પ્રકરણ 7

ક્રમચય અને સંચય

7.1 વિહંગાવલોકન

ક્રમચય અને સંચયનો અભ્યાસ આપેલ કુલ વસ્તુઓની સંખ્યામાંથી અમુક વસ્તુઓની ગોઠવણી અને પસંદગી જુદા-જુદા કેટલા પ્રકારે કરી શકાય તે વાસ્તવમાં યાદી બનાવ્યા વગર નક્કી કરવામાં સહાયક છે. વસ્તુઓની ગોઠવણી અથવા પસંદગીના પ્રકારોની સંખ્યા નક્કી કરવામાં કેટલીક પાયાની યુક્તિઓ ઉપયોગી થશે. આ ગણતરી માટેના પાયારૂપ બે સિદ્ધાંતો નીચે પ્રમાણે આપેલા છે :

7.1.1 ગુણાકારનો સિદ્ધાંત : (ગણતરીનો મૂળભૂત સિદ્ધાંત)

ધારો કે કોઈ એક ઘટના E એ m ભિન્ન પ્રકારે ઉદ્ભવે અને E ના ઉદ્ભવના દરેક પ્રકારને આનુષંગિક બીજી કોઈ ઘટના F એ n ભિન્ન પ્રકારે ઉદ્ભવે તો બંને ઘટનાઓ એકસાથે આપેલ ક્રમમાં ઉદ્ભવવાના પ્રકારોની સંખ્યા $m \times n$ છે.

7.1.2 સરવાળાનો સિદ્ધાંત

જો કોઈ એક ઘટના E એ m ભિન્ન પ્રકારે ઉદ્ભવે અને અન્ય કોઈ ઘટના F એ n ભિન્ન પ્રકારે ઉદ્ભવે છે. ધારો કે બંને ઘટનાઓ એકસાથે ઉદ્ભવતી નથી, તો ઘટના E અથવા ઘટના F ના ઉદ્ભવવાના પ્રકારોની સંખ્યા $m + n$ છે.

7.1.3 ક્રમચયો : વસ્તુઓની કોઈ એક ચોક્કસ ક્રમમાં રેખીય ગોઠવણી એટલે સુરેખ ક્રમચય.

7.1.4 n ભિન્ન વસ્તુઓનો ક્રમચય : n ભિન્ન વસ્તુઓને એકસાથે n સ્થાનમાં એક રેખામાં ગોઠવવામાં આવે, તો મળતા ક્રમચયોની સંખ્યાને સંકેત ${}^nP_n$ વડે દર્શાવાય છે. તેને ${}^nP_n = \underline{|n}$ દ્વારા દર્શાવાય. **... (1)**

અહીં $\underline{|n} = n(n-1)(n-2) \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1$ ને ક્રમગુણિત n તરીકે વંચાય.

n ભિન્ન વસ્તુઓ પૈકી યાદચ્છિક પસંદ કરેલ r વસ્તુઓને એક સાથે r સ્થાનમાં ગોઠવવામાં આવે, તો મળતા ક્રમચયોની સંખ્યાને ${}^nP_r$ વડે દર્શાવવામાં આવે છે. $0 < r \le n$ લેતાં ${}^nP_r = \dfrac{\underline{|n}}{\underline{|n-r}}$

આપણે સ્વીકારી લઈશું કે $\underline{|0} = 1$

7.1.5 જ્યારે વસ્તુઓના પુનરાવર્તનની અનુમતિ હોય ત્યારે ક્રમચયોની સંખ્યા : જ્યારે વસ્તુઓના પુનરાવર્તનની અનુમતિ હોય ત્યારે, n વસ્તુઓને એક સાથે લેવામાં આવે તો મળતા ક્રમચયોની સંખ્યા n^n છે.

જ્યારે વસ્તુઓના પુનરાવર્તનની અનુમતિ હોય ત્યારે, n વસ્તુઓ પૈકી r વસ્તુઓ એક સાથે લેવામાં આવે, તો મળતા ક્રમચયોની સંખ્યા n^r છે.

7.1.6 જ્યારે વસ્તુઓ ભિન્ન ન હોય ત્યારે મળતા ક્રમચયોની સંખ્યા : આપણી n વસ્તુઓમાંથી p_1 એક પ્રકારની સમસ્વરૂપ વસ્તુઓ હોય, p_2 બીજા પ્રકારની સમસ્વરૂપ વસ્તુઓ હોય, ..., p_k એ kમાં પ્રકારની સમસ્વરૂપ વસ્તુઓ હોય અને બાકીની વસ્તુઓ ભિન્ન હોય, તો મળતા ક્રમચયોની સંખ્યા $\dfrac{n!}{p_1!p_2!...p_k!}$

7.1.7 સંચય : ઘણા પ્રસંગોમાં આપણે વસ્તુઓની ગોઠવણીમાં રસ ધરાવતા નથી પરંતુ આપેલ n વસ્તુઓમાંથી r વસ્તુઓની પસંદગી કરવામાં રસ ધરાવીએ છીએ. સંચય એ કુલ વસ્તુઓ પૈકી બધી જ અથવા અમુક વસ્તુઓની પસંદગીના ક્રમનું મહત્ત્વ ન હોય તેવા પ્રકારોની સંખ્યા છે. આપેલ n ભિન્ન વસ્તુઓ પૈકી r વસ્તુઓ એક સાથે પસંદ કરવાના પ્રકારોની સંખ્યાને ${}^nC_r$ વડે દર્શાવાય છે.

$$ {}^nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!} $$

નોંધ

1. જો કોઈ સમસ્યા વસ્તુઓની ગોઠવણીના પ્રકારોની સંખ્યાને સંબંધિત હોય અને ભિન્ન ક્રમને ધ્યાનમાં લેવાનો હોય, તો ક્રમચયનો ઉપયોગ થાય છે.
2. જો કોઈ સમસ્યા વસ્તુઓની પસંદગીના પ્રકારોની સંખ્યાને સંબંધિત હોય અને પસંદગીના ક્રમને ધ્યાનમાં લેવાનો ન હોય, તો સંચયનો ઉપયોગ થાય છે.

7.1.8 કેટલાંક ઉપયોગી પરિણામો :

ધન પૂર્ણાંકો n અને r માટે $r \le n$ તો,

(i) ${}^nC_r = {}^nC_{n-r}$

(ii) ${}^nC_r + {}^nC_{r-1} = {}^{n+1}C_r$

(iii) $n\,{}^{n-1}C_{r-1} = (n-r+1)\,{}^nC_{r-1}$

7.2 ઉદાહરણો

ટૂંક જવાબી પ્રશ્નો

ઉદાહરણ 1 : કોઈ એક વર્ગમાં 27 છોકરાઓ અને 14 છોકરીઓ છે. શિક્ષક કોઈ એક કાર્યક્રમ માટે, વર્ગનું પ્રતિનિધિત્વ કરવા માટે 1 છોકરો અને 1 છોકરી પસંદ કરવા ઈચ્છે છે, તો શિક્ષક આ પસંદગી કેટલા પ્રકારે કરી શકે ?

ઉકેલ : અહીં શિક્ષકે બે ક્રિયાઓ કરવી પડે :

(i) 27 છોકરાઓમાંથી 1 છોકરાની પસંદગી કરવી અને

(ii) 14 છોકરીઓમાંથી 1 છોકરીની પસંદગી કરવી.

આ પસંદગી પહેલા વિકલ્પમાં 27 પ્રકારે અને બીજા વિકલ્પમાં 14 પ્રકારે થઈ શકે. આથી, ગણતરીના મૂળભૂત સિદ્ધાંત દ્વારા પસંદગીના પ્રકારોની કુલ સંખ્યા $27 \times 14 = 378$.

ઉદાહરણ 2 :

(i) 99 અને 1000 ની વચ્ચે આવતી સંખ્યાઓ પૈકી કેટલી સંખ્યાઓમાં એકમનો અંક 7 હોય ?

(ii) 99 અને 1000 ની વચ્ચે આવતી સંખ્યાઓ પૈકી કેટલી સંખ્યાઓમાં ઓછામાં ઓછો એક અંક 7 હોય ?

