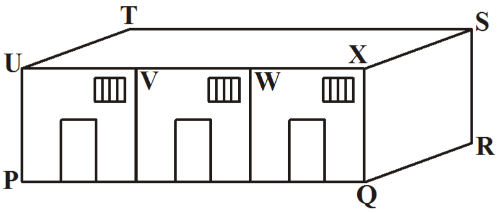
خطوط اور زاویئے

Lines and Angles

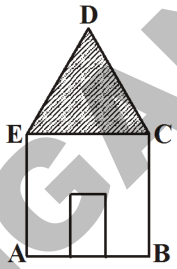
4

4.1 تعارف

رحیم اور گوپی نے اپنے مدرسہ اور مکان کے خاکے بنائے' کیا آپ ان خاکوں میں بعض زاویوں اور خطی مقطوعوں کی نشاندہی کر سکتے ہیں؟



(ii)



(i)

مذکورہ خاکوں میں (PQ' RS' ST ......) اور (AB' BC' CD ......) خطی مقطوعوں کی مثالیں ہیں اور ∠UPQ ' ∠PQR '......' ∠EAB' ∠ABC زاویوں کی مثالیں ہیں۔

کیا آپ جانتے ہیں کہ جب کبھی اک آرکیٹیکٹ کو عمارتوں' طیاروں' پلوں وغیرہ کے نقشے تیار کرنا پڑتا ہے اسکو متعدد زاویوں سے خطوط اور متوازی خطوط کھینچنے پڑتے ہیں۔

سائنس میں مثال کے طور پر نور (Optics) میں مفروضات کے تحت خطوط مستقیم زاویئے زیر بحث لائے جاتے ہیں۔ یوں روشنی کی حرکت کا مطالعہ کیا جاتا ہے' اس دوران انعکاس' انعطاف اور انتشار کا مطالعہ کرنے کے لیے خاکے تیار کرنا پڑتا ہے۔ اسی طرح یہ دیکھنے کے لیے کہ کسی جسم پر عمل کرنے والی متعدد قوتوں سے ہونے والے کام کو محسوب کرنے قوتوں اور نقل مکان کے درمیان زاویوں پر غور کرنا لازم ہے تا کہ نتائج اخذ کئے جا سکیں۔ کسی مقام کی بلندی معلوم کرنے کے لیے ہمیں زاویوں اور خطوط دونوں ہی کی ضرورت ہوتی ہے' روزمرہ زندگی میں کئی موقعوں پر ہمیں علم ہندسہ (جیومٹری) کے نظریات استعمال کرنا ہوتا ہے۔

یہ کیجیے

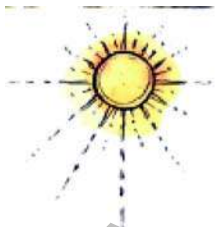
اپنے اطراف و اکناف کے ماحول کا مشاہدہ کرتے ہوئے روزمرہ زندگی میں ایسی تین مثالیں دیجیے جہاں کہ ہم کو خطوط اور زاویوں سے مدد لینا پڑتا ہے۔

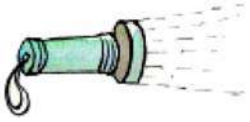
اپنی نوٹ بک میں ان اشکال کو بنائیے۔ اس طرح کی تصویروں کو اکٹھا کیجیے۔

SCERT TELANGANA

یہ کتاب حکومت تلنگانہ کی جانب سے مفت تقسیم کے لیے ہے۔ 2020-21

4.2 علم ہندسہ میں بنیادی اصطلاحات





سورج یا ٹارچ لائٹ سے نکلتی ہوئی شعاعوں پر غور کیجیے۔

ان شعاعوں کو کیسے ظاہر کیا جائے گا ؟ سورج سے نکلتی ہوئی ایک شعاع دراصل خطِ مستقیم کا ایک حصہ ہے، یہ کسی ایک نقطہ سے شروع ہو کر کسی متعین سمت میں لا متناہی فاصلہ کی طرف رواں ہوتی ہے۔ خطِ مستقیم کے دو اختتامی سروں تک محدود کسی لکیر کو خطی قطعہ کہتے ہیں۔

A B خطی قطعہ AB کو عام طور پر $\overline{AB}$ سے ظاہر کرتے ہیں جب کہ اس کی لمبائی کو AB سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ شعاع AB کو $\overrightarrow{AB}$ سے اور خطِ مستقیم کو $\overleftrightarrow{AB}$ سے ظاہر کرتے ہیں، لیکن عام طور پر خطوطِ مستقیم $\overleftrightarrow{AB}$، $\overleftrightarrow{PQ}$ سے ہی ظاہر کئے جاتے ہیں اور بعض دفعہ l، m، n وغیرہ کی علامات خطوط کو ظاہر کرنے کے لیے استعمال کی جاتی ہیں۔

اگر ایک ہی خط پر تین یا زائد نقاط پائے جاتے ہوں تو انہیں ہم خط نقاط کہتے ہیں، اور اگر ایسا نہ ہو تو یہ نقاط غیر ہم خط نقاط کہلاتے ہیں۔

ذرا کرنے ایک خط پر بعض نقاط متعین کئے ان سے بننے والے خطی خطوط کو ظاہر کیجیے۔

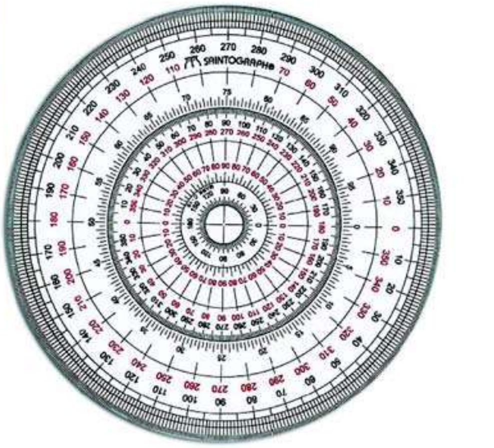
(نوٹ: $\overline{PQ}$ اور $\overline{QP}$ ایک ہی خطی قطعہ کی علامت ہوں گے)

سلسلہ نشان	خط پر نقاط	خطی قطعہ	تعداد
1.	P R Q → 3	PQ, PR, RQ	3
2.	P S R Q → 4	PQ, PR, PS, SR, SQ, RQ	6
3.	P S T R Q → 5	....	

کیا آپ کو نقاط اور خطی مقطوعوں کے درمیان کوئی تعلق نظر آتا ہے؟

کسی خطِ مستقیم پر مزید کچھ اور نقاط کا تعین کرتے ہوئے ایسے ہی کسی تعلق کو واضح کیجیے۔

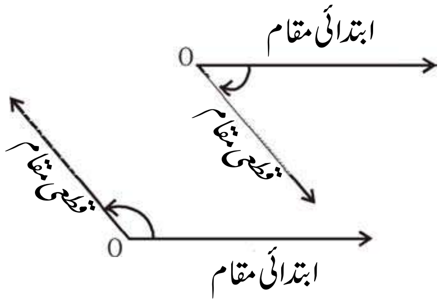
خطی قطعہ پر نقاط	2	3	4	5	6	7
خطی قطعہ کی تعداد	1	3	6	.....	.....	.....



ایک دائرے کو 360 مساوی حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے اسے متصلہ شکل میں دیکھیے۔

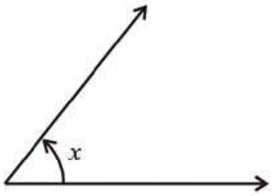
ہر ایک حصہ (یا اس کا تعین) ایک درجہ (ڈگری) کہلاتا ہے۔

SCERT TELANGANA

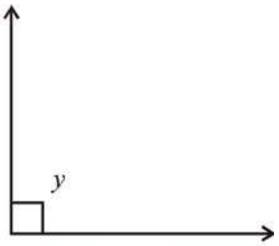


کسی شعاع کو اس کے ابتدائی مقام سے گھماتے ہوئے ایک قطعی مقام پر لانے کا عمل

کسی خاص نقطہ 'O' کے اطراف خطی قطعہ کے ابتدائی مقام سے اسے گھماتے ہوئے ایک قطعی مقام تک لانے کا عمل گھماؤ اور اس گھماؤ کا تعین زاویہ کہلاتا ہے۔

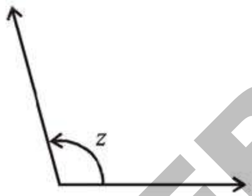


حادہ زاویہ : $0° < x < 90°$

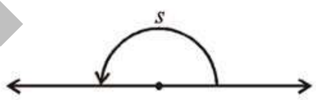


زاویہ قائمہ : $y = 90°$

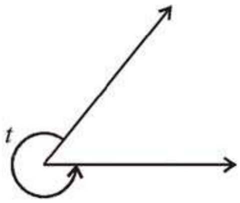
گھماؤ کے ایک مکمل چکر سے 360^0 حاصل ہوتا ہے۔ زاویے پرکار کی مدد سے بھی بنائے جا سکتے ہیں۔ زاویہ اس وقت بنتا ہے جب دو شعاعیں ایک ہی نقطہ سے نکلتی ہیں۔ زاویہ بنانے والی یہ شعاعیں زاویہ کے بازو کہلاتی ہیں اور اس مشترک نقطہ کو راس (Vertex) کہا جاتا ہے۔ آپ نے پچھلی جماعتوں میں مختلف زاویوں جیسے: زاویہ حادّہ، زاویہ قائمہ، زاویہ منفرجہ، زاویہ مستقیم اور زاویہ انعکاس کا مطالعہ کیا ہے۔



زاویہ منفرجہ : $90° < z < 180°$



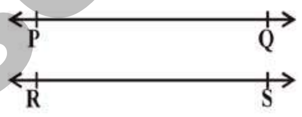
زاویہ مستقیم : $s = 180°$

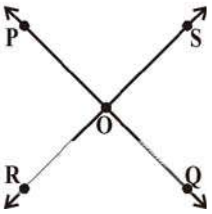


زاویہ انعکاس : $180° < t < 360°$

SCERT TELANGANA

4.2.1 قاطع اور غیر قاطع خطوط

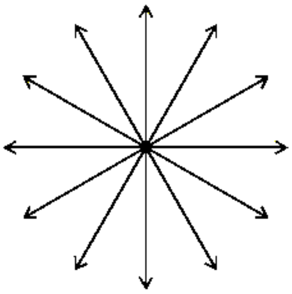




ان خطوط پر غور کیجیے کیا $\overleftrightarrow{PQ}$ اور $\overleftrightarrow{RS}$ کے خطوط میں کوئی مشترک نقطہ ہے؟ ایسے خطوط کو کیا کہا جائے گا؟ ان خطوط کو متوازی خطوط کہتے ہیں۔

دوسری جانب اگر یہ خطوط ایک دوسرے سے ملتے ہیں (یا ان کا کوئی مشترک نقطہ ہوتا ہے) تو انہیں قاطع خطوط کہا جاتا ہے۔

4.2.2 متراکز خطوط



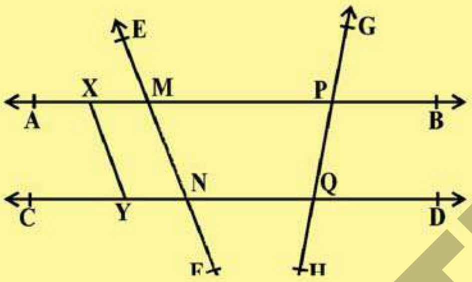
ایک ہی نقطہ پر کتنے خطوط گزر سکتے ہیں؟ کیا ایسے خطوط کو کوئی نام دیا جا سکتا ہے؟ جب تین یا زائد خطوط ایک ہی نقطہ پر قطع کرتے ہیں تو انہیں متراکز خطوط کہا جاتا ہے اور اس نقطہ کو نقطہ تراکز کہتے ہیں۔

غور کیجیے اور تبادلہ خیال کرتے ہوئے لکھیے

قاطع خطوط اور متراکز خطوط میں کیا فرق ہے؟

مشق 4.1

1. دی ہوئی شکل میں حسب ذیل کے نام بتائیے۔



(i) کوئی چھ نقاط

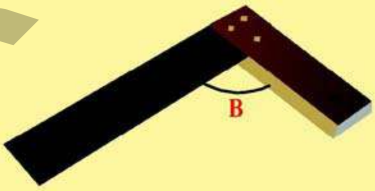
(ii) کوئی پانچ خطی مقطوعے

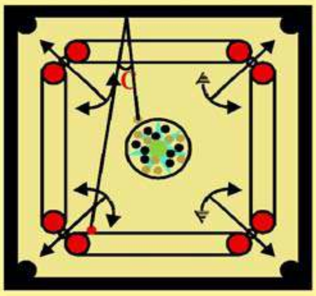
(iii) کوئی چار شعاعیں

(iv) کوئی چار خطوط

(v) کوئی چار ہم خط نقاط

2. ذیل کی اشکال کا مشاہدہ کرتے ہوئے ان میں مختلف قسم کے زاویوں کی نشاندہی کیجیے۔





3. بتائیے کہ آیا ذیل کے بیانات صادق ہیں یا کاذب؟

(i) ایک شعاع کا کوئی اختتامی نقطہ نہیں ہوتا۔

(ii) خط $\overleftrightarrow{AB}$ اور خط $\overleftrightarrow{BA}$ دونوں ایک ہی ہیں۔

(iii) شعاع $\overrightarrow{AB}$ اور شعاع $\overrightarrow{BA}$ ایک ہی ہیں۔

(iv) ایک خطِ مستقیم کا طول متعین ہوتا ہے۔

(v) ایک مستوی کا طول اور عرض تو ہوتا ہے، لیکن موٹائی نہیں ہوتی۔

SCERT TELANGANA

(vi) کوئی دو متفرق نقطوں سے ایک ہی خط بنتا ہے۔

(vii) دو خطوط دو نقاط پر ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں۔

(viii) دو قاطع خطوط متوازی خطوط نہیں ہو سکتے۔

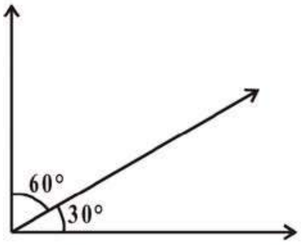
4. جب گھڑی میں ذیل کا وقت ہو تو سوئیوں کے درمیان کونسا زاویہ بنے گا؟

(i) 9 بجے (ii) 6 بجے (iii) 7:00 بجے شام

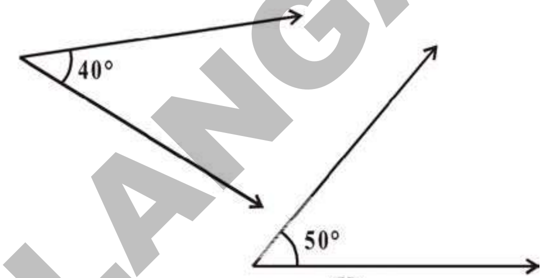
4.3 زاویوں کی جوڑیاں

آیئے بعض زاویوں کی جوڑیوں کا مطالعہ کرتے ہیں۔

ذیل کی اشکال پر غور کرتے ہوئے زاویوں کا مجموعہ معلوم کیجیے۔



(i)



(ii)

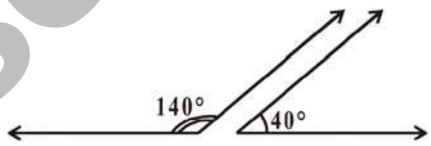
دی ہوئی شکل میں دو زاویوں کا مجموعہ کیا ہوگا؟ کیا یہ 90^0 ہے؟ کیا آپ جانتے ہیں کہ زاویوں کی ایسی جوڑیوں کو کیا کہتے ہیں؟ انہیں اتمامی زاویے (Complementry angle) کہتے ہیں۔

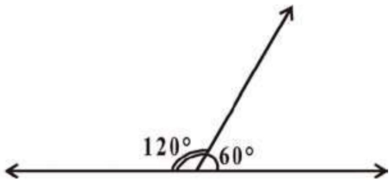
اگر دیا گیا ایک زاویہ x^0 ہے تو بتایئے کہ اس کا اتمامی زاویہ کیا ہوگا؟ x^0 کا اتمامی زاویہ $(90^0 - x^0)$ ہوگا۔

مثال (1) : اگر ایک زاویہ 62^0 ہے تو بتایئے کہ اس کا اتمامی زاویہ کیا ہوگا؟

حل : چونکہ اتمامی زاویوں کا مجموعہ 90^0 ہوتا ہے لہٰذا 62^0 کا اتمامی زاویہ $90^0 - 62^0 = 28^0$ ہوگا۔

