પ્રકરણ 2

# ત્રિકોણમિતીય પ્રતિવિધેયો

## 2.1 વિહંગાવલોકન

### 2.1.1 પ્રતિવિધેયો

જો વિધેય '$f$' એક-એક અને વ્યાપ્ત હોય, તો અને તો જ તેનું પ્રતિવિધેય મળે. બધાં જ ત્રિકોણમિતીય વિધેયો તેમના પ્રદેશ પર અનેક-એક સંગતતાવાળાં વિધેયો છે અને તેથી તેમના પ્રદેશગણ અને સહપ્રદેશગણ મર્યાદિત કરીશું, જેથી આ મર્યાદિત પ્રદેશગણમાં અને સહપ્રદેશગણમાં તે એક-એક અને વ્યાપ્ત થાય અને તેમનાં પ્રતિવિધેય અસ્તિત્વ ધરાવે. ત્રિકોણમિતીય વિધેયોનાં પ્રતિવિધેયો માટેના મર્યાદિત પ્રદેશ અને વિસ્તાર નીચે પ્રમાણે છે :

| વિધેય | પ્રદેશ | વિસ્તાર |
|---|---|---|
| $y = sin^{-1}x$ | $[-1,1]$ | $\left[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ |
| $y = cos^{-1}x$ | $[-1,1]$ | $[0,\pi]$ |
| $y = cosec^{-1}x$ | $\mathbf{R}-(-1,1)$ | $\left[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]-\{0\}$ |
| $y = sec^{-1}x$ | $\mathbf{R}-(-1,1)$ | $[0,\pi]-\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ |
| $y = tan^{-1}x$ | $\mathbf{R}$ | $\left(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ |
| $y = cot^{-1}x$ | $\mathbf{R}$ | $(0,\pi)$ |

**નોંધ :**

(i) સંકેતો $sin^{-1}x$ અને $(sinx)^{-1}$ માં ગેરસમજ ન થવી જોઈએ. વાસ્તવમાં $sin^{-1}x$ એ એક ખૂણો છે જેનું *sine* વિધેય માટેનું મૂલ્ય વાસ્તવિક સંખ્યા $x$ છે અને $(sinx)^{-1} = \frac{1}{sin\,x}$. તે જ રીતે અન્ય ત્રિકોણમિતીય વિધેયો માટે પણ સમજી શકાય.

(ii) $\theta$ નું નાનામાં નાનું ધન કે ઋણ મૂલ્ય એ આપેલ વિધેયની મુખ્ય કિંમત કહેવાય છે. (ન્યૂનતમ $|\theta|$)

(iii) જ્યારે ત્રિકોણમિતીય પ્રતિવિધેય માટે કોઈ અંતરાલનો ઉલ્લેખ ન કર્યો હોય ત્યારે મુખ્ય મર્યાદિત સહપ્રદેશવાળો અંતરાલ લેવો. ત્રિકોણમિતીય પ્રતિવિધેયનું મૂલ્ય મુખ્ય મર્યાદિત સહપ્રદેશવાળા અંતરાલમાં હોય તેને મુખ્ય કિંમત કહે છે.

### 2.1.2 ત્રિકોણમિતીય પ્રતિવિધેયોના આલેખ :

ત્રિકોણમિતીય પ્રતિવિધેયનો આલેખ મૂળ વિધેયના આલેખમાં $x$-અક્ષ અને $y$-અક્ષની અદલા-બદલી કરીને મેળવી શકાય. એટલે કે જો બિંદુ $(a, b)$ એ ત્રિકોણમિતીય વિધેયના આલેખ પરનું બિંદુ હોય, તો $(b, a)$ એ આપેલ ત્રિકોણમિતીય વિધેયના પ્રતિવિધેયના આલેખ પરનું અનુરૂપ બિંદુ થશે.

આમ, ત્રિકોણમિતીય પ્રતિવિધેયનો આલેખ એ ત્રિકોણમિતીય વિધેયના આલેખનું રેખા $y = x$ માં પ્રતિબિંબ મેળવવાથી પણ મળી શકે છે.

### 2.1.3 ત્રિકોણમિતીય પ્રતિવિધેયોના ગુણધર્મો

**1.** $\sin^{-1}(\sin x) = x \quad : \quad x \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$\cos^{-1}(\cos x) = x \quad : \quad x \in [0, \pi]$

$\tan^{-1}(\tan x) = x \quad : \quad x \in \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$\cot^{-1}(\cot x) = x \quad : \quad x \in (0, \pi)$

$\sec^{-1}(\sec x) = x \quad : \quad x \in [0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$

$\text{cosec}^{-1}(\text{cosec}\, x) = x \quad : \quad x \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$

**2.** $\sin(\sin^{-1} x) = x \quad : \quad x \in [-1, 1]$

$\cos(\cos^{-1} x) = x \quad : \quad x \in [-1, 1]$

$\tan(\tan^{-1} x) = x \quad : \quad x \in \mathbf{R}$

$\cot(\cot^{-1} x) = x \quad : \quad x \in \mathbf{R}$

$\sec(\sec^{-1} x) = x \quad : \quad x \in \mathbf{R} - (-1, 1)$

$\text{cosec}(\text{cosec}^{-1} x) = x \quad : \quad x \in \mathbf{R} - (-1, 1)$

**3.** $\sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \text{cosec}^{-1} x \quad : \quad x \in \mathbf{R} - (-1, 1)$

