1. **જો રેખાઓ $x = py + q$, $z = ry + s$ તથા $x = p'y + q'$, $z = r'y + s'$ પરસ્પર લંબ હોય તો સાબિત કરો કે $pp' + rr' + 1 = 0$.**

➡ અહીં $x = py + q$, $z = ry + s$

$\therefore x - a = py$ અને $z - s = ry$

$\therefore \frac{x-a}{p} = y$ અને $\frac{z-s}{r} = y$

$\therefore \frac{x-a}{p} = \frac{y}{1} = \frac{z-s}{r}$ ....(i)

આજ રીતે $\frac{x-a'}{p'} = \frac{y}{1} = \frac{z-s'}{r'}$ ....(ii)

સમીકરણ (i) ના રેખાની દિશા $l_1 = (p, 1, r)$

તથા સમી. (ii) ના રેખાની દિશા $l_2 = (p', 1, r')$ થાય.

અહીં રેખાઓ પરસ્પર લંબ છે.

$\therefore l_1 \cdot l_2 = 0$

$\therefore (p, 1, r) \cdot (p', 1, r') = 0$

$\therefore pp' + rr' + 1 = 0$

આમ માંગેલ પરિણામ સાબિત થાય છે.

2. **બિંદુ (1, –2, 3) માંથી પસાર થતી અને સદિશ $3\bar{i} - 2\bar{j} + 6\bar{k}$ ને સમાંતર રેખાનું સદિશ સમીકરણ મેળવો.**

➡ રેખા $\bar{a} = (1, -2, 3)$ માંથી પસાર થાય છે અને $\bar{b} = 3\bar{i} - 2\bar{j} + 6\bar{k}$ અર્થાત્ (3, –2, 6) ને સમાંતર છે.

$\therefore$ માંગેલ રેખાનું સમીકરણ $\bar{r} = \bar{a} + \lambda\bar{b}$ પ્રમાણે નીચે મુજબ થશે.

$\therefore \bar{r} = (1, -2, 3) + \lambda(3, -2, 6)$

હવે $\bar{r} = (x, y, z)$ લેતાં,

$\therefore (x, y, z) = (1, -2, 3) + \lambda(3, -2, 6)$ ......(i)

$\therefore (x, y, z) - (1, -2, 3) = \lambda(3, -2, 6)$

$\therefore (x - 1, y + 2, z - 3) = \lambda(3, -2, 6)$

$\therefore (x-1)\bar{i} + (y+2)\bar{j} + (z-3)\bar{k} = \lambda(3\bar{i} - 2\bar{j} + 6\bar{k})$

જે જરૂરી સમીકરણ છે.

<u>**NOTE :**</u> પરિણામ (i) પરથી

$(x, y, z) = (1 + 3\lambda, -2 - 2\lambda, 3 + 6\lambda)$

$\therefore x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} = (1+3\lambda)\bar{i} + (-2-2\lambda)\bar{j} + (3+6\lambda)\bar{k}$

આ સમીકરણને પણ જવાબ તરીકે લઈ શકાય.

3. **રેખાઓ $\bar{r} = 3\bar{i} - 2\bar{j} + 6\bar{k} + \lambda(2\bar{i} + \bar{j} + 2\bar{k})$ અને $\bar{r} = (2\bar{j} - 5\bar{k}) + \mu(6\bar{i} + 3\bar{j} + 2\bar{k})$ વચ્ચેનો ખૂણો મેળવો.**

➡ ધારો કે આપેલ બે રેખાઓ વચ્ચેનો ખૂણો θ છે.

હવે આપેલ રેખાઓના સમીકરણ પરથી

$\bar{b}_1 = 2\bar{i} + \bar{j} + 2\bar{k} = (2, 1, 2)$

અને $\bar{b}_2 = 6\bar{i} + 3\bar{j} + 2\bar{k} = (6, 3, 2)$ છે.