اب ذیل کی اشکال پر غور کرتے ہوئے دیئے ہوئے زاویوں کا حاصل جمع معلوم کیجیے۔





دی ہوئی اشکال میں ہر ایک کے لیے دو زاویوں کا حاصل جمع کیا ہوگا؟ کیا یہ 180^0 ہے؟ آپ جانتے ہیں کہ ہم ایسے زاویوں کو کیا کہتے ہیں؟ انہیں تمامی (تکمیلی زاویے) کہتے ہیں۔ اگر دیا ہوا زاویہ x^0 ہو تو اس کا تکمیلی (Supplimentry Angle) زاویہ کیا ہوگا؟ x^0 کا تکمیلی زاویہ $(180^0 - x^0)$ ہوگا۔

SCERT TELANGANA

مثال (2) : دو اتمامی زاویے 4:5 کی نسبت میں ہیں، انہیں محسوب کیجیے۔

حل : فرض کیجیے کہ یہ زاویے $4x$ اور $5x$ ہیں۔

تب $4x + 5x = 90^0$ کیوں؟

$$9x = 90^0 \Rightarrow x = 10^0$$

$\therefore$ مطلوبہ زاویے 40^0 اور 50^0 ہوں گے؟

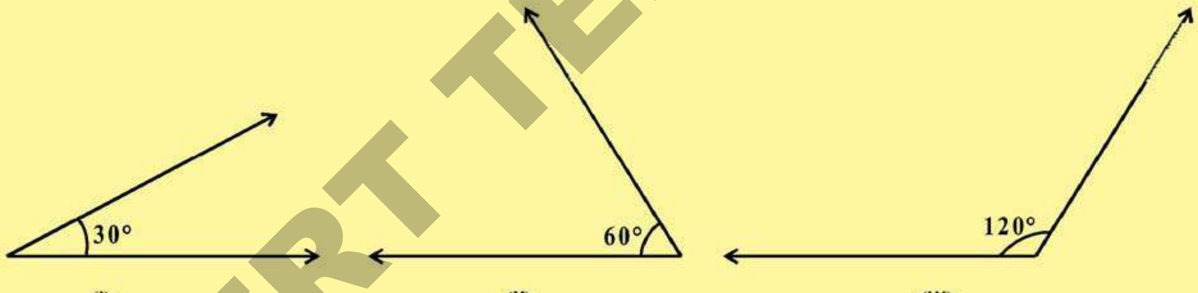
آیئے زاویوں کی بعض جوڑیوں جیسے $(240^0, 120^0)$ $(260^0, 100^0)$ $(180^0, 180^0)$ $(310^0, 50^0)$ ...... وغیرہ پر غور کریں، ان جوڑیوں کو کیا کہا جائے گا؟ زاویوں کی وہ جوڑیاں جن کا مجموعہ 360^0 ہوتا ہے زوجی زاویہ (Conjugtive Angle) کہلاتا ہے۔ کیا آپ بتا سکتے ہیں کہ 270^0 کا زوجی زاویہ کیا ہوگا؟ زاویہ x^0 کا زوجی زاویہ کیا ہوگا؟

یہ کیجیے

1. حسب ذیل کے اتمامی اور تکمیلی اور زوجی زاویوں کو محسوب کیجیے۔

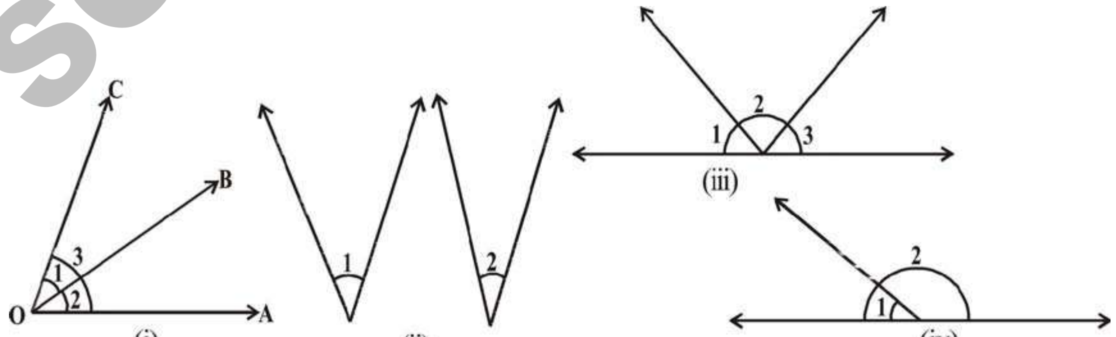
(a)	45^0	(b)	75^0	(c)	54^0	(d)	30^0
(e)	60^0	(f)	90°	(g)	0^0		

2. دیے ہوئے زاویے کب اتمامی اور تکمیلی زاویے ہو جائیں گے؟



(i) (ii) (iii)

ذیل کی اشکال پر غور کیجیے کیا کوئی مشترک خصوصیت ان میں پائی جاتی ہے؟



(i) (ii) (iv)

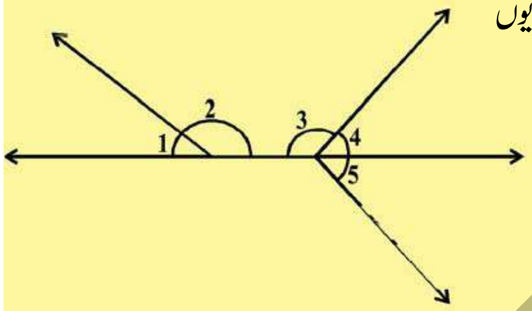
SCERT TELANGANA

دی ہوئی شکل (i) میں راس 'O' اور بازو $\overline{OB}$ $\angle 1$ اور $\angle 2$ دونوں کے لیے مشترک ہیں، آپ غیر مشترک بازو کے بارے میں کیا کہیں گے اور انہیں کیسے ترتیب دیا جائے گا؟ انہیں مشترکہ بازو کے دونوں جانب ترتیب دیا جاسکتا ہے۔ زاویوں کی ایسی جوڑیوں کو کیا کہا جائے گا؟

انہیں متصلہ زاویے کہتے ہیں۔

شکل (ii) میں زاویہ $\angle 1$ اور زاویہ $\angle 2$ دئے گئے ہیں، نہ ہی ان کا کوئی مشترکہ بازو ہے اور نہ ہی کوئی مشترکہ راس۔ اسی لئے انہیں متصلہ زاویے ہی کہا جائے گا۔

کوشش کیجیے



(i) مذکورہ اشکال ((i)، (ii)، (iii)، (iv)) میں متصلہ اور غیر متصلہ زاویوں کی جوڑیاں معلوم کیجیے۔

(ii) دی ہوئی شکل میں متصلہ زاویوں کی نشاندہی کیجیے۔

مذکورہ مطالعہ سے ہم یہ نتیجہ پر پہنچتے ہیں کہ زاویوں کی ایسی جوڑیاں جن کے راس مشترک، مشترک بازو اور غیر مشترک بازو مشترکہ بازو کے دونوں جانب پایا جاتا ہو، متصلہ زاویے کہلاتے ہیں۔

دی ہوئی شکل پر غور کیجیے، کھلاڑی (اتھلیٹ) کے ہاتھ اور بھالے (Javelin) میں زاویے بن رہے ہیں، یہ کونسے زاویے ہیں؟ ظاہر ہے یہ زاویے متصلہ زاویے ہیں۔ اب بتائیے کہ ان زاویوں کا مجموعہ کیا ہوگا؟ چونکہ یہ زاویے ایک ہی خط مستقیم پر واقع ہیں ان کا مجموعہ 180^0 ہوگا۔ ان زاویوں کو کیا کہیں گے؟ انہیں خطی جوڑی کہا جاتا ہے۔ لہٰذا اگر دو متصلہ زاویوں کا حاصل جمع 180^0 ہو تو انہیں خطی جوڑی کہا جاتا ہے۔

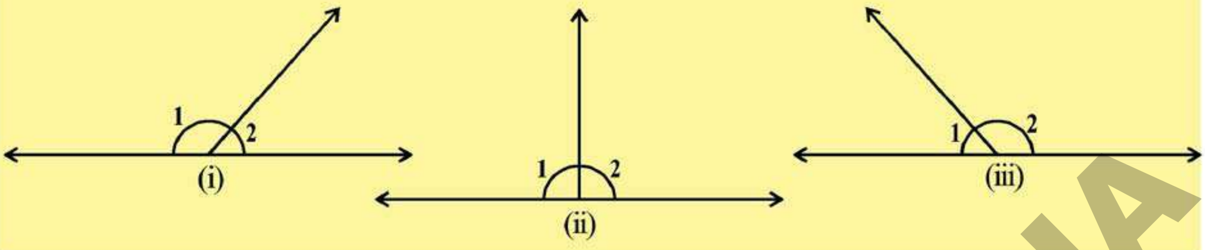
غور کیجیے اور تبادلہ خیال کرتے ہوئے لکھیے

خطی زاویوں کی جوڑیاں ہمیشہ تکمیلی ہوتی ہیں، لیکن ضروری نہیں کہ تکمیلی زاویے خطی جوڑی ہوں۔ کیوں؟

SCERT TELANGANA

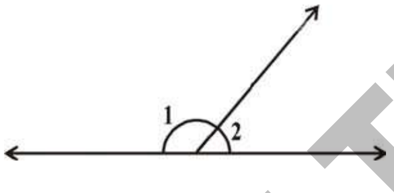
عملی کام

حسب ذیل زاویوں کو محسوب کرتے ہوئے دئے ہوئے جدول کو مکمل کیجیے۔



شکل	$\angle 1$	$\angle 2$	$\angle 1 + \angle 2$
(i)			
(ii)			
(iii)			

4.3.1 زاویوں کی مسلمہ خطی جوڑیاں

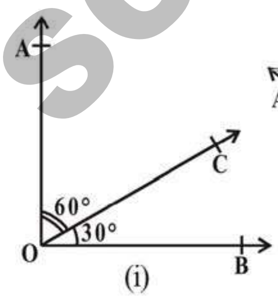


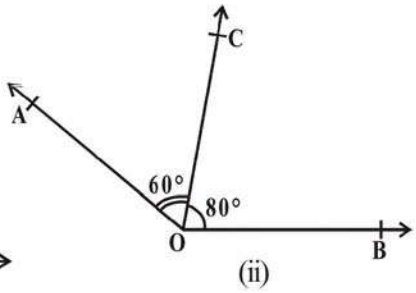
مسلمہ اصول: اگر کوئی شعاع ایک خطِ مستقیم پر واقع ہے تب بننے والے دو متصلہ زاویوں کا مجموعہ 180^0 ہوتا ہے۔

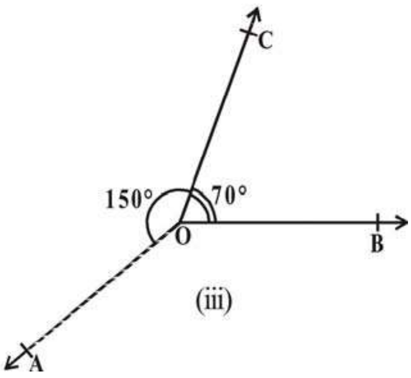
جب متصلہ دو زاویوں کا حاصل جمع 180^0 ہو تو انہیں زاویوں کی خطی جوڑی کہا جائے گا۔

دی ہوئی شکل میں $\angle 1 + \angle 2 = 180^0$

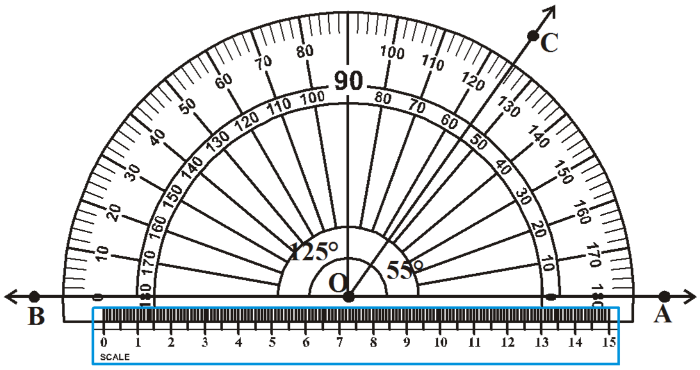
آیئے زاویئے بنائیں۔ شکل کے مطابق مختلف متصلہ زاویئے بنایئے۔ ہر ایک شکل کے لیے پڑی (رولر) کو ایک غیر مشترک بازو پر رکھیے۔ کیا دوسرا غیر مشترک بازو پڑی سے متصل ہوگا؟







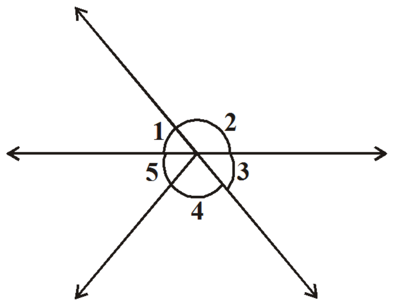
SCERT TELANGANA



دی ہوئی شکل (iv) میں آپ یہ دیکھ سکتے ہیں کہ غیر مشترک دونوں بازو پٹری سے متصل پائے جاتے ہیں یعنی یہ خط مستقیم کے غیر مشترک بازو ہیں علاوہ ازیں غور کریں کہ

$\angle AOC + \angle COB = 125^0 + 55^0 = 180^0$

دیگر اشکال میں یہ خصوصیت نہیں دیکھی جائے گی۔

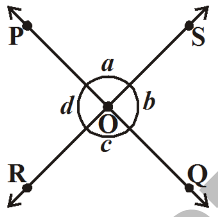


مسلمہ اصول: اگر کوئی دو متصلہ زاویوں کا مجموعہ 180^0 ہو تو زاویوں کے غیر مشترک بازو، خط مستقیم بناتے ہیں۔ یہ بیان مسلمہ زاویہ کی خطی جوڑی کا عکس بیان کہلاتا ہے۔

کسی نقطہ پر زاویے: ہم جانتے ہیں کہ ایک نقطہ پر تمام زاویوں کا مجموعہ ہمیشہ 360^0 ہوتا ہے۔

دی ہوئی شکل میں $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 = 360^0$

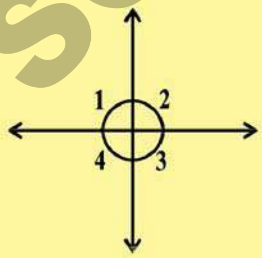
4.3.2 قاطع خطوط کے زاویے

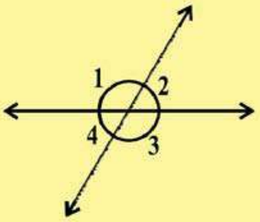


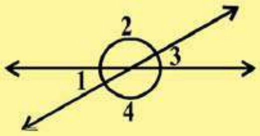
دو قاطع خطوط کھینچ کر ان کے نام دیجیے اور زاویوں کی خطی جوڑیوں کی شناخت کرتے ہوئے اپنی نوٹ بک میں لکھیے۔ ہم کہیں گے کہ یہ مقابل راسی کے زاویے ہیں۔ مقابل راسی زاویوں کی کتنی جوڑیاں پائی جاتی ہیں؟ کیا آپ بتا سکتے ہیں (شکل دیکھیے)

عملی کام

مذکورہ اشکال میں چار زاویوں 1، 2، 3، 4 کو محسوب کرتے ہوئے جدول مکمل کیجیے۔







SCERT TELANGANA

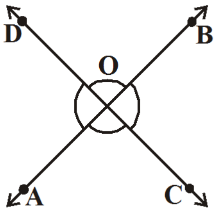
یہ کتاب حکومت تلنگانہ کی جانب سے مفت تقسیم کے لیے ہے۔ 2020-21

شکل	$\angle 1$	$\angle 2$	$\angle 3$	$\angle 4$
(i)				
(ii)				
(iii)				

آپ متقابل راسی زاویوں کی جوڑیوں سے متعلق کیا دیکھتے ہیں؟ کیا وہ مساوی ہیں؟ آیئے ہم اس بات کو منطقی طور پر ثابت کریں۔

مسئلہ 4.1: اگر دو خطوط ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں تو واقع ہونے والے متقابل راسی زاویوں کی جوڑیاں مساوی ہوں گی۔

دیا گیا ہے کہ: AB اور CD ایک دوسرے کو نقطہ O پر قطع کرتے ہیں۔



مطلوب:

(i) $\angle AOC = \angle BOD$

(ii) $\angle AOD = \angle BOC$

ثبوت:

