

दो चरवाशि वाले रैखिक समीकरण (LINEAR EQUATIONS IN TWO VARIABLES)

6.1 परिचय

हम निम्न प्रकार के कई समस्याओं का सामना करते हैं जैसे

- (i) यदि पाँच पेनों का मूल्य 60 रु., तो एक पेन का मूल्य ज्ञात करो।
- (ii) सात में एक संख्या जोड़ने पर 51 आता है तो उस संख्या को ज्ञात करो।

यहाँ पर (i) स्थिति में पेन की कीमत अज्ञात है, (ii) स्थिति में संख्या अज्ञात है। इस प्रकार के प्रश्नों को कैसे हल करते हैं? हम x, y या z इस प्रकार के अक्षर अज्ञात राशी के लिए उपयोग करते हैं और इस प्रकार के समीकरणों को लिखते हैं।

स्थिति (i) के लिए हम लिखेंगे

$$5 \times \text{पेन की कीमत} = 60$$

यदि पेन की कीमत y रु. है

$$\text{तो, } 5y = 60$$

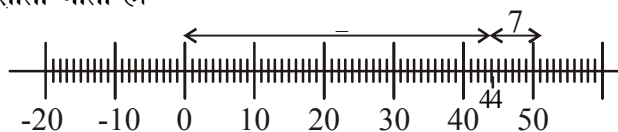
अब, y का मूल्य ज्ञात कीजिए

इसी प्रकार स्थिति (ii) के लिए भी समीकरण बना सकते हैं और अपरिचित संख्या को ज्ञात कर सकते हैं। इस प्रकार के समीकरण को रैखिक समीकरण कहते हैं।

समीकरण जैसे $x + 3 = 0$, $x + \sqrt{3} = 0$ और $\sqrt{2}x + 5 = 0$ ये सभी एक चर वाले रैखिकवाशि समीकरण के उदाहरण हैं आपको यह भी मालूम होगा कि इस समीकरण अद्वितीय (एक सिर्फ एक ही) हल होता है। आपको यह भी मालूम होगा की हल को संख्या रेखा पर किस प्रकार दर्शाते हैं।



हनिफ ने स्थिति (ii) के हल को संख्या रेखा पर इस प्रकार दर्शाता जाता है।



6.2 दो चर राशियों में रैखिक समीकरण

अब इस स्थिति का निरीक्षण कीजिए

एक दिन काव्या अपने पिताजी के साथ 4 नोटबुक्स और दो पेन खरीदने के लिए गई। उसके पिताजी इन सभी वस्तुओं के लिए 100 रु. दिए।

काव्या को पेन और नोटबुक की कीमत नहीं मालूम। क्या इस स्थिति को हम समीकरण का रूप दे सकते हैं?

यहाँ पर एक पेन और एक नोटबुक की कीमत ज्ञात नहीं हैं। इस प्रकार दो अज्ञात राशियाँ हैं, इसे हम x और y से सूचित करते हैं। अतः एक नोट बुक की कीमत x रु. और एक पेन की किमत y रुपये।

इसे हम समीकरण के रूप में इस प्रकार से लिख सकते हैं $4x + 2y = 100$,

क्या आप x और y राशी के घातांको को समीकरण में देख सकते हो?

इस प्रकार यह ' x ' और ' y ' चर राशिवाला रैखिक समीकरण है।

वह समीकरण जिसकी दो चर राशियाँ x और y हो उसे दो चर राशियाँ वाला रैखिक समीकरण कहते हैं।

$4x + 2y = 100$ दो चर राशियों वाला रैखिक समीकरण का उदाहरण है।

अधिकतर चरराशियों ' x ' और ' y ' से दर्शाया जाता है। लेकिन कुछ अन्य अक्षरों भी उपयोग कर सकते हैं।

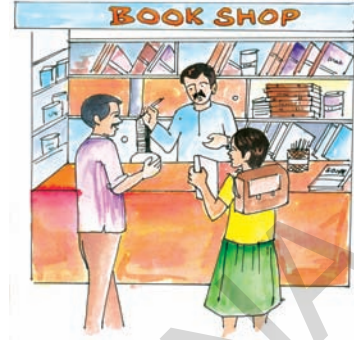
$p + 3q = 50$, $\sqrt{3}u + \sqrt{2}v = \sqrt{11}$, $\frac{s}{2} - \frac{t}{3} = 5$ और $3 = \sqrt{5}x - 7y$ ये सभी दो चर राशी वाले रैखिक समीकरण के उदाहरण हैं।

नोट कीजिए कि उपरी समीकरणों को आप क्रमशः इस प्रकार भी लिखा सकते हैं $p + 3q - 50 = 0$, $\sqrt{3}u + \sqrt{2}v - \sqrt{11} = 0$, $3s - 2t - 30 = 0$ तथा $\sqrt{5}x - 7y - 3 = 0$.

x, y दो चर राशियों वाला सामान्य समीकरण $ax + by + c = 0$ होगा जहाँ a, b, c वास्तविक संख्याएँ होंगी तथा a और b का मूल्य एक साथ शून्य नहीं हो सकता है। ($a \neq 0$, $b \neq 0$)

उदाहरण-1. सचिन तथा सहवाग ने एक साथ 137 रनों की पारी खेली। इस जानकारी को समीकरण रूप में दर्शाइए।

हल : मान लीजिए सचिन द्वारा बनाये गये रन ' x ' तथा सहवाग द्वारा बनाये गये रन ' y ' है।



ऊपर के दिए गए कथन को समीकरण के रूप में इस प्रकार लिख सकते हैं।

$$x + y = 137$$

उदाहरण-2. हेमा की आयु मेरी की आयु की 4 गुन है। इस सूचना को दो चर राशि वाले समीकरण में लिखिए।

हल : मानलो हेमा की आयु 'x' वर्ष और मेरी की आयु 'y' वर्ष होगी,

यदि मेरी की आयु y हो तो हेमा की आयु '4y' होगी

दिए गए प्रश्न के अनुसार $x = 4y$

$$\Rightarrow x - 4y = 0 \text{ (कैसे?)}$$

उदाहरण-3. एक संख्या, उसके अंकों को बदलने पर मिलने वाली संख्या से 27 अधिक है। यदि इकाई तथा दहाई के स्थानों पर क्रमशः x और y लेकर इस संख्या को रेखिक समीकरण के रूप में लिखिए।

हल : इकाई को x दहाई को y से सूचित करते हैं, अतः संख्या $10y + x$.

यदि हम स्थानों को बदल दें तो नई संख्या $10x + y$.

दि गई सूचना के अनुसार,

$$(\text{दो अंकों की संख्या}) - (\text{अंकों का स्थान बदलने के बाद}) = 27.$$

$$\text{i.e., } 10y + x - (10x + y) = 27$$

$$\Rightarrow 10y + x - 10x - y - 27 = 0$$

$$\Rightarrow 9y - 9x - 27 = 0$$

$$\Rightarrow y - x - 3 = 0$$

$$\Rightarrow x - y + 3 = 0 \text{ आवश्यक समीकरण होगा।}$$



उदाहरण-4. प्रत्येक समीकरण को $ax + by + c = 0$ इस रूप में लिखो a, b और c के मूल्य लिखिए।

i) $3x + 4y = 5$

ii) $x - 5 = \sqrt{3}y$

iii) $3x = y$

iv) $\frac{x}{2} + \frac{y}{2} = \frac{1}{6}$

v) $3x - 7 = 0$

हल : (i) $3x + 4y = 5$ उसे इस प्रकार लिख सकते।

$$3x + 4y - 5 = 0.$$

यहाँ $a = 3$, $b = 4$ तथा $c = -5$.

(ii) $x - 5 = \sqrt{3}y$ को इस प्रकार लिख सकते,

$$1.x - \sqrt{3}y - 5 = 0.$$

यहाँ $a = 1, b = -\sqrt{3}$ तथा $c = -5$.

(iii) समीकरण $3x = y$ को इस प्रकार लिख सकते हैं।

$$3x - y + 0 = 0.$$

यहाँ $a = 3, b = -1$ और $c = 0$.