$\therefore b_1 b_2 = (2, 1, 2) \cdot (6, 3, 2)$
$= 2(6) + 1(3) + 2(2)$
$= 12 + 3 + 4$
$= 19$

તથા $|\bar{b}_1| = \sqrt{4 + 1 + 4} = \sqrt{9} = 3$

$|\bar{b}_2| = \sqrt{36 + 9 + 4} = \sqrt{49} = 7$

$$\therefore \cos\theta = \frac{|\bar{b}_1 \cdot \bar{b}_2|}{|\bar{b}_1| \cdot |\bar{b}_2|} = \frac{19}{3 \cdot 7} = \frac{19}{21}$$

$$\therefore \theta = \cos^{-1}\left(\frac{19}{21}\right)$$

આમ, આપેલ રેખાઓ વચ્ચેના ખૂણાનું મૂલ્ય $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{19}{21}\right)$ છે.

4. **બિંદુઓ A(2, 3, 4) અને B(4, 5, 8) ને જોડતા રેખાખંડ AB ના લંબદ્વિભાજક સમતલનું સમીકરણ મેળવો.**

➡ અહીં સમતલ એ $\overline{AB}$ નો લંબદ્વિભાજક છે.

$\therefore$ M = $\overline{AB}$ નું મધ્યબિંદુ

$$= \left(\frac{2+4}{2}, \frac{3+5}{2}, \frac{4+8}{2}\right)$$

$= (3, 4, 6)$

$\vec{N}$ = સમતલનો અભિલંબ

$= \vec{AB}$
$= B - A$
$= (4, 5, 8) - (2, 3, 4)$
$= (4 - 2, 5 - 3, 8 - 4)$
$= (2, 2, 4)$

$\therefore$ સમતલનું જરૂરી સમીકરણ $(\bar{r} - \bar{a}) \cdot \vec{N} = 0$ મુજબ મળે. જ્યાં $\bar{r} = (x, y, z)$ છે.

$\therefore ((x, y, z) - (3, 4, 6)) \cdot (2, 2, 4) = 0$
$\therefore (x - 3, y - 4, z - 6) \cdot (2, 2, 4) = 0$
$\therefore 2x - 6 + 2y - 8 + 4z - 24 = 0$
$\therefore 2x + 2y + 4z = 38$
$\therefore x + y + 2z = 19$

જે માંગેલ સમતલ છે.

5. **ઉગમબિંદુથી $3\sqrt{3}$ અંતરે આવેલ તથા સમતલનો અભિલંબ અક્ષો સાથે સમાન માપનો ખૂણો બનાવે તેવા સમતલનું સમીકરણ મેળવો.**

➡ અહીં સમતલ અક્ષો સાથે સમાન માપનો ખૂણો બનાવે છે.

$$\therefore \cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$\therefore$ સમતલનો અભિલંબ $\bar{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{k}$ થાય.

$$\therefore n = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$\therefore$ સમતલનું સમીકરણ $\bar{r} \cdot \bar{n} = p$ મુજબ મળે. જ્યાં $p =$ સમતલનું ઉગમબિંદુથી લંબ અંતર,

$$\therefore (x, y, z) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 3\sqrt{3}$$

$\therefore \frac{x}{\sqrt{3}}, \frac{y}{\sqrt{3}}, \frac{z}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{3}$

$\therefore x + y + z = (3\sqrt{3})(\sqrt{3})$

$\therefore x + y + z = 3$

જે સમતલનું જરૂરી સમીકરણ છે.

6. બિંદુ (–2, –1, –3) માંથી પસાર થતી રેખા કોઈ સમતલને બિંદુ (1, –3, 3) આગળ કાટખૂણે કાપે છે. તો સમતલનું સમીકરણ મેળવો.

➡ અહીં (1, –3, 3) સમતલનું બિંદુ છે.

$\therefore$ સમતલ બિંદુ $\bar{a} = (1, -3, 3)$ માંથી પસાર થાય છે.

N = સમતલનો અભિલંબ

$= \overrightarrow{AB}$

$= B - A$

$= (1, -3, 3) - (-2, -1, -3)$

$= (1 + 2, -3 + 1, 3 + 3)$

$\therefore N = (3, -2, 6)$

$\therefore$ સમતલનું સમીકરણ $(\bar{r} - \bar{a}) \cdot N = 0$ મુજબ મેળવતાં, જ્યાં $\bar{r} = (x, y, z)$.