$\cos^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \sec^{-1} x \quad : \quad x \in \mathbf{R} - (-1, 1)$

$\tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \cot^{-1} x \quad : \quad x > 0$

$= -\pi + \cot^{-1} x \quad : \quad x < 0$

**4.** $\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1} x \quad : \quad x \in [-1, 1]$

$\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1} x \quad : \quad x \in [-1, 1]$

$\tan^{-1}(-x) = -\tan^{-1} x \quad : \quad x \in \mathbf{R}$

$\cot^{-1}(-x) = \pi - \cot^{-1} x \quad : \quad x \in \mathbf{R}$

$\sec^{-1}(-x) = \pi - \sec^{-1} x \quad : \quad x \in \mathbf{R} - (-1, 1)$

$\text{cosec}^{-1}(-x) = -\text{cosec}^{-1} x \quad : \quad x \in \mathbf{R} - (-1, 1)$

**5.** $\sin^{-1}x + \cos^{-1}x = \frac{\pi}{2}$ : $x \in [-1, 1]$

$\tan^{-1}x + \cot^{-1}x = \frac{\pi}{2}$ : $x \in \mathbf{R}$

$\sec^{-1}x + \text{cosec}^{-1}x = \frac{\pi}{2}$ : $x \in \mathbf{R} - (-1, 1)$

**6.** $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y = \tan^{-1}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$ : $xy < 1$

$\tan^{-1}x - \tan^{-1}y = \tan^{-1}\left(\frac{x-y}{1+xy}\right)$ : $xy > -1$

**7.** $2\tan^{-1}x = \sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}$ : $-1 \le x \le 1$

$2\tan^{-1}x = \cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}$ : $x \ge 0$

$2\tan^{-1}x = \tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}$ : $-1 < x < 1$

## 2.2 ઉદાહરણો :

### ટૂંક જવાબી પ્રશ્નો (S.A.)

**ઉદાહરણ 1 :** $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ માટે $\cos^{-1}x$ ની મુખ્ય કિંમત શોધો.

**ઉકેલ :** જો $\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \theta$, તો $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

અહીં, આપણે મુખ્ય કિંમતવાળી શાખા લઈશું. તેથી, $\theta \in [0, \pi]$. વળી, $\frac{\sqrt{3}}{2} > 0$ હોવાથી, $\theta$ પ્રથમ ચરણમાં મળશે. તેથી, $\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$.

**ઉદાહરણ 2 :** કિંમત શોધો : $\tan^{-1}\left(\sin\left(\frac{-\pi}{2}\right)\right)$.

**ઉકેલ :** $\tan^{-1}\left(\sin\left(\frac{-\pi}{2}\right)\right) = \tan^{-1}\left(-\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \tan^{-1}(-1) = -\frac{\pi}{4}$.

**ઉદાહરણ 3 :** કિંમત શોધો : $\cos^{-1}\left(\cos\frac{13\pi}{6}\right)$.

**ઉકેલ :** $\cos^{-1}\left(\cos\frac{13\pi}{6}\right) = \cos^{-1}\left(\cos\left(2\pi+\frac{\pi}{6}\right)\right) = \cos^{-1}\left(\cos\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6}$.

**ઉદાહરણ 4 :** કિંમત શોધો : $\tan^{-1}\left(\tan\frac{9\pi}{8}\right)$.

**ઉકેલ :** $\tan^{-1}\left(\tan\frac{9\pi}{8}\right) = \tan^{-1}\tan\left(\pi+\frac{\pi}{8}\right)$

$= \tan^{-1}\left(\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)\right) = \frac{\pi}{8}$

**ઉદાહરણ 5 :** કિંમત શોધો : $tan\ (tan^{-1}(-\ 4))$.

**ઉકેલ :** $tan\ (tan^{-1}x) = x,\ \forall x \in R$ હોવાથી, $tan\ (tan^{-1}(-\ 4)) = -4$.

**ઉદાહરણ 6 :** કિંમત શોધો : $tan^{-1}\sqrt{3} - sec^{-1}(-2)$ .

**ઉકેલ :** $tan^{-1}\sqrt{3} - sec^{-1}(-2) = tan^{-1}\sqrt{3} - [\pi - sec^{-1}2]$

$$= \frac{\pi}{3} - \pi + cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3}.$$

**ઉદાહરણ 7 :** કિંમત શોધો : $sin^{-1}\left[cos\left(sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]$.

**ઉકેલ :** $sin^{-1}\left[cos\left(sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right] = sin^{-1}\left[cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] = sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$.

**ઉદાહરણ 8 :** સાબિત કરો કે, $tan(cot^{-1}x) = cot\ (tan^{-1}x)$. શું આ સમતા પ્રત્યેક વાસ્તવિક $x$ માટે સત્ય છે ? કારણ આપો.

**ઉકેલ :** ધારો કે, $cot^{-1}x = \theta$. આથી $cot\ \theta = x$ **$\theta \in (0, \pi)$**

$$\therefore\quad 0 < \theta < \pi \Rightarrow -\pi < -\theta < 0 \Rightarrow -\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} - \theta < \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore\quad tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = x \Rightarrow tan^{-1}x = \frac{\pi}{2} - \theta$$

હવે, $tan(cot^{-1}x) = tan\theta = cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = cot\left(\frac{\pi}{2} - cot^{-1}x\right) = cot(tan^{-1}x)$

આ સમતા પ્રત્યેક $x$ માટે સત્ય છે કારણ કે, $tan^{-1}x$ અને $cot^{-1}x$ પ્રત્યેક $x \in \mathbf{R}$ માટે વ્યાખ્યાયિત છે.

