_i \mathbf{r}_i = m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 + \ldots + m_n\mathbf{r}_n \qquad (7.7)$$

സമയാനുസൃതമായി സമവാക്യത്തിന്റെ ഇരുഭാഗങ്ങളും അവകലനത്തിന് (*Differentiation*) വിധേയമാക്കിയാൽ ലഭിക്കുന്നത് താഴെ കാണിച്ചിരിക്കുന്നു.

$$M\frac{d\mathbf{R}}{dt} = m_1\frac{d\mathbf{r}_1}{dt} + m_2\frac{d\mathbf{r}_2}{dt} + \ldots + m_n\frac{d\mathbf{r}_n}{dt}$$

അല്ലെങ്കിൽ

$$MV = m_1v_1 + m_2v_2 + \ldots\ldots\ldots + m_nv_n \qquad (7.8)$$

ഇതിൽ $\boldsymbol{v_1}$ ($= \boldsymbol{dr_1/dt}$) എന്നത് ആദ്യത്തെ കണത്തിന്റെ പ്രവേഗം, $\boldsymbol{v_2}$ (dr_2/dt) എന്നത് രണ്ടാമത്തെ കണത്തിന്റെ പ്രവേഗം എന്നിങ്ങനെ. അതുപോലെ, ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രത്തിന്റെ പ്രവേഗം $\boldsymbol{v}$ ($= d\boldsymbol{R}/dt$). നമ്മൾ എടുത്തിട്ടുള്ള മാസുകൾ m_1, m_2 ... മുതലായവ സമയക്രമത്തിൽ മാറുന്നില്ലെന്നത് ശ്രദ്ധിക്കുക. അതുകൊണ്ട് സമയത്തിന് ആനുപാതികമായി സമവാക്യത്തെ അവകലനത്തിന് വിധേയമാക്കുമ്പോൾ അവ സറിര സംഖ്യയായി പരിഗണിക്കപ്പെടുന്നു. സമവാക്യം (7.8) നെ അവകലനത്തിന് വിധേയമാക്കിയാൽ നമുക്ക് ലഭിക്കുക താഴെ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെയാണ്.

$$M\frac{d\mathbf{V}}{dt} = m_1\frac{d\mathbf{v}_1}{dt} + m_2\frac{d\mathbf{v}_2}{dt} + \ldots + m_n\frac{d\mathbf{v}_n}{dt}$$

അല്ലെങ്കിൽ

$$M\mathbf{A} = m_1\mathbf{a}_1 + m_2\mathbf{a}_2 + \ldots + m_n\mathbf{a}_n \qquad (7.9)$$

ഇതിൽ $\boldsymbol{a_1}$ ($\boldsymbol{dv_1}/dt$)എന്നത് ഒന്നാമത്തെ കണത്തിന്റെ ത്വരണം (*Acceleration*) $\boldsymbol{a_2}$ ($\boldsymbol{dv_2}/dt$) രണ്ടാമത്തെ കണത്തിന്റെ ത്വരണം എന്നിങ്ങനെ.

ഇനി, ന്യൂട്ടന്റെ രണ്ടാം ചലനനിയമപ്രകാരം ഒന്നാമത്തെ കണത്തിനുമേൽ പ്രയോഗിക്കപ്പെട്ട ബലം കണക്കാക്കുന്നത് $\boldsymbol{F_1} = m_1\boldsymbol{a_1}$ എന്നാണ്. അതേപോലെ രണ്ടാമത്തെ കണത്തിൽ പ്രയോഗിക്കുന്ന ബലം $\boldsymbol{F_2} = m_2\boldsymbol{a_2}$ എന്നിങ്ങനെ എഴുതാം. അതിനാൽ സമവാക്യം (7.9) താഴെക്കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ മാറ്റിയെഴുതാവുന്നതാണ്.

$$M\mathbf{A} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \ldots + \mathbf{F}_n \qquad (7.10)$$

അതിനാൽ ഒരു കണികാവ്യൂഹത്തിന്റെ ആകെ മാസിനെ അതിന്റെ ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രത്തിന്റെ ത്വരണവുമായി ഗുണിക്കുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന ഫലം ആ കണികാവ്യൂഹത്തിൽ പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്ന എല്ലാ ബലങ്ങളുടെയും സദിശ സങ്കലനഫലമാണെന്നു വരുന്നു.

ഒന്നാമത്തെ കണികക്കുമേലുള്ള $\boldsymbol{F_1}$ എന്ന ബലത്തെക്കുറിച്ചു ചിന്തിക്കുമ്പോൾ അത് ഒറ്റപ്പെട്ടു നിൽക്കുന്ന ഒരു ബലമല്ലെന്നും, എല്ലാ ബലത്തിന്റെയും സദിശസങ്കലനമാണ് അതിന്മേൽ പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്നതെന്നും കൂടി മനസ്സിലാക്കണം. അങ്ങനെ ഓരോ കണത്തിന്റെ കാര്യത്തിലും ഇത് ബാധകമാണ്. ഓരോ കണത്തിന്റെയും, മേലെയുള്ള ഈ ബലങ്ങളുടെ കൂട്ടത്തിൽ, വ്യവസ്ഥക്കു പുറത്തുള്ള **ബാഹ്യബലങ്ങളും** വ്യവസ്ഥക്കകത്തുള്ള കണങ്ങൾ തന്നെ പരസ്പരം ചെലുത്തുന്ന **ആന്തരികബലങ്ങളും** ഉൾപ്പെടുന്നു. ന്യൂട്ടന്റെ മൂന്നാം ചലനനിയമപ്രകാരം ഈ ആന്തരികബലങ്ങൾ പരസ്പരം തുല്യവും വിപരീതവുമായ ജോടികളായതിനാൽ അന്യോന്യം റദ്ദാക്കുകയും അതുകൊണ്ട്, സമവാക്യം (7.10) ഉപയോഗിച്ചുള്ള ഈ ബലങ്ങളുടെ മൊത്തം പരിണതി പൂജ്യമായിത്തീരുകയും ചെയ്യുന്നു. അതുകൊണ്ട് ബാഹ്യബലങ്ങൾ മാത്രമേ സമവാക്യം (7.10) അനുസരിച്ചുള്ള ബലത്തിൽ സംഭാവന ചെയ്യുന്നുള്ളൂ. അതുകൊണ്ട് സമവാക്യം (7.10)നെ താഴെ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന വിധം വീണ്ടും മാറ്റിയെഴുതാവുന്നതാണ്.

$$M\mathbf{A} = \mathbf{F}_{ext} \qquad (7.11)$$

ഇതിൽ F_{ext} എന്നത് വ്യവസ്ഥയിലെ കണങ്ങളുടെ മേൽ ചെലുത്തപ്പെടുന്ന ബാഹ്യബലങ്ങളുടെ മൊത്തം തുകയാണ്.

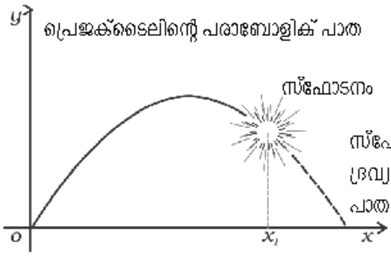
സമവാക്യം 7.11 ന്റെ നിർവചന പ്രകാരം, ***ഒരു കണികാവ്യൂഹത്തിന്റെ ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രത്തിൽ എല്ലാ കണികകളുടെയും മാസ് കേന്ദ്രീകരിക്കുന്നതുപോലെയും അതിൽ അനുഭവപ്പെടുന്ന എല്ലാ ബാഹ്യബലങ്ങളും ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രത്തിലേക്ക് പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്നതുപോലെയുമാണ് കണികാവ്യൂഹത്തിന്റെ ചലനം.***

ഒരു വസ്തുവിന്റെ ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രത്തിന്റെ ചലനം മനസ്സിലാക്കാൻ, വ്യവസ്ഥയിലെ കണികകളുടെ ആന്തരിക ബലത്തെപ്പറ്റിയുള്ള അറിവ് ആവശ്യമില്ല, ഇതിന് ബാഹ്യബലത്തെക്കുറിച്ചുള്ള ധാരണ മാത്രം മതിയാവും. സമവാക്യം (7.11) ലഭിക്കുന്നതിന് വ്യവസ്ഥയിലെ കണങ്ങളുടെ സ്വഭാവങ്ങളെക്കുറിച്ച് പ്രതിപാദിക്കേണ്ട കാര്യമില്ല. നാനാവിധത്തിലുള്ള ആന്തരികചലനങ്ങൾക്ക് നിരന്തരം വിധേയമാകുന്ന അനേകം കണികകളുടെ സഞ്ചയമായിരിക്കാം ഒരു വ്യവസ്ഥ. അല്ലെങ്കിൽ അത്, ഒരു പൂർണസമാനാന്തരചലനത്തിലോ അല്ലെങ്കിൽ സമാനാന്തരചലനവും പരിക്രമണചലനവും കൂടിച്ചേർന്നുള്ള അവസ്ഥയിലോ ഉള്ള ഒരു ദൃഢവസ്തുവായിരിക്കും. തന്നിരിക്കുന്ന വ്യവസ്ഥയോ, അതിലടങ്ങിയിരിക്കുന്ന സ്വതന്ത്ര കണികകളുടെ ചലനങ്ങളോ എന്തായിരുന്നാലും, ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രത്തിന്റെ ചലനം സമവാക്യം (7.11) അനുസരിച്ചായിരിക്കും.

മുൻ അധ്യായങ്ങളിൽ വ്യാപ്തിതവസ്തുക്കളെ ഒറ്റ കണികയായി പരിഗണിക്കുന്നതിനു പകരം, ഇനി നമുക്ക് അവയെ കണികകളുടെ വ്യൂഹങ്ങളായി പരിഗണിക്കാം. ഒരു വ്യാപ്തിതവസ്തുവിന്റെ ആകെ മാസ് ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രത്തിൽ കേന്ദ്രീകരിച്ചിരിക്കുന്നുവെന്നും ഈ വ്യൂഹത്തിലെ എല്ലാ ബാഹ്യബലങ്ങളും പ്രവർത്തിക്കുന്നത് ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രത്തിലൂടെയാണെന്നും സങ്കൽപിക്കാം. ഇപ്രകാരം, ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രത്തിന്റ ചലനം മനസിലാക്കുന്നതിലൂടെ, വസ്തുവിന്റെ സമാനാന്തരചലനത്തെക്കുറിച്ച് എളുപ്പം പഠിക്കാം.

വസ്തുക്കളിൽ പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്ന ബലങ്ങളുടെ വിശകലനത്തിലും അതുമായി ബന്ധപ്പെട്ടു വരുന്ന പ്രശ്നങ്ങളുടെ നിർധാരണത്തിലും നാം നേരത്ത അവലംബിച്ചിരുന്ന രീതി പ്രക്രിയകളുടെ വിശദാംശങ്ങൾ ഒന്നും പരിഗണിക്കാതെയും ന്യായീകരിക്കാതെയുമായിരുന്നു.

കണികകളുടെ ഭ്രമണചലനമോ ആന്തരിക ചലനങ്ങളോ പരിഗണിക്കേണ്ടതില്ലായെന്നോ അവ നിലനിൽക്കുന്നില്ലായെന്നോയുള്ള മുൻധാരണയാണ് നാം പുലർത്തിയത്. ഇനി അതിന്റെ ആവശ്യമില്ല. കറങ്ങുന്നതോ അല്ലാത്തതോ ആയ ദൃഢവസ്തുക്കളുടെയും, പലതരം ആന്തരികചലനങ്ങളുള്ള കണങ്ങളുടെ ഒരു വ്യവസ്ഥയുടെയും സ്ഥാനാന്തര ചലനത്തെ എങ്ങനെ വേർതിരിക്കാമെന്നു നാം കണ്ടു കഴിഞ്ഞു.



ചിത്രം 7.12: *ഒരു പ്രക്ഷേപത്തിന്റെ (projectile) തുടർച്ചയായ പരാബൊളിക് (parabolic) പാതയിൽ, ഏതെങ്കിലും ഭാഗത്ത് ഒരു സ്ഫോടനം നടന്നാലും സ്ഫോടനശകലങ്ങളുടെ ദ്രവ്യകേന്ദ്രത്തിന്റെ സഞ്ചാരപഥം സമവക്രരേഖയിൽ തന്നെയായിരിക്കും.*

ചിത്രം 7.12, സമവാക്യം (7.11)ന്റെ ഏറ്റവും നല്ല വിശദീകരണമാണ്. ഒരു പ്രക്ഷേപം (*projectile*) അനുവർത്തിക്കുന്ന സ്വാഭാവികമായ പരാബൊളിക് സഞ്ചാരപഥത്തിന്റെ (*trajectory* - പ്രക്ഷേപപഥം) ഇടക്ക് അന്തരീക്ഷത്തിലത് ഒരു സ്ഫോടനത്തിന് വിധേയമായിചെറുകഷണങ്ങളായി മാറിയെന്നിരിക്കട്ടെ. സ്ഫോടനത്തിലേക്കു നയിക്കുന്നത് ആന്തരിക ബലങ്ങളാണ്. ആന്തരികബലങ്ങൾ ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രത്തിന്റെ ചലനത്തിലേക്ക് ഒന്നും സംഭാവന ചെയ്യുന്നില്ല. വസ്തുവിൽ പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്ന മൊത്തം ബാഹ്യബലം ഗുരുത്വാകർഷണമാണ്. അതിന്റെ മൂല്യം സ്ഫോടനത്തിനു മുമ്പും പിമ്പും ഒന്നുതന്നെയാണ്. തൻമൂലം ബാഹ്യബലത്തിന്റെ സ്വാധീനത്തിലുള്ള ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രത്തിന്റെ ചലനത്തിന് വ്യതിയാനം വരുന്നില്ല. അതുകൊണ്ട് സ്ഫോടനമൊന്നും നടന്നിട്ടില്ലായിരുന്നെങ്കിലുള്ള അതേ പ്രക്ഷേപപഥത്തിലൂടെ പാരബോളാകൃതിയിലുള്ള പാതയിൽ അത് സഞ്ചാരം തുടരുന്നു.

7.4. ഒരു കണികാവ്യവസ്ഥയുടെ രേഖീയ ആക്കം (Linear momeutum of a system of particles)

ഒരു കണികയുടെ രേഖീയ ആക്കത്തെക്കുറിച്ചുള്ള നിർവചനം നമുക്കു വീണ്ടും പരിഗണിക്കാം.

$$\mathbf{p} = m\,\mathbf{v} \tag{7.12}$$

ന്യൂട്ടന്റെ രണ്ടാം ചലനനിയമം ആക്കം ഉപയോഗിച്ച് എഴുതിയാൽ

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \tag{7.13}$$

ഇവിടെ F എന്നത് കണികക്കു മേൽ പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്ന ബലമാണ്. n മാസുകൾ $m_1, m_2, \ldots m_n$ എന്നിവയും, പ്രവേഗങ്ങൾ യഥാക്രമം $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots \mathbf{v}_n$ എന്നിവയും ആയിട്ടുള്ള n കണികകളുടെ ഒരു വ്യവസ്ഥ പരിഗണിക്കുക. ഇവിടെ കണങ്ങൾ പരസ്പരം പ്രവർത്തന-പ്രതിപ്രവർത്തനങ്ങളിൽ ഏർപ്പെടുകയും അതോടൊപ്പം തന്നെ അവയിൽ ബാഹ്യബലം അനുഭവപ്പെടുകയും ചെയ്യുന്നു. ഒന്നാമത്തെ കണത്തിന്റെ രേഖീയആക്കം $m_1\mathbf{v}_1$ രണ്ടാമത്തേതിന്റേത് $m_2\mathbf{v}_2$ എന്ന ക്രമത്തിൽ ഇവിടെ സങ്കൽപ്പിക്കാം.

n എണ്ണം കണങ്ങളുള്ള ഒരു വ്യവസ്ഥയിൽ ഓരോ സ്വതന്ത്രകണികയുടെയും ആക്കസദിശങ്ങളുടെ തുക (*vector sum*) ആയാണ് ആ വ്യവസ്ഥയുടെ രേഖീയ ആക്കം നിർവചിക്കപ്പെടുന്നത്. അതായത്

$$\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \ldots + \mathbf{p}_n$$

$$= m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 + \ldots + m_n\mathbf{v}_n \tag{7.14}$$

ഇത് സമവാക്യം (7.8) മായി താരതമ്യം ചെയ്യുകയാണെങ്കിൽ താഴെ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ എഴുതാം.

$$\mathbf{P} = M\,\mathbf{V} \tag{7.15}$$

അതായത്, ഒരു **കണികാവ്യവസ്ഥയുടെ ആക്കത്തിന്റെ ആകത്തുക, ആ വ്യവസ്ഥയുടെ മൊത്തം മാസും അതിന്റെ ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രത്തിന്റെ പ്രവേഗവും തമ്മിലുള്ള ഗുണനഫലത്തിന് തുല്യമായിരിക്കും.** സമവാക്യം (7.15) സമയത്തിനനുസൃതമായി അവകലനം (*Differentiate*) ചെയ്താൽ ലഭിക്കുന്നത്

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = M\frac{d\mathbf{V}}{dt} = M\mathbf{A} \tag{7.16}$$

സമവാക്യം (7.16) സമവാക്യം (7.11)മായി താരതമ്യം ചെയ്താൽ

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}_{ext} \tag{7.17}$$

(ഇത് ഒരു കണികാവ്യവസ്ഥക്ക് ബാധകമായ ന്യൂട്ടന്റെ രണ്ടാം ചലനനിയമത്തിന്റെ പ്രസ്താവനയാണ്).

ഒരു കണികാവ്യവസ്ഥയിൽ പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്ന ബാഹ്യബലത്തിന്റെ തുക പൂജ്യമാണെന്ന് സങ്കൽപിച്ചാൽ, സമവാക്യം (7.17) ൽ നിന്നു ലഭിക്കുന്നത്.

$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = 0$ എന്നാണ്.

അഥവാ $\mathbf{P}$ = ഒരു സ്ഥിരസംഖ്യ ആകുന്നു. (7.18a)

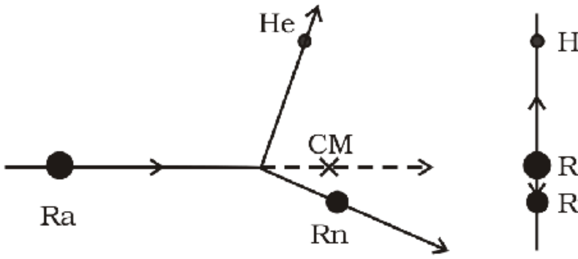
അതായത് കണികാവ്യവസ്ഥക്കുമേൽ പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്ന മൊത്തം ബാഹ്യബലം പൂജ്യമാവുമ്പോൾ, ആ വ്യവസ്ഥയുടെ ആകെ രേഖീയ ആക്കം സ്ഥിരമായിരിക്കും. ഒരു കണികാവ്യവസ്ഥയുടെ രേഖീയ ആക്ക സംരക്ഷണനിയമമാണ് ഇത്. ഒരു വ്യവസ്ഥയുടെ മേൽ പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്ന ആകെ ബാഹ്യബലം പൂജ്യമാവുന്നിടത്ത്, വ്യവസ്ഥയുടെ ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രത്തിന്റെ പ്രവേഗം സ്ഥിരമായി തുടരുന്നു എന്നാണ് ഇതുകൊണ്ട് അർഥമാക്കുന്നത്. (കണികാവ്യവസ്ഥയെക്കുറിച്ചുള്ള ഈ അധ്യായത്തിൽ, വ്യവസ്ഥയിലെ മൊത്തം മാസ് (*Mass*) സ്ഥിരമായിരിക്കും എന്ന കാഴ്ചപ്പാടാണു സ്വീകരിച്ചിരിക്കുന്നത്).

ഇവിടെ ആന്തരികബലത്തെക്കുറിച്ച് ആലോചിക്കുമ്പോൾ, അത് കണങ്ങൾ അന്യോന്യം ചെലുത്തുന്ന ബലമാണെന്ന് മനസ്സിലാക്കണം. ഓരോ സ്വതന്ത്രകണത്തിനും സങ്കീർണങ്ങളായ സഞ്ചാരപഥങ്ങളുണ്ടാവാം. അനുഭവപ്പെടുന്ന വ്യവസ്ഥയിന്മേൽ ബാഹ്യബലം പൂജ്യം ആണെങ്കിൽ ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രത്തിന്റെ പ്രവേഗം സ്ഥിരമായിരിക്കും; ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രം ഒരു സ്വതന്ത്രകണത്തെപ്പോലെ നേർരേഖയിലൂടെ സമപ്രവേഗത്തിൽ സഞ്ചരിക്കും.

സമവാക്യം (7.18*a*)യുടെ സദിശം (*vector*) മൂന്ന് അദിശ (*scalar*) സമവാക്യത്തിന് തുല്യമാണ്. അതായത്

$$P_x = c_1,\ P_y = c_2,\ P_z = c_3 \qquad (7.18\,b)$$

ഇവിടെ P_x, P_y, P_z എന്നിവ യഥാക്രമം x, y, z - അക്ഷങ്ങളിലുള്ള രേഖീയ ആക്ക (*linear momentum*) സദിശം **P** യുടെ ഘടകങ്ങളാണ്. c_1, c_2, c_3 എന്നിവ സ്ഥിരം സംഖ്യകളുമാണ്.



(*a*) (*b*)

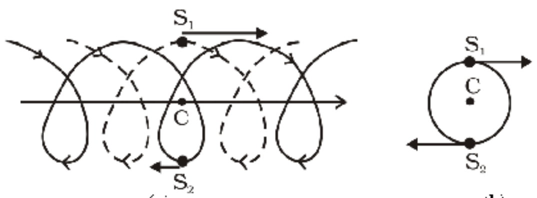
ചിത്രം. 7.13 (a) വിഭജിക്കപ്പെടുന്ന ഒരു ഘനമൂലക അണുകേന്ദ്രം -റേഡിയം (Ra). ചെറിയ അണുകേന്ദ്രമായ-റാഡോൺ (Rn) ആയും, ഒരു (He) ആൽഫാകണമായും മാറുന്ന വ്യവസ്ഥയുടെ ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രം സമചലനത്തിലാണ് (uniform motion)

(b) നിശ്ചലാവസ്ഥയിലിരിക്കുന്ന ഒരു വസ്തുവിന്റെ ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രവും നിശ്ചലമായിരിക്കും. മുകളിൽ പറഞ്ഞിരിക്കുന്ന അണുവിഭജനം ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രം നിശ്ചലമായിരിക്കുന്ന ഒരു റേഡിയം (Ra)അണുകേന്ദ്രത്തിൽ നടക്കുമ്പോൾ. ഇവിടെ രണ്ട് ഉൽപ്പന്ന അണുകേന്ദ്രങ്ങളും എതിർദിശകളിൽ അകന്നുപോകുന്നത് രേഖപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്നു.

ഉദാഹരണത്തിന്, ചലനാവസ്ഥയിലുള്ള റേഡിയം (*Ra*) പോലെ അസ്ഥിരമായ ഒരു ഘനമൂലകത്തിന്റെ അണുകേന്ദ്രം വിഭജിക്കപ്പെട്ട് ഒരു റാഡോൺ (*Rn*) അണുകേന്ദ്രവും ഒരു ആൽഫാകണവും (*He*) ഉണ്ടാകുന്നു. ഈ വിഘടനത്തിനു കാരണം അണുകേന്ദ്രത്തിലെ ഭൗതികസങ്കീർണതകളാണ് - അത് വേറെ പഠനശാഖയാണ്. ബാഹ്യബലങ്ങളൊന്നും അതിനകത്ത് പ്രവർത്തിക്കുന്നേയില്ല. ആണവവിഘടനം തുടങ്ങുന്നതിന് മുമ്പും ശേഷവും ആ വ്യവസ്ഥയുടെ മൊത്തം രേഖീയ ആക്കം ഒന്നുതന്നെയാണ്. ആണവക്ഷയത്തിൽ നിന്നുൽഭവിക്കുന്ന രണ്ടു വ്യത്യസ്ത അണുകേന്ദ്രങ്ങളുടെയും ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രം സഞ്ചരിക്കുന്നത് റേഡിയം അണുകേന്ദ്രം സഞ്ചരിക്കുമായിരുന്ന അതേ സഞ്ചാരപാതയിലൂടെയായിരിക്കും (ചിത്രം 7.13 *a*).

നിശ്ചലാവസ്ഥയിലുള്ള ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രമുള്ള ഒരു റേഡിയം അണുകേന്ദ്രത്തെ ആധാരമാക്കിയുള്ള അവലംബകത്തിലൂടെ (*Frame of reference*) വീക്ഷിച്ചാൽ ആണവവിഘടനത്തിൽ ഉണ്ടാകുന്ന കണികകൾ വിപരീതദിശയിലും അവയുടെ ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രം നിശ്ചലാവസ്ഥയിലും ചിത്രം 07.13 (b) യിൽ കാണിച്ചതുപോലെ തുടരുന്നതായി കാണാം.

ദ്രവ്യമാന കേന്ദ്രത്തെ അടിസ്ഥാനപ്പെടുത്തിയുള്ള അവലംബകങ്ങളാണ് മുകളിൽ വിവരിച്ച റേഡിയോ ആക്ടീവ് വിഘടനത്തേപ്പോലുള്ള അവസരങ്ങളിൽ കണികാവ്യവസ്ഥയുടെ പരീക്ഷണശാലകളെ ആധാരമാക്കിയുള്ള അവലംബകത്തേക്കാൾ സൗകര്യപ്രദവും ഫലപ്രദവുമായി കാണപ്പെടുന്നത്.



(*a*) (*b*)

ചിത്രം7.14.*a* *a*) രണ്ടു നക്ഷത്രങ്ങളുടെ സഞ്ചാരപഥങ്ങൾ. S_1 (കുത്തുവരകൾ), S_2(തെളിഞ്ഞ വര) എന്നിവ ചേർന്ന് ഒരു ദ്വന്ദ്വ വ്യവസ്ഥയുണ്ടാക്കുകയും അവയുടെ ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രം C ഏകസമാന (*uniform*) സഞ്ചാരം നടത്തുകയും ചെയ്യുന്നു.

b) അതേ ദ്വന്ദ്വവ്യവസ്ഥയിൽ ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രം C നിശ്ചലമാണെങ്കിൽ ഉള്ള സഞ്ചാര പഥം.

ജ്യോതിശാസ്ത്രത്തിൽ ദ്വന്ദ്വനക്ഷത്രങ്ങൾ (*Binary stars*) കാണപ്പെടുന്നത് സർവസാധാരണമാണ്. ബാഹ്യബലങ്ങളൊന്നും ഈ വ്യവസ്ഥയിൽ പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്നില്ലെങ്കിൽ, ദ്വന്ദ്വനക്ഷത്രങ്ങളുടെ ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രം സ്വതന്ത്രകണത്തെപ്പോലെ സഞ്ചരിക്കുന്നു (ചിത്രം7.14*a*). തുല്യമാസുള്ള രണ്ടു നക്ഷത്രങ്ങളുടെ സഞ്ചാരപഥങ്ങളാണ്

ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നത്. അത് സങ്കീർണമാണെന്നു തോന്നിയേക്കാം. എന്നാൽ ഒരു നിശ്ചലദ്രവ്യമാനകേന്ദ്ര അവലംബകത്തിലൂടെ സങ്കൽപിച്ചാൽ രണ്ടു നക്ഷത്രങ്ങളും വൃത്താകാരപാതയിലൂടെ സഞ്ചരിക്കുന്നതായി കാണപ്പെടും. അപ്പോൾ ഇരു നക്ഷത്രങ്ങളുടെയും സ്ഥാനങ്ങൾ നേർക്കുനേർ വിപരീതസ്ഥാനങ്ങളിലായിരിക്കും (ചിത്രം7.14*b*). ഇവിടെയെടുത്തിട്ടുള്ള നിർദിഷ്ട അവലംബകത്തിൽ ഇരുനക്ഷത്രങ്ങളുടെയും പ്രക്ഷേപ പഥം (i) ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രത്തിന്റെ നേർരേഖയിലുള്ള സമ ചലനത്തിന്റെയും (ii) ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രത്തെ ചുറ്റിക്കൊണ്ടുള്ള നക്ഷത്രങ്ങളുടെ വൃത്താകാരപരിക്രമണപഥത്തിന്റെയും സംയുക്തമാണ്.

ഈ രണ്ട് ഉദാഹരണങ്ങളിൽനിന്ന് ഒരു വ്യവസ്ഥയിലെ ചലനത്തെ, ***ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രത്തിന്റെ സഞ്ചാരം,*** എന്നും ***ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രത്തെ ചുറ്റിക്കൊണ്ടുള്ള സഞ്ചാരം*** എന്നും വേർതിരിച്ചു കാണുന്നത് ആ വ്യവസ്ഥയുടെ ചലനങ്ങളെ സംബന്ധിക്കുന്ന പഠനങ്ങളെ ഏറെ എളുപ്പമാക്കുന്നുവെന്നു കാണാൻ കഴിയും.

7.5. രണ്ടു സദിശങ്ങളുടെ സദിശഗുണനഫലം (Vector product of two vectors)

സദിശത്തെക്കുറിച്ചും അതിന്റെ ഭൗതികശാസ്ത്രപരമായ ഉപയോഗരീതികളെക്കുറിച്ചും നമ്മൾ ഏറെ മനസിലാക്കിക്കഴിഞ്ഞു. അധ്യായം 6 ൽ (പ്രവൃത്തി, ഊർജം, പവർ) രണ്ടു സദിശങ്ങളുടെ ബലവും (*Force*) സ്ഥാനാന്തരവും (*Displacement*) അദിശ (*Scalar*) ഗുണിതഫലത്തെ കുറിച്ച് വിവരിച്ചിട്ടുണ്ട്. ഭൗതികത്തിലെ ഒരു പ്രധാന പരിമാണമായ പ്രവൃത്തിയെ നിർവചിക്കുന്നത് രണ്ടു സദിശങ്ങളുടെ അദിശഗുണിതഫലമെന്നാണ്. ഇനി ഇവിടെ വിവരിക്കാൻ പോകുന്നത് രണ്ടു സദിശങ്ങളുടെ മറ്റൊരുതരം ഗുണിതത്തെപ്പറ്റിയാണ്. ഇതിലെ ഗുണിതഫലം ഒരു സദിശമാണ്. പരിക്രമണചലനത്തിലുള്ള രണ്ടു പ്രധാനപ്പെട്ട അളവുകളാണ് ***ചുഴറ്റൽബലവും (moment of force) കോണീയ ആക്കവും (Angular momentum)***. ഇവ സദിശഗുണിതഫലങ്ങളായി പരിഗണിക്കുന്നു.

സദിശഗുണിതഫലത്തിന്റെ നിർവചനം (*Definition of vector product*)

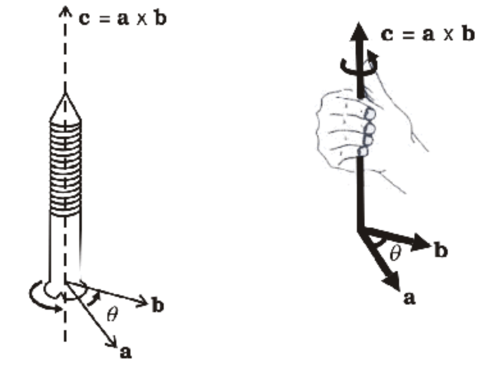
a, b എന്നിവ രണ്ടു സദിശങ്ങളാണ്. അവയുടെ ഗുണിതഫലം *c* ഒരു സദിശമായിത്തീരുന്നത് താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന നിബന്ധനകൾ അനുസരിച്ചാണ്.

(i) ***c*** യുടെ പരിമാണം $c = ab \sin\theta$ ആയിരിക്കണം. ഇതിൽ a, b എന്നിവ യഥാക്രമം ***a, b*** യുടെ അളവുകളും θ എന്നത് ഈ രണ്ടു സദിശങ്ങൾക്കിടയിലെ കോണളവുമാണ്.

(ii) ***a,b*** എന്നിവ നിലനിൽക്കുന്ന തലത്തിന് ലംബമാണ് ***c*** യുടെ ദിശ.

(iii) ഒരു വലംപിരി ആണിയുടെ തലഭാഗം ***a,b*** എന്നിവയുള്ള പ്രതലത്തിൽ സ്ഥിതിചെയ്യുകയും അത് പ്രതലത്തിന് ലംബമായിരിക്കുകയും ചെയ്യുമ്പോൾ, പിരിയാണിയെ ***a*** യിൽനിന്ന് ***b*** യിലേക്കു തിരിക്കുമ്പോൾ, അതിന്റെ അഗ്രഭാഗം മുന്നേറുന്ന ദിശയാണ് ***c*** യുടെ ദിശ.

ഈ ***വലംകൈ പിരിയാണി നിയമം (Right hand screw rule)*** ചിത്രം 7.15*a* യിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നു.



(a) (b)

ചിത്രം 7.15 (a) രണ്ടു സദിശങ്ങളുടെ സദിശ ഗുണിതത്തിന്റെ ദിശ നിർണ്ണയിക്കാനായുള്ള **വലംകൈ പിരിയാണി നിയമം**

(b) സദിശ ഗുണിതഫലത്തിന്റെ ദിശ വിവരിക്കാനായുള്ള **വലതു കൈ നിയമം** (Rule of the right hand)

ഇത് മറ്റൊരു തരത്തിലും പ്രസ്താവിക്കാം. ***a, b*** ഉൾക്കൊള്ളുന്ന തലത്തിനു വരച്ചിരിക്കുന്ന ലംബരേഖയിൽ നിങ്ങളുടെ വലതുകരം ഉപയോഗിച്ചു ചുറ്റിപ്പിടിച്ചിരിക്കുമ്പോൾ ചുറ്റിയിരിക്കുന്ന വിരലുകളുടെ ദിശ ***a*** യിൽ നിന്നും ***b*** യിലേക്കാണെങ്കിൽ നിവർന്നിരിക്കുന്ന തള്ളവിരലിന്റെ ദിശ ***c*** യുടേതായിരിക്കും.

രണ്ടു സദിശങ്ങളായ ***a*** യും ***b*** യും തമ്മിൽ (ഒരു വൃത്തത്തിൽ) രണ്ടു കോണളവുണ്ടാക്കുന്നുവെന്ന് നാം ഓർക്കേണ്ടതുണ്ട് (ചിത്രം 7.15(a)). ഒരു കോണളവ് θ യും മറ്റൊരു കോണളവ് $(360^\circ - \theta)$ യുമാണ്. മുകളിലത്തെ നിയമങ്ങളിൽ ഏതെങ്കിലും ഒന്ന് പ്രയോഗിക്കാനാണ് ഉദ്ദേശിക്കുന്നതെങ്കിൽ പരിക്രമണം ചെയ്യപ്പെടുന്നതായി കാണിക്കേണ്ടത് ചെറിയ കോണളവിൽക്കൂടിയാണ് $(<180^\circ)$. അതായത് ***a*** യിൽ നിന്ന് ***b*** യിലേക്ക്. ഇവിടെ ആ കോണളവ് θ യാണ്.

സദിശഗുണിതത്തിന് ഗുണനചിഹ്നം (*Cross*) ഉപയോഗിക്കുന്നതിനാൽ അതിനെ ക്രോസ് പ്രൊഡക്ട് (*Cross product*) എന്നും പറയാറുണ്ട്.

നേരത്തെ നാം കണ്ടതുപോലെ

- രണ്ട് സദിശങ്ങളുടെ അദിശഗുണിതഫലം ക്രമനിയമം അനുസരിക്കുന്നു അതായത് $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}$

  എന്നാൽ സദിശഗുണിതഫലം ക്രമനിയമം പാലിക്കില്ല. അതായത് $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$

$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ ആയാലും $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$ ആയാലും ഗുണിതഫലത്തിന്റെ പരിമാണത്തിൽ മാറ്റമൊന്നുമുണ്ടാവില്ല ($ab \sin\theta$). കൂടാതെ, അവ രണ്ടും $\boldsymbol{a}$ യും $\boldsymbol{b}$ യുമുള്ള തലത്തിന് ലംബമായിട്ടുള്ളവയുമാണ്. പക്ഷേ, വലംപിരിയാണിയുടെ പരിക്രമണം $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ എന്ന കാര്യത്തിൽ $\boldsymbol{a}$ യിൽനിന്ന് $\boldsymbol{b}$ യിലേക്കാണ്. അതേസമയത്ത് $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$ യുടെ കാര്യത്തിൽ പരിക്രമണം $\boldsymbol{b}$ യിൽനിന്ന് $\boldsymbol{a}$ യിലേക്കാണ്. ഇത് കാണിക്കുന്നത് ഇരുസദിശങ്ങളും പരസ്പരം വിപരീതദിശയിലായിരിക്കും എന്നാണ്. അതുകൊണ്ട്

$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$. എന്നെഴുതാം.

- സദിശഗുണിതത്തിന്റെ മറ്റൊരു സവിശേഷത പ്രതിപതനത്തിനു വിധേയമാകുമ്പോൾ അതിന്റെ സ്വഭാവത്തെ സംബന്ധിച്ചുള്ളതാണ്. പ്രതിപതനത്തിൽ (ഒരു കണ്ണാടിപ്രതിബിംബം) നമുക്ക് ലഭിക്കുക $x \rightarrow -x$, $y \rightarrow -y$, $z \rightarrow -z$. എന്നിങ്ങനെയാണ്. സദിശത്തിലെ എല്ലാ ഘടകങ്ങളുടെയും ചിഹ്നം മാറിയാൽ ലഭിക്കുക $a \rightarrow -a$, $b \rightarrow -b$. അപ്പോൾ പ്രതിഫലനത്തിൽ $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ ക്ക് സംഭവിക്കുന്നതെന്താണ്?

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \rightarrow (-\mathbf{a}) \times (-\mathbf{b}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$$

അതായത് $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ യ്ക്ക് പ്രതിപതനത്തിൽ മാറ്റം വരുന്നില്ല.

- സദിശവും അദിശവുമായ ഗുണിതങ്ങൾ വിതരണനിയമം പാലിക്കുന്നു:

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$$

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$$

- ഇനി $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ യെ ഘടകരൂപത്തിലെഴുതുവാൻ ശ്രമിക്കാം. ഇതിലേക്കായി കുറച്ചു പ്രാഥമികവസ്തുതകൾ മനസ്സിലാക്കേണ്ടതുണ്ട്.

(i) $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$ ($\mathbf{0}$ ഒരു ശൂന്യസദിശമാണ്. അതായത് പൂജ്യം അളവുള്ള സദിശം). $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a}$ യുടെ അളവ് $a^2 \sin 0 = 0$ ആയതിനാലാണിത്.

