સ્વાધ્યાય 7.3

1. જેના શિરોબિંદુઓ નીચે પ્રમાણે છે તેવા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ શોધો :

(i) $(\mathbf{2}, \mathbf{3}), (-\mathbf{1}, \mathbf{0}), (\mathbf{2}, -\mathbf{4})$

જ. અહીં ત્રિકોણના શિરોબિંદુઓ $A(2,3),\ B(-1,0),\ C(2,-4)$ છે.

તેથી, $x_1 = 2, y_1 = 3,\ x_2 = -1, y_2 = 0, x_3 = 2, y_3 = -4$ છે.

ત્રિકોણના ક્ષેત્રફળના સૂત્રનો ઉપયોગ કરતાં,

ΔABC નું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$

$\therefore\ \Delta ABC$ નું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2}\left[2\big(0 - (-4)\big) + (-1)\big((-4) - 3\big) + 2(3 - 0)\right]$

$\therefore\ \Delta ABC$ નું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2}[2(4) + (-1)(-7) + 2(3)]$

$\therefore\ \Delta ABC$ નું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2}[8 + 7 + 6]$

$\therefore\ \Delta ABC$ નું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2}[21]$

$\therefore\ \Delta ABC$ નું ક્ષેત્રફળ $= 10.5$ ચોરસ એકમ

(ii) $(-\mathbf{5}, -\mathbf{1}), (\mathbf{3}, -\mathbf{5}), (\mathbf{5}, \mathbf{2})$

જ. અહીં ત્રિકોણના શિરોબિંદુઓ $A(-5,-1),\ B(3,-5),\ C(5,2)$ છે.

તેથી, $x_1 = -5, y_1 = -1,\ x_2 = 3, y_2 = -5, x_3 = 5, y_3 = 2$ છે.

ત્રિકોણના ક્ષેત્રફળના સૂત્રનો ઉપયોગ કરતાં,

ΔABC નું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$

$\therefore\ \Delta ABC$ નું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2}\left[(-5)\big((-5) - 2\big) + 3\big(2 - (-1)\big) + 3\big((-1) - (-5)\big)\right]$

$\therefore\ \Delta ABC$ નું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2}[(-5)(-7) + 3(2 + 1) + 3(-1 + 5)]$

$\therefore\ \Delta ABC$ નું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2}[35 + 3(3) + 3(4)]$

$\therefore\ \Delta ABC$ નું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2}[35 + 9 + 12]$

$\therefore\ \Delta ABC$ નું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2}[64]$

$\therefore\ \Delta ABC$ નું ક્ષેત્રફળ $= 32$ ચોરસ એકમ

2. **નીચે આપેલાં બિંદુઓ સમરેખ હોય તો પ્રત્યેક માં 'k'ની કિંમત શોધો :**

(i) $(\mathbf{7}, \mathbf{-2}), (\mathbf{5}, \mathbf{1}), (\mathbf{3}, \boldsymbol{k})$

અહીં સમરેખ બિંદુઓ $A(7, -2),\ B(5, 1),\ C(3, k)$ છે.

તેથી, $x_1 = 7, y_1 = -2,\ x_2 = 5, y_2 = 1, x_3 = 3, y_3 = k$ છે.

સમરેખ બિંદુઓ હોવાથી બનતા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ શૂન્ય થશે.

ત્રિકોણના ક્ષેત્રફળના સૂત્રનો ઉપયોગ કરતાં,

ΔABC નું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$

$\therefore 0 = \frac{1}{2}\left[7(1 - k) + 5\big(k - (-2)\big) + 3(-2 - 1)\right]$

$\therefore 0 = \frac{1}{2}[7(1 - k) + 5(k + 2) + 3(-3)]$

$\therefore 0 = \frac{1}{2}[7 - 7k + 5k + 10 - 9]$

$\therefore 0 = \frac{1}{2}[8 - 2k]$

$\therefore 0 = 8 - 2k$

$\therefore 2k = 8$

$\therefore k = \frac{8}{2}$

$\therefore k = 4$

(ii) $(\mathbf{8}, \mathbf{1}), (\boldsymbol{k}, \mathbf{-4}), (\mathbf{2}, \mathbf{-5})$

અહીં સમરેખ બિંદુઓ $A(8, 1),\ B(k, -4),\ C(2, -5)$ છે.