**ઉદાહરણ 9 :** $sec\left(tan^{-1}\frac{y}{2}\right)$ નું મૂલ્ય મેળવો.

**ઉકેલ :** ધારો કે, $tan^{-1}\frac{y}{2} = \theta$, જ્યાં, $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. તો $tan\,\theta = \frac{y}{2}$.

તેથી, $sec\theta = \frac{\sqrt{4+y^2}}{2}$ મળે. $\left(sec\,\theta > 0,\ \text{કારણ કે}\ \theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right)$

$$sec\left(tan^{-1}\frac{y}{2}\right) = sec\,\theta = \frac{\sqrt{4+y^2}}{2}.$$

**ઉદાહરણ 10 :** $tan\ (cos^{-1}x)$ નું મૂલ્ય મેળવો અને તે પરથી $tan\left(cos^{-1}\frac{8}{17}\right)$ મેળવો.

**ઉકેલ :** ધારો કે, $cos^{-1}x = \theta$. આથી $cos\,\theta = x$, જ્યાં, $\theta \in [0,\pi]$

$$\therefore\ tan(cos^{-1}x) = tan\theta = \frac{\sqrt{1-cos^2\theta}}{cos\theta} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}.$$

$\left(\theta \in [0, \pi]\ \text{હોવાથી}\ sin\theta \geq 0 \Rightarrow sin\theta = \sqrt{1-cos^2\theta}\right)$

હવે, $tan\left(cos^{-1}\frac{8}{17}\right) = \frac{\sqrt{1-\left(\frac{8}{17}\right)^2}}{\frac{8}{17}} = \frac{15}{8}$.

**ઉદાહરણ 11 :** $sin\left[2cot^{-1}\left(\frac{-5}{12}\right)\right]$નું મૂલ્ય મેળવો.

**ઉકેલ :** ધારો કે, $cot^{-1}\left(\frac{-5}{12}\right) = y$, તો $cot\ y = \frac{-5}{12}$.

$$\therefore \quad sin\left[2cot^{-1}\left(\frac{-5}{12}\right)\right] = sin\ 2y$$

$$= 2sin\,y\ cos\,y$$

$$= 2\left(\frac{12}{13}\right)\left(\frac{-5}{13}\right) \qquad \left(cot\ y < 0 \text{ હોવાથી, } y \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \text{ થાય.}\right)$$

$$= \frac{-120}{169}$$

**ઉદાહરણ 12 :** $cos\left[sin^{-1}\frac{1}{4} + sec^{-1}\frac{4}{3}\right]$નું મૂલ્ય શોધો.

**ઉકેલ :** $cos\left[sin^{-1}\frac{1}{4} + sec^{-1}\frac{4}{3}\right] = cos\left[sin^{-1}\frac{1}{4} + cos^{-1}\frac{3}{4}\right]$

$$= cos\left(sin^{-1}\frac{1}{4}\right)cos\left(cos^{-1}\frac{3}{4}\right) - sin\left(sin^{-1}\frac{1}{4}\right)sin\left(cos^{-1}\frac{3}{4}\right)$$

$$= \frac{3}{4}\sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2} - \frac{1}{4}\sqrt{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2} \qquad \text{(કેમ ?)}$$

$$= \frac{3}{4}\frac{\sqrt{15}}{4} - \frac{1}{4}\frac{\sqrt{7}}{4} = \frac{3\sqrt{15}-\sqrt{7}}{16}$$

## વિસ્તૃત જવાબી પ્રશ્નો (L.A.)

**ઉદાહરણ 13 :** સાબિત કરો કે, $2sin^{-1}\frac{3}{5} - tan^{-1}\frac{17}{31} = \frac{\pi}{4}$.

**ઉકેલ :** ધારો કે, $sin^{-1}\frac{3}{5} = \theta$. આથી, $sin\ \theta = \frac{3}{5}$, જ્યાં, $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ કારણ કે, $sin\ \theta > 0$

$\therefore\ tan\ \theta = \frac{3}{4}$, તેથી, $\theta = tan^{-1}\frac{3}{4}$.

હવે, $2sin^{-1}\frac{3}{5} - tan^{-1}\frac{17}{31} = 2\theta - tan^{-1}\frac{17}{31}$

$$= 2\ tan^{-1}\frac{3}{4} - tan^{-1}\frac{17}{31}$$

$$= tan^{-1}\left(\frac{2\cdot\frac{3}{4}}{1-\frac{9}{16}}\right) - tan^{-1}\frac{17}{31} \qquad \left(xy = \frac{9}{16} < 1\right)$$

$= tan^{-1}\frac{24}{7} - tan^{-1}\frac{17}{31}$

$= tan^{-1}\left(\frac{\frac{24}{7}-\frac{17}{31}}{1+\frac{24}{7}.\frac{17}{31}}\right) = \frac{\pi}{4}$ $\quad (xy > -1)$