ઉકેલ :

(i) સૌપ્રથમ આપણે નોંધીશું કે 99 અને 1000ની વચ્ચેની તમામ સંખ્યાઓ ત્રણ અંકોવાળી સંખ્યાઓ છે. તેના એકમનો અંક 7 છે. બીજા સ્થાનમાં રહેલો અંક એ 0 થી 9 એમ 10 અંકો પૈકી ગમે તે એક અંક હોઈ શકે. શતકના સ્થાન પર 1 થી 9 અંકો પૈકીના 9 અંકોમાંથી ગમે તે એક અંક હોઈ શકે. આથી, ગણતરીના મૂળભૂત સિદ્ધાંત પરથી, 99 અને 1000ની વચ્ચે આવતી સંખ્યાઓ પૈકી એકમના સ્થાન પર અંક 7 હોય તેવી $10 \times 9 = 90$ સંખ્યાઓ હોય.

(ii) ત્રણ અંકોમાંથી ઓછામાં ઓછો એક અંક 7 હોય તેવી કુલ સંખ્યાઓ = (ત્રણ અંકોવાળી કુલ સંખ્યાઓ) – (ત્રણ અંકો પૈકી એક પણ અંક 7 ન હોય તેવી કુલ સંખ્યાઓ).

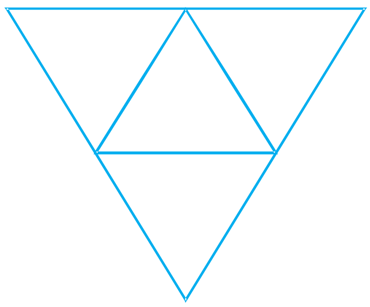
$= (9 \times 10 \times 10) - (8 \times 9 \times 9)$

$= 900 - 648 = 252$

ઉદાહરણ 3 : નીચેની બંને શરતોને આધારે આપેલ આકૃતિમાં કેટલા પ્રકારે રંગપૂરણી કરી શકાય ?

(i) આપેલ ત્રિકોણની અંદરનો પ્રત્યેક ત્રિકોણ લાલ, વાદળી અથવા લીલા રંગ પૈકી કોઈ એક રંગથી રંગવામાં આવ્યો હોય.

(ii) પાસ-પાસેના બે ભાગને સમાન રંગથી રંગવામાં આવ્યા ન હોય.



આકૃતિ 7.1

ઉકેલ : જ્યારે આપણે નીચે પ્રમાણે કાર્ય કરીશું ત્યારે આ શરતોનું સંપૂર્ણપણે પાલન થશે.

સૌપ્રથમ કેન્દ્રીય ત્રિકોણને આ ત્રણ રંગ પૈકી કોઈ પણ એક રંગ દ્વારા રંગવામાં આવે અને ત્યાર બાદ બાકીના ત્રણ ત્રિકોણને અન્ય બે રંગ પૈકી કોઈ પણ એક રંગથી રંગવામાં આવ્યા હોય.

ગણતરીના મૂળભૂત સિદ્ધાંત દ્વારા આ ક્રિયાના પ્રકારોની કુલ સંખ્યા $= 3 \times 2 \times 2 \times 2 = 24$.

ઉદાહરણ 4 : 5 બાળકોને એક હારમાં ગોઠવવામાં આવે છે. તેમના પૈકી (i) બે નિશ્ચિત બાળકો હંમેશાં સાથે હોય અને (ii) બે નિશ્ચિત બાળકો ક્યારેય સાથે ન હોય તે કેટલા પ્રકારે શક્ય બને ?

ઉકેલ :

(i) આપણે બે નિશ્ચિત બાળકોને એક જ બાળક તરીકે ધ્યાનમાં લઈ ગોઠવણી કરીએ, તો કુલ 4 બાળકોની ગોઠવણી $4! = 24$ પ્રકારે થાય. વળી, બે ચોક્કસ બાળકોને એક સાથે બે પ્રકારે ગોઠવી શકીએ. આથી આ ગોઠવણીના પ્રકારોની કુલ સંખ્યા $24 \times 2 = 48$ થાય.

(ii) 5 બાળકોની ગોઠવણીના કુલ ક્રમચયોની સંખ્યા $5! = 120$ પૈકી બે બાળકો હંમેશાં સાથે હોય તેવા પ્રકારોની કુલ સંખ્યા 48 છે. આથી બાકીના ક્રમચયોની સંખ્યા $120 - 48 = 72$.

આમ બે નિશ્ચિત બાળકો સાથે ન હોય તેવા પ્રકારોની કુલ સંખ્યા = 72.

ઉદાહરણ 5 : AGAIN શબ્દના બધા અક્ષરોને શબ્દકોશના ક્રમમાં ગોઠવવામાં આવે, તો મળતા તમામ ક્રમચયો પૈકી 60 મા સ્થાને કયો શબ્દ હોય ?

ઉકેલ : શબ્દકોશના ક્રમ પ્રમાણે મૂળાક્ષર A થી શરૂ કરીએ અને બાકીના ચાર મૂળાક્ષરોને ગોઠવીએ, તો મળતા શબ્દોની સંખ્યા 4! = 24. આ રીતે પ્રથમ 24 શબ્દો બને. ત્યાર બાદ G થી શરૂ કરીને બાકીના મૂળાક્ષરો A, A, I અને N ને ગોઠવવાથી મળતા ભિન્ન શબ્દો $\frac{4!}{2!1!1!} = 12$. ત્યાર બાદ 37 મો શબ્દ I થી શરૂ થશે અને આ જ રીતે I થી શરૂ થતા કુલ 12 શબ્દો મળે. તેમાં આ રીતે 48 મા શબ્દ સુધીની ગણતરી થશે. આ રીતે N થી શરૂ થતાં 12 શબ્દો મળશે. કુલ 60 શબ્દો પૈકી 60 મો શબ્દ NIGAA થાય.

ઉદાહરણ 6 : ગણિતનાં 3 પુસ્તકો, ઈતિહાસનાં 4 પુસ્તકો, રસાયણવિજ્ઞાનનાં 3 પુસ્તકો અને જીવવિજ્ઞાનનાં 2 પુસ્તકોને છાજલી પર કેટલા પ્રકારે ગોઠવી શકાય કે જેથી સમાન વિષયના તમામ પુસ્તકો એકસાથે હોય ?

ઉકેલ : સૌપ્રથમ આપણે કોઈ એક ચોક્કસ વિષયનાં પુસ્તકોને એક પુસ્તક તરીકે લઈએ, તો 4 પુસ્તકોને ગોઠવવાના પ્રકારોની સંખ્યા = 4! = 24. હવે પ્રત્યેક ગોઠવણીમાં ગણિતનાં પુસ્તકોની ગોઠવણી 3! પ્રકારે, ઈતિહાસના પુસ્તકોની ગોઠવણી 4! પ્રકારે, રસાયણવિજ્ઞાનના પુસ્તકોની ગોઠવણી 3! પ્રકારે અને જીવવિજ્ઞાનના પુસ્તકોની ગોઠવણી 2! પ્રકારે થાય. આથી ગોઠવણીના પ્રકારોની કુલ સંખ્યા = 4! × 3! × 4! × 3! × 2! = 41472.

ઉદાહરણ 7 : એક વિદ્યાર્થીને એક પ્રશ્નપત્રના ભાગ A અને ભાગ B પૈકી પ્રત્યેકમાંથી ઓછામાં ઓછા 4 પ્રશ્નો પસંદ કરી કુલ 10 પ્રશ્નોના જવાબ આપવાના છે. જો ભાગ A માં પ્રશ્નોની સંખ્યા 6 તથા ભાગ B માં પ્રશ્નોની સંખ્યા 7 હોય, તો તે વિદ્યાર્થી 10 પ્રશ્નોની પસંદગી કેટલા પ્રકારે કરી શકે ?