તેથી, $x_1 = 8, y_1 = 1,\ x_2 = k, y_2 = -4, x_3 = 2, y_3 = -5$ છે.

સમરેખ બિંદુઓ હોવાથી બનતા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ શૂન્ય થશે.

ત્રિકોણના ક્ષેત્રફળના સૂત્રનો ઉપયોગ કરતાં,

ΔABC નું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$

$\therefore 0 = \frac{1}{2}\left[8\big(-4 - (-5)\big) + k(-5 - 1) + 2\big(1 - (-4)\big)\right]$

$\therefore 0 = \frac{1}{2}[8(-4 + 5) + k(-6) + 2(1 + 4)]$

$\therefore 0 = \frac{1}{2}[8(1) - 6k + 2(5)]$

$\therefore 0 = \frac{1}{2}[8 - 6k + 10]$

$\therefore 0 = \frac{1}{2}[18 - 6k]$

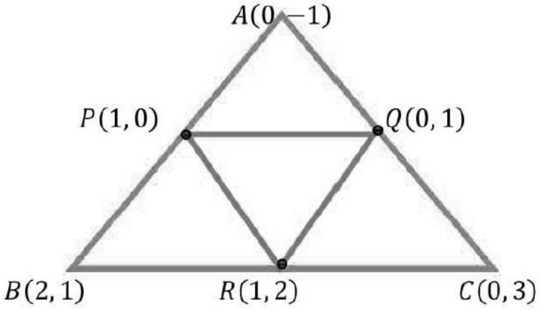
$\therefore 0 = 18 - 6k$

$\therefore 6k = 18$

$\therefore k = \frac{18}{6} = 3$

3. જેના શિરોબિંદુઓ $(0,-1), (2,1)$ અને $(0,3)$ હોય તેવા ત્રિકોણની બાજુઓ ના મધ્યબિંદુઓને જોડવાથી બનતા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ શોધો. આ ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ અને આપેલ ત્રિકોણના ક્ષેત્રફળનો ગુણોત્તર શોધો.

જ. ધારોકે ત્રિકોણ PQR એ જે ત્રિકોણના શિરોબિંદુઓ $A(0,-1)$, $B(2,1)$ અને $C(0,3)$ હોય તેવા ત્રિકોણ ABC ની બાજુઓના મધ્યબિંદુ જોડાવાથી બને છે.



અહી, $x_1 = 0, y_1 = -1,\ x_2 = 2, y_2 = 1, x_3 = 0, y_3 = 3$ છે.

AB ના મધ્યબિંદુ P ના યામ,

$$P\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right) = P\left(\frac{0+2}{2},\frac{-1+1}{2}\right) = P\left(\frac{2}{2},\frac{0}{2}\right) = P(1,0)$$

BC ના મધ્યબિંદુ P ના યામ,

$$R\left(\frac{x_2+x_3}{2},\frac{y_2+y_3}{2}\right) = R\left(\frac{2+0}{2},\frac{1+3}{2}\right) = R\left(\frac{2}{2},\frac{4}{2}\right) = R(1,2)$$

AC ના મધ્યબિંદુ Q ના યામ,

$$Q\left(\frac{x_1+x_3}{2},\frac{y_1+y_3}{2}\right) = Q\left(\frac{0+0}{2},\frac{-1+3}{2}\right) = Q\left(\frac{0}{2},\frac{2}{2}\right) = Q(0,2)$$

ત્રિકોણના ક્ષેત્રફળના સૂત્રનો ઉપયોગ કરતાં,

$\Delta\, ABC$ નું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2}[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)]$