**ઉદાહરણ 14 :** સાબિત કરો કે, $cot^{-1}7 + cot^{-1}8 + cot^{-1}18 = cot^{-1}3$

**ઉકેલ :** અહીં, $cot^{-1}7 + cot^{-1}8 + cot^{-1}18$

$= tan^{-1}\frac{1}{7} + tan^{-1}\frac{1}{8} + tan^{-1}\frac{1}{18}$ $\quad$ **(જો $x > 0$, તો $cot^{-1} x = tan^{-1}\frac{1}{x}$)**

$= tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{7}\times\frac{1}{8}}\right) + tan^{-1}\frac{1}{18}$ $\quad$ $\left(x \cdot y = \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{8} < 1\right)$

$= tan^{-1}\frac{3}{11} + tan^{-1}\frac{1}{18}$

$= tan^{-1}\left(\frac{\frac{3}{11}+\frac{1}{18}}{1-\frac{3}{11}\times\frac{1}{18}}\right)$ $\quad (xy < 1)$

$= tan^{-1}\frac{65}{195}$

$= tan^{-1}\frac{1}{3}$

$= cot^{-1} 3$ $\quad$ $\left(\frac{1}{3} > 0 \text{ હોવાથી}\right)$

**ઉદાહરણ 15 :** $tan\,1$ અને $tan^{-1}\,1$ માંથી કોની કિંમત વધુ છે ?

**ઉકેલ :** આકૃતિ 2.1 માં આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે,

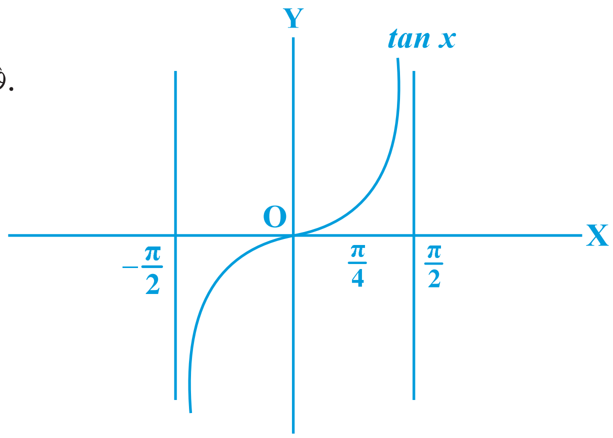
$tan\ x$ એ અંતરાલ $\left(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ માં વધતું વિધેય છે.

વળી, $1 > \frac{\pi}{4} \Rightarrow tan\ 1 > tan\ \frac{\pi}{4}$

$\therefore\quad tan\ 1 > 1$

હવે, $tan\ 1 > 1 > \frac{\pi}{4}$

$\therefore\quad tan\ 1 > 1 > tan^{-1}(1)$




આકૃતિ 2.1

**ઉદાહરણ 16 :** $sin\left(2tan^{-1}\frac{2}{3}\right) + cos(tan^{-1}\sqrt{3})$ નું મૂલ્ય શોધો.

**ઉકેલ :** ધારો કે, $tan^{-1}\frac{2}{3} = x$ અને $tan^{-1}\sqrt{3} = y$. $\quad$ $\left(0 < x < \frac{\pi}{2},\ 0 < y < \frac{\pi}{2}\right)$

$\therefore\ \tan x = \frac{2}{3}$ અને $\tan y = \sqrt{3}$

$0 < x,\ y < \frac{\pi}{2}$

હવે, $\sin\left(2\tan^{-1}\frac{2}{3}\right) + \cos(\tan^{-1}\sqrt{3})$

$= \sin(2x) + \cos y$

$= \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x} + \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 y}}$

$= \frac{2\cdot\frac{2}{3}}{1+\frac{4}{9}} + \frac{1}{\sqrt{1+(\sqrt{3})^2}}$

$= \frac{12}{13} + \frac{1}{2} = \frac{37}{26}$

**બીજી રીત :**

$\tan y = \sqrt{3},\ 0 < y < \frac{\pi}{2}$

$\therefore\ y = \frac{\pi}{3}$

$\therefore\ \sin\left(2\tan^{-1}\frac{2}{3}\right) + \cos(\tan^{-1}\sqrt{3})$

$= \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x} + \cos\frac{\pi}{3}$

$= \frac{2\cdot\frac{2}{3}}{1+\frac{4}{9}} + \frac{1}{2}$

$= \frac{37}{36}$

**ઉદાહરણ 17 :** ઉકેલો $\tan^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \frac{1}{2}\tan^{-1}x,\ x > 0.$

**ઉકેલ :** અહીં, $2\tan^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \tan^{-1}x$

$\therefore\ 2\left[\tan^{-1}1 - \tan^{-1}x\right] = \tan^{-1}x$ **$(1 \cdot x > -1),\ (x > 0)$**

$\therefore\ 2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3\tan^{-1}x$

$\therefore\ \frac{\pi}{6} = \tan^{-1}x$

$\therefore\ x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

**ઉદાહરણ 18 :** સમીકરણ $\sin^{-1}x + \sin^{-1}(1-x) = \cos^{-1}x$ નું સમાધાન કરતી $x$ ની કિંમતો શોધો.

**ઉકેલ :** અહીં, આપેલ સમીકરણ $\sin^{-1}x + \sin^{-1}(1-x) = \cos^{-1}x$ પરથી,

$\sin(\sin^{-1}x + \sin^{-1}(1-x)) = \sin(\cos^{-1}x)$ મળશે.