ઉકેલ : વિદ્યાર્થી માટે પ્રશ્નોની પસંદગીની શક્યતાઓ નીચે પ્રમાણે છે :

ભાગ A માંથી 4 અને ભાગ B માંથી 6 પ્રશ્નો

અથવા ભાગ A માંથી 5 અને ભાગ B માંથી 5 પ્રશ્નો

અથવા ભાગ A માંથી 6 અને ભાગ B માંથી 4 પ્રશ્નો

આથી, પસંદગીના પ્રકારોની માંગેલ સંખ્યા = ${}^6C_4 \times {}^7C_6 + {}^6C_5 \times {}^7C_5 + {}^6C_6 \times {}^7C_4$

$= 105 + 126 + 35 = 266$

વિસ્તૃત જવાબી પ્રશ્નો

ઉદાહરણ 8 : ધારો કે, m પુરુષો અને n સ્ત્રીઓ એક હારમાં એવી રીતે બેઠા છે કે જેથી બે સ્ત્રીઓ સાથે બેઠી ન હોય. જો $m > n$ હોય, તો સાબિત કરો કે તેમની ગોઠવણીના પ્રકારોની સંખ્યા $\frac{m!(m+1)!}{(m-n+1)!}$ છે.

ઉકેલ : ધારો કે પુરુષ તેની બેઠક પ્રથમ સ્થાને લે છે. આથી તેઓ નીચે આકૃતિમાં બતાવ્યા મુજબ ${}^mP_m$ પ્રકારે બેસશે :

$$\square \; M \; \square \; M \; \square \; \ldots \; \square \; M \; \square$$

પહેલો બીજો m મો

ઉપરની આકૃતિ પરથી, આપણે જોઈશું કે n સ્ત્રીઓ માટે $(m + 1)$ સ્થાનો છે. આપેલ છે કે, $m > n$ અને બે સ્ત્રીઓ સાથે બેઠેલી નથી. આથી, n સ્ત્રીઓ તેમની બેઠકો ${}^{(m+1)}P_n$ પ્રકારે ગ્રહણ કરી શકે. આથી બે સ્ત્રીઓ સાથે બેઠેલ ન હોય તેવી ગોઠવણીના પ્રકારોની કુલ સંખ્યા.

$$({}^{m}P_{m}) \times ({}^{m+1}P_{n}) = \frac{m!(m+1)!}{(m-n+1)!}$$

ઉદાહરણ 9 : એક સિનેમાગૃહમાં ત્રણ પરિણીત યુગલને એક હારમાં બેસાડવા માટે 6 બેઠકો છે. જો પ્રત્યેક યુગલને પાસપાસે બેસાડવામાં આવે, તો તેઓની ગોઠવણી કેટલા પ્રકારે થઈ શકે ? જો ત્રણેય સ્ત્રીઓ એક સાથે બેઠી હોય, તો તેઓની ગોઠવણીના પ્રકારોની સંખ્યા શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે પરિણીત યુગલને S_1, S_2 અને S_3 વડે દર્શાવીએ. નીચેની આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે પ્રત્યેક યુગલને એક જ વ્યક્તિ તરીકે ધ્યાનમાં લઈએ :

પ્રથમ દ્વિતીય તૃતીય

તો પ્રત્યેક યુગલ પાસપાસે હોય તેવી ગોઠવણીના પ્રકારોની સંખ્યા $= 3! = 6$.

વળી, પ્રત્યેક યુગલ $2!$ પ્રકારે બેસી શકે.

આથી, પ્રત્યેક યુગલને પાસપાસે બેસાડવાના પ્રકારોની કુલ સંખ્યા $= 3! \times 2! \times 2! \times 2! = 48$.

વળી, જો ત્રણેય સ્ત્રીઓ એક સાથે બેઠી હોય (એટલે કે, પાસપાસે બેઠી હોય), તો ત્રણેય પુરુષો પાસપાસે જ બેઠા હોય. આથી, સ્ત્રીઓ અને પુરુષોનું જૂથ એકસાથે હોય તેવી ગોઠવણી $2!$ પ્રકારે થઈ શકે. આથી, ત્રણેય સ્ત્રીઓ એકસાથે બેઠી હોય તેવી ગોઠવણીના પ્રકારોની કુલ સંખ્યા $= 3! \times 3! \times 2! = 72$.

ઉદાહરણ 10 : એક નાના ગામમાં 87 કુટુંબો વસે છે. તેમાંથી 52 કુટુંબોમાં વધુમાં વધુ બે બાળકો છે. ગ્રામ્ય વિકાસ કાર્યક્રમ અંતર્ગત સહાય માટે 20 કુટુંબો પસંદ કરવામાં આવે છે. તેમાંથી ઓછામાં ઓછા 18 કુટુંબો વધુમાં વધુ 2 બાળકો ધરાવતા પસંદ કરવાના હોય, તો આ પસંદગી કેટલા પ્રકારે થઈ શકે ?

ઉકેલ : 87 કુટુંબોમાંથી 52 કુટુંબો વધુમાં વધુ બે બાળકો ધરાવે છે તેમ આપેલ છે. આથી બાકીનાં 35 કુટુંબો અલગ પ્રકારનાં છે. પ્રશ્ન પ્રમાણે, ગ્રામ્ય વિકાસ કાર્યક્રમ અંતર્ગત સંચય માટે 20 કુટુંબોની પસંદગી કરવામાં આવે છે. તેમાંથી ઓછાંમાં ઓછાં 18 કુટુંબોમાં વધુમાં વધુ બે બાળકો છે. આથી, આવી પસંદગી કરવાના પ્રકારોની સંખ્યા નીચે પ્રમાણે મળે :

${}^{52}C_{18} \times {}^{35}C_{2}$ (18 કુટુંબોની પસંદગી વધુમાં વધુ બે બાળકો ધરાવતાં કુટુંબોમાંથી અને અન્ય 2 કુટુંબોની પસંદગી અન્ય પ્રકારનાં કુટુંબોમાંથી)

${}^{52}C_{19} \times {}^{35}C_{1}$ (19 કુટુંબોની પસંદગી વધુમાં વધુ બે બાળકો ધરાવતાં કુટુંબોમાંથી અને અન્ય 1 કુટુંબની પસંદગી અન્ય પ્રકારનાં કુટુંબોમાંથી)

${}^{52}C_{20}$ (બધાં જ 20 કુટુંબોની પસંદગી વધુમાં વધુ બે બાળકો ધરાવતાં કુટુંબોમાંથી)

આથી, આવી પસંદગીના કુલ પ્રકારોની સંખ્યા ${}^{52}C_{18} \times {}^{35}C_{2} + {}^{52}C_{19} \times {}^{35}C_{1} + {}^{52}C_{20}$

ઉદાહરણ 11 : એક વિદ્યાર્થી પાસે પુસ્તકાલયની 3 ટિકિટો છે અને પુસ્તકાલયમાં તેને મનગમતા વિષયનાં 8 પુસ્તકો છે. આ 8 પુસ્તકોમાંથી જ્યાં સુધી ગણિત (ભાગ I)નું પુસ્તક ન મળે ત્યાં સુધી તે ગણિત (ભાગ II)નું પુસ્તક લેવા ઇચ્છતો નથી, તો પુસ્તકાલયમાંથી 3 પુસ્તકો લેવાની પસંદગી તે કેટલા પ્રકારે કરી શકે ?

ઉકેલ : ચાલો, આપણે વિકલ્પો વિચારીએ.

વિકલ્પ (i) વિદ્યાર્થી ગણિત (ભાગ II)નું પુસ્તક લે અને ગણિત (ભાગ I)નું પુસ્તક પણ લે, તો પસંદગીના પ્રકારોની કુલ સંખ્યા ${}^6C_1 = 6$.

વિકલ્પ (ii) વિદ્યાર્થી ગણિત (ભાગ II)નું પુસ્તક ન લે તો તેણે બાકીનાં 7 પુસ્તકોમાંથી ત્રણ પુસ્તકની પસંદગી ${}^7C_3 = 35$ પ્રકારે કરવી પડે.

આથી, પુસ્તકોની પસંદગીના પ્રકારોની કુલ સંખ્યા $= 35 + 6 = 41$.

ઉદાહરણ 12 : n ભિન્ન વસ્તુઓ પૈકી r વસ્તુઓ એક સાથે એ રીતે ગોઠવવામાં આવે છે કે જેથી બે ચોક્કસ વસ્તુઓ સાથે જ હોય, તો આવા ક્રમચયોની સંખ્યા શોધો.