(iv) समीकरण $\frac{x}{2} + \frac{y}{2} = \frac{1}{6}$ को इस प्रकार लिख सकते हैं।

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{2} - \frac{1}{6} = 0;$$

$$a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{2} \text{ और } c = -\frac{1}{6}$$

(v) $3x - 7 = 0$ को इस प्रकार लिख सकते।

$$3x + 0.y - 7 = 0.$$

$$a = 3, b = 0; c = -7$$

उदाहरण-5. प्रत्येक समीकरण को $ax + by + c = 0$ के रूप में लिखकर, और a, b और c के मूल्यों को लिखिए।

i) $x = -5$

ii) $y = 2$

iii) $2x = 3$

iv) $5y = -3$



हल :

क्र.सं.	दिया गया समीकरण	$ax + by + c = 0$ के रूप में	a, b, c का मूल्य		
			a	b	c
1	$x = -5$	$1.x + 0.y + 5 = 0$	1	0	5
2	$y = 2$	$0.x + 1.y - 2 = 0$	0	1	-2
3	$2x = 3$	---	---	---	---
4	$5y = -3$	----	----	----	----

प्रयत्न कीजिए



1. दिए गए रैखिक समीकरण को $ax + by + c = 0$ के रूप में लिखो और a, b और c के मूल्यों को लिखिए।

i) $3x + 2y = 9$

ii) $-2x + 3y = 6$

iii) $9x - 5y = 10$

iv) $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} - 5 = 0$

v) $2x = y$

अभ्यास - 6.1



1. दिए गए रैखिक समीकरणों को $ax + by + c = 0$ के रूप में लिखो और प्रत्येक स्थिति में a, b और c के मूल्य ज्ञात करो।

i) $8x + 5y - 3 = 0$

ii) $28x - 35y = -7$

iii) $93x = 12 - 15y$

iv) $2x = -5y$

v) $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 7$

vi) $y = \frac{-3}{2}x$

vii) $3x + 5y = 12$

2. प्रत्येक रैखिक समीकरण को $ax + by + c = 0$ के रूप में लिखो और a, b और c का मूल्य ज्ञात करो।

i) $2x = 5$

ii) $y - 2 = 0$

iii) $\frac{y}{7} = 3$

iv) $x = \frac{-14}{13}$

3. दिए गए कथनों को दो चर राशि वाले रैखिक समीकरण के रूप में लिखिए।

- (i) दो संख्याओं का योग 34.
- (ii) एक फांटेन पेन के आधे मूल्य से एक बाल पेन का मूल्य 5 ₹ कम है।
- (iii) भारगवी को सिंधु के दुगने से 10 अंक ज्यादा मिले।
- (iv) एक पेंसिल का मूल्य 2 ₹ और एक बाल पेन का मूल्य 15 ₹ शीला ने पेंसिल और पेन के लिए 100 ₹ दिये।
- (v) IX वी. कक्षा की दो छात्राएँ यामिनी तथा फातिमा ने मिलकर प्रधानमंत्री सहायता कोश के लिए 200/- ₹ का अनुदान दिया।
- (vi) दो अंकों की संख्या और अंकों का स्थान बदलने पर आने वाली संख्या का योग 121 है। यदि इकाई के स्थान पर 'x' और दहाई के स्थान पर 'y' हो तो उस संख्या का समीकरण लिखिए।

6.3 दो चर राशि वाले रैखिक समीकरणों के हल:

हमें मालूम है कि एक चर राशि वाले रैखिक समीकरण का अद्वितीय हल होता है।

$3x - 4 = 8$ इस समीकरण का हल क्या होगा?

$3x - 2y = 5$ समीकरण को देखिए

दो चर राशियों के रैखिक समीकरण के हल के बारे में क्या कह सकते हैं? क्या इस हल में केवल एक ही मूल्य होता है। एक से अधिक अब हम इसके बारे में समझेंगे।

क्या $x = 3$ इस समीकरण का हल होगा?

$x = 3$ को समीकरण में प्रतिस्थापित करने पर,

$$3(3) - 2y = 5$$

$$9 - 2y = 5$$

अभीतक, इस समीकरण का हल ज्ञात नहीं हुआ। अतः हल मालूम करने के लिए, 'x' के साथ 'y' के मूल्य की भी आवश्यकता होती है। y का मूल्य ऊपर दिए गए समीकरण $9 - 2y = 5 \Rightarrow 2y = 4$ या $y = 2$ ज्ञात होगा।

समीकरण $3x - 2y = 5$ में $x = 3$ और $y = 2$, को प्रतिस्थापित करने पर समीकरण संतुष्ट होता है। अतः दो चर राशियों के रैखिक समीकरण को संतुष्ट करने के लिए हमें दो मूल्यों की आवश्यकता होती है एक 'x' और दूसरी y.

‘x’ और ‘y’ की कोई भी जोड़ी जो रैखिक समीकरण को संतुष्ट करते हैं। उन्हें उसका हल कहते हैं।

हमने देखा कि $x = 3, y = 2$, समीकरण $3x - 2y = 5$ का हल है। क्रमित युग्म या क्रमित जोड़ी (3, 2) में प्रथम मूल्य ‘x’ और दूसरा मूल्य ‘y’ होता है। क्या इस समीकरण के लिए कोई और हल है? आपके अनुमान से $x = 4$ मूल्य लो और समीकरण में प्रस्थापित करो $3x - 2y = 5$. इस प्रकार समीकरण $12 - 2y = 5$ के रूप में होगा। जो एक चर राशि वाला समीकरण है इसे हल करने पर यह प्राप्त होगा।

$$y = \frac{12-5}{2} = \frac{7}{2}, \text{ अतः } \left(4, \frac{7}{2}\right), 3x - 2y = 5 \text{ का दूसरा हल है।}$$

क्या $3x - 2y = 5$ के लिए कोई और हल है? (1, -1) मूल्य लगाकर देखो। क्या (1, -1) दूसरा हल होगा?

अतः दो चर राशियों के रैखिक समीकरण में हमें बहुत सारे हल प्राप्त होते हैं।

नोट : हल को सरलता से प्राप्त करने के लिए $x = 0$ लगाकर उससे संबंधित ‘y’ का मूल्य प्राप्त करेंगे, उसी प्रकार $y = 0$ लगाकर उससे संबंधित ‘x’ का मूल्य ज्ञात करेंगे।

इसे हल कीजिए

5 जोड़ी मूल्य लेकर ऊपर दिए गए समीकरण को हल करो।



उदाहरण-6. $4x + y = 9$ समीकरण के लिए चार अलग अलग हल ज्ञात कीजिए। तालिका को आवश्यकता अनुसार पूर्ण कीजिए।

हल :

क्रम संख्या	x या y चर राशी का चुनाव	सरलीकरण	हल
1.	$x = 0$	$4x + y = 9 \Rightarrow 4 \times 0 + y = 9 \Rightarrow y = 9$	(0, 9)
2.	$y = 0$	$4x + y = 9 \Rightarrow 4x + 0 = 9 \Rightarrow 4x = 9 \Rightarrow x = 9/4$	$\left(\frac{9}{4}, 0\right)$
3.	$x = 1$	$4x + y = 9 \Rightarrow 4 \times 1 + y = 9 \Rightarrow 4 + y = 9 \Rightarrow y = 5$	—
4.	$x = -1$	—	(-1, 13)

$\therefore (0, 9), \left(\frac{9}{4}, 0\right), (1, 5)$ और $(-1, 13)$ ऊपर दिए गए समीकरण के कुछ और हल हैं।

उदाहरण-7. निम्न में से कौनसे मूल्य समीकरण $x + 2y = 4$ को संतुष्ट करते हैं? (आवश्यकता अनुसार तालिका का उपयोग कीजिए)

- i) $(0, 2)$ ii) $(2, 0)$ iii) $(4, 0)$ (iv) $(\sqrt{2}, -3\sqrt{2})$
v) $(1, 1)$ vi) $(-2, 3)$

हल : हमें मालूम है कि यदि $LHS = RHS$ तो एक क्रमित जोड़ी का मूल्य प्रतिस्थापन करने से हल प्राप्त होता है।