ഇത് താഴെ പറയുന്ന ഫലങ്ങളിലേക്കു നയിക്കുന്നു.

$$\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{i}} = \mathbf{0}, \quad \hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{j}} = \mathbf{0}, \quad \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{k}} = \mathbf{0}$$

(ii) $\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}}$

$\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}}$ യുടെ പരിമാണം $\sin 90^\circ$ ആണെന്ന് ശ്രദ്ധിക്കേണ്ടതാണ്. ഇതിനു കാരണം $\hat{\mathbf{i}}$ ക്കും $\hat{\mathbf{j}}$ ക്കും യൂണിറ്റ് പരിമാണമാണെന്നുള്ളതാണ്. കൂടാതെ അവ തമ്മിലുള്ള കോൺ 90^0 യാണ്. അതുകൊണ്ട് അത് ഒരു യൂണിറ്റ് സദിശമാണ് (*Unit vector*). ഗുണനഫലമായി കിട്ടേണ്ട യൂണിറ്റ് സദിശം $\hat{\mathbf{i}}$ യും $\hat{\mathbf{j}}$ യുമുള്ള തലത്തിന് ലംബമായിരിക്കുകയും വലംപിരിയാണിനിയമം പാലിക്കുകയും വേണം. അതുകൊണ്ട് ഇത് $\hat{\mathbf{k}}$ ആയി കിട്ടും. അതിനാലാണ് മുകളിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന ഫലം ലഭിച്ചിട്ടുള്ളത്. അതുപോലെ നമുക്ക് $\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{i}}$ യും $\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}}$ യും ആയി കിട്ടും.

സദിശ ഗുണനഫലത്തിന്റെ (*cross product*) ക്രമനിയമത്തിൽ (*commutation*) നിന്നു ലഭിക്കുന്നത് താഴെ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന ബന്ധങ്ങളാണ്:

$$\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{i}} = -\hat{\mathbf{k}}, \quad \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{j}} = -\hat{\mathbf{i}}, \quad \hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{k}} = -\hat{\mathbf{j}}$$

മുകളിൽ പറഞ്ഞിരിക്കുന്ന സദിശഗുണനഫലത്തിൽ $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}$ എന്നിവയുടെ ബന്ധങ്ങൾ രൂപപ്പെട്ടുവന്നിട്ടുള്ളത് ചാക്രികമായാണെങ്കിൽ, സദിശഗുണിതഫലങ്ങൾ പോസിറ്റീവായിരിക്കും. അത് ചാക്രികമല്ലാതിരുന്നാൽ സദിശഗുണിതഫലങ്ങൾ നെഗറ്റീവും ആയിരിക്കും.

a, b എന്നിവയെ ഘടകരൂപത്തിലെഴുതിയാൽ

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} \times \mathbf{b} &= (a_x \hat{\mathbf{i}} + a_y \hat{\mathbf{j}} + a_z \hat{\mathbf{k}}) \times (b_x \hat{\mathbf{i}} + b_y \hat{\mathbf{j}} + b_z \hat{\mathbf{k}}) \\
&= a_x b_y \hat{\mathbf{k}} - a_x b_z \hat{\mathbf{j}} - a_y b_x \hat{\mathbf{k}} + a_y b_z \hat{\mathbf{i}} + a_z b_x \hat{\mathbf{j}} - a_z b_y \hat{\mathbf{i}} \\
&= (a_y b_z - a_z b_y)\hat{\mathbf{i}} + (a_z b_x - a_x b_z)\hat{\mathbf{j}} + (a_x b_y - a_y b_x)\hat{\mathbf{k}}
\end{aligned}$$

മുകളിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന ബന്ധം ലഭ്യമാക്കാനായി യൂണിറ്റ് സദിശങ്ങളുടെ ഗുണിതഫലം (*cross products*) ഉപയോഗിച്ചിരിക്കുന്നു. $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ എളുപ്പം ഓർമയിൽ നിലനിർത്താനായി ഒരു ഡിറ്റർമിനന്റ് (Determinant) രൂപം എഴുതാവുന്നതാണ്.

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

ഉദാഹരണം 7.4: $\mathbf{a} = (3\hat{\mathbf{i}} - 4\hat{\mathbf{j}} + 5\hat{\mathbf{k}})$ യും $\mathbf{b} = (-2\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} - 3\hat{\mathbf{k}})$ യും ആയാൽ അവയുടെ സദിശങ്ങളുടെ ഗുണിതവും അദിശ ഗുണിതവും കാണുക

ഉത്തരം

അദിശ ഗുണിതം

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= (3\hat{\mathbf{i}} - 4\hat{\mathbf{j}} + 5\hat{\mathbf{k}}) \cdot (-2\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} - 3\hat{\mathbf{k}}) \\
&= -6 - 4 - 15 \\
&= -25
\end{aligned}$$

സദിശ ഗുണിതം

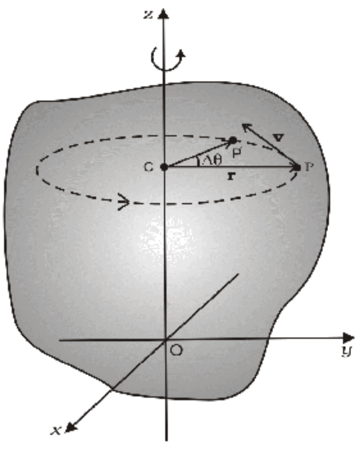
$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 3 & -4 & 5 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 7\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}} - 5\hat{\mathbf{k}}$$

കുറിപ്പ് $\mathbf{b} \times \mathbf{a} = -7\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + 5\hat{\mathbf{k}}$

7.6 കോണീയപ്രവേഗവും രേഖീയപ്രവേഗവുമായി അതിനുള്ള ബന്ധവും (Angular Velocity And Its Relation With Linear Velocity)

ഈ വിഭാഗത്തിൽ നാം പഠിക്കാൻ പോകുന്നത് കോണീയ പ്രവേഗമെന്താണെന്നും പരിക്രമണചലനത്തിൽ അതിനുള്ള ധർമമെന്താണെന്നുമാണ്. ഒരു പരിക്രമണചലന വ്യവസ്ഥയിൽ എല്ലാ കണങ്ങളും വൃത്താകാരപാതയിൽ സഞ്ചരിക്കുന്നു. അവയുടെ രേഖീയ പ്രവേഗം കോണീയപ്രവേഗവുമായി ബന്ധപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു. തൊട്ടുമുമ്പുള്ള ഭാഗത്തിൽ പഠിച്ചതുപോലെ ഈ രണ്ടു പരിമാണങ്ങളും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം സദിശഗുണിതപരമാണ്.

ചിത്രം 7.4 ൽ ശ്രദ്ധിച്ചാൽ, ഒരു നിശ്ചല അക്ഷത്തെ ചുറ്റിക്കൊണ്ട് പരിക്രമണചലനം നടത്തുന്ന ഒരു ദൃഢവസ്തുവിന്റെ എല്ലാ കണങ്ങളും വൃത്താകാരപാതയിൽ സഞ്ചരിക്കുമെന്നും, ഈ സഞ്ചാരപാത ബന്ധപ്പെട്ട അക്ഷവുമായി ലംബാവസ്ഥയിലായിരിക്കുമെന്നും മനസ്സിലാക്കാം. ചിത്രം 7.16 ൽ ചിത്രം 7.4 ന്റെ വിവരണം ആവർത്തിക്കുകയാണെങ്കിലും ഇവിടെ ഒരു നിശ്ചല അക്ഷത്തിന് ചുറ്റുമായി പരിക്രമണം ചെയ്യുന്ന ഒരു ദൃഢവസ്തുവിലെ ***P*** സ്ഥാനത്തുള്ള ഒരു കണത്തിന്റെ മാത്രം സഞ്ചാരപാതയായ വൃത്തമേ കാണിച്ചിട്ടുള്ളൂ. ആ കണം അക്ഷത്തിലെ (ഇവിടെ z -അക്ഷം) ***C*** എന്ന കേന്ദ്രം ആധാരമാക്കിയാണ് പരിക്രമണം നടത്തുന്നത്. ***P*** എന്ന കണത്തിൽ നിന്ന് അതിന്റെ അക്ഷകേന്ദ്രമായ ***C*** യിലേക്കുള്ള ലംബരേഖയാണ് പരിക്രമണ വൃത്തത്തിന്റെ ആരം (***radius***) ***r.P*** എന്ന കണത്തിന്റെ രേഖീയ പ്രവേഗം ***v*** കൂടി ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിട്ടുണ്ട്. ആ കണിക അക്ഷകേന്ദ്രം ***C*** ക്കു ചുറ്റുമായി ഉണ്ടാക്കുന്ന സഞ്ചാര വൃത്തത്തിൽ ***P*** എന്ന സ്ഥാനത്തുള്ള തൊടുവര (***Tangent***)യിലാണ് സദിശം ***v*** കിടക്കുന്നത്.



ചിത്രം 7.16 ഒരു നിശ്ചല അക്ഷത്തെ (z-അക്ഷം)

ഒരു നിശ്ചിത അക്ഷത്തെ അടിസ്ഥാനമാക്കിയുള്ള പരിക്രമണചലനം. **P** എന്ന കണിക **z** അക്ഷത്തിലുള്ള **C** എന്ന കേന്ദ്രത്തെ ആധാരമാക്കിയുള്ള വൃത്തപാതയിലൂടെ സഞ്ചരിക്കുന്നു.

Δt ഇടവേളക്കു ശേഷം, കണികയുടെ സ്ഥാനം **P** യിൽ നിന്ന് P' ൽ എത്തിയെന്നിരിക്കട്ടെ. (ചിത്രം 7.16).

കോൺ PCP', Δt സമയത്തിൽ P എന്ന കണത്തിന്റെ കോണീയ സ്ഥാനമാറ്റം $\Delta\theta$ യെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു. ഈ ഇടവേളയിൽ ശരാശരി കോണീയപ്രവേഗം കണക്കാക്കുന്നത് $\Delta\theta/\Delta t$ എന്നാണ്. ഇടവേള Δt പൂജ്യത്തോടടുക്കുമ്പോൾ (നിസ്സാര സമയം) $\Delta\theta/\Delta t$ അനുപാതം *തൽക്ഷണ കോണീയപ്രവേഗമായി* (***instantaneous angular velocity***), ($d\theta/dt$) മാറും. *തൽക്ഷണ കോണീയ പ്രവേഗം* രേഖപ്പെടുത്തുന്നത് ω (ഒമേഗ) എന്ന പ്രതീകം ഉപയോഗിച്ചാണ്. ഒരു പരിക്രമണചലനത്തിലെ രേഖീയപ്രവേഗത്തിന്റെ (***linear velocity***) അളവായ **v**, ആ കണികയുടെ തൽക്ഷണ കോണീയപ്രവേഗമായ ω യുമായി $v = \omega r$ എന്ന സമവാക്യത്തിലൂടെ ബന്ധപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു. ഇവിടെ r എന്നത് വൃത്തത്തിന്റെ ആരം ആണ്.

$v = \omega r$ എന്ന ബന്ധം ഒരു ദൃഢവസ്തുവിലെ എല്ലാ കണങ്ങൾക്കും ഒരുപോലെ ബാധകമാണ്. നിശ്ചല അക്ഷത്തിൽനിന്ന് ലംബിതഅകലം r_i യിലുള്ള ഒരു കണികയുടെ രേഖീയ പ്രവേഗം v_i ,

$v_i = \omega r_i$ എന്ന സമവാക്യത്തിലൂടെ കണ്ടെത്താം (7.19)

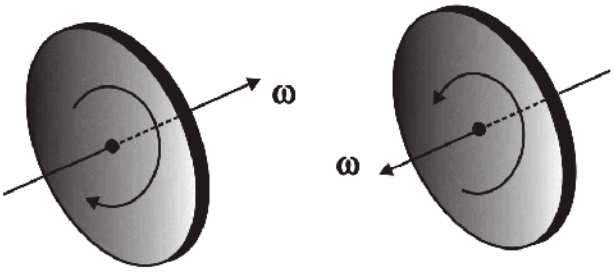
ഇവിടെ i എന്നത് ഒന്നു മുതൽ n വരെയുള്ള കണങ്ങളുടെ കൂട്ടത്തിൽ ഏതുമാവാം (കണങ്ങളുടെ മൊത്തം എണ്ണം n എന്നെടുക്കുന്നു).

ഒരു കണിക അക്ഷത്തിൽ തന്നെയാണെങ്കിൽ അക്ഷത്തിൽ നിന്ന് അതിലേക്കുള്ള ദൂരം പൂജ്യമായിരിക്കും, അതായത് r=0. അതിനാൽ $v = \omega$, r=0. ആ കണിക നിശ്ചലമാണെന്നു വരുന്നു. അതുവഴി അക്ഷവും നിശ്ചലമാണെന്ന് ഈ ഗണിത സമവാക്യത്തിലൂടെയും ബോധ്യമാവുന്നു. കോണീയപ്രവേഗം ω എല്ലാ കണികകൾക്കും ഒന്നുതന്നെയതിനാൽ അത് മുഴുവൻ വസ്തുവിന്റെയും കോണീയ പ്രവേഗമായികണക്കാക്കാം.

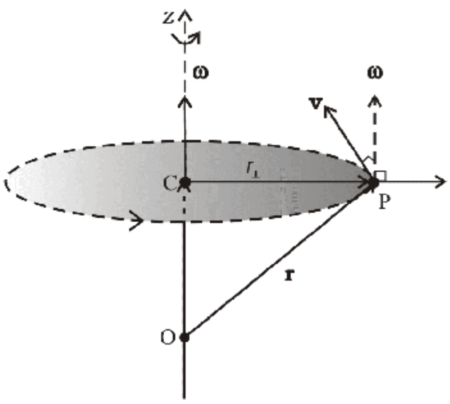
പൂർണ സ്ഥാനാന്തരചലനത്തിൽ ഒരു വസ്തുവിന്റെ എല്ലാ ഭാഗങ്ങൾക്കും ഏതു സമയത്തും ഒരേ പ്രവേഗമായിരിക്കുമെന്ന് നമുക്കറിയാം. അതുപോലെതന്നെ പൂർണ പരിക്രമണചലനത്തിലുള്ള ഒരു വസ്തുവിന്റെ എല്ലാ കണങ്ങൾക്കും ഏത് സമയത്തും ഒരേ കോണീയ പ്രവേഗമായിരിക്കും. ഒരു നിശ്ചല അക്ഷത്തെ ചുറ്റിയുള്ള ഒരു ദൃഢവസ്തുവിന്റെ പരിക്രമണചലനത്തിന്റെ ഈ പ്രത്യേകത (7.1) വിഭാഗത്തിൽ പരമർശിച്ചിട്ടുള്ള വസ്തുവിലെ കണികകളുടെ അക്ഷത്തിനു ലംബമായ തലത്തിലൂടെയുള്ള വൃത്തപാതയിലെ ചലനംതന്നെയാണ്.

നമ്മുടെ ചർച്ച ഇവിടെയെത്തുമ്പോഴേക്കും കോണീയ പ്രവേഗം ഒരു അദിശം (***scalar***) എന്ന കാഴ്ചപ്പാടിലേക്ക് എത്തുന്നതായി തോന്നിയേക്കാം. യഥാർഥത്തിൽ അത്

ഒരു സദിശം (***vector***) തന്നെയാണ്. ഇക്കാര്യം ഇവിടെ കൂടുതൽ വിശദീകരിക്കാൻ ഉദ്ദേശിക്കുന്നില്ലെങ്കിലും ആ കാഴ്ചപ്പാടോടുകൂടിയാണ് ഇനി മുന്നോട്ടു പോകേണ്ടത്. നിശ്ചല അക്ഷത്തെ ചുറ്റിയുള്ള ഒരു പരിക്രമണത്തിൽ, കോണീയപ്രവേഗ സദിശം സറിതിചെയ്യുന്നത് പരിക്രമണാക്ഷത്തിന്മേലാണ്. അതിന്റെ ദിശ (***direction***), വലംപിരിയാണിയെ പരിക്രമണത്തിന്റെ ദിശയിൽ തിരിച്ചാൽ അതിന്റെ അഗ്രം നീങ്ങുന്ന ദിശയിലായിരിക്കും (ചിത്രം 7.17 *a*). മുമ്പു സൂചിപ്പിച്ചതുപോലെ ഈ സദിശത്തിന്റെ പരിമാണം $\omega = d\theta/dt$ എന്നാണ്.



ചിത്രം 7.17a ഒരു വലംപിരിയാണിയുടെ തലഭാഗം വസ്തുവിനൊപ്പം പരിക്രമണത്തിലാവുമ്പോൾ ആണിയുടെ അഗ്രഭാഗം മുന്നേറുന്ന ദിശയാണ് കോണീയ പ്രവേഗ (ω) ത്തിന്റെ ദിശ വസ്തുവിന്റെ പരിക്രമണ സ്വഭാവം ഘടികാരദിശയോ എതിർദിശയോ ആയാൽ അതിനനുസരിച്ച് ω യുടെ ദിശയും മാറും.



ചിത്രം 7.17 b കോണീയ പ്രവേഗ സദിശം ω ഒരു നിശ്ചല അക്ഷത്തിലൂടെ ഒരു നിശ്ചിത ദിശയിലാണ്. കണിക **P** യുടെ രേഖീയ പ്രവേഗം $\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r}$. അത് ω , **r** എന്നിവക്ക് ലംബവുമാണ്. കണികയുടെ വൃത്ത സഞ്ചാരപഥത്തിന്റെതൊടുവര (**tangent**) യിലൂടെയാണ് **v** യുടെ ദിശ.

സദിശ ഗുണിതഫലമായ $\omega \times r$ ചേർച്ച കാണിക്കുന്നത് ഏതിനോടാണെന്നു നോക്കാം. ചിത്രം *7.17 b* പരിശോധിച്ചാൽ *P* എന്ന കണികയുടെ വൃത്താകാരപാതയെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന ചിത്രം 7.16 ന്റെ തന്നെ മറ്റൊരു രൂപമാണെന്ന് കാണാം. ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന സദിശം ω യുടെ ദിശ നിശ്ചല അക്ഷമായ *z* ൽ കൂടിയാണെന്നും ദൃഢവസ്തുവിലെ *P* എന്ന കണത്തിന്റെ മൂലബിന്ദു *O* ആധാരമാക്കിയുള്ള സ്ഥാനസദിശം $\mathbf{r} = \mathbf{OP}$ യാണെന്നും കാണാം.

ഇവിടെ മൂലബിന്ദു പരിക്രമണാക്ഷത്തിൽ വരത്തക്കവണ്ണം തിരഞ്ഞെടുത്തിരിക്കുന്നുത് ശ്രദ്ധിക്കുക.

അതുകൊണ്ട് $\omega \times \mathbf{r} = \omega \times \mathbf{OP} = \omega \times (\mathbf{OC} + \mathbf{CP})$ (*OC*യുടെയും *CP*യുടെയും സദിശ സങ്കലനമാണ് *OP*) $\omega \times \mathbf{OC} = 0$ ($\omega, \mathbf{OC}$ യിലൂടെ ആയതിനാൽ)

$$\omega \times \mathbf{r} = \omega \times \mathbf{CP}$$

$\omega \times \mathbf{CP}$ എന്ന സദിശം ω ക്ക് ലംബമാണ്. അതായത് അക്ഷം *z* നും *P* എന്ന ബിന്ദുവിലുള്ള കണം പരിക്രമണം ചെയ്യുന്ന വൃത്തത്തിന്റെ ആരം *CP* ക്കും ലംബമായിരിക്കും. അതിനാൽ *P* യിലൂടെ വൃത്തത്തിനു വരക്കുന്നു തൊടുവരയിലൂടെയായിരിക്കും (***tangent***) ഇതിന്റെ ദിശ. ω യും *CP* യും പരസ്പരം ലംബമായിരിക്കുന്നതിനാൽ $\omega \times CP$ യുടെ അളവ് $\omega\,(CP)$ ആണ്. അതുകൊണ്ട് *CP* യെ രേഖപ്പെടുത്താൻ *r* നു പകരം, $r_\perp$ ഉപയോഗിക്കുന്നു.

$\omega r_\perp$ പരിമാണമുള്ള ഒരു സദിശമാണ് $\omega \times \mathbf{r}$. അത് *P* എന്ന കണത്തിന്റെ സഞ്ചാരവൃത്തത്തിലെ തൊടുവരയിൽക്കൂടിയുള്ളതുമാണ്. *P* യിലെ രേഖീയ പ്രവേഗസദിശമായ **v** ക്കും അതേ പരിമാണവും ദിശയുമായിരിക്കും. അങ്ങനെ,

$$\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r} \qquad (7.20)$$

സമവാക്യം (7.20), ഒരു അഗ്രം ഉറപ്പിച്ചിട്ടുള്ള പമ്പരം പോലുള്ള ദൃഢവസ്തുക്കളുടെ പരിക്രമണത്തിൽപ്പോലും അനുയോജ്യമാണ്. ഇവിടെ **r** പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നത്, അഗ്രം ഉറപ്പിച്ച ബിന്ദു ആധാരമാക്കി എടുത്തിട്ടുള്ള സ്ഥാനസദിശ (*Position vector*) മാണ്.

ഒരു നിശ്ചല അക്ഷത്തെ ചുറ്റിയുള്ള പരിക്രമണത്തിൽ, സദിശമായ ω യുടെ ദിശ സമയക്രമത്തിൽ മാറ്റത്തിനു വിധേയമാവുന്നില്ല. എന്നാൽ അതിന്റെ പരിമാണത്തിൽ മാറ്റമുണ്ടായേക്കാം. സാധാരണ മിക്ക പരിക്രമണങ്ങളിലും ω യുടെ പരിമാണവും ദിശയും സമയക്രമത്തിൽ മാറുന്നതായാണ് കാണപ്പെടുന്നത്.

7.6.1 കോണീയത്വരണം (Angular Acceleration)

പരിചിതമായ സ്ഥാനാന്തര ചലനത്തിന്റെ പിൻബലത്തോടെ പരിക്രമണചലനവുമായി ബന്ധപ്പെട്ട ആശയങ്ങൾ നാം വികസിപ്പിച്ചെടുത്തുകൊണ്ടിരിക്കുകയാണ്. സ്ഥാനാന്തര ചലനത്തിലെ രേഖീയസ്ഥാനമാറ്റം (*Linear displacement*) പ്രവേഗം തുടങ്ങിയ സദിശങ്ങൾക്ക് അനുരൂപമായി പരിക്രമണചലനത്തിൽ കോണീയസ്ഥാനമാറ്റവും (*angular displacement*) കോണീയപ്രവേഗവുമാണ് (ω) കാണുവാൻ കഴിയുന്നത്. അതുകൊണ്ടുതന്നെ, സ്ഥാനാന്തര ചലനത്തിൽ പ്രവേഗമാറ്റത്തിന്റെ നിരക്കിനെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന ത്വരണത്തിനുപകരം പരിക്രമണചലനത്തിൽ കോണീയ ത്വരണം എന്ന ആശയവും കൊണ്ടുവരുവാൻ സാധിക്കും. കോണീയത്വരണം α നിർവ്വചിക്കപ്പെടുന്നത്

സമയക്രമത്തിൽ കോണീയപ്രവേഗനിരക്കിലുള്ള വ്യത്യാസം എന്നാണ്. അതിന്റെ സമവാക്യം ആണ്,

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \qquad (7.21)$$

പരിക്രമണാക്ഷം നിശ്ചലമാണെങ്കിൽ, ω ദിശയും അതുകൊണ്ട് α ദിശയും സ്ഥിരമായിരിക്കും. ഈ സാഹചര്യത്തിൽ മുകളിലെ സദിശസമവാക്യം ഒരു അദിശസമവാക്യത്തിലേക്കു ചുരുക്കാവുന്നതാണ്.

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \qquad (7.22)$$

7.7 ടോർക്കും കോണീയ ആക്കവും (Torque and angular momentum)

ഈ ഭാഗത്തിൽ നമ്മൾ പരിചയപ്പെടുന്നത്, രണ്ടു സദിശങ്ങളുടെ സദിശ ഗുണിതം എന്ന നിർവചനത്തിൽ, വരുന്ന രണ്ട് ഭൗതികപരിമാണങ്ങളായ ടോർക്കും, കോണിയ ആക്കവുമാണ്. ദൃഢവസ്തുക്കളുടെ ചലനത്തിൽ ഇവയുടെ പ്രാധാന്യം പിന്നാലെ ബോധ്യപ്പെടും.

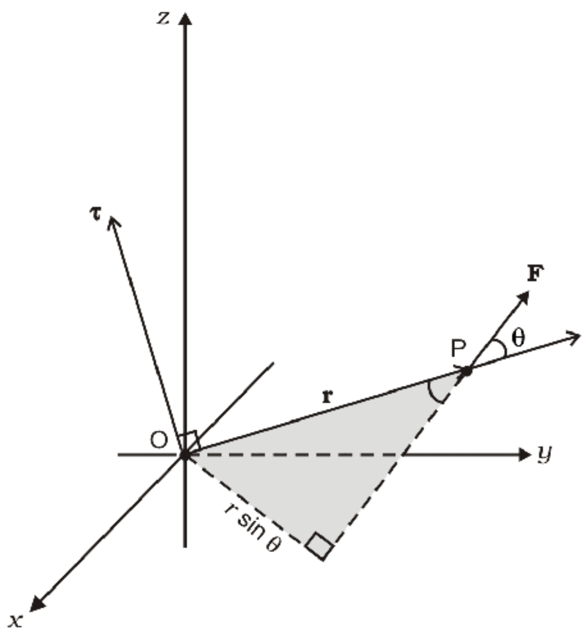
7.7.1 ബലത്തിന്റെ മൊമെന്റ് അഥവാ ടോർക്ക് [Moment of force (Torque)]

ഒരു ദൃഢവസ്തുവിന്റെ ചലനത്തിലെ പൊതുവായ സവിശേഷതകളാണ് സ്ഥാനാന്തരചലനവും പരിക്രമണചലനവും; ഇവ രണ്ടും കൂടിച്ചേർന്നുള്ള ചലനാവസ്ഥയും. ഒരു വസ്തുവിനെ ഒരു സ്ഥാനത്തോ അല്ലെങ്കിൽ രേഖയിലോ ഉറപ്പിക്കുകയാണെങ്കിൽ, അതിന് പിന്നെ പരിക്രമണചലനത്തിനുള്ള സാധ്യത മാത്രമേ ഉണ്ടാവുകയുള്ളൂ. ഒരു വസ്തുവിന്റെ സ്ഥാനാന്തരചലനത്തിന് മാറ്റം വരുത്തണമെങ്കിൽ ഒരു ബലം ആവശ്യമാണെന്ന് നമുക്കറിയാം. അതായത് അതിന് വേഗവ്യത്യാസം, അഥവാ ത്വരണമുണ്ടാവണം. ഇതുപോലെ പരിക്രമണചലനത്തെ പ്രദാനം ചെയ്യുന്നത് എന്തായിരിക്കും?

ഈ ചോദ്യത്തിനുള്ള ഉത്തരം തേടുന്നതിലേക്കായി, അടക്കുകയോ തുറക്കുകയോ ചെയ്യാവുന്ന ഒരു വാതിലിന്റെ ഉദാഹരണത്തിലേക്ക് പോകാവുന്നതാണ്. വാതിൽ എന്ന ദൃഢവസ്തു, അതിന്റെ ഒരു ഭാഗം കട്ടിളയിൽ വിജാഗിരിയാൽ ഉറപ്പിച്ചിട്ടുള്ളതും കട്ടിളയെന്ന നിശ്ചല അക്ഷത്തെ ആധാരമാക്കി തിരിയാൻ അല്ലെങ്കിൽ പരിക്രമണത്തിന് സാധ്യമായതുമായ ഒന്നാണ്.

വാതിലിന് പരിക്രമണചലനം നടക്കണമെങ്കിൽ തീർച്ചയായും വാതിൽ നീങ്ങേണ്ട ദിശയിൽ ഒരു ബലം നൽകേണ്ടതുണ്ട്. അല്ലാത്തപക്ഷം വാതിൽ അനങ്ങുകയില്ല. പക്ഷേ, ഏതെങ്കിലും വിധത്തിൽ ഒരു ബലം നൽകിയതുകൊണ്ട് ഒരു കാര്യവുമില്ല. വിജാഗിരിയുള്ളിടത്താണ് ബലം നൽകുന്നതെങ്കിൽ വാതിൽ അനങ്ങില്ല. ഫലപ്രദമായ ഒരു പരിക്രമണ ചലനം വാതിലിൽ ഉണ്ടാക്കണമെങ്കിൽ വാതിലിന്റെ പുറം അരികിൽ വാതിലിന്റെ തലത്തിന് ലംബമായി ഒരു നിശ്ചിത അളവിൽ ബലം പ്രയോഗിക്കണം. കേവലം ബലം പ്രയോഗിക്കുന്നുവെന്നതിലപ്പുറം, പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്ന ബലം എവിടെയാണ്, എങ്ങനെയാണ് എന്നൊക്കെയുള്ളത് പരിക്രമണചലന വിഷയത്തിൽ പ്രധാനമാണ്.

ബലത്തിന്റെ *(Force)* പരിക്രമണത്തിലെ സദൃശം *(Analogue)* ബലത്തിന്റെ മൊമന്റ് *(Moment of force)* ആണ്. ഇത് ടോർക്ക് *എന്നും ബലയുഗ്മം (couple,) എന്നുമുള്ള പേരിൽ പല സന്ദർഭങ്ങളിലും ഈ പാഠത്തിൽ വരുന്നുണ്ട്.)* ടോർക്കിന്റെ നിർവചനത്തിലേക്ക് എത്തുന്നതിനായി ഒരു കണികയുടെ ചലന സവിശേഷതകൾ മാത്രം പരിഗണിക്കാം. പിന്നീട് ഈ ആശയം കണികാവ്യവസ്ഥയുടെ മൊത്തം കാര്യത്തിലേക്കും ദൃഢവസ്തുവിലേക്കും അതിന്റെ പരിക്രമണചലന വ്യത്യാസങ്ങളിലേക്കും വ്യാപിപ്പിക്കും. അതുപോലെ ഒരു ദൃഢവസ്തുവിന്റെ കോണീയ ത്വരണ ***(Angular acceleration)*** ത്തിലേക്കും ഇതിനെ പിന്നീട് ബന്ധിപ്പിക്കും.



ചിത്രം 7.18 $\tau = \mathbf{r} \times F$, τ *എന്നത് r ഉം F ഉം ഉള്ള തലത്തിന് ലംബമാണ്. അതിന്റെ ദിശ വലംപിരിയാണി നിയമത്തിന് അനുസൃതമാണ്.*

മൂലബിന്ദു *(origin)* ***'O'*** ആധാരമാക്കി **r** എന്ന സ്ഥാന സദിശമുള്ള *(position vector)* ***P*** എന്ന ബിന്ദുവിലിരിക്കുന്ന സ്വതന്ത്രകണത്തിന്മേൽ ഒരു ബലം പ്രയോഗിച്ചാൽ ആ കണത്തെ സ്വാധീനിക്കുന്ന ടോർക്ക് *(moment of force)* ഒരു സദിശ ഗുണിതമായി നിർവചിക്കാം.

$$\tau = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \qquad (7.23)$$

ടോർക്ക് ***(moment of force)*** ഒരു സദിശ പരിമാണമാണ്. അതിന്റെ പ്രതീകം ഗ്രീക്ക് ലിപിയിലുള്ള τ (ടൗ) ആണ്. അതിന്റെ പരിമാണം താഴെ കാണിച്ചിരിക്കുന്നു.

$$\tau = r\, F \sin\theta \qquad (7.24a)$$

ഇതിൽ r എന്നത് സ്ഥാനസദിശമായ **r** ന്റെ പരിമാണമാണ്. അതായത് OP യുടെ നീളം. ബലമായ **F** ന്റെ പരിമാണമാണ് F. **r** ഉം **F** ഉം തമ്മിലുള്ള കോണളവ് θ ടോർക്കിന്റെ ഡൈമെൻഷൻ ***(Dimension)*** $M L^2 T^{-2}$ ആണ്. ഇത് *പ്രവൃത്തി (work), ഊർജം (energy)* എന്നിവയുടെ ഡൈമെൻഷനു സമാനമാണ്. എന്നാൽ അത് പ്രവൃത്തി എന്ന ഭൗതികപരിമാണത്തിൽനിന്ന് എത്രയോ വ്യത്യാസപ്പെട്ടതാണ്. ടോർക്ക് ഒരു സദിശവും പ്രവൃത്തി അദിശവുമാണെന്നത് ഒരു പ്രധാന വ്യത്യാസമാണ്. **SI** യൂണിറ്റിൽ ടോർക്ക് കുറിക്കുന്നത് ന്യൂട്ടൺ മീറ്ററിലാണ് **(Nm)** ടോർക്കിന്റെ അളവുകൾ കണക്കാക്കുന്നത് താഴെ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന പ്രകാരവുമാണ്.

$$\tau = (r \sin\theta)F = r_\perp F \qquad (7.24b)$$

അല്ലെങ്കിൽ $\tau = r\, F \sin\theta = rF_\perp$ (7.24c)

ഇതിൽ $r_\perp = r \sin\theta$ എന്നത് മൂലബിന്ദുവിൽനിന്ന് ബലം **F** പ്രവർത്തിക്കുന്ന രേഖയിലേക്കുള്ള അകലം കുറിക്കുന്ന ലംബരേഖയും $F_\perp$ (= $F\sin\theta$) എന്നത് **r** ന് ലംബദിശയിലുള്ള **F**ന്റെ ഘടകവുമാണ്. ഇതിൽ $r = 0$, $F=0$ ആയാൽ $\tau = 0$ ആയിരിക്കും. അല്ലെങ്കിൽ $\theta = 0$ അഥവാ 180°. അപ്പോൾ ടോർക്ക് ഇല്ലാതാവണമെങ്കിൽ ബലങ്ങളുടെ സാന്നിദ്ധ്യം പൂജ്യമാവുകയോ ബലത്തിന്റെ പ്രവർത്തനരേഖ മൂലബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോകുകയോ ചെയ്യണം.

r x F ഒരു സദിശഗുണിതം ആയതിനാൽ രണ്ടു സദിശങ്ങളുടെ സദിശഗുണിതത്തിന്റെ സവിശേഷതകൾ അതിനു ബാധകമാണ്. ഇനി, **F** ന്റെ ദിശ നേരെ വിപരീതമാവുകയാണെങ്കിൽ, ടോർക്കിന്റേത് എതിർദിശയായിരിക്കും. എന്നാൽ, **r** ന്റെയും **F** ന്റെയും ദിശകൾ വിപരീതങ്ങളാകുമ്പോൾ, ടോർക്കിന്റെ ദിശ അതേപോലെ തുടരുന്നു.

7.7.2. ഒരു കണികയുടെ കോണീയ ആക്കം (Angular momentum of a particle)

ബലത്തിന്റെ ***(Force)*** സദൃശ ***(Analogue)*** മായി ടോർക്കിനെ കാണുമ്പോൾ, രേഖീയ ആക്കത്തിനുള്ള ***(Linear momentum)*** പരിക്രമണത്തിലെ സദൃശമായി കോണീയ ആക്ക ***(angular momentum)*** ത്തെയും നമുക്ക് കാണേണ്ടതാണ്. ആദ്യം ഒരു സ്വതന്ത്രകണികയുടെ കോണീയ ആക്കത്തിന്റെ നിർവചനം എന്താണെന്നു നോക്കാം. ഒരു കണികയുടെ ചലനവുമായി ബന്ധപ്പെട്ട് ഈ നിർവചനത്തിന്റെ ഉപയോഗസാധ്യതകളെക്കുറിച്ച് ആലോചിക്കാം. പിന്നീട് ഈ നിർവ്വചനത്തെ കണികാവ്യവസ്ഥയിലേക്കും ദൃഢവസ്തുക്കൾ ഉൾപ്പെടെയുള്ളവയുടെ ചലനങ്ങളിലേക്കും വിപുലപ്പെടുത്താം.

ടോർക്കിനെപ്പോലെ ബലത്തിന്റെ മൊമന്റ് ***(Moment of force)*** ഒരു സദിശഗുണിതമാണ്. ഇതിനെ ആക്കത്തിന്റെ മൊമന്റായും സൂചിപ്പിക്കാറുണ്ട്. ഈ വസ്തുതയിൽനിന്നുതന്നെ കോണീയ ആക്കത്തെ നിർവചിക്കേണ്ടതെങ്ങിനെയെന്ന് സങ്കൽപിക്കാവുന്നതാണ്.

മൂലബിന്ദു ***(origin)*** O യെ ആധാരമാക്കി ***r*** സ്ഥാന സദിശ ***p*** രേഖീയ ആക്കവും m മാസുമുള്ള ഒരു കണത്തെ സങ്കൽപിക്കുക. O എന്ന മൂലബിന്ദുവിനെ ആധാരമാക്കിയുള്ള ഈ കണത്തിന്റെ കോണീയ ആക്കം **l** താഴെ കാണിച്ചിരിക്കുന്നവിധം നിർവചിക്കാനാവും.

$$\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \qquad (7.25a)$$

കോണീയ ആക്കസദിശത്തിന്റെ പരിമാണം താഴെ കാണിച്ചിരിക്കുന്നു.

$$l = r\, p \sin\theta \qquad (7.26a)$$

ഇതിൽ p എന്നത് **p** യുടെ പരിമാണവും θ. എന്നത് ***r*** ന്റെയും ***p*** യുടെയും ഇടയിലുള്ള കോണളവുമാണ്. ഇത് താഴെ കാണിച്ച വിധം എഴുതാവുന്നതാണ്

$$l = r\, p_\perp \text{ അഥവാ } r_\perp p \qquad (7.26b)$$

ഇതിൽ $r_\perp$ ($P \sin\theta$.) എന്നത് കേന്ദ്രത്തിൽനിന്നു **p** യുടെ ദിശാസൂചകരേഖയുടെ ലംബിത അകലവും, $P_\perp$ ($P \sin\theta$.) എന്നത് **r** ന് ലംബദിശയിലുള്ള **p** യുടെ ഒരു ഘടകവുമാണ്. രേഖീയ ആക്കം ഇല്ലാതാവുകയോ ($P=0$), കണിക കേന്ദ്രത്തിൽ ആയിരിക്കുകയോ ($r= 0$) അല്ലെങ്കിൽ **p** യുടെ ദിശാസൂചകരേഖ മൂല ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോകുകയോ ($\theta = 0^\circ$ അഥവാ 180°) ചെയ്യുമ്പോൾ കോണീയ ആക്കം പൂജ്യമാകും.