ઉકેલ : બે ચોક્કસ વસ્તુઓના જૂથને r સ્થાનમાં $(r - 1)$ પ્રકારે ગોઠવી શકાય. (શા માટે ?) અને બે ચોક્કસ વસ્તુઓને અંદરો અંદર $\lfloor 2$ પ્રકારે ગોઠવી શકાય. હવે બાકી રહેલ $(n - 2)$ વસ્તુઓને $(r - 2)$ સ્થાનમાં ${}^{n-2}P_{r-2}$ પ્રકારે ગોઠવી શકાય.

આથી, ગણતરીના મૂળભૂત સિદ્ધાંતનો ઉપયોગ કરતાં, માંગેલ ક્રમચયોની સંખ્યા $= \lfloor 2 \cdot (r-1) \cdot {}^{n-2}P_{r-2}$ થશે.

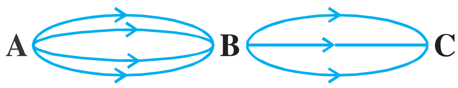
હેતુલક્ષી પ્રશ્નો

વિધાન સત્ય બને તે રીતે આપેલા ચાર વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી નીચેના ક્રમાંક 13 થી 19 વાળા પ્રશ્નોના ઉત્તર આપો :

ઉદાહરણ 13 : સ્થળ A અને સ્થળ B ની વચ્ચે બસની અવરજવર માટેના ચાર માર્ગ છે. સ્થળ B અને સ્થળ C ની વચ્ચે બસની અવરજવર માટેના ત્રણ માર્ગ છે. કોઈ એક માણસ બસ દ્વારા સ્થળ B પર થઈને સ્થળ A થી સ્થળ C સુધીની મુસાફરી અલગ-અલગ માર્ગે થઈને વર્તુળાકારે પૂરી કરે છે. જો તે એકના એક માર્ગે ફરીથી જવા ઇચ્છતો ન હોય, તો આ વર્તુળાકાર મુસાફરી કેટલા પ્રકારે કરી શકે ?

(A) 72 (B) 144 (C) 14 (D) 19

ઉકેલ : આકૃતિ જુઓ.



આકૃતિ 7.2

જ્યાં A થી Bની વચ્ચે બસની અવરજવર માટેના ચાર માર્ગ અને B થી Cની વચ્ચે બસની અવરજવર માટેના 3 માર્ગ બતાવ્યા છે. આથી A થી C સુધી જવા માટેના કુલ $4 \times 3 = 12$ પ્રકાર છે. તે વર્તુળાકાર મુસાફરી હોય, તો માણસ સ્થળ B પર થઈને સ્થળ C થી સ્થળ A સુધી પહોંચવા માટે એકના એક માર્ગનો ઉપયોગ કરે તે પ્રતિબંધિત છે. આથી પાછા ફરતી વખતે તેની પાસે કુલ $2 \times 3 = 6$ જ માર્ગ બચે. આથી, માંગેલ પ્રકારોની કુલ સંખ્યા $= 12 \times 6 = 72$.

સાચો વિકલ્પ (A) છે.

ઉદાહરણ 14 : 7 પુરુષો અને 5 સ્ત્રીઓમાંથી, 3 પુરુષો અને 2 સ્ત્રીઓને સમાવતી સમિતિ કેટલા પ્રકારે બનાવી શકાય ?

(A) 45 (B) 350 (C) 4200 (D) 230

ઉકેલ : 7 પુરુષોમાંથી 3 પુરુષોની પસંદગી $^7C_3$ પ્રકારે અને 5 સ્ત્રીઓમાંથી 2 સ્ત્રીઓની પસંદગી $^7C_2$ પ્રકારે થાય. આથી, સમિતિની રચના માટે પસંદગીના પ્રકારોની કુલ સંખ્યા = $^7C_3 \times {}^5C_2 = 350$.

સાચો વિકલ્પ (B) છે.

ઉદાહરણ 15 : 'EAMCOT' શબ્દના બધા જ મૂળાક્ષરોને શક્ય હોય તેટલા ભિન્ન પ્રકારે ગોઠવવામાં આવે છે. બે સ્વરો પાસપાસે ન હોય તેવી ગોઠવણીના પ્રકારોની સંખ્યા .... હોય.

(A) 360 (B) 144 (C) 72 (D) 54

ઉકેલ : આપણે નોંધીએ કે, 'EAMCOT' શબ્દના 3 વ્યંજનો અને 3 સ્વરો E, A અને O છે. બે સ્વરો એક સાથે (એટલે કે પાસપાસે) ન હોવાથી સ્વરોની ગોઠવણીનાં શક્ય સ્થાનો આગળ 'X' નું ચિહ્ન કરેલ છે. X M X C X T X આમ, 3 સ્વરોની 4 સ્થાનમાં ગોઠવણી $^4P_3$ પ્રકારે અને 3 વ્યંજનોની ગોઠવણી $\lfloor 3$ પ્રકારે થાય. આથી, માંગેલ પ્રકારોની કુલ સંખ્યા = $3! \times {}^4P_3 = 144$.

સાચો વિકલ્પ (B) છે.

ઉદાહરણ 16 : વર્ણમાળાના 10 ભિન્ન મૂળાક્ષરો આપેલ છે. આપેલ મૂળાક્ષરોના ઉપયોગથી 5 મૂળાક્ષરો ધરાવતા શબ્દો બનાવવામાં આવે છે. ઓછામાં ઓછો એક મૂળાક્ષર પુનરાવર્તિત થતો હોય તેવા શબ્દોની સંખ્યા .... હોય.

(A) 69760 (B) 30240 (C) 99748 (D) 99784

ઉકેલ : (મૂળાક્ષર પુનરાવર્તિત થતો હોય તે શરત સાથે), 5 મૂળાક્ષરો ધરાવતા શબ્દોની સંખ્યા = 10^5. વળી, 5 ભિન્ન મૂળાક્ષરો દ્વારા બનતા શબ્દોની સંખ્યા = $^{10}P_5$.

આથી, માંગેલ શબ્દોની સંખ્યા = કુલ શબ્દોની સંખ્યા – એક પણ મૂળાક્ષર પુનરાવર્તિત થતો ન હોય તેવા શબ્દોની સંખ્યા

$$= 10^5 - {}^{10}P_5 = 69760.$$

સાચો વિકલ્પ (A) છે.

ઉદાહરણ 17 : એક અથવા એકથી વધારે ધ્વજ એકસાથે લેવામાં આવે તો ભિન્ન રંગના 6 ધ્વજ દ્વારા મળતા સંકેતોની સંખ્યા .... છે.

(A) 63 (B) 1956 (C) 720 (D) 21

ઉકેલ : એક ધ્વજ દ્વારા મળતા સંકેતોની સંખ્યા = $^6P_1 = 6$

બે ધ્વજના ઉપયોગથી મળતા સંકેતોની સંખ્યા = $^6P_2 = 30$

ત્રણ ધ્વજના ઉપયોગથી મળતા સંકેતોની સંખ્યા = $^6P_3 = 120$

ચાર ધ્વજના ઉપયોગથી મળતા સંકેતોની સંખ્યા = $^6P_4 = 360$

પાંચ ધ્વજના ઉપયોગથી મળતા સંકેતોની સંખ્યા = $^6P_5 = 720$

બધા જ (6) ધ્વજના ઉપયોગથી મળતા સંકેતોની સંખ્યા = $^6P_6 = 720$

આથી, એક અથવા એકથી વધુ ધ્વજ એકસાથે લેવામાં આવે તો મળતા સંકેતોની કુલ સંખ્યા

$$= 6 + 30 + 120 + 360 + 720 + 720 = 1956$$ (સરવાળાના સિદ્ધાંતની મદદથી)

સાચો વિકલ્પ (B) છે.

ઉદાહરણ 18 : એક પરીક્ષામાં ત્રણ પ્રશ્નો બહુ વિકલ્પી પ્રકારના પ્રશ્નો છે અને પ્રત્યેક પ્રશ્નના ઉત્તર માટે ચાર વિકલ્પો છે. કોઈ એક વિદ્યાર્થી આ પ્રશ્નોના ઉત્તર આપે છે. બધા પ્રશ્નોના સાચા ઉત્તરો આપવામાં સફળ ન થાય તેના પ્રકારોની સંખ્યા .... છે.