दिया गया समीकरण $x + 2y = 4$

क्र. सं.	क्रमित युग्म	LHS का मूल्य	RHS का मूल्य	LHS और RHS में संबंध	हल है/ हल नहीं है।
1.	$(0, 2)$	$x + 2y = 0 + (2 \times 2)$ $= 0 + 4 = 4$	4	$\therefore LHS = RHS$	$\therefore (0, 2)$ युग्म हल है।
2.	$(2, 0)$	$x + 2y = 2 + (2 \times 0)$ $= 2 + 0 = 2$	4		$(2, 0)$ क्रमित युग्म हल नहीं है।
3.	$(4, 0)$	$x + 2y = 4 + (2 \times 0)$ $= 4 + 0 = 4$	4	$LHS = RHS$	—
4.	$(\sqrt{2}, -3\sqrt{2})$	$x + 2y = \sqrt{2} + 2(-3\sqrt{2})$ $= \sqrt{2} - 6\sqrt{2}$ $= -5\sqrt{2}$	—	$LHS \neq RHS$	$(\sqrt{2}, -3\sqrt{2})$ क्रमित युग्म नहीं है।
5.	$(1, 1)$	—	4	$LHS \neq RHS$	$(1, 1)$ क्रमित युग्म हल नहीं है।
6.	—	$x + 2y = -2 + (2 \times 3)$ $= -2 + 6 = 4$	4	$LHS = RHS$	$(-2, 3)$ क्रमित युग्म हल है।

उदाहरण-8. यदि $x = 3$, $y = 2$ समीकरण $5x - 7y = k$ का हल है तो k का मूल्य ज्ञात कीजिए और परिणामी (result) समीकरण को लिखिए।

हल : यदि $x = 3$, $y = 2$ समीकरण का हल है,

$$\begin{aligned} 5x - 7y &= k \text{ तो } 5 \times 3 - 7 \times 2 = k \\ \Rightarrow 15 - 14 &= k \\ \Rightarrow 1 &= k \\ \therefore k &= 1 \end{aligned}$$

परिणामी समीकरण $5x - 7y = 1$.



उदाहरण-9. यदि $x = 2k + 1$ और $y = k$ समीकरण $5x + 3y - 7 = 0$ को संतुष्ट करता है तो k का मूल्य ज्ञात करो।

हल : $x = 2k + 1$ और $y = k$ दिया गया है। समीकरण $5x + 3y - 7 = 0$ का मूल्य x और y का मूल्य प्रतिस्थापित करने से,

$$\begin{aligned} \Rightarrow 5(2k + 1) + 3k - 7 &= 0 \\ \Rightarrow 10k + 5 + 3k - 7 &= 0 \\ \Rightarrow 13k - 2 &= 0 \text{ (रेखीय समीकरण एक चर राशी में).} \\ \Rightarrow 13k &= 2 \\ \therefore k &= \frac{2}{13} \end{aligned}$$

अभ्यास - 6.2

1. दिए गए समीकरण में तीन अलग-अलग हल ज्ञात कीजिए।

i) $3x + 4y = 7$

ii) $y = 6x$

iii) $2x - y = 7$

iv) $13x - 12y = 25$

v) $10x + 11y = 21$

vi) $x + y = 0$

2. यदि $(0, a)$ और $(b, 0)$ दिए गए रेखिक समीकरण के हल हैं तो 'a' और 'b' ज्ञात करो :-

i) $8x - y = 34$

ii) $3x = 7y - 21$

iii) $5x - 2y + 3 = 0$

3. $2x - 5y = 10$ इस समीकरण का हल निम्न में से कौनसा है?

i) $(0, 2)$

ii) $(0, -2)$

iii) $(5, 0)$

iv) $(2\sqrt{3}, -\sqrt{3})$

v) $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$

4. 'k' का मूल्य ज्ञात करो, यदि $x = 2$, $y = 1$ समीकरण $2x + 3y = k$ को परिणामी समीकरण के और दो हल ज्ञात कीजिए।



5. यदि $x = 2 - a$ और $y = 2 + a$ समीकरण $3x - 2y + 6 = 0$ का साधन समुच्चय है। तो 'a' का मूल्य ज्ञात कीजिए।
6. यदि $x = 1, y = 1$ समीकरण $3x + ay = 6$ के साधन समुच्चय है तो 'a' का मूल्य ज्ञात कीजिए।
7. पाँच अलग-अलग दो चर राशियों के रैखिक समीकरण ज्ञात करो। प्रत्येक के साधन समुच्चय ज्ञात कीजिए।

6.4 दो चर राशियों के रैखिक समीकरणों के आलेख

हमने देखा कि प्रत्येक दो चर राशि वाले समीकरणों के एक से अनेक हल प्राप्त होते हैं। क्या हम रैखिक समीकरणों के संभव साधन समुच्चयों को आलेख पर दर्शा सकते हैं? हम जानते हैं कि प्रत्येक साधन समुच्चय वास्तविक संख्याओं का क्रमित युग्म होता है अतः हम आलेख पर बिन्दु रूप में दर्शा सकते हैं।

दो चर राशियों के रैखिक समीकरण $4 = 2x + y$ में, उसे $y = 4 - 2x$ इस प्रकार से भी लिख सकते। इस समीकरण में 'y' का मूल्य ज्ञात कर सकते हैं x के मूल्य के लिए। उदाहरण के लिए यदि $x = 2$ तो $y = 0$, इसीलिए $(2, 0)$ साधन समुच्चय है। इस प्रकार से कई साधन समुच्चय हल कर सकते हैं। इस प्रकार साधन समुच्चय तालिका में दिए गए 'x' के मूल्य और y का मूल्य ज्ञात कीजिए।

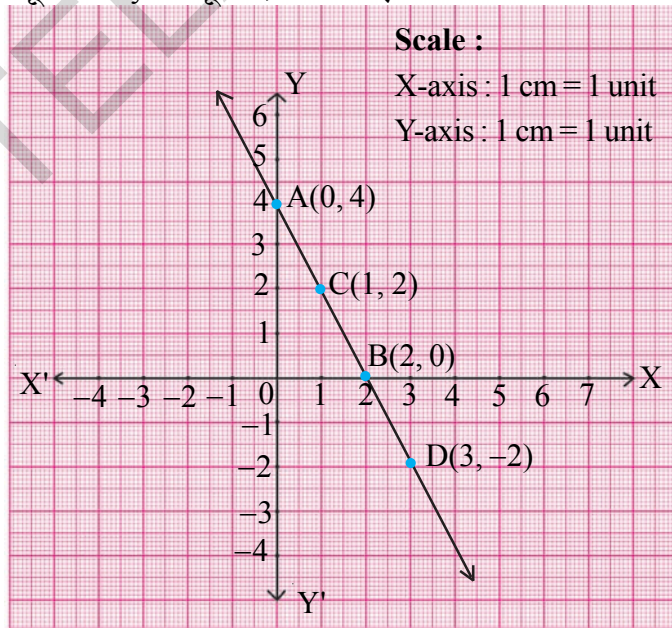
तालिका द्वारा हल :

x	$y = 4 - 2x$	(x, y)
0	$y = 4 - 2(0) = 4$	(0, 4)
2	$y = 4 - 2(2) = 0$	(2, 0)
1	$y = 4 - 2(1) = 2$	(1, 2)
3	$y = 4 - 2(3) = -2$	(3, -2)

हम यह देखते हैं कि प्रत्येक x के लिए एक मूल्य y है। मानलो X-अक्ष में 'x' का मूल्य लो और Y-अक्ष में y का मूल्य लो। $(0, 4)$, $(2, 0)$, $(1, 2)$ और $(3, -2)$ इन सभी बिन्दुओं को आलेख पर निरूपित करो। इन में से किन्हीं दो बिन्दुओं को जोड़ने पर रेखा AD प्राप्त होती है।

क्या दूसरे अन्य बिन्दु भी AB रेखा पर होंगे?

क्या $(4, -4)$ बिन्दु भी रेखा पर होगा या नहीं?