$\therefore\ \sin(\sin^{-1}x)\cos(\sin^{-1}(1-x)) + \cos(\sin^{-1}x)\sin(\sin^{-1}(1-x)) = \sin(\cos^{-1}x)$

$\therefore\ x\sqrt{1-(1-x)^2} + (1-x)\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-x^2}$

$\therefore\ x\sqrt{2x-x^2} + \sqrt{1-x^2}\,(1-x-1) = 0$

$\therefore\ x\left(\sqrt{2x-x^2} - \sqrt{1-x^2}\right) = 0$

$\therefore\ x = 0$ અથવા $2x - x^2 = 1 - x^2$

$\therefore\ x = 0$ અથવા $x = \frac{1}{2}$.

**ચકાસણી :** $x = 0$ માટે ડા.બા. $= 0 + \sin^{-1}1 = \frac{\pi}{2} = \cos^{-1}0$

$x = \frac{1}{2}$ માટે ડા.બા. $= 2\sin^{-1}\frac{1}{2} = 2\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{3} = \cos^{-1}\frac{1}{2}$

**ઉદાહરણ 19 :** સમીકરણ ઉકેલો : $sin^{-1}6x + sin^{-1}\ 6\sqrt{3}\,x = -\dfrac{\pi}{2}$.

**ઉકેલ :** અહીં, $sin^{-1}\ 6x = -\dfrac{\pi}{2} - sin^{-1}6\sqrt{3}\,x$

$\therefore \quad sin\ (sin^{-1}\ 6x) = sin\left(-\dfrac{\pi}{2} - sin^{-1}6\sqrt{3}\,x\right)$

$\therefore \quad 6x = -\ cos\ (sin^{-1}\ 6\sqrt{3}\,x)$

$\therefore \quad 6x = -\sqrt{1-108x^2}$. (અહીં સ્પષ્ટ છે કે $x$ ઋણ જ હોય.) $\left(sin^{-1}(6\sqrt{3}x) \in \left[\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]\right)$

વર્ગ કરતાં, $36x^2 = 1 - 108x^2$

$\therefore \quad 144x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm\dfrac{1}{12}$

$x = -\dfrac{1}{12}$ કારણ કે, $x < 0$ છે.

**નોંધ :** જો $x > 0$ તો $sin^{-1}6x + sin^{-1}\ 6\sqrt{3}\,x$ = ધન + ધન = ધન = $-\dfrac{\pi}{2}$ ન બને.

$x = -\dfrac{1}{12}$ લેતાં, ડા.બા. $= sin^{-1}\left(-\dfrac{1}{2}\right) + sin^{-1}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\dfrac{\pi}{6} - \dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{\pi}{2}$

**ઉદાહરણ 20 :** સાબિત કરો કે, $2\ tan^{-1}\left\{tan\dfrac{\alpha}{2}\ .\ tan\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\beta}{2}\right)\right\} = tan^{-1}\dfrac{sin\alpha\, cos\beta}{cos\alpha + sin\beta}$

**ઉકેલ :** ડા.બા. $= tan^{-1}\dfrac{2tan\dfrac{\alpha}{2}.tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\beta}{2}\right)}{1-tan^2\dfrac{\alpha}{2}tan^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\beta}{2}\right)}$ $\left(2tan^{-1}\ x = tan^{-1}\dfrac{2x}{1-x^2}\right)$

(અત્રે સ્વીકાર્યું છે કે, $tan\dfrac{\alpha}{2} \cdot tan\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\beta}{2}\right) < 1$)

$$= tan^{-1}\frac{2tan\dfrac{\alpha}{2}\ \dfrac{1-tan\dfrac{\beta}{2}}{1+tan\dfrac{\beta}{2}}}{1-tan^2\dfrac{\alpha}{2}\left(\dfrac{1-tan\dfrac{\beta}{2}}{1+tan\dfrac{\beta}{2}}\right)^2}$$

$$= tan^{-1}\frac{2tan\dfrac{\alpha}{2}\cdot\left(1-tan^2\dfrac{\beta}{2}\right)}{\left(1+tan\dfrac{\beta}{2}\right)^2 - tan^2\dfrac{\alpha}{2}\left(1-tan\dfrac{\beta}{2}\right)^2}$$

$$= tan^{-1}\frac{2tan\dfrac{\alpha}{2}\left(1-tan^2\dfrac{\beta}{2}\right)}{\left(1+tan^2\dfrac{\beta}{2}\right)\left(1-tan^2\dfrac{\alpha}{2}\right)+2tan\dfrac{\beta}{2}\left(1+tan^2\dfrac{\alpha}{2}\right)}$$

$$= tan^{-1}\frac{\frac{2tan\frac{\alpha}{2}}{1+tan^2\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{1-tan^2\frac{\beta}{2}}{1+tan^2\frac{\beta}{2}}}{\frac{1-tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+tan^2\frac{\alpha}{2}} + \frac{2tan\frac{\beta}{2}}{1+tan^2\frac{\beta}{2}}}$$

$$= tan^{-1}\left(\frac{sin\,\alpha\,cos\,\beta}{cos\,\alpha + sin\,\beta}\right) = \text{જ.બા.}$$

## હેતુલક્ષી પ્રશ્નો

**વિધાન સત્ય બને તે રીતે આપેલા ચાર વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી નીચેના 21 થી 41 ક્રમાંકવાળા પ્રશ્નોના ઉત્તર આપો :**