(A) 11 (B) 12 (C) 27 (D) 63

ઉકેલ : અહીં ત્રણ પ્રશ્નો બહુવિકલ્પી પ્રકારના પ્રશ્નો છે અને પ્રત્યેક પ્રશ્નના ઉત્તર માટે ચાર વિકલ્પો છે. આથી, શક્ય જવાબોની કુલ સંખ્યા $= 4 \times 4 \times 4 = 64$ થાય. તેમાંથી માત્ર એક જ જવાબ સંપૂર્ણપણે સાચો હોઈ શકે અને તેથી વિદ્યાર્થી બધા પ્રશ્નોના સાચા ઉત્તરો આપવામાં અસફળ રહે તેના પ્રકારોની સંખ્યા $= 64 - 1 = 63$.

સાચો વિકલ્પ (D) છે.

ઉદાહરણ 19 એક જ સમતલમાં આવેલી ત્રણ રેખાઓ l_1, l_2 અને l_3 પરસ્પર સમાંતર છે. રેખા l_1 પર m બિંદુઓ આવેલાં છે. રેખા l_2 પરનાં બિંદુઓની સંખ્યા n છે અને રેખા l_3 પરનાં બિંદુઓની સંખ્યા k છે. આ બિંદુઓ દ્વારા રચાતા ત્રિકોણોની મહત્તમ સંખ્યા .... છે.

(A) ${}^{(m+n+k)}C_3$ (B) ${}^{(m+n+k)}C_3 - {}^{m}C_3 - {}^{n}C_3 - {}^{k}C_3$

(C) ${}^{m}C_3 + {}^{n}C_3 + {}^{k}C_3$ (D) ${}^{m}C_3 \times {}^{n}C_3 \times {}^{k}C_3$

ઉકેલ : અહીં ત્રણેય રેખાઓ પરનાં બિંદુઓની કુલ સંખ્યા $(m + n + k)$ છે. આથી મળતા શક્ય ત્રિકોણની સંખ્યા ${}^{(m+n+k)}C_3$ છે. પરંતુ રેખા l_1 પરનાં m બિંદુઓ પૈકી 3 બિંદુઓ એકસાથે લેવામાં આવે, તો મળતા સંચયોની સંખ્યા ${}^{m}C_3$ છે. તે કોઈ ત્રિકોણ રચતા નથી. આ જ રીતે, ${}^{n}C_3$ અને ${}^{k}C_3$ બિંદુ સમરેખ છે. તેથી કોઈ ત્રિકોણ રચતા નથી. આથી, રચાતા ત્રિકોણોની મહત્તમ સંખ્યા $= {}^{(m+n+k)}C_3 - {}^{m}C_3 - {}^{n}C_3 - {}^{k}C_3$.

વિકલ્પ (B) સાચો છે.

સ્વાધ્યાય 7.3

ટૂંક જવાબી પ્રશ્નો

1. 8 ખુરશીઓને ક્રમાંક 1 થી 8 આપવામાં આવ્યા છે. બે સ્ત્રીઓ અને 3 પુરુષો પૈકી પ્રત્યેક એક ખુરશી પર બેસવા ઈચ્છે છે. સૌપ્રથમ સ્ત્રીઓ પૈકી પ્રત્યેક 1 થી 4 ક્રમાંકવાળી ખુરશીઓમાંથી કોઈ એક ખુરશી પર બેસવા ઇચ્છે છે અને ત્યાર બાદ પુરુષો બાકી રહેલ ખુરશીમાંથી કોઈ ખુરશી પર બેસશે. આવી ગોઠવણીના શક્ય પ્રકારોની સંખ્યા શોધો.

[**સૂચન :** બે સ્ત્રીઓ 1 થી 4 ક્રમાંકવાળી ખુરશીઓ પર બેસે, તો આ ગોઠવણી ${}^{4}P_2$ પ્રકારે અને 3 પુરુષો બાકીની 6 ખુરશીઓ પર ${}^{6}P_3$ પ્રકારે બેસે.]

2. RACHIT શબ્દના બધા જ મૂળાક્ષરોને શક્ય હોય તેટલા બધા જ પ્રકારે શબ્દકોષના ક્રમમાં ગોઠવવામાં આવે છે. શબ્દકોષના ક્રમ પ્રમાણે RACHIT શબ્દ કયા સ્થાને હશે ?

[**સૂચન :** પ્રત્યેક વિકલ્પમાં, A, C, H, I થી શરૂ થતા શબ્દોની સંખ્યા 5! છે.]

3. એક પ્રશ્નપત્રને બે ભાગમાં વહેંચવામાં આવ્યું છે. પ્રત્યેક ભાગમાં કુલ 6 પ્રશ્નો છે. એક વિદ્યાર્થી આ 12 પ્રશ્નોમાંથી 7 પ્રશ્નોના ઉત્તર આપવા ઇચ્છે છે. પ્રત્યેક ભાગમાંથી તેને 5 થી વધુ પ્રશ્નોના ઉત્તર આપવાની છૂટ ન હોય, તો તે કેટલા પ્રકારે 7 પ્રશ્નોના ઉત્તર આપી શકે તે શોધો.

4. એક સમતલમાં 18 બિંદુઓ આવેલાં છે. તે પૈકી પાંચ સમરેખ છે અને તે સિવાય કોઈ પણ ત્રણ બિંદુઓ એક જ રેખા પર આવેલાં નથી. તો આ બિંદુઓને જોડવાથી મળતી રેખાઓની કુલ સંખ્યા શોધો.

[**સૂચન :** રેખાઓની કુલ સંખ્યા = $^{18}C_2 - {}^5C_2 + 1$]

5. આપણે 8 વ્યક્તિઓમાંથી 6 વ્યક્તિઓની પસંદગી કરવા ઇચ્છીએ છીએ, પરંતુ વ્યક્તિ A પસંદ થયેલ હોય, તો વ્યક્તિ B પણ પસંદ થશે જ. આ પસંદગી કેટલા પ્રકારે શક્ય બને ?

6. 12 વ્યક્તિઓમાંથી એક ચૅરમૅન સાથે 5 વ્યક્તિઓની કેટલી સમિતિઓ બનાવી શકાય ?

[**સૂચન :** ચેરમેન 12 પ્રકારે પસંદ થઈ શકે અને બાકીના 11 માંથી 4 વ્યક્તિઓની પસંદગી $^{11}C_4$ પ્રકારે.]

7. જો પ્રત્યેક લાઈસન્સ તકતીમાં ત્રણ ભિન્ન અંકો પછી બે ભિન્ન મૂળાક્ષરોનો સમાવેશ થતો હોય, તો કેટલા પ્રકારે આવા વાહનોની લાઈસન્સ તકતીઓ બનાવી શકાય ?

8. એક થેલામાં 5 કાળા રંગના અને 6 લાલ રંગના દડાઓ છે. આ જથ્થામાંથી 2 કાળા રંગના અને 3 લાલ રંગના દડાઓ કેટલા પ્રકારે પસંદ થઈ શકે તે નક્કી કરો.

9. n ભિન્ન વસ્તુઓ પૈકી r વસ્તુઓ એક સાથે એવી રીતે લેવામાં આવે છે કે જેથી 3 ચોક્કસ વસ્તુઓ એક સાથે હોય જ, તો આવા ક્રમચયોની સંખ્યા શોધો.

10. 'TRIANGLE' શબ્દના બધા જ મૂળાક્ષરોના ઉપયોગથી બનતા ભિન્ન શબ્દોની સંખ્યા શોધો કે જેથી બે સ્વરો એક સાથે ન હોય.

11. અંકોના પુનરાવર્તન સિવાય, 6000 થી મોટી અને 7000 થી નાની હોય તેવી 5 વડે વિભાજ્ય સંખ્યાઓ શોધો.

12. $p_1, p_2, p_3, ..., p_{10}$ નામની 10 વ્યક્તિઓ પૈકી 5 વ્યક્તિઓને એક હારમાં એવી રીતે ગોઠવવામાં આવે છે કે જેથી પ્રત્યેક ગોઠવણીમાં વ્યક્તિ p_1 હાજર હોય જ્યારે વ્યક્તિઓ p_4 અને p_5 હાજર ન હોય. આવી ગોઠવણીના પ્રકારોની સંખ્યા શોધો. [**સૂચન :** માંગેલ ગોઠવણીના પ્રકારોની સંખ્યા = $^7C_4 \times 5!$]

13. એક હોલમાં વીજળીના 10 ગોળા છે. તે પૈકી પ્રત્યેક સ્વતંત્ર રીતે ચાલુ થઈ શકે છે, તો હોલ કેટલા પ્રકારે પ્રકાશિત થાય તે શોધો. [**સૂચન :** માંગેલ પ્રકારોની સંખ્યા = $2^{10} - 1$].