ഭൗതികപരിമാണങ്ങളായ ബലത്തിന്റെ മൊമന്റും (***moment of a force***) കോണീയ ആക്കവും (***angular momentum***) തമ്മിൽ വളരെ പ്രധാന്യമേറിയ ഒരു ബന്ധമുണ്ട്. ബലത്തിന്റെയും (*force*) രേഖീയ ആക്കത്തിന്റെയും (*linear momuntum*) പരസ്പരബന്ധത്തിന് സമാനമായ പരിക്രമണചലനത്തിലെ സാദൃശ്യമാണിത്. ഒരു കണികയുടെ കോണീയ ആക്കത്തിന്റെ നിർവചനത്തിനായി സമയത്തിനാധാരമായി **l = r x p** യെ അവകലനം ചെയ്താൽ മതി

$$\frac{d\mathbf{l}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p})$$

അവകലനത്തിനുള്ള ഗുണനഫലനിയമം ഈ സമവാക്യത്തിന്റെ വലതുഭാഗത്ത് പ്രയോഗിച്ചാൽ,

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

കണികയുടെ പ്രവേഗം v dr/dt യും $\mathbf{p}$ $m\mathbf{v}$ ആണ്. അതിനാൽ $\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p} = \mathbf{v} \times m\ \mathbf{v} = 0$,

(രണ്ടു സമാന്തര സദിശങ്ങളുടെ സദിശഗുണിതം പൂജ്യമാകുന്നതിനാൽ). $d\mathbf{p}/dt = \mathbf{F}$, ആയതിനാൽ,

$$\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \boldsymbol{\tau}$$

അതിനാൽ $\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \boldsymbol{\tau}$

അല്ലെങ്കിൽ $$\frac{d\mathbf{l}}{dt} = \boldsymbol{\tau} \tag{7.27}$$

അങ്ങനെ, സമയക്രമത്തിൽ ഒരു കണികയുടെ കോണീയ ആക്കത്തിന്റെ നിരക്കിൽ വരുന്ന വ്യത്യാസം കണത്തിന്മേൽ പ്രയോഗിക്കുന്ന കോണീയ ആക്കത്തിന് തുല്യമാണ്. ഒരു സ്വതന്ത്രകണികയുടെ സ്ഥാനാന്തര ചലനത്തിനുള്ള ന്യൂട്ടന്റെ രണ്ടാം നിയമത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്നയിത് $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$, എന്ന സമവാക്യത്തിന്റെ പരിക്രമണ സദൃശമാണ്.

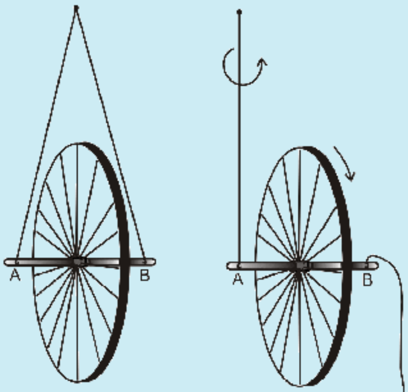
ഒരു കണികാവ്യവസ്ഥയ്ക്കുള്ള ടോർക്കും കോണീയ ആക്കവും (Torque and angular momentum for a system of particles)

ഒരു ബിന്ദുവിനെ ആധാരമാക്കി ഒരു കണികാവ്യവസ്ഥയുടെ ആകെ കോണീയ ആക്കം ലഭിക്കുന്നതിന് ഓരോ കണത്തിന്റെയും കോണീയ ആക്കങ്ങൾ സദിശപരമായി കൂട്ടിയെടുത്താൽ മതി. n എണ്ണം കണങ്ങളുള്ള ഒരു വ്യവസ്ഥയിലിത് താഴെ കാണിച്ചിരിക്കുന്നു.

$$\mathbf{L} = \mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_2 + \ldots + \mathbf{l}_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{l}_i$$

$\mathbf{l}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i$ എന്നത് കണിക i യുടെ കോണീയ ആക്കം ആണ്. ഇതിൽ $\mathbf{r}_i$ എന്നത് തന്നിരിക്കുന്ന ബിന്ദുവിനെ ആധാരമാക്കിയുള്ള i എന്ന കണികയുടെ സ്ഥാനസദിശമാണ് (*position vector*). p_i $(m_i v_i)$ എന്നതാകട്ടെ, ആ കണത്തിന്റെ രേഖീയ ആക്കവുമാണ് (*കണത്തിന് m_i മാസും v_i പ്രവേഗമുണ്ട്*). ഒരു കണികാവ്യവസ്ഥയിലെ ആകെ കോണീയ ആക്കത്തെ ഇനി താഴെ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ എഴുതാനാകും.

ഒരു സൈക്കിൾ റിം ഉപയോഗിച്ചുള്ള പരീക്ഷണം



പ്രാരംഭം   പിന്നീട്

സൈക്കിൾ റിം എടുത്ത് അതിന്റെ അക്ഷം ഇരുവശത്തേക്കും നീട്ടുക. നീട്ടിയ അക്ഷത്തിന്റെ രണ്ട് അറ്റങ്ങളിലും ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ രണ്ടു ചരടു കെട്ടുക. രണ്ടു ചരടു ഒരു കൈകൊണ്ട് ചേർത്തു പിടിച്ച് റിം ലംബമായി നിർത്തുക. ഒരു ചരടുമാത്രം പിടിച്ച് മറ്റേ ചരട് വിടുമ്പോൾ ലംബ നിലയിലുള്ള റിം മറിഞ്ഞു വീഴുന്നു. രണ്ടു ചരടു ഒരു കൈകൊണ്ട് പിടിച്ച് മറ്റേ കൈകൊണ്ട് റിം ശക്തമായി കറക്കുക. റിം നല്ല വേഗത്തിൽ കറങ്ങിക്കൊണ്ടിരിക്കുമ്പോൾ B എന്ന സ്ഥാനത്തുള്ള ചരട് വിടുമ്പോൾ എന്തു സംഭവിക്കുന്നുവെന്ന് നിരീക്ഷിക്കുക.

റിം ലംബനിലയിൽ കറക്കം തുടരുന്നു. അതോടൊപ്പം നിങ്ങൾ പിടിച്ചിരിക്കുന്ന A ചരടിന് ചുറ്റുമെന്ന പോലെ റിം തിരിയുന്ന തലം കറങ്ങുന്നു. അതായത് റിമ്മിന്റെ അക്ഷം ചരട് A യെ ആധാരമാക്കി പുരസ്സരണം നടത്തുന്നു. (precesses) അല്ലെങ്കിൽ കോണീയ ആക്കം പുരസ്സരണം ചെയ്യുന്നുവെന്നു പറയാം. ഇവിടെ കറങ്ങുന്ന റിം ഒരു കോണീയ ആക്കം ഉണ്ടാക്കുന്നുണ്ട്. A ചരടിന്മേൽ റിം കറങ്ങിക്കൊണ്ടിരിക്കുമ്പോൾ ഒരു ടോർക്ക് ഉടലെടുക്കുന്നു. ടോർക്ക് എന്താണെന്നും അതിന്റെ ദിശ എന്താണെന്നും കണ്ടെത്തുക. കോണീയ ആക്കത്തിന്മേൽ (angular momentum) വരുന്ന ടോർക്കിന്റെ സ്വാധീനത്താൽ കോണീയ ആക്കം, ടോർക്കിനും കോണീയ ആക്കത്തിനും ലംബമായ ദിശയിലുള്ള ഒരു അക്ഷത്തിനെ ആധാരമാക്കി പുരസ്സരണത്തിനു വിധേയമാവും. ഈ പ്രസ്താവനകളെല്ലാം തെളിയിക്കുവാൻ ശ്രമിക്കുക.

$$\mathbf{L} = \sum \mathbf{l}_i = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i \tag{7.25b}$$

ഒരു കണികാവ്യവസ്ഥയുടെ കോണീയ ആക്കം തരുന്ന സമവാക്യം (7.25 b) ഒരു കണികയുടെ കോണീയ ആക്കം നൽകുന്ന സമവാക്യം (7.26 a) യുടെ സാമാന്യവൽക്കരണമാണ്. സമവാക്യം (7.23 a) ഉം (7.25 b) യും ഉപയോഗിക്കുമ്പോൾ

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum \mathbf{l}_i\right) = \sum_i \frac{d\mathbf{l}_i}{dt} = \sum_i \boldsymbol{\tau}_i \tag{7.28a}$$

ഇതിൽ τ_i എന്നത് i എന്ന കണികയിൽ പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്ന ടോർക്കാണ്.

$$\tau_i = \mathbf{r}_i \times F_i$$

i എന്ന കണികയിൻ മേലുള്ള ബലം F_i എന്നത്, ആ കണികക്കുമേൽ പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്ന ആകെ ബാഹ്യബലങ്ങളുടെ തുകയായ F_i^{ext} ന്റെയും ആ വ്യവസ്ഥയിലെ മറ്റു കണികകൾ *i* എന്ന കണികയിൽ പ്രയോഗിക്കുന്ന ആന്തരികബലങ്ങളുടെ തുക F_i^{int} ന്റെയും സദിശ തുകയാണ്. അതുകൊണ്ട് ആകെ ടോർക്കിന് കാരണമാകുന്ന ബാഹ്യബലത്തെയും ആന്തരികബലത്തെയും വേർതിരിച്ച് താഴെ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന വിധം എഴുതാവുന്നതാണ്.

$$\tau = \sum_i \tau_i = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i$$

$$\tau = \tau_{ext} + \tau_{int},$$

ഇതിൽ $\tau_{ext} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{ext}$ -ഉം

$\tau_{int} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{int}$ -ഉം ആണ്.

ഇവിടെ നമ്മൾ അനുമാനിക്കേണ്ടത് ന്യൂട്ടന്റെ മൂന്നാം ചലനനിയമപ്രകാരമുള്ള 'ഒരു വ്യവസ്ഥയിലെ രണ്ടു കണങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള ബലം തുല്യവും വിപരീതവുമായിരിക്കു'മെന്ന് മാത്രമല്ല, ഈ 'രണ്ടു ബലങ്ങളും പ്രവർത്തിക്കുന്നത് രണ്ടു കണങ്ങളെയും യോജിപ്പിക്കുന്ന രേഖയിൽ കൂടി ആയിരിക്കും' എന്നതുകൂടിയാണ്. ഇങ്ങനെ എടുക്കുമ്പോൾ ഇവിടെ ടോർക്കിന്റെ സമവാക്യത്തിൽ കാണപ്പെട്ട ആന്തരികബലങ്ങളുണ്ടാക്കുന്ന ടോർക്ക് പൂജ്യമായിരിക്കുമെന്നു കാണാം. അതായത് $\tau_{int} = 0$. അതിനാൽ, വ്യവസ്ഥയിൽ അനുഭവപ്പെടുന്ന ടോർക്ക് ബാഹ്യ ടോർക്കുകളുടെ ആകെത്തുക മാത്രമായിത്തീരുകയും ചെയ്യുന്നു.

$\tau = \tau_{ext}$

$\tau = \Sigma\tau_i$ ആയതിനാൽ, അത് സമവാക്യം (7.28 *a*) പ്രകാരം

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \tau_{ext} \qquad (7.28\ b)$$

അതിനാൽ, **ഏതെങ്കിലും ഒരു ബിന്ദുവിനെ ആധാരമാക്കിയുള്ള ഒരു കണികാവ്യവസ്ഥയുടെ ആകെ കോണീയ ആക്കത്തിന്റെ** (*angular momentum*) സമയാശ്രിത **നിരക്ക്** (*ഇവിടെ അവലംബകം മൂലബിന്ദുവായി എടുത്തിരിക്കുന്നു*) **വ്യവസ്ഥയിലെ അതേ ബിന്ദുവിനെ ആധാരമാക്കി പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്ന ബാഹ്യ ടോർക്കുകളുടെ തുകക്ക് തുല്യമായിരിക്കും.** ടോർക്കുകൾക്ക് ഹേതുവായിട്ടുള്ളത് ബാഹ്യബലങ്ങൾ മാത്രമായിരിക്കുമെന്ന് നേരത്തെ മനസ്സിലാക്കിയിട്ടുണ്ട്. ഒരു വ്യവസ്ഥക്കുള്ളിലെ ഒരു കണികയുടെ കാര്യത്തിൽ പരാമർശിക്കപ്പെട്ട സമവാക്യം (7.23) ന്റെ തന്നെ ഒരു പൊതു ആവിഷ്കാരമാണ് സമവാക്യം (7.28 *b*). നമുക്ക് പരിഗണിക്കാൻ കേവലം ഒരു കണിക മാത്രമേയുള്ളുവെങ്കിൽ അതിൽ ആന്തരികബലമോ അവയുണ്ടാക്കുന്ന ടോർക്കുകളോ ഒന്നുംതന്നെ ഉണ്ടാവില്ല. സമവാക്യം (7.28 *b*) താഴെ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന സമവാക്യത്തിന്റെ പരിക്രമണ സദൃശമാണ്.

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}_{ext} \qquad (7.17)$$

സമവാക്യങ്ങളായ (7.17) ഉം (7.28 b) ഉം എല്ലാ കണികാവ്യവസ്ഥകൾക്കും സ്വീകാര്യമായതാണ്. എല്ലാത്തരം ആന്തരികചലനങ്ങളോടും കൂടിയ ഒരു ദൃഢവസ്തുവിന്റെ കാര്യത്തിലായാലും ബാധകമാണ്.

കോണീയ ആക്കത്തിന്റെ സംരക്ഷണം (Conservation of Angular Momentum)

$\tau_{ext} = 0$ ആകുമ്പോൾ സമവാക്യം 7.28 *b* താഴെ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ ചുരുങ്ങുന്നു.

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0$$

അല്ലെങ്കിൽ **L** = ഒരു സ്ഥിരസംഖ്യ (7.29a)

ഒരു കണികാവ്യവസ്ഥയുടെ ആകെ ബാഹ്യടോർക്ക് (*external torque*) പൂജ്യമാവുന്നിടത്ത് ആ വ്യവസ്ഥയുടെ മൊത്തം കോണീയ ആക്കം സംരക്ഷിക്കപ്പെടുന്നുവെന്നോ അല്ലെങ്കിൽ സ്ഥിരതയുള്ളതായിരിക്കും എന്നോ പറയാം. സമവാക്യം (7.29 *a*) മൂന്നു അദിശസമവാക്യങ്ങൾക്കു സമാനമാണ്.

$$L_x = K_1,\ L_y = K_2,\ L_z = K_3 \qquad (7.29\ b)$$

ഇവിടെ K_1, K_2, K_3 എന്നിവ സ്ഥിരസംഖ്യകളാണ്. L_x, L_y, L_z എന്നിവ യഥാക്രമം *x,y,z* അക്ഷങ്ങളിലെ കോണീയ ആക്ക സദിശം (*Angular momentum vector*) **L** ന്റെ ഘടകങ്ങളുമാണ്. കോണീയ ആക്കം സംരക്ഷിക്കപ്പെട്ടിരിക്കുന്നുവെന്നതുകൊണ്ട് ഉദ്ദേശിക്കുന്നത് ഈ മൂന്നു ഘടകങ്ങളും സംരക്ഷിക്കപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു, അല്ലെങ്കിൽ സ്ഥിരതയിൽ തുടരുന്നുവെന്നാണ്.

സമവാക്യം (7.29 *a*) എന്നത് സമവാക്യം (7.18 *a*)ന്റെ പരിക്രമണസദൃശമാണെന്നു പറയാം. അതായത് ഒരു കണികാവ്യവസ്ഥക്കുള്ള ആകെ രേഖീയ ആക്കത്തിന്റെ സംരക്ഷണനിയമമാണത്. സമവാക്യം (7.18 *a*) പോലെ ത്തന്നെ ഈ സമവാക്യവും നിരവധി സന്ദർഭങ്ങളിൽ പ്രായോഗികപ്രാധാന്യമുള്ളതായി കണ്ടുവരുന്നു. ഇത്തരം സന്ദർഭങ്ങളിൽ ചിലത് ഈ അധ്യായത്തിൽ പിന്നീട് കാണാവുന്നതാണ്.

ഉദാഹരണം 7.5: മൂലബിന്ദുവിനെ (*origin*) അവലംബിച്ചുള്ള $7\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}$ എന്ന ബലത്തിന്റെ ടോർക്ക് കണ്ടെത്തുക. ബലം പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്നത് സ്ഥാന സദിശം (*position vector*) $\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ ഉള്ള ഒരു കണത്തിന്മേലാണ്.

ഉത്തരം: ഇവിടെ $\mathbf{r} = \hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}$

$$\mathbf{F} = 7\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}} - 5\hat{\mathbf{k}} \ .$$

ടോർക്ക് കണ്ടെത്താനുള്ള ഡിറ്റർമിനന്റ് സമവാക്യം $\tau = \mathbf{r} \times F$ ഉപയോഗിക്കുമ്പോൾ

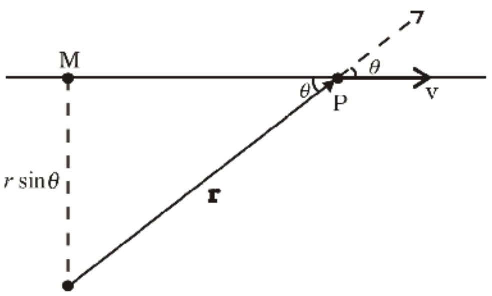
$$\tau = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 1 & -1 & 1 \\ 7 & 3 & -5 \end{vmatrix} = (5-3)\hat{\mathbf{i}} - (-5-7)\hat{\mathbf{j}} + (3-(-7))\hat{\mathbf{k}}$$

അല്ലെങ്കിൽ $\tau = 2\hat{\mathbf{i}} + 12\hat{\mathbf{j}} + 10\hat{\mathbf{k}}$

ഉദാഹരണം 7.6: സ്ഥിരപ്രവേഗത്തിൽ സഞ്ചരിച്ചുകൊണ്ടിരിക്കുന്ന ഒരു സ്വതന്ത്രകണികയുടെ ഏതെങ്കിലും ഒരു ബിന്ദുവിനെ ആധാരമാക്കിയുള്ള കോണീയ ആക്കം ചലനത്തിലുടനീളം സ്ഥിരമായിരിക്കുമെന്ന് തെളിയിക്കുക.

ഉത്തരം:

t സമയത്ത് $\mathbf{v}$ എന്ന സ്ഥിരപ്രവേഗത്തിൽ സഞ്ചരിച്ചുകൊണ്ടിരിക്കുന്ന കണം P എന്ന ബിന്ദുവിലാണെന്നിരിക്കട്ടെ. O എന്ന സാങ്കൽപ്പികബിന്ദുവിനെ ആധാരമാക്കി (t) സമയത്തുള്ള കോണീയ ആക്കമാണ് കണ്ടെത്തേണ്ടത്.



ചിത്രം. 7.19

കോണീയ ആക്കം $\mathbf{l} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$ അതിന്റെ പരിമാണം $mvr \sin\theta$ ആണ്. ഇതിൽ θ എന്നത് $\mathbf{r}$ നും $\mathbf{v}$ യ്ക്കും ഇടയിലുള്ള കോണളവാണ് (ചിത്രം 7.19). കണത്തിന്റെ സ്ഥാനം സമയക്രമത്തിൽ മാറിക്കൊണ്ടിരിക്കുന്നുണ്ടെങ്കിലും $\mathbf{v}$ യുടെ ദിശാരേഖ സ്ഥിരമായി തുടരുന്നതിനാൽ $OM = r \sin\theta$ ആയിരിക്കും. അത് ഒരു സ്ഥിരസംഖ്യയാണ്. $\mathbf{l}$ ന്റെ ദിശ $\mathbf{r}$ ഉം $\mathbf{v}$ യും ഉൾക്കൊള്ളുന്ന തലത്തിന് ലംബമാണ്. അത് ഈ പുസ്തകത്താളിലെ ചിത്രത്തിന്റെ തലത്തിന് ലംബമാണ്. അതിന്റെ ദിശയും സമയക്രമത്തിൽ മാറുന്നില്ല.

അങ്ങനെ $\mathbf{l}$ പരിമാണപരമായും ദിശാപരമായും ഒരുപോലെ തുടരുന്നതിനാൽ സംരക്ഷിതമാണെന്നു പറയാം. ഈ കണത്തിനുമേൽ ഏതെങ്കിലും ബാഹ്യടോർക്ക് (external torque) പ്രവർത്തിക്കുന്നുണ്ടോ?

ഉത്തരം കണ്ടെത്തുവാൻ ശ്രമിക്കൂ.

7.8 ഒരു ദൃഢവസ്തുവിന്റെ സന്തുലനാവസ്ഥ (Equilibrium of a Rigid Body)

കണികാവ്യവസ്ഥകളുടെ പൊതുചലന സവിശേഷതകളേക്കാളുപരിയായി, ദൃഢവസ്തുക്കളുടെ ചലനവ്യവസ്ഥകൾ സംബന്ധിച്ച കൂടുതൽ കാര്യങ്ങൾ വിശകലനം ചെയ്യാം.

ദൃഢവസ്തുക്കൾക്കുമേൽ ബാഹ്യബലങ്ങൾ ചെലുത്തുന്ന സ്വാധീനങ്ങളെപ്പറ്റി ഒന്നുകൂടി നമുക്ക് പരിഗണിക്കാം. (*ഇനിമുതൽ 'ബാഹ്യ' എന്നുള്ള വിശേഷണം ഒഴിവാക്കിക്കൊണ്ട് ബലം എന്നു മാത്രമേ സൂചിപ്പിക്കുന്നുള്ളൂ, കാരണം ഇനിയുള്ള ഭാഗങ്ങളിൽ പരാമർശിക്കുന്നത് ബാഹ്യബലത്തേയും ടോർക്കിനേയും കുറിച്ചുമാത്രമാണ്*) ഒരു ദൃഢവസ്തുവിന്റെ സ്ഥാനാന്തര (*translational*) ചലനാവസ്ഥകളിൽ ബലങ്ങൾ മാറ്റങ്ങളുണ്ടാക്കുന്നു. സമവാക്യം (7.17) പ്രകാരം അവ വസ്തുവിന്റെ മൊത്തം രേഖീയ ആക്കത്തിൽ മാറ്റങ്ങൾക്ക് കാരണമാകുന്നു. വസ്തുക്കളിൽ ബലങ്ങളുടെ സ്വാധീനങ്ങൾ ഇതുമാത്രമാണെന്ന് കരുതുന്നത് ശരിയാവില്ല. വസ്തുവിന്മേൽ ആകെയുള്ള ടോർക്ക് എല്ലായ്പ്പോഴും പൂജ്യം ആകണമെന്ന് നിർബന്ധമില്ല. അത്തരം ടോർക്ക് ദൃഢവസ്തുവിന്റെ പരിക്രമണ ചലനാവസ്ഥക്ക് കാതലായ മാറ്റങ്ങളുണ്ടാക്കുന്നവയാണ്, അതായത് സമവാക്യം (7.28 b) പ്രകാരം അത് വസ്തുവിന്റെ കോണീയ ആക്കത്തിന്മേൽ വ്യതിയാനങ്ങളുണ്ടാക്കാൻ പ്രാപ്തമായതാണ്.

ഒരു ദൃഢവസ്തു യാന്ത്രിക സംതുലന (*mechanical equilibrium*) ത്തിലാവുന്നത്, അതിന്റെ രേഖീയ ആക്കവും കോണീയ ആക്കവും സമയത്തിനൊത്ത് മാറാതിരിക്കുമ്പോഴാണ്. അഥവാ വസ്തുവിന് രേഖീയത്വരണമോ (*linear acceleration*) കോണീയത്വരണമോ (*angular acceleration*) ഉണ്ടാവാത്ത അവസ്ഥയിലാണ്. ഇതിനർത്ഥം:

(1) ഒരു ദൃഢ വസ്തുവിന്മേലുള്ള ആകെ ബലം, അതായത് സദിശ ബലങ്ങളുടെ തുക പൂജ്യമായിരിക്കും

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \ldots + \mathbf{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i = \mathbf{0} \qquad (7.30a)$$

വസ്തുവിന്മേൽ പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്ന ആകെ ബലം പൂജ്യമാവുമ്പോൾ, വസ്തുവിന്റെ രേഖീയ ആക്കത്തിന് മാറ്റം വരുന്നില്ല. അതായത് സമവാക്യം (7.30a), വസ്തുവിന്റെ സ്ഥാനാന്തരസന്തുലനത്തിനുള്ള നിബന്ധനയാണ്.

(2) ആകെ ടോർക്ക് (അതായത് ഒരു ദൃഢവസ്തുവിന്റെ ടോർക്കുകളുടെ സദിശസങ്കലനം), പൂജ്യമാവുമ്പോൾ,

$$\tau_1 + \tau_2 + \ldots + \tau_n = \sum_{i=1}^{n} \tau_i = 0 \qquad (7.30b)$$

വസ്തുവിന്മേലുള്ള ടോർക്കിന്റെ ആകെ തുക പൂജ്യമാണെങ്കിൽ, വസ്തുവിന്റെ കോണീയ ആക്കം സമയക്രമത്തിൽ മാറ്റത്തിനു വിധേയമാകുന്നില്ല. സമവാക്യം (7.30 *b*) യിലൂടെ ലഭ്യമാകുന്നത് വസ്തുവിന്റെ പരിക്രമണ സംതുലനാവസ്ഥയുടെ നിബന്ധനയാണ്.

ടോർക്ക് നിർവചിക്കാൻ ആധാരമായെടുത്ത മൂലബിന്ദു (*origin*) മാറ്റുകയാണെങ്കിൽ സമവാക്യം (7.30 *b*) പ്രകാരമുള്ള പരിക്രമണ സന്തുലനാവസ്ഥയിൽ വസ്തു തുടരുമോ എന്ന ചോദ്യം സ്വാഭാവികമായും ഉയർന്നു വരാവുന്നതാണ്. ഒരു ദൃഢവസ്തുവിൽ സമവാക്യം (7.30 *a*) പ്രകാരമുള്ള സ്ഥാനാന്തര സന്തുലനാവസ്ഥ നിലനിൽക്കുന്നുവെങ്കിൽ, മൂലബിന്ദുവിന്റെ സ്ഥാനമാറ്റം കൊണ്ട് മാറ്റം സംഭവിക്കില്ല. അതായത് ടോർക്കിന് ആധാരമായി എടുത്ത ബിന്ദുവിന്റെ സ്ഥാനത്തെ അപേക്ഷിച്ച് പരിക്രമണ സംതുലനാവസ്ഥ ആശ്രയിക്കുന്നില്ല. ഒരു ബലയുഗ്മത്തിന്റെ (*couple*) സവിശേഷമായ ഉദാഹരണത്തിലൂടെ (ഉദാ- 7.7) ഈ ഫലം തെളിയിച്ചിട്ടുണ്ട്. സ്ഥാനാന്തര സന്തുലനത്തിലുള്ള ഒരു ദൃഢവസ്തുവിൽ രണ്ടു ബലങ്ങൾ പ്രയോഗിക്കുന്നതിനെപ്പറ്റിയാണത്. ഇത്തരം അനേകം ബലങ്ങൾ പ്രയോഗിക്കുമ്പോൾ എങ്ങനെയാണ് ഈ നിബന്ധനകൾ പാലിക്കപ്പെടേണ്ടത് എന്നത് പരിശീലനപ്രശ്നമായി എടുത്തുകൊണ്ട് നിങ്ങൾക്ക് ചെയ്തുനോക്കാം.

സമവാക്യങ്ങൾ (7.30 *a*) ഉം സമവാക്യം (7.30 b) യും സദിശങ്ങളാണ്. അവ ഒരോന്നും മൂന്നു വീതം അദിശ സമവാക്യങ്ങളാക്കി മാറ്റാൻ കഴിയും. സമവാക്യം (7.30 a) താഴെ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന സമവാക്യങ്ങൾക്ക് സമാനമാണ്.

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0 \quad \sum_{i=1}^{n} F_{iz} = 0 \qquad (7.31a)$$

ഇവിടെ സൂചിപ്പിച്ചിരിക്കുന്ന F_{ix}, F_{iy}, F_{iz} എന്നിവ $\mathbf{F}_i$ ബലങ്ങളുടെ x, y, z ഘടകങ്ങളാണ്. അതുപോലെ സമവാക്യം (7.30 b) യും മൂന്നു അദിശ സമവാക്യങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് എഴുതാൻ കഴിയും.

$$\sum_{i=1}^{n} \tau_{ix} = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} \tau_{iy} = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} \tau_{iz} = 0 \qquad (7.31b)$$

ഇതിൽ τ_{ix}, τ_{iy}, τ_{iz} എന്നിവ യഥാക്രമം ടോർക്ക് (torque) τ_i യുടെ x, y, z ഘടകങ്ങളാണ്.

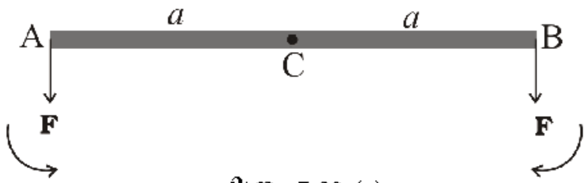
ഒരു ദൃഢവസ്തുവിന്റെ യാന്ത്രികസന്തുലനാവസ്ഥക്കായി സമവാക്യങ്ങൾ (7.31 a) യും (7.31 b) യും സ്വതന്ത്രമായ ആറു നിബന്ധനകൾ തരുന്നു. ഒട്ടുമിക്ക സാഹചര്യങ്ങളിലും വസ്തുവിന്മേൽ പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്ന ബലങ്ങളെല്ലാംതന്നെ ഒരേ തലത്തിലുള്ളതായിരിക്കും (coplanar). ഇത്തരം സന്ദർഭങ്ങളിൽ യാന്ത്രിക സന്തുലനാവസ്ഥ സാധ്യമാകാൻ ഇതിൽ മൂന്നു നിബന്ധനകൾ മാത്രം പാലിച്ചാൽ മതി. ഇതിൽ രണ്ടെണ്ണം സ്ഥാനാന്തരസന്തുലനം സംബന്ധിച്ചുള്ളതാണ്; തന്നിരിക്കുന്ന തലത്തിലെ ഏതെങ്കിലും രണ്ടു ലംബഅക്ഷങ്ങളിലൂടെയുള്ള ബലഘടകങ്ങളുടെ തുക പൂജ്യമായിരിക്കണം. മൂന്നാമത്തെ നിബന്ധന പരിക്രമണസന്തുലനവുമായി ബന്ധപ്പെട്ടതാണ്; ബലം പ്രവർത്തിക്കുന്ന തലത്തിനു ലംബമായി വരുന്ന ഏതെങ്കിലും അക്ഷത്തിലൂടെയുള്ള ടോർക്കുഘടകങ്ങളുടെ തുക പൂജ്യമായിരിക്കണം.

മുൻ അധ്യായങ്ങളിൽ നാം പരിഗണിച്ച, ഒരു കണികയുടെ സന്തുലനാവസ്ഥയുടെ നിബന്ധനകളെ, ഒരു ദൃഢവസ്തുവിന്റെ നിബന്ധനകളുമായി താരതമ്യപ്പെടുത്താവുന്നതാണ്. ഒരു കണത്തിന്റെ കാര്യത്തിൽ പരിക്രമണചലനത്തിന്റെ സാഹചര്യം പരിഗണിക്കേണ്ടതല്ലാത്തതിനാൽ, സ്ഥാനാന്തരസന്തുലനത്തിനുള്ള നിബന്ധനകൾ (7.30 a) മാത്രമേ പ്രയോഗികമാവുന്നുള്ളൂ. അതിനാൽ, ഒരു കണിക സന്തുലനാവസ്ഥ കൈവരിക്കണമെങ്കിൽ അതിന്മേൽ പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്ന എല്ലാ ബലങ്ങളുടെയും സദിശ സങ്കലനം (vector sum) പൂജ്യമായിരിക്കണം. ഈ ബലങ്ങളെല്ലാംതന്നെ ഒരു കണികയ്ക്കുമേൽ പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്നതിനാൽ അവ ഏകബിന്ദു ബലങ്ങളായിരിക്കും. സന്തുലനത്തിൽ കീഴിൽ വരുന്ന ഏകബിന്ദു ബലങ്ങളെക്കുറിച്ച് (concurrent force) മുൻ അധ്യായങ്ങളിൽ വിവരിച്ചിട്ടുള്ളതാണല്ലോ.

ചില വസ്തുക്കൾ ഭാഗികമായ സന്തുലനനിലയിൽ ഉണ്ടായേക്കാം. അതായത്, സ്ഥാനാന്തരസന്തുലനത്തിലുള്ളവക്ക് ചിലപ്പോൾ പരിക്രമണ സന്തുലനാവസ്ഥയില്ലാതിരിക്കാം. അല്ലെങ്കിൽ പരിക്രമണസന്തുലനത്തിലുള്ളവക്ക് സ്ഥാനാന്തരസന്തുനലാവസ്ഥ ഇല്ലാതെയുമായിരിക്കും.

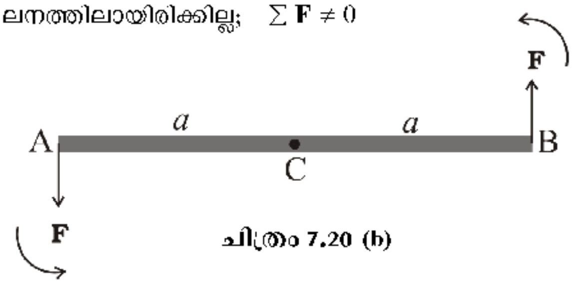
AB എന്ന ഒരു വണ്ണം കുറഞ്ഞ ദണ്ഡിന് നിസ്സാര മാസ് ആണെന്നിരിക്കട്ടെ. ദണ്ഡിന്റെ അഗ്രബിന്ദുക്കളായ A യിലും B യിലും ചിത്രം-7 -20 (a) ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതു

പോലെ ഒരേ പരിമാണങ്ങളുള്ള രണ്ടു ബലങ്ങൾ ലംബ മായി പ്രയോഗിക്കുന്നു.



ചിത്രം 7.20 (a)

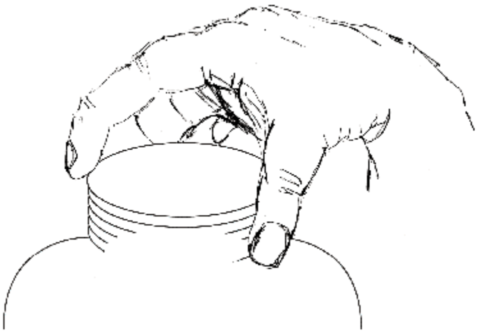
AB യുടെ മധ്യഭാഗം 'C' ആണ്; CA= CB = a. ബലങ്ങളുടെ മൊമന്റ് (moment of the force) A യിലും B യിലും ഒരേ അളവിലായിരിക്കും (*a F*). എന്നാൽ ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചതുപോലെ വിപരീതവുമായിരിക്കും. അതുകൊണ്ട് ദണ്ഡിന്മേലുള്ള മൊത്തം മൊമന്റ് (moment) പൂജ്യമായിരിക്കും. ഈ വ്യവസ്ഥ പരിക്രമണസന്തുലനാവസ്ഥയിലായിരിക്കുമെങ്കിലും, സ്ഥാനാന്തരസന്തുലനത്തിലായിരിക്കില്ല; $\sum \mathbf{F} \neq 0$



ചിത്രം 7.20 (b)

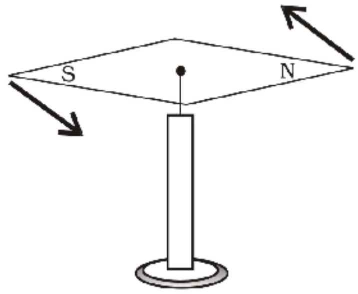
ചിത്രം 7-20 (b) യിൽ കാണിച്ചതുപോലെ, B എന്ന സ്ഥാനത്തുള്ള ബലം A യിലുള്ളതിന് നേർ വിപരീതമാണെന്നിരിക്കട്ടെ. ഇപ്പോൾ, ദണ്ഡിന് ലംബമായിട്ടുള്ളതും തുല്യവും വിപരീതവുമായ ബലം A യിലും B യിലും കൊടുത്തിരിക്കുന്നു. ഇവ ഇവിടെ രണ്ടു തുല്യ മൊമെന്റുകൾ ഉണ്ടാക്കുന്നു, അവ രണ്ടും ഒരേ ദിശയിൽ പ്രവർത്തിക്കുന്നതിനാൽ അവ രണ്ടും ദണ്ഡിനെ ഘടികാര വിപരീതദിശയിൽ (*anticlockwise*) അഥവാ അപ്രദക്ഷിണ ദിശയിൽ പരിക്രമണം ചെയ്യാൻ പ്രേരിപ്പിക്കുന്നു. വസ്തുവിന്മേലുള്ള മൊത്തം ബലം പൂജ്യമാണ്; അതിനാൽ വസ്തു സ്ഥാനാന്തരസന്തുലനത്തിലാണെന്നു പറയാം. എന്നാലത് പരിക്രമണസന്തുലനത്തിലല്ല. ദണ്ഡ് ഒരിടത്തും ഉറപ്പിച്ചിട്ടില്ലെങ്കിൽ പോലും, അത് പൂർണ്ണ പരിക്രമണത്തിന് വിധേയമാകും. (അതായത് സ്ഥാനാന്തരമില്ലാത്ത പരിക്രമണം).

ഒരു ജോടി ബലങ്ങൾ തുല്യവും വിപരീതവുമായി വ്യത്യസ്ത രേഖയിലൂടെ പ്രയോഗിക്കപ്പെടുമ്പോൾ അതിനെ ബലയുഗ്മം (couple) അഥവാ ടോർക്ക് എന്നു പറയുന്നു. ഒരു ബലയുഗ്മം സ്ഥാനാന്തരമില്ലാത്ത പരിക്രമണചലനം ഉണ്ടാക്കുന്നു.



ചിത്രം 7.21 (a) കൈവിരലുകൾ അടപ്പിൽ ഒരു ബലയുഗ്മം പ്രയോഗിക്കുന്നു.

ഒരു കുപ്പിയുടെ അടപ്പ് തിരിച്ചു തുറക്കുമ്പോൾ, നമ്മുടെ വിരലുകൾ അടപ്പിന്റെ വശങ്ങളിൽ ഒരു ബലയുഗ്മം (7-21 a) പ്രയോഗിക്കുന്നുണ്ട് (ചിത്രം 7-21 (b). മറ്റൊരു പരിചിതമായ ഉദാഹരണമാണ്. ഭൂമിയുടെ കാന്തികമണ്ഡലത്തിൽ സ്വതന്ത്രമായിവച്ചിട്ടുള്ള കാന്തസൂചിയുടേത്. ഭൂമിയുടെ കാന്തികമണ്ഡലം കാന്തസൂചിയുടെ ഉത്തരധ്രുവത്തിലും ദക്ഷിണധ്രുവത്തിലും തുല്യമായ ബലംപ്രയോഗിക്കുന്നു. കാന്തസൂചിയുടെ ഉത്തരധ്രുവത്തിൽ പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്ന ബലം വടക്കുഭാഗത്തേക്കും ദക്ഷിണധ്രുവത്തിൽ പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്ന ബലം തെക്കുഭാഗത്തേക്കുമാണ്. കാന്തസൂചി എപ്പോഴൊക്കെ കൃത്യമായി തെക്കു-വടക്ക് നിശ്ചലമായി നിൽക്കാതിരിക്കുന്നുവോ ആ സമയങ്ങളിലെല്ലാം ഈ രണ്ടു ബലങ്ങളും പ്രയോഗിക്കപ്പെടും. അവ ഒരേ രേഖയിലായിരിക്കില്ല പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്നത്. അതിനാൽ ഭൂമിയുടെ കാന്തികമണ്ഡലത്തിന്റെ ഫലമായി കാന്തസൂചിയിൽ ഒരു ബലയുഗ്മം ഉണ്ടാകുന്നു.