**ઉદાહરણ 21 :** $tan^{-1}$ ની મુખ્ય કિંમતવાળી શાખા .......... છે.

(A) $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ (B) $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ (C) $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) - \{0\}$ (D) $(0, \pi)$

**ઉકેલ :** સાચો ઉકેલ (A) છે.

**ઉદાહરણ 22 :** $sec^{-1}$ ની મુખ્ય કિંમતવાળી શાખા .......... છે.

(A) $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$ (B) $[0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ (C) $(0, \pi)$ (D) $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

**ઉકેલ :** સાચો ઉકેલ (B) છે.

**ઉદાહરણ 23 :** $cos^{-1}$ ની મુખ્ય કિંમત સિવાયની શાખાવાળો $cos^{-1}$ નો આલેખ ..........માં વ્યાખ્યાયિત છે.

(A) $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ (B) $[\pi, 2\pi] - \left\{\frac{3\pi}{2}\right\}$ (C) $(0, \pi)$ (D) $[2\pi, 3\pi]$

**ઉકેલ :** સાચો ઉકેલ (D) છે.

**ઉદાહરણ 24 :** $sin^{-1}\left(cos\left(\frac{43\pi}{5}\right)\right)$ નું મૂલ્ય .......... છે.

(A) $\frac{3\pi}{5}$ (B) $\frac{-7\pi}{5}$ (C) $\frac{\pi}{10}$ (D) $-\frac{\pi}{10}$

**ઉકેલ :** $sin^{-1}\left(cos\,\frac{40\pi+3\pi}{5}\right) = sin^{-1}\left(cos\left(8\pi + \frac{3\pi}{5}\right)\right)$

$$= sin^{-1}\left(cos\,\frac{3\pi}{5}\right)$$

$$= sin^{-1}\left(sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{5}\right)\right)$$

$$= sin^{-1}\left(sin\left(-\frac{\pi}{10}\right)\right) = -\frac{\pi}{10}$$

સાચો ઉકેલ (D) છે.

**ઉદાહરણ 25 :** $cos^{-1}$ [$cos$ (– 680°)] ની કિંમત .......... છે.

(A) $\frac{2\pi}{9}$ (B) $\frac{-2\pi}{9}$ (C) $\frac{34\pi}{9}$ (D) $\frac{\pi}{9}$

**ઉકેલ :** $cos^{-1}$ ($cos$ (–680°)) = $cos^{-1}$ ($cos$ (680°)) = $cos^{-1}$ [$cos$ (720° – 40°)]

= $cos^{-1}$ [$cos$ (– 40°)]

= $cos^{-1}$ [$cos$ (40°)]

$$= cos^{-1}\left(cos\frac{2\pi}{9}\right)$$

$$= \frac{2\pi}{9}$$

સાચો ઉકેલ (A) છે.

**ઉદાહરણ 26 :** $cot$ ($sin^{-1}x$) નું મૂલ્ય .......... છે.

(A) $\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$ (B) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ (C) $\frac{1}{x}$ (D) $\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

**ઉકેલ :** ધારો કે, $sin^{-1} x = \theta$, તો $sin\,\theta = x$ $\qquad -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

$$\therefore\ cosec\,\theta = \frac{1}{x}$$

$$\therefore\ cosec^2\theta = \frac{1}{x^2}$$

$$\therefore\ 1 + cot^2\,\theta = \frac{1}{x^2}$$

$\therefore\ cot\,\theta = \pm\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$. આ પૈકી એક ઉકેલ $\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ છે.

સાચો ઉકેલ (D) છે.

**ઉદાહરણ 27 :** જો $tan^{-1}x = \frac{\pi}{10}$, $x \in$ **R**, તો $cot^{-1}x$ નું મૂલ્ય .......... છે.

(A) $\frac{\pi}{5}$ (B) $\frac{2\pi}{5}$ (C) $\frac{3\pi}{5}$ (D) $\frac{4\pi}{5}$

**ઉકેલ :** આપણે જાણીએ છીએ કે, $tan^{-1}x + cot^{-1}x = \frac{\pi}{2}$.

$$\therefore\ cot^{-1}x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{10}$$

$$\therefore\ cot^{-1}x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{10} = \frac{2\pi}{5}.$$

સાચો ઉકેલ (B) છે.

**ઉદાહરણ 28 :** $sin^{-1}\ 2x$ નો પ્રદેશગણ .......... છે.

(A) $[0, 1]$ (B) $[-1, 1]$ (C) $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ (D) $[-2, 2]$

**ઉકેલ :** ધારો કે, $sin^{-1}2x = \theta$, તો $2x = sin\ \theta$.

હવે, $-1 \le sin\ \theta \le 1$

$\therefore\ -1 \le 2x \le 1$

$\therefore\ -\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2}$.

સાચો વિકલ્પ (C) છે.

**ઉદાહરણ 29 :** $sin^{-1}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$ની કિંમત .......... છે.

(A) $-\frac{2\pi}{3}$ (B) $-\frac{\pi}{3}$ (C) $\frac{4\pi}{3}$ (D) $\frac{5\pi}{3}$

**ઉકેલ :** $sin^{-1}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) = sin^{-1}\left(-sin\frac{\pi}{3}\right) = -sin^{-1}\left(sin\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\pi}{3}$

સાચો વિકલ્પ (B) છે.