यदि $x = 0$;

$$y = 4 - 2x = 4 - 2(0) = 4$$

यदि $x = 2$

$$y = 4 - 2(2) = 0$$

AD रेखा पर कोई और बिन्दु लो और बताओ कि क्या यह क्रमित युग्म समीकरण को संतुष्ट करते हैं या नहीं?

कोई एक बिन्दु लीजिए जो AD पर नहीं है। (1, 1) क्या यह समीकरण को संतुष्ट करता?

क्या आप कोई बिन्दु जोAD पर नहीं है उसे मालूम कर सकते जो समीकरण को संतुष्ट करता हो।

निम्नलिखित निरिक्षणों को देखो :

1. सभी रेखीय समीकरणों के हल रेखा पर स्थित होते हैं।
2. रेखा पर स्थित प्रत्येक बिन्दु उस रेखिक समीकरण का हल होता है।
3. जो बिन्दु रेखा पर स्थित नहीं होता वह उस समीकरण का हल नहीं होता है।
4. बिन्दुओं का समूह जो रेखिक समीकरण का हल होता है। उसी से आलेख बनता है।



हमने देखा कि दो चरराशि वाले रेखिक समीकरणों का आलेखीय प्रदर्शन एक सरल रेखा होता है। अतः $ax + by + c = 0$ (जहाँ a तथा b दोनों एक साथ शून्य नहीं होते हैं) उसे दो चरराशि वाला रेखिक समीकरण कहते हैं।

6.4.1 रेखिक समीकरण के आलेख

चरण :

1. रेखीय समीकरण को लिखो।
2. $x = 0$ समीकरण में लिखिए और संलग्न y का मूल्य ज्ञात करो।
3. $y = 0$ समीकरण में लिखिए और संलग्न ' x ' का मूल्य ज्ञात करो।
4. चरण 2 और 3 में x और y के निर्देशांक को (x, y) के रूप में लिखेंगे।
5. इन बिन्दुओं को ग्राफ पेपर पर अंकित कीजिए।
6. इन बिन्दुओं को मिलाइए।

अतः खिंची गयी रेखा दो चर राशि वाले रेखिक समीकरण का आलेख होगा। रेखा की जाँच के लिए कुछ और बिन्दुओं को प्रतिस्थापित कीजिए। अधिक साधन समुच्चयों के लिए ' x ' के अलग-अलग मूल्यों को लगाकर उससे संबंधित ' y ' का मूल्य ज्ञात कीजिए।

प्रयत्न कीजिए



एक ग्राफ पेपर लो, (2, 4) बिन्दु को निरूपित करो, उसमें से गुजरने वाली रेखा खींचो। अब इन प्रश्नों के उत्तर दो।

1. क्या एक और रेखा (2, 4) बिन्दु में गुजरने वाली खींच सकते हैं?
2. इस प्रकार के और कितनी रेखाएँ खींच सकते हैं?
3. (2, 4) क्रमित युग्म के दो चर राशियों के कितने रेखीय समीकरण होंगे।

उदाहरण-10. $y - 2x = 4$ समीकरण का आलेख खींचो और निम्न प्रश्नों के उत्तर दो।

- (i) क्या (2, 8) बिन्दु रेखा पर होगा? (2, 8) समीकरण का हल है? (2, 8) बिन्दु समीकरण में लगाकर देखिए।
- (ii) क्या (4, 2) बिन्दु रेखा पर होगा? क्या (4, 2) समीकरण का हल है क्या? बीजगणितीय विधि से हल करो।
- (iii) आलेख द्वारा और तीन साधन समुच्चय ज्ञात कीजिए?

हल : $y - 2x = 4 \Rightarrow y = 2x + 4$ दिया गया।

तालिका द्वारा हल

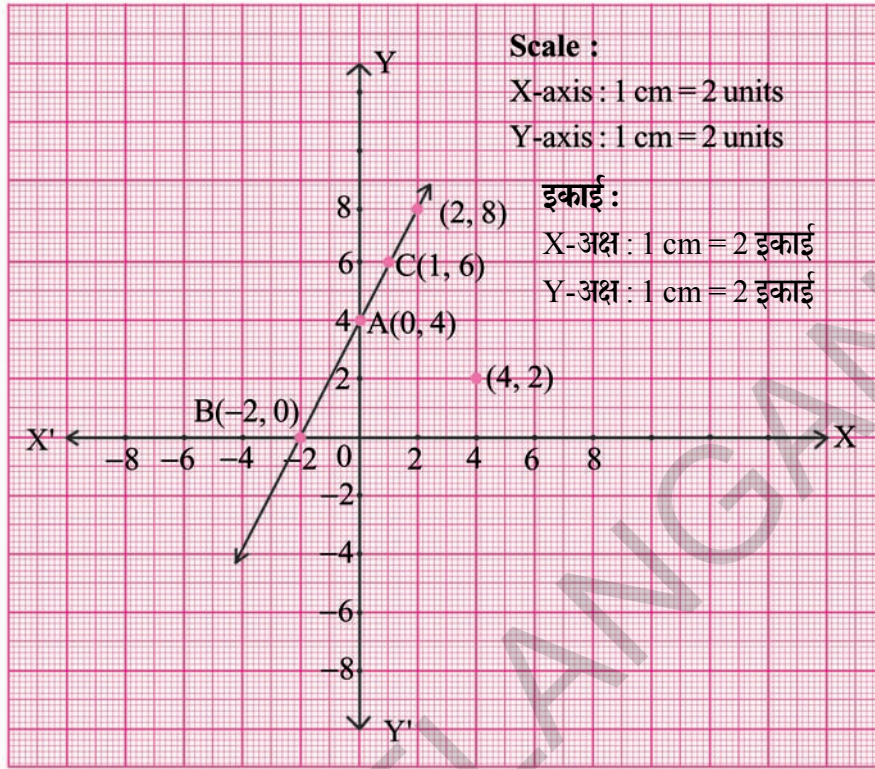
x	$y = 2x + 4$	(x, y)	बिन्दु
0	$y = 2(0) + 4 = 4$	(0, 4)	A(0, 4)
2	$y = 2(-2) + 4 = 0$	(-2, 0)	B(-2, 0)
1	$y = 2(1) + 4 = 6$	(1, 6)	C(1, 6)

A, B और C बिन्दुओं को आलेख में निरूपित करो उन्हें मिलाओ BC आलेख में दर्शाए अनुसार यह रेखा दिए गए समीकरण $y - 2x = 4$ का हल है।

- (i) (2, 8) बिन्दु को आलेख पर निरूपित करो। आलेख से यह निरूपित होता है कि (2, 8) बिन्दु रेखा पर स्थित होगा।

बीजगणितिय हल द्वारा (2, 8) बिन्दु समीकरण में लगाने पर,

$$\text{LHS} = y - 2x = 8 - 2 \times 2 = 8 - 4 = 4 = \text{RHS, अतः (2, 8) यह हल है।}$$



- (ii) (4, 2) बिन्दु को आलेख पर निरूपित करो। हम यह देखते हैं कि (4, 2) यह रेखा पर नहीं है।
 बीजगणित द्वारा हल करने पर : (4, 2) दिए गए समीकरण में लिखने पर,

$$\text{LHS} = y - 2x = 2 - 2 \times 4 = 2 - 8 = -6 \neq \text{RHS, अतः (4, 2) यह हल नहीं है।}$$

- (iii) हमें मालूम है कि रेखा पर स्थित प्रत्येक बिन्दु उस रेखा के समीकरण का हल होता है। (-4, -4), (-3, -2) तथा (-1, 2) ये दिए गए बिन्दु समीकरण $y - 2x = 4$ के हल हैं। जब कि (1, 5) (2, 1) तथा (-4, 1) बिन्दु समीकरण के हल नहीं हो सकते। क्योंकि ये बिन्दु रेखा पर स्थित नहीं हैं।

उदाहरण (i) (1, 5);;