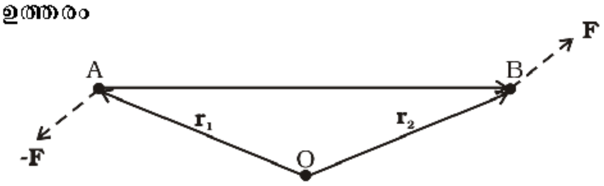


ചിത്രം 7.21 (b) ഭൂമിയുടെ കാന്തികമണ്ഡലം കാന്തസൂചിയുടെ ഇരുധ്രുവങ്ങളിലും തുല്യവും വിപരീതവുമായ ബലം പ്രയോഗിക്കുന്നു. ഈ രണ്ടു ബലങ്ങളും ചേർന്ന് ബലയുഗ്മ (couple) ത്തിന് ഇടയാക്കുന്നു.

ഉദാഹരണം. 7.7

ബലയുഗ്മ (couple) ത്തിന്റെ മൊമന്റ് (moment), അതു കണക്കാക്കുവാൻ ആധാരമാക്കിയ ബിന്ദുവിന്റെ സ്ഥാനത്തെ ആശ്രയിക്കുന്നില്ലെന്നു തെളിയിക്കുക.

ഉത്തരം



ചിത്രം 7.22

ചിത്രം 7.22ൽ കാണിച്ചതുപോലെ, ഒരു ദൃഢവസ്തുവിൽ പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്ന ബലയുഗ്മം പരിഗണിക്കുക. ബലങ്ങളായി **F** ഉം **- F** ഉം യഥാക്രമം B, A എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്നു. ഈ ബിന്ദുക്കളിൽ മൂലബിന്ദു 'O'വിനെ അവലംബിച്ചിട്ടുള്ള $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ എന്നീ സ്ഥാനസദിശങ്ങളുണ്ട്. മൂലബിന്ദുവിനെ ആധാരമാക്കിയുള്ള ടോർക്കിനെ ഇനി കണക്കാക്കിനോക്കാം.

ബലയുഗ്മത്തിന്റെ മൊമന്റ് (moment of the couple) = ബലയുഗ്മം സൃഷ്ടിക്കുന്ന രണ്ട് ടോർക്കുകളുടെ തുക

$= \mathbf{r}_1 \times (-\mathbf{F}) + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}$

$= \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F} - \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}$

$= (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \times \mathbf{F}$

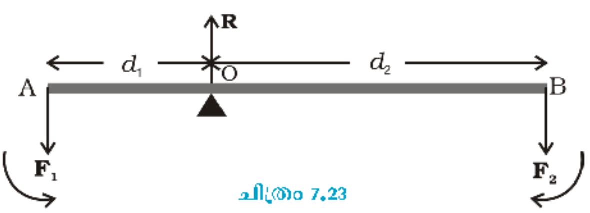
ഇവിടെ $\mathbf{r}_1 + \mathbf{AB} = \mathbf{r}_2$ അതുകൊണ്ട് $\mathbf{AB} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$.

അതിനാൽ ബലയുഗ്മത്തിന്റെ മൊമന്റ് **AB × F** എന്നാകുന്നു.

ഇത് മൂലബിന്ദുവിന്റെ സ്ഥാനത്തെ ആശ്രയിക്കുന്നില്ല. അതായത് മൊമന്റ് കണക്കാക്കുവാൻ നാം ആധാരമാക്കിയ ബിന്ദുവിന്റെ സ്ഥാനത്തെ ആശ്രയിക്കുന്നില്ല.

7.8.1 മൊമന്റുകളുടെ തത്വം (Principle of moments)

മാസ് തീരെകുറഞ്ഞതും, നീളമുള്ളതും നിവർന്നതുമായ ഒരു ദണ്ഡ് അതിലെ ഏതെങ്കിലും ഒരു ബിന്ദുവിനെ ആധാരമാക്കി താങ്ങി നിർത്തുവാൻ (pivot) കഴിഞ്ഞാൽ അത് ഒരു ഉത്തോലകം (lever) ആകും. പിവട്ട് ചെയ്തിരിക്കുന്ന ബിന്ദുവിനെ ആധാരബിന്ദു (fulcrum) എന്നു പറയുന്നു. കുട്ടികൾ കളിസ്ഥലങ്ങളിലുപയോഗിക്കുന്ന, ഉയരുകയും താഴുകയും ചെയ്യുന്ന കളിപ്പലക (see saw) ഉത്തോലകത്തിന് ഏറ്റവും നല്ല ഉദാഹരണമാണ്. F_1, F_2 എന്നീ ബലങ്ങൾ പരസ്പരം സമാന്തരവും ഉത്തോലകതലത്തിന് ലംബവുമാണ് (ചിത്രം 7.23). രണ്ടു ബലങ്ങളും പ്രവർത്തിക്കുന്നത് ആധാരബിന്ദുവിൽ (fulcrum) നിന്ന് യഥാക്രമം d_1,d_2 എന്നീ അകലങ്ങളിലാണ്.



ചിത്രം 7.23

ഉത്തോലകം യാന്ത്രിക സന്തുലനത്തിലുള്ള ഒരു വ്യവസ്ഥയാണ്. ആധാരബിന്ദുവിലൂടെ (fulcrum) പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്ന എതിർബലമായി (Reaction) R നെ കരുതാം. അതിനാൽ R എന്നത് F_1, F_2 എന്നീ ബലങ്ങൾക്ക് വിപരീതമാകും. സ്ഥാനാന്തരസന്തുലനത്തിലാണ് ഉത്തോലകമെങ്കിൽ

$$R - F_1 - F_2 = 0 \qquad \text{(i)}$$

പരിക്രമണസന്തുലനം (Rotational Equilibrium) പരിഗണിക്കേണ്ടതിലേക്ക് ആധാരബിന്ദുവിനെ അവലംബിച്ചുള്ള മൊമന്റാണെടുക്കേണ്ടത്; മൊമന്റുകളുടെ തുക പൂജ്യമായിരിക്കും.

$$d_1F_1 - d_2F_2 = 0 \qquad \text{(ii)}$$

സാധാരണ മൊമന്റുകൾ അപ്രദക്ഷിണ വിപരീത ദിശയിലാവുമ്പോൾ പോസിറ്റീവായും (+). പ്രദക്ഷണദിശയിലാവുമ്പോൾ നെഗറ്റീവായും (-) കണക്കാക്കുന്നു. R പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്നത് ആധാരബിന്ദുവിലൂടെത്തന്നെയായതിനാൽ ആധാരബിന്ദുവിനെ ആധാരമാക്കിയുള്ള ഇതിന്റെ മൊമന്റ് പൂജ്യമായിരിക്കും.

ഉത്തോലകങ്ങളിൽ ബലം F_1 സാധാരണ ആയി കണ്ടുവരുന്നത് ഉത്തോലകം ഉപയോഗിച്ച് ഉയർത്തേണ്ട ഭാരമായാണ്. അതിനെ രോധമെന്നും (ഭാരം - load) ആധാരബിന്ദു *O* മുതൽ ദണ്ഡിന്റെ F_1 വരെയുള്ള ദൂരത്തെ രോധഭുജമെന്നും *(load arm)* വിളിക്കുന്നു. F_1 ഭാരത്തെ ഉയർത്താൻ ഉപയോഗിക്കുന്ന ബലം F_2 വിനെ യത്നമെന്നും *(effort)*-ആധാരകേന്ദ്രത്തിൽനിന്ന് F_2 വരെയുള്ള ദൂരത്തെ യത്നഭുജമെന്നും *(effort arm)* പറയുന്നു.

സമവാക്യം (ii) താഴെ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ എഴുതാവുന്നതാണ്.

$$d_1F_1 = d_2 F_2 \qquad (7.32a)$$

അഥവാ ***രോധഭുജം* x *രോധം (ഭാരം)* = *യത്നഭുജം* x *യത്നം***

ഈ സമവാക്യം ഒരു ഉത്തോലകത്തിനുള്ള മൊമന്റിന്റെ തത്വം (Principle of moments) എന്നറിയപ്പെടുന്നു. ഇവിടെ F_1/F_2 വിനെ യാന്ത്രികലാഭമെന്നും (mechanical advantage) പറയുന്നു.

ഇതിനെ ഒരു സമവാക്യമായി താഴെ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ എഴുതാം.

$$\text{M.A. (യാന്ത്രികലാഭം)} = \frac{F_1}{F_2} = \frac{d_2}{d_1} \qquad (7.32b)$$

ഇനി യത്നഭുജം d_2 രോധഭുജത്തേക്കാൾ നീളമുള്ളതാണെങ്കിൽ യാന്ത്രികലാഭം 1 ൽ കൂടുതലായിരിക്കും. യാന്ത്രികലാഭം 1 ൽ കൂടുതലാണെന്നതിനർഥം ഒരു ചെറിയ യത്നത്തിലൂടെ കൂടുതൽ ഭാരം ഉയർത്താനാവുന്നുവെന്നാണ്. ഉത്തോലകങ്ങൾക്ക് ഉദാഹരണങ്ങളായി

നിങ്ങളുടെ ചുറ്റും നിരവധി മാതൃകകൾ കണ്ടെത്താനാവും. ത്രാസിന്റെ ദണ്ഡ് ഒരു ഉത്തോലകമാണ്. കൂടുതൽ ഉത്തോലകങ്ങൾ കണ്ടെത്തി ആധാരകേന്ദ്രം *(fulcrum)* യത്നം *(effort)* യത്നഭുജം *(effort arm)*, രോധം (ഭാരം - load), രോധഭുജം *(load arm)* എന്നിവ ഓരോ ഉദാഹരണത്തിന്റേതും വേർതിരിച്ച് മനസിലാക്കുക.

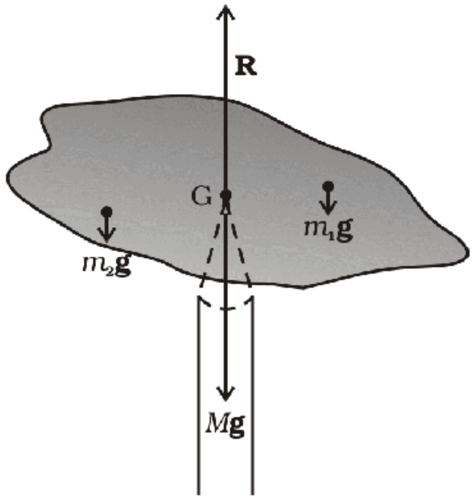
ഉത്തോലകതലത്തിനു ലംബമല്ലാത്ത നിലയിൽ തലവുമായി ഏതെങ്കിലും ഒരു കോണളവ് ഉണ്ടാക്കുന്നവിധത്തിലാണ് സമാന്തരബലങ്ങളായ F_1 ഉം F_2 ഉം പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്നതെങ്കിൽപ്പോലും അവിടങ്ങളിലൊക്കെ മൊമന്റിന്റെ തത്വം പാലിക്കപ്പെടും.

7.8.2. ഗുരുത്വകേന്ദ്രം (Centre of Gravity)

നിങ്ങളിൽ പലയാളുകളും നോട്ടുബുക്കുകൾ ഒരു വിരലിൽ സന്തുലനം ചെയ്ത് നിർത്താൻ ശ്രമിച്ചിട്ടുണ്ടാവും. ചിത്രം 7.24ൽ വളരെ എളുപ്പത്തിൽ ചെയ്യാൻ കഴിയുന്ന അതേപോലുള്ള ഒരു പരീക്ഷണമാണ് വിവരിക്കുന്നത്. പ്രത്യേക ആകൃതിയൊന്നുമില്ലാത്ത ഒരു കാർഡ് ബോർഡ് കഷണവും കൂർത്ത അഗ്രമുള്ള പെൻസിൽപോലുള്ള ഒരു വസ്തുവുമെടുക്കുക. കാർഡ് ബോർഡിനെ പെൻസിൽമുനയിൽ സന്തുലനം ചെയ്തു നിർത്താനൊന്നു ശ്രമിക്കുക. നിർത്താനുള്ള ഒരു ബിന്ദു കാണ്ടെത്താനായേക്കും. പലതവണത്തെ പരിശ്രമത്തിനുശേഷം പെൻസിൽമുനയിൽ കാർഡ്ബോർഡ് തിരശ്ചീനമായി നിർത്താൻ സാധിക്കും.

G എന്ന ഈ ബിന്ദുവാണ് കാർഡ്ബോർഡിന്റെ ഗുരുത്വകേന്ദ്രം (centre of gravity, C.G). കാർഡ്ബോർഡിനെ യാന്ത്രിക സന്തുലനാവസ്ഥയിൽ നിർത്തുന്നതിനാവശ്യമായ എതിർബലം നേരെ മുകളിലേക്കു പ്രയോഗിക്കുകയാണ് ചെയ്യുന്നത്. ചിത്രം 7.24 ൽ കാണിച്ചതുപോലെ പെൻസിൽ മുന Gയിൽ ചെലുത്തുന്ന ബലം കാർഡ് ബോർഡിന്റെ ഭൂഗുരുത്വ ബലത്തിന് അല്ലെങ്കിൽ ഭാരത്തിന് (Mg) തുല്യവും വിപരീതവുമായ ബലമാണ്. അതിനാൽ കാർഡ്ബോർഡ് സ്ഥാനാന്തരസന്തുലനത്തിലാവുന്നു. ഇവിടെ കാർഡ്ബോർഡ് പരിക്രമണ സന്തുലനത്തിലുമാണ്. അങ്ങനെയല്ലായിരുന്നെങ്കിൽ, അസന്തുലിതടോർക്ക്മൂലം കാർഡ്ബോർഡ് നിലതെറ്റി താഴെ വീഴുമായിരുന്നു. കാർഡ്ബോർഡിന്റെ നിർമിതിയിലടങ്ങിയിരിക്കുന്ന ഓരോ കണത്തിന്മേലും ഗുരുത്വാകർഷണം പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്നതിനാൽ (m_1g, m_2g എന്നിങ്ങനെ) കാർഡ്ബോർഡിന്മേൽ അവയുണ്ടാക്കുന്ന ടോർക്കുകളും അനുഭവപ്പെടുന്നുണ്ട്.

കാർഡ്ബോർഡിന്റെ ഗുരുത്വകേന്ദ്രം(CG) സ്ഥിതിചെയ്യുന്നത് ഓരോ കണത്തിന്മേലും പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്ന ഭൂഗുരുത്വ



ചിത്രം 7.24 പെൻസിൽ മുനയിന്മേൽ തിരശ്ചീനനിലയിൽ നിർത്തിയിരിക്കുന്ന കാർഡ് ബോർഡ് കഷണം താങ്ങി നിർത്തുന്ന G എന്ന ബിന്ദുവാണ് കാർഡ് ബോർഡിന്റെ ഗുരുത്വകേന്ദ്രം.

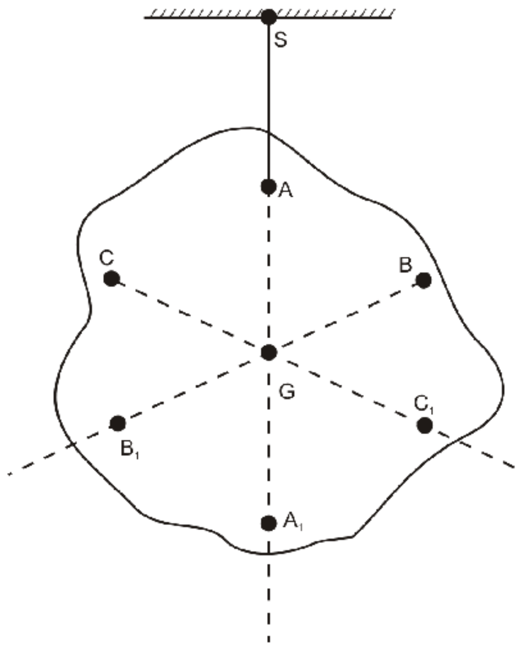
ബലംമൂലം ഉണ്ടാകുന്ന ടോർക്കിന്റെ ആകത്തുക പൂജ്യമാകുന്ന ഒരു സ്ഥാനത്താണ്.

ഒരു വ്യാപ്തിതവസ്തുവിന്റെ (extended body) ഗുരുത്വകേന്ദ്രത്തെ ആധാരമാക്കി (CG) i എന്ന കണികയുടെ സ്ഥാനസദിശം $\mathbf{r}_i$ ആണെങ്കിൽ കണികയിൽമേൽ ഗുരുത്വബലം മൂലമുള്ളതും CG യെ അവലംബിച്ചുള്ളതുമായ ടോർക്ക്, $\tau_i = \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{g}$ എന്നെഴുതാം. ഇവിടെ CG ആധാരമായുള്ള മൊത്തം ഗുരുത്വാകർഷണ ടോർക്ക് പൂജ്യവുമായിരിക്കും; അതായത്:

$$\tau_g = \sum \tau_i = \sum \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{g} = \mathbf{0} \qquad (7.33)$$

അതുകൊണ്ട് ഒരു വസ്തുവിന്മേലുള്ള ആകെ ഗുരുത്വാകർഷണ ടോർക്ക് പൂജ്യമാകുന്ന സ്ഥാനമാണതിന്റെ ഗുരുത്വ കേന്ദ്രമെന്ന് നിർവചിക്കാം. സമവാക്യം (7.33)ൽ ഗുരുത്വത്വരണം **g** എല്ലാ കണികകൾക്കും ഒരു പോലെ ബാധകമാണ്. മാത്രമല്ല **g** യുടെ വില പൂജ്യം അല്ലതാനും. അതിനാൽ **g** യെ ഒരു പൊതുഘടകമായി സങ്കലനത്തിൽ നിന്നും പുറത്തെടുക്കാം. അതുകൊണ്ട് $\sum m_i \mathbf{r}_i = \mathbf{0}$ എന്നെഴുതാം. ഇവിടെ സ്ഥാനസദിശങ്ങൾ ($\mathbf{r}_i$) CG യെ ആധാരമാക്കിയാണെടുത്തിട്ടുള്ളത്. നേരത്തെ നാം കണ്ട വിഭാഗം 7.2 ലെ സമവാക്യം (7.4 a) അടിസ്ഥാനമാക്കി ആലോചിച്ചാൽ, സങ്കലന ഫലം പൂജ്യമായാൽ മൂലബിന്ദു തന്നെയായിരിക്കും വസ്തുവിന്റെ ദ്രവ്യമാന കേന്ദ്രമെന്ന് മനസിലാക്കാം. ഗുരുത്വബലം ഏകസമാനമായിട്ടുള്ളിടത്തും, ഗുരുത്വാകർഷണമില്ലാത്തിടത്തും ഗുരുത്വകേന്ദ്രവും, ദ്രവ്യമാന കേന്ദ്രവും ഒരേ ബിന്ദു ആകുന്നു. വസ്തു ചെറുതാണെങ്കിൽ **g** വസ്തുവിന്റെ വിവിധ ഭാഗങ്ങളിലൊരുപോലെ അനുഭവപ്പെടും.

എന്നാൽ വസ്തു വിസ്തൃതമായി വരുന്തോറും വസ്തുവിന്റെ ഓരോ ഭാഗങ്ങളിലും "g" യുടെ മൂല്യത്തിൽ മാറ്റമുണ്ടാകുന്നു. അപ്പോൾ ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രവും ഗുരുത്വകേന്ദ്രവും ഒന്നാകണമെന്നില്ല. അടിസ്ഥാനപരമായി ഇവ രണ്ടും രണ്ട് സങ്കൽപങ്ങളാണ്. ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രം, വസ്തുവിന്റെ ദ്രവ്യവിതരണത്തെ മാത്രം ആശയിച്ചിരിക്കുന്നു. അതിന് ഗുരുത്വവുമായി ബന്ധമില്ല.



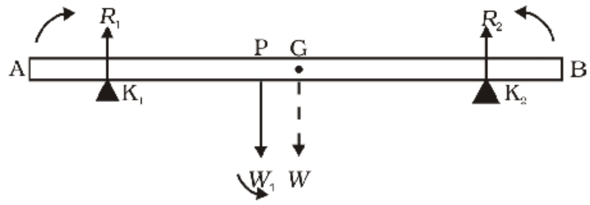
ചിത്രം.7.25 നിശ്ചിത ആകൃതി ഇല്ലാത്ത ഒരു വസ്തുവിന്റെ ഗുരുത്വകേന്ദ്രനിർണയം വസ്തുവിനെ താങ്ങിനിർത്തിയിരിക്കുന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ വരക്കുന്ന ലംബരേഖ AA_1 ആണെന്ന് കാണാം.

വിഭാഗം 7.2 ൽ ക്രമരൂപത്തിലുള്ളതും ഏകതാനവുമായ നിരവധി വസ്തുക്കളുടെ ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രങ്ങളുടെ സ്ഥാനങ്ങൾ കണ്ടെത്തുന്നതിനെപ്പറ്റി മനസ്സിലാക്കിക്കഴിഞ്ഞു. വസ്തുക്കൾ ചെറുതാണെങ്കിൽ മാത്രം അവിടെ ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രം കണ്ടെത്താൻ ഉപയോഗിച്ച രീതികളിലൂടെ അവയുടെ ഗുരുത്വകേന്ദ്രം കണ്ടെത്താം.

(ചിത്രം 7.25) ആകൃതിരഹിത വസ്തുവായ കാർഡ്ബോർഡിന്റെ ഗുരുത്വകേന്ദ്രം (CG) കണ്ടെത്താനുള്ള മറ്റൊരു വഴിയാണ് കാണിച്ചിരിക്കുന്നത്. കാർഡ്ബോർഡ് ബിന്ദു A യിൽ കെട്ടിയിരിക്കുന്ന ചരട് ഉപയോഗിച്ച് തൂക്കിയിടുക. A യിൽ നിന്നുള്ള ലംബരേഖ കടന്നുപോകുന്നത് ഗുരുത്വകേന്ദ്രത്തിലൂടെയായിരിക്കും. രേഖ AA_1 കാർഡ്ബോർഡ് പ്രതലത്തിൽ രേഖപ്പെടുത്തുക. ഇതേപോലെ B,C എന്നീ സ്ഥാനങ്ങളിലും വസ്തു തൂക്കിയിട്ട് ലംബരേഖകൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക. എല്ലാ രേഖകളും സന്ധിക്കുന്ന സ്ഥാനത്തായിരിക്കും ആ വസ്തുവിന്റെ ഗുരുത്വകേന്ദ്രം (CG). ഈ രീതിയെന്തുകൊണ്ട് ഗുരുത്വകേന്ദ്രം തരുന്നുവെന്നു വിശദീകരിക്കുവാൻ ശ്രമിക്കുക. വസ്തു ചെറുതായതിനാൽ അതിന്റെ ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രം കൂടി ഈ രീതിയിൽ കണ്ടെത്താനാവും.

ഉദാഹരണം 7.8 : 4 കിലോഗ്രാം മാസും 70 സെ.മീ. നീളവുമുള്ള ഒരു ലോഹദണ്ഡിനെ രണ്ടറ്റത്തു നിന്നും 10 സെ.മീ. വീതം അകലെയുള്ള വായ്ത്തലകളിൽ (knife edge) വച്ചിരിക്കുന്നു. ഒരു അഗ്രത്തു നിന്നു 30 സെ.മീ. ദൂരത്ത് ദണ്ഡിൽ 6 കി.ഗ്രാം ഭാരം തൂക്കിയിടുന്നു. വായ്ത്തലകളിൽ മുകളിലേക്കുള്ള ബലം കണ്ടെത്തുക. (ദണ്ഡിന്റെ പരിച്ഛേദം ഏകതാനവും (uniform) ഏകജാതീയവു (homogeneous) മാണ്.

ഉത്തരം:



ചിത്രം.7.26

ചിത്രത്തിന്റെ ABഎന്ന ദണ്ഡും K_1, K_2 എന്ന വായ്ത്തലയും (knife edge) കാണിച്ചിട്ടുണ്ട്. ദണ്ഡിന്റെ ഗുരുത്വകേന്ദ്രം G യിലും തൂക്കിയിട്ടിരിക്കുന്ന ഭാരം P യിലുമാണ്. ദണ്ഡിന്റെ ഭാരം W പ്രവർത്തിക്കുന്നത് അതിന്റെ ഗുരുത്വകേന്ദ്രം G യിൽ കൂടിയാണ്. ദണ്ഡിന്റെ പരിച്ഛേദം ഏകസമാനവും ഏകജാതീയവുമായതിനാൽ, ഗുരുത്വകേന്ദ്രം G അതിന്റെ മധ്യഭാഗത്തു തന്നെയായിരിക്കും. AB=70 സെ.മീ, AG = 35 സെ.മീ, AP=30 സെ.മീ. PG=5 സെ.മീ, AK_1=BK_2= 10 സെ.മീ, K_1G=K_2G = 25 സെ.മീ. ഇനി ദണ്ഡിന്റെ ഭാരം W=4 കി.ഗ്രാം, തൂക്കിയിട്ടിരിക്കുന്ന ഭാരം W_1= 6 കി.ഗ്രാം R_1,R_2 എന്നിവ വായ്ത്തല ഭാഗത്തിന്റെ മുകളിലേക്കുള്ള എതിർ ബലത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

ദണ്ഡിന്റെ സ്ഥാനാന്തരസന്തുലനത്തിനായി

$R_1 + R_2 \quad W_1 \quad W = 0$ എന്നെഴുതാം (i)

W_1, W എന്നിവ ലംബനിലയിൽ താഴേക്കു പ്രയോഗിക്കുമ്പോൾ R_1, R_2 എന്നിവ ലംബനിലയിൽ മുകളിലേക്കാണ് പ്രയോഗിക്കുന്നത്.

പരിക്രമണസന്തുലനം പരിഗണിക്കുമ്പോൾ, ബല മൊമെന്റുകളാണ് (moment of the force) കണക്കിലെടുക്കേണ്ടത്. ഇതു കണക്കാക്കുവാൻ സൗകര്യപ്രദമായ ഒരു സ്ഥാനം, G ആണ്. R_2 വിന്റെയും W_1 ന്റെയും മൊമെന്റുകൾ അപ്രദക്ഷിണദിശയിലാണ് (+ve), എന്നാൽ R_1ന്റെ മൊമന്റ് പ്രദക്ഷിണദിശയിലുമാണ് (-ve).

പരിക്രമണസന്തുലനത്തിനായി താഴെ കാണിച്ചതുപോലെ എഴുതാവുന്നത്:

$$R_1\,(K_1G) + W_1\,(PG) + R_2\,(K_2G) = 0 \qquad \text{(ii)}$$

W =4.00 gN എന്നു തന്നിട്ടുണ്ട്; W_1=6.00 gN എന്നും തന്നിരിക്കുന്നു. ഇതിൽ **g** ഗുരുത്വത്വരണമാണ്, അത് 9.8 മീ/(സെക്കന്റ്)^2 എന്നെടുക്കാം. (i) ൽ മൂല്യങ്ങളുടെ സംഖ്യ ചേർത്താൽ

$$R_1 + R_2 - 4.00g - 6.00g = 0$$

$$\text{or} \quad R_1 + R_2 = 10.00g \ \text{N} \qquad \text{(iii)}$$

$$= 98.00 \text{ N}$$

(ii) ൽ നിന്ന് , $-0.25\,R_1 + 0.05\,W_1 + 0.25\,R_2 = 0$

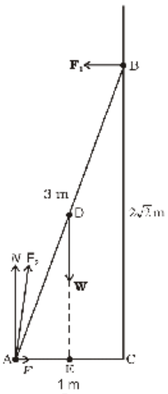
അല്ലെങ്കിൽ $R_1 - R_2 = 1.2g \ \text{N} = 11.76 \text{ N}$ (iv)

(iii), (iv) ൽ നിന്നും $R_1 = 54.88$ N, $R_2 = 43.12$N

ഇതിൽനിന്നു ലഭിക്കുന്നത് K_1ൽ 55 N ഉം K_2വിൽ 43 N എന്നിങ്ങനെയാണ്.

ഉദാഹരണം 7.9: 3 മീറ്റർ നീളവും 20 കി.ഗ്രാം ഭാരവുമുള്ള ഒരു ഏണി ഘർഷണരഹിതമായ ഒരു ചുമരിൽ ചാരിവക്കുന്നു. അതിന്റെ അടിഭാഗം തറയിലിരിക്കുന്നത് ചുമരിൽനിന്ന് ഒരു മീറ്റർ അകലെയാണ്. ചുവരിന്റെയും തറയുടെയും പ്രതിപ്രവർത്തന ബലം കണക്കാക്കുക.

ഉത്തരം:



ചിത്രം 7.27

ഏണി 3 മീറ്റർ നീളമുള്ളതാണ്. അതിന്റെ തറയിൽ തൊടുന്ന ഭാഗം ചുമരിൽനിന്ന് 1 മീറ്റർ അകലെയാണ്. പൈഥഗോറസ് സിദ്ധാന്തപ്രകാരം BC = 2√2. ഏണിയിന്മേലുള്ള ബലം W അതിന്റെ ഗുരുത്വകേന്ദ്രം D യിൽ പ്രവർത്തിക്കുന്നു. പ്രതിപ്രവർത്തന ബലങ്ങളായ F_1,F_2 എന്നിവ യഥാക്രമം ചുമരിലും തറയിലുമാണ് പ്രവർത്തിക്കുന്നത്. ചുമർ ഘർഷണരഹിതമായതിനാൽ , F_1 ബലം ചുമരിന് ലംബമാണ്. F_2 ബലത്തെ രണ്ടു ഘടകങ്ങളായി തിരിക്കാം. സ്വാഭാവികപ്രതിപ്രവർത്തന ബലം N ഉം ഘർഷണബലം F ഉം. F എന്ന ബലം ഏണി ചുമരിൽനിന്ന് അകലുന്നതിനെ ചെറുക്കുന്നു അതുകൊണ്ട് അത് പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്നത് ചുമരിലേക്കുള്ള ദിശയിലാണ്.

സന്തുലനത്തിനായി ലംബദിശയിലുള്ള ബലങ്ങൾ എടുത്താൽ

$$N - W = 0 \qquad \text{(i)}$$

തിരശ്ചീനദിശയിലുള്ള ബലങ്ങൾ എടുത്താൽ,

$$F - F_1 = 0 \qquad \text{(ii)}$$

പരിക്രമണസന്തുലനത്തിനായി 'A' യെ അവലംബിച്ചുള്ള ബലങ്ങളുടെ മൊമെന്റുകളെടുത്താൽ ലഭിക്കുന്നത്

$$2\sqrt{2}\,F_1 - (1/2)\,W = 0 \qquad \text{(iii)}$$

ഇനി, $W = 20 \text{ kg} = 20 \times 9.8 \text{ N} = 196.0 \text{ N}$

(i) ൽ നിന്ന് $N = 196.0\ N$

(iii) ൽ നിന്ന് ലഭിക്കുന്നത്

$$F_1 = W/4\sqrt{2} = 196.0/\,4\sqrt{2} = 34.6 \text{ N}$$

(ii) ൽ നിന്നു ലഭിക്കുന്നത് $F = F_1 = 34.6$ N

$$F_2 = \sqrt{F^2 + N^2} = 199.0 \text{ N}$$

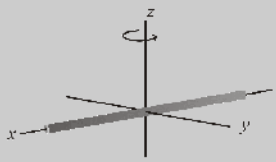
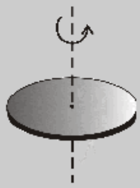
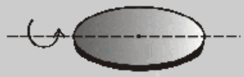
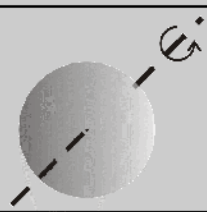
F_2 ബലം തിരശ്ചീന തലവുമായി α എന്ന കോൺ ഉണ്ടാക്കുന്നു.

$$\tan\alpha = N/F = 4\sqrt{2}\,, \quad \alpha = \tan^{-1}(4\sqrt{2}) \approx 80^\circ$$ ◀

7.9 മൊമന്റ് ഓഫ് ഇനർഷ്യ (Moment of Intertia)

നമുക്ക് പരിചിതമായ സ്ഥാനാന്തര ചലനത്തിനൊപ്പം പരിക്രമണചലനം കൂടിയാണ് നാം ചർച്ച ചെയ്യുന്നത്. ഈ പാഠത്തിൽ ഇനിയും ഒരു പ്രധാനപ്പെട്ട ചോദ്യത്തിന് ഉത്തരം കണ്ടെത്തേണ്ടതായിട്ടുണ്ട്. ***പരിക്രമണചലനത്തിൽ മാസിന്റെ (mass) സദൃശം (analogue) എന്താണ്?*** ഈ വിഭാഗത്തിൽ ഇതിനുള്ള ഉത്തരം കണ്ടെത്താനുള്ള ശ്രമമാണ് നടത്തുന്നത്. അതിലേക്കുള്ള ചർച്ചകൾ ലഘൂകരിക്കുന്നതിനായി ഉറപ്പിച്ച അല്ലെങ്കിൽ നിശ്ചല അക്ഷത്തെ ആധാരമാക്കിയുള്ള പരിക്രമണ ചലനങ്ങൾ മാത്രമേ ഇവിടെ പരിഗണിക്കുന്നുള്ളൂ. പരിക്രമണത്തിലുള്ള ഒരു വസ്തുവിന്റെ ഗതികോർജം സംബന്ധിച്ച ഒരു സമവാക്യം ഉണ്ടാക്കാൻ ശ്രമിച്ചു നോക്കാം. നമുക്കറിയാവുന്നതുപോലെ ഒരു നിശ്ചല അക്ഷത്തെ ആധാരമാക്കിയുള്ള ഒരു വസ്തുവിന്റെ പരിക്രമണത്തിൽ, ആ വസ്തുവിലെ ഓരോ കണികയും വൃത്താകാരത്തിൽ അക്ഷത്തിനു ചുറ്റുമായി, സമവാക്യം (7.19) പ്രകാരം ഉള്ള ഒരു രേഖീയ പ്രവേഗത്തോടെ സഞ്ചരിക്കുന്നു (ചിത്രം 7.10 നോക്കുക). അക്ഷത്തിൽ നിന്ന് ഒരു നിശ്ചിത അകലത്തിലുള്ള കണികയെ സംബന്ധിച്ച്, രേഖീയ പ്രവേഗം $v_i = r_i\omega$. എന്നാണ്. അപ്പോൾ ആ കണികയുടെ ഗതികോർജം

പട്ടിക–7.1 നിശ്ചിത അക്ഷത്തെ ആധാരമാക്കിയുള്ള ക്രമരൂപങ്ങളുടെ മൊമന്റ് ഓഫ് ഇനർഷ്യ

	വസ്തു	അക്ഷം	ചിത്രം	I
(1)	R ആരമുള്ള കനം കുറഞ്ഞ വൃത്തവളയം	വൃത്തകേന്ദ്രത്തിലൂടെ കടന്നു പോകുന്നതും തലത്തിനു ലംബമായിട്ടുള്ളതും		MR^2
(2)	R ആരമുള്ള കനം കുറഞ്ഞ വൃത്തവളയം	വ്യാസരേഖ		$MR^2/2$
(3)	L നീളമുള്ള വണ്ണം കുറഞ്ഞ ദണ്ഡ്	മധ്യബിന്ദുവിലൂടെ ദണ്ഡിന്റെ നീളത്തിന് ലംബമായി		$M\ L^2/12$
(4)	R ആരമുള്ള വൃത്തതകിട്	തകിടിനു ലംബമായി കേന്ദ്രത്തിലൂടെ കടന്നു പോകുന്നത്		$MR^2/2$
(5)	R ആരമുള്ള വൃത്തതകിട്	വ്യാസരേഖ		$MR^2/4$
(6)	R ആരമുള്ള പൊള്ളയായ സിലിണ്ടർ	സിലിണ്ടറിന്റെ അക്ഷരേഖ		MR^2
(7)	R ആരമുള്ള സിലിണ്ടർ	സിലിണ്ടറിന്റെ അക്ഷം		$MR^2/2$
(8)	R ആരമുള്ള ഗോളം	വ്യാസരേഖ		$2MR^2/5$

$$k_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2$$ എന്നാണ്.

ഇതിൽ m_i എന്നത് കണികയുടെ മാസാണ്. വസ്തുവിന്റെ ആകെ ഗതികോർജം K, ഓരോ കണികയുടെയും ഗതികോർജങ്ങളുടെ ആകെത്തുകയാണ്.

$$K = \sum_{i=1}^{n} k_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (m_i r_i^2 \omega^2)$$

ഇതിൽ 'n' എന്നത് ആകെ കണങ്ങളുടെ എണ്ണമാണ്. കോണീയപ്രവേഗം ω എല്ലാ കണങ്ങളെ സംബന്ധിച്ചും ഒരുപോലെയാണ്. അതുകൊണ്ട് സമവാക്യത്തിൽ നിന്ന് ω യെ പൊതുവായി കണക്കാക്കി സങ്കലനത്തിനു

പുറത്തേക്കു കൊണ്ടുവന്നാൽ

$$K = \frac{1}{2}\omega^2 (\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2)$$

ഒരു ദൃഢവസ്തുവിന്റെ പരിക്രമണ സ്വഭാവത്തെ വ്യക്തമാക്കാനുതകുന്ന ***മൊമന്റ് ഓഫ് ഇനർഷ്യ*** **(moment of inertia)** എന്ന പുതിയ അളവിനെ (parameter) ഇവിടെ നിർവചിക്കാനാകും. അത് താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നതു പോലെ എഴുതാം.

$$I = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 \qquad (7.34)$$

ഈ നിർവചനം മുകളിലത്തെ സമവാക്യത്തിലേക്കു കൊണ്ടുവരുമ്പോൾ

$$K = \frac{1}{2} I\omega^2 \qquad (7.35)$$

ഇവിടെ ശ്രദ്ധിക്കാനുള്ളത് I എന്ന ഭൗതിക പരിമാണം കോണീയപ്രവേഗത്തിന്റെ പരിമാണത്തിൽ നിന്നു സ്വതന്ത്രമാണെന്നാണ്. പരിക്രമണം ചെയ്യുന്ന ദൃഢവസ്തുവിനെയും പരിക്രമണഅക്ഷത്തിനെയുമാണിത് ആശ്രയിച്ചിരിക്കുന്നത്.