شعاع $\overrightarrow{OA}$، خطی قطعہ $\overline{CD}$ پر واقع ہے۔

$\therefore$ $\angle AOC + \angle AOD = 180^0$ (زاویہ مسلمہ کی خطی جوڑی) .... (1)

$\angle AOD + \angle BOD = 180^0$ (کیوں؟) .... (2)

$\angle AOC + \angle AOD = \angle AOD + \angle BOD$ (1) اور (2) سے

$\angle AOC = \angle BOD$ (دونوں جانب مساوی زاویوں کو حذف کرنے سے)

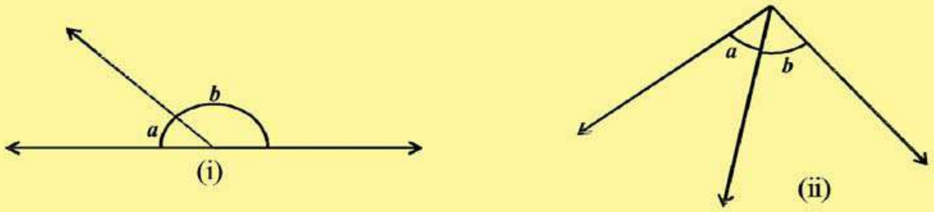
ہم ثابت کر سکتے ہیں۔

$\angle AOD = \angle BOC$

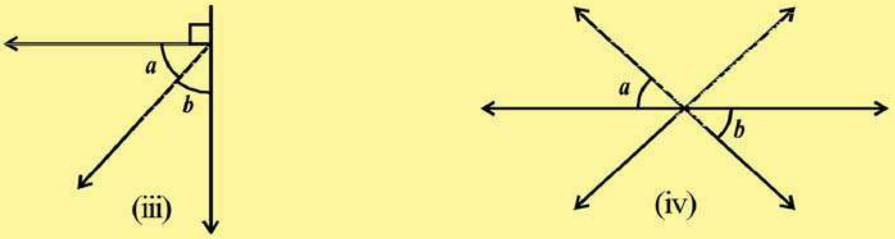
آپ خود ثابت کریں۔

یہ کیجیے

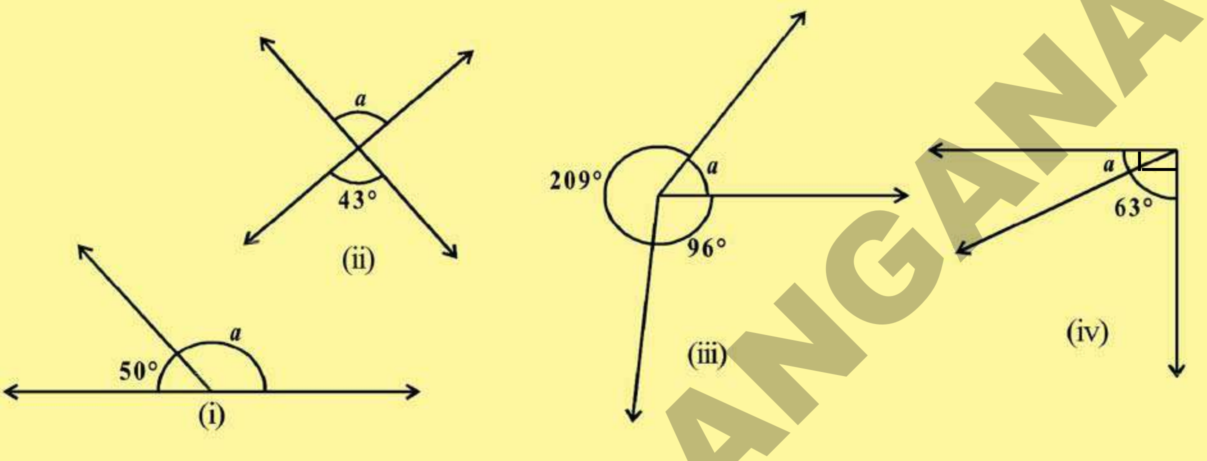
1. دیئے ہوئے زاویوں کی انمامی، خطی جوڑی، متقابل راسی زاویے اور متصلہ زاویوں کی جوڑیوں میں درجہ بندی کیجیے۔



SCERT TELANGANA



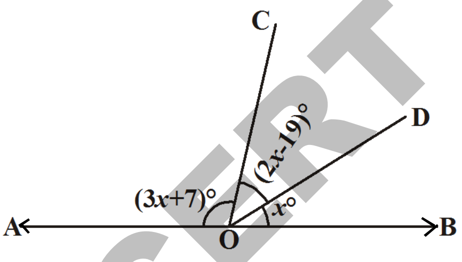
2. ہر ایک شکل میں زاویہ 'O' معلوم کیجیے۔ ہر ایک صورت میں وجہ بتایئے۔



اب مثالیں حل کریں۔

مثال (3) : دی ہوئی شکل میں $\overline{AB}$ خط مستقیم ہے x اور $\angle AOC$ ، $\angle COD$ اور $\angle BOD$ کے زاویے معلوم کیجیے۔

حل : چونکہ $\overline{AB}$ خط مستقیم ہے $\overline{AB}$ کے نقطہ O پر تمام زاویوں کا مجموعہ 180^0 ہوگا۔



$$\therefore (3x+7)^0 + (2x-19)^0 + x = 180^0$$

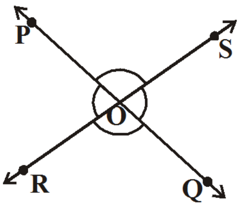
$$\Rightarrow 6x - 12 = 180 \Rightarrow 6x = 192 \Rightarrow x = 32^0$$

$$\angle AOC = (3x+7)^0 = (3 \times 32 + 7)^0 = 103^0$$

$$\angle COD = (2x-19)^0 = (2 \times 32 - 19)^0 = 45^0, \angle BOD = 32^0$$

مثال (4) : دی ہوئی شکل میں PQ اور RS ایک دوسرے کو نقطہ O پر قطع کرتے ہیں۔

اگر $\angle POR : \angle ROQ = 5:7$ ہو تو تمام زاویے معلوم کیجیے۔



حل : $\angle POR + \angle ROQ = 180^0$ (زاویوں کی خطی جوڑی)

لیکن $\angle POR : \angle ROQ = 5:7$ (دیا گیا ہے)

SCERT TELANGANA

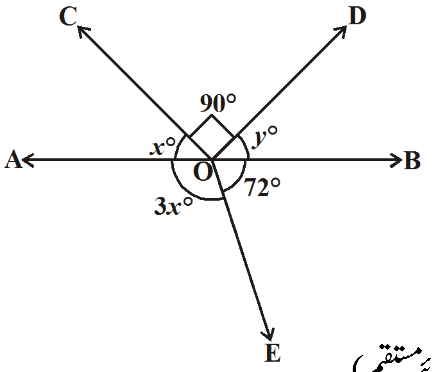
لہٰذا $\angle POR = \frac{5}{12} \times 180 = 75^0$

اسی طرح $\angle ROQ = \frac{7}{12} \times 180 = 105^0$

اب $\angle POS = \angle ROQ = 105^0$ (متقابل راسی کے زاویئے)

اور $\angle SOQ = \angle POR = 75^0$ (متقابل راسی کے زاویئے)

مثال (5) : ذیل کی شکل میں $\angle AOC$، $\angle BOD$ اور $\angle AOE$ محسوب کیجیے، جبکہ دیا گیا ہے کہ $\angle COD = 90^0$، $\angle BOE = 72^0$ اور AOB خط مستقیم ہے۔



حل : چونکہ AOB خط مستقیم ہے

ہمارے ہاں $\angle AOE + \angle BOE = 180^0$

$= 3x^0 + 72^0 = 180^0$

$\Rightarrow 3x^0 = 108^0 \Rightarrow x = 36^0$

ہم یہ بھی جانتے ہیں

$\therefore \angle AOC + \angle COD + \angle BOD = 180^0$ ($\because$ زاویئے مستقیم)

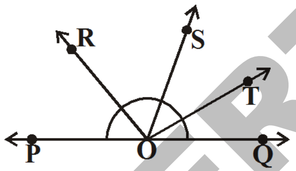
$\Rightarrow x^0 + 90^0 + y^0 = 180^0$

$\Rightarrow 36^0 + 90^0 + y^0 = 180^0$

$y^0 = 180^0 - 126^0 = 54^0$

$\therefore \angle AOC = 36^0, \angle BOD = 54^0$ اور $\angle AOE = 108^0$

مثال (6) : دی ہوئی شکل میں شعاع OS خط مستقیم PQ پر واقع ہے شعاع OR اور OT بالترتیب $\angle POS$ اور $\angle SOQ$ کے زاویہ ناصف ہیں۔ $\angle ROT$ معلوم کیجیے۔



حل : شعاع OS خط مستقیم PQ پر واقع ہے۔

$\therefore \angle POS + \angle SOQ = 180^0$

$\angle POS = x^0$

$\therefore x^0 + \angle SOQ = 180^0$

$\angle SOQ = 180^0 - x^0$

شعاع OR، $\angle POS$ کی تنصیف کرتی ہے۔

$\angle ROS = \frac{1}{2} \times \angle POS$

$= \frac{1}{2} \times x = \frac{x}{2}$

SCERT TELANGANA

$$\angle SOT = \frac{1}{2} \times \angle SOQ$$

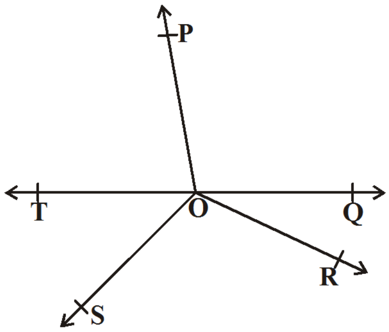
$$= \frac{1}{2} \times \left(180^0 - x\right)$$

$$= 90^0 - \frac{x^0}{2}$$

اب $\angle ROT = \angle ROS + \angle SOT$

$$= \frac{x^0}{2} + \left(90^0 - \frac{x^0}{2}\right)$$

$$= 90^0$$



مثال (7) : دی ہوئی شکل میں $\overline{OP}$ ، $\overline{OQ}$ ، $\overline{OR}$ اور $\overline{OS}$ چار شعاعیں ہیں تو ثابت کیجیے کہ

$$\angle POQ + \angle QOR + \angle SOR + \angle POS = 360^0$$

حل : دی ہوئی شکل میں ہمیں $\overline{OP}$ ، $\overline{OQ}$ ، $\overline{OR}$ یا $\overline{OS}$ کی شعاعوں میں سے کسی شعاع کی مخالف شعاع کھینچنا ہوگا۔

$\overline{OT}$ اس طرح کھینچے کہ $\overline{TOQ}$ ایک خط مستقیم ہوجائے۔اب OP خط مستقیم $\overline{TQ}$ پر واقع ہے۔

$\therefore \angle TOP + \angle POQ = 180^0$ ...... (1) (خطی مسلمہ جوڑی)

شعاع $\overline{OS}$ ، $\overline{TQ}$ پر واقع ہے۔

$\therefore \angle TOS + \angle SOQ = 180^0$ ...... (2) (کیوں؟)

$\angle SOQ = \angle SOR + \angle QOR$

$\therefore$ (2)

$\angle TOS + \angle SOR + \angle QOR = 180^0$ ...... (3)

اب (1) اور (3) کو جمع کرنے پر

$\angle TOP + \angle POQ + \angle TOS + \angle SOR + \angle QOR = 360^0$ ...... (4)

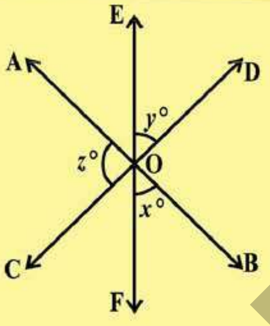
$\angle TOP + \angle TOS = \angle POS$

$\therefore$ (4)

$\angle POQ + \angle QOR + \angle SOR + \angle POS = 360^0$ ہوجاتی ہے۔

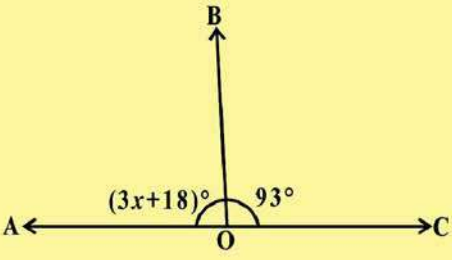
SCERT TELANGANA

مشق 4.2

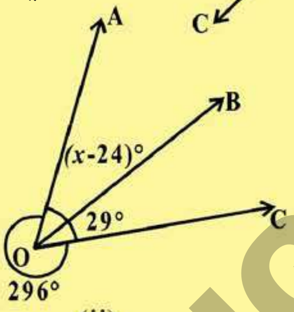


1. دی ہوئی شکل میں $\overline{AB}$، $\overline{CD}$ اور $\overline{EF}$، O پر ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں x، y اور z کی قیمت محسوب کیجیے جب کہ دیا گیا ہے کہ $x:y:z = 2:3:5$

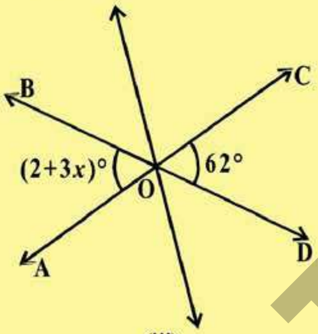
2. ذیل کی اشکال میں x کی قدر معلوم کرو۔



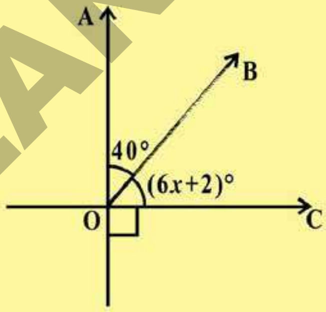
(i)



(ii)

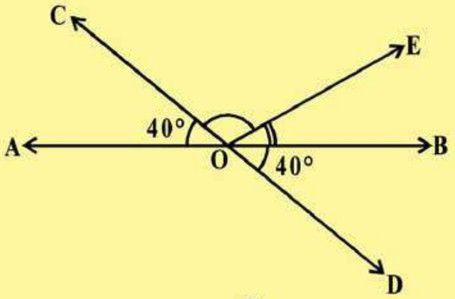


(iii)

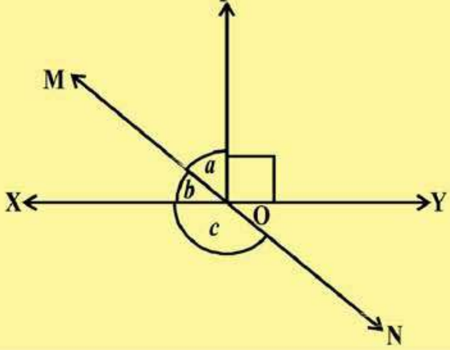


(iv)

3. دی ہوئی شکل میں AB اور CD، O پر ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں، اگر $\angle AOC + \angle BOE = 70^{o}$ اور $\angle BOD = 40^{o}$ ہو تو $\angle BOE$ اور $\angle COE$ کا زاویہ انعکاس معلوم کرو؟

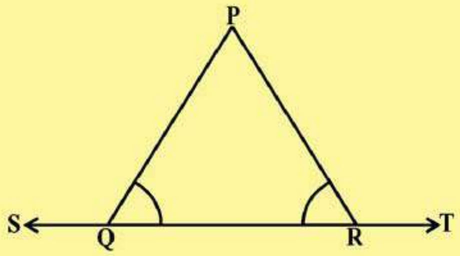


4. دی ہوئی شکل میں $\overline{XY}$ اور $\overline{MN}$، O پر ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں اگر $\angle POY = 90^{o}$ اور $a:b = 2:3$ ہو تو c کی قدر محسوب کیجیے۔

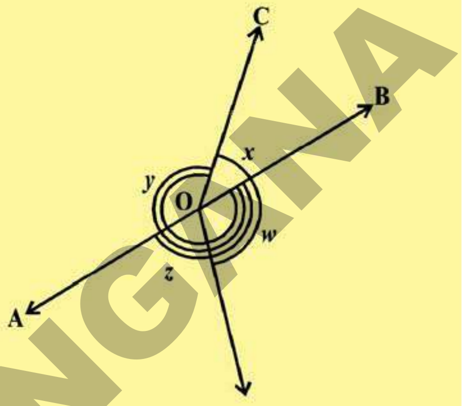


SCERT TELANGANA

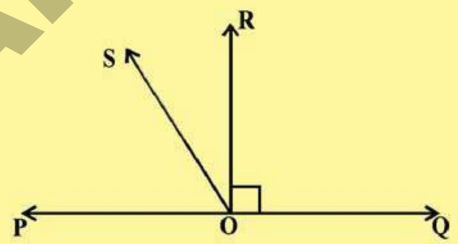
5. دی ہوئی شکل میں $\angle PQR = \angle PRQ$ ہو تو ثابت کیجیے کہ
$\angle PQS = \angle PRT$