उदाहरण-11. $x - 2y = 3$ समीकरण को आलेख द्वारा निरूपित करो।

आलेख से द्वारा (i) (x, y) का हल जहाँ $x = -5$

(ii) (x, y) का हल जहाँ $y = 0$

(iii) (x, y) का हल जहाँ $x = 0$

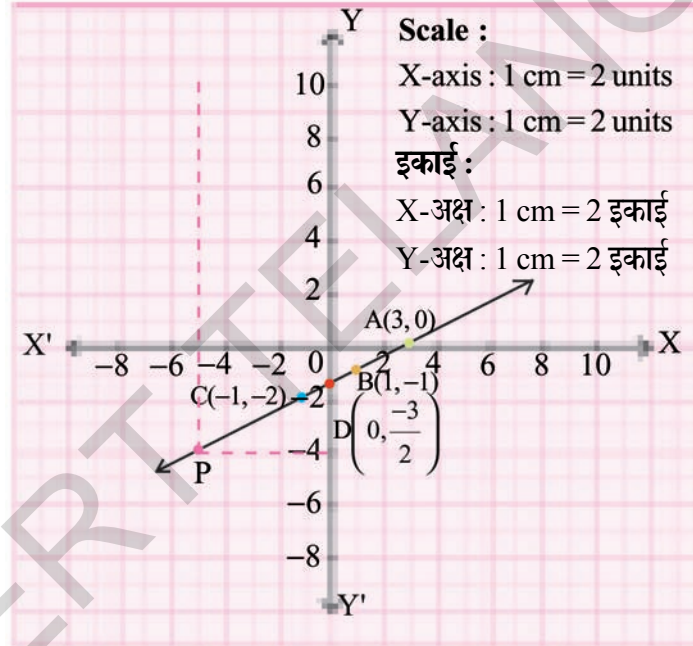
हल : $x - 2y = 3 \Rightarrow y = \frac{x-3}{2}$



तालिका द्वारा हल

x	$y = \frac{x-3}{2}$	(x, y)	बिन्दू
3	$y = \frac{3-3}{2} = 0$	(3, 0)	A
1	$y = \frac{1-3}{2} = -1$	(1, -1)	B
-1	$y = \frac{-1-3}{2} = -2$	(-1, -2)	C

A, B, C बिन्दुओं को आलेख पर निरूपित करो और उन्हें मिलाइए सभी बिन्दु एक सरल रेखा पर स्थित होंगे, जैसे कि चित्र में बताया गया है, $x - 2y = 3$ यह समीकरण दिए गए आलेख का हल है।



- (i) हम (x, y) का हल मालूम करेंगे जहाँ $x = -5$, हमें सरल रेखा पर वह बिन्दु मालूम करना होगा जहाँ $(x\text{-coordinate}) = -5$. इस प्रकार के बिन्दु मालूम करने के लिए y -अक्ष के समानांतर $x = -5$ रेखा खींचना चाहिए। (आलेख में बिन्दुओं द्वारा दर्शाया गया)। यह रेखा आलेख में 'P' बिन्दु पर मिलती है, जहाँ से हमें एक और समानांतर रेखा खींचना है जो X -अक्ष के समानांतर है और Y -अक्ष को $y = -4$ पर मिलती है।

P के क्रमित युग्म $= (-5, -4)$

$P(-5, -4)$ यह सरल रेखा $x - 2y = 3$ पर स्थित होगा $x - 2y = 3$ का हल है।

- (ii) (x, y) का हल मालूम करना है जहाँ $y = 0$.

$y = 0$, यह बिन्दु $(x, 0)$ X -अक्ष पर है। अतः हमें वह बिन्दु ज्ञात करना है जो X -अक्ष पर है और $x - 2y = 3$ के आलेख पर है।

आलेख से यह निरूपित होता है कि $(3, 0)$ निर्धारित बिन्दू है।

$\therefore (3, 0)$ हल है।

(iii) (x, y) का हल ज्ञात करो जब कि $x = 0$.

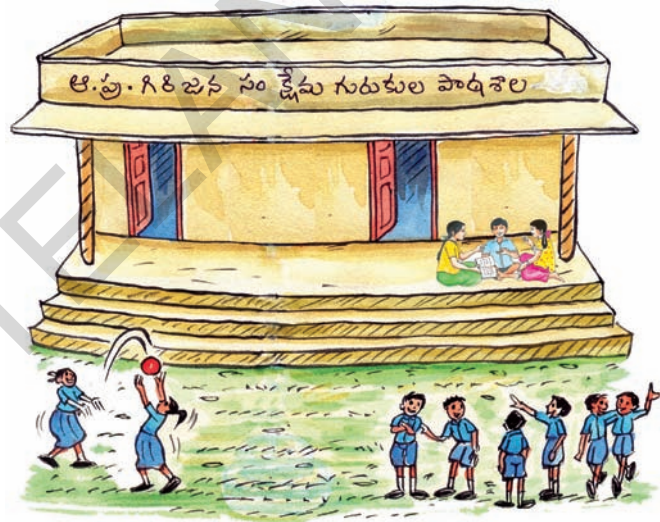
$x = 0$ यह बिन्दू $(0, y)$ Y-अक्ष पर होगा। हमें वह बिन्दू मालूम करना है जो Y-अक्ष पर होगा और आलेख $x - 2y = 3$ पर होगा।

आलेख द्वारा यह स्पष्ट है कि $\left(0, \frac{-3}{2}\right)$ बिन्दू है।

$\therefore$ हल $\left(0, \frac{-3}{2}\right)$ है।

उदाहरण-12. किसी विद्यालय में 25% छात्र लड़कियाँ और शेष लड़के हैं। एक समीकरण द्वारा आलेख का निरूपण करो। आलेख को देखते हुए निम्न प्रश्नों के उत्तर दो।

- यदि लड़कियाँ 25 हो तो लड़कों की संख्या ज्ञात करो।
- यदि लड़के 45 हो तो लड़कियों की संख्या मालूम करो।
- लड़कों के लिए तीन अलग-अलग मूल्य लो और लड़कियों की संख्या मालूम करो। उसी संख्या प्रकार 3 तीन अलग-अलग संख्याएँ लड़कियों के लिए लेकर लड़कों की संख्या ज्ञात करो।



हल : मानलो लड़कियों की संख्या 'x' और लड़कों की संख्या 'y'

कुल छात्रों की संख्या $= x + y$

दिए गए सूचना के अनुसार

लड़कियों की संख्या छात्रों की संख्या का 25% है।

x का $(x + y)$ का 25%

$$= (x + y) \text{ का } \frac{25}{100} = \frac{1}{4} (x + y)$$



$$x = \frac{1}{4}(x + y)$$

$$4x = x + y$$

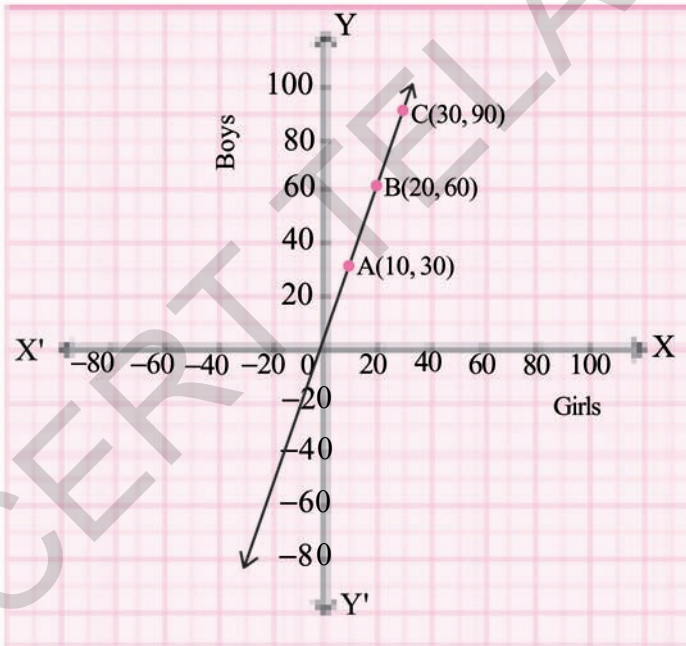
$$3x = y$$

$3x = y$ या $3x - y = 0$ यह अपेक्षित समीकरण है।

तालिका द्वारा हल

x	y = 3x	(x, y)	बिन्दु
10	30	(10, 30)	A
20	60	(20, 60)	B
30	90	(30, 90)	C

A, B और C बिन्दु को आलेख पर निरूपित करो और उन्हें मिलाओ (जोड़ो) हमें एक सरल रेखा प्राप्त होगी जो इस प्रकार है।