ഒരു പരിക്രമണവസ്തുവിന്റെ ഗതികോർജത്തിനുള്ള സമവാക്യം (7.35) ഉം രേഖീയചലനത്തിനുള്ള (സ്ഥാനാന്തരം) ഒരു വസ്തുവിന്റെ ഗതികോർജവുമായി താരതമ്യം ചെയ്യാവുന്നതാണ്. രേഖീയ ചലനത്തിൽ

$$K = \frac{1}{2} m\, v^2$$

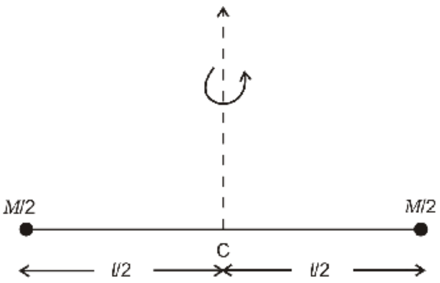
ഇവിടെ 'm' വസ്തുവിന്റെ മാസും (*mass*), **'v'** അതിന്റെ പ്രവേഗവുമാണ്. കോണീയപ്രവേഗം ω *യും (ഒരു നിശ്ചല അക്ഷത്തെ ആധാരമാക്കിയുള്ള പരിക്രമണ ചലനം)* രേഖീയപ്രവേഗം 'v' യും തമ്മിലുള്ള സാദൃശ്യം നമ്മൾ നേരത്തേ കണ്ടിട്ടുള്ളതാണ്. അതിനാൽ, മൊമന്റ് ഓഫ് ഇനർഷ്യ I എന്നത് മാസിന്റെ പരിക്രമണ സദൃശം ആയി പരിഗണിക്കുന്നു. മൊമന്റ് ഓഫ് ഇനർഷ്യയുടെ (*moment of inertia*) പങ്ക് രേഖീയചലനത്തിൽ മാസിന്റേതു തന്നെയാണ്.

ഇനി സമവാക്യം (7.34) ന്റെ നിർവചന പ്രകാരം, മൊമന്റ് ഓഫ് ഇനർഷ്യ കണക്കാക്കാൻ രണ്ടു ലഘു മാർഗങ്ങൾ നോക്കാം.

(a) ആരം R ഉം മാസ് M ഉം ഉള്ള ഒരു നേരിയ വൃത്തവളയം പരിഗണിക്കുക. അത് കോണീയപ്രവേഗം ω യോടുകൂടി അതിന്റെ തലത്തിലൂടെ അതിന്റെ കേന്ദ്രത്തിനു ചുറ്റുമായി പരിക്രമണം ചെയ്യുന്നത് പരിഗണിക്കുക. വളയത്തിന്റെ ഓരോ മാസ് ശകലവും അക്ഷത്തിൽനിന്ന് R അകലത്തിലാണ്. അവ Rω വേഗത്തിലാണ് ചലിക്കുന്നത്. അതുകൊണ്ട് ഗതികോർജം

$$K = \frac{1}{2} M v^2 = \frac{1}{2} M R^2 \omega^2$$

സമവാക്യം (7.35) ഉമായി താരതമ്യം ചെയ്താൽ വളയത്തിന്റെ മൊമന്റ് ഓഫ് ഇനർഷ്യ $I = MR^2$ എന്നാണ് ലഭിക്കുക.



ചിത്രം 7.28 കനം കുറഞ്ഞ 1 മീറ്റർ നീളമുള്ള ഒരു ദണ്ഡ് ഇരു അഗ്രങ്ങളിലും ഓരോ മാസ്സുമായി ഘടിപ്പിച്ച മാസുകളുമായി ദ്രവ്യകേന്ദ്രത്തിലൂടെയുള്ള അക്ഷത്തെ ആധാരമാക്കി പരിക്രമണത്തിലാണ്. നിശ്ചല അക്ഷം ദണ്ഡിന് ലംബമാണ്. വ്യവസ്ഥയുടെ മൊത്തം പിണ്ഡം M ആണ്.

(b) ഇനി, ദൃഢവും മാസ് തീരെ പരിമിതമായതും 1 മീറ്റർ നീളമുള്ളതും ഇരുഭാഗത്തും ചെറിയ മാസുകളോടു കൂടിയതുമായ ഒരു ദണ്ഡ് പരിഗണിക്കുക. ഈ ദണ്ഡ് ദ്രവ്യകേന്ദ്രത്തിലൂടെയുള്ള അക്ഷത്തെ ആധാരമാക്കി പരിക്രമണം ചെയ്യുന്നു. അക്ഷം ദണ്ഡിന് ലംബമാണ് (ചിത്രം 7.28). ഓരോ മാസും (M/2) അക്ഷത്തിൽ നിന്ന് l/2 ദൂരത്തിലാണ്. അതിനാൽ, പിണ്ഡങ്ങളുടെ മൊമന്റ് ഓഫ് ഇനർഷ്യ

$$I = \frac{M}{2}\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + \frac{M}{2}\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = I = Ml^2/4$$ ആണ്.

പട്ടിക 7.1 ൽ നമുക്കു പരിചിതമായ ചില രൂപങ്ങളുടെ മൊമന്റ് ഓഫ് ഇനർഷ്യ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു. വസ്തുക്കളെല്ലാം ക്രമമായ ആകാരമുള്ളതും വ്യക്തമായ അക്ഷമുള്ളവയുമാണ്.

ഒരു വസ്തുവിന്റെ മാസ് അതിന്റെ രേഖീയ ചലനാവസ്ഥയിലെ മാറ്റത്തെ ചെറുക്കുന്നതിനാൽ അത് ആ വസ്തുവിന്റെ രേഖീയചലന ജഡത്വത്തിന്റെ അളവിനെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു. അതേപോലെ, മൊമന്റ് ഓഫ് ഇനർഷ്യ ഒരു നിശ്ചിത അക്ഷത്തെ ആധാരമാക്കിയുള്ള ഒരു പരിക്രമണ ചലനാവസ്ഥയിലെ മാറ്റത്തെ ചെറുക്കുന്നു. അതിനാൽ ഇത് വസ്തുവിന്റെ പരിക്രമണജഡത്വത്തിന്റെ അളവാണ്. വസ്തുവിന്റെ വിവിധ ഭാഗങ്ങൾ അക്ഷത്തിൽ നിന്ന് വ്യത്യസ്ത അകലങ്ങളിൽ എങ്ങനെ വിതരണം ചെയ്തിരിക്കുന്നുവെന്നതിനെ ആസ്പദമാക്കിയാണ് ഇതിന്റെ വില തിട്ടപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്നത്. ഒരു വസ്തുവിന്റെ മാസിൽ നിന്ന് വ്യത്യസ്തമായി, മൊമന്റ് ഓഫ് ഇനർഷ്യ ഒരു സ്ഥിര അളവല്ല, മറിച്ച് അക്ഷത്തെയാധാരമാക്കി വസ്തുവിന്റെ മാസ് എങ്ങനെ വിതരണം ചെയ്തിരിക്കുന്നുവെന്നതിനേയും അക്ഷത്തിന്റെ ചരിവിനേയും സ്ഥാനത്തേയും

ആശ്രയിച്ചിരിക്കുന്ന ഒരളവാണ്. ഒരു ദൃഢവസ്തുവിന്റെ പരിക്രമണ അക്ഷത്തെ ആധാരമാക്കി അതിന്റെ മാസ് എങ്ങനെ വിതരണം ചെയ്യപ്പെട്ടുവെന്നത് അളക്കുന്നതിനായി നമുക്ക് ഒരു പുതിയ ഭൗതിക അളവിനെ ഇവിടെ നിർവചിക്കുന്നത് ഉചിതമായിരിക്കും. ഇത് **ആരമിക ഭ്രമണം** (radius of gyration) എന്നറിയപ്പെടുന്നു. അത് മൊമന്റ് ഓഫ് ഇനർഷ്യയുമായും വസ്തുവിന്റെ മൊത്തം മാസുമായും ബന്ധപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു.

പട്ടിക 7.1 ൽ നോക്കിയാൽ അതിലെ എല്ലാ മാതൃകകളിലും $I = Mk^2$ എന്ന് എഴുതാവുന്നതായി ബോധ്യപ്പെടും. ഇവിടെ k ക്ക് നീളത്തിന്റെ ഡൈമെൻഷനാണുള്ളത്. ഒരു ദണ്ഡിനെ സംബന്ധിച്ച് (ഏകമാനം) അതിന്റെ മധ്യബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന ലംബരേഖ പരിക്രമണ A £ ansb Sq þ¶ Xnb nÂ k^2 $L^2/12$, അതായത് k $L/\sqrt{12}$. അതേപോലെ വൃത്താകാര തകിടിനെ സംബന്ധിച്ച് k $R/2$, അതിന്റെ വ്യാസം ആധാരമായിട്ടുള്ളതാണ്. k എന്ന നീളം വസ്തുവിന്റെ ജ്യാമിതീയ സവിശേഷതകളേയും അതിന്റെ പരിക്രമണാക്ഷത്തിന്റെ പ്രത്യേകതയേയും ഉൾക്കൊള്ളുന്നു. ഇതിനെ, **ആരമികഭ്രമണം** *(Radius of gyration)* എന്നുപറയുന്നു. **ഒരു വസ്തുവിന്റെ അക്ഷത്തിനെ ആധാരമാക്കിയുള്ള ആരമിക ഭ്രമണം** *(Radius of gyration)* **നിർവ്വചിക്കപ്പെടുന്നത് വസ്തുവിന്റെ ആകെ മാസിന് തുല്യമായ മാസുള്ളതും വസ്തുവിനുള്ള അക്ഷത്തിന് ആധാരമായി മൊമന്റ് ഓഫ് ഇനർഷ്യയ്ക്ക് തുല്യമായ മൊമന്റ് ഓഫ് ഇനർഷ്യ ഉള്ളതുമായ ഒരു വസ്തുവിന്റെ അക്ഷത്തിൽ നിന്നുമുള്ള അകലമെന്നാണ്.** അതിനാൽ, ഒരു ദൃഢ വസ്തുവിന്റെ മൊമന്റ് ഓഫ് ഇനർഷ്യ വസ്തുവിന്റെ മാസ്, ആകൃതി, അതിന്റെ വലുപ്പം, പരിക്രമണാക്ഷത്തെ അവലംബിച്ചുള്ള മാസിന്റെ വിതരണത്തെയും, പരിക്രമണാക്ഷത്തിന്റെ സ്ഥാനം, ചരിവ് എന്നിവയൊക്കെയും ആശ്രയിച്ചിരിക്കുന്നു.

സമവാക്യം (7.34) പ്രകാരമുള്ള നിർവ്വചനത്തിൽ നിന്നും മൊമന്റ് ഓഫ് ഇനർഷ്യയുടെ ഡൈമെൻഷൻ ML^2 ഉം അതിന്റെ SI യൂണിറ്റ് kgm^2 ആണ്.

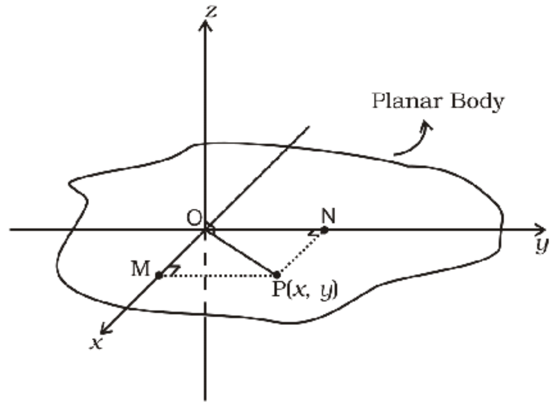
ഒരു വസ്തുവിന്റെ പരിക്രമണജഡത്വത്തിന്റെ അളവായ I എന്നത് അത്യന്തം പ്രാധാന്യമർഹിക്കുന്നതും അധികം പ്രായോഗിക പ്രാധാന്യമുള്ളതുമായ ഒരു പരിമാണമാണ്. യന്ത്രങ്ങൾ, പ്രധാനമായും ആവിയന്ത്രം, മോട്ടോർവാഹനയന്ത്രങ്ങൾ മുതലായവയിൽ പരിക്രമണ ചലനമുണ്ടാക്കുന്നത് ഉയർന്ന മൊമന്റ് ഓഫ് ഇനർഷ്യയുള്ള വൃത്താകാര ഡിസ്കുകളാണ്. ഇതാണ് ചാലകചക്രം (Flywheel) എന്നറിയപ്പെടുന്നത്. അതിന്റെ ഉയർന്ന മൊമന്റ് ഓഫ് ഇനർഷ്യ മൂലം, ചാലകചക്രം വാഹനത്തിന്റെ പെട്ടെന്നുള്ള വേഗവർധനവിനേയും വേഗശോഷണത്തേയും ഒരുപോലെ ചെറുക്കുന്നു. അത് സാവധാനത്തിൽ മാത്രമേ വേഗവ്യത്യാസത്തിനു വഴങ്ങുകയുള്ളൂ പെട്ടെന്നുള്ള വേഗച്ചാട്ടത്തെ അനുവദിക്കുന്നില്ല. അതുകൊണ്ട് സുഖകരമായ പ്രവർത്തനങ്ങൾക്കും യാത്രക്കും ഇത് സഹായിക്കും.

7.10 ലംബവും സമാന്തരവുമായ അക്ഷ സിദ്ധാന്തങ്ങൾ (Theorems of Perpendicular and Parallel axes)

ഈ രണ്ടു തത്വങ്ങളും മൊമന്റ് ഓഫ് ഇനർഷ്യയുമായി ബന്ധപ്പെട്ടവയാണ്. ആദ്യമായി ലംബാക്ഷങ്ങളുടെ സിദ്ധാന്തത്തെക്കുറിച്ചും അതുപയോഗിച്ച് ലഘുവും ഏതാനും ക്രമരൂപങ്ങളുടെ മൊമന്റ് ഓഫ് ഇനർഷ്യ കണ്ടെത്തുവാനുള്ള ലഘുമാർഗങ്ങളെക്കുറിച്ചു പഠിക്കാം.

ലംബ അക്ഷ സിദ്ധാന്തം (Theorem of Perpendicular Axes)

ഈ തത്വം പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്നത് പൊതുവേ പരന്ന (planar body-lamina) വസ്തുക്കളിലാണ്. മറ്റൊരു വിധത്തിൽ പറഞ്ഞാൽ, വളരെ കനംകുറഞ്ഞ, നിരപ്പായ വസ്തുക്കളിൽ പ്രയോഗിക്കാവുന്നതാണ് ഈ തത്വം. വസ്തുക്കളുടെ മറ്റ് അളവുകളേക്കാൾ തീരെ കുറഞ്ഞതാണ് ഇതിന്റെ കനം. (നീളം, വീതി, ആരം എന്നീവയെ അപേക്ഷിച്ച് ചെറുതായിരിക്കും). ചിത്രം 7.29 ഈ തത്വം വിശദീകരിക്കുന്നു.



ചിത്രം 7.29 ലംബാക്ഷതത്വം ഒരു പരന്ന വസ്തുവിൽ പ്രായോഗികമാക്കുന്നു. X,Y എന്നീ അക്ഷങ്ങൾ പ്രതലത്തിൽ പരസ്പരം ലംബമായവയും Z-അക്ഷം പ്രതലത്തിനും മറ്റു രണ്ട് അക്ഷങ്ങൾക്കും ലംബമായതുമാണ്.

ഒരു പരന്ന വസ്തുവിന്റെ തലത്തിനു ലംബമായ അക്ഷത്തിനെ ആധാരമാക്കിയുള്ള മൊമന്റ് ഓഫ് ഇനർഷ്യ ആ അക്ഷം പ്രതലത്തിലൂടെ കടന്നു പോകുന്ന ബിന്ദുവിൽ സംഗമിക്കുന്നതും, പ്രതലത്തിലടങ്ങിയതും പരസ്പരം ലംബമായതുമായ രണ്ട് അക്ഷങ്ങളെ ആധാരമാക്കിയുള്ള മൊമെന്റ് ഓഫ് ഇനർഷ്യയുടെ തുകയായിരിക്കും.

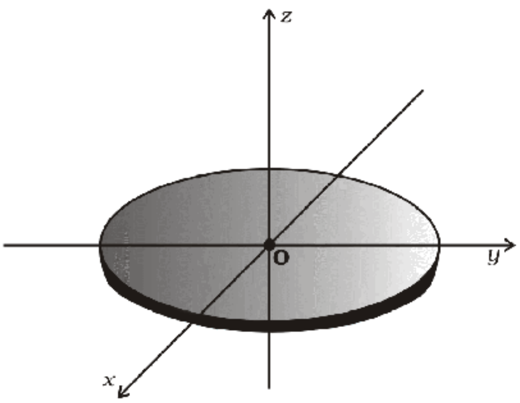
ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നത് ഒരു നിരപ്പായ വസ്തുവാണ്. O എന്ന ബിന്ദുവിൽ കൂടി പ്രതലത്തിനു ലംബമായുള്ള അക്ഷമാണ് Z-അക്ഷം. പ്രതലത്തിലുള്ള പരസ്പരം ലംബമായ മറ്റ് രണ്ട് അക്ഷങ്ങൾ X,Y എന്നിവ O യിലൂടെ കടന്നുപോകുന്നു. അതായത് മൂന്നു അക്ഷങ്ങ

ളും O എന്ന ബിന്ദുവിൽ സ്പർശിക്കുന്നു. ലംബാക്ഷ തത്ത്വമനുസരിച്ച്

$$I_z = I_x + I_y \quad (7.36)$$

ഒരു ഉദാഹരണത്തിലൂടെ ഈ തത്വത്തിന്റെ പ്രയോജന ത്തെക്കുറിച്ച് മനസ്സിലാക്കാം

ഉദാഹരണം 7.10: ഒരു വൃത്തതകിടിന്റെ ഏതെങ്കിലുമൊരു വ്യാസരേഖയെ ആധാരമാക്കി തകിടിന്റെ മൊമന്റ് ഓഫ് ഇനർഷ്യ എന്താണെന്ന് കാണുക.



ചിത്രം 7.30: ഒരു തകിടിന്റെ വ്യാസത്തെ ആധാരമാക്കിയുള്ള മൊമന്റ് ഓഫ് ഇനർഷ്യ അതിന്റെ മധ്യത്തിൽ കൂടിയുള്ള ലംബാക്ഷത്തെ ആധാരമാക്കിയുള്ള **M.I (moment of interia)** പ്രകാരമുള്ളത്

ഉത്തരം: വൃത്തത്തകിടിന്റെ കേന്ദ്രത്തിലൂടെ അതിന്റെ പ്രതലത്തിനു ലംബമായി കടന്നുപോകുന്ന അക്ഷത്തെ ആധാരമാക്കിയുള്ള മൊമന്റ് ഓഫ് ഇനർഷ്യ $MR^2/2$ എന്നെടുക്കാം. ഇതിൽ M തകിടിന്റെ മാസും R അതിന്റെ ആരവുമാണ് (പട്ടിക 7.1). തകിടിനെ ഒരു പരന്നവസ്തുവായി കണക്കാക്കാം. അതിനാൽ ലംബാക്ഷങ്ങളുടെ തത്വം ഇവിടെ പ്രയോഗിക്കാനാകും. ചിത്രം 7.30 ൽ കാണിച്ചതുപോലെ, തകിടിന്റെ കേന്ദ്രം O, X, Y, Z എന്നീ മൂന്ന് അക്ഷങ്ങളുടെ മൂലബിന്ദുവായി എടുക്കുക. ഇതിൽ X,Y എന്നീ അക്ഷരേഖകൾ തകിടിന്റെ പ്രതലത്തിലും Z-അക്ഷം തകിടിന്റെ പ്രതലത്തിനു ലംബവുമാണ്. ലംബാക്ഷങ്ങളുടെ തത്വപ്രകാരം.

$$I_z = I_x + I_y$$

ഇനി, X,Y എന്നീ അക്ഷങ്ങൾ യഥാർഥ തകിടിന്റെ രണ്ട് വ്യാസരേഖകൾ തന്നെയാണ്. സമമിതി (symmetry) പ്രകാരം തകിടിന്റെ മൊമന്റ് ഓഫ് ഇനർഷ്യ ഏതു വ്യാസത്തിനും ഒരുപോലെ ബാധകാണ്. അതിനാൽ

$$I_x - I_y$$

അതുകൊണ്ട് $I_z - 2I_x$ എന്നു കിട്ടും.

എന്നാൽ. $I_z = MR^2/2$

അതായത്. $I_x = I_z/2 = MR^2/4$

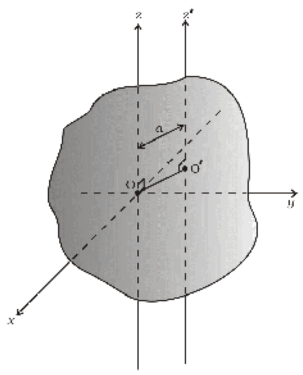
അതുകൊണ്ട്, ഒരു വൃത്തതകിടിന്റെ ഏതെങ്കിലും വ്യാസത്തെ ആധാരമാക്കിയുള്ള ചുറ്റുമുള്ള മൊമന്റ് ഓഫ് ഇനർഷ്യ $MR^2/4$ ആയിരിക്കും.

അതേപോലെ ഒരു വളയത്തിന്റെ ഏതെങ്കിലും വ്യാസത്തെ ആധാരമാക്കിയുള്ള മൊമന്റ് ഓഫ് ഇനർഷ്യ കണ്ടെത്തുക. ഈ തത്ത്വം ഒരു ഖരസിലിണ്ടറിനുകൂടി ബാധകമാകുമോയെന്നു പരിശോധിക്കുക.

7.10.1 സമാന്തര അക്ഷസിദ്ധാന്തം (Theorem of Parallel Axes)

ഏത് ആകൃതിയുള്ള വസ്തുവിലും പ്രയോഗിക്കാവുന്ന ഒരു തത്വമാണിത്. ഒരു വസ്തുവിന്റെ ദ്രവ്യമാന കേന്ദ്രത്തിൽ കൂടി കടന്നു പോകുന്ന ഏതെങ്കിലും ഒരക്ഷത്തെ ആധാരമാക്കിയുള്ള മൊമന്റ് ഓഫ് ഇനർഷ്യ അറിയാമെങ്കിൽ അതിനു സമാന്തരമായ ഏതൊരക്ഷത്തിനെയും ആധാരമാക്കിയുള്ള മൊമന്റ് ഓഫ് ഇനർഷ്യ നിർണ്ണയിക്കാൻ ഈ സിദ്ധാന്തം നമ്മെ സഹായിക്കും. ഈ തത്വമിവിടെ പ്രസ്താവിക്കുക മാത്രമേ ചെയ്യുന്നുള്ളൂ. അതിന്റെ വിശദമായ തെളിവുകൾ ഇവിടെ ചർച്ച ചെയ്യുന്നില്ല. ഈ സിദ്ധാന്തത്തിന്റെ ഉപയോഗം മനസ്സിലാക്കുന്നതിലേക്കായി ചില ചെറിയ ഉദാഹരണങ്ങൾ ഇവിടെ നൽകുക മാത്രമേ ചെയ്യുന്നുള്ളൂ. ഈ സിദ്ധാന്തം താഴെ പറയും പ്രകാരം പ്രസ്താവിക്കാൻ കഴിയും.

ഒരു വസ്തുവിന്റെ ഏതെങ്കിലും ഒരു അക്ഷത്തിനെ ആധാരമാക്കിയുള്ള മൊമന്റ് ഓഫ് ഇനർഷ്യ, ആ അക്ഷത്തിനു സമാന്തരമായി വസ്തുവിന്റെ ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രത്തിലൂടെ കടന്നു പോകുന്ന അക്ഷത്തിനെ ആധാരമാക്കിയുള്ള മൊമന്റ് ഓഫ് ഇനർഷ്യയുടെയും, വസ്തുവിന്റെ മാസും അക്ഷങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള ലംബദൂരത്തിന്റെ വർഗ്ഗവും തമ്മിലുള്ള ഗുണിതത്തിന്റെയും തുകയാണ്.



ചിത്രം 7.31 സമാന്തരാക്ഷസിദ്ധാന്തം. a ദൂരത്താൽ വേർതിരിക്കപ്പെട്ട രണ്ട് സമാന്തര അക്ഷങ്ങളാണ് Z, Z' എന്നിവ. O എന്നത് വസ്തുവിന്റെ ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രമാണ്, OO' = a

* Note: Kinematic- ശുദ്ധഗതികം. ദ്രവ്യവ്യൂഹത്തെ പരിഗണിക്കാതെ കണങ്ങളുടെ ചലനത്തെ സംബന്ധിച്ച പഠനം- ബലതന്ത്രത്തിലെ ഒരു ശാഖ

* * :Degree of freedom -അണുവിന്റെയോ തന്മാത്രയുടെയോ സ്വതന്ത്രമായ ചലന ഘടകങ്ങളിൽ ഒന്ന് (സ്ഥാനാന്തരം, കമ്പനം, ഭ്രമണം തുടങ്ങിയവ)

ചിത്രം 7.31 ൽ ഉള്ളതുപോലെ Z ഉം Z' ഉം രണ്ടു സമാന്തര അക്ഷങ്ങളും അവ തമ്മിലുള്ള അകലം a യും ആണ്. Z- അക്ഷം ആ വസ്തുവിന്റെ ദ്രവ്യകേന്ദ്രത്തിലൂടെ, അതായത് 'O' യിൽക്കൂടി കടന്നുപോവുന്നു. സമാന്തരാക്ഷ സിദ്ധാന്തമനുസരിച്ച്

$$I_{z'} = I_z + Ma^2 \qquad (7.37)$$

ഇതിൽ I_z ഉം $I_{z'}$ ഉം യഥാക്രമം Z- അക്ഷത്തിനെയും Z'- അക്ഷത്തിനെയും ആധാരമാക്കിയുള്ള മൊമന്റ് ഓഫ് ഇനർഷ്യകളാണ്. M എന്നത് വസ്തുവിന്റെ ആകെ പിണ്ഡവും a എന്നത് രണ്ട് സമാന്തര അക്ഷങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള ലംബദൂരവുമാണ്.

ഉദാഹരണം 7.11: M മാസും l നീളവുമുള്ള ഒരു ദണ്ഡിന്റെ ഏതെങ്കിലും ഒരഗ്രത്തിലൂടെ ദണ്ഡിനു ലംബമായി കടന്നു പോകുന്ന അക്ഷത്തെ ആധാരമാക്കിയുള്ള മൊമെന്റ് ഓഫ് ഇനർഷ്യ കണക്കാക്കുക.

ഉത്തരം:

ദണ്ഡിന്റെ പിണ്ഡം M ഉം നീളം ℓ -ഉം ആണ്, $I=Ml^2/12$ സമാന്തര അക്ഷതത്ത്വം ഉപയോഗിച്ച് $I' = I+Ma^2$, ഇവിടെ $a=l/2$ ആണ്.

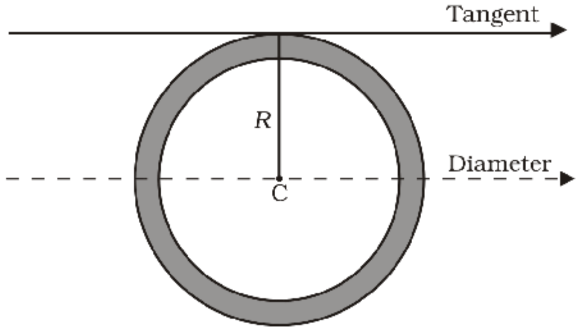
അതുകൊണ്ട് $I' = M\dfrac{l^2}{12} + M\left(\dfrac{l}{2}\right)^2 = \dfrac{Ml^2}{3}$

ഇതിന്റെ സാധ്യത മറ്റൊരുതരത്തിൽ നമുക്കു പരിശോധിച്ചു നോക്കാം. I എന്നത് 2 M മാസ്സുള്ളതും $2l$ നീളമുള്ളതുമായ ഒരു ദണ്ഡിന്റെ മദ്ധ്യബിന്ദു ആധാരമാക്കിയുള്ള മൊമെന്റ് ഓഫ് ഇനർഷ്യയുടെ പകുതിയാണ്. അതായത്

$$I' = 2M.\frac{4l^2}{12} \times \frac{1}{2} = \frac{Ml^2}{3}$$ ◀

ഉദാഹരണം 7.12 പുറത്തെ തൊടുവരയെ ആധാരമാക്കി ഒരു വൃത്ത വളയത്തിന്റെ മൊമെന്റ് ഓഫ് ഇനർഷ്യ കണ്ടുപിടിക്കുക.

ഉത്തരം: വളയത്തിന്റെ പുറംപ്രതലത്തിലെ ബിന്ദുവിൽ കൂടിയുള്ള തൊടുവര (tangent) ക്ക് സമാന്തരമായി വളയവൃത്തത്തിന്റെ ഏതെങ്കിലുമൊരു വ്യാസം ഉണ്ടായിരിക്കും. ഇങ്ങനെയുള്ള രണ്ടു സമാന്തരരേഖകൾ തമ്മിലുള്ള അകലം വളയത്തിന്റെ ആരം R ആണ്. സമാന്തര അക്ഷതത്വമുപയോഗിച്ചാൽ



ചിത്രം 7.32

$$I_{\text{സ്പർശരേഖ}} = I_{\text{വ്യാസം}} + MR^2 = \frac{MR^2}{2} + MR^2 = \frac{3}{2}MR^2 .$$ ◀

7.11. ഒരു നിശ്ചലഅക്ഷത്തെ ആധാരമാക്കിയുള്ള പരിക്രമണത്തിന്റെ ഗതികം (Kinematics of Rotational Motion about a Fixed Axis)

സ്ഥാനാന്തരചലനവും പരിക്രമണചലനവും തമ്മിൽ ബന്ധപ്പെടുന്ന സദൃശം (analogy) മുൻപ് സൂചിപ്പിച്ചിട്ടുള്ളതാണ്. ഉദാഹരണത്തിന് സ്ഥാനാന്തരചലനത്തിലെ രേഖീയപ്രവേഗം v യുടെ അതേ സ്ഥാനം തന്നെയാണ് പരിക്രമണചലനത്തിൽ കോണീയപ്രവേഗം ω ക്ക് ഉള്ളത്. ഇത്തരത്തിലുള്ള മറ്റു സദൃശങ്ങൾ കണ്ടെത്തി ചർച്ച ചെയ്യുവാനാണ് ഈ വിഭാഗത്തിൽ ശ്രമിക്കുന്നത്. ഒരു നിശ്ചലഅക്ഷത്തെ ആധാരമാക്കിയുള്ള പരിക്രമണചലനത്തിൽ മാത്രം കേന്ദ്രീകരിച്ചാണ് നാം ഇവിടെയിതു ചെയ്യുന്നത്.

ഈ ചലനത്തിൽ ഉൾപ്പെടുന്നത് ഡിഗ്രീസ് ഓഫ് ഫ്രീഡത്തിൽ (degrees of freedom)** ഒന്നു മാത്രമാണ്. അതായത്, ചലനത്തെ വിശദീകരിക്കാൻ ഏതെങ്കിലും ഒരു സ്വതന്ത്ര ചരത്തിന്റെ (variable) ആവശ്യം മാത്രമേ ഇവിടെ വരുന്നുള്ളൂ എന്നർത്ഥം. രേഖീയചലനത്തിൽ ഇത് സറാനാന്തരമാണ്. ഈ വിഭാഗത്തിലെ ചർച്ച ശുദ്ധ ഗതിക (kinematic) ത്തിലേക്ക് പരിമിതപ്പെടുത്തേണ്ടിയിരിക്കുന്നു. ഗതികത്തെ (dynamics)പ്പറ്റിയുള്ള ചർച്ചകളിലേക്ക് പിന്നീട് നമുക്ക് പോകാം.

കോണീയസ്ഥാനമാറ്റമെന്തെന്നു വ്യക്തമാക്കുവാൻ പരിക്രമണം ചെയ്യുന്ന വസ്തുവിലെ ഏതെങ്കിലും ഒരു ബിന്ദു P പരിഗണിക്കാം. (ചിത്രം 7.33) വസ്തു ചലിക്കുന്ന തലത്തിലുള്ള P യുടെ കോണീയ സ്ഥാനമാറ്റം θ ആ വസ്തുവിന് മൊത്തമായുണ്ടാകുന്ന കോണീയസ്ഥാനമാറ്റമാണ്. P യുടെ ചലനതലത്തിലുള്ള ഏതെങ്കിലും ഒരു നിശ്ചിത

ദിശയെ ആസ്പദമാക്കിയാണ് θ അളക്കുക. ഇവിടെ അത് x അക്ഷത്തിനു സമാന്തരമായിട്ടുള്ള x' – അക്ഷമായിട്ടാണ് എടുത്തിട്ടുള്ളത്. (ചിത്രം ശ്രദ്ധിക്കുക). ചിത്രത്തിൽ ZP യുടെ പരിക്രമണ അക്ഷവും, പരിക്രമണതലം x-y തലവുമായിട്ടാണ് കാണിച്ചിരിക്കുന്നത്. t = 0 എന്ന സമയത്തെ കോണീയ സറാനമാറ്റം θ_0 കൊണ്ടു സൂചിപ്പിച്ചിരിക്കുന്നു.

കോണീയ സറാനമാറ്റത്തിന്റെ വ്യത്യാസനിരക്ക് $\omega = d\theta/dt$, കോണീയപ്രവേഗമാണ്. പരിക്രമണാക്ഷം നിശ്ചലമായതിനാൽ, കോണീയപ്രവേഗം ഒരു സദിശമായി കരുതേണ്ടതില്ല. കൂടാതെ കോണീയത്വരണം, $\alpha = d\omega/dt$ എന്നും എടുത്തിരിക്കുന്നു.

പരിക്രമണത്തിലെ ശുദ്ധഗതികപരിമാണങ്ങളായ, കോണീയസ്ഥാനമാറ്റം (θ), കോണീയപ്രവേഗം (ω), കോണീയത്വരണം (α) എന്നിവ ഓരോന്നും രേഖീയചലനത്തിലെ ശുദ്ധഗതിക പരിമാണങ്ങളുമായി യഥാക്രമം അനുപൂരകമാകുന്നത് യഥാക്രമം സ്ഥാനമാറ്റം (x), പ്രവേഗം (v), ത്വരണം (a) എന്നിവയുമായാണ്. രേഖീയ ചലനത്തിൽ സ്ഥിര ത്വരണമാണെങ്കിൽ ശുദ്ധഗതികത്തിലെ സമവാക്യങ്ങൾ താഴെ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന വിധമാകും.

$$v = v_0 + at \qquad \text{(a)}$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \qquad \text{(b)}$$

$$v^2 = v_0^2 + 2ax \qquad \text{(c)}$$

ഇതിൽ x_0 – *പ്രാരംഭ സ്ഥാനമാറ്റവും* v_0 = *ആദ്യ പ്രവേഗവുമാണ്.* ഇവിടെ ആദ്യം - (initial) എന്നതുകൊണ്ട് ഉദ്ദേശിക്കുന്നത് t = 0 സമയത്തുള്ള അളവുകളാണ്.

ഇതിനോട് അനുയോജ്യമാകുന്ന സ്ഥിരകോണീയത്വരണമുള്ള ഒരു പരിക്രമണചലനത്തിന്റെ ശുദ്ധഗതിക സമവാക്യങ്ങൾ താഴെ കാണിക്കുന്നു.

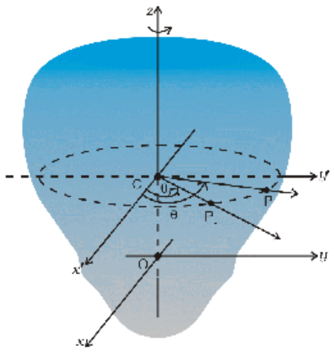
$$\omega = \omega_0 + \alpha t \qquad (7.38)$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \qquad (7.39)$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0) \qquad (7.40)$$

ഇതിൽ θ_0 = ഒരു പരിക്രമണവസ്തുവിന്റെ പ്രാരംഭ കോണീയ സ്ഥാനമാണ്.

ω_0 = വസ്തുവിന്റെ പ്രാരംഭ കോണീയ പ്രവേഗവുമാണ്.



ചിത്രം–7.33: ഒരു ദൃഢവസ്തുവിന്റെ കോണീയസറാനം വ്യക്തമാകുന്ന ചിത്രം.

ഉദാഹരണം–7.13: അടിസറാന തത്വങ്ങളിൽ നിന്നും സമവാക്യം 7.38 ലഭ്യമാക്കുക.

ഉത്തരം: കോണീയത്വരണം ഏകതാനമാണ്, അതിനാൽ

$$\frac{d\omega}{dt} = \alpha = constant \qquad \text{(i)}$$

ഈ സമവാക്യം സമാകലനം ചെയ്താൽ

$$\omega = \int \alpha\, dt + c$$

$= \alpha t + c$ (α ഒരു സ്ഥിരസംഖ്യയെന്ന നിലയിൽ)

$t = 0$ ആകുമ്പോൾ $\omega = \omega_0$ (തന്നിരിക്കുന്നു) ഇതുപ്രകാരം (i) ൽ നിന്ന് ലഭിക്കുന്നത് $t = 0$ ആകുമ്പോൾ, $\omega = c = \omega_0$

അതിനാൽ $\omega = \alpha t + \omega_0$

$\omega = d\theta/dt$ എന്ന നിർവ്വചന സമവാക്യം **7.38** ൽ ആരോപിച്ച ശേഷം സമാകലനം ചെയ്താൽ സമവാക്യം 7.39 ലഭിക്കുന്നു. ഈ സമവാക്യവും, സമവാക്യം 7.40 ന്റെയും രൂപീകരണം പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങളായി ചെയ്യുക.

ഉദാഹരണം : 7.14 ഒരു മോട്ടോർ ചക്രത്തിന്റെ കോണീയ വേഗത 1200 rpm ൽ നിന്ന് 3120 rpm ലേക്ക് 16 സെക്കന്റിൽ എത്തുന്നു. (i) അതിന്റെ കോണീയത്വരണം എത്ര? ഇതിന്റെ ത്വരണം ഏകമാനമാണെന്ന് എടുക്കുക? (ii) ഈ സമയം കൊണ്ട് യന്ത്രം എത്ര പ്രാവശ്യം തിരിയും?

ഉത്തരം:

(i) ഇവിടെ ഉപയോഗിക്കേണ്ട സമവാക്യം $\omega = \omega_0 + \alpha t$ എന്നാണ്.