6. دی ہوئی شکل میں اگر $x + y = w + z$ ہو تو ثابت کیجیے کہ
AOB ایک خط مستقیم ہے۔



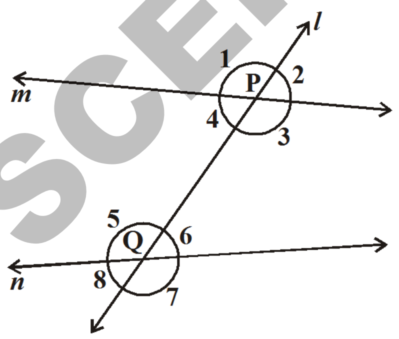
7. دی ہوئی شکل میں $\overline{PQ}$ ایک خط مستقیم ہے شعاع $\overline{OR}$، $\overline{PQ}$ پر عمودوار ہے ایک اور شعاع $\overline{OS}$، $\overline{OP}$ اور $\overline{OR}$ کے درمیان واقع ہے۔
تو ثابت کیجیے کہ $\angle ROS = \frac{1}{2}(\angle QOS - \angle POS)$



8. دیا گیا ہے کہ $\angle XYZ = 64°$ اور XY کو نقطہ P تک کھینچا گیا، ایک شعاع YQ، $\angle ZYP$ کی تنصیف کرتی ہے۔ ان معلومات سے شکل بنائیے اور $\angle XYQ$ اور $\angle QYP$ کا زاویہ انعکاس معلوم کیجیے۔

SCERT TELANGANA

4.4 خطوط اور قاطع خط



شکل پر غور کیجیے، بتائیے کہ کتنے نقاط پر خط مستقیم l، خطوط مستقیم m اور n کو قطع کرتی ہے؟ خط مستقیم l اور دو خطوط کو دو مختلف نقاط پر قطع کرتی ہے۔ ایسے خط کو آپ کیا نام دیں گے؟ اس کو قاطع خط کہتے ہیں۔ قاطع خط وہ خط ہوتا ہے جو دو مختلف خطوط کو متفرق نقاط پر قطع کرتا ہے، خط l، خطوط m اور n کو بالترتیب نقاط P اور Q پر قطع کرتا ہے۔ لہٰذا خط مستقیم l کو خطوط مستقیم m اور n کا قاطع خط کہا جاتا ہے۔

جب کوئی قاطع خط خطوط کی ایک جوڑی کو قطع کرتا ہے تو آیئے ہم زاویوں کی تعداد کا مشاہدہ کریں گے۔

جب کوئی قاطع خط دو خطوط کو قطع کرتا ہو تو ہمیں آٹھ زاویئے حاصل ہوتے ہیں۔

آیئے $\angle 1$، $\angle 2$، .... $\angle 8$ کے طور پر تصور کریں جیسا کہ شکل میں دکھایا گیا ہے، کیا آپ ان زاویوں کی جماعت بندی کر سکتے ہیں؟ بعض زاویئے خارجی اور بعض داخلی ہیں۔ $\angle 1$، $\angle 2$، $\angle 7$ اور $\angle 8$ خارجی زاویئے اور $\angle 3$، $\angle 4$، $\angle 5$ اور $\angle 6$ داخلی زاویئے کہلاتے ہیں۔

وہ زاویئے جو غیر متصل اور قاطع خط کے ایک ہی جانب واقع ہوتے ہیں اور ان میں سے ایک داخلی جب کہ دوسرا خارجی ہوتا ہے، نظیری زاویئے کہلاتے ہیں۔

دی ہوئی شکل سے

(a) نظیری زاویئے کونسے زاویئے ہیں؟

(i) $\angle 1$ اور $\angle 5$ (ii) $\angle 2$ اور $\angle 6$

(iii) $\angle 4$ اور $\angle 8$ (iv) $\angle 3$ اور $\angle 7$ لہٰذا نظیری زاویوں کے 4 جوڑ ہیں۔

(b) متبادل اندرونی زاویئے کونسے ہیں؟

(i) $\angle 4$ اور $\angle 6$ (ii) $\angle 3$ اور $\angle 5$ متبادل اندرونی زاویوں کے دو جوڑ ہیں (کیوں؟)

(c) متبادل خارجی زاویئے کونسے ہیں؟

(i) $\angle 1$ اور $\angle 7$ (ii) $\angle 2$ اور $\angle 8$ متبادل خارجی زاویوں کے دو جوڑ ہیں (کیوں؟)

(d) قاطع خط کے ایک ہی جانب اندرونی زاویئے کونسے ہیں؟

(i) $\angle 4$ اور $\angle 5$ (ii) $\angle 3$ اور $\angle 6$ قاطع خط کے ایک ہی جانب اندرونی زاویوں کی دو جوڑیاں ہیں (کیوں؟)

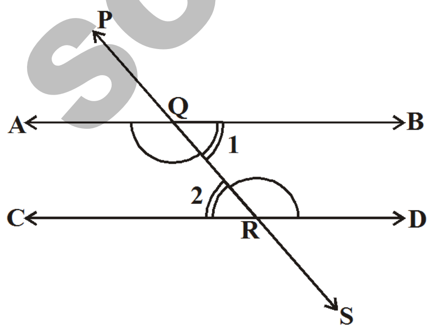
قاطع خط کے ایک ہی جانب اندرونی زاویوں کو **متصل اندرونی زاویئے یا شریک اندرونی زاویئے یا اتحادی اندرونی زاویئے** بھی کہا جاتا ہے۔

(e) قاطع خط کے ایک ہی جانب خارجی زاویئے کونسے ہیں؟

(i) $\angle 1$ اور $\angle 8$ (ii) $\angle 2$ اور $\angle 7$ قاطع خط کے ایک ہی جانب خارجی زاویوں کی دو جوڑیاں ہیں (کیوں؟)

قاطع خط کے ایک ہی جانب خارجی زاویوں کو متصل خارجی زاویئے یا شریک خارجی زاویئے یا اتحادی خارجی زاویئے بھی کہا جاتا ہے۔

اگر دو خطوط l اور m متوازی ہوں تو بننے والے نظیری زاویوں کے بارے میں آپ کیا کہہ سکتے ہیں؟ جانچ کر بتایئے؟ کیا وہ مساوی ہو جائیں گے؟ ہاں وہ مساوی ہوں گے۔



نظیری زاویوں کا اصول: اگر ایک قاطع خط، متوازی خطوط کی جوڑی کو قطع کرتا ہے تو نظیری زاویوں کا ہر ایک جوڑ مساوی ہوگا۔

متبادل اندرونی زاویوں کے درمیان کیا رشتہ ہوگا؟ (i) $\angle BQR$ اور $\angle QRC$

(ii) شکل میں $\angle AQR$ اور $\angle QRD$

ان دونوں متبادل اندرونی زاویوں کے درمیان رشتہ معلوم کرنے کے لیے کیا ہم نظیری زاویوں کے اصول کو استعمال کر سکتے ہیں؟

SCERT TELANGANA

دی ہوئی شکل میں قاطع خط $\overline{PS}$ متوازی خطوط $\overline{AB}$ اور $\overline{CD}$ کو بالترتیب نقاط Q اور R پر قطع کرتا ہے۔

آیئے ثابت کریں گے کہ $\angle BQR = \angle QRC$ اور $\angle AQR = \angle QRD$

ہم جانتے ہیں کہ $\angle PQA = \angle QRC$ .... (1) (نظیری زاویوں کا اصول)

اور $\angle BQR = \angle PQA$ .... (2) (کیوں؟)

لہٰذا (1) اور (2) سے ہم یہ نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں کہ $\angle BQR = \angle QRC$

$\angle AQR = \angle QRD$

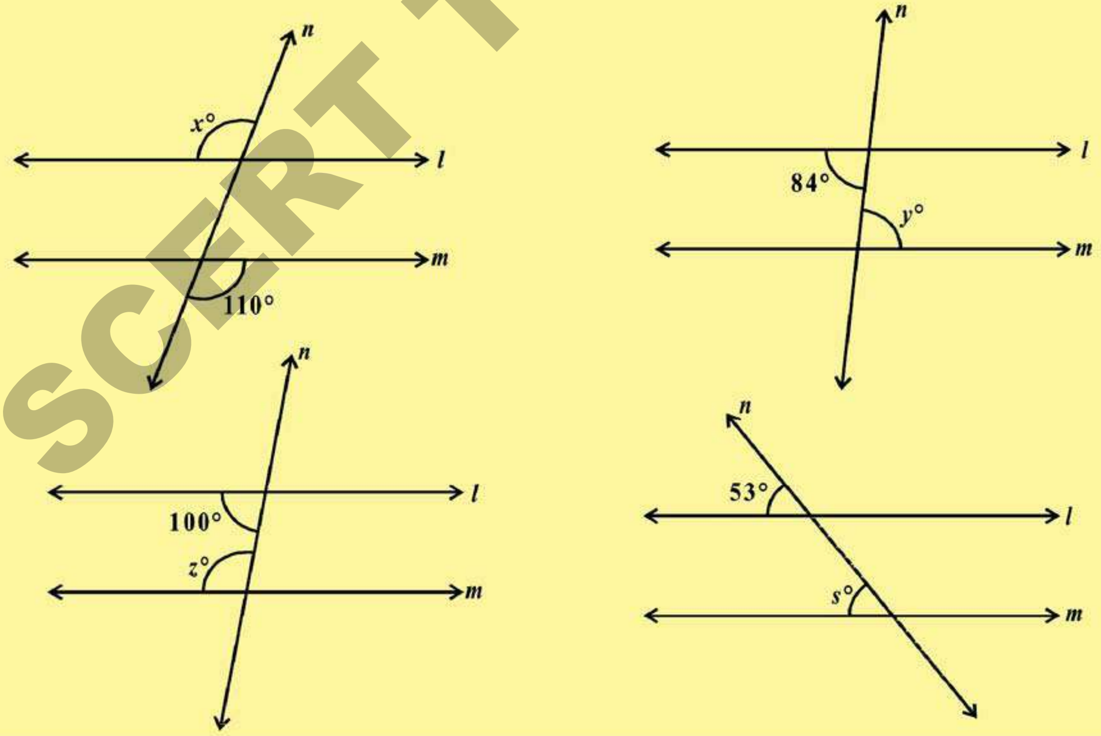
اس نتیجہ کو مسئلہ کے طور پر ذیل میں بیان کیا جا تا ہے۔

مسئلہ 4.2: اگر کوئی قاطع خط، دو متوازی خطوط کو قطع کرتا ہو تو متبادل اندرونی زاویوں کا ہر ایک جوڑ مساوی ہوگا۔ اس طرح قاطع خط کے ایک ہی جانب اندرونی زاویوں سے متعلق آپ ذیل کا مسئلہ بیان کر سکتے ہیں۔

مسئلہ 4.3: اگر کوئی قاطع خط، دو متوازی خطوط کو قطع کرتا ہو تو قاطع خط کے ایک ہی جانب اندرونی زاویوں کی ہر ایک جوڑی نظیری ہوگی۔

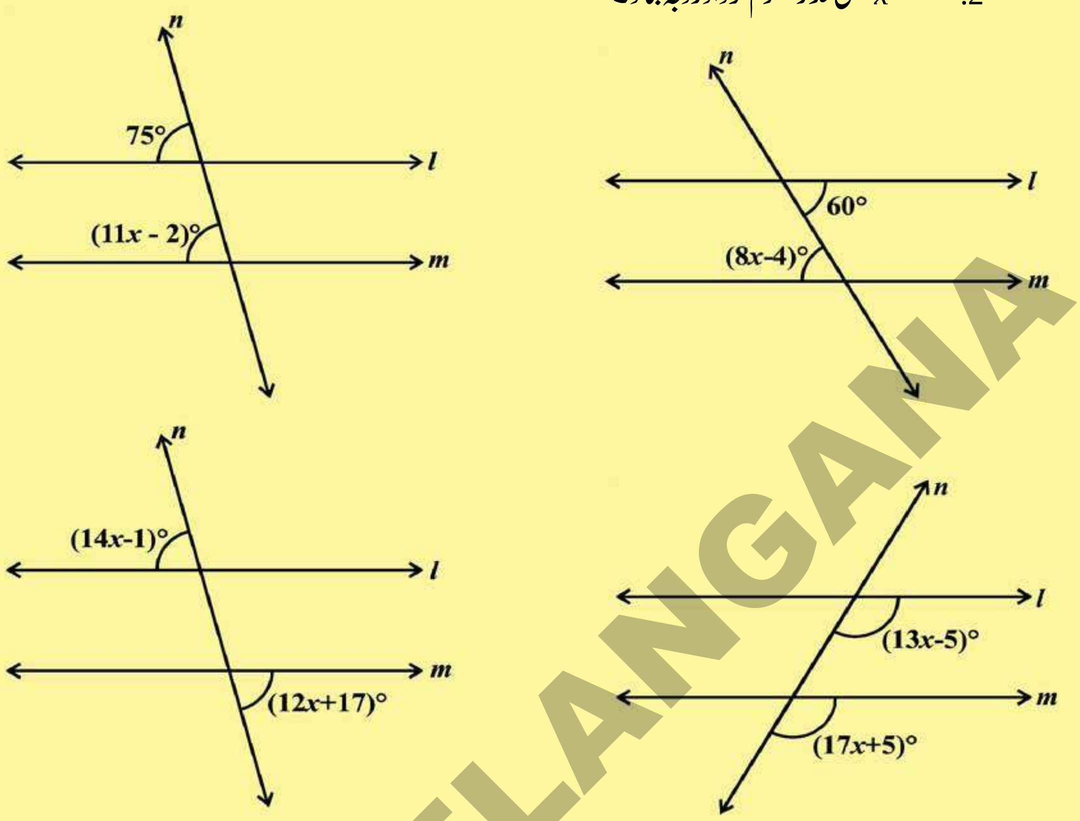
یہ کیجیے

1. شکل میں ہدایت کے مطابق ہر ایک زاویہ معلوم کیجیے جہاں l اور m متوازی خطوط ہیں n مقطوعہ ہے۔



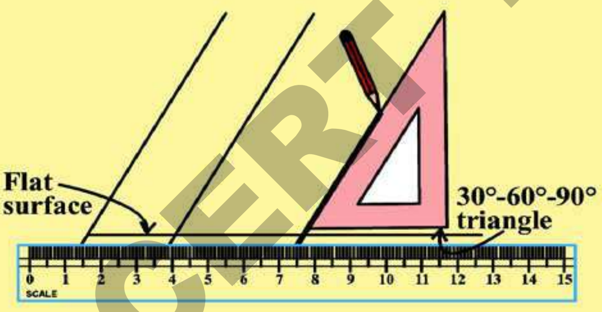
SCERT TELANGANA

2. x کی قدر معلوم کرو اور وجہ بتاؤ۔



عملی کام

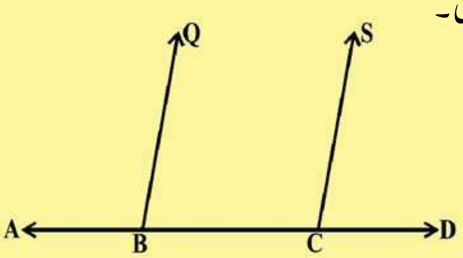
گُنیے اور پٹری لیجیے شکل کے مطابق پٹری پر گُنیوں کو ترتیب سے رکھیے، گُنیے کی مائل بلندی سے متصل پنسل کی مدد سے ایک خط کھینچیے اب آہستگی سے گُنیے کو پٹری پر (افقی سطح سے) کھسکاتے ہوئے ایک اور خط کھینچیے، غور کیجیے کہ کھینچی گئی لکیریں متوازی خطوط ہیں۔ یہ متوازی کیوں ہیں؟ غور کیجیے اور اپنے ساتھیوں سے تبادلہ خیال کیجیے۔