હવે $\bar{r} - \bar{a} = (x, y, z) - (1, -3, 3)$

$= (x - 1, y + 3, z - 3)$

$\therefore$ માંગેલ સમતલ : $(\bar{r} - \bar{a}) \cdot N = 0$

$\therefore (x - 1, y + 3, z - 3) \cdot (3, -2, 6)$

$\therefore 3(x - 1) - 2(y + 3) + 6(2 - 3) = 0$

$\therefore 3x - 2y + 6z - 3 - 6 - 18 = 0$

$\therefore 3x - 2y + 6z - 27 = 0$

7. બિંદુઓ (2, 1, 0), (3, –2, –2) તથા (3, 1, 7) માંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ મેળવો.

➡ અહીં $A(x_1, y_1, z_1) = (2, 1, 0)$, $B(x_2, y_2, z_2) = (3, -2, -2)$ અને $C(x_3, y_3, z_3) = (3, 1, 7)$ લેતાં,

$$\therefore \text{માંગેલ સમતલ} = \begin{vmatrix} x - 2 & y - 1 & z - 0 \\ 3 - 2 & -2 - 1 & -2 - 0 \\ 3 - 2 & 1 - 1 & 7 - 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore \begin{vmatrix} x - 2 & y - 1 & z \\ 1 & -3 & -2 \\ 1 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

$\therefore (x - 2)(-21 - 0) - (y - 1)(7 + 2) + z(0 + 3) = 0$

$\therefore -21(x - 2) - 9(y - 1) + 3z = 0$

$\therefore -21x + 42 - 9y + 9 + 3z = 0$

$\therefore -21x - 9y + 3z + 51 = 0$

$\therefore 7x + 3y - z = 17$ માંગેલ સમતલનું સમીકરણ છે.

8. O ઉગમબિંદુ અને A(*a*, *b*, *c*) કોઈ બિંદુ છે. તો રેખા OA ની દિક્કોસાઈન મેળવો. તથા A માંથી પસાર થતા અને $\overline{OA}$ ને લંબ સમતલ મેળવો.

➡ અહીં $\overrightarrow{OA} = A - O$

$= (a, b, c) - (0, 0, 0)$

$= (a - 0, b - 0, c - 0)$

$\therefore \overrightarrow{OA} = (a, b, c)$ ....(i)

$\therefore |\overrightarrow{OA}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

$\therefore \overrightarrow{OA}$ ની દિક્કોસાઈન $l = \frac{a}{|\overrightarrow{OA}|}, m = \frac{b}{|\overrightarrow{OA}|}, n = \frac{c}{|\overrightarrow{OA}|}$

∴ દિક્કોસાઈન $l = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$,

$m = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$, $n = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

હવે $\overline{N}$ = સમતલનો અભિલંબ

$= \overrightarrow{OA}$

$= (a, b, c)$ (પરિણામ (i) પરથી)

∴ માંગેલ સમતલ $(\bar{r} - \bar{a}) \cdot \overline{N} = 0$ મુજબ મળે.

અર્થાત્ $\bar{r} - \overline{N} = \bar{a} \cdot \overline{N}$

જ્યાં $\bar{r} = (x, y, z)$ અને $\bar{a} = (a, b, c)$

∴ $(x, y, z) \cdot (a, b, c) = (a, b, c) \cdot (a, b, c)$

∴ $ax + by + cz = a^2 + b^2 + c^2$ માંગેલ સમતલ છે.

9. જો સદિશ $\overrightarrow{OA}$ એ OX તથા OY સાથે અનુક્રમે 60° અને 45° નો ખૂણો બનાવે તેમજ $|\overrightarrow{OA}| = 10$ એકમ હોય તો બિંદુ A ના સ્થાન સદિશ મેળવો.

➡ અહીં $\overrightarrow{OA}$ એ $\overrightarrow{OX}$ સાથે $\alpha = 60°$ અને $\overrightarrow{OY}$ સાથે $\beta = 45°$ નો ખૂણો બનાવે છે.

ધારો કે $\overrightarrow{OA}$ એ $\overrightarrow{OZ}$ સાથે γ માપનો ખૂણો બનાવે છે.