14. એક પેટીમાં 2 સફેદ રંગના, 3 કાળા રંગના અને 4 લાલ રંગના દડાઓ છે. જો પેટીમાંથી દડાની પસંદગી કરવામાં આવે ત્યારે પસંદગીમાં ઓછામાં ઓછા 1 કાળા રંગના દડાનો સમાવેશ થતો હોય, તો પેટીમાંથી ત્રણ દડાની પસંદગી કેટલા પ્રકારે થઈ શકે ? [**સૂચન :** માંગેલ પસંદગીના પ્રકારોની સંખ્યા = $^3C_1 \times {}^6C_2 + {}^3C_2 \times {}^6C_2 + {}^3C_3$.]

15. જો $^nC_{r-1} = 36$, $^nC_r = 84$ અને $^nC_{r+1} = 126$ હોય તો $^rC_2$ શોધો.

[**સૂચન :** સમીકરણો $\frac{^nC_r}{^nC_{r+1}}$ અથવા $\frac{^nC_r}{^nC_{r-1}}$ ના ઉપયોગથી r ની કિંમત શોધો.]

16. અંક 3, 5, 7, 8 અને 9 ના ઉપયોગથી 7000 કરતાં મોટી હોય તેવી કેટલી સંખ્યાઓ મળે (અંકોનું પુનરાવર્તન થતું નથી).

[**સૂચન :** 7000 કરતાં મોટી હોય તેવી 4 અંકોવાળી સંખ્યા ઉપરાંત, પાંચ અંકોવાળી સંખ્યાઓ હંમેશાં 7000 કરતાં મોટી જ હોય.]

17. સમતલમાં આવેલી 20 રેખાઓ પૈકી કોઈપણ બે રેખાઓ પરસ્પર સમાંતર નથી અને કોઈપણ ત્રણ રેખાઓ સંગામી નથી, તો તેઓ એકબીજીને કેટલાં બિંદુઓમાં છેદશે ?

18. કોઈ એક નિશ્ચિત શહેરમાં, તમામ ટેલિફોન નંબરો 6 અંકોવાળા છે. તે પૈકી પ્રથમ બે અંકો હંમેશાં 41 અથવા 42 અથવા 46 અથવા 62 અથવા 64 છે, તો કેટલા ટેલિફોન નંબરોના બધા જ અંકો (6 અંકો) ભિન્ન હોય ?

19. એક પરીક્ષામાં, વિદ્યાર્થીએ 5 પ્રશ્નો પૈકી 4 પ્રશ્નોના ઉત્તરો આપવાના છે. તેમાં પ્રશ્નો 1 તથા 2 ફરજિયાત હોય, તો વિદ્યાર્થી પ્રશ્નોની પસંદગી કેટલા પ્રકારે કરી શકે તે નક્કી કરો.

20. એક બહિર્મુખ બહુકોણના વિકર્ણોની સંખ્યા 44 હોય, તો તે બહુકોણની બાજુઓની સંખ્યા શોધો.

[**સૂચન :** n બાજુઓવાળા બહુકોણના વિકર્ણોની સંખ્યા $({}^nC_2 - n)$ હોય.]

વિસ્તૃત જવાબી પ્રશ્નો

21. 18 ઉંદરોને બે પ્રાયોગિક જૂથ અને એક નિયંત્રણ જૂથમાં ગોઠવવામાં આવે છે. પ્રત્યેક જૂથમાં ઉંદરોની સંખ્યા સમાન હોય, તો આ ઉંદરોને કેટલા પ્રકારે ત્રણ જૂથમાં ગોઠવી શકાય ?

22. એક પેટીમાં 6 સફેદ રંગની અને 5 લાલ રંગની લખોટીઓ છે. નીચેની શરતે પેટીમાંથી 4 લખોટીઓ પસંદ કરવાના પ્રકારોની સંખ્યા શોધો. (a) તે કોઈ પણ રંગની હોય (b) તેમના પૈકી બે સફેદ રંગની અને બે લાલ રંગની હોય (c) તે તમામ સમાન રંગની હોય.

23. 16 ખેલાડીઓમાંથી 11 ખેલાડીઓની ફૂટબૉલ ટીમ કેટલા પ્રકારે પસંદ થઈ શકે ?

તે પૈકી કેટલા પ્રકારમાં (i) બે ચોક્કસ ખેલાડીઓનો સમાવેશ થશે ?

(ii) બે ચોક્કસ ખેલાડીઓનો સમાવેશ નહિ થાય ?

24. કોઈ એક રમત માટે 11 વિદ્યાર્થીઓની એક ટીમ બનાવતી વખતે, ધોરણ 11 માંથી ઓછામાં ઓછા 5 વિદ્યાર્થીઓ અને ધોરણ 12 માંથી ઓછામાં ઓછા 5 વિદ્યાર્થીઓ પસંદ કરવામાં આવે છે. ધોરણ 11 અને ધોરણ 12 પૈકીના પ્રત્યેક વર્ગમાં 20 વિદ્યાર્થીઓ હોય તો કેટલા પ્રકારે ટીમની રચના થઈ શકે ?

25. કોઈ એક જૂથમાં 4 છોકરીઓ અને 7 છોકરાઓ છે. જો ટુકડીમાં

(i) એક પણ છોકરી ન હોય.

(ii) ઓછામાં ઓછો 1 છોકરો અને 1 છોકરી હોય.

(iii) ઓછામાં ઓછી ત્રણ છોકરીઓ હોય, તો 5 સભ્યોની ટુકડી કેટલા પ્રકારે પસંદ કરી શકાય ?

હેતુલક્ષી પ્રશ્નો

વિધાન સત્ય બને તે રીતે આપેલા ચાર વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી નીચેના ક્રમાંક 26 થી 40 વાળા પ્રશ્નોના ઉત્તર આપો :

26. જો ${}^nC_{12} = {}^nC_8$, હોય, તો n = ...

(A) 20 (B) 12 (C) 6 (D) 30

27. એક સમતોલ સિક્કાને 6 વખત ઉછાળવામાં આવે, તો શક્ય પરિણામોની સંખ્યા .... હોય.

(A) 36 (B) 64 (C) 12 (D) 32

28. અંકો 2, 3, 4, 7 નો માત્ર એક જ વખત ઉપયોગ કરીને ચાર ભિન્ન અંકોની .... સંખ્યાઓ બનાવી શકાય.

(A) 120 (B) 96 (C) 24 (D) 100

29. અંકો 3, 4, 5 અને 6 તમામને એક સાથે લેવામાં આવે તો બનતી તમામ સંખ્યાઓના એકમના સ્થાન પર રહેલા અંકોનો સરવાળો .... હોય.

(A) 432 (B) 108 (C) 36 (D) 18

30. 4 સ્વરો અને 5 વ્યંજનોમાંથી 2 સ્વરો અને 3 વ્યંજનોને લઈને રચવામાં આવતા શબ્દોની કુલ સંખ્યા .... હોય.

(A) 60 (B) 120 (C) 7200 (D) 720

31. અંકો 0, 1, 2, 3, 4 અને 5 નું પુનરાવર્તન કર્યા સિવાય રચવામાં આવતી 5 અંકોની સંખ્યા 3 વડે વિભાજ્ય છે, તો આ પ્રકારે રચવામાં આવતી 5 અંકોની કુલ સંખ્યાઓ .... હોય.

(A) 216 (B) 600 (C) 240 (D) 3125

[**સૂચન :** અંકો 0, 1, 2, 4, 5 ના ઉપયોગથી રચવામાં આવતી 5 અંકોની સંખ્યાઓ અથવા અંકો 1, 2, 3, 4, 5 ના ઉપયોગથી રચવામાં આવતી 5 અંકોની સંખ્યાઓના કિસ્સામાં અંકોનો સરવાળો 3 વડે વિભાજ્ય છે.]