इकाई :

X-अक्ष : 1 cm = 20 इकाई

Y-अक्ष : 1 cm = 20 इकाई

आलेख से हमें यह देखते हैं कि,

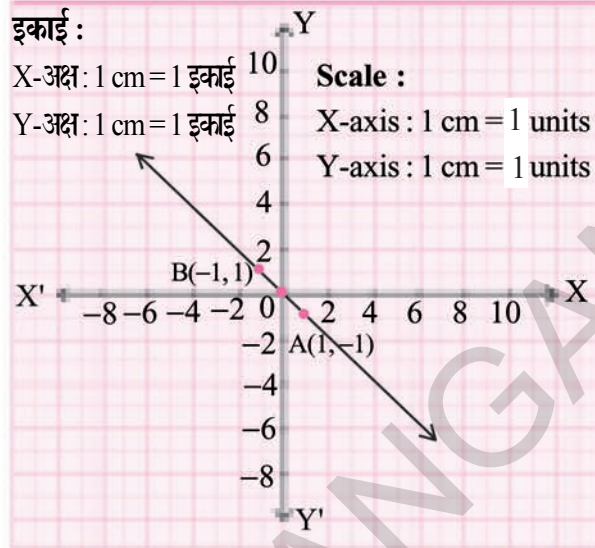
- यदि लड़कियों की संख्या 25 है तो लड़कों की संख्या 75.
- यदि लड़कों की संख्या 45 है तो लड़कियों की संख्या 15.
- लड़कियों के लिए कोई संख्या चुन लो और लड़कों की संख्या ज्ञात करो।

उसी प्रकार लड़कों की संख्या के लिए कोई संख्या चुन लो और लड़कियों की संख्या मालूम करो। यहाँ हम सरल रेखा और आलेख को देखते हैं। वह रेखा जो मूल बिन्दु से गुजरती है और वह $y = mx$ रेखा के रूप में है जहाँ m वास्तविक संख्या है जो मूल बिन्दु से गुजरती है।

उदाहरण-13. नीचे दिए गए प्रत्येक आलेख के, चार समीकरण दिए गए हैं। इनमें से कौनसे समीकरण दिए गए आलेख का निरूपण करते हैं?

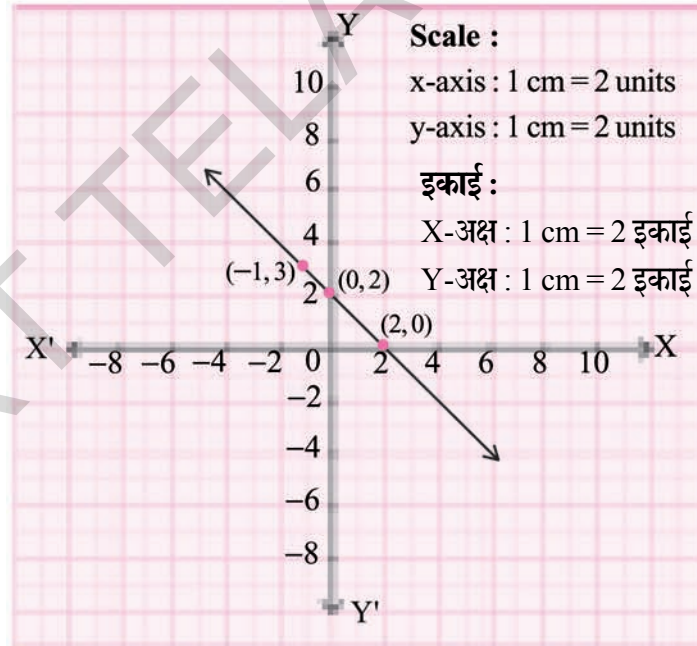
(i) समीकरण इस प्रकार है।

- A) $y = x$
- B) $x + y = 0$
- C) $y = 2x$
- D) $2 + 3y = 7x$



(ii) समीकरण

- A) $y = x + 2$
- B) $y = x - 2$
- C) $y = -x + 2$
- D) $x + 2y = 6$



हल :

- (i) आलेख द्वारा हम देख सकते हैं कि $(1, -1)$, $(0, 0)$, $(-1, 1)$ एक ही रेखा पर होंगे। आपेक्षित समीकरण के हल निम्न बिन्दु है। यदि हम निम्न बिन्दुओं को आपेक्षित समीकरण में लगाने पर संतुष्ट होगा। हमें एक समीकरण मालूम करना है जो इन जोड़ियों को संतुष्ट करता हो। यदि हम $(1, -1)$ बिन्दु पहले समीकरण $y = x$ में लगाने पर संतुष्ट नहीं होगा। अतः $y = x$ यह आपेक्षित समीकरण नहीं है। $(1, -1)$ बिन्दु $x + y = 0$ में लगाने पर, यह समीकरण को संतुष्ट करता है। इस तरह सभी तीन बिन्दु दूसरे समीकरण को संतुष्ट करते हैं। अतः $x + y = 0$ आपेक्षित समीकरण है।

जाँच करेंगे कि क्या अब हम $y = 2x$ और $2 + 3y = 7x$ को $(1, -1)$, $(0, 0)$ और $(-1, 1)$ संतुष्ट करते हैं। हम देखते हैं कि एक भी जोड़ी संतुष्ट नहीं करती तीनों बिन्दुओं को छोड़ दो। अतः यह समीकरण को संतुष्ट नहीं करते हैं।

- (ii) रेखा पर स्थित बिन्दु $(2, 0)$, $(0, 2)$ और $(-1, 3)$ हैं। सभी बिन्दु पहले और दूसरे समीकरण को संतुष्ट नहीं करते। मानलो तीसरा समीकरण $y = -x + 2$ लो। ऊपर दिए गए तीन बिन्दु समीकरण में लिखने पर समीकरण संतुष्ट होगा। अतः आपेक्षित समीकरण $y = -x + 2$ होगा। बताओ कि $x + 2y = 6$ समीकरण को दिए गए बिन्दु संतुष्ट करते क्या?

अभ्यास - 6.3



1. प्रत्येक रेखीय समीकरण को आलेख द्वारा दर्शाओ।

i) $2y = -x + 1$ ii) $-x + y = 6$ iii) $3x + 5y = 15$ iv) $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 3$

2. प्रत्येक रेखीय समीकरण को आलेख द्वारा दर्शाओ और निम्न प्रश्नों के उत्तर दो।

i) $y = x$ ii) $y = 2x$ iii) $y = -2x$ iv) $y = 3x$ v) $y = -3x$

- i) क्या सभी समीकरण $y = mx$ के रूप में हैं? m वास्तविक संख्या है?
ii) क्या सभी आलेख मूल बिन्दु से गुजरती है क्या?
iii) इन आलेखों से आप क्या समझते हो?