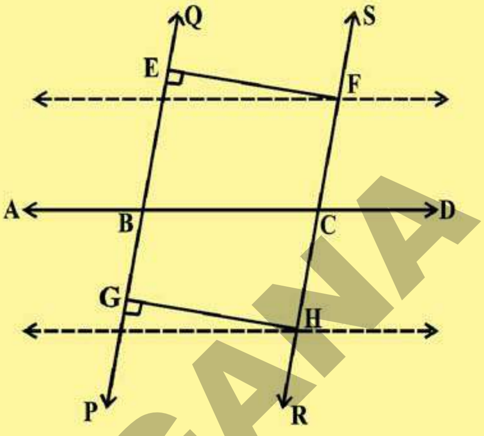


SCERT TELANGANA

یہ کیجیے

ایک خط $\overleftrightarrow{AD}$ کھینچیے اور اس پر B اور C کے نشان لگائیے۔ دی ہوئی شکل کے مطابق ∠ABQ اور ∠BCS ایک دوسرے کے مساوی بنائیے AD کی دوسری جانب QB اور SC کھینچیے اس طرح کہ دو خطوط PQ اور RS حاصل ہوں۔

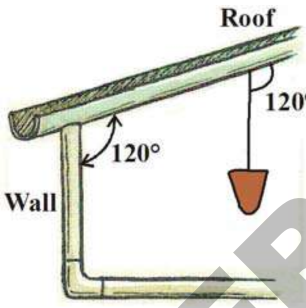




PQ اور RS کے دو خطوط پر مشترک عمود EF اور GH کھینچیے EF اور GH کے طول کی پیمائش کریں' آپ نے کیا دیکھا؟ آپ کیا نتیجہ اخذ کریں گے؟ یاد کیجیے کہ اگر دو خطوط کے درمیان عمودی فاصلہ مساوی ہو تو یہ خطوط متوازی ہوں گے۔

SCERT TELANGANA

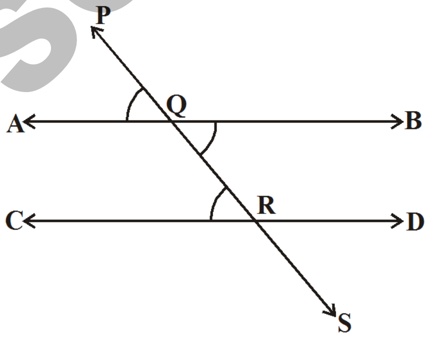
مسلمہ اصول (1) : اگر کوئی قاطع خط، دو خطوط کو اس طرح قطع کرتا ہے کہ نظیری زاویوں کا ایک جوڑ مساوی ہو تو یہ دو خطوط ایک دوسرے کے متوازی ہوں گے۔



ایک قرص کو ڈوری سے باندھ دیا گیا اس طرح کہ چھت سے لٹکتا ہوا یہ قرص بالکل عموداوار ہے' فرض کیجیے کہ دیوار اور چھت کا درمیانی زاویہ 120^0 ہے جب کہ ڈوری اور چھت کا زاویہ بھی 120^0 ہی ہے۔ مستری یہ کہتا ہے کہ دیوار فرش کے عین عموداوار ہے۔ سوچئے کہ مستری نے یہ کیسے پہچانا؟

نظیری زاویوں کے اصول کا عکس بیان تصور کرتے ہوئے کیا ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ اگر متبادل اندرونی زاویوں کی جوڑی مساوی ہو تو خطوط متوازی ہوتے ہیں؟

دی ہوئی شکل میں قاطع خط $\overleftrightarrow{PS}$ خطوط $\overleftrightarrow{AB}$ اور $\overleftrightarrow{CD}$ کو بالترتیب نقاط Q اور R پر قطع کرتا ہے' اس طرح سے کہ متبادل اندرونی زاویے ∠BQR اور ∠BRC مساوی ہیں۔



یعنی $\angle RQB = \angle QRC$

اب ہمیں ثابت کرنا ہے کہ AB || CD

$\angle RQB = \angle PQA$ .... (1) (کیوں؟)

$\angle RQB = \angle QRC$ .... (2) (دیا گیا ہے)

لہٰذا (1) اور (2) سے

$\angle PQA = \angle QRC$

یہ کتاب حکومت تلنگانہ کی جانب سے مفت تقسیم کے لیے ہے۔2020-21

لیکن $\overleftrightarrow{AB}$ اور $\overleftrightarrow{CD}$ کے خطوط پر قاطع خط $\overleftrightarrow{PS}$ کے لیے یہ زاویے نظیری زاویے ہیں۔

لہٰذا $AB \parallel CD$ (نظیری زاویے کا بالعکس)

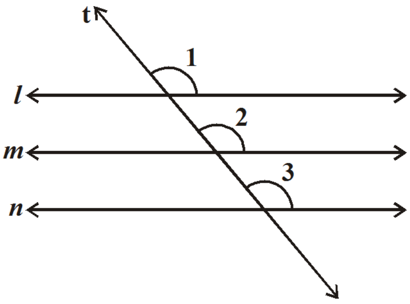
اس نتیجہ کو اب ذیل کے مسئلہ کے طور پر بیان کر سکتے ہیں۔

مسئلہ 4.4: اگر ایک قاطع خط دو خطوط کو اس طرح قطع کرتا ہو کہ متبادل اندرونی زاویوں کی جوڑی مساوی ہو تو وہ خطوط متوازی ہوں گے۔

4.4.1 ایک خط کے متوازی دو خطوط

اگر دو خطوط کسی ایک خط کے متوازی ہیں تو وہ خطوط ایک دوسرے کے متوازی ہوں گے

آیئے جانچ کریں۔



تین خطوط l، m اور n اس طرح کھینچیں کہ $m \parallel l$ اور $n \parallel l$

اب l، m اور n پر ایک مقطوعہ t کھینچیے۔

شکل کے مطابق $\angle 1 = \angle 2$ اور $\angle 1 = \angle 3$

(مسلمہ نظیری زاویے)

لہٰذا $\angle 2 = \angle 3$ لیکن m اور n کے لیے دو زاویے متعلقہ زاویوں کی جوڑی ہیں۔

لہٰذا ہم کہہ سکتے ہیں کہ $m \parallel n$ کے۔

(مسلمہ نظیری زاویے کا بالعکس)

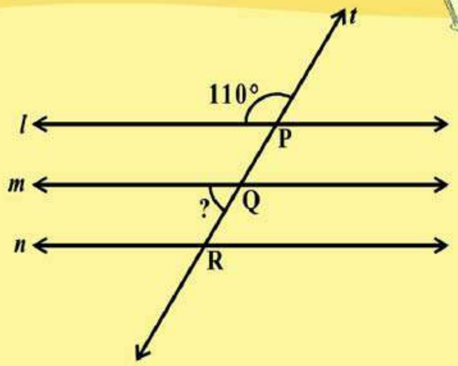
مسئلہ 4.5: ایسے خطوط جو کسی اور خط کے متوازی ہوتے ہیں آپس میں متوازی ہوں گے۔

SCERT TELANGANA

کوشش کیجیے

(i) دی ہوئی شکل میں نشان زدہ زاویے کو محسوب کرو۔

(ii) $\angle BCS$ کے مساوی زاویے معلوم کیجیے۔



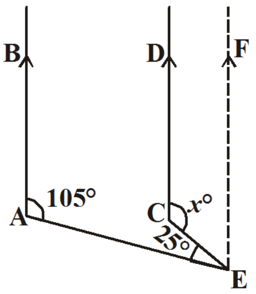
آیئے اب ہم متوازی خطوط سے متعلق بعض مثالیں حل کریں گے۔

مثال (8): دی ہوئی شکل میں $AB \parallel CD$ کے تب، x کی قدر معلوم کیجیے۔

حل : نقطہ E سے $EF \parallel AB \parallel CD$ کھینچیے، CE، $EF \parallel CD$ کا مقطوعہ ہے۔

$\therefore \angle DCE + \angle CEF = 180^0$ (∵ شریک اندرونی زاویے)

$\Rightarrow x^0 + \angle CEF = 180^0 \Rightarrow \angle CEF = (180 - x^0)$



$EF \parallel AB$ اور AE مقطوعہ ہے۔

$\angle BAE + \angle AEF = 180^0$ (∵ شریک اندرونی زاویے)

$\Rightarrow 105^0 + \angle AEC + \angle CEF = 180^0$

$\Rightarrow 105^0 + 25^0 + (180^0 - x^0) = 180^0$

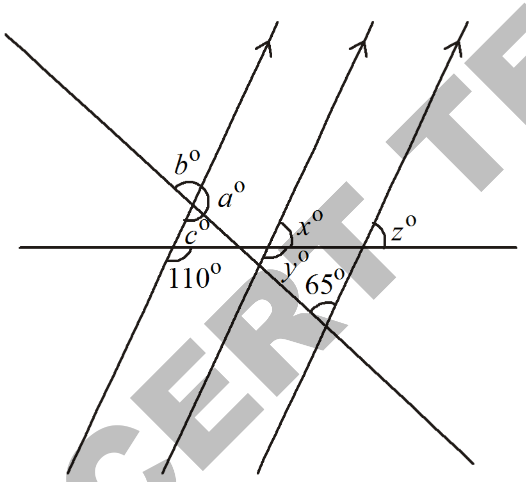
$\Rightarrow 310 - x^0 = 180^0$

$x = 130^0$

مثال (9) : متصل شکل میں x، y، z اور a، b، c کی قیمتیں محسوب کیجیے۔

حل : واضح رہے کہ $y^0 = 110^0$ (∵ نظیری زاویے)

$\Rightarrow x^0 + y^0 = 180^0$ (خطی جوڑی)



$\Rightarrow x^0 + 110^0 = 180^0$

$\Rightarrow x^0 = (180^0 - 110^0) = 70^0$

$z^0 = x^0 = 70^0$ (∵ نظیری زاویے)

$c^0 = 65^0$ (کیسے؟)

$a^0 + c^0 = 180^0$ (خطی جوڑی)

$\Rightarrow a^0 + 65^0 = 180^0$

$\Rightarrow a^0 = (180^0 - 65^0) = 115^0$

$b^0 = c^0 = 65^0$ (∵ متقابل راسی زاویے)

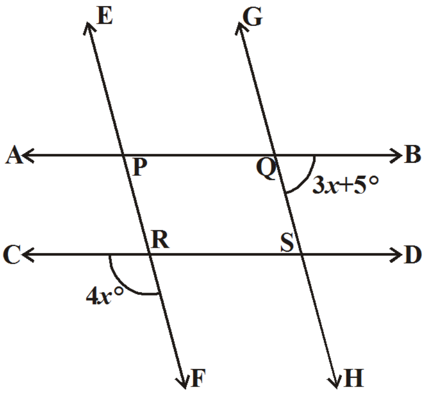
$a = 115^0$، $b = 65^0$، $c = 65^0$، $x = 70^0$، $y = 110^0$، $z = 70^0$

مثال (10): دی ہوئی شکل میں EF اور GH متوازی خطوط ہیں اگر AB اور CD متوازی ہوں تو x کی قیمت کیا ہوگی؟

حل : $4x^0 = \angle APR$ (کیوں؟)

$\angle APR = \angle PQS$ (کیوں؟)

SCERT TELANGANA



$\angle PQS + \angle SQB = 180^0$ (کیوں؟)

$4x^0 + (3x+5)^0 = 180^0$

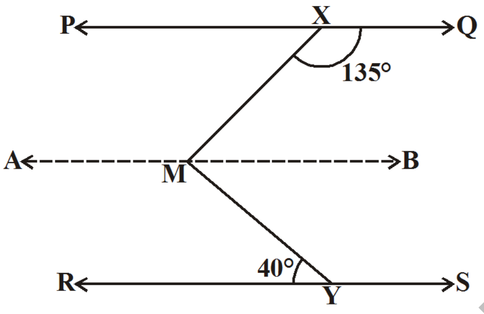
$7x^0 + 5^0 = 180^0$

$x^0 = \dfrac{180^0 - 5^0}{7}$

$= 25^0$

مثال (11) : دی ہوئی شکل میں $PQ \parallel RS$ ، $\angle MXQ = 135^0$ اور $\angle MYR = 40^0$ ہوتو $\angle XMY$ معلوم کیجیے۔

حل : AB کے متوازی ایک خط PQ کھینچیے جو M سے گزرتا ہے۔



اب $AB \parallel PQ$ اور $PQ \parallel RS$

$\therefore AB \parallel RS$

اب $\angle QXM + \angle XMB = 180^0$ ($AB \parallel PQ$ ،
(قاطع خط XM کے ایک ہی جانب اندرونی زاویئے)

$135^0 + \angle XMB = 180^0$

$\therefore \angle XMB = 45^0$ .... (1)

اب $\angle BMY = \angle MYR$ (چونکہ $AB \parallel RS$ متبادل اندرونی زاویئے)

$\therefore \angle BMY = 40^0$ .... (2)

(1) اور (2) کو جمع کرنے پر

$\angle XMB + \angle BMY = 45^0 + 40^0$

$\angle XMY = 85^0$

مثال (12) : اگر ایک قاطع خط، دو خطوط کو اس طرح قطع کرتا ہو کہ متعلقہ زاویوں کے جوڑ کے ناصف متوازی ہوتے ہیں تو ثابت کیجیے کہ یہ خطوط متوازی ہیں۔

حل : دی ہوئی شکل میں قاطع خط $\overline{AD}$ ، $\overline{PQ}$ اور $\overline{RS}$ کو بالترتیب دو نقاط B اور C پر قطع کرتا ہے۔ شعاع $\overline{BE}$ ، $\angle ABQ$ کی ناصف شعاع $\overline{CF}$ ، $\angle BCS$ کی ناصف ہے اور $BE \parallel CF$ ہے۔ ہمیں ثابت کرنا یہ ہے کہ $PQ \parallel RS$ ۔ ذیل میں سے کسی بھی ایک جوڑی کو ثابت کرنا کافی ہوگا۔

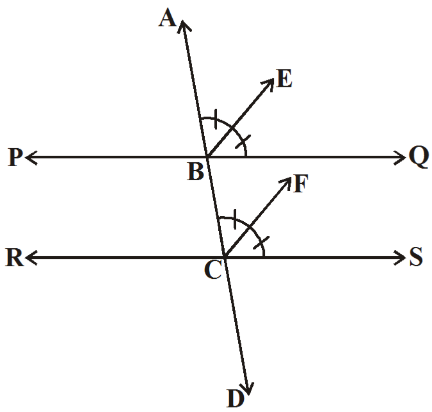
(i) نظیری زاویئے مساوی ہوتے ہیں۔

(ii) اندرونی یا خارجی زاویوں کے جوڑ مساوی ہوتے ہیں۔

(iii) قاطع خط کے ایک ہی جانب کے اندرونی زاویئے تکمیلی ہوتے ہیں۔

SCERT TELANGANA

دی ہوئی شکل سے ہم یہ ثابت کرنے کی کوشش کریں گے کہ متعلقہ زاویے مساوی ہیں‘ چونکہ یہ دیا گیا ہے کہ BE‘ $\angle ABQ$ کا ناصف ہے۔



$\angle ABE = \frac{1}{2}\angle ABQ$ .... (1)

CF‘ $\angle BCS$ کا ناصف ہے۔

$\therefore \angle BCF = \frac{1}{2}\angle BCS$ .... (2)

لیکن متوازی خطوط BE اور CF کے لیے $\overline{AD}$ مقطوعہ ہے۔

$\therefore \angle ABE = \angle BCF$ .... (3) (نظیری زاویے کا مسئلہ)

مساوات (1)‘(2) اور (3) سے

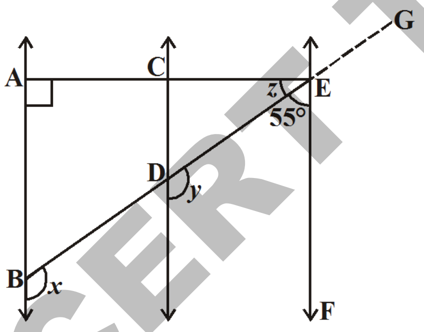
$\frac{1}{2}\angle ABQ = \frac{1}{2}\angle BCS$

$\therefore \angle ABQ = \angle BCS$

لیکن یہ زاویے $\overline{PQ}$ اور $\overline{RS}$ کے خطوط کے ساتھ قاطع خط $\overline{AD}$ سے بنائے جانے والے نظیری زاویے ہیں اور مساوی ہیں۔

$\therefore PQ \parallel RS$ (نظیری زاویوں کا بالعکس مسئلہ)