ω_0 = പ്രാരംഭ കോണീയവേഗം, റേഡിയൻ/സെക്കന്റിൽ (rad/s)

= $2\pi \times$ കോണീയ വേഗം പരിക്രമണം/സെക്കന്റ് (rev/s)

$$= \frac{2\pi \times \text{കോണീയ വേഗത പരിക്രമണം/മി.ൽ}}{60 \text{ സെ/മി}}$$

$$= \frac{2\pi \times 1200}{60} \text{ rad/s}$$

π = 40 rad/s

അതുപോലെ ω = അന്തിമകോണീയ വേഗത rad/s ൽ

$$= \frac{2\pi \times 3120}{60} \text{ rad/s}$$

$$= 2\pi \times 52 \text{ rad/s}$$

$$= 104\pi \text{ rad/s}$$

∴ കോണീയത്വരണം

$$\alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t} \qquad = 4\pi \text{ rad/s}^2$$

യന്ത്രത്തിന്റെ കോണീയത്വരണം = 4π rad/s^2

(ii) t സമയത്തിലുള്ള കോണീയ സ്ഥാനമാറ്റം കണക്കാക്കുന്നതിന്:

$$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$= (40\pi \times 16 + \frac{1}{2} \times 4\pi \quad .6^2) \text{ rad}$$

$$= (640\pi + 512\pi) \text{ rad}$$

$$= 1152\pi \text{ rad}$$

തിരിയലുകളുടെ എണ്ണം = $\dfrac{1152\pi}{2\pi} = 576$ ◀

7.12 ഒരുനിശ്ചല അക്ഷത്തെ ആധാരമാക്കിയുള്ള പരിക്രമണചലനത്തിന്റെ ഗതികം (Dynamics of rotational motion about a fixed axis)

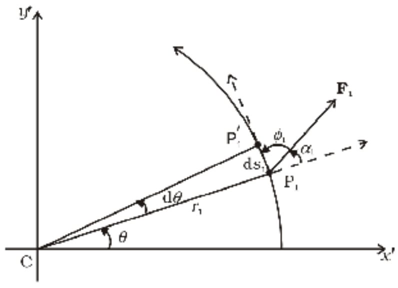
പട്ടിക 7.2 ൽ രേഖീയചലനവുമായി ബന്ധപ്പെട്ട അളവുകളും അവയുടെ പരിക്രമണചലനത്തിലെ സദൃശ (analogue) ങ്ങളും കൊടുത്തിരിക്കുന്നു. ഈ രണ്ടു ചലനങ്ങളുടെയും ശുദ്ധഗതികം മുമ്പ് താരതമ്യം ചെയ്തു കഴിഞ്ഞതാണ്. കൂടാതെ, പരിക്രമണചലനത്തിൽ, മൊമെന്റ് ഓഫ് ഇനർഷ്യയും ടോർക്കും നിർവഹിക്കുന്ന അതേ ധർമ്മങ്ങൾ തന്നെയാണ് രേഖീയചലനത്തിൽ യഥാക്രമം മാസും ബലവും അനുവർത്തിക്കുന്നതെന്ന് നാം മനസ്സിലാക്കിയിട്ടുണ്ട്. ഇതിൽനിന്നും പട്ടികയിൽ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന മറ്റു സദൃശങ്ങൾ എന്തൊക്കെയാവാമെന്ന് ഊഹിക്കാൻ കഴിയേണ്ടതാണ്. ഉദാഹരണത്തിന്, $dx \to d\theta$,യുടേയും $= \tau \to F$ ന്റെയും പരസ്പരബന്ധം നമുക്കറിയാം, രേഖീയ ചലനത്തിൽ പ്രവൃത്തിയെ സൂചിപ്പിക്കുന്നത് $F\,dx$ ആണെന്നും അതുപോലെ ഒരു നിശ്ചല അക്ഷത്തെ ആധാരമാക്കിയുള്ള പരിക്രമണചലനത്തിൽ അത് $\tau\, d\theta$ ആയിരിക്കണമെന്ന് നമുക്ക് അനുമാനിക്കാവുന്നതാണ്. അതുകൊണ്ടുതന്നെ ഇത്തരം അനുരൂപങ്ങളെ ഗതികത്തിന്റെ പരിഗണനവെച്ച് കുറച്ചുകൂടി നന്നായി വ്യക്തമാക്കേണ്ടതുണ്ടെന്ന് തോന്നുന്നു. ഇക്കാര്യത്തിനാണ് ഇനി നാം ശ്രമിക്കുന്നത്.

അതിന്റെ മുന്നോടിയായി, ഒരു നിശ്ചല അക്ഷത്തിനു ചുറ്റുമുള്ള പരിക്രമണചലനത്തിന്റെ കാര്യത്തിൽ ഒരു ലഘൂകരണം കൊണ്ടുവരേണ്ടതുണ്ട്. അക്ഷം നിശ്ചലമായതിനാൽ, നിശ്ചലഅക്ഷത്തിന്റെ ദിശയിൽ കൂടിയുള്ള ടോർക്കുകളുടെ ഘടകങ്ങൾ മാത്രമേ പരിഗണനയിലേക്ക് കൊണ്ടുവരേണ്ടതുള്ളു. ഈ ഘടകങ്ങൾക്കു മാത്രമാണ് വസ്തുവിനെ നിശ്ചലഅക്ഷത്തിന് ആധാരമാക്കി പരിക്രമണം ചെയ്യിക്കുവാൻ സാധിക്കുന്നത്. പരിക്രമണാക്ഷത്തിന് ലംബമായിട്ടുള്ള ടോർക്കിലെ ഘടകം അക്ഷത്തെ അതിന്റെ സ്ഥാനത്തു നിന്ന് തിരിക്കാനുള്ള പ്രവണത കാണിക്കുന്നുണ്ട്. എന്നാൽ ടോർക്കിന്റെ ലംബിത ഘടകത്തിന്റെ *(ബാഹ്യ)* ഇത്തരം സ്വാധീനത്തെ നിയന്ത്രിക്കാനും റദ്ദാക്കാനുമായി ആവശ്യമായ മറ്റൊരു ബലം അതിനെതിരായി ഉണ്ടാകുമെന്നു തന്നെയാണ് പ്രതീക്ഷിക്കേണ്ടത്. അതിനാൽ അക്ഷത്തിന്റെ സ്ഥാനസ്ഥിരത സംരക്ഷിക്കപ്പെടുന്നു. അതുകൊണ്ട് ലംബിത ടോർക്ക് കണക്കിലെടുക്കേണ്ട കാര്യമില്ല. ഇതുകൊണ്ട് അർഥമാക്കുന്നത് ഒരു ദൃഢവസ്തുവിന്മേലുള്ള ടോർക്കിന്റെ ഘടകങ്ങളിൽ പരിഗണിക്കപ്പെടേണ്ടവയും അല്ലാത്തവയും ഉണ്ടെന്നാണ് താഴെ പറയുന്നതു പോലെ അവയെ സൂചിപ്പിക്കാം.

(i) അക്ഷത്തിന് ലംബമായിട്ടുമുള്ള തലത്തിലെ ബലങ്ങളെ മാത്രമേ ഇവിടെ പരിഗണിക്കേണ്ടതുള്ളൂ: അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമായി വരുന്ന ബലങ്ങൾ അക്ഷത്തിന് ലംബമായ ടോർക്കായി പരിണമിക്കുമെങ്കിലും ആയത് ഇവിടെ കണക്കിലെടുക്കേണ്ട കാര്യമില്ല.

(ii) അക്ഷത്തിന് ലംബമായിട്ടുള്ള സ്ഥാനസദിശ ഘടങ്ങൾ (position vectors) മാത്രമേ പരിഗണിക്കേണ്ടതുള്ളൂ. അക്ഷത്തിൽ കൂടിയുള്ള സമാന്തരമായ സ്ഥാനസദിശങ്ങൾ അക്ഷത്തിന് ലംബമായ ടോർക്കിന് കാരണമാകാനിടയുണ്ട്. അതിനാൽ അവയെ കണക്കിലെടുക്കേണ്ട.

ഒരു ടോർക്ക് മൂലമുള്ള പ്രവൃത്തി (Work done by a torque)



ചിത്രം-7.34 ഒരു നിശ്ചല അക്ഷത്തിനെ ആധാരമാക്കി കറങ്ങുന്ന ഒരു വസ്തുവിലെ ഒരു കണികയിൽ പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്ന F_1 ബലം. ചെയ്യുന്ന പ്രവൃത്തി. അക്ഷത്തിൽ സറിതിചെയ്യുന്ന 'C' എന്ന കേന്ദ്രത്തിനു ചുറ്റുമായി ഒരു വൃത്താകാര സഞ്ചാരപാതയിലാണ് ഇവിടെ കണിക സഞ്ചരിക്കുന്നത്. P_1, P' എന്ന ചാപം (arc-ds_1) കണികയുടെ സ്ഥാനമാറ്റം കാണിക്കുന്നു.

ചിത്രം 7.34 ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നത് ഒരു നിശ്ചലാക്ഷത്തെ ആധാരമാക്കി പരിക്രമണം ചെയ്യുന്ന ഒരു വസ്തുവിന്റെ ഛേദതലമാണ്. ഇവിടെ സ്ഥിരാക്ഷമായി എടുത്തിരിക്കുന്നത് പേപ്പറിനു ലംബദിശയിൽ സങ്കൽപിച്ചിരിക്കുന്ന z അക്ഷമാണ്. നാം നേരത്തേ സൂചിപ്പിച്ച രീതിയിലുള്ള അക്ഷത്തിനു ലംബമായ തലത്തിലൂടെ പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്ന ബലം മാത്രമേ ഇവിടെ നാം പരിഗണിക്കുന്നുള്ളു. വസ്തുവിലെ ഒരു ബിന്ദുവായ P_1 ലൂടെ അക്ഷത്തിന്റെ ലംബതലത്തിൽ പ്രവർത്തിക്കുന്ന ഇത്തരത്തിലുള്ള ഒരു ബലമാണ് F_1 എന്നു സങ്കൽപിക്കാം. (ചിത്രം 7.33 ശ്രദ്ധിക്കുക). ഈ ലംബതലത്തെ നമുക്ക് x'-y' തലമായിട്ടെടുക്കാം. [x'-y' തലം പേപ്പറിന്റെ തലം തന്നെയാണ് എന്ന് കാണുവാൻ കഴിയും]. ഇവിടെ P_1 അക്ഷത്തിലെ ബിന്ദുവായ C കേന്ദ്രമാക്കി r_1 ആരമുള്ള വൃത്തപാതയിലൂടെ സഞ്ചരിക്കുന്നു. അതിനാൽ $CP_1 = r_1$.

Δt സമയത്ത്, ഈ ബിന്ദു $P1'$ സ്ഥാനത്തെത്തുന്നു. കണികയുടെ സ്ഥാനമാറ്റം ചിത്രത്തിൽ സൂചിപ്പിക്കുന്നത് $d\mathbf{s}_1$ ആണ്. അതിനാൽ, $ds_1 = r_1\, d\theta$ യും അതിന്റെ ദിശ P_1 സ്ഥാനത്തുകൂടിയുള്ള തൊടുവരയിലൂടെയുമാണ്. ഇവിടെ, കണികയുടെ കോണീയ സ്ഥാനമാറ്റം $d\theta$ ആണ്, $d\theta = \angle P_1CP_1'$. കണികയുടെ ബലം ചെയ്ത പ്രവൃത്തി

$$dW_1 \quad \mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{s}_1 = F_1 ds_1 \cos\phi_1 = F_1 (r_1\, d\theta) \sin\alpha_1$$

ϕ_1 എന്നത് F_1 ന്റേയും ആരസദിശം OP_1 ന്റെയും ഇടയിലുള്ള കോൺ ആണ്. അതായത് $\phi_1 + \alpha_1 = 90^0$

അതുകൊണ്ട് $\phi_1 = (90 - \alpha_1)$ (ചിത്രം 7.34). തന്മൂലം $\cos\phi_1 = \cos(90 - \alpha_1) = \sin\alpha_1$. ഇവിടെ $\mathbf{OP_1 x F_1}$ എന്നത് മൂലബിന്ദുവിനെ ആധാരമാക്കിയുള്ള $\mathbf{F}_1$ ന്റെ ടോർക്ക് ആണ്. ഇവിടെ $OP_1 = OC + CP_1$ (ചിത്രം 7.17 b പരിശോധിക്കുക). OC അക്ഷത്തിൽ കൂടിത്തന്നെ ആയതിനാൽ അതിൽ നിന്നും ഉത്ഭവിക്കുന്ന ടോർക്ക് ഇവിടെ പരിഗണനക്കു എടുക്കേണ്ടതില്ല. F_1 ന്റെ പ്രവർത്തനംമൂലം ഫലപ്രദമായിവരുന്ന ടോർക്ക് $\tau_1 = CP \times F_1$ ആണ്. അതിന്റെ ദിശ പരിക്രമണാക്ഷത്തിലൂടെയാണ്. അതിന്റെ അളവ് $\tau_1 = r_1 F_1 \sin\theta$ എന്നുമാണ്. അതുകൊണ്ട്. ഈ ടോർക്ക് ചെയ്യുന്ന പ്രവൃത്തി

$$dW = \tau_1 d\theta$$

വസ്തുവിന്മേൽ ഒന്നിൽ കൂടുതൽ ബലം പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്നുണ്ടെങ്കിൽ, അവയെല്ലാം ചെയ്ത പ്രവൃത്തി ഒരുമിച്ചുകൂട്ടി മൊത്തം പ്രവൃത്തി ലഭ്യമാക്കാം. ഇവിടെ കോണീയസ്ഥാനമാറ്റത്തിന്റെ അളവ് $d\theta$ എല്ലാ കണികകൾക്കും ഒരുപോലെയാണ്. അതിനാൽ എല്ലാ ടോർക്കുകളും നിശ്ചല അക്ഷത്തിനു സമാന്തരമാണ്. അതുകൊണ്ട് ആകെ ടോർക്കുകളുടെ അളവ് τ കണക്കാക്കുന്നത് എല്ലാ ടോർക്കുകളുടെയും ബലങ്ങളുടെയും ബീജഗണിത തുകയെടുത്തുകൊണ്ടാണ്. അതായത്

$$dW = (\tau_1 + \tau_2 + \ldots) d\theta$$

$$dW = \tau d\theta \tag{7.41}$$

പട്ടിക- 7.2 സ്ഥാനാന്തരം പരിക്രമണ ചലനങ്ങളുടെ താരതമ്യം

	രേഖീയചലനം			പരിക്രമണചലനം		
1	സ്ഥാനമാറ്റം	(displacement)	x	കോണീയസ്ഥാനമാറ്റം	(angular displacement)	θ
2	പ്രവേഗം	(velocity)	$v = dx/dt$	കോണീയപ്രവേഗം	(angular velocity)	$\omega \quad d\theta/dt$
3	ത്വരണം	(acceleration)	$a = dv/dt$	കോണീയത്വരണം	(angular acceleration)	$\alpha = d\omega/dt$
4	മാസ്	(mass)	M	മൊമെന്റ് ഓഫ് ഇനർഷ്യ	(moment of inertia)	I
5	ബലം	(force)	$F = Ma$	ടോർക്ക്	(torque)	$\tau = I\alpha$
6	പ്രവൃത്തി	(work)	$dW \quad Fds$	പ്രവൃത്തി	(work)	$W \quad \tau d\theta$
7	ഗതികോർജം	(kinetic energy)	$K \quad Mv^2/2$	ഗതികോർജം	(kinetic energy)	$K \quad I\omega^2/2$
8	പവർ	(power)	$P = Fv$	പവർ	(power)	$P = \tau\omega$
9	രേഖീയ ആക്കം	(linear momentum)	$P = Mv$	കോണീയ ആക്കം	(angular momentum)	$L = I\omega$

ഈ സൂചനയിലൂടെ ലഭിക്കുന്നത്, ഒരു വസ്തുവിന്റെ പരിക്രമണത്തിൽ നിശ്ചല അക്ഷത്തിന് ആധാരമായി പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്ന ആകെ (ബാഹ്യ) ടോർക്ക് τ മൂലം ചെയ്യപ്പെട്ട പ്രവൃത്തിയാണ്. ഇതേപോലുള്ള മറ്റൊരു, സമവാക്യം

$dW = F\,ds$ നമുക്ക് പരിചിതമാണ്.

ഇത് രേഖീയ സമാന്തരചലനത്തിനുള്ള പ്രവൃത്തിയുടേതാണ്. സമവാക്യം (7.41) ൽ ഇരുവശങ്ങളും dt കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ ലഭിക്കുന്നത്

$$P = \frac{dW}{dt} = \tau\frac{d\theta}{dt} = \tau\omega$$

അഥവാ $P = \tau\omega$ (7.42)

ഇത് തൽക്ഷണ പവർ ആണ്. ഇത് രേഖീയ ചലനത്തിലെ പവറുമായി $(P = Fv)$ താരതമ്യം ചെയ്യുവാൻ കഴിയും.

ഒരു യഥാർഥ ദൃഢവസ്തുവിൽ ആന്തരികചലനങ്ങൾ ഉണ്ടാവില്ല. അതിനാൽ ബാഹ്യ ടോർക്ക് മൂലം ചെയ്യപ്പെടുന്ന പ്രവൃത്തി, ശോഷണത്തിനു (dissipiate) വിധേയമാവാതെ വസ്തുവിന്റെ ഗതികോർജത്തെ വർധിപ്പിക്കുന്നതിനായി ഉപയോഗപ്പെടുത്തുന്നു. വസ്തുവിന്മേൽ ചെയ്യപ്പെടുന്ന പ്രവൃത്തിയുടെ നിരക്ക് സമവാക്യം (7.42) ലൂടെ ലഭിക്കുന്നുണ്ട്. ഇതിനെ നമുക്ക് ഗതികോർജത്തിന്റെ വർധനാനിരക്കിലേക്ക് മാറ്റിയെഴുതാം. ഗതികോർജത്തിന്റെ വർധന നിരക്ക്

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{I\omega^2}{2}\right) = I\frac{(2\omega)}{2}\frac{d\omega}{dt}$$

മൊമെന്റ് ഓഫ് ഇനർഷ്യ സമയത്തിനനുസരിച്ച് മാറ്റത്തിന് വിധേയമാവുന്നില്ലെന്നാണ് കരുതപ്പെടുന്നത്. ഒരു വസ്തുവിന്റെ മാസിന് മാറ്റം സംഭവിക്കുന്നില്ലെന്ന് പറയുന്നതും ഇതേ അർത്ഥത്തിലാണ്. അതിനാൽ വസ്തു എപ്പോഴും ദൃഢമായിരിക്കും. അതുപോലെ വസ്തുവിനെ സംബന്ധിച്ച് അതിന്റെ അക്ഷത്തിന്റെ സ്ഥാനവും മാറുന്നില്ല.

$\alpha = d\omega / dt$, ആയതിനാൽ

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{I\omega^2}{2}\right) = I\,\omega\,\alpha$$ എന്നു ലഭിക്കും

ചെയ്യപ്പെട്ട പ്രവൃത്തിയുടെ നിരക്കും ഗതികോർജത്തിലെ വർധനയും ഒരു സമീകരണത്തിലേക്കു കൊണ്ടുവന്നാൽ താഴെ കാണിച്ചതു പ്രകാരം എഴുതാം.

$$\tau\omega = I\,\omega\,\alpha$$

$$\tau = I\alpha \quad (7.43)$$

സമവാക്യം (7.43) രേഖീയചലനത്തിലെ ന്യൂട്ടന്റെ രണ്ടാം ചലനനിയമം തരുന്ന

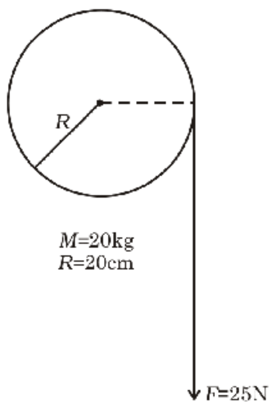
$F = ma$ എന്ന സമവാക്യത്തിനു സമാനമാണിത്.

ബലം ത്വരണത്തെ സൃഷ്ടിക്കുന്നതുപോലെ ടോർക്ക് ഒരു വസ്തുവിൽ കോണീയ ത്വരണം സൃഷ്ടിക്കുന്നു. കോണീയത്വരണം പ്രയോഗിക്കപ്പെട്ട ടോർക്കിന് നേർ ആനുപാതികവും വസ്തുവിന്റെ മൊമെന്റ് ഓഫ് ഇനർഷ്യക്ക് വിപരീത ആനുപാതത്തിലുമായിരിക്കും. അതുകൊണ്ട്, സമവാക്യം (7.43) ഒരു നിശ്ചല അക്ഷത്തിന് ആധാരമാക്കിയുള്ള പരിക്രമണചലനത്തിലെ ന്യൂട്ടന്റെ രണ്ടാം നിയമമായി അറിയപ്പെടുന്നു.

ഉദാഹരണം 7.15. 20kg മാസും 20 cm ആരവുമുള്ള ഒരു ഫ്ളൈവീൽ (Flywheel) (ചാലകചക്രം) തിരശ്ചീനമായി ഉറപ്പിച്ചിട്ടുള്ള അക്ഷത്തിൽ ഘർഷണ രഹിത ബെയറിംഗ് ഉപയോഗിച്ച് ഘടിപ്പിച്ചിരിക്കുന്നു. ഫ്ളൈവീലിന്റെ റിമ്മിനു ചുറ്റും നീളമുള്ള ഒരു ചരട് ചുറ്റിയിരിക്കുന്നു. (ചരടിന്റെ മാസ് നിസാരമാണ്) ചിത്രം 7.35 ൽ കാണുന്ന രീതിയിൽ 25 N ബലം ഉപയോഗിച്ച് ചരടിനെ ക്രമായി വലിക്കുന്നു.

a) ചക്രത്തിന്റെ കോണീയത്വരണം കണക്കാക്കുക
b) ചരട് 2 മീറ്റർ വലിക്കപ്പെട്ടതിന് ശേഷം വലിക്കലിന്റെ ഫലമായി ചെയ്യപ്പെട്ട പ്രവൃത്തി കണക്കാക്കുക.
c) ഇതേ സ്ഥാനത്തുതന്നെ ചക്രത്തിന്റെ ഗതികോർജം കണക്കാക്കുക. ചക്രം നിശ്ചലാവസ്ഥയിൽ നിന്ന് ചലനം ആരംഭിച്ചതായി കരുതുക.
d) മുകളിൽപറഞ്ഞ (b), (c) എന്നിവയുടെ ഉത്തരങ്ങൾ താരതമ്യം ചെയ്യുക.

ഉത്തരം:



ചിത്രം–7.35

(a) ഇവിടെ പ്രയോഗിക്കേണ്ടത് $I\alpha \quad \tau$ എന്ന സമവാക്യമാണ്.

ടോർക്ക് $\tau = FR$
$= 25 \times 0.20$ Nm ($R = 0.20$m ആയതിനാൽ)
$= 5.0$ Nm

I = ചാലക ഫ്ളൈവീലിന്റെ മൊമന്റ് ഓഫ് ഇനർഷ്യ

$$= \frac{MR^2}{2}$$

$$= \frac{20.0 \times (0.2)^2}{2} = 0.4 \text{ kg m}^2$$

α = കോണീയത്വരണം
$= 5.0$ N m/0.4 kg m^2 = 12.5 s^{-2}

(b) 2 മീറ്റർ ചരട് വലിച്ചപ്പോൾ ചെയ്യപ്പെട്ട പ്രവൃത്തി
= 25 N × 2m = 50 J

(c) അന്തിമ കോണീയപ്രവേഗം ω എന്നിരിക്കട്ടെ.

നേടിയ ഗതികോർജത്തിന്റെ അളവ് = $\frac{1}{2} I\omega^2$.

ഫ്ളൈവീലിന്റെ ചക്രത്തിന്റെ ചലനം പ്രാരംഭാവസ്ഥയിൽ നിന്നുതന്നെ കണക്കിലെടുക്കുന്നതിനാൽ

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta, \quad \omega_0 = 0$$

കോണീയ സ്ഥാനാന്തരം വലിച്ചെടുത്ത ചരടിന്റെ നീളം ÷ ചക്രത്തിന്റെ ആരം
= 2m/0.2 m = 10 rad

$$\omega^2 = 2 \times 12.5 \times 10.0 = 250 \, (\text{rad/s})^2$$

$$\therefore \text{ കൈവരിച്ച ഗതികോർജം} = \frac{1}{2} \times 0.4 \times 250 = 50 \text{ J}$$

(d) ഉത്തരങ്ങൾ ഒരേപോലെ വന്നിരിക്കുന്നു. അതായത്, *ചക്രം നേടിയ ഗതികോർജം=ബലം ചെയ്ത പ്രവൃത്തി.* ഇവിടെ ഘർഷണം മൂലം ഊർജം നഷ്ടപ്പെടുന്നില്ല. ◀

7.13 ഒരു നിശ്ചല അക്ഷത്തെ ആധാരമാക്കിയുള്ള പരിക്രമണത്തിലെ കോണീയ ആക്കം (Angular momentum in case of rotation about a fixed axis)

ഒരു കണികാവ്യവസ്ഥയുടെ കോണീയ ആക്കത്തെക്കുറിച്ച് വിഭാഗം 7.7 ൽ പഠിച്ചതാണല്ലോ. ഒരു ബിന്ദുവിനെ ആധാരമാക്കിയുള്ള ഒരു കണികാവ്യവസ്ഥയുടെ ആകെ കോണീയ ആക്കത്തിലെ മാറ്റത്തിന്റെ നിരക്ക് ആ വ്യവസ്ഥയിൽ ആ ബിന്ദുവിനെ ആധാരമാക്കിയുള്ള ബാഹ്യ ടോർക്കുകളുടെ തുകക്ക് തുല്യമായിരിക്കുമെന്ന് ഈ പഠനങ്ങളിലൂടെ നമ്മൾ മനസ്സിലാക്കിയിട്ടുണ്ട്. ബാഹ്യടോർക്കുകൾ പൂജ്യമാകുന്നിടത്ത് വ്യവസ്ഥയുടെ മൊത്ത കോണീയ ആക്കം സംരക്ഷിതമായിരിക്കും.

ഇപ്പോൾ നമ്മൾ മനസ്സിലാക്കാൻ പോകുന്നത്, ഒരു നിശ്ചല അക്ഷത്തെ ആധാരമാക്കിയുള്ള പരിക്രമണത്തിൽ വരുന്ന കോണീയ ആക്കത്തെക്കുറിച്ചാണ്. ഒരു വ്യവസ്ഥയുടെ മൊത്തം കോണീയ ആക്കത്തിന്റെ പൊതു സമവാക്യം താഴെ കാണിച്ചിരിക്കുന്നു.

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i \qquad (7.25b)$$

പരിക്രമണത്തിലുള്ള ഒരു ദൃഢവസ്തുവിലെ ഏതെങ്കിലും ഒരു കണികയുടെ കോണീയ ആക്കത്തെ ആദ്യം പരിഗണിക്കാം. അതിനുശേഷം ഓരോ കണത്തിന്റെയും സംഭാവനകൾ കൂട്ടിയെടുത്തുകൊണ്ട് വസ്തുവിന്റെയാകെ L കണ്ടെത്താവുന്നതാണ്. ഒരു കണികയെ സംബന്ധിച്ച് **l = r x p** ആണ്. തൊട്ടുമുമ്പത്തെ വിഭാഗത്തിൽ കണ്ടതുപോലെ **r =OP = OC +CP** (ചിത്രം7.17b). **p** = m **v** എന്നായാൽ,

$$\mathbf{l} = (\mathbf{OC} \times m\,\mathbf{v}) + (\mathbf{CP} \times m\,\mathbf{v})$$

രേഖീയപ്രവേഗം **v** യുടെ പരിമാണം P എന്ന സ്ഥാനത്തെ കണികയെ സംബന്ധിച്ച് തന്നിരിക്കുന്നത് $v = \omega r_1$ എന്നാണ്. ഇതിൽ, r_1 എന്നത് പരിക്രമണാക്ഷത്തിൽ നിന്ന് P യിലേക്കുള്ള ലംബദൂരവും CP യുടെ നീളവുമാണ്. P എന്ന കണികയുടെ വൃത്താകാര പാതയിൽ ഉള്ള തൊടുവരയിലൂടെയാണ് v യുടെ ദിശ. വലംകൈ നിയമമുപയോഗിച്ച് പരിശോധിക്കുമ്പോൾ **CP** × **v** നിശ്ചലാക്ഷത്തിന് സമാന്തരമാണെന്ന് കാണാനാവും. അക്ഷത്തിൽ (Z അക്ഷം) കൂടിയുള്ള യൂണിറ്റ് സദിശം $\hat{\mathbf{k}}$ യാണ്. അതിനാൽ

$$\mathbf{CP} \times m\,\mathbf{v} = r_1 (mv)\,\hat{\mathbf{k}}$$

$$= m r_1^2 \omega\,\hat{\mathbf{k}} \quad (v = \omega r \text{ ആയതിനാൽ})$$

അതുപോലെ **OC** × **v** നിശ്ചല അക്ഷത്തിന് ലംബമാണെന്ന് പരിശോധിച്ചു നോക്കാവുന്നതാണ്. നിശ്ചല അക്ഷത്തിലൂടെയുള്ള **l** ഘടകത്തെ $\mathbf{l}_z$ എന്ന് എഴുതിയാൽ

$$\mathbf{l}_z = \mathbf{CP} \times m\,\mathbf{v} = m r^2 \omega\,\hat{\mathbf{k}}$$

അതുകൊണ്ട് $\mathbf{l} = \mathbf{l}_z + \mathbf{OC} \times m\,\mathbf{v}$

$\mathbf{l}_z$ നിശ്ചല അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമാണ്, എന്നാൽ **l** സമാന്തരമല്ല. കണികയെ സംബന്ധിച്ച് പൊതുവേ പറഞ്ഞാൽ, *l* എന്ന കോണീയ ആക്കം, പരിക്രമണാക്ഷത്തിലൂടെയുള്ളതല്ല, അതായത് ഒരു കണത്തെ സംബന്ധിച്ച്, **l** ഉം ω യും സമാന്തരമായിരിക്കണമെന്നില്ല. ഇക്കാര്യം സ്ഥാനാന്തരചലനവുമായി ഒത്തുനോക്കുന്നത് നന്നായിരിക്കും. സ്ഥാനാന്തരചലനത്തിൽ ഒരു കണികയെ സംബന്ധിച്ചിടത്തോളം **p** യും **v** യും എപ്പോഴും

പരസ്പരം സമാന്തരമാണ്.

ഒരു ദൃഢവസ്തുവിന്റെ ആകെ കോണീയ ആക്കം കൂട്ടിയെടുക്കുന്നതിന്, ഓരോ കണികയുടെയും പങ്ക് ഒരുമിച്ചു ചേർക്കേണ്ടതുണ്ട്.

അതായത്:

$$\mathbf{L} = \sum \mathbf{l}_i = \sum \mathbf{l}_{iz} + \sum \mathbf{OC}_i \times m_i \mathbf{v}_i$$

L ന്റെ Z അക്ഷത്തിന്റെ ലംബവും Z അക്ഷത്തിലൂടെ ഉള്ളതുമായ ഘടകങ്ങളെ $L_\perp$ എന്നും Z എന്നും എടുത്താൽ

$$\mathbf{L}_\perp = \sum \mathbf{OC}_i \times m_i \mathbf{v}_i \qquad (7.44a)$$

ഇതിൽ m_i യും $\mathbf{v}_i$ യും യഥാക്രമം i എന്ന കണികയുടെ മാസും പ്രവേഗവുമാണ്; $\mathbf{C}_i$ എന്നത് ആ കണിക സഞ്ചരിക്കുന്ന വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രവുമാണ്.

കൂടാതെ $$\mathbf{L}_z = \sum \mathbf{l}_{iz} = \left(\sum_i m_i r_i^2 \right) \omega \, \hat{\mathbf{k}}$$

അല്ലെങ്കിൽ $$\mathbf{L}_z = I\omega \, \hat{\mathbf{k}} \qquad (7.44b)$$

j എന്ന കണികയുടെ അക്ഷത്തിൽനിന്നുള്ള ദൂരം ആണ് r_i. ഒരു അക്ഷത്തിന് ആധാരമായി പരിക്രമണം ചെയ്യുന്ന ഒരു വസ്തുവിന്റെ മൊമെന്റ് ഓഫ് ഇനർഷ്യ നിർവചിക്കുന്നത് $\mathbf{I} = \Sigma \mathbf{m}_i \mathbf{r}_i^2$ എന്നാണ്) അതായത്,

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_z + \mathbf{L} \qquad (7.44c)$$

ഒരു അക്ഷത്തിൽ പരിക്രമണം ചെയ്യുന്ന ദൃഢവസ്തുക്കളെന്ന നിലയിൽ ഈ അധ്യായത്തിൽ പരിഗണിച്ചവയെല്ലാംതന്നെ സമമിതി (symmetric) യിലുള്ള വസ്തുക്കളാണ്. അതായത് പരിക്രമണാക്ഷം അവയുടെ ഏതെങ്കിലും ഒരു സമമിതി അക്ഷമായിരിക്കും. ഇത്തരം വസ്തുക്കളിൽ തന്നിരിക്കുന്ന OC യുടെ ഒരു വിലക്ക് ഒരു നിശ്ചിത പ്രവേഗം v_i ഉണ്ടായിരിക്കും. ഈ ബിന്ദുവിന് വ്യാസ വിപരീത ദിശയിലുള്ള ബിന്ദുവിലെ കണത്തിന് $-v_i$ പ്രവേഗവുമുണ്ടായിരിക്കും. സ്വാഭാവികമായും ഇത്തരം കണങ്ങൾ ഉണ്ടാക്കുന്ന ടോർക്കുകൾ വിപരീതവും തുല്യവുമായിരിക്കും. അതിനാൽ ഇത്തരം കണികകളുടെ ടോർക്കുകൾ കൂടിച്ചേർന്നുണ്ടാകുന്ന $\mathbf{L}_\perp$ പൂജ്യമാവും. അതായത് $\mathbf{L} = 0$ അതുകൊണ്ട്

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_z = I\omega \, \hat{\mathbf{k}} \qquad (7.44d)$$

പരിക്രമണ അക്ഷത്തെ സംബന്ധിച്ച് സമമിതിയിലല്ലാത്ത വസ്തുക്കളാകുമ്പോൾ, L എന്നത് L_zന് സമാനമാവുന്നില്ല. അതുകൊണ്ട് L പരിക്രമണാക്ഷത്തിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുകയുമില്ല. പട്ടിക 7.1 പരിശോധിച്ച് $L = L_z$എന്ന് കരുതാനാവാത്ത ഉദാഹരണം ഏതാണെന്ന് പറയാനാകുമോ?

ഇനി സമവാക്യം (7.44 b) യെ അവകലനം ചെയ്തു നോക്കാം. $\hat{\mathbf{k}}$ എന്നത് ഒരു നിശ്ചിത (സ്ഥിരസംഖ്യ) സദിശം ആയതിനാൽ,

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{L}_z) = \left(\frac{d}{dt}(I\omega) \right) \hat{\mathbf{k}}$$

സമവാക്യം (7.28b) ൽ നിന്നും

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \tau$$ എന്നെഴുതാം

ഒരു നിശ്ചല അക്ഷത്തെ ആധാരമാക്കിയുള്ള പരിക്രമണത്തെ കുറിച്ച് ചർച്ചചെയ്യുമ്പോൾ, തൊട്ടുമുമ്പുള്ള വിഭാഗത്തിൽ കണ്ടതുപോലെ, പരിക്രമണ അക്ഷത്തിൽ കൂടിയുള്ള ബാഹ്യ ടോർക്കുകളുടെ ഘടകങ്ങളെ മാത്രമേ കണക്കിലെടുക്കേണ്ടതുള്ളൂ. ഇത് അർഥമാക്കുന്നത് $\tau = \tau \, \hat{\mathbf{k}}$ എന്നാണ്. $L = L_z + L_\perp$ആയതിനാൽ L_z ന്റെ ദിശ (സദിശം) കൃത്യമായി നിർവചിച്ചിട്ടുള്ളതാണ്. അതായത്

$$\frac{d\mathbf{L}_z}{dt} = \tau \, \hat{\mathbf{k}} \qquad (7.45a)$$

കൂടാതെ $$\frac{d\mathbf{L}_\perp}{dt} = 0 \qquad (7.45b)$$

അതായത്, ഒരു നിശ്ചലഅക്ഷത്തെ ആധാരമാക്കിയുള്ള പരിക്രമണത്തിൽ നിശ്ചല അക്ഷത്തിന് ലംബമായ കോണീയ ആക്കത്തിന്റെ ഘടകം ഒരു സ്ഥിര മൂല്യമുള്ളതായിരിക്കും.

$\mathbf{L}_z = I\omega \, \hat{\mathbf{k}}$ സമവാക്യം (7.45 -a) ആയതുകൊണ്ട്

$$\frac{d}{dt}(I\omega) = \tau \qquad (7.45c)$$

ടോർക്ക് സമയത്തിനൊപ്പം മാറുന്നില്ലെങ്കിൽ

$$\frac{d}{dt}(I\omega) = I\frac{d\omega}{dt} = I\alpha$$

കൂടാതെ സമവാക്യം (7.45 c) യിൽനിന്ന്

$$\tau = I\alpha \qquad (7.43)$$

ഈ സമവാക്യം നേരത്തേതന്നെ (പ്രവൃത്തിഗതികോർജ വിശകലനത്തിലൂടെ) ലഭ്യമായതാണ്.

7.13.1 കോണീയആക്കത്തിന്റെ സംരക്ഷണം (Conservation of Angular Momentum)

ഒരു സ്ഥിര അക്ഷത്തെ അവലംബിച്ചുകൊണ്ടുള്ള പരിക്രമണത്തിന്റെ പശ്ചാത്തലത്തിൽ നാം കോണീയ ആക്കസംരക്ഷണനിയമം വീണ്ടും പരിഗണിക്കുകയാണ്. സമവാക്യം (7.45 c) പ്രകാരം ബാഹ്യ ടോർക്ക് പൂജ്യമാവുമ്പോൾ,

$$Lz = I\,\omega = \text{സ്ഥിരസംഖ്യ} \qquad (7.46)$$

സമമിതിയുള്ള വസ്തുക്കളെ സംബന്ധിച്ച്, സമവാക്യം (7.44 *d*) പ്രകാരം Lz നു പകരം L എന്നെഴുതാം. (L ഉം Lz ഉം യഥാക്രമം **L**, **Lz** എന്നിവയുടെ പരിമാണങ്ങളാണ്.)