**ઉદાહરણ 30 :** $(sin^{-1}x)^2 + (cos^{-1}x)^2$ ની મહત્તમ અને ન્યૂનતમ કિંમતો અનુક્રમે ......... છે.

(A) $\frac{5\pi^2}{4}$ અને $\frac{\pi^2}{8}$ (B) $\frac{\pi}{2}$ અને $\frac{-\pi}{2}$ (C) $\frac{\pi^2}{4}$ અને $\frac{-\pi^2}{4}$ (D) $\frac{\pi^2}{4}$ અને 0

**ઉકેલ :** $(sin^{-1}x)^2 + (cos^{-1}x)^2 = (sin^{-1}x + cos^{-1}x)^2 - 2sin^{-1}x\ cos^{-1}\ x$

$$= \frac{\pi^2}{4} - 2\,sin^{-1}x\left(\frac{\pi}{2} - sin^{-1}x\right)$$

$$= \frac{\pi^2}{4} - \pi\,sin^{-1}x + 2\left(sin^{-1}x\right)^2$$

$$= 2\left[\left(sin^{-1}x\right)^2 - \frac{\pi}{2}sin^{-1}x + \frac{\pi^2}{8}\right]$$

$$= 2\left[\left(sin^{-1}x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{\pi^2}{16}\right]$$

તેથી, ન્યૂનતમ કિંમત $= 2\left(\frac{\pi^2}{16}\right) = \frac{\pi^2}{8}$ અને મહત્તમ કિંમત $2\left[\left(\frac{-\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{\pi^2}{16}\right] = \frac{5\pi^2}{4}$.

સાચો ઉકેલ (A) છે.

**નોંધ :** $\left(sin^{-1}x - \frac{\pi}{4}\right)^2 \ge 0$. $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ માટે $sin^{-1}x - \frac{\pi}{4} = 0$, $x = -1$ માટે મહત્તમ મૂલ્ય મળે.

**ઉદાહરણ 31 :** જો $\theta = sin^{-1}\ (sin\ (-600°))$ હોય, તો $\theta$ નું મૂલ્ય .......... છે.

(A) $\frac{\pi}{3}$ (B) $\frac{\pi}{2}$ (C) $\frac{2\pi}{3}$ (D) $\frac{-2\pi}{3}$

**ઉકેલ :** $sin^{-1}\left(sin\left(-600\times\frac{\pi}{180}\right)\right) = sin^{-1}\left(sin\left(\frac{-10\pi}{3}\right)\right)$

$= sin^{-1}\left[-\,sin\left(4\pi-\frac{2\pi}{3}\right)\right]$

$= sin^{-1}\left(sin\frac{2\pi}{3}\right)$

$= sin^{-1}\left(sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)\right)$

$= sin^{-1}\left(sin\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3}$

સાચો ઉકેલ (A) છે.

**ઉદાહરણ 32 :** $y = sin^{-1}(-x^2)$ નો પ્રદેશગણ .......... છે.

(A) $[0, 1]$ (B) $(0, 1)$ (C) $[-1, 1]$ (D) $\phi$

**ઉકેલ :** $y = sin^{-1}(-x^2) \Rightarrow sin y = -x^2$

હવે, $-1 \le -x^2 \le 1$ **$(-1 \le sin\ y \le 1)$**

$\therefore\ 1 \ge x^2 \ge -1$

$\therefore\ 0 \le x^2 \le 1$

$\therefore\ |x| \le 1$ એટલે $-1 \le x \le 1$

સાચો ઉકેલ (C) છે.

**ઉદાહરણ 33 :** $y = cos^{-1}(x^2 - 4)$ નો પ્રદેશગણ .......... છે.

(A) $[3, 5]$ (B) $[0, \pi]$

(C) $\left[-\sqrt{5}, -\sqrt{3}\right] \cap \left[-\sqrt{5}, \sqrt{3}\right]$ (D) $\left[-\sqrt{5}, -\sqrt{3}\right] \cup \left[\sqrt{3}, \sqrt{5}\right]$

**ઉકેલ :** $y = cos^{-1}(x^2 - 4) \Rightarrow cos\ y = x^2 - 4$

હવે, $-1 \le x^2 - 4 \le 1$ આવશ્યક છે. **$(-1 \le cos\ y \le 1)$**

$\therefore\ 3 \le x^2 \le 5$

$\therefore\ \sqrt{3} \le |x| \le \sqrt{5}$

$\therefore\ x \in \left[-\sqrt{5}, -\sqrt{3}\right] \cup \left[\sqrt{3}, \sqrt{5}\right]$

સાચો ઉકેલ (D) છે.

**ઉદાહરણ 34 :** $f(x) = sin^{-1}x + cos\,x$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત વિધેયનો પ્રદેશગણ .......... છે.

(A) $[-1, 1]$ (B) $[-1, \pi + 1]$ (C) $(-\infty, \infty)$ (D) $\phi$

**ઉકેલ :** $cos$ વિધેયનો પ્રદેશ **R** છે અને $sin^{-1}$ વિધેયનો પ્રદેશ $[-1, 1]$ છે. તેથી, $cos\,x + sin^{-1}x$ નો પ્રદેશ $= \mathbf{R} \cap [-1, 1] = [-1, 1]$ થાય.

સાચો ઉકેલ (A) છે.