∴ $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

∴ $\cos^2(60°) + \cos^2(45°) + \cos^2\gamma = 1$

∴ $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \cos^2\gamma = 1$

∴ $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \cos^2\gamma = 1$

∴ $\left(\frac{1+2}{4}\right) + \cos^2\gamma = 1$

∴ $\frac{3}{4} + \cos^2\gamma = 1$

∴ $\cos^2\gamma = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

∴ $\cos\gamma = \frac{1}{2}$

∴ $\gamma = \frac{\pi}{3}$ અથવા 60°

બિંદુ A નો સ્થાન સદિશ

$= |\overrightarrow{OA}| (\cos\alpha\, \bar{i} + \cos\beta\, \bar{j} + \cos\gamma\, \bar{k})$

$= 10 \left((\cos 60)\, \bar{i} + (\cos 45)\, \bar{j} + (\cos 60)\, \bar{k}\right)$

$= 10 \left(\frac{1}{2} \bar{i} + \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{j} + \frac{1}{2} \bar{k}\right)$

$= \frac{10}{2} \bar{i} + \frac{10}{\sqrt{2}} \bar{j} + \frac{10}{2} \bar{k}$

$= 5\bar{i} + 5\sqrt{2}\, \bar{j} + 5\bar{k}$

$= \left(5,\ 5\sqrt{2},\ 5\right)$

આમ બિંદુ A નો સ્થાન સદિશ $5\bar{i} + 5\sqrt{2}\,\bar{j} + 5\bar{k}$ થાય. અર્થાત્ $\left(5,\ 5\sqrt{2},\ 5\right)$.

10. **સાબિત કરો કે $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$ અને $\frac{x-4}{5} = \frac{y-1}{2} = z$ છેદક રેખાઓ છે. તેમનું છેદબિંદુ મેળવો.**

➡ આપેલ રેખાઓ $l_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$ ને સમીકરણ $\frac{x-x_1}{a_1} = \frac{y-y_1}{b_1} = \frac{z-z_1}{c_1}$ સાથે સરખાવો.

$\therefore (x_1, y_1, z_1) = (1, 2, 3)$ અને

$(a_1\ b_1\ c_1) = (1, 2, 3)$ થશે.

તથા રેખા $l_2 : \frac{x-4}{5} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-0}{1}$ ને સમીકરણ $\frac{x-x_2}{a_2} = \frac{y-y_2}{b_2} = \frac{z-z_2}{c_2}$ સાથે સરખાવો.

$\therefore (x_2, y_2, z_2) = (4, 1, 0)$ તથા

$(a_2\ b_2\ c_2) = (5, 2, 1)$ થશે.

હવે $\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 4-1 & 1-2 & 0-3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 3 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

$= 3(3-8) + 1(2-20) - 3(4-15)$

$= 3(-5) + 1(-18) - 3(-11)$

$= -15 - 18 + 33$

$= -33 + 33$

$= 0$ ....(i)

હવે $(b_1c_2 - b_2c_1)^2 + (c_1a_2 - a_2c_1)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2$

$= \left(3\cdot(1) - 2\cdot(4)\right)^2 + \left(4\cdot(5) - 1\cdot(2)\right)^2 + \left(2\cdot(2) - 5\cdot(3)\right)^2$

$= (3-8)^2 + (20-2)^2 + (4-15)^2$

$= (-5)^2 + (18)^2 + (-11)^2$

$= 25 + 324 + 121$

$= 470$

$\therefore$ આપેલ રેખાઓ વચ્ચેનું ન્યૂનતમ અંતર

$$= \frac{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{(b_1c_2 - b_2c_1)^2 + (a_2c_1 - a_1c_2)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2}}$$

➡ આપેલ રેખાઓ $l_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$ ને સમીકરણ $\frac{x-x_1}{a_1} = \frac{y-y_1}{b_1} = \frac{z-z_1}{c_1}$ સાથે સરખાવો.

$\therefore (x_1, y_1, z_1) = (1, 2, 3)$ અને

$(a_1\ b_1\ c_1) = (1, 2, 3)$ થશે.

તથા રેખા $l_2 : \frac{x-4}{5} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-0}{1}$ ને સમીકરણ $\frac{x-x_2}{a_2} = \frac{y-y_2}{b_2} = \frac{z-z_2}{c_2}$ સાથે સરખાવો.

$\therefore (x_2, y_2, z_2) = (4, 1, 0)$ તથા

$(a_2\ b_2\ c_2) = (5, 2, 1)$ થશે.