32. એક ઓરડામાં રહેલી પ્રત્યેક વ્યક્તિ અન્ય બીજી વ્યક્તિ સાથે હસ્તધૂનન કરે છે. હસ્તધૂનનની કુલ સંખ્યા 66 હોય, તો ઓરડામાં .... વ્યક્તિઓ હશે.

(A) 11 (B) 12 (C) 13 (D) 14

33. 12 બિંદુઓ પૈકી 7 બિંદુઓ સમરેખ છે, તો આ બિંદુઓની મદદથી રચાતા ત્રિકોણની કુલ સંખ્યા .... હોય.

(A) 105 (B) 15 (C) 175 (D) 185

34. ચાર સમાંતર રેખાઓનો એક સમૂહ અને બીજી ત્રણ સમાંતર રેખાઓના સમૂહના છેદવાથી રચાતા સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણની કુલ સંખ્યા .... હોય.

(A) 6 (B) 18 (C) 12 (D) 9

35. 22 ખેલાડીઓમાંથી 2 ચોક્કસ ખેલાડીઓનો હંમેશાં ટીમમાં સમાવેશ થતો હોય અને 4 ચોક્કસ ખેલાડીઓનો કદાપિ ટીમમાં સમાવેશ ન થતો હોય, તો 11 ખેલાડીઓની ટીમની પસંદગીના પ્રકારોની કુલ સંખ્યા .... હોય.

(A) ${}^{16}C_{11}$ (B) ${}^{16}C_5$ (C) ${}^{16}C_9$ (D) ${}^{20}C_9$

36. ઓછામાં ઓછો એક અંક પુનરાવર્તિત થતો હોય તેવા પાંચ અંકોવાળા ટેલિફોન નંબરોની કુલ સંખ્યા .... છે.

(A) 90,000 (B) 10,000 (C) 30,240 (D) 69,760

37. 4 પુરુષો અને 6 સ્ત્રીઓમાંથી એવી સમિતિ રચવામાં આવે છે કે જેમાં ઓછામાં ઓછા બે પુરુષો હોય અને પુરુષો કરતાં બમણી સંખ્યામાં સ્ત્રીઓ હોય તો આવી સમિતિની રચનાના કુલ પ્રકારો .... હોય.

(A) 94 (B) 126 (C) 128 (D) એક પણ નહિ

38. જેના બધા જ અંકો ભિન્ન હોય તેવી 9 અંકોની કુલ સંખ્યાઓ .... હોય.

(A) 10! (B) 9 ! (C) $9 \times 9!$ (D) $10 \times 10!$

39. ARTICLE શબ્દના અક્ષરોથી બનતા .... શબ્દોમાં સ્વર યુગ્મ સ્થાને આવેલ હોય.

(A) 1440 (B) 144 (C) 7! (D) ${}^4C_4 \times {}^3C_3$

40. લીલા રંગની 5 ભિન્ન ડાયૂઝ, વાદળી રંગની 4 ભિન્ન ડાયૂઝ અને લાલ રંગની 3 ભિન્ન ડાયૂઝ આપેલી છે. ઓછામાં ઓછી એક લીલા રંગની અને એક વાદળી રંગની એમ 4 ભિન્ન ડાયૂઝ પસંદ થાય, તો આવી પસંદગીના પ્રકારોની કુલ સંખ્યા .... છે.

(A) 3600 (B) 3720 (C) 3800 (D) 3600

[**સૂચન :** લીલા રંગની 5 ડાયૂઝ, વાદળી રંગની 4 ડાયૂઝ અને લાલ રંગની 3 ડાયૂઝ પસંદ ન થાય તેના પ્રકારોની સંખ્યા અનુક્રમે 2^5, 2^4 અને 2^3 છે.]

નીચેનાં પ્રશ્ન ક્રમાંક 41 થી 50 સુધીના પ્રશ્નો માટે વિધાન સત્ય બને તે રીતે ખાલી જગ્યા પૂરો :

41. જો ${}^nP_r = 840$, ${}^nC_r = 35$ હોય, તો $r =$ ....

42. ${}^{15}C_8 + {}^{15}C_9 - {}^{15}C_6 - {}^{15}C_7 =$ ....

43. જ્યારે પુનરાવર્તનની અનુમતિ હોય ત્યારે n ભિન્ન વસ્તુઓ પૈકી, r વસ્તુઓને એક સાથે લેવામાં આવે, તો મળતા ક્રમચયોની સંખ્યા .... છે.

44. INTERMEDIATE શબ્દના બધા જ મૂળાક્ષરોના ઉપયોગથી રચવામાં આવતા શબ્દોમાં બે સ્વર ક્યારેય પણ એક સાથે ન હોય તો રચાતા ભિન્ન શબ્દોની સંખ્યા ....

[**સૂચન :** 6 વ્યંજનોમાંથી એક જ પ્રકારના બે વ્યંજનોની ગોઠવણીના પ્રકાર $\frac{6!}{2!}$ છે તથા સ્વરની ગોઠવણીના પ્રકારોની સંખ્યા $= {}^7P_6 \times \frac{1}{3!} \times \frac{1}{2!}$.]

45. એક પેટીમાં 5 લાલ રંગના, 4 સફેદ રંગના અને 3 કાળા રંગના દડાઓ છે. આ પેટીમાંથી 3 દડાઓની પસંદગી એવી રીતે કરવામાં આવે છે કે જેથી ઓછામાં ઓછા લાલ રંગના 2 દડા પસંદ થાય તો દડાની આવી પસંદગી .... પ્રકારે થાય.

46. જેના બધા જ અંકો અયુગ્મ હોય તેવી છ અંકોની કુલ સંખ્યાઓ ....

47. ફૂટબૉલ ચેમ્પિયનશિપમાં 153 મૅચો રમાડવામાં આવે છે. દરેક જૂથની બે ટીમો એકબીજા સાથે એક મૅચ રમે છે, તો આ ચેમ્પિયનશિપમાં ભાગ લેનારી ટીમોની કુલ સંખ્યા ....

48. છ '+' અને ચાર '–' નિશાનીઓને એક હારમાં એવી રીતે ગોઠવવામાં આવે છે કે જેવી બે '–' નિશાનીઓ એકસાથે ન આવે. આવી ગોઠવણીના પ્રકારોની કુલ સંખ્યા ....

49. 10 પુરુષો અને 7 સ્ત્રીઓમાંથી 6 સભ્યોની એક સમિતિ રચવામાં આવે છે, જેમાં ઓછામાં ઓછા 3 પુરુષો અને 2 સ્ત્રીઓનો સમાવેશ થાય છે. જો બે ચોક્કસ સ્ત્રીઓ એક જ સમિતિમાં સેવા બજાવવા સહમત ન થાય તો સમિતિઓની રચના કેટલા પ્રકારે થઈ શકે ?

[**સૂચન :** ઓછામાં ઓછા 3 પુરુષો અને 2 સ્ત્રીઓની પસંદગીના પ્રકારોની સંખ્યા $= {}^{10}C_3 \times {}^7C_3 + {}^{10}C_4 \times {}^7C_2$. 2 ચોક્કસ સ્ત્રીઓ હંમેશાં સાથે હોય તેવી પસંદગીના પ્રકારોની સંખ્યા $= {}^{10}C_4 + {}^{10}C_3 \times {}^5C_1$. બે ચોક્કસ સ્ત્રીઓ ક્યારેય એક સાથે ન હોય તેવી સમિતિઓની કુલ સંખ્યા = કુલ સંખ્યા – બે સ્ત્રીઓ એક સાથે હોય તેવી સમિતિઓની સંખ્યા.]

50. એક પેટીમાં 2 સફેદ રંગના, 3 કાળા રંગના અને 4 લાલ રંગના દડાઓ છે. પેટીમાંથી દડાઓની પસંદગી વખતે ઓછામાં ઓછો 1 દડો કાળા રંગનો પસંદ થતો હોય તો પેટીમાંથી 3 દડાઓની પસંદગીના પ્રકારોની કુલ સંખ્યા .... છે.

પ્રશ્ન ક્રમાંક 51 થી 59 નાં વિધાનો પૈકી કયાં વિધાનો સત્ય છે કે અસત્ય તે જણાવો. તમારા જવાબનું સમર્થન કરો :

51. સમતલમાં આપેલ 12 બિંદુઓ પૈકી 5 બિંદુઓ સમરેખ છે, તો આ બિંદુઓને યુગ્મમાં જોડવાથી મળતી રેખાઓની સંખ્યા ${}^{12}C_2 - {}^{5}C_2$ છે.