$\therefore\ \Delta\, ABC$ નું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2}\big[0(1-3)+2\big(3-(-1)\big)+0(-1-1)\big]$

$\therefore\ \Delta\, ABC$ નું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2}[0(-2)+2(3+1)+0(-2)]$

$\therefore\ \Delta\, ABC$ નું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2}[0+2(4)+0]$

$\therefore\ \Delta\, ABC$ નું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2}[8]$

$\therefore\ \Delta\, ABC$ નું ક્ષેત્રફળ $= 4$ ચોરસ એકમ

$\Delta\, PQR$ નું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$

$\therefore\ \Delta\, PQR$ નું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2}[1(2-1) + 1(1-0) + 0(0-1)]$

$\therefore\ \Delta\, PQR$ નું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2}[1(1) + 1(1) + 0(-1)]$

$\therefore\ \Delta\, PQR$ નું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2}[1 + 1 + 0]$

$\therefore\ \Delta\, PQR$ નું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2}[2]$

$\therefore\ \Delta\, PQR$ નું ક્ષેત્રફળ $= 1$ ચોરસ એકમ

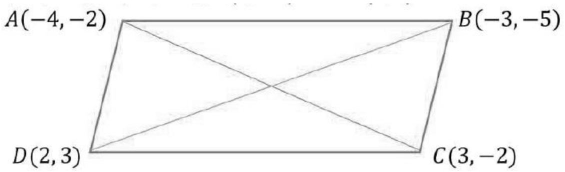
હવે,

ત્રિકોણ PQR અને ત્રિકોણ ABC ના ક્ષેત્રફળનો ગુણોત્તર,

$\frac{\Delta\, PQR \text{ નું ક્ષેત્રફળ}}{\Delta\, ABC \text{ નું ક્ષેત્રફળ}} = \frac{1}{4}$

4. એક ચતુષ્કોણના ક્રમિક શિરોબિંદુઓ $(-4,-2), (-3,-5), (3,-2)$ અને $(2,3)$ હોય, તો તેનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

જ. અહીં બિંદુઓ $A(-4,-2)$, $B(-3,-5)$, $C(3,-2)$ અને $D(2,3)$ ચતુષ્કોણના ક્રમિક શિરોબિંદુઓ છે.



અહી, $x_1 = -4, y_1 = -2,\ x_2 = -3, y_2 = -5, x_3 = 3, y_3 = -2, x_4 = 2, y_4 = 3$ છે.

ત્રિકોણના ક્ષેત્રફળના સૂત્રનો ઉપયોગ કરતાં,

$\Delta\, ABC$ નું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$

$\therefore\ \Delta\, ABC$ નું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2}\left[(-4)\big(-5-(-2)\big) + (-3)\big(-2-(-2)\big) + 3\big(-2-(-5)\big)\right]$

$\therefore\ \Delta\, ABC$ નું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2}[(-4)(-5+2) + (-3)(-2+2) + 3(-2+5)]$

$\therefore\ \Delta\, ABC$ નું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2}[(-4)(-3) + (-3)(0) + 3(3)]$

$\therefore\ \Delta\, ABC$ નું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2}[12 + 0 + 9]$

$\therefore\ \Delta\, ABC$ નું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2}[21]$

$\therefore\ \Delta\, ABC$ નું ક્ષેત્રફળ $= 10.5$ ચોરસ એકમ

ત્રિકોણના ક્ષેત્રફળના સૂત્રનો ઉપયોગ કરતાં,

$\therefore\ \Delta\, ACD$ નું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2}\left[(-4)(-2-3)+3(3-(-2))+2\big(-2-(-2)\big)\right]$

$\therefore\ \Delta\, ACD$ નું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2}[(-4)(-5)+3(5)+2(-2+2)]$

$\therefore\ \Delta\, ACD$ નું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2}[20+15+2(0)]$

$\therefore\ \Delta\, ACD$ નું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2}[35]$