હવે $\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 4-1 & 1-2 & 0-3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 3 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

$= 3(3 - 8) + 1(2 - 20) - 3(4 - 15)$

$= 3(-5) + 1(-18) - 3(-11)$

$= -15 - 18 + 33$

$= -33 + 33$

$= 0$ ....(i)

હવે $(b_1c_2 - b_2c_1)^2 + (c_1a_2 - a_2c_1)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2$

$= (3\cdot(1) - 2\cdot(4))^2 + (4\cdot(5) - 1\cdot(2))^2 + (2\cdot(2) - 5\cdot(3))^2$

$= (3 - 8)^2 + (20 - 2)^2 + (4 - 15)^2$

$= (-5)^2 + (18)^2 + (-11)^2$

$= 25 + 324 + 121$

$= 470$

∴ આપેલ રેખાઓ વચ્ચેનું ન્યૂનતમ અંતર

$$= \frac{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{(b_1c_2 - b_2c_1)^2 + (a_2c_1 - a_1c_2)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2}}$$

11. સાબિત કરો કે, બિંદુઓ A(0, –1, –1) અને B(4, 5, 1) તથા બિંદુઓ C(3, 9, 4) અને D(–4, 4, 4) માંથી પસાર થતી રેખાઓ છેદક રેખાઓ છે.

➡ અહીં $A(x_1, y_1, z_1) = (0, -1, -1)$ અને

$B(x_2, y_2, z_2) = (4, 5, 1)$ લેતાં,

$\therefore \overleftrightarrow{AB} : \frac{x - 0}{4 - 0} = \frac{y - (-1)}{5 - (-1)} = \frac{z - (-1)}{1 - (-1)}$

$\therefore \overleftrightarrow{AB} : \frac{x}{4} = \frac{y + 1}{6} = \frac{z + 1}{2}$ ....(i)

તથા $C(x_1\ y_1\ z_1) = (3, 9, 4)$ અને

$D(x_2\ y_2\ z_2) = (-4, 4, 4)$ લેતાં,

$\therefore \overleftrightarrow{CD} : \frac{x - 3}{-4 - 3} = \frac{y - 9}{4 - 9} = \frac{z - 4}{4 - 4}$

$: \frac{x - 3}{-7} = \frac{y - 9}{-5} = \frac{z - 4}{0}$ ....(ii)

∴ પરિણામ (i) અને (ii) પરથી,

$(x_1, y_1, z_1) = (0, -1, -1)$ તથા

$(x_2, y_2, z_2) = (3, 9, 4)$ થશે તેમજ

$(a_1, b_1, c_1) = (4, 6, 2)$, $(a_2, b_2, c_2) = (-7, -5, 0)$ થાય.

હવે $\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 3-0 & 9+1 & 4+1 \\ 4 & 6 & 2 \\ -7 & -5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 10 & 5 \\ 4 & 6 & 2 \\ -7 & -5 & 0 \end{vmatrix}$$

$= 3(0 + 10) - 10(0 + 14) + 5(-20 + 42)$

$= 3(10) - 10(14) + 5(22)$

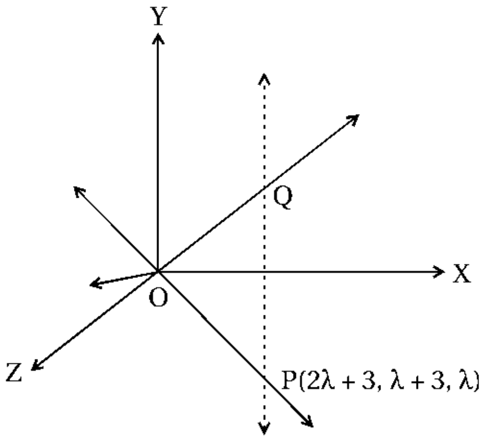
$= 30 - 140 + 110$

$= 140 - 140 = 0$

$\therefore$ આપેલ રેખાઓ છેદક રેખાઓ છે.

12. ઉગમબિંદુમાંથી પસાર થતી અને રેખા $\frac{x-3}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{2}{1}$ સાથે $\frac{\pi}{3}$ માપનો ખૂણો બનાવતી રેખાનાં સમીકરણો મેળવો.

➥



આપેલ રેખા $\frac{x-3}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{1}$ની દિક્ સંખ્યાઓ 2, 1 અને 1 છે તથા દિક્કોસાઈન $\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}$ થાય.