ഇത് പരിക്രമണസറിരാക്ഷമുള്ള കണികാവ്യവസഥയുടെ കോണീയആക്കസംരക്ഷണ നിയമം ആയി പരിഗണിക്കാം. സമവാക്യം (7.29 *a*) ക്ക് തുല്യം. സമവാക്യം (7.46) ആവട്ടെ നമ്മുടെ നിത്യജീവിതത്തിൽ പല സന്ദർഭങ്ങളിലായി നാം കടന്നുവരുന്ന നിരവധി പ്രായോഗിക കാര്യങ്ങളിലടങ്ങിയതാണ്. നിങ്ങൾക്ക് ഒരു സുഹൃത്തുമായി ചേർന്ന് ചെയ്തുനോക്കാവുന്ന ഒരു പരീക്ഷണമാണ് ഇനി പറയുന്നത്:

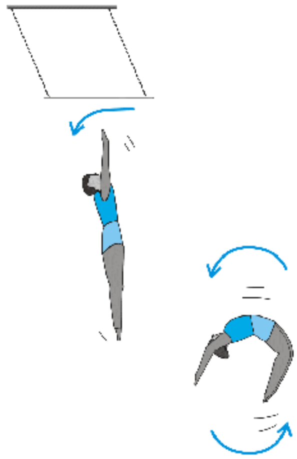
നിങ്ങളിൽ ഒരാൾ വട്ടത്തിൽ കറക്കാവുന്ന ഒരു കസേരയിൽ കൈകൾ മടക്കിവച്ചു കൊണ്ടും കാലുകൾ തറയിൽ തൊടാതെയും ഇരിക്കുക. മറ്റൊരാളോട് കസേര പെട്ടെന്ന് കറക്കാൻ പറയുക. കസേര ഒരു കോണീയ വേഗം കൈവരിക്കുന്ന ഘട്ടത്തിൽ ഇരിക്കുന്നയാൾ കൈകൾ തിരശ്ചീനമായി നിവർത്തുക. എന്തു സംഭവിക്കുന്നു? കോണീയവേഗം കുറയുന്നു. ഇനി കൈകൾ ശരീരത്തോടടുപ്പിച്ച് വെക്കുമ്പോഴേക്കും കോണീയ വേഗം വർധിക്കുന്നതായി അനുഭവപ്പെടും. കോണീയ ആക്കസംരക്ഷണനിയമത്തിന്റെ പ്രായോഗികത വെളിവാക്കുന്ന ഒരു അനുഭവമാണ് ഈ പരീക്ഷണം. ഈ പരിക്രമണ ചലനത്തിൽ ഘർഷണം കാര്യമായി പരിഗണിക്കേണ്ടതില്ലെങ്കിൽ, കസേരയുടെ പരിക്രമണ അക്ഷത്തെ ആധാരമാക്കിയുള്ള ബാഹ്യ ടോർക്കുകളൊന്നും നിലവിലില്ല. അതിനാൽ $I\omega$ മാറുന്നില്ല. കൈകൾ വിടർത്തുമ്പോൾ പരിക്രമണാക്ഷത്തിന് ആധാരമാക്കിയുള്ള I ൽ ഒരു വർധന സംഭവിക്കുന്നു. അതായത്, കോണീയ വേഗത ω യിൽ കുറവുവരുന്നു. ഇനി കൈകൾ വീണ്ടും ശരീരത്തോട് അടുപ്പിക്കുമ്പോൾ നേരെ തിരിച്ചുള്ള അനുഭവം ഉണ്ടാവുകയും ചെയ്യും.

ഒരു സർക്കസ്സിലെ കായികാഭ്യാസിയും ഒരു ഡൈവിങ് അഭ്യാസിയും ഈ തത്വത്തിന്റെ ആനുകൂല്യം മുതലാക്കുന്നവരാണ്. അതുപോലെ സ്കേറ്റിംഗ് നടത്തുന്നവരും, വിവിധതരം നൃത്തങ്ങൾ അഭ്യസിക്കുന്നവരും അതിശയകരമായി ഒറ്റക്കാലിൽ പാദാഗ്രത്തിൽ നിന്ന് തിരിഞ്ഞുകൊണ്ട് നൃത്തം (*pirouette*) ചെയ്യുന്നവരും ഈ തത്വത്തെ ഉപയോഗിക്കുന്നവരാണ്.

ചിത്രം 7–36 (a) കോണീയ ആക്കത്തിന്റെ സംരക്ഷണം സംബന്ധിച്ച പരീക്ഷണം. പെൺകുട്ടി ചക്രക്കസേരയിൽ ഇരുന്നു കൊണ്ട് കൈകൾ വിരിച്ചും ശരീരത്തോടടുപ്പിച്ചും പരീക്ഷണം നടത്തുന്നു.

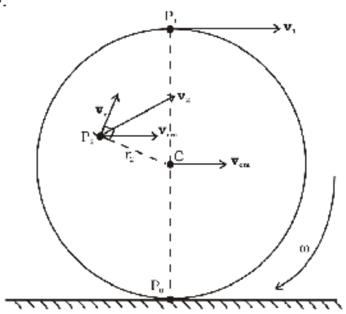
7.14. ഉരുളൽ ചലനം (Rolling motion)

നിത്യജീവിതത്തിൽ സർവസാധാരണമായി കണ്ടുവരുന്ന ചലനമാണ് ഉരുളൽ ചലനം. സഞ്ചാരത്തിനുപയോഗിക്കുന്ന നാനാതരം ചക്രങ്ങൾക്കുള്ളത് ഉരുളൽ ചലനങ്ങളാണ്. ഒരു ഡിസ്ക് ഉദാഹരണമായി എടുക്കാം. അത് പ്രതലങ്ങളിലൂടെ ഉരുളുന്ന മറ്റു വസ്തുക്കൾക്കും ശരിയായിരിക്കും. നിരങ്ങുകയോ, തെന്നുകയോ ചെയ്യാതെ ഡിസ്ക് നിരന്തരമായി ഉരുളുന്നുവെന്ന് സങ്കൽപിക്കുക. ഇതിനർത്ഥം, പ്രതലവുമായി സമ്പർക്കത്തിലുള്ള തകിടിന്റെ സ്പർശ ബിന്ദു എല്ലായ്പ്പോഴും പ്രതലത്തിൽ നിശ്ചലാവസ്ഥയിലായിരിക്കും.



ചിത്രം 7.36 b) ഒരു ശരീരാഭ്യാസി കോണീയ ആക്ക സംരക്ഷണ നിയമം പ്രയോജനപ്പെടുത്തി പ്രകടനം നടത്തുന്നു.

നേരത്തേ സൂചിപ്പിച്ചപോലെ ഒരു ഉരുളൽചലനം, പരിക്രമണചലനത്തിന്റെയും സ്ഥാനാന്തരചലനത്തിന്റെയും സംയോജിതരൂപമാണ്. ഒരു കണികാ വ്യവസ്ഥയുടെ സ്ഥാനാന്തരചലനം അതിന്റെ ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രത്തിന്റെ ചലനമാണ്.



ചിത്രം 7.37 നിരപ്പായ പ്രതലത്തിലൂടെയുള്ള ഒരു വൃത്തത്തകിടിന്റെ തെന്നലുകളില്ലാത്ത ഉരുളൽ ചലനം. പ്രതലത്തിൽ സ്പർശിക്കുന്ന സമയത്ത് തകിടിന്റെ p_0 എന്ന ബിന്ദു നിശ്ചലാവസ്ഥയിലായിരിക്കും. തകിടിന്റെ ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രത്തിന്റെ പ്രവേഗം v_{cm} ആണ്. Cയിൽ കൂടിയുള്ള അക്ഷത്തെ ആധാരമാക്കിയുള്ള കോണീയപ്രവേഗം ω യോടു കൂടിയാണ് ഡിസ്ക് ചലിക്കുന്നത്. $v_{cm} = R\omega$, ഇതിൽ R തകിടിന്റെ ആരമാണ്.

ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രത്തിന്റെ പ്രവേഗം v_{cm} എന്നെടുത്തിരിക്കുന്നതിനാൽ തകിടിന്റെ സ്ഥാനാന്തരത്തിലെ പ്രവേഗം അതുതന്നെയാണെന്ന് കണക്കാക്കാം. ഉരുൾചലനത്തിലുള്ള തകിടിന്റെ ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രം അതിന്റെ ജ്യാമിതീയ കേന്ദ്രത്തിൽതന്നെയായതിനാൽ (ചിത്രം 7.37) C യുടെ പ്രവേഗവും v_{cm} തന്നെയാണ്. അത് പ്രതലനിരപ്പിന് സമാന്തരവുമാണ്. തകിടിന്റെ പരിക്രമണചലനം C യിൽ കൂടി കടന്നു പോകുന്ന അതിന്റെ സമമിതീയ അക്ഷം ആധാരമാക്കിയാണ്. അതുകൊണ്ട് തകിടിന്റെ P_0, P_1, P_2 എന്നീ സ്ഥാനങ്ങൾക്ക് രണ്ടുവിധത്തിലുള്ള ചലനങ്ങളുണ്ട്; ഒന്ന് സ്ഥാനാന്തര പ്രവേഗമായ v_{cm} ഓടുകൂടിയുള്ളതും, മറ്റേത് പരിക്രമണം മൂലമുണ്ടാകുന്ന രേഖീയപ്രവേഗം v_r ഓടുകൂടിയും. ഒരു അക്ഷത്തെ ആധാരമാക്കിയുള്ള തകിടിന്റെ പരിക്രണചലനത്തിൽ v_r ന്റെ പരിമാണം $v_r = r\omega$ എന്നാണ്, ഇതിൽ ω, പരിക്രമണത്തിന്റെ കോണീയ പ്രവേഗവും r എന്നത് ബിന്ദുവിലേക്ക് അക്ഷത്തിൽനിന്നുള്ള ദൂരവുവാണ് (അതായത് C യിൽ നിന്ന്). തന്നിരിക്കുന്ന ബിന്ദുവിന്റെ C ആസ്പദമാക്കിയുള്ള ആരസദിശ (*radius vector*) ത്തിന് ലംബമായാണ് പ്രവേഗം v_r ന്റെ ദിശ. ചിത്രം 7.37 ൽ P_2 എന്ന ബിന്ദുവിന്റെ പ്രവേഗമായ v_2 വും അതിന്റെ ഘടകങ്ങളായ v_r, v_{cm} എന്നിവയും കാണിച്ചിരിക്കുന്നു. ഇവിടെ v_r കാണിച്ചിരിക്കുന്നത് CP_2 വിന് ലംബമായിട്ടാണ്. v_2 എന്നത് $P_0 P_2$ എന്ന രേഖക്ക് ലംബമാണെന്ന് എളുപ്പത്തിൽ തിരിച്ചറിയാനാവും. അതിനാൽ P_0വിലൂടെ കടന്നുപോകുന്നതും ω ക്ക് സമാന്തരവുമായി പോകുന്ന രേഖയെ പരിക്രമണത്തിന്റെ ക്ഷണിക അക്ഷം (*instantaneous axis*) എന്നു പറയുന്നു.

P_0 വിൽ, പരിക്രമണംമൂലം ഉണ്ടാകുന്ന രേഖീയ പ്രവേഗം v_r സ്ഥാനാന്തരപ്രവേഗമായ v_{cm} നു തികച്ചും വിപരീതമായിരിക്കുമെന്ന് കാണാവുന്നതാണ്. കൂടാതെ ഇവിടെ v_r ന്റെ പരിമാണം $R\omega$ ആകുന്നു, തകിടിന്റെ ആരമാണ് R. p_0 ക്ഷണിക വിരാമാവസ്ഥയിലേക്കെത്തുന്നതിന് $v_{cm} = R\omega$ എന്ന നിബന്ധന ആവശ്യമായി വരുന്നു. അതിനാൽ നിരങ്ങിനീങ്ങാതെ ഉരുളുന്നതിന് തകിട് പാലിക്കേണ്ട നിബന്ധനയാണ് താഴെ കാണിച്ചിരിക്കുന്നത്.

$$v_{cm} = R\omega \qquad (7.47)$$

സാന്ദർഭികമായി, തകിടിന്റെ മുകൾഭാഗത്തെ ബിന്ദുവായ P_1 ലെ പ്രവേഗം v_1 ആണെന്നും അതിന്റെയും അളവ് $v_{cm} + R\omega$ അഥവാ $2\ v_{cm}$ ആണെന്നും പറയേണ്ടിവരും, ഇത് പ്രതലനിരപ്പിന് സമാന്തരവുമാണല്ലോ. സമവാക്യം (7.47) എല്ലാത്തരം ഉരുളൽ വസ്തുവിനും ബാധകമാണ്.

7.14.1. ഉരുളൽ ചലനത്തിന്റെ ഗതികോർജം (Kinetic Energy of Rolling Motion)

ഒരു ഉരുളൽചലനവസ്തുവിന്റെ ഗതികോർജത്തെ വിശദീകരിക്കുന്ന ഒരു ഗണിതവാക്യം ഉണ്ടാക്കുക എന്നതാണ് അടുത്തതായി ചെയ്യേണ്ടത്. ഒരു ഉരുളൽചലന വസ്തുവിന്റെ ഗതികോർജത്തെ രണ്ടു വിധത്തിൽ വേർതിരിക്കാനാവും. സ്ഥാനാന്തര ഗതികോർജമെന്നും പരിക്രമണ ഗതികോർജമെന്നും. ഒരു കണികാവ്യവസ്ഥയുടെ സവിശേഷതയുടെ ഫലമായി, അതിന്റെ ഗതികോർജത്തിൽ (K) അതിന്റെ ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രത്തിന്റെ ചലനം മൂലമുള്ള ഗതികോർജം (സ്ഥാനാന്തരം)($MV^2/2$) എന്നും, ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രത്തെ ചുറ്റിക്കൊണ്ട് പരിക്രമണം മൂലമുള്ള ഗതികോർജം (K') എന്നും ഉള്ള രണ്ടു ഘടകങ്ങൾ ഉള്ളതായി കാണാം. അതിനാൽ

$$K = K' + MV^2 / 2 \qquad (7.48)$$

ഈ പൊതുഫലത്തെ ഉരുളൽചലനത്തിന്റെ കാര്യത്തിൽ പ്രയോഗിക്കാനാവും. പരിശീലന പ്രശ്നം 7.31 കാണുക. ദ്രവ്യമാന കേന്ദ്രത്തിന്റെ ഗതികോർജ്ജം അതായത് സ്ഥാനാന്തര ഗതികോർജം $K = mv^2_{cm}/2$ ആണ്. ഇതിൽ m മാസ്സും v_{cm} ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രത്തിന്റെ പ്രവേഗവുമാണ്. ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രത്തെ ആധാരമാക്കിയുള്ള പരിക്രമണവും കൂടി ഉൾപ്പെടുന്നതാണ് ഉരുളൽചലനം എന്നതിനാൽ, K' പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നത് വസ്തുവിന്റെ പരിക്രമണം കൊണ്ടുള്ള ഗതികോർജം ആണ്; K' $I\omega^2/2$, ഇതിൽ I എന്നത് ഉചിതമായ അക്ഷത്തെ ആധാരമാക്കിയുള്ള മൊമെന്റ് ഓഫ് ഇനർഷ്യയാണ്. ഇവിടെ അത് ഉരുളൽ വസ്തുവിന്റെ സമമിതീയ അക്ഷം കൂടിയാണ്. അതിനാൽ ഉരുളൽ വസ്തുവിന്റെ ഗതികോർജം താഴെ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ എഴുതാവുന്നതാണ്.

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}m\,\upsilon_{cm}^2 \qquad (7.49a)$$

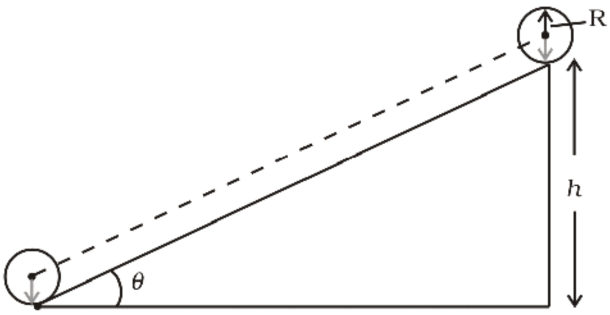
ഇതിൽ Iക്കു പകരം Mk^2 ചേർക്കുന്നു, k = വസ്തുവിന് യോജിക്കുന്ന വിധത്തിലുള്ള റേഡിയസ് ഓഫ് ജൈറേഷനും $v_{cm} = R\omega$ യുമാണ്. അങ്ങനെയാവുമ്പോൾ

$$K = \frac{1}{2}\frac{m\,k^2\upsilon_{cm}^2}{R^2} + \frac{1}{2}m\,\upsilon_{cm}^2$$

അല്ലെങ്കിൽ $K = \frac{1}{2}m\,\upsilon_{cm}^2\left(1 + \frac{k^2}{R^2}\right)$ (7.49b)

സമവാക്യം (7.49 b) ഏതുതരം ഉരുളൽ ചലനവസ്തുവിനും ഉപയോഗിക്കാവുന്നതാണ്, ഉദാ. തകിടുകൾ, സിലിണ്ടർ, വളയം, ഗോളം തുടങ്ങിയവ.

ഉദാഹരണം: 7.16: മൂന്നു വസ്തുക്കൾ – ഒരു വളയം, ഒരു ഘന സിലിണ്ടർ, ഒരു ഗോളം എന്നിവ ഒരു ചരിവു പലകയിലൂടെ തെന്നിപ്പോകാതെ താഴേക്കുരുളുന്നു. മൂന്നും നിശ്ചലാവസ്ഥയിൽ നിന്നാണ് ആരംഭിക്കുന്നത്. മൂന്നിന്റെയും ആരങ്ങൾ ഒരേ അളവിലുള്ളതാണ്. ഏത് വസ്തുവിനാണ് തറയിലേക്കെത്തുമ്പോൾ ഏറ്റവും കൂടുതൽ പ്രവേഗമുണ്ടാവുക?



ചിത്രം 7.38

ഉത്തരം: ഇവിടെ ഉരുൾവസ്തുവിന്റെ ഊർജസംരക്ഷണ നിയമം കണക്കിലെടുക്കേണ്ടതാണ്. അതായത് ഘർഷണം മൂലം ഊർജ നഷ്ടം സംഭവിക്കുന്നില്ല. താഴേക്ക് ഉരുളുന്നതിലൂടെ വസ്തുവിന്റെ സ്ഥിതികോർജ (= mgh) നഷ്ടത്തിന് തുല്യമായി ഗതികോർജം വസ്തുവിന് ലഭ്യമാകുന്നു (ചിത്രം 7.38). വസ്തുക്കൾ നിശ്ചലാവസ്ഥയിൽ നിന്ന് ആരംഭിച്ചതിനാൽ നേടിയ ഗതികോർജം അന്തിമ ഗതികോർജത്തിന്റെ അളവായിരിക്കും. സമവാക്യം (7.49b) യിൽനിന്ന്, $K = \frac{1}{2}mv^2\left(1 + \frac{k^2}{R^2}\right)$.

ഇതിൽ v വസ്തുവിന്റെ ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രത്തിന്റെ അന്തിമപ്രവേഗമാണ്. K ക്കു പകരം mgh ഉം ഈ സമീകരണത്തിലേക്ക് കൊണ്ടുവന്നാൽ

$$m\,gh = \frac{1}{2}m\,\upsilon^2\left(1 + \frac{k^2}{R^2}\right)$$

അഥവാ $\upsilon^2 = \left(\frac{2\,gh}{1 + k^2/R^2}\right)$

ഇത് ഉരുളൽവസ്തുവിന്റെ മാസിനെ കണക്കിലെടുക്കാതെയുള്ള സമവാക്യമാണ്.

വളയത്തിനു $k^2 = R^2$ ആയതുകൊണ്ട്

$$\upsilon_{ring} = \sqrt{\frac{2\,gh}{1+1}},$$

$$= \sqrt{gh}$$

ഖര സിലിണ്ടറിനു k^2 $R^2/2$

$$\upsilon_{disc} = \sqrt{\frac{2\,gh}{1+1/2}}$$

$$= \sqrt{\frac{4\,gh}{3}}$$

ഖര ഗോളത്തിനായി $k^2 = 2R^2/5$

$$\upsilon_{ഗോളം} = \sqrt{\frac{2\,gh}{1+2/5}}$$

$$= \sqrt{\frac{10\,gh}{7}}$$

ഫലങ്ങൾ പരിശോധിക്കുമ്പോൾ ചരിവു പലകയുടെ താഴേക്കെത്തുമ്പോഴേക്കും ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രത്തിന്റെ പ്രവേഗം ഏറ്റവും കൂടുതൽ കാണിക്കുന്നത് ഗോളത്തിന്റെതും ഏറ്റവും കുറവു കാണിക്കുന്നത് വളയത്തിന്റെതുമാണെന്ന് മനസ്സിലാക്കാം.

എല്ലാ വസ്തുക്കൾക്കും ഒരേ മാസ്സാണെങ്കിൽ, ഏതു വസ്തുവിനായിരിക്കും കൂടുതൽ പരിക്രമണഗതികോർജം അന്തിമമായി ഉണ്ടാവുക?

സംഗ്രഹം

1. മാതൃകാപരമായി, ഒരു ദൃഢവസ്തുവിൽ വിവിധ കണങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള പരസ്പര അകലങ്ങൾ, അതിന്മേൽ ബലങ്ങൾ പ്രയോഗിക്കപ്പെട്ടാൽ പോലും മാറ്റാൻ സാധിക്കാത്തതാണ്.

2. ഒരു ദൃഢവസ്തു ഒരു സ്ഥാനത്ത് ഉറപ്പിക്കുകയാണെങ്കിൽ അതിനു പരിക്രമണചലനം മാത്രമേ സാധ്യമാകൂ. ഏതെങ്കിലും രീതിയിൽ ഉറപ്പിച്ചിട്ടില്ലാത്ത ഒരു ദൃഢവസ്തുവാണെങ്കിൽ അതിന് സ്ഥാനാന്തരചലനമോ സ്ഥാനാന്തരചലനവും പരിക്രമണചലനവും ചേർന്നുള്ള ചലനാവസ്ഥയോ ഉണ്ടാകാം

3. ഒരക്ഷത്തെ ആധാരമാക്കിയുള്ള പരിക്രമണത്തിൽ ഒരു ദൃഢവസ്തുവിലെ എല്ലാ കണികകളും അക്ഷത്തിനു ലംബമായ പ്രതലത്തിലൂടെയുള്ളതും അക്ഷത്തിൽ വൃത്തകേന്ദ്രം വരുന്നതുമായ വൃത്തപാതയിലൂടെ സഞ്ചരിക്കും. പരിക്രമണചലനത്തിലുള്ള ഒരു ദൃഢവസ്തുവിന്റെ എല്ലാ കണികകൾക്കും ഒരേസമയത്ത് ഒരേ കോണീയ പ്രവേഗമായിരിക്കും ഉണ്ടാവുക.

4. ഒരു പൂർണ സ്ഥാനാന്തരചലനത്തിലുള്ള ദൃഢവസ്തുവിന്റെ എല്ലാ കണങ്ങൾക്കും ഒരേ സമയത്ത് ഒരേ പ്രവേഗമായിരിക്കും ഉണ്ടാവുക.

5. കോണീയപ്രവേഗം ഒരു സദിശമാണ്. പരിക്രമണാക്ഷത്തിലൂടെ പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്ന അതിന്റെ പരിമാണം $\omega = d\theta/dt$. ഒരു നിശ്ചിത അക്ഷത്തെ ചുറ്റിയുള്ള പരിക്രമണത്തിൽ സദിശം ω ക്ക് ഒരു നിശ്ചിത ദിശയുണ്ടായിരിക്കും.

6. രണ്ടു സദിശങ്ങളായ ***a*, *b*** എന്നിവയുടെ സദിശഗുണനം അഥവാ ക്രോസ് ഗുണനം (*cross product*) രേഖപ്പെടുത്തുന്നത് $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ എന്നാണ്. ഈ സദിശത്തിന്റെ പരിമാണം $ab \sin\theta$ യാണ്. ഇതിന്റെ ദിശ വലംപിരിയാണി നിയമമോ വലംകൈനിയമമോ അനുസരിച്ചു നിർണയിക്കാം.

7. ഒരു നിശ്ചിത അക്ഷത്തെ ചുറ്റിക്കൊണ്ടുള്ള ഒരു ദൃഢവസ്തുവിലെ കണികകളുടെ രേഖീയപ്രവേഗം $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ ആയിരിക്കും, ഇതിൽ $\mathbf{r}$ എന്നത് നിശ്ചിത അക്ഷത്തിൽ ഉൾപ്പെട്ട മൂലബിന്ദുവിനെ ആധാരമാക്കിയുള്ള കണികയുടെ സ്ഥാനസദിശമാണ് (*position vector*). ഒരു ബിന്ദുവിൽ ഉറപ്പിച്ചിട്ടുള്ള ദൃഢവസ്തുവിന്റെ പരിക്രമണകാര്യങ്ങളിലേക്കും ഈ ബന്ധം ഉപയോഗിക്കാവുന്നതാണ്. അത്തരം സന്ദർഭങ്ങളിൽ $\mathbf{r}$ എന്നത് ആ ബിന്ദുവിനെ മൂലബിന്ദു (*origin*) ആയി പരിഗണിച്ചുകൊണ്ടുള്ള പ്രസ്തുത കണത്തിന്റെ സ്ഥാനസദിശമായിരിക്കും.

8. ഒരു കണികാവ്യവസ്ഥയുടെ ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രത്തെ നിർവ്വചിക്കുന്ന സ്ഥാനസദിശം താഴെ കാണിച്ചരിക്കുന്നതുപോലെയാണ്.

$$\mathbf{R} = \frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{M}$$

9. ഒരു കണികാവ്യവസ്ഥയുടെ ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രത്തിന്റെ പ്രവേഗം $\mathbf{V} = \mathbf{p}/M$ എന്നാണ്. ഇതിൽ $\mathbf{p}$ എന്നത് വ്യവസ്ഥയുടെ രേഖീയആക്കം ആണ്. ഒരു വസ്തുവിന്റെ അല്ലെങ്കിൽ ഒരു വ്യവസ്ഥയുടെ മുഴുവൻ മാസും ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രത്തിൽ കേന്ദ്രീകരിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെയും വസ്തുവിൽ/വ്യവസ്ഥയിൽ പ്രയോഗിക്കപ്പെട്ട മുഴുവൻ ബലവും ഈ ബിന്ദുവിൽ പ്രയോഗിക്കപ്പെട്ടിരിക്കുന്നപോലെയുമാണ് ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രത്തിന്റെ ചലനം. പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്ന ബാഹ്യബലങ്ങളുടെ തുക പൂജ്യമാവുന്നിടത്ത്, വ്യവസ്ഥയുടെ മൊത്തം രേഖീയ ആക്കം സ്ഥിരതയുള്ളതായിരിക്കും.

10 n കണികകളുള്ള ഒരു വ്യവസ്ഥയുടെ മൂലബിന്ദുവിനെ (*origin*) ആധാരമാക്കിയുളള കോണീയ ആക്കം താഴെ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതാണ്.

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i$$

n കണികകളുള്ള ഒരു വ്യവസ്ഥയുടെ മൂലബിന്ദുവിനെ (*origin*) ആധാരമാക്കിയുളള *ടോർക്ക്* τ (*torque or moment of force*) താഴെ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതാണ്.

$$\tau = \sum_{1} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i$$

F_i കണിക i യിൽ പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്ന ബാഹ്യബലങ്ങളും, ആന്തരിക ബലങ്ങളും ഉൾപ്പെട്ടതാണ്. കണികകൾക്കിടയിലുള്ള

ബലം അവയെ പരസ്പരം ബന്ധിപ്പിക്കുന്ന നേർരേഖയിലൂടെയുള്ളതും, ഈ ബലങ്ങൾ ന്യൂട്ടന്റെ മൂന്നാം ചലനനിയമം ബാധകമായതും കൊണ്ട് $t_{int} = 0$ എന്നെഴുതാം. അതിനാൽ $\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \tau_{ext}$

11. ഒരു ദൃഢവസ്തു യാന്ത്രിക സംതുലനാവസ്ഥയിലാവുന്ന നിബന്ധനകൾ:

1) അത് സ്ഥാനാന്തര സംതുലനത്തിലായിരിക്കണം. അതായത് അതിന്മേൽ പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്ന പരിണത ബലം പൂജ്യമായിരിക്കണം: $\sum F_i = 0$

2) അത് പരിക്രമണ സംതുലനാവസ്ഥയിലായിരിക്കണം, അതായത് അതിന്മേലുള്ള ബാഹ്യ ടോർക്ക് പൂജ്യമായിരിക്കണം $\sum \tau_i = \sum r_i \times F_i = 0$

12 ഒരു വ്യാപ്തിതവസ്തുവിന്റെ (extended body) ഗുരുത്വാകർഷണകേന്ദ്രം സ്ഥിതിചെയ്യുന്നത് വസ്തുവിന്മേലുള്ള മൊത്തം ഗുരുത്വാകർഷണ ടോർക്കുകൾ പൂജ്യമാകുന്ന ബിന്ദുവിലാണ്.

13 ഒരു ദൃഢവസ്തുവിന്റെ അക്ഷത്തിനെ ആധാരമാക്കിയുള്ള മൊമെന്റ് ഓഫ് ഇനർഷ്യ നിർവ്വചിക്കുന്നത് $I = \sum m_i r_i^2$ എന്നാണ്. ഇതിൽ r_i എന്നത് അക്ഷത്തിൽനിന്നും കണിക i ലേക്കുള്ള ലംബ ദൂരമാണ്. പരിക്രമണത്തിന്റെ ഗതികോർജം $K = \frac{1}{2} I\omega^2$ ആകുന്നു.

14 ഏതെങ്കിലും ഒരു അക്ഷം ആധാരമാക്കി മൊമെന്റ് ഓഫ് ഇനർഷ്യ കണ്ടുപിടിക്കുവാൻ ഉപയോഗിക്കുന്ന സിദ്ധാന്തമാണ് സമാന്തര അക്ഷങ്ങളുടെ തത്വം. ഇത് $I'_z = I_z \;\; Ma^2$ എന്നെഴുതാം. ഇവിടെ I_z എന്നത് I'_z നിർണ്ണയിക്കാനെടുത്ത അക്ഷത്തിനു സമാന്തരമായി വസ്തുവിന്റെ ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രത്തിൽ കൂടി കടന്നു പോകുന്ന അക്ഷത്തെ ആധാരമാക്കിയുള്ള മൊമെന്റ് ഓഫ് ഇനർഷ്യയും, M വസ്തുവിന്റെ മാസും a അക്ഷങ്ങൾക്കിടയിലെ ദൂരവുമാണ്.

15 ഗതികം, ശുദ്ധഗതികം എന്നിവ ആസ്പദമാക്കി വിശകലനം ചെയ്യുമ്പോൾ ഒരു നിശ്ചിത അക്ഷത്തെ ആധാരമാക്കിയുള്ള പരിക്രമണം രേഖീയ ചലനവുമായി സാദൃശ്യം കാണിക്കുന്നു.

16 ഒരു നിശ്ചലഅക്ഷത്തെ ആധാരമാക്കി (z- അക്ഷം എന്നു പറയാം) പരിക്രമണം ചെയ്യുന്ന ഒരു ദൃഢവസ്തുവിനെ സംബന്ധിച്ച് $L_z \;\; I\omega$,

I എന്നത് അക്ഷത്തെ ആധാരമാക്കിയുള്ള മൊമെന്റ് ഓഫ് ഇനർഷ്യയാണ്. പൊതുവേ അത്തരം വസ്തുക്കളെ സംബന്ധിച്ച് കോണീയ ആക്കം L പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്നത് പരിക്രമണാക്ഷത്തിലൂടെ ആകണമെന്നില്ല. അക്ഷത്തെ കേന്ദ്രമാക്കി സമമിതിയുള്ള ഒരു വസ്തുവാണെങ്കിൽ മാത്രമേ L പരിക്രമണാക്ഷത്തിലൂടെ ആയിരിക്കുകയുള്ളൂ. അത്തരം സന്ദർഭങ്ങളിൽ $|\mathbf{L}| - L_z - I\omega$ ആയിരിക്കും. ഒരു നിശ്ചലഅക്ഷത്തെ ആധാരമാക്കി പരിക്രമണം ചെയ്യുന്ന ഒരു ദൃഢവസ്തുവിന്റെ കോണീയ ത്വരണം കാണുവാൻ $I\alpha = \tau$ എന്ന ബന്ധം ഉപയോഗിക്കാം. വസ്തുവിന്മേൽ പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്ന ബാഹ്യടോർക്ക് പൂജ്യമാണെങ്കിൽ, നിശ്ചല അക്ഷത്തെ (z- അക്ഷം) ആധാരമാക്കിയുള്ള കോണീയ ആക്കത്തിന്റെ ഘടകം, $L_z \; (\;\; I\omega)$ സ്ഥിരതയുള്ളതായിരിക്കും.

17 തെന്നൽ സ്വഭാവമില്ലാത്ത ഒരു ഉരുൾ ചലനത്തിൽ $v_{cm} = R\omega$. ഇതിൽ v_{cm} എന്നത് സ്ഥാനാന്തര പ്രവേഗ (ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രത്തിന്റെ) മാണ്. R ആരവും m വസ്തുവിന്റെ മാസുമാണ്. ഉരുളൽ ചലനത്തിൽ അത്തരം വസ്തുക്കൾക്കുള്ള ഗതികോർജം സ്ഥാനാന്തര ചലനത്തിന്റെയും പരിക്രമണ ചലനത്തിന്റെയും ഗതികോർജങ്ങളുടെ തുകയായിരിക്കും. $K = \frac{1}{2} m v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$

പരിമാണങ്ങൾ	ചിഹ്നം	ഡൈമെൻഷൻ	യൂണിറ്റ്	പരാമർശം
കോണീയപ്രവേഗം (*angular velocity*)	ω	$[T^{-1}]$	rad s^{-1}	$v = \omega \times r$
കോണീയആക്കം (*Ang. momentum*)	L	$[ML^2 T^{-1}]$	J s	$L = r \times p$
ടോർക്ക് (*torque*)	τ	$[ML^2 T^{-2}]$	N m	$\tau = r \times F$
മൊമെന്റ് ഓഫ് ഇനർഷ്യ(*moment of inertia*)	I	$[ML^2]$	kg m^2	$I = \sum m_i r_i^2$

വിചിന്തന വിഷയങ്ങൾ

1. ഒരു വ്യവസ്ഥയുടെ ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രത്തിന്റെ ചലനത്തെപ്പറ്റി അറിയുന്നതിന് ആ വ്യവസ്ഥയിലെ ആന്തരിക ബലങ്ങളെപ്പറ്റി അറിയേണ്ട കാര്യമില്ല. ഇക്കാര്യത്തിന് വസ്തുവിന്മേൽ പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്ന ബാഹ്യ ബലങ്ങളെപ്പറ്റിയുള്ള അറിവുകൾ മാത്രം മതിയാകും.
2. ഒരു കണികാവ്യവസ്ഥയുടെ ചലനത്തെ രണ്ടായി വിഭജിച്ചു പഠിക്കുന്നത് പ്രയോജനപ്രദമായി കാണാറുണ്ട്. ഒന്ന് അതിന്റെ ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രത്തിന്റെ ചലനവും രണ്ടാമത്തേത് ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രത്തെ ആധാരമാക്കിയുള്ള കണികാവ്യവസ്ഥയുടെ ചലനവും. ഇത്തരം വിഭജനത്തിന്റെ ഉദാഹരണമാണ് ഒരു കണികാവ്യവസ്ഥയുടെ ഗതികോർജം K കണ്ടെത്തുവാനുപയോഗിക്കുന്ന മാർഗ്ഗങ്ങളിൽ ഒന്ന്. ഇവിടെ K കണക്കാക്കുന്നത് ദ്രവ്യമാന കേന്ദ്രത്തെ ആധാരമാക്കിയുള്ള കണികാവ്യവസ്ഥയുടെ ഗതികോർജം K^{l} ന്റെയും ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രത്തിന്റെ ഗതികോർജമായ $1/2MV^2$ ന്റെയും തുകയായാണ്. അതായത് $K=K^{l}+1/2MV^2$
3. നിശ്ചിത വലുപ്പമുള്ള വസ്തുക്കളെ (അഥവാ കണികാ വ്യവസ്ഥകളെ സംബന്ധിച്ച) ന്യൂട്ടന്റെ രണ്ടാം ചലനനിയമം, കണികൾക്കുള്ള രണ്ടാം ചലനനിയമത്തിനേയും മൂന്നാം ചലനനിയമത്തിനേയും അടിസ്ഥാനപ്പെടുത്തിയുള്ളതാണ്.
4. ഒരു കണികാ വ്യവസ്ഥയിൽ സമയ ക്രമത്തിലുണ്ടാവുന്ന കോണീയ ആക്കത്തിന്റെ നിരക്ക് വ്യത്യാസം വ്യവസ്ഥയുടെ മേലുള്ള ടോർക്കിന്റെ സ്വാധീനത്തിലാണ് ഉണ്ടാകുന്നത്. കണികാ വ്യവസ്ഥയുടെ കാര്യത്തിൽ ന്യൂട്ടന്റെ രണ്ടാം ചലനനിയമം മാത്രമല്ല, മൂന്നാം നിയമപ്രകാരം രണ്ടുകണങ്ങൾ പരസ്പരം ബന്ധപ്പെടുന്ന നേർരേഖയിലൂടെ ചെലുത്തുന്ന തുല്യവും വിപരീതവുമായ ബലങ്ങളുടെ കാര്യവും കൂടി ഉൾപ്പെടുന്നു.
5. മൊത്തം ബാഹ്യ ബലങ്ങളുടെ അഭാവവും മൊത്തം ബാഹ്യ ടോർക്കുകളുടെ അഭാവവും സ്വതന്ത്ര അവസ്ഥകളാണ്. ഒന്നില്ലെങ്കിലും മറ്റേത് ഉണ്ടായിരിക്കാം, ഉദാഹരണത്തിന് ഒരു ബലയുഗ്മത്തിൽ (*couple*), മൊത്തംബാഹ്യബലങ്ങൾ പൂജ്യമാവുമ്പോൾ, മൊത്തം ടോർക്ക് പൂജ്യമാവുന്നില്ല.
6. ഒരു വ്യവസ്ഥയിലേക്ക് പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്ന മൊത്തം ബാഹ്യ ബലങ്ങൾ പൂജ്യമാണെങ്കിൽ, മൂലബിന്ദുവിന്റെ (*origin*) സ്വാധീനത്തിൽ നിന്ന് മൊത്തം ടോർക്ക് സ്വതന്ത്രമായിരിക്കും. അല്ലെങ്കിൽ മൂലബിന്ദുവിന്റെ സ്ഥാനം മൊത്തം ടോർക്കിനെ ബാധിക്കില്ല.
7. ഒരു വസ്തുവിന്റെ ഗുരുത്വകേന്ദ്രവും അതിന്റെ ദ്രവ്യകേന്ദ്രവും ഒന്നാക്കുന്നത് വസതുവിന്റെ വിവിധ ഭാഗങ്ങളിലുള്ള ഗുരുത്വമണ്ഡലത്തിന് വ്യത്യാസം ഇല്ലാത്തതുകൊണ്ടു മാത്രമാണ്.
8. സദിശങ്ങളായ കോണീയ ആക്കം L ഉം കോണീയ പ്രവേഗം ω ഉം പരസ്പരം സമാന്തരമാകണമെന്നില്ല. എന്നിരുന്നാലും, സമമിതീയമായ ഒരു ദൃഢവസ്തു നിശ്ചല അക്ഷത്തെ ആധാരമാക്കി പരിക്രമണം ചെയ്യുന്ന (ഈ അധ്യായത്തിൽ ചർച്ച ചെയ്യപ്പെട്ട) അവസരത്തിൽ $L \quad I\omega$ എന്ന ബന്ധം സൗകര്യപ്രദമാണ്. ഇതിൽ I എന്നത് നിശ്ചല അക്ഷത്തെ ആധാരമാക്കിയുള്ള മൊമെന്റ് ഓഫ് ഇനർഷ്യയാണ്.