مثال (13) : دی ہوئی شکل میں $AB \parallel CD$ اور $CD \parallel EF$ کے علاوہ $EA \perp AB$ ہے اگر $\angle BEF = 55^0$ ہو تو x‘y اور z کی قیمتیں معلوم کرو۔



حل : BE کو G تک کھینچیے۔

اب $\angle GEF = 180^0 - 55^0$ (کیوں؟)

$= 125^0$

$\angle GEF = x = y = 125^0$ (کیوں؟)

$z = 90^0 - 55^0$ (کیوں؟)

$= 35^0$

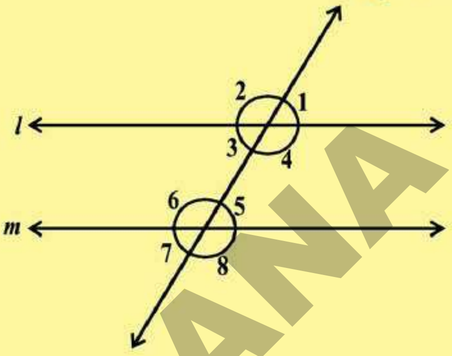
یہ ثابت کرنے کے لیے کہ خطوط متوازی ہیں مختلف طریقے ہیں آپ یہ ثابت کریں کہ:

1. نظیری زاویوں کے جوڑ مساوی ہیں۔
2. متبادل اندرونی زاویوں کے جوڑ مساوی ہیں۔
3. قاطع خط کے ایک ہی جانب اندرونی زاویوں کی جوڑی تکمیلی ہوتی ہے۔
4. کسی مستوی میں دونوں خطوط ایک ہی خط کے عمود وار ہیں۔
5. دونوں خطوط تیسرے خط کے متوازی ہیں۔

SCERT TELANGANA

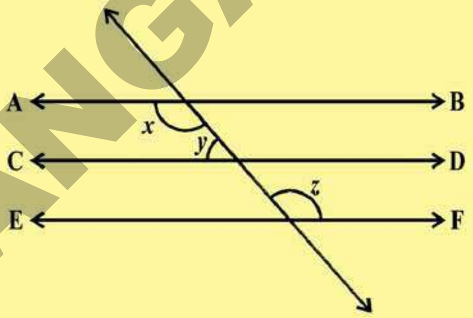
مشق 4.3

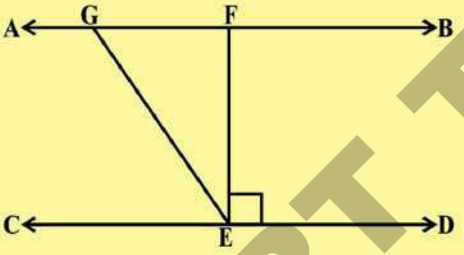
1. دیا گیا ہے کہ $l \parallel m$ ثابت کیجیے کہ $\angle 1$ اور $\angle 8$ نظیری ہیں۔ اپنے بیان کی وجوہات لکھیے۔



	بیان	وجوہات
(i)	$l \parallel m$	________
(ii)	$\angle 1 = \angle 5$	________
(iii)	$\angle 5 + \angle 8 = 180°$	________
(iv)	$\angle 1 + \angle 8 = 180°$	________
(v)	$\angle 1$ اور $\angle 8$ تکمیلی ہیں	________

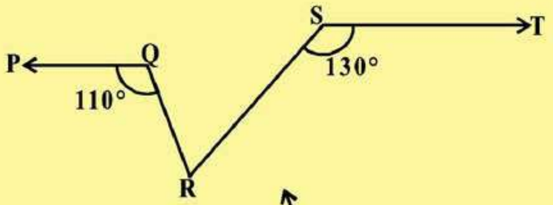
2. دی ہوئی شکل میں $AB \parallel CD$، $EF \parallel CD$ اور $y : z = 3 : 7$ ہو تو x کی قدر کیا ہوگی؟



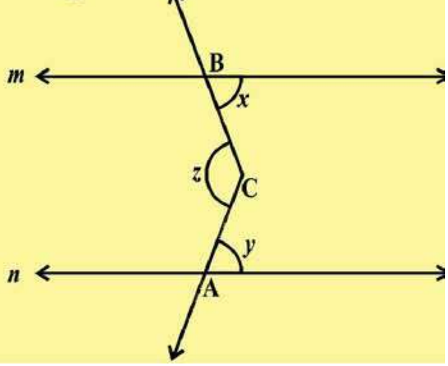


3. دی ہوئی شکل میں $AB \parallel CD$، $EF + CD$ اور $\angle GED = 126°$ ہو تو $\angle AGE$، $\angle GEF$ اور $\angle FGE$ معلوم کرو۔

4. متصل شکل میں $PQ \parallel ST$، $\angle PQR = 110°$ اور $\angle RST = 130°$ ہو تو $\angle QRS$ معلوم کیجیے (اشارہ: ایک خط ST کے متوازی کھینچیے جو R سے گزرتا ہو)

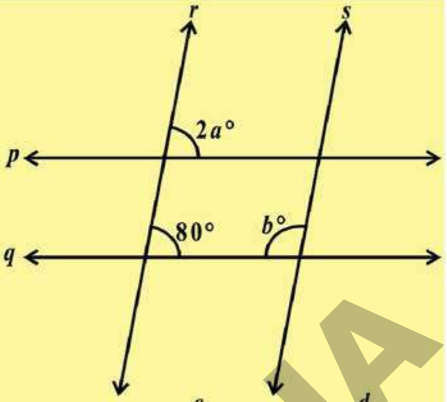


5. متصل شکل میں $m \parallel n$، A اور B خطوط m اور n پر ترتیب وار دو نقاط ہیں۔ فرض کیجیے C خطوط m اور n کے درمیان ایک اندرونی نقطہ ہو تو $\angle ACB$ معلوم کیجیے۔

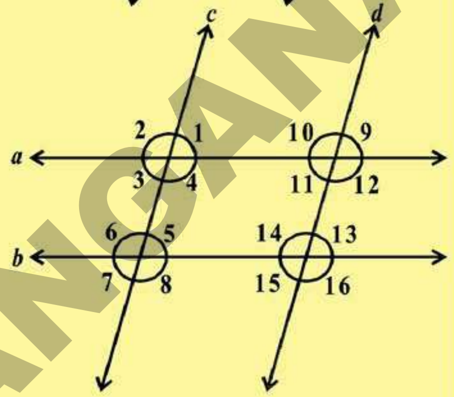


SCERT TELANGANA

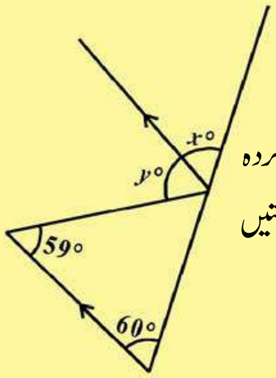
6. a اور b کی قدر معلوم کرو جب کہ $p \parallel q$ اور $r \parallel s$ ۔



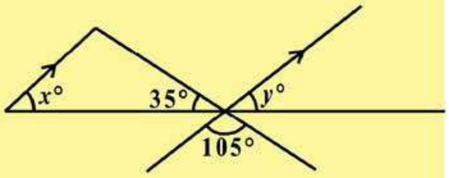
7. اگر متصل شکل میں $a \parallel b$ اور $c \parallel d$ ہو تو ان زاویوں کے نام بتائیں جو (i) $\angle 1$ (ii) $\angle 2$ کے مساوی ہیں۔



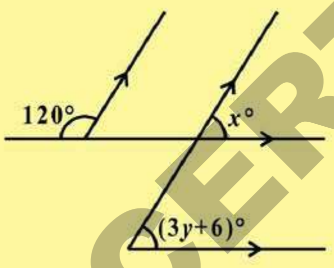
8. دی ہوئی شکل میں تیر کے نشان سے ظاہر کردہ خطوط متوازی ہیں۔ x اور y کی قیمتیں محسوب کرو۔



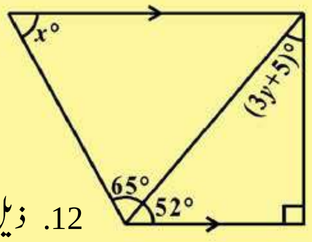
9. اگر دی ہوئی شکل میں تیر کے نشان کے خطوط متوازی ہوں تو بتائیے کہ x اور y کی قدر کیا ہوگی؟



10. دی ہوئی شکل کی مدد سے x اور y کی قیمت دریافت کرو۔



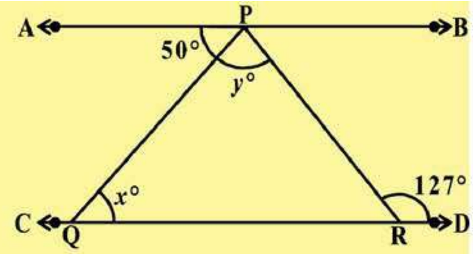
11. متصل شکل کے ذریعہ x اور y قدر معلوم کرو؟



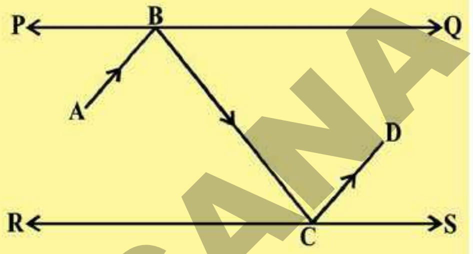
12. ذیل کے بیان سے شکل بناؤ۔

اگر ایک زاویہ کے دو بازو بالترتیب کسی اور زاویہ کے دو بازوؤں کے عمود وار ہوں تو یہ دونوں زاویئے یا تو مساوی ہوں گے یا دونوں نظیری ہوں گے۔

SCERT TELANGANA

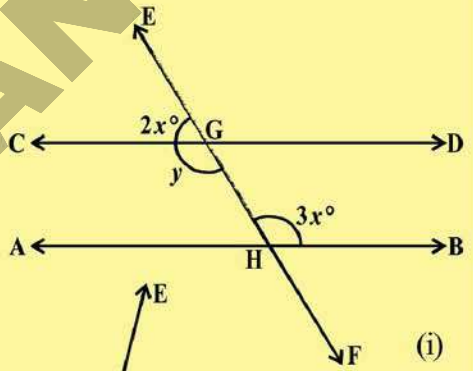


13. دی ہوئی شکل میں اگر AB|| CD ، $\angle APQ = 50°$ اور $\angle PRD = 127°$ ہوتو x اور y کی قیمت محسوب کرو۔

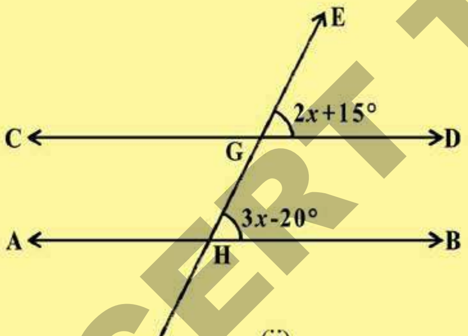


14. متصل شکل میں PQ اور RS دو آئینے ہیں جو متوازی رکھے گئے ہیں۔ایک شعاع AB آئینہ PQ سے نقطہ B پر ٹکراتی ہے منعکس شعاع راستہ BC سے گزرتے ہوئے آئینہ RS سے نقطہ C پر ٹکرا کر دوبارہ CD کے راستہ سے منعکس ہوجاتی ہے ثابت کیجیے کہ AB || CD
(اشارہ: متوازی خطوط کے عمود بھی متوازی ہوتے ہیں)

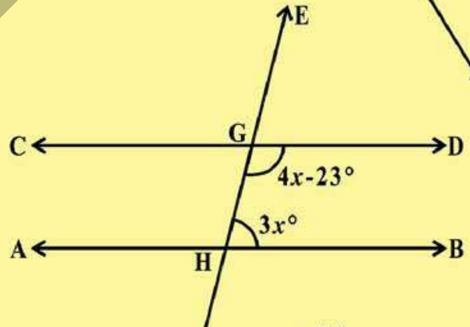
15. دی ہوئی شکل میں AB || CD، EF خطی مقطوعہ ہے جو AB اور CD کو بالترتیب G اور H پر قطع کرتا ہے، x اور y کی قیمتیں محسوب کرو؟ اور وجوہات بتاؤ؟



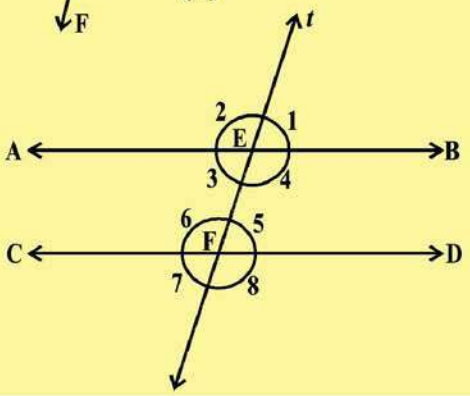
(i)



(ii)



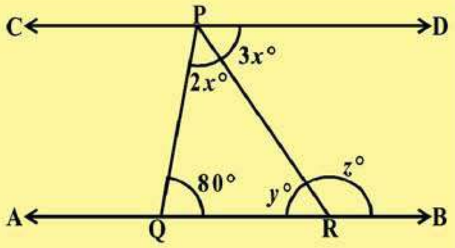
(iii)



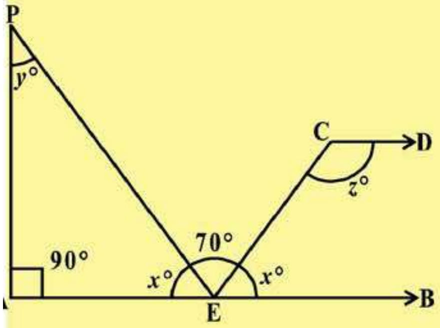
16. بازو دی ہوئی شکل میں AB || CD، t مقطوعہ ہے جو E اور F پر قطع کرتا ہے، اگر $\angle 2 : \angle 1 = 5 : 4$ ہوتو ہر نشان زدہ زاویہ معلوم کیجیے۔

SCERT TELANGANA

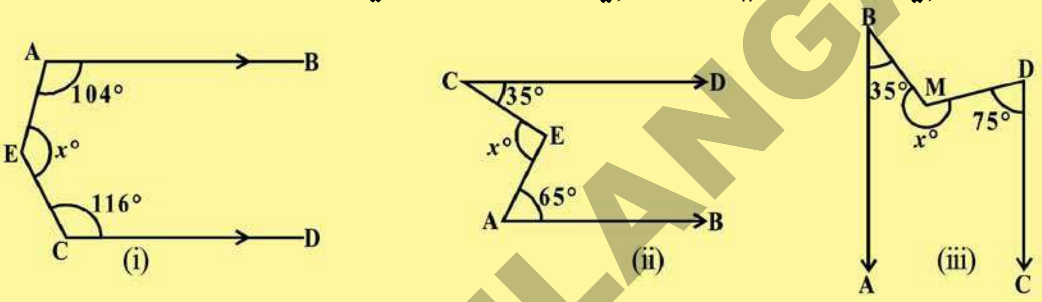
17. دی ہوئی شکل میں AB || CD ہوتو x، y اور z کی قدریں معلوم کرو؟



18. متصل شکل میں AB || CD ہوتو x، y اور z کی قیمتیں کیا ہوں گی؟



19. دی ہوئی ہرایک شکل میں AB || CD ہوتو ہرایک شکل میں x کی قیمت کیا ہوگی؟

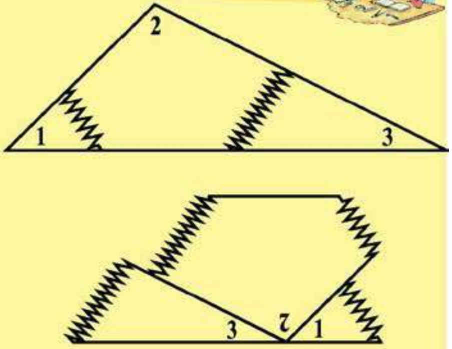


4.5 کسی مثلث میں زاویوں کے مجموعے کی خصوصیت

آیئے ہم ثابت کرتے ہیں کہ کسی مثلث کے زاویوں کا مجموعہ 180^0 ہوتا ہے۔

عملی کام

- دی ہوئی شکل کے مطابق ایک بڑا مثلث بنا کر اسے الگ کاٹ لیجیے۔
- زاویوں کو نمبرات دے کر انہیں الگ کر لیجیے۔
- ان تینوں زاویوں کو ایک دوسرے سے متصل اس طرح جمایئے کہ وہ ایک نظر آئیں۔ جیسے کہ شکل میں دکھایا گیا ہے۔