હવે $\frac{x-3}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{1} = \lambda$ (ધારો)

$\therefore x = 2\lambda + 3,\ y = \lambda + 3$ અને $z = \lambda$ ......(i)

હવે માંગેલ રેખા એ આપેલી રેખા સાથે $\frac{\pi}{3}$ માપનો ખૂણો બનાવે છે.

$$\therefore \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{|\bar{b}_1 \cdot \bar{b}_2|}{|\bar{b}_1| \cdot |\bar{b}_2|}$$

જ્યાં $\bar{b}_1 = (2, 1, 1)$ તથા $\bar{b}_2 = (2\lambda + 3, \lambda + 3, \lambda)$

$$\therefore \cos\frac{\pi}{3} = \frac{(2, 1, 1) \cdot (2\lambda + 3, \lambda + 3, \lambda)}{\sqrt{4+1+1} \cdot \sqrt{(2\lambda + 3)^2 + (\lambda + 3)^2 + \lambda^2}}$$

$$\therefore \frac{1}{2} = \frac{4\lambda + 6 + \lambda + 3 + \lambda}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{4\lambda^2 + 9 + 12\lambda + \lambda^2 + 6y + 9 + \lambda^2}}$$

$$\therefore \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{6\lambda + 9}{\sqrt{6\lambda^2 + 18\lambda + 18}}$$

$$\therefore \sqrt{6} \cdot \left(\sqrt{6\lambda^2 + 18\lambda + 18}\right) = 2(6\lambda + 9)$$

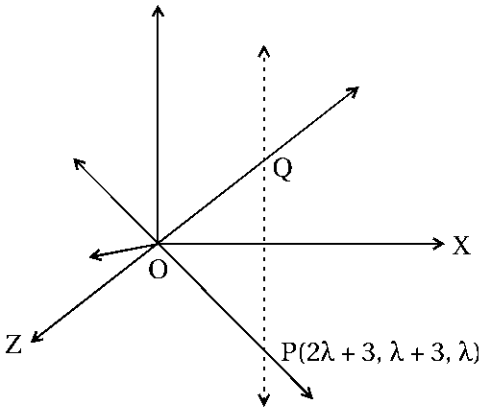
$$\therefore \sqrt{6} \cdot \sqrt{6}\left(\sqrt{\lambda^2 + 3\lambda + 3}\right) = 2(3)\ (2\lambda + 3)$$

હવે બંને બાજુ વર્ગ કરતાં,

$6(\lambda^2 + 3\lambda + 3) = 6(2\lambda + 3)^2$

$\therefore \lambda^2 + 3\lambda + 3 = 4\lambda^2 + 12\lambda + 9$

➥ Y



આપેલ રેખા $\frac{x-3}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{1}$ની દિક્ સંખ્યાઓ 2, 1 અને 1 છે તથા દિક્કોસાઈન $\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}$ થાય.

હવે $\frac{x-3}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{1}=\lambda$ (ધારો)

$\therefore x = 2\lambda + 3, y = \lambda + 3$ અને $z = \lambda$ ......(i)

હવે માંગેલ રેખા એ આપેલી રેખા સાથે $\frac{\pi}{3}$ માપનો ખૂણો બનાવે છે.

$\therefore \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{|\bar{b}_1 \cdot \bar{b}_2|}{|b_1| \cdot |b_2|}$

જ્યાં $\bar{b}_1 = (2, 1, 1)$ તથા $\bar{b}_2 = (2\lambda + 3, \lambda + 3, \lambda)$

$\therefore \cos\frac{\pi}{3}=\frac{(2, 1, 1) \cdot (2\lambda + 3, \lambda + 3, \lambda)}{\sqrt{4+1+1} \cdot \sqrt{(2\lambda+3)^2+(\lambda+3)^2+\lambda^2}}$

$\therefore \frac{1}{2}=\frac{4\lambda + 6 + \lambda + 3 + \lambda}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{4\lambda^2+9+12\lambda+\lambda^2+6y+9+\lambda^2}}$

$\therefore \frac{\sqrt{6}}{2}=\frac{6\lambda+9}{\sqrt{6\lambda^2+18\lambda+18}}$

$\therefore \sqrt{6} \cdot \left(\sqrt{6\lambda^2+18\lambda+18}\right) = 2(6\lambda + 9)$