3. $2x + 3y = 11$ समीकरण के आलेख खींचो। जब $x = 1$ हो तो आलेख की सहायता से y ज्ञात करो।

4. $y - x = 2$ समीकरण का आलेख खींचो। आलेख द्वारा ज्ञात कीजिए।

- i) y का मूल्य ज्ञात करो जब कि $x = 4$
ii) x का मूल्य ज्ञात करो जब कि $y = -3$

5. $2x + 3y = 12$ समीकरण का आलेख खींचो। आलेख से हल ज्ञात करो।

- i) y -का निर्देशांक 3
ii) x -का निर्देशांक -3

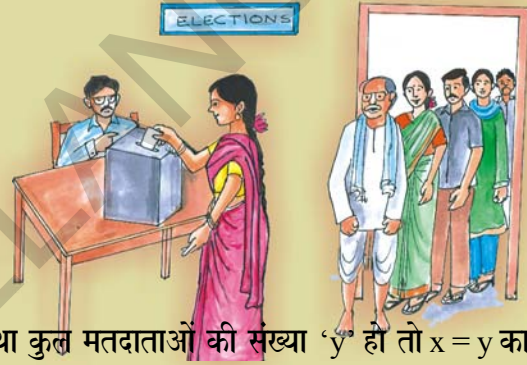
6. नीचे दिए गए प्रत्येक समीकरणों के आलेख खींचो और निर्देशांक अक्षों को काटने वाले बिन्दुओं को ज्ञात कीजिए।

i) $6x - 3y = 12$ ii) $-x + 4y = 8$ iii) $3x + 2y + 6 = 0$

7. रजिया और प्रीति, नवीं कक्षा के दो छात्रों ने प्राकृतिक आपदाओं से ग्रसित लोगों के लिए कुल 1000 रु. प्रधानमंत्री सहायता कोष में जमा करवाए रैखिक समीकरण लिख कर कथन को आलेख द्वारा समझाओ।
8. गोपय्या ने धान तथा गेहूँ के बीजों को दो खेतों में बोया जिसका कुल क्षेत्रफल 5000 वर्ग मी है। इसका रैखिक समीकरण लिख कर आलेख द्वारा समझाओ।
9. 6 कि.ग्रा द्रव्यमान वाले पिण्ड पर लगाया गया बल उसमें उत्पन्न त्वरण के समानुपाती होता है। इस कथन का समीकरण आलेख द्वारा समझाइए।
10. एक चट्टान से एक पत्थर गिरता है, पत्थर का वेग $V = 9.8t$ दिया गया है आलेख उतार कर '4' सेकेण्ड बाद उसका वेग क्या होगा बताइए।
11. एक चुनाव केन्द्र में 60% लोगों ने वोट डाले। इसका समीकरण बनाकर आलेख उतरिए और आलेख द्वारा निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिए।
 - (i) यदि 1200 लोगों ने वोट डालें हो तो कुल मतदाताओं की संख्या ज्ञात कीजिए।
 - (ii) यदि कुल मतदाताओं की संख्या 800 हो तो वोट डालने वालों की संख्या ज्ञात कीजिए।

[सूचना: यदि वोट डालने वालों की संख्या 'x' तथा कुल मतदाताओं की संख्या 'y' हो तो $x = y$ का 60%]
12. जब पिता 25 वर्ष के थे। तब रुपा का जन्म हुआ। इस कथन का समीकरण लिखकर आलेख खींचो और आलेख से निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिए।
 - (i) जब रुपा 25 वर्ष की होगी तब पिता की आयु क्या होगी ?
 - (ii) जब पिता की आयु 40 वर्ष होगी तब रुपा की आयु क्या होगी ?
13. एक आटो 15 रु. प्रति किलोमीटर पहले एक किलोमीटर के लिए, और आगे प्रति किलोमीटर को 8 रु. से चार्ज करता। 'x' km. दूरी को 'y' रुपये दिए गए हो तो।

रेखीय समीकरण लिख कर आलेख द्वारा दर्शाओ आलेख की सहायता से बताओ कि यदि 55 रु. आटो को दिए गए तो दूरी कितनी होगी? तथा 7 कि.मी. के लिए कितने रुपये देने होंगे?
14. एक पुस्तकालय में पहले तीन दिन के लिए और उसके आगे के दिन के लिए कुछ रकम निर्धारित कि गई है। जॉन ने सात दिन पुस्तक अपने पास रखी और 27 रुपये दिये। यदि निर्धारित रकम x रु. और अगले प्रत्येक दिन का हिसाब y रु. हो तो रेखीय समीकरण लिख कर आलेख द्वारा दर्शाओ। आलेख की सहायता से प्रति दिन की रकम क्या होगी? यदि प्रति दिन 4/- रु. का किराया निर्धारित हो तो उसका स्थिर मूल्य क्या होगा? जब कि रकम 7 रु हो?



15. रेल्वे स्टेशन में पहले दो घंटे के लिए कार पार्किंग के लिए 50 रु. और आगे प्रति घंटे के लिए 10 रु. निर्धारित किया गया हो तो निम्न समीकरण लिख कर आलेख द्वारा दर्शाओ। आलेख द्वारा निम्न लिखित समय के लिए मूल्य ज्ञात कीजिए।

(i) 3 घंटे के लिए (ii) 6 घंटे के लिए

(iii) कितने घंटे के लिए रेखा ने कार पार्किंग को 80 रु दिए।

16. समीरा एक कार सम वेग 60 कि.मी. प्र.घ. से चला रही है तो दूरी - समय को आलेख पर खींचिए समीरा द्वारा तय की गई दूरी को ज्ञात कीजिए।

(i) $1\frac{1}{2}$ घंटे

(ii) 2 घंटे

(iii) $3\frac{1}{2}$ घंटे

17. हाइड्रोजन और आक्सीजन का परिमाण पानी में 1:8 है तो हाइड्रोजन और आक्सीजन का समीकरण लिख कर आलेख द्वारा दर्शाओ। आलेख से 12 ग्रा आक्सीजन के लिए हाइड्रोजन का परिमाण और $\frac{3}{2}$ ग्रा हाइड्रोजन के लिए आक्सीजन का परिमाण ज्ञात कीजिए।

[सूचना: हाइड्रोजन तथा आक्सीजन के परिमाणों को क्रमशः 'x' तथा 'y' लिजिए तब $x : y = 1 : 8 \Rightarrow 8x = y$]

18. 28 लिटर मिश्रण में दूध और पानी का अनुपात 5:2 है। मिश्रण और दूध का समीकरण लिख कर आलेख खींचो। आलेख को देखते हुए मिश्रण में दूध का परिमाण मालूम करो।

[Hint: मिश्रण और दूध का अनुपात = $5 + 2 : 5 = 7 : 5$]

19. USA और केनडा इन देशों में तापमान फैनहाइट में मापते हैं जब कि भारत में सेलसियस से मापते हैं। यहाँ रेखीय समीकरण को फैनहाइट से सेलसियस $F = \left(\frac{9}{5}\right)C + 32$ में बदलने पर।

(i) x-अक्ष पर सेलसियस और Y-अक्ष पर फारनहैट से रेखीय समीकरण का आलेख उतारो।

(ii) यदि तापमान 30°C हो तो फारनहैट में तापमान क्या होगा?

(iii) यदि तापमान 95°F हो तो सेंटीग्रेड के तापमान क्या होगा?

(iv) क्या कोई अंकिय तापमान दोनों फारनहाइट और सेलसियस में समान होंगे? यदि हाँ तो ज्ञात कीजिए?

6.5 X-अक्ष और Y-अक्ष के समानांतर रेखाओं के समीकरण

अब समीकरण $x = 3$ लीजिए। यदि इसे हम केवल एक चर राशि वाला समीकरण मान लें, तो इसका एक अद्वितीय हल $x = 3$ होता है, जो संख्या रेखा पर स्थित एक बिन्दु है।



यदि इसे दो चर राशि वाला समीकरण मान लेने पर इसे $x + 0.y - 3 = 0$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

इसके अपरिमित रूप से अनेक हल होंगे हैं। इसमें कुछ और उदाहरण मालूम करेंगे। यहाँ y का गुणांक शून्य है। इसी प्रकार सभी y के मूल्यों के लिए, $x = 3$ ।

तालिका का हल

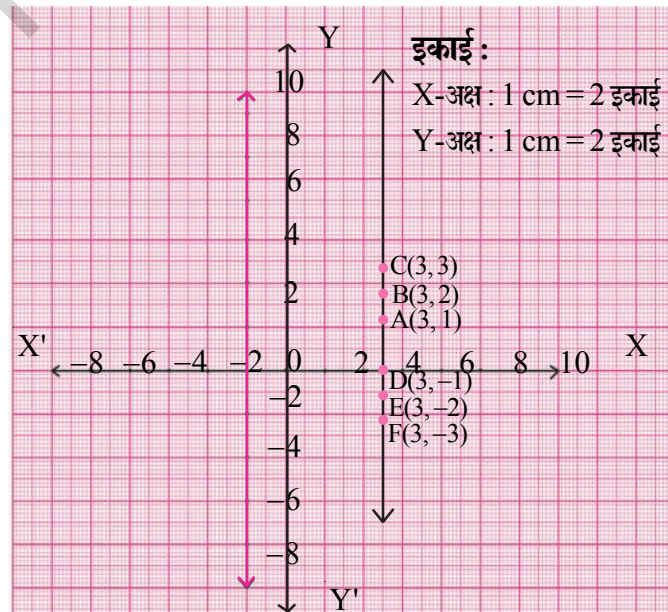
x	3	3	3	3	3	3	
y	1	2	3	-1	-2	-3	
(x, y)	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, -1)	(3, -2)	(3, -3)	
Points	A	B	C	D	E	F	

इस तालिका से यह मालूम होता है कि समीकरण के अपरिमित रूप से अनेक हल होते हैं। जैसे $(3, a)$ जहाँ a वास्तविक संख्या है।

अब आलेख द्वारा हल कीजिए
आप आलेख द्वारा क्या समझेंगे?