$\therefore\ \Delta\, ACD$ નું ક્ષેત્રફળ $= 17.5$ ચોરસ એકમ

હવે,

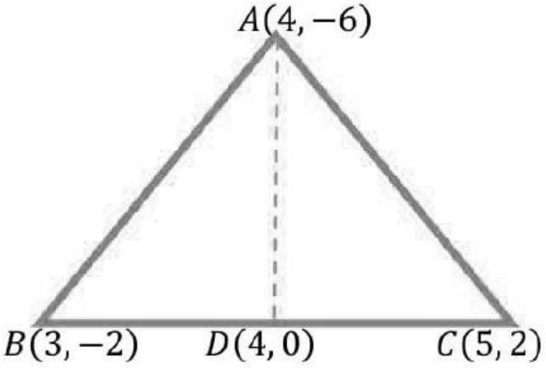
ચતુષ્કોણ $ABCD$ નું ક્ષેત્રફળ $= \Delta\, ABC$ નું ક્ષેત્રફળ $+ \Delta\, ACD$ નું ક્ષેત્રફળ

$\therefore$ ચતુષ્કોણ $ABCD$ નું ક્ષેત્રફળ $= 10.5 + 17.5$

$\therefore$ ચતુષ્કોણ $ABCD$ નું ક્ષેત્રફળ $= 28$ ચોરસ એકમ

5. જેના શિરોબિંદુઓ $A(4,-6)$, $B(3,-2)$ અને $C(5,2)$ હોય, તેવા ΔABC માટે સાબિત કરો કે ત્રિકોણની મધ્યગા ત્રિકોણનું બે સમાન ક્ષેત્રફળવાળા ત્રિકોણમાં વિભાજન કરે છે.

જ. ΔABC ના શિરોબિંદુઓ $A(4,-6)$, $B(3,-2)$ અને $C(5,2)$ છે. તેમજ તેની મધ્યગા AD છે.



અહી, $x_1 = 4, y_1 = -6,\ x_2 = 3, y_2 = -2, x_3 = 5, y_3 = 2$ છે.

BC ના મધ્યબિંદુ D ના યામ,

$D\left(\frac{x_2+x_3}{2},\frac{y_2+y_3}{2}\right) = D\left(\frac{3+5}{2},\frac{-2+2}{2}\right) = D\left(\frac{8}{2},\frac{0}{2}\right) = D(4,0)$

ત્રિકોણના ક્ષેત્રફળના સૂત્રનો ઉપયોગ કરતાં,

$\therefore\ \Delta\, ABD$ નું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2}\left[4(-2-0)+3\big(0-(-6)\big)+4\big(-6-(-2)\big)\right]$

$\therefore\ \Delta\, ABD$ નું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2}[4(-2)+3(6)+4(-6+2)]$

$\therefore\ \Delta\, ABD$ નું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2}[-8+18+4(-4)]$

$\therefore\ \Delta\, ABD$ નું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2}[-8+18-16]$

$\therefore\ \Delta\, ABD$ નું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2}[-6]$

$\therefore\ \Delta\, ABD$ નું ક્ષેત્રફળ $= -3 = 3$ ચોરસ એકમ

$\therefore\ \Delta\, ACD$ નું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2}\left[4(2-0) + 5\big(0-(-6)\big) + 4(-6-2)\right]$

$\therefore\ \Delta\, ACD$ નું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2}[4(2) + 5(6) + 4(-8)]$

$\therefore\ \Delta\, ACD$ નું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2}[8 + 30 - 32]$

$\therefore\ \Delta\, ACD$ નું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2}[6]$

$\therefore\ \Delta\, ACD$ નું ક્ષેત્રફળ $= 3$ ચોરસ એકમ

$\therefore\ \Delta\, ABD$ નું ક્ષેત્રફળ $= \Delta\, ACD$ નું ક્ષેત્રફળ

તેથી, ત્રિકોણની મધ્યગા ત્રિકોણનું બે સમાન ક્ષેત્રફળવાળા ત્રિકોણમાં વિભાજન કરે છે.