52. પાંચ ટપાલપેટીમાં ત્રણ પત્રોને પોસ્ટ કરવાના પ્રકારોની સંખ્યા 3^5 છે.

53. n વસ્તુઓ પૈકી, r વસ્તુઓને સાથે લેવામાં આવે, તો મળતા ક્રમચયોમાં m ચોક્કસ વસ્તુઓ એક સાથે હોય તેવા ક્રમચયોની સંખ્યા ${}^{n-m}P_{r-m} \times {}^{r}P_{m}$ છે.

54. એક સ્ટીમરમાં 12 પ્રાણીઓ માટે સ્થાન છે અને તેમાં ઘોડા, ગાય અને વાછરડાં (પ્રત્યેક 12 થી ઓછા નથી) ચઢાવવાં માટે તૈયાર છે, તો આ પ્રાણીઓને ચઢાવવાના પ્રકારોની સંખ્યા 3^{12} છે.

55. જો n વસ્તુઓ પૈકી કેટલીક અથવા બધી જ વસ્તુઓ એક સાથે લેવામાં આવે તો મળતા સંચયોની સંખ્યા 2^n-1 છે.

56. એક થેલામાં 4 લાલ રંગના અને 5 કાળા રંગના દડાઓ છે. જો એક જ રંગના દડાઓ સમાન છે તેમ આપેલ હોય, તો થેલામાંથી ઓછામાં ઓછો 1 લાલ રંગનો દડો પસંદ થાય તેવા માત્ર 24 પ્રકારો છે.

57. એક લાંબા ટેબલની દરેક બાજુએ 18 મહેમાનો પૈકીના અડધા ભાગના મહેમાનોને બેસાડવામાં આવે છે. ચાર ચોક્કસ મહેમાનોને એક ચોક્કસ બાજુએ અને ત્રણ મહેમાનોને ટેબલની બીજી બાજુએ બેસાડવામાં આવે છે, તો આ બેઠક-વ્યવસ્થાના પ્રકારોની સંખ્યા $\frac{11!}{5!6!}(9!)(9!)$ છે.

[**સૂચન :** 4 મહેમાનોને એક બાજુએ અને 3 મહેમાનોને બીજી બાજુએ બેસાડ્યા પછી, આપણે બાકીના 11 માંથી 5 મહેમાનોને એક બાજુએ અને 6 મહેમાનોને બીજી બાજુએ બેસાડવા માટે પસંદ કરવામાં આવે છે. લાંબા ટેબલની દરેક બાજુએ 9 મહેમાનોને 9! પ્રકારે ગોઠવી શકાય.]

58. 12 પ્રશ્નોને બે જૂથમાં વહેંચવામાં આવે છે. પ્રત્યેક જૂથમાં 6 પ્રશ્નો વહેંચેલા છે. એક વિદ્યાર્થી આ 12 પ્રશ્નોમાંથી 7 પ્રશ્નોના જવાબ આપવા ઇચ્છે છે. તેને પ્રત્યેક જૂથમાંથી 5 થી વધુ પ્રશ્નોના જવાબ આપવાની અનુમતિ નથી, તો તે આ સાત પ્રશ્નોની પસંદગી 650 પ્રકારે કરી શકે.

59. 12 જગ્યાઓની ભરતી માટે 25 ઉમેદવારો છે. તેમાંથી 5 ઉમેદવારો અનુસૂચિત જાતિના છે. 3 જગ્યાઓ અનુસૂચિત જાતિના ઉમેદવારો માટે અનામત હોય અને બાકીની બધા જ ઉમેદવારો માટે બિનઅનામત હોય, તો પસંદગીના પ્રકારોની કુલ સંખ્યા ${}^{5}C_3 \times {}^{20}C_9$ છે.

પ્રશ્ન-ક્રમાંક 60 થી 64 મા વિભાગ I ની અભિવ્યક્તિને વિભાગ II ની અભિવ્યક્તિ સાથે એવી રીતે જોડો કે જેથી ફલિત વિધાન સત્ય બને.

60. ગણિતનાં 3 પુસ્તકો, ભૌતિકવિજ્ઞાનનાં 4 પુસ્તકો અને અંગ્રેજીનાં 5 પુસ્તકો પૈકી કેટલા ભિન્ન પ્રકારે સંગ્રહ કરવામાં આવે કે જેથી પ્રત્યેક સંગ્રહમાં :

વિભાગ I	વિભાગ II
(a) પ્રત્યેક વિષયનું એક પુસ્તક હોય :	(i) 3968
(b) પ્રત્યેક વિષયનું ઓછામાં ઓછું એક પુસ્તક હોય :	(ii) 60
(c) અંગ્રેજીનું ઓછામાં ઓછું એક પુસ્તક હોય :	(iii) 3255

61. પાંચ છોકરાઓ અને પાંચ છોકરીઓને એક હારમાં ગોઠવવામાં આવે છે, તો નીચેની શરતોને આધારે બનતી બેઠક-વ્યવસ્થાના પ્રકારોની સંખ્યા શોધો :

વિભાગ I	વિભાગ II
(a) છોકરાઓ અને છોકરીઓ વારાફરતી ઊભા હોય :	(i) $5! \times 6!$
(b) બે છોકરીઓ એક સાથે બેઠી ન હોય :	(ii) $10 ! - 5 ! 6 !$
(c) બધી જ છોકરીઓ એક સાથે બેઠી હોય :	(iii) $(5!)^2 + (5!)^2$
(d) બધી છોકરીઓ ક્યારેય એક સાથે ન હોય :	(iv) $2 ! 5 ! 5 !$

62. 10 પ્રાધ્યાપક અને 20 વ્યાખ્યાતામાંથી 2 પ્રાધ્યાપક અને 3 વ્યાખ્યાતાની સમિતિ રચવામાં આવે તો :

વિભાગ I	વિભાગ II
(a) કેટલા પ્રકારે સમિતિ રચી શકાય ?	(i) ${}^{10}C_2 \times {}^{19}C_3$
(b) એક નિશ્ચિત પ્રાધ્યાપક સમાવેશ થતો હોય તેવી કેટલી સમિતિઓ રચી શકાય ?	(ii) ${}^{10}C_2 \times {}^{19}C_2$
(c) એક નિશ્ચિત વ્યાખ્યાતાનો સમાવેશ થતો હોય તેવી કેટલી સમિતિઓ રચી શકાય ?	(iii) ${}^{9}C_1 \times {}^{20}C_3$
(d) એક નિશ્ચિત વ્યાખ્યાતાનો સમાવેશ ન થતો હોય તેવી કેટલી સમિતિઓ રચી શકાય ?	(iv) ${}^{10}C_2 \times {}^{20}C_3$

63. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, અંકોના ઉપયોગથી 4 ભિન્ન અંકોની સંખ્યાઓ બનાવવામાં આવે છે, તો

વિભાગ I	વિભાગ II
(a) કેટલી સંખ્યાઓ બનાવી શકાય ?	(i) 840
(b) કેટલી સંખ્યાઓને 2 વડે નિ:શેષ ભાગી શકાય ?	(ii) 200
(c) કેટલી સંખ્યાઓ 25 વડે નિ:શેષ વિભાજ્ય હોય ?	(iii) 360
(d) કેટલી સંખ્યાઓ 4 વડે નિ:શેષ વિભાજ્ય હોય ?	(iv) 40

64. MONDAY શબ્દના બધા જ મૂળાક્ષરોને અર્થસભર કે અર્થરહિત પુનરાવર્તન સિવાય ગોઠવવામાં આવે તો કેટલા શબ્દો બને જેમાં,

વિભાગ I	વિભાગ II
(a) એક સાથે 4 અક્ષરોનો ઉપયોગ કરવામાં આવે.	(i) 720
(b) એક સાથે બધા જ અક્ષરોનો ઉપયોગ કરવામાં આવે.	(ii) 240
(c) બધા જ અક્ષરોનો ઉપયોગ કરવામાં આવે. પરંતુ પ્રથમ સ્થાને સ્વર આવેલ હોય.	(iii) 360