$\therefore \sqrt{6} \cdot \sqrt{6}\left(\sqrt{\lambda^2+3\lambda+3}\right) = 2(3)\,(2\lambda + 3)$

હવે બંને બાજુ વર્ગ કરતાં,

$6(\lambda^2 + 3\lambda + 3) = 6(2\lambda + 3)^2$

$\therefore \lambda^2 + 3\lambda + 3 = 4\lambda^2 + 12\lambda + 9$

13. બે રેખાઓનો દિક્કોસાઈન l, m તથા n માટે $l + m + n = 0$ તથા $l^2 + m^2 - n^2 = 0$ હોય તો તેમની વચ્ચેનો કોણ મેળવો.

➥ અહીં $l + m + n = 0$

$\therefore n = -l - m$

$\therefore n = -(l + m)$

$\therefore n^2 = (l + m)^2$

હવે $l^2 + m^2 - n^2 = 0$

$\therefore l^2 + m^2 - (l + m)^2 = 0$

$\therefore l^2 + m^2 - l^2 - 2ml - m^2 = 0$

$\therefore -2ml = 0$

$\therefore m.l. = 0$

$\therefore m = 0$ અથવા $l = 0$

જો $l = 0$ હોય તો $m + n = 0$

$\therefore m = -n$

$\therefore$ રેખાની દિક્કોસાઈન $= (0, -n, n)$ થાય.

અને $m = 0$ હોય તો $l + n = 0$

$\therefore\ l = -n$

∴ રેખાની દિક્કોસાઈન = $(-n, 0, n)$ થાય.

હવે $\cos\theta = \dfrac{(0, -n, n) \cdot (-n, 0, n)}{|(0, -n, n)| \cdot |(-n, 0, n)|}$

$= \dfrac{0 + 0 + n^2}{\sqrt{0 + n^2 + n^2} \cdot \sqrt{n^2 + 0 + n^2}}$

$= \dfrac{n^2}{\sqrt{2n^2} \cdot \sqrt{2n^2}}$

$= \dfrac{n^2}{\sqrt{2} \cdot n\sqrt{2} \cdot n} = \dfrac{1}{2}$

$\therefore \theta = \cos^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)$

$\therefore \theta = \dfrac{\pi}{3}$

14. એક ચલિત રેખાના બે પાસપાસેના બિંદુઓની દિક્કોસાઈન અનુક્રમે l, m, n તથા $l + \delta l, m + \delta m, 2n + \delta n$ છે. તેમની વચ્ચેના ખૂણા નાના ખૂણા $\delta\theta$ નું મૂલ્ય $\delta\theta^2 = \delta l^2 + \delta m^2 + \delta n^2$ છે તેમ બતાવો.

➥ ચલિત રેખાના પાસપાસેના બિંદુઓની દિક્કોસાઈન l, m, n તથા $l + \delta l, m + \delta m, n + \delta n$ છે.

$\therefore\ l^2 + m^2 + n^2 = 1$ .....(i)

અને $(l + \delta l)^2 + (m + \delta m)^2 + (n + \delta n)^2 = 1$ .....(ii)

$\therefore\ l^2 + m^2 + n^2 + \delta l^2 + \delta m^2 + \delta n^2 +$
$2(l \cdot \delta l + m \cdot \delta m + n \cdot \delta n) = 1$

$\therefore\ 1 + \delta l^2 + \delta m^2 + \delta n^2 +$
$2(l \cdot \delta l + m \cdot \delta m + n \cdot \delta n) = 1$

(પરિણામ (i) પરથી)

$\therefore\ \delta l^2 + \delta m^2 + \delta n^2 = -2(l \cdot \delta l + m \cdot \delta m + n \cdot \delta n)$

$\therefore\ l \cdot \delta l + m \cdot \delta m + n \cdot \delta n = -\dfrac{1}{2}(\delta l^2 + \delta m^2 + \delta n^2)$.....(iii)

ધારો કે $\bar{a}$ અને $\bar{b}$ ચલિત રેખા પરના પાસપાસે રહેલા એકમ સદિશો છે. જેમના દિક્કોસાઈન (l, m, n) તથા $(l + \delta l, m + \delta m, n + \delta n)$ છે.