क्या यह सरल रेखा है? क्या यह रेखा है या कोई अक्ष है? यह रेखा सरल रेखा है जो Y-अक्ष के समानांतर है?

y -अक्ष से कितनी दूरी पर है?



इस प्रकार $x = 3$ का आलेख, y -अक्ष के समानांतर और 3 इकाई दूरी पर है।

प्रयत्न कीजिए



1. i) निम्न लिखित समीकरणों को आलेख द्वारा निरूपित करो :-
 a) $x = 2$ b) $x = -2$ c) $x = 4$ d) $x = -4$
- ii) क्या सभी समीकरणों के आलेख Y-अक्ष के समानांतर हैं?
- iii) प्रत्येक स्थिति में आलेख और Y-अक्ष के बीच की दूरी ज्ञात करो।
2. i) निम्न समीकरणों को आलेख द्वारा दर्शाओ।
 a) $y = 2$ b) $y = -2$ c) $y = 3$ d) $y = -3$
- ii) क्या ये सभी X-अक्ष के समानांतर हैं?
- iii) प्रत्येक स्थिति में रेखा तथा X-अक्ष के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

उपरोक्त निरिक्षणों से यह निष्कर्ष निकलता है:

1. $x = k$ का आलेख Y-अक्ष के समानांतर रेखा होगी जो k इकाई दूरी पर होगी तथा बिन्दु $(k, 0)$ से गुजरती है।
2. $y = k$ का आलेख X-अक्ष के समानांतर रेखा होगी जो k इकाई दूरी पर होगी तथा बिन्दु $(0, k)$ से गुजरती है।

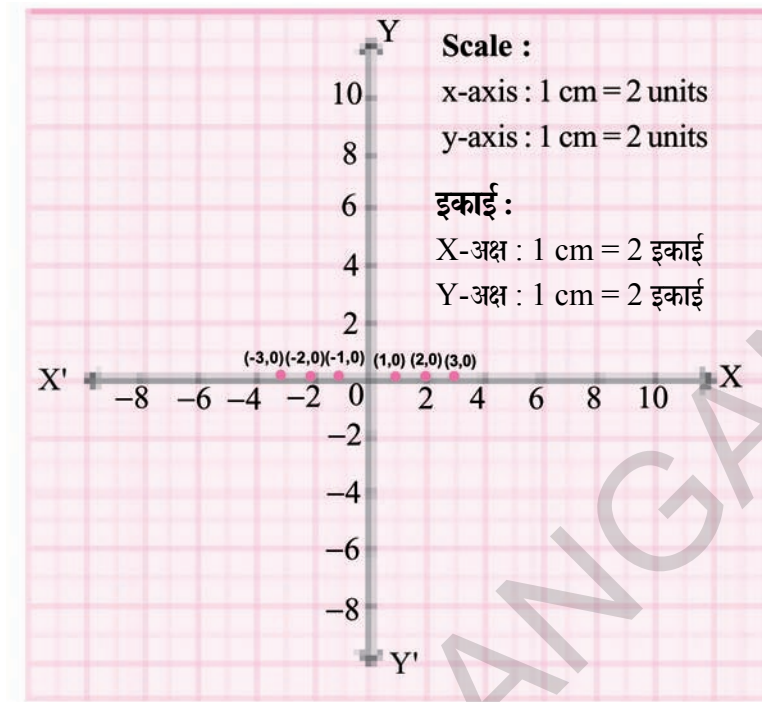
6.5.1 X तथा Y अक्ष के समीकरण:

समीकरण $y = 0$ को देखिए। उसे $x + 0 = 0$ । अब हम इसका आलेख खींचेंगे।

हल की तालिका

x	1	2	3	-1	-2	
y	0	0	0	0	0	
(x, y)	(1, 0)	(2, 0)	(3, 0)	(-1, 0)	(-2, 0)	
Points	A	B	C	D	E	

इन सभी बिन्दुओं को ग्राफ पेपर पर डालकर उसका चित्र बनाइए इस आलेख में आपने क्या देखा?



हम यह देखते हैं कि सभी बिन्दु X-अक्ष पर है और y-निर्देशांक (coordinate) के सभी बिन्दु '0' पर है।

इसलिए समीकरण $y = 0$, X-अक्ष पर है। दूसरे शब्दों में X-अक्ष का समीकरण $y = 0$ होता है।

प्रयत्न कीजिए

y-अक्ष का समीकरण ज्ञात करो।



अभ्यास - 6.4

1. निम्न समीकरणों को आलेख द्वारा दर्शाओ :

a) संख्या रेखा पर

और

b) कार्तीय तल पर

i) $x = 3$

ii) $y + 3 = 0$

iii) $y = 4$

iv) $2x - 9 = 0$

v) $3x + 5 = 0$

2. $2x - 11 = 0$ समीकरण को आलेख द्वारा हल करो।

i) एक चर राशि से

ii) दो चर राशियों से



3. समीकरण $3x + 2 = 8x - 8$ को हल करो और हल को
 - i) संख्या रेखा पर
 - ii) कार्तीय तल पर (Cartesian plane)
4. उस रेखा का समीकरण ज्ञात करो जो X-अक्ष के समानान्तर है और इन बिन्दुओं से गुजरता है।
 - i) $(0, -3)$
 - ii) $(0, 4)$
 - iii) $(2, -5)$
 - iv) $(3, 4)$
5. उस रेखा का समीकरण ज्ञात करो जो Y-अक्ष के समानान्तर है और इन बिन्दु से गुजरता है।
 - i) $(-4, 0)$
 - ii) $(2, 0)$
 - iii) $(3, 5)$
 - iv) $(-4, -3)$
6. ऐसी तीन रेखाओं का समीकरण लिखो जो
 - (i) X-अक्ष के समानांतर
 - (ii) Y-अक्ष के समानान्तर

हमने क्या सीखा?



1. यदि रेखीय समीकरण में दो चर राशियां हो तो उसे दो चर राशियों का रेखीय समीकरण कहते हैं।
2. यदि कोई दो क्रमित युग्म 'x' और 'y' दो चर राशियों के रेखीय समीकरण को संतुष्ट करते हैं तो उसे हल (solution) कहते हैं।
3. दो चर राशि वाले रैखिक समीकरण के अनेक साधन समुच्चय होते हैं।
4. दो चर राशियों के रैखिक समीकरण का ग्राफ एक सरल रेखा होती है।
5. $y = mx$ का आलेख एक सरल रेखा होगी जो मूल बिन्दु से होकर गुजरती है।
6. $x = k$ का आलेख, Y-अक्ष के समानान्तर है k इकाई की दूरी पर और $(k, 0)$ बिन्दु से गुजरता है।
7. $y = k$ का आलेख, X-अक्ष के समानांतर है जो k इकाई के दूरी पर है और $(0, k)$ बिन्दु से गुजरती है।
8. X-अक्ष का समीकरण $y = 0$ है।
9. Y-अक्ष का समीकरण $x = 0$ है।