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ

7.1. സമമാസ് സാന്ദ്രതയുള്ള ഇനി പറയുന്ന രൂപങ്ങളുടെ ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രം കണ്ടെത്തുക ഗോളം, സിലിണ്ടർ, വളയം, സമചതുരക്കട്ട. ഒരു വസ്തുവിന്റെ ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രം വസ്തുവിനകത്തുതന്നെ ആയിരിക്കണമെന്നുണ്ടോ?

7.2. ഒരു HCl തന്മാത്രയിൽ, രണ്ടു ആറ്റങ്ങളുടെ അണുകേന്ദ്രങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള വിഭജന ദൂരം 1.27 Å (1Å- 10^{-10} മീ) തന്മാത്രയുടെ ദ്രവ്യമാന കേന്ദ്രം (CM) വരുന്നത് എവിടെയാണെന്ന് കണക്കാക്കുക. ഹൈഡ്രജന്റെ അണുവിനേക്കാളും 35.5 ഇരട്ടി ദ്രവ്യമാനമുള്ളതാണ് ക്ലോറിൻ അണുകേന്ദ്രം. അണുവിന്റെ ഏതാണ്ടു മുഴുവൻ മാസ്സും അണുകേന്ദ്രത്തിൽ കേന്ദ്രീകരിക്കുന്നു.

7.3 ഒരു നിരപ്പായ തറയിലൂടെ v പ്രവേഗത്തിൽ ഏകസമാനമായി നീങ്ങിക്കൊണ്ടിരിക്കുന്ന നീണ്ട ഒരു ചക്രവണ്ടിയിൽ ഒരഗ്രത്ത് ഒരു കുട്ടി നിശ്ചലനായിരിക്കുന്നു. കുട്ടി അവിടെനിന്ന് എഴുന്നേൽക്കുകയും അങ്ങോട്ടുമിങ്ങോട്ടും പല രീതിയിൽ നീങ്ങുകയും ചെയ്താൽ ട്രോളിയുടെ (ട്രോളി + കുട്ടി) ദ്രവ്യമാന കേന്ദ്രത്തിന്റെ (CM) വേഗത്തിന് എന്തു സംഭവിക്കുന്നു?

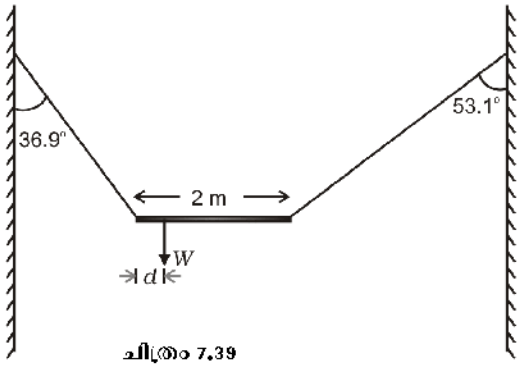
7.4 സദിശങ്ങളായ **a** യുടേയും **b** യുടെയും ഇടയിലുള്ള ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് അടയാളപ്പെടുത്തുക. അത് **a** x **b** യുടെ അളവിന്റെ പകുതിയാണെന്ന് കണക്കാക്കുക.

7.5 മൂന്നു സദിശങ്ങൾ **a,b, c** ഉള്ള ഒരു സമാന്തരികപ്പെട്ടിയുടെ ഉള്ളളവ് **a.(** ℓ **x c)** യുടെ മൂല്യത്തിന് തുല്യമാണെന്ന് കണ്ടെത്തുക.

7.6 ഒരു കണത്തിന്റെ കോണീയ ആക്കം L ന്റെ x, y, z അക്ഷങ്ങളിലൂടെയുള്ള ഘടകങ്ങൾ കണ്ടെത്തുക, അതിന്റെ സ്ഥാന സദിശം **r** ന്, x, y, z ഘടകങ്ങളും ആക്കം **p** ക്ക്, p_x, p_y, p_z ഘടകങ്ങളുമുണ്ട്. കണം x- y തലത്തിലൂടെ മാത്രമേ സഞ്ചരിക്കുന്നുള്ളുവെങ്കിൽ അതിന്റെ കോണീയ ആക്കത്തിന് ഒരു z ഘടകം മാത്രമേയുള്ളുവെന്ന് തെളിയിക്കുക.

7.7 m മാസ്സും v വേഗവുമുള്ള രണ്ട് കണങ്ങൾ, d അകലത്തിലുള്ള സമാന്തര രേഖകളിലൂടെ എതിർ ദിശകളിൽ സഞ്ചരിക്കുന്നു, കോണീയ ആക്കം ഏത് ബിന്ദുവിനെ ആധാരമാക്കി എടുത്താലും, ഈ കണികാ വ്യവസ്ഥയുടെ കോണീയ ആക്ക സദിശം ഒരുപോലെയാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

7.8 സമമല്ലാത്തതും W ഭാരമുള്ളതുമായ ഒരു ബാർ ചിത്രത്തിൽ (7.39) കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ തൂക്കിയിട്ടിരിക്കുന്നു (ചരടിന്റെ അളവുകൾ ബാധകമല്ല). ചരടുകൾ ബന്ധിച്ചിരിക്കുന്ന കുത്തനെയുള്ള തൂണുകളുമായി ചരടുകളുണ്ടാക്കുന്ന കോണുകൾ 36.9^0 യും 53.1^0 യുമാണ്. ബാർ -2 മീറ്റർ നീളമുള്ളതാണ്. ബാറിന്റെ ഇടതു അറ്റത്തുനിന്ന് ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രത്തിലേക്കുള്ള അകലം d കണക്കാക്കുക.



ചിത്രം 7.39

7.9. ഒരു കാറിന്റെ ഭാരം 1800 കി.ഗ്രാം. അതിന്റെ ആക്സിലുകൾ തമ്മിലുള്ള അകലം 1.8 മീ. അതിന്റെ ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രം മുൻഭാഗ ആക്സിലിൽ നിന്ന് 1.5 മീ. പിന്നിലാണ്. നിരപ്പായ തറ മുൻഭാഗത്തെയും പിൻഭാഗത്തെയും ചക്രങ്ങളിൽ ചെലുത്തുന്ന ബലം കണ്ടെത്തുക.

7.10 (*a*) തൊടുവരയെ ആസ്പദമാക്കി ഒരു ഗോളത്തിന്റെ മൊമെന്റ് ഓഫ് ഇനർഷ്യ കാണുക. ഗോളത്തിന്റെ ഏതെങ്കിലും ഒരു വ്യാസത്തെ ആധാരമാക്കിയുള്ള മൊമെന്റ് ഓഫ് ഇനർഷ്യ $2MR^2/5$ ആണ്. ഇതിൽ M ഗോളത്തിന്റെ മാസ്സും R അതിന്റെ ആരവുമാണ്.

(*b*) M മാസ്സും R ആരവുമുള്ള ഒരു ഡിസ്കിന്റെ ഏതെങ്കിലും ഒരു വ്യാസത്തെ ആധാരമാക്കിയുള്ള മൊമെന്റ് ഓഫ് ഇനർഷ്യ $MR^2/4$ ആണ്. ഡിസ്കിന്റെ തലത്തിനു ലംബമായി അതിന്റെ അരികിലുള്ള ഏതെങ്കിലും ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന അക്ഷത്തെ ആധാരമാക്കി മൊമെന്റ് ഓഫ് ഇനർഷ്യ കാണുക.

7.11 തുല്യ അളവിലുള്ള ടോർക്ക് പൊള്ളയായ ഒരു സിലിണ്ടറിലും ഒരു ഖരഗോളത്തിലും പ്രയോഗിക്കുന്നു, രണ്ടിനും ഒരേ മാസ്സും ആരവുമാണ്. സിലിണ്ടർ അതിന്റെ സമമിതീയ അക്ഷത്തിൽ കറങ്ങുന്നു, ഗോളം അതിന്റെ മധ്യത്തിൽക്കൂടി കടന്നുപോകുന്ന അക്ഷത്തിന്മേൽ കറങ്ങുന്നു. ഒരു നിശ്ചിത സമയത്തിനുശേഷം ഏതു വസ്തുവിനാണ് കൂടുതൽ കോണീയ വേഗം കൈവരിക്കാനാവുക?

7.12 ഒരു ഖരസിലിണ്ടറിന് മാസ് 20 കി.ഗ്രാം., അത് അതിന്റെ അക്ഷത്തിന്മേൽ 100 $rad\ s^{-1}$.എന്ന വേഗതയിൽ കറങ്ങുന്നു. സിലിണ്ടറിന്റെ ആരം 0.25 മീ. ആണ്. സിലിണ്ടറിന്റെ പരിക്രമണത്തോടനുബന്ധിച്ചുള്ള ഗതികോർജം എത്ര? കോണീയ ആക്കത്തിന്റെ അളവെത്ര?

7.13 *a*) ഒരു തിരിയുന്ന മേശക്കു നടുവിലായി കൈകൾ വിരിച്ച നിലയിൽ ഒരു കുട്ടി നിൽക്കുന്നു. മേശ 40 *rev/min* എന്ന വേഗത്തിൽ കറങ്ങുന്നു. കുട്ടി കൈകൾ ശരീരത്തോടടുപ്പിച്ച് മൊമന്റ് ഓഫ് ഇനർഷ്യ 2/5 ഭാഗം കുറച്ചുവെങ്കിൽ കുട്ടിയുടെ കോണീയ വേഗമെത്ര? മേശ ഘർഷണരഹിതമായി കറങ്ങുന്നുവെന്ന് സങ്കൽപിക്കുക.

b) കുട്ടിയുടെ പുതിയ പരിക്രമണ ഗതികോർജം പ്രാരംഭ പരിക്രമണോർജത്തിൽ നിന്ന് വർധിച്ചതായി തെളിയിക്കുക. ഗതികോർജത്തിലെ ഈ വർദ്ധനവ് എങ്ങനെ വിശദീകരിക്കും.

7.14 നിസ്സാര മാസുള്ള ഒരു ചരട്, 3 കി.ഗ്രം ഭാരവും 40 സെ.മീ. ആരവുമുള്ള ഒരു പൊള്ളയായ സിലിണ്ടറിൽ ചുറ്റിവെച്ചിരിക്കുന്നു. ചരട് 30 N ബലംകൊടുത്ത് വലിക്കുമ്പോൾ സിലിണ്ടറിനുണ്ടാകുന്ന കോണീയ ത്വരണമെന്താണ്? ഇവിടെ തെന്നൽ (*slipping*) പരിഗണിക്കേണ്ടതില്ല.

7.15 ഒരു റോട്ടറിന്റെ 200 $rad\ s^{-1}$ കോണീയ വേഗത എന്ന അതേ നിലയിൽ നിലനിർത്തുന്നതിനായി അതിന്

180 $N\,m$ ടോർക്ക് നൽകേണ്ടതുണ്ട്. ഇതു ചെയ്യുന്നതിനായി യന്ത്രത്തിന് വേണ്ടുന്ന പവർ എത്ര? യന്ത്രം 100 % ക്ഷമതകാണിക്കുന്നുവെന്ന് കരുതുക. (ഘർഷണമില്ലാതിരിക്കുമ്പോൾ ഏകസമാന കോണീയ പ്രവേഗത്തിലുള്ള ടോർക്ക് പൂജ്യമായിരിക്കും, എന്നാൽ പ്രയോഗതലത്തിൽ ഘർഷണത്തെ അതിജീവിക്കാനായി ടോർക്ക് നൽകേണ്ടിവരും.)

7.16 സമാനമായ ഒരു തകിടിന് R ആരം ആണ്. $R/2$ ആരമുള്ള ഒരു വൃത്തഭാഗം അതിൽനിന്ന് മുറിച്ചു മാറ്റിയിരിക്കുന്നു. ആ ദ്വാരത്തിന്റെ മധ്യത്തിലേക്ക് തകിടിന്റെ യഥാർഥ മധ്യത്തിൽനിന്നുള്ള അകലം $R/2$ ആണ്. തകിടിന്റെ ബാക്കിവരുന്ന ഭാഗത്തിന്റെ ഗുരുത്വകേന്ദ്രം കണ്ടെത്തുക.

7.17 ഒരു മീറ്റർ ദണ്ഡിന്റെ മധ്യത്തിൽ ഒരു നൈഫ് എഡ്ജിൽ വെച്ച് ദണ്ഡിനെ തിരശ്ചീനമായി നിർത്തുന്നു. 5 ഗ്രാം വീതമുള്ള 2 നാണയങ്ങൾ ഒന്നിനു മുകളിൽ ഒന്നായി 12-ാം സെ.മീ. ബിന്ദുവിൽ വെക്കുമ്പോൾ ദണ്ഡിനെ തുലനാവസ്ഥയിലാക്കാൻ നൈഫ് എഡ്ജ് 45-ാം സെ.മീ. ബിന്ദുവിലേക്ക് മാറ്റുന്നു. മീറ്റർ ദണ്ഡിന്റെ മാസ് കണക്കാക്കുക.

7.18 ഒരു ഖരഗോളത്തിനെ ഒരേ ഉയരമുള്ളതും എന്നാൽ വിവിധ ചരിവുകളുള്ളതുമായ ചരിവുപലകകളിലൂടെ താഴേക്ക് ഉരുട്ടുന്നു. 1) ചരിവുകൾ മാറുമ്പോൾ അത് ഒരേ വേഗതയിൽതന്നെ താഴെയെത്തുമോ? 2) താഴെക്കെത്താൻ ഏറ്റവും കൂടുതൽ സമയമെടുക്കുന്നതേത് ചരിവിലാണ്? എന്തുകൊണ്ട്?

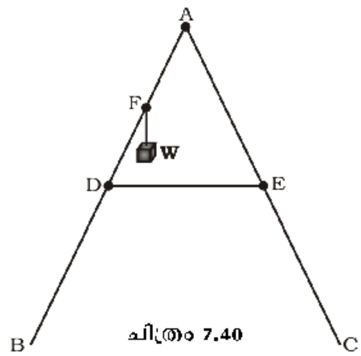
7.19 100 കി.ഗ്രാം ഭാരവും 2 മീറ്റർ ആരവുമുള്ള ഉരുൾച്ചക്രം ഒരു നിരപ്പായ പ്രതലത്തിലൂടെ ഉരുളുമ്പോൾ അതിന്റെ ദ്രവ്യമാന കേന്ദ്രത്തിന്റെ വേഗത 20 സെ.മീ /സെ. ആണ്. ചക്രത്തെ നിർത്താൻ എത്ര പ്രവൃത്തി ചെയ്യേണ്ടിവരും?

7.20 ഓക്സിജൻ തന്മാത്രയുടെ മാസ് $5.30 \times 10^{-26}\ kg$ ആണ്. ഇതിലെ രണ്ടു അണുക്കളുടെ സംയോജന രേഖക്ക് ലംബമായതും തന്മാത്രാ മധ്യത്തിലൂടെ കടന്നുപോകുന്നതുമായ അക്ഷത്തെ ആധാരമാക്കിയ മൊമന്റ് ഓഫ് ഇനർഷ്യ $1.94 \times 10^{-46}\ kg\ m^2$ ആണ്. ഒരു വാതകത്തിലെ ഇത്തരം തന്മാത്രയുടെ ശരാശരി വേഗത 500 m/s ആണെന്നും പരിക്രണത്തിലെ ഗതികോർജം സ്ഥാനികചലനത്തിലെ ഗതികോർജത്തിന്റെ മൂന്നിലൊന്നാണെന്നും കരുതുന്നു. തന്മാത്രയുടെ ശരാശരി കോണീയപ്രവേഗം കണക്കാക്കുക.

7.21 30 ഡിഗ്രി ചരിവുള്ള ചരിവുപലകയിലൂടെ ഒരു ഖരസിലിണ്ടർ ഉരുണ്ടു കേറുന്നു. പലകയുടെ ചുവട്ടിലായിരുന്നപ്പോൾ സിലിണ്ടറന്റെ ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രത്തിന്റെ വേഗത 5 m/s. (1) സിലിണ്ടർ മുകളിലേക്ക് എത്രദൂരം പോകും? (2) അത് തിരിച്ച് താഴെ എത്താൻ എടുക്കുന്ന സമയമെത്ര?

കൂടുതൽ പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ

7.22 ചിത്രം 7.40 ൽ കാണിച്ചതുപോലെ, ഒരു ഏണിയുടെ രണ്ടുവശങ്ങൾ 1.6 മീറ്റർ വീതം നീളമുള്ള BA യും CA യും വെച്ചിരിക്കുന്നു. പകുതിയോളം ഉയരത്തിൽ 0.5 മീ.നീളത്തിലുള്ള DE ചരട് ഇരുവശങ്ങളെയും യോജിപ്പിച്ച് കെട്ടിയിട്ടുണ്ട്. 40 കി.ഗ്രലാം ഭാരം B യിൽനിന്ന് 1.2 മീറ്റർ അകലെയായി BA വശത്ത് F ൽ തൂക്കിയിരിക്കുന്നു. തറ ഘർഷണരഹിതവും ഏണിയുടെ ഭാരം പരിഗണിക്കത്തക്കതുമല്ല എന്ന സങ്കൽപത്തിൽ. ചരടിലുള്ള വലിവുബലം കണക്കാക്കുക, തറ ഏണിയിൽ ചെലുത്തുന്ന ബലം എത്ര? ($g = 9.8\ m/s^2$) (സൂചന: ഏണിയുടെ ഇരുവശങ്ങളിലുമുള്ള സംതുലനാവസ്ഥ പ്രത്യേകം പരിഗണിക്കേണ്ടതാണ്)



ചിത്രം 7.40

7.23 തിരിഞ്ഞുകൊണ്ടിരിക്കുന്ന ഒരു പ്ലാറ്റ്ഫോമിൽ ഒരു മനുഷ്യൻ തിരശ്ചീനമായി വിരിച്ചുപിടിച്ച രണ്ടു കൈകളിലും 5 കി.ഗ്രാം ഭാരം വീതം പിടിച്ചുകൊണ്ട് നിൽക്കുന്നു. പ്ലാറ്റ്ഫോമിന്റെ കോണീയവേഗം ഒരു മിനുട്ടിൽ 30 കറക്കം വീതമാണ്. അയാൾ കൈകൾ ശരീരത്തോട് ചേർത്തുപിടിക്കുമ്പോൾ ഭാരങ്ങൾ 90 സെ.മീ. ദൂരത്തു നിന്ന് 20 സെ.മീ.ദൂരത്തിലാവുന്നു. പ്ലാറ്റ്ഫോമിന്റെയും മനുഷ്യന്റേതും ഒന്നിച്ചുള്ള ടോർക്ക് 7.6 $kg\ m^2$ ന് തുല്യമാണ്. (1) പുതിയ കോണീയ വേഗതയെത്ര? (ഘർഷണം ഒഴിവാക്കുന്നു) (2) ഈ പ്രക്രിയയിൽ ഗതികോർജം സംരക്ഷിക്കപ്പെട്ടിട്ടുണ്ടോ? ഇല്ലെങ്കിൽ എവിടെയാണ് മാറ്റം സംഭവിച്ചത്?

7.24 10 ഗ്രം ഭാരവും 500 *m/s* വേഗതയുമുള്ള ഒരു വെടിയുണ്ട, 1 മീ. വീതിയും 12 കി.ഗ്രാം ഭാരവുമുള്ള ഒരു വാതിലിന്റെ മധ്യത്തിലായി തുളഞ്ഞു കയറിയിരിക്കുന്നു. വാതിലിന്റെ ഒരറ്റം ലംബിതഅക്ഷത്തിൽ ഉറപ്പിച്ചതും ഘർഷണരഹിതമായി പരിക്രമണം ചെയ്യുന്നതുമാണ്. വെടുയുണ്ട കയറിയതിനുശേഷം വാതിലിന്റെ കോണീയ വേഗം കണക്കാക്കുക. (സൂചന: ഒരറ്റം ഉറപ്പിച്ച ലംബിത അക്ഷത്തെ ചുറ്റുന്ന വാതിലിന്റെ മൊമന്റ് ഓഫ് ഇനർഷ്യ $ML^2/3$)

7.25 മധ്യത്തിൽക്കൂടി കടന്നുപോകുന്നതും പ്രതലത്തിനു ലംബമായിട്ടുള്ളതുമായ അക്ഷങ്ങളെ ആധാരമാക്കി പ്രതലത്തിനു ലംബമായ മൊമെന്റ് ഓഫ് ഇനർഷ്യ I_1, I_2 ഉള്ള രണ്ടു വൃത്തത്തകിടുകളുടെ കോണീയ വേഗങ്ങൾ യഥാക്രമം ω_1 , ω_2 ആണ്. അവയുടെ പരിക്രമണാക്ഷങ്ങൾ ഒന്നിച്ചുവരത്തക്ക തരത്തിൽ മുഖാമുഖം ചേർത്തു വെക്കുന്നു. (1) തകിടുകളുടെ ഈ ദ്വന്ദ്വ വ്യവസ്ഥയുടെ കോണീയവേഗമെത്ര? (2) ഇരു തകിടുകളുടെയും പ്രരംഭ ഗതികോർജങ്ങളുടെ തുകയേക്കാൾ കുറവാണ് യോജിച്ച വ്യവസറയുടെ ഗതികോർജമെന്ന് തെളിയിക്കുക. ഈ ഊർജ്ജനഷ്ടത്തെ എങ്ങനെ വിശദീകരിക്കും? ($\omega_1 \neq \omega_2$ എന്നെടുക്കുക).

7.26 (*a*) ലംബാക്ഷങ്ങളുടെ തത്വം തെളിയിക്കുക *(സൂചന: മൂലബിന്ദു (origin) വിൽ നിന്നും x -y തലത്തിലെ (x,y) ബിന്ദുവിലേക്കുള്ള അകലത്തിന്റെ വർഗം* $(x^2 + y^2)$ ആണ്.)

(*b*) സമാന്തര അക്ഷങ്ങളുടെ (x, y) ബിന്ദുവിലേക്കുള്ള തത്വം തെളിയിക്കുക (*സൂചന: ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രം തന്നെ മൂലബിന്ദുവായി (origin)* തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നുവെങ്കിൽ $\Sigma m_i r_i = 0$)

7.27 ഒരു ചരിവുതലത്തിലൂടെ താഴേക്കുരുണ്ടുവരുന്ന ഒരു വസ്തുവിന്റെ (വലയമോ തകിടോ സിലിണ്ടറോ ഗോളമോ ആകാം) ചുവട്ടിലെ പ്രവേഗം

$$v^2 = \frac{2gh}{\left(1+\frac{k^2}{R^2}\right)}$$

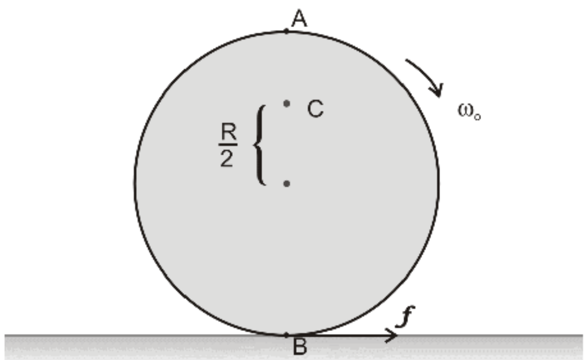
എന്നു തെളിയിക്കുക (ഇവിടെ h = ചരിവു പലകയുടെ ഉയരം, k = വസ്തുവിന്റെ സമമിതി അക്ഷത്തെയാധാരമാക്കിയുള്ള റേഡിയസ് ഓഫ് ജൈറേഷൻ, R = വസ്തു ആരം. മുകളിലുള്ള വിരാമാവസ്ഥയിൽ നിന്നും വസ്തുവിന്റെ ചലനം ആരംഭിക്കുന്നുവെന്നു സങ്കൽപിക്കുക.

7.28 അക്ഷത്തെ ആധാരമാക്കിയുള്ള കോണീയ വേഗത ω_0 ഉള്ള ഒരു തകിട് ഘർഷണരഹിതമായ ഒരു മേശമേൽ (സ്ഥാനാന്തരത്തിനുള്ള തള്ളൽ കൊടുക്കാതെ) മെല്ലെ വെക്കുന്നു. തകിടിന്റെ ആരം *R* ആണ്. ചിത്രം 7.41 ൽ കാണിച്ചതുപോലെ തകിടിൽ അടയാളപ്പെടുത്തിയ *A, B, C*എന്നീ ബിന്ദുക്കളുടെ രേഖീയ പ്രവേഗങ്ങൾ എന്താണ്? ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന ദിശയിലേക്ക് തകിട് ഉരുളാൻ സാദ്ധ്യതയുണ്ടോ?

7.29 ചിത്രം 7.41 ൽ കാണിച്ച തകിട് കാണിച്ചിരിക്കുന്ന ദിശയിൽ ഉരുളുന്നതിന് ഘർഷണം എന്തുകൊണ്ട് ആവശ്യമായിവരുന്നു എന്ന് വിശദീകരിക്കുക.

(*a*) സുഗമമായ ഉരുളൽ തുടങ്ങുന്നതിനുമുമ്പ് എന്തായിരിക്കും *B* എന്ന ബിന്ദുവിലുള്ള ഘർഷണബലത്തിന്റെ ഘർഷണടോർക്കിന്റെ ദിശ.

(*b*) സുഗമമായ ഉരുളൽ തുടങ്ങിയ ശേഷം ഘർഷണ ബലം എന്തായിരിക്കും?



ചിത്രം 7.41

7.30. 10 സെ.മീ. വീതം ആരമുള്ള ഒരു ഖരതകിടും ഒരു വളയവും, തിരശ്ചീനതലമുള്ള മേശപ്പുറത്ത് ഒരുമിച്ചു വെക്കുന്നു. അവയുടെ പ്രരംഭ കോണീയ വേഗത 10 π *rad* s^{-1} ന് ആണ്. ഇവയിൽ ഏതാണ് ഏറ്റവും ആദ്യം ഉരുളൽ ആരംഭിക്കുക? ഗതികഘർഷണ ഗുണാങ്കം, $\mu = 0.2$ ആണ്.

7.31. 30 ഡിഗ്രി ചരിവുള്ള ഒരു പലകയിലൂടെ 10 കി.ഗ്രം ഭാരവും 15 സെ.മീ. ആരവുമുള്ള ഒരു സിലിണ്ടർ സുഗ

മമായി ഉരുളുന്നു. സ്ഥിതഘർഷണ (*static friction*) ഗുണാങ്കം $\mu = 0.25$ ആണ്.

(*a*) സിലിണ്ടറിന്മേൽ പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്ന ഘർഷണബലം എത്രയായിരിക്കും?

(*b*) ഉരുളൽ നേരത്ത് ഘർഷണത്തിനെതിരെ നടക്കുന്ന പ്രവൃത്തി എത്രയാണ്?

(*c*) പലകയുടെ ചരിവുകോൺ θ വർധിപ്പിക്കുമ്പോൾ, അത് എത്രയാകുന്നതു മുതലാണ് സിലിണ്ടർ സുഗമമായ ഉരുളൽ കൂടാതെ തെന്നുന്ന (*skid*) സ്വഭാവം പ്രകടിപ്പിക്കുക?

7.32. താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന പ്രസ്താവനകൾ ശ്രദ്ധാപൂർവ്വം വായിച്ച്, അവ ശരിയാണോ തെറ്റാണോ എന്ന് കാര്യകാരണ സഹിതം പ്രസ്താവിക്കുക

(a) ഉരുളൽ വേളയിൽ ഘർഷണബലം പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്നത് വസ്തുവിന്റെ ദ്രവ്യമാന കേന്ദ്ര (*CM*)ത്തിന്റെ ചലന ദിശയിലാണ്.

(b) ഉരുളൽ നേരത്ത് സ്പർശബിന്ദുവിന്റെ സ്ഥാനത്തുള്ള ക്ഷണികവേഗത പൂജ്യമായിരിക്കും.

(c) ഉരുളൽ നേരത്ത് സ്പർശബിന്ദുവിന്റെ സ്ഥാനത്തുള്ള ക്ഷണികത്വരണം പൂജ്യമായിരിക്കും.

(d) സുഗമമായ ഉരുളൽചലനത്തിന് ഘർണത്തിനെതിരെയുള്ള പ്രവൃത്തി പൂജ്യമായിരിക്കണം.

(c) പൂർണമായും ഘർഷണരഹിതമായ ചരിവുപലകയിലൂടെ താഴേക്ക് സുഗമമായി ഉരുളുന്ന ഒരു ചക്രം തെന്നൽ (ഉരുളലല്ല) ചലനത്തിലേക്കു മാറ്റപ്പെടും.

7.33 ഒരു കണികാ വ്യവസ്ഥയുടെ ചലനത്തെ ദ്രവ്യമാന കേന്ദ്രത്തിന്റെചലനമെന്നും ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രത്തെ ആധാരമാക്കിയുള്ള ചലനമെന്നും രണ്ടായി വിഭജിക്കാം.

(a) $\mathbf{p} = \mathbf{p}_i + m_i \mathbf{V}$ എന്ന് കാണിക്കുക.

ഇതിൽ $\mathbf{p}_i$ എന്നത് കണം i യുടെ ആക്കമാണ്, $\mathbf{p}_i = m_i \mathbf{v}_i$ ദ്രവ്യമാന കേന്ദ്രത്തെ അപേക്ഷിച്ചുള്ള i സ്ഥാനത്തെ കണം i യുടെ പ്രവേഗമാണ് $\mathbf{v}_i$. ദ്രവ്യമാന കേന്ദ്രത്തിന്റെ നിർവചനത്തെ ആധാരമാക്കി $\Sigma\ \mathbf{p}_i = 0$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

(b) $K - K' \ {}^1/_2 MV^2$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

ഇതിൽ K എന്നത് വ്യവസ്ഥയുടെ ആകെയുള്ള ഗതികോർജമാണ്. K'എന്നത് വ്യവസ്ഥയുടെ ദ്രവ്യമാന കേന്ദ്രത്തെ ആധാരമാക്കി കണികകളുടെ പ്രവേഗമൂലമുണ്ടാകുന്ന ഗതികോർജവും $MV^2/2$. മൊത്തത്തിലുള്ള സ്ഥാനാന്തര ചലനത്തിന്റെ ഗതികോർജവുമാണ്. ഫലം വിഭാഗം 7.14 ൽ ഉപയോഗിച്ചിട്ടുണ്ട്.

(c) $\mathbf{L} = \mathbf{L} + \mathbf{R} \times M\mathbf{V}$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

ഇതിൽ $\mathbf{L}' = \Sigma\ \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i$ എന്നത് ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രത്തെ ചുറ്റിയുള്ള വ്യവസ്ഥയുടെ കോണീയ ആക്കമാണ്. ഇവിടെ പ്രവേഗം കണക്കാക്കുന്നത് ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രത്തെ അപേക്ഷിച്ചാണ്. $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{R}$ എന്ന് ഓർമ്മിക്കുക. ബാക്കിയുള്ള പ്രതീകങ്ങൾ ഈ അധ്യായത്തിൽ പൊതുവേ ഉപയോഗിച്ചവയാണ്. $\mathbf{L}$ ഉം $M\mathbf{R} \times \mathbf{V}$ ഉം യഥാക്രമം കണികാവ്യവസ്ഥയുടെ ദ്രവ്യകേന്ദ്രത്തെ ആധാരമാക്കിയുള്ള കോണീയ ആക്കങ്ങളാണ്.

(d) $d\mathbf{L}/dt = \Sigma\ \mathbf{r}_i \times d\mathbf{p}/dt$ എന്നു തെളിയിക്കുക

കൂടാതെ

$d\mathbf{L}/dt = \tau^1_{ext}$ തെളിയിക്കുക.

ഇതിൽ τ^1_{ext} എന്നത് കണികാവ്യവസ്ഥയുടെ ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രത്തെ ആധാരമാക്കി കണികാവ്യവസ്ഥയിൽ പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്ന എല്ലാ ബാഹ്യ ടോർക്കുകളുടെയും തുകയാണ്.

(സൂചന: ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രത്തിന്റെയും ന്യൂട്ടന്റെ മൂന്നാം ചലനനിയമത്തിന്റെയും നിർവ്വചനം ഉപയോഗിക്കുക. രണ്ടു കണികകൾ പരിസ്പരം പ്രയോഗിക്കുന്ന ബലം അവ തമ്മിൽ യോജിപ്പിക്കുന്ന നേർരേഖയിൽ കൂടി യായിരിക്കും.)

പ്ലൂട്ടോ – ഒരു കുള്ളൻഗ്രഹം (Pluto - A Dwarf Planet)

അന്താരാഷ്ട്ര ജ്യോതിശാസ്ത്ര സംഘടന (IAU) അതിന്റെ ആസ്ഥാനമായ ചെക്ക് റിപ്പബ്ലിക്കിലെ പ്രാഗിൽ 2006 ആഗസ്റ്റ് 24-നു ചേർന്ന യോഗത്തിൽ, നമ്മുടെ സൗരയൂഥത്തിലെ ഗ്രഹങ്ങളെ സംബ ന്ധിച്ച് ഒരു പുതിയ നിർവചനം അംഗീകരിച്ചു. പുതിയ നിർവചമനുസരിച്ച് പ്ലൂട്ടോവിന് ഒരു ഗ്രഹമായി തുടരാനാവില്ല. അതിനർഥം സൗരയൂഥത്തിൽ ഗ്രഹപദവിയുള്ള എട്ട് ഗ്രഹങ്ങൾ മാത്രമേ ഉണ്ടാവുക യുള്ളു എന്നാണ്. അതായത് ബുധൻ, ശുക്രൻ, ഭൂമി, ചൊവ്വ, വ്യാഴം, ശനി, യുറാനസ്, നെപ്ട്യൂൺ എന്നിവ. സംഘടനയുടെ തീരുമാനപ്രകാരം, സൗരയുഥത്തിൽ (കൃത്രിമ ഉപഗ്രഹങ്ങളൊഴിച്ച്,) 'ഗ്രഹം', 'മറ്റു വസ്തുക്കൾ' എന്നിവ ഉൾപ്പെടുന്ന ആകാശഗോളങ്ങളെ താഴെ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ മൂന്നു തരത്തിൽ വേർതിരിക്കുന്ന നിർവചനം അംഗീകരിച്ചു.

1. ഒരു വാനവസ്തുവായ ഗ്രഹത്തിന് (*a*) സൂര്യനു ചുറ്റും സ്ഥിരമായ ഒരു പരിക്രമണപഥമുണ്ടായിരി ക്കണം (*b*) ദൃഢവസ്തുവിന്റെ സാധാരണബലങ്ങളെ അതിജീവിക്കുന്ന ഗുരുത്വബലത്തിനാവശ്യ മായത്ര മാസുമുണ്ടായിരിക്കണം, അതുപോലെ ദ്രവസ്ഥിതിക (*hydrostatic*) സന്തുലനം ആർജിക്കുന്നതരത്തിലുള്ള ആകൃതിയായിരിക്കണം (ഗോളാകൃതി), (*c*) സമീപസ്ഥഗ്രഹങ്ങളുടെ പരിക്രമണ പാതയിൽ മുറിച്ചു കടക്കാത്തവിധം വ്യക്തമായ പരിക്രമണപാതയുണ്ടായിരിക്കണം.
2. ഒരു കുള്ളൻ ഗ്രഹത്തിന് (*a*) സൂര്യന് ചുറ്റുമായി ഒരു സഞ്ചാരപാതയുണ്ടായിരിക്കണം, (*b*) ദൃഢ വസ്തുവിന്റെ സാധാരണബലങ്ങളെ അതിജീവിക്കുന്ന തരത്തിൽ അതിന് സ്വന്തമായ ഗുരുത്വബലവും അതിനാവശ്യമായ മാസുമുണ്ടായിരിക്കണം, അതുപോലെ ദ്രവസ്ഥിതികാ സന്തുലനത്തിലുള്ള ആകൃ തിയായിരിക്കണം (ഏകദേശം ഗോളാകൃതി), (*c*) അയൽഗോളങ്ങളുമായി കൃത്യമായി വേർതിരി ക്കുന്ന വ്യക്തമായ പരിക്രമണപഥം ഉണ്ടാവണമെന്നില്ല, (*d*) എന്നാൽ അതൊരു ഉപഗ്രഹം ആയിരിക്കുകയില്ല.
3. 'മറ്റു വസ്തുക്കൾ' അതായത് കൃത്രിമ ഉപഗ്രഹങ്ങളൊഴിച്ച്, സൗരയൂഥത്തിലെ എല്ലാതരം ചെറു വസ്തുക്കളും അറിയപ്പെടുന്നത് 'സൗരയൂഥത്തിലെ ക്ഷുദ്ര വസ്തുക്കൾ' (*small solar-system bodies*)എന്നാണ്.

സൗരയൂഥത്തിലെ എട്ടു ഗ്രഹങ്ങളിൽ നിന്നും വ്യത്യസ്തമായി പ്ലൂട്ടോയുടെ സൗരപരിക്രമണപാത വ്യക്തതയില്ലാത്തതാണ്. അത് ചിലപ്പോൾ നെപ്ട്യൂണിന്റെ പരിക്രമണപാതയുടെ ഉള്ളിലേക്ക് കട ന്നുവരും. മറ്റുവസ്തുക്കളായി ഇപ്പോളറിയപ്പെടുന്നത് ക്ഷുദ്രഗ്രഹങ്ങൾ (*asteroids*), സൗരയുഥത്തിന്റെ ബാഹ്യമേഖലയിൽ നിന്നെത്തുന്ന ട്രാൻസ് നെപ്ട്യൂണിയൻ വസ്തുക്കൾ (*trans-neptunian objects - TNOs*) വാൽനക്ഷത്രങ്ങൾ (*comets*) എന്നിവയാണ്.

ആകാശഗോളങ്ങളെക്കുറിച്ചുള്ള പുതിയ നിർവചനങ്ങൾ അംഗീകരിക്കപ്പെട്ടതോടെ പ്ലൂട്ടോക്ക് ഗ്രഹപദവി നഷ്ടമാവുകയും അത് ട്രാൻസ് – നെപ്ട്യൂണിയൻ വസ്തു എന്ന പുതിയ ഗണത്തിൽ ഉൾപ്പെട്ട ഒരു കുള്ളൻ ഗ്രഹമായി നിർവചിക്കപ്പെടുകയും ചെയ്തു.