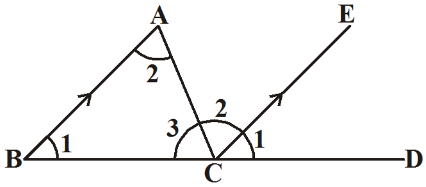


1. ان تینوں سے بننے والے زاویئے پر غور کیجیے۔اس کی پیائش کتنی ہوگی؟
2. کسی مثلث میں تینوں زاویوں کے حاصل جمع سے متعلق لکھئے۔

آیئے اس بات کو متوازی خطوط سے متعلق موضوعات اور مسئلہ استعمال کرتے ہوئے ثابت کریں۔

SCERT TELANGANA

مسئلہ 4.6: کسی مثلث کے زاویوں کا مجموعہ 180^0 ہوتا ہے۔



دیا گیا ہے : ABC ایک مثلث ہے۔

مطلوب : $\angle A + \angle B + \angle C = 180^0$

عمل : BC کو نقطہ D تک کھینچیے۔ C سے ایک خط CE کھینچیے جو BA کے متوازی ہو۔

ثبوت :

BA || CE (عمل سے)

$\angle ABC = \angle ECD$ .... (1) (مسلمہ نظیری زاویئے)

$\angle BAC = \angle ACE$ .... (2) (متوازی خطوط AB اور CE کے لیے متبادل اندرونی زاویئے)

$\angle ACB = \angle ACB$ .... (3) (ایک جیسے زاویئے)

$\angle ABC + \angle BAC + \angle ACB =$ (مذکورہ تینوں مساوات جمع کرنے پر)

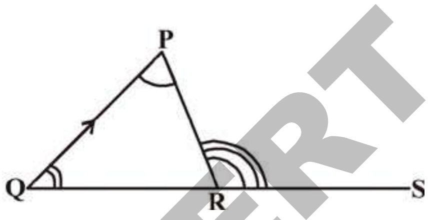
$\angle ECD + \angle ACE + \angle ACB$

$\angle ECD + \angle ACE + \angle ACB = 180^0$ (خط مستقیم کے کسی نقطہ پر بننے والے زاویوں کا مجموعہ)

$\therefore \angle ABC + \angle BAC + \angle ACB = 180^0$

$\angle A + \angle B + \angle C = 180^0$

ہم جانتے ہیں کہ جب کبھی کسی مثلث کے ضلع کو بیرونی جانب کھینچا جاتا ہے تو مثلث کا خارجی زاویہ بنتا ہے۔ جب ضلع QR کو نقطہ S تک آگے کھینچا جائے تو $\angle PRS$ بنتا ہے جو ΔPQR کا خارجی زاویہ کہلاتا ہے۔



کیا $\angle PRQ + \angle PRS = 180^0$? .... (1) (کیوں؟)

اس مساوات پر بھی غور کیجیے $\angle PRQ + \angle PQR + \angle QPR = 180^0$

.... (2) (کیوں؟)

(1) اور (2) $\angle PRQ + \angle PRS = \angle PRQ + \angle PRQ + \angle QPR$

$\therefore \angle PRS = \angle PQR + \angle QPR$

اس نتیجہ کو مسئلہ کے طور پر ذیل میں لکھا گیا ہے۔

مسئلہ 4.7: کسی مثلث کے ایک ضلع کو خارج کرنے پر بننے والا خارجی زاویہ مثلث میں مخالف کے اندرونی دو زاویوں کے مجموعہ کے مساوی ہوگا۔

اس مسئلہ سے یہ بات واضح ہے کہ مثلث کا کوئی خارجی زاویہ اس کے اندرونی مخالف زاویوں میں سے ہر ایک سے بڑا ہوتا ہے۔

آیئے اس مسئلہ پر چند مثالیں حل کریں گے۔

SCERT TELANGANA

غور کیجیے اور تبادلہ خیال کرتے ہوئے لکھیے

اگر کسی مثلث سے اضلاع کو خارج کیا جائے تو بننے والے خارجی زاویوں کا مجموعہ کیا ہوگا؟

مثال (14) : کسی ضلع کے زاویے $(2x)^0$، $(3x+5)^0$ اور $(4x-14)^0$ ہوں تو x کی قیمت اور ہر ایک زاویہ محسوب کرو۔

حل : ہم جانتے ہیں کہ مثلث میں زاویوں کا مجموعہ 180^0 ہوتا ہے۔

$$\therefore 2x^0 + 3x^0 + 5^0 + 4x^0 - 14^0 = 180^0 \Rightarrow 9x^0 - 9^0 = 180^0$$

$$\Rightarrow 9x^0 = 180^0 + 9^0 = 189^0$$

$$\Rightarrow x = \frac{180^0}{9^0} = 21$$

$$\therefore 2x^0 = (2 \times 21)^0 = 42^0, (3x+5)^0 = [(3 \times 21 + 5)]^0 = 68^0$$

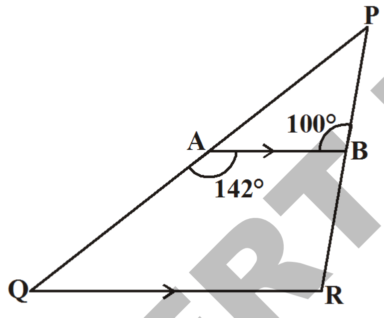
$$(4x-14)^0 = [(4 \times 21) - 14]^0 = 70^0$$

$\therefore$ دیے ہوئے مثلث کے زاویے 42^0، 68^0 اور 70^0 ہیں

مثال (15) : دی ہوئی شکل میں $AB \parallel QR$، $\angle BAQ = 142^0$ اور $\angle ABP = 100^0$

(i) $\angle APB$ (ii) $\angle AQR$ اور (iii) $\angle QRP$

حل : (i) $\angle APB = x^0$



Δ PAB کے ضلع PA کو Q تک خارج کیا گیا۔

$\therefore$ خارجی زاویہ $\angle BAQ = \angle ABP + \angle APB$

$$\Rightarrow 142^0 = 100^0 + x^0$$

$$\Rightarrow x^0 = (142^0 - 100^0) = 42^0$$

$$\therefore \angle APB = 42^0$$

(ii) $AB \parallel QR$ کے اور PQ قاطع خط ہے

$\therefore \angle BAQ + \angle AQR = 180^0$ (شریک اندرونی زاویوں کا مجموعہ 180^0 ہوتا ہے۔)

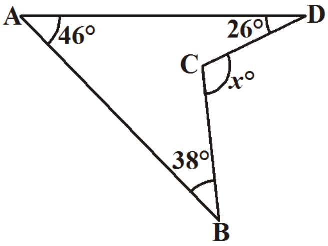
$$\Rightarrow 142^0 + \angle AQR = 180^0$$

$$\therefore \angle AQR = (180^0 - 142^0) = 38^0$$

(iii) $AB \parallel QR$ اور PR مقطوعہ ہے

$\angle QRP = \angle ABP = 100^0$ (نظیری زاویے)

یہ کتاب حکومت تلنگانہ کی جانب سے مفت تقسیم کے لیے ہے۔2020-21
SCERT TELANGANA



مثال (16) : دی ہوئی شکل کی معلومات سے x کی قدر دریافت کرو؟

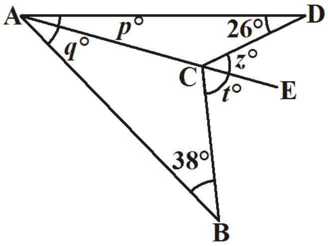
حل : دی ہوئی شکل میں ABCD ایک چار ضلعی ہے آیئے اسے دو مثلثات میں تقسیم کریں AC کو ملاتے ہوئے اسے E تک کھینچیے۔

$\angle DAE = p^\circ, \angle BAE = q^\circ, \angle DCE = z^\circ$ اور $\angle ECB = t^\circ$

کسی مثلث کا خارجی زاویہ اندرونی مخالف زاویوں کے حاصل جمع کے مساوی ہوتا ہے۔

لہٰذا $z^o = p^o + 26^o$

$t^o = q^o + 38^o$



$\therefore z^o + t^o = p^o + q^o + (26+38)^o = p^o + q^o + 64^o$

مگر $p^o + q^o = 46$ $(\because \angle DAB = 46^o)$

$z^o + t^o = 46 + 64 = 110^o$

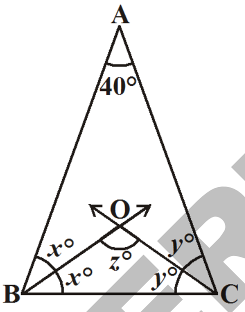
$x^o = z^o + t^o = 110^o$

مثال (17) : دی ہوئی شکل میں $\angle A = 40^o$ اگر $\overline{BO}$ اور $\overline{CO}$ ترتیب وار $\angle B$ اور $\angle C$ کے ناصف ہیں تو $\angle BOC$ معلوم کرو۔

حل : ہم جانتے ہیں کہ $\overline{BO}$ ‘$\angle B$ کا اور $\overline{CO}$ ‘$\angle C$ کا ناصف ہے۔

$\angle CBO = \angle ABO = x^o$ اور $\angle BCO = \angle ACO = y^o$

$\angle B = (2x)^o, \angle C = (2y)^o$ اور $\angle A = 40^o$



$\angle A + \angle B + \angle C = 180^o$ (کیسے؟)

$2x^o + 2y^o + 40^o = 180^o$

$\Rightarrow 2(x+y)^o = 140^o$

$= x^o + y^o = \dfrac{140^o}{2} = 70^o$

$\angle BOC = 180^o - 70^o = 110^o$

مثال (18) : دی ہوئی شکل میں فراہم کردہ معلومات کے مطابق x اور y کی قیمتیں معلوم کرو؟

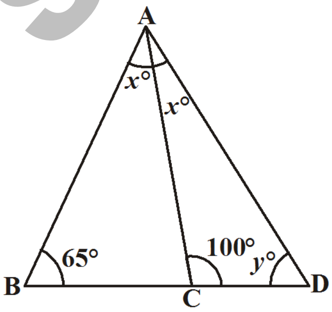
حل : ΔABC کے ضلع BC کو D تک خارج کیا گیا۔

$\angle ACD = \angle ABC + \angle BAC$

$\therefore 100^o = 65^o + x^o$

$\Rightarrow x^o = (100^o - 65^o) = 35^o$

$\therefore \angle CAD = \angle BAC = 35^o$



SCERT TELANGANA

ΔACD پر غور کرنے سے

$\angle CAD + \angle ACD + \angle CDA = 180^\circ$ (کسی مثلث میں زاویوں کے مجموعہ کی خصوصیت)

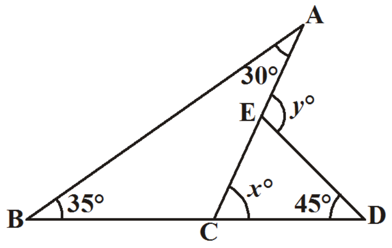
$\Rightarrow 35^o + 100^o + y^o = 180^o$

$\Rightarrow 135^\circ + y^\circ = 180^\circ$

$\Rightarrow y^\circ = (180^\circ - 135^\circ) = 45^\circ$

اس طرح $x = 35^\circ, y = 45^\circ$

مثال (19) : دی ہوئی شکل میں معلومات کے مطابق x اور y کی قیمتیں معلوم کرو؟



حل : ΔABC میں BC کے ضلع کو D تک خارج کیا گیا۔

$\therefore$ خارجی زاویہ $\angle ACD = \angle BAC + \angle ABC$

$\Rightarrow x^\circ = 30^\circ + 35^\circ = 65^\circ$

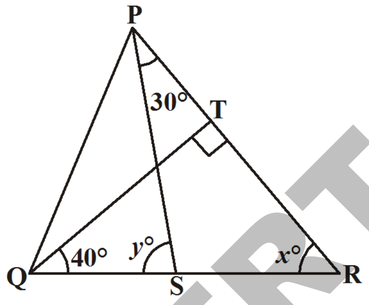
ΔDCE کے ضلع CE کو A تک خارج کیا گیا

$\therefore$ خارجی زاویہ $\angle DEA = \angle EDC + \angle ECD$

$\Rightarrow y = 45 + x^\circ = 45^\circ + 65^\circ = 110^\circ$

$x = 65^\circ$ اور $y = 110^\circ$

مثال (20) : متصل شکل میں اگر $QT \perp PR$ ، $\angle TQR = 40^\circ$ اور $\angle SPR = 30^\circ$ ہو تو x اور y کی قدریں کیا ہوں گی؟



حل : ΔTQR

$90^\circ + 40^\circ + x = 180^\circ$ (مثلث میں زاویوں کے مجموعہ کی خصوصیت)

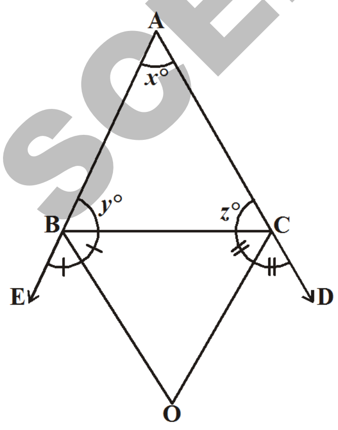
$\therefore x^\circ = 50^\circ$

اب $y^\circ = \angle SPR + x^\circ$ (مثلث کا خارجی زاویہ)

$\therefore y^\circ = 30^\circ + 50^\circ$

$= 80^\circ$

مثال (21) : دی ہوئی شکل میں ΔABC کے اضلاع AB اور AC کو بالترتیب E اور D تک خارج کیا گیا ہے اگر $\angle CBE$ اور $\angle BCD$ کے ناصف BO اور CO ایک دوسرے کو O پر قطع کریں تو ثابت کرو کہ $\angle BOC = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle BAC$



حل : شعاع BO ، $\angle CBE$ کا ناصف ہے

$\therefore \angle CBO = \frac{1}{2}\angle CBE$

$= \frac{1}{2}(180^\circ - y^\circ)$

$= 90^\circ - \frac{y}{2}$ .... (1)

SCERT TELANGANA

یہ کتاب حکومت تلنگانہ کی جانب سے مفت تقسیم کے لیے ہے۔2020-21

اس طرح $\angle BCD$ کا ناصف CO ہے

$$\therefore \angle BCO = \frac{1}{2}\angle BCD$$

$$= \frac{1}{2}\left(180^\circ - z^\circ\right)$$

$$= 90^\circ - \frac{z^\circ}{2} \quad \text{............ (2)}$$

$$\Delta BOC, \angle BOC + \angle BCO + \angle CBO = 180^\circ \quad \text{............ (3)}$$

مساوات (3) میں (1) اور (2) رکھنے پر

$$\angle BOC + 90^\circ - \frac{z^\circ}{2} + 90^\circ - \frac{y^\circ}{2} = 180^\circ$$

$$\angle BOC = \frac{z^\circ}{2} + \frac{y^\circ}{2}$$

یا $\angle BOC = \frac{1}{2}\left(y^\circ + z^\circ\right)$ .... (4)