$\therefore \cos\alpha = \dfrac{(\bar{a} \cdot \bar{b})}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|}$ થાય.

જ્યાં $\bar{a} \wedge \bar{b} = \alpha$ છે.

$\therefore \cos\alpha = \bar{a} \cdot \bar{b}$ ($\because |\bar{a}| = 1, |\bar{a}| = 1$ છે.)

અહીં ખૂણો $\alpha = \delta\theta$ લેતાં,

$\therefore \cos(\delta\theta) = (\bar{l}, \bar{m}, \bar{n}) \cdot (l + \delta l, m + \delta m, n + \delta n)$

$= l \cdot (l + \delta l) + m \cdot (m + \delta m) + n \cdot (n + \delta n)$

$= l^2 + m^2 + n^2 + (l \cdot \delta l + m \cdot \delta m + n \cdot \delta n)$

$= 1 - \dfrac{1}{2}(\delta l^2 + \delta m^2 + \delta n^2)$

(પરિણામ (iii) પરથી)

$\therefore \cos(\delta\theta) - 1 = \dfrac{-1}{2}(\delta l^2 + \delta m^2 + \delta n^2)$

$\therefore 2(1 - \cos(\delta\theta)) = \delta l^2 + \delta m^2 + \delta n^2$

$\therefore 2\left(2\sin^2\left(\dfrac{\delta\theta}{2}\right)\right) = \delta l^2 + \delta m^2 + \delta n^2$

$\therefore 4\left(\dfrac{\delta\theta}{2}\right)^2 = \delta l^2 + \delta m^2 + \delta n^2$ ($\because$ અહીં $0 < \delta\theta < \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \sin\left(\dfrac{\delta\theta}{2}\right) < \dfrac{\delta\theta}{2} < \tan\left(\dfrac{\delta\theta}{2}\right)$ અને $\sin\left(\dfrac{\delta\theta}{2}\right) = \dfrac{\delta\theta}{2}$ મૂકતાં)

$\therefore\ \delta\theta^2 = \delta l^2 + \delta m^2 + \delta n^2$

જે માંગેલ પરિણામ છે.

15. **સામાન્ય ઉગમબિંદુ ધરાવતા પરસ્પર બે લંબયામાક્ષોને એક સમતલ તેમને ઉગમબિંદુથી a, b, c તથા a', b' અને c' અંતરે કાપે છે. તો બતાવો કે $\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2} = \dfrac{1}{(a')^2} + \dfrac{1}{(b')^2} + \dfrac{1}{(c')^2}$.**

➡ ધારો કે સમતલ π એ $\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY}$ તથા $\overline{OZ}$ ને અનુક્રમે ઉગમબિંદુથી a, b અને c અંતરે કાપે છે. આમ સમતલ π ના અક્ષાંતરો a, b તથા c થાય.

$\therefore$ સમતલનું સમીકરણ : $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$ ....(i)

આજ પ્રમાણે સમતલ π એ $\overrightarrow{OX}', \overrightarrow{OY}'$ તથા $\overrightarrow{OZ}'$ ને અનુક્રમે ઉગમબિંદુથી a', b' અને c' અંતરે કાપે છે. માટે સમતલ π ના અક્ષાંતરો a', b' અને c' થાય.

$\therefore$ સમતલનું સમીકરણ : $\dfrac{x}{a'} + \dfrac{y}{b'} + \dfrac{z}{c'} = 1$ ....(ii)

અહીં સમતલ (i) અને (ii) નું ઉગમબિંદુથી લંબઅંતર સમાન થશે.

$$\therefore \frac{|-1|}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}} = \frac{|-1|}{\sqrt{\frac{1}{(a')^2} + \frac{1}{(b')^2} + \frac{1}{(c')^2}}}$$

($\because$ ઉગમબિંદુથી સમતલ $ax + by + cz + d = 0$ નું લંબઅંતર $= \dfrac{|d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ છે.)

$$\therefore \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} = \sqrt{\frac{1}{(a')^2} + \frac{1}{(b')^2} + \frac{1}{(c')^2}}$$

હવે બંને બાજુ વર્ગ કરતાં,

$$\therefore \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{(a')^2} + \frac{1}{(b')^2} + \frac{1}{(c')^2}$$

જે માંગેલ પરિણામ છે.