$x^\circ + y^\circ + z^\circ = 180^\circ$ (مثلث میں زاویوں کے مجموعے کی خصوصیت)

$$\therefore y^\circ + z^\circ = 180^\circ - x^\circ$$

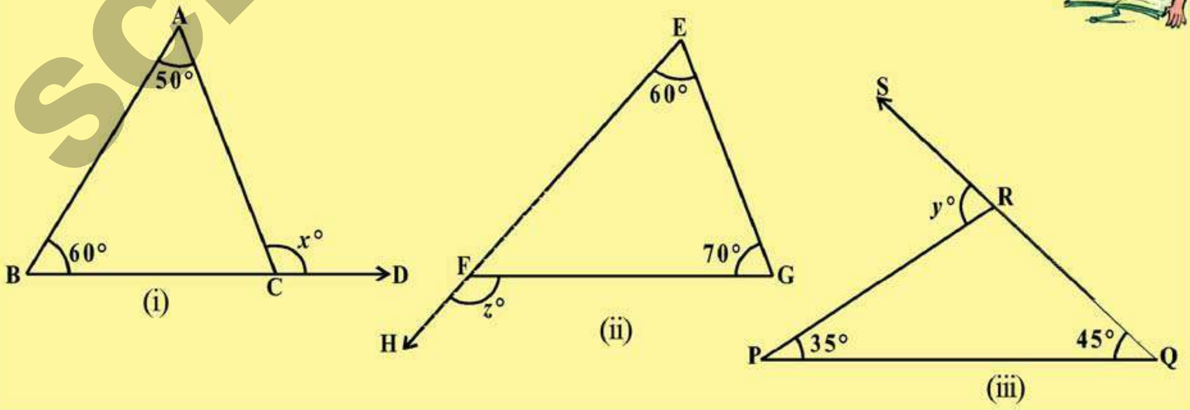
$$\angle BOC = \frac{1}{2}\left(180^\circ - x\right)^\circ$$

$$= 90^\circ - \frac{x^\circ}{2}$$

$$= 90^\circ - \frac{1}{2}\angle BAC$$

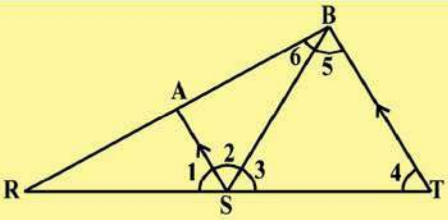
مشق 4.4

1. دیئے ہوئے مثلثات میں x، y اور z معلوم کیجیے۔

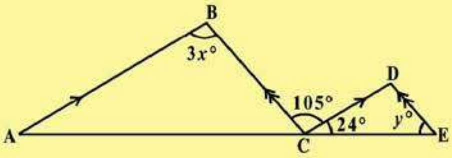


SCERT TELANGANA

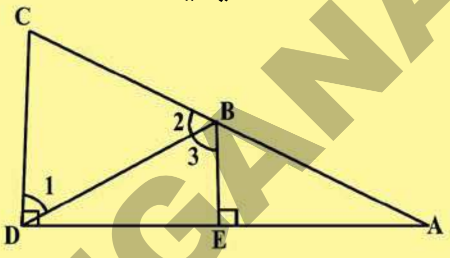
.2 دی ہوئی شکل میں AS || BT اور ∠4 = ∠5 ، $\overleftrightarrow{SB}$ ناصف ہے ∠AST کا۔ تب ∠1 معلوم کیجیے؟



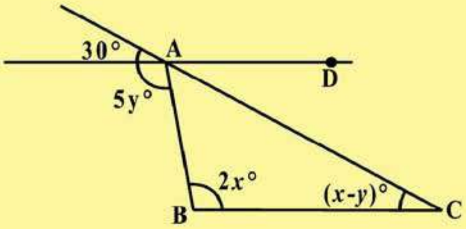
.3 متصل شکل میں AB || CD ، DE || BC ہوتو x اور y کی قدریں کیا ہوں گی؟



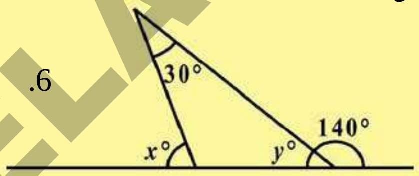
.4 متصل شکل میں BE ⊥ DA اور CD⊥ DA ہوتو ثابت کیجیے کہ $m \cong 3$



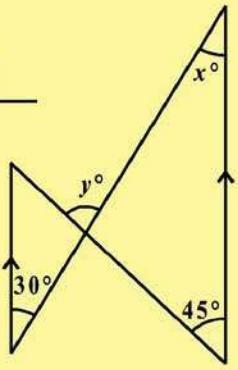
.5 x اور y کی کونسی قیمتوں کے لیے AD اور BC متوازی ہوں گے؟



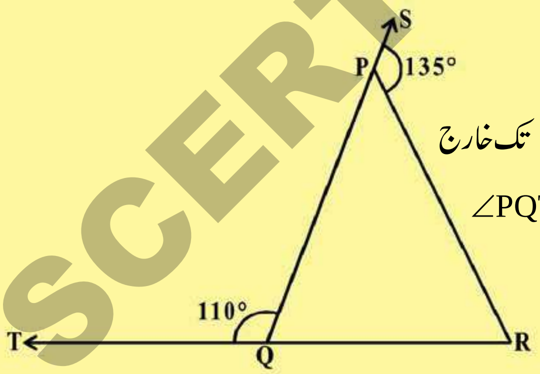
.6 شکل میں x اور y کی قیمتیں معلوم کیجیے۔



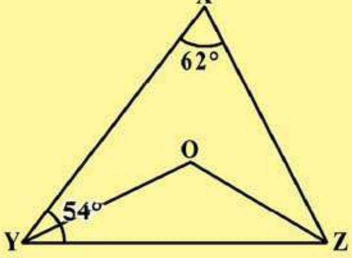
.7 دیے ہوئے خطی مقطوعے میں تیر کے نشان کے خطوط متوازی ہوں تو x اور y کی قیمتیں کیا ہوں گی؟



.8 دی ہوئی شکل میں ضلع QP اور RQ کو S اور T تک خارج کیا گیا اگر ∠SPR = 135° اور ∠PQT = 110° ہوتو ∠PRQ کیا ہوگا؟

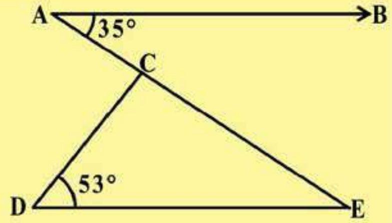


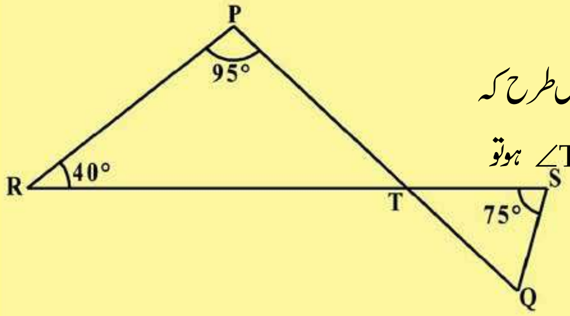
.9 دی ہوئی شکل میں ∠X = 62° ، ∠XYZ = 54° اگر YO اور ZO بالترتیب ∠XYZ اور ∠XZY کے ناصف ہوں تو بتاؤ کہ ∠OZY اور ∠YOZ کی قیمتیں کیا ہوں گی؟



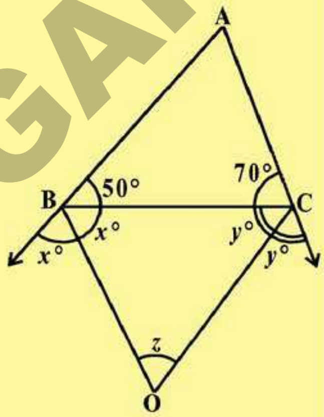
SCERT TELANGANA

10. اگر دی ہوئی شکل میں $AB \parallel DE$ اور $\angle BAC = 35^\circ$ ، $\angle CDE = 53^\circ$ ہو تو $\angle DCE$ کیا ہوگا؟

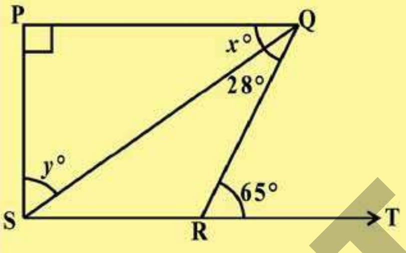




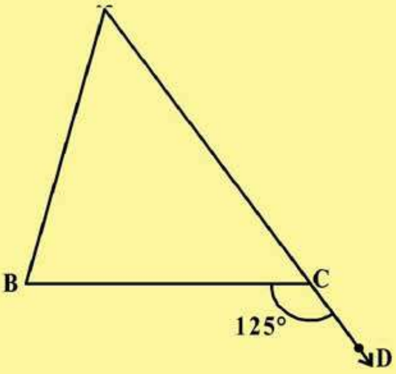
11. متصل شکل میں PQ اور RS نقطہ T پر قطع کرتے ہیں اس طرح کہ $\angle PRT = 40^\circ$ ، $\angle RPT = 95^\circ$ اور $\angle TSQ = 75^\circ$ ہو تو $\angle SQT$ معلوم کیجیے۔



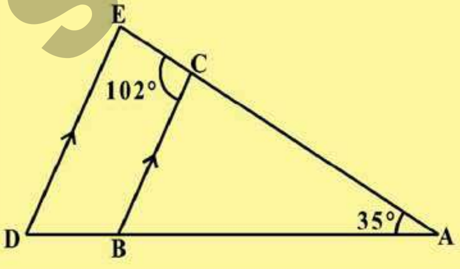
12. بازو کی شکل میں ABC ایک مثلث ہے جس میں $\angle B = 50^\circ$ ، $\angle C = 70^\circ$ ہے اضلاع AB اور AC کو خارج کیا گیا ہے۔ اگر خارجی زاویوں کے ناصف کے درمیان زاویہ z ہو تو اس زاویہ کی قیمت کیا ہوگی؟



13. دی ہوئی شکل میں اگر $PQ \perp PS$ ، $PQ \parallel SR$ ، $\angle SQR = 28^\circ$ اور $\angle QRT = 65^\circ$ ہو تو x اور y دریافت کیجیے۔



14. دئے ہوئے ΔABC میں AC کو D تک خارج کیا گیا اور $\angle BCD = 125^\circ$ اور $\angle A : \angle B = 2 : 3$ ہو تو $\angle A$ اور $\angle B$ معلوم کیجیے؟

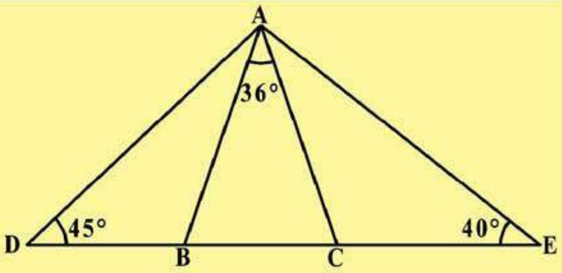


15. دی ہوئی شکل میں دیا گیا ہے کہ $BC \parallel DE$ ، $\angle BAC = 35^\circ$ اور $\angle BCE = 102^\circ$ ہو تو محسوب کیجیے۔

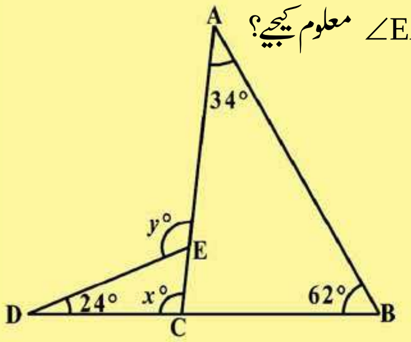
(i) $\angle BCA$ (ii) $\angle ADE$ (iii) $\angle CED$

SCERT TELANGANA

16. متصل شکل میں $AB = AC$، $\angle BAC = 36°$، $\angle ADB = 45°$ اور $\angle AEC = 40°$ ہو تو (i) $\angle ABC$ (ii) $\angle ACB$ (iii) $\angle \Delta AB$ (iv) $\angle EAC$ معلوم کیجیے؟



17. شکل کا مشاہدہ کرتے ہوئے x اور y کی قیمت معلوم کیجیے؟



ہم نے کیا سیکھا

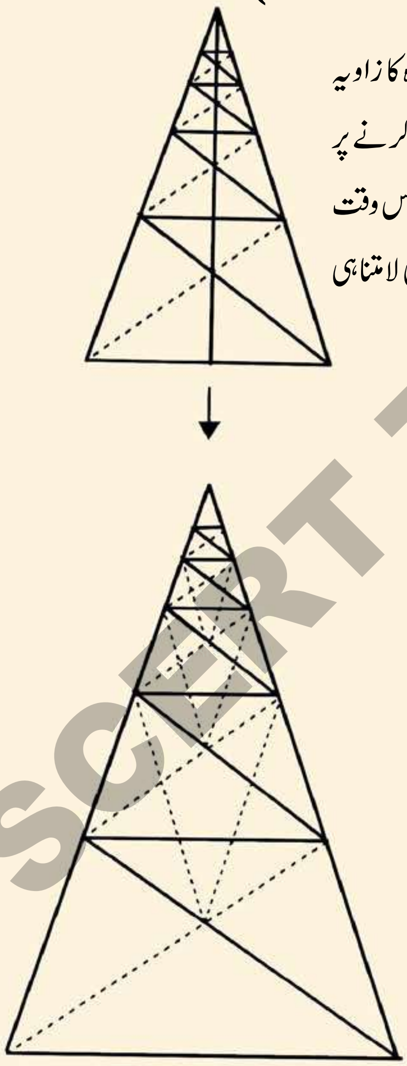
- **خطی جوڑی مسلمہ اصول:** اگر کوئی شعاع کسی خط مستقیم پر واقع ہو تو بننے والے دو متصل زاویوں کا مجموعہ 180^0 ہوگا۔
- **خطی جوڑی کے اصول کا بالعکس:** اگر دو متصل زاویوں کا مجموعہ 180^0 ہو تو غیر مشترک باز و خط مستقیم بناتے ہیں۔
- **مسئلہ:** اگر دو خطوط ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں تو مخالف زاویے مساوی ہوتے ہیں۔
- **مسلمہ نظیری زاویے:** دو متوازی خطوط کے مقطوعہ کی صورت میں نظیری زاویوں کی ہر جوڑی مساوی ہوتی ہے۔
- **مسئلہ:** اگر دو متوازی خطوط کا مقطوعہ ہو تو متبادل اندرونی زاویوں کی ہر جوڑی مساوی ہوتی ہے۔
- **مسئلہ:** دو متوازی خطوط کے مقطوعے کی صورت میں مقطوعہ کی جانب اندرونی زاویوں کی ہر جوڑی نظیری ہوتی ہے۔
- **مسلمہ نظیری زاویے کا بالعکس:** اگر کوئی دو خطوط کا مقطوعہ اس طرح ہو کہ نظیری زاویوں کے جوڑ مساوی ہیں تو دونوں خطوط متوازی ہوں گے۔
- **مسئلہ:** اگر دو خطوط کا مقطوعہ اس طرح ہو کہ متبادل اندرونی زاویوں کا جوڑ مساوی ہو تو خطوط متوازی ہوں گے۔
- **مسئلہ:** اگر دو خطوط کا مقطوعہ اس طرح ہو کہ مقطوعہ کے ایک ہی جانب اندرونی زاویوں کی جوڑی نظیری ہو تو خطوط متوازی ہوں گے۔

SCERT TELANGANA

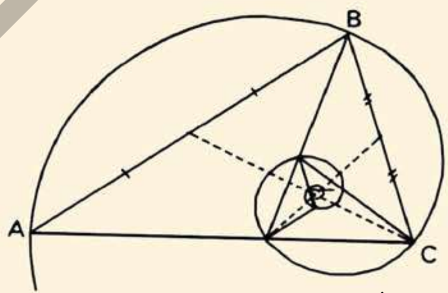
- مسئلہ: کوئی خطوط کسی اور خط کے متوازی ہوں تو یہ خطوط ایک دوسرے کے متوازی ہوں گے۔
- مسئلہ: مثلث میں زاویوں کا مجموعہ 180^0 ہوتا ہے۔
- مسئلہ: اگر کسی مثلث کے ایک ضلع کو خارج کیا جائے تو بننے والا خارجی زاویہ مخالف کے اندرونی زاویوں کے مجموعہ کے مساوی ہوگا۔

کیا آپ جانتے ہیں؟

خودکار سنہری مثلث (Golden Traingle)



سنہری مثلث ایک ایسا مساوی الساقین مثلث ہوتا ہے جس کے قاعدہ کا زاویہ 72^0 اور راس کا زاویہ 36^0 ہوتا ہے۔ قاعدہ کے ان دونوں زاویوں کو نصف کرنے پر بننے والے دو نئے مثلثات بھی سنہری مثلثات ہوتے ہیں یہ سلسلہ لامتناہی طور پر اس وقت تک جاری رہتا ہے جب تک کہ اصل طلائی مثلث کے قدم اور سنہری مثلثات کی لامتناہی تعداد ایسی نہ دکھائی دے جیسی کہ ان مثلثات کی تہیں کھل نہ رہی ہوں۔



جیسے کہ شکل میں واضح کیا گیا ہے سنہری مثلث سے مساوی زاویٔ مرغولی اور سنہری نسبت بھی پیدا ہوتی ہے۔

$$\phi = |AB| / |BC| = 1.618 \ldots$$

بلند ہوتے ہوئے ان لامتناہی سنہری مثلثات سے اندرون مثلثات بلند ہوتے ہوئے مخمسوں کا لامتناہی سلسلہ ترتیب دیا جاسکتا ہے۔ نوٹ کیجیے کہ مخمس کے پانچ نقاط بھی سنہری مثلثات تشکیل دیتے ہیں۔

SCERT TELANGANA