**ઉદાહરણ 35 :** $sin\,(2\,sin^{-1}(0.6))$ નું મૂલ્ય .......... છે.

(A) 0.48 (B) 0.96 (C) 1.2 (D) $sin$ 1.2

**ઉકેલ :** જો $sin^{-1}\,(0.6) = \theta$, તો $sin\,\theta = 0.6$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ **$(cos\,\theta > 0)$**

હવે, $sin\,(2\theta) = 2sin\theta\,cos\theta = 2(0.6)(0.8) = 0.96$

સાચો ઉકેલ (B) છે,

**ઉદાહરણ 36 :** જો $sin^{-1}\,x + sin^{-1}\,y = \frac{\pi}{2}$, તો $cos^{-1}\,x + cos^{-1}\,y =$ .......... .

(A) $\frac{\pi}{2}$ (B) $\pi$ (C) 0 (D) $\frac{2\pi}{3}$

**ઉકેલ :** અહીં, $sin^{-1}\,x + sin^{-1}\,y = \frac{\pi}{2}$.

$$\therefore \left(\frac{\pi}{2} - cos^{-1}x\right) + \left(\frac{\pi}{2} - cos^{-1}y\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore cos^{-1}x + cos^{-1}y = \frac{\pi}{2}$$

સાચો ઉકેલ (A) છે.

**ઉદાહરણ 37 :** $tan\left(cos^{-1}\frac{3}{5} + tan^{-1}\frac{1}{4}\right)$ નું મૂલ્ય .......... છે.

(A) $\frac{19}{8}$ (B) $\frac{8}{19}$ (C) $\frac{19}{12}$ (D) $\frac{3}{4}$

**ઉકેલ :** $tan\left(cos^{-1}\frac{3}{5} + tan^{-1}\frac{1}{4}\right) = tan\left(tan^{-1}\frac{4}{3} + tan^{-1}\frac{1}{4}\right)$

$$= tan\left(tan^{-1}\left(\frac{\frac{4}{3}+\frac{1}{4}}{1-\frac{4}{3}\times\frac{1}{4}}\right)\right) \qquad \left(xy = \frac{1}{3} < 1\right)$$

$$= tan\left(tan^{-1}\frac{19}{8}\right)$$

$$= \frac{19}{8}$$

સાચો ઉકેલ (A) છે.

**ઉદાહરણ 38 :** $sin\,[cot^{-1}\,(cos\,(tan^{-1}\,1))]$ નું મૂલ્ય .......... છે.

(A) 0 (B) 1 (C) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (D) $\sqrt{\frac{2}{3}}$

**ઉકેલ :** $sin\left[cot^{-1}\left(cos\frac{\pi}{4}\right)\right] = sin\left[cot^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}\right] = sin\left[sin^{-1}\sqrt{\frac{2}{3}}\right] = \sqrt{\frac{2}{3}}$

સાચો ઉકેલ (D) છે.

**નોંધ :** $cot^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}} = \theta$, તો $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$. આથી $sin\,\theta = \sqrt{\frac{2}{3}}$

**ઉદાહરણ 39 :** $tan^{-1}x - cot^{-1}x = tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ સમીકરણનો ઉકેલ .......... .

(A) $\phi$ (B) એકાકી

(C) અનંત ગણ છે (D) બે ઘટકોનો બનેલો ગણ છે

**ઉકેલ :** $tan^{-1}x - cot^{-1}x = \frac{\pi}{6}$ અને $tan^{-1}x + cot^{-1}x = \frac{\pi}{2}$

સમીકરણોનો સરવાળો કરતાં, $2tan^{-1}x = \frac{2\pi}{3}$

$\therefore \quad tan^{-1}x = \frac{\pi}{3}$ i.e., $x = \sqrt{3}$

સાચો ઉકેલ (B) છે.

**ઉદાહરણ 40 :** $\alpha \le 2sin^{-1}x + cos^{-1}x \le \beta$, તો .......... .

(A) $\alpha = \frac{-\pi}{2}, \beta = \frac{\pi}{2}$ (B) $\alpha = 0, \beta = \pi$

(C) $\alpha = \frac{-\pi}{2}, \beta = \frac{3\pi}{2}$ (D) $\alpha = 0, \beta = 2\pi$

**ઉકેલ :** $\frac{-\pi}{2} \le sin^{-1}x \le \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \frac{-\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \le sin^{-1}x + \frac{\pi}{2} \le \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow 0 \le sin^{-1}x + (sin^{-1}x + cos^{-1}x) \le \pi$

$\Rightarrow 0 \le 2sin^{-1}x + cos^{-1}x \le \pi$

સાચો ઉકેલ (B) છે.

**નોંધ :** $\alpha$ મહત્તમ શક્ય અને $\beta$ ન્યૂનતમ શક્ય સંખ્યા છે.

**ઉદાહરણ 41 :** $tan^2(sec^{-1}2) + cot^2(cosec^{-1}3)$ નું મૂલ્ય .......... છે.

(A) 5 (B) 11 (C) 13 (D) 15

**ઉકેલ :** $tan^2(sec^{-1}2) + cot^2(cosec^{-1}3) = sec^2(sec^{-1}2) - 1 + cosec^2(cosec^{-1}3) - 1$

$= 2^2 - 1 + 3^2 - 1 = 11$

સાચો ઉકેલ (B) છે.

## સ્વાધ્યાય 2.3

### ટૂંક જવાબી પ્રશ્નો (S.A.)

**1.** $tan^{-1}\left(tan\frac{5\pi}{6}\right) + cos^{-1}\left(cos\frac{13\pi}{6}\right)$ નું મૂલ્ય શોધો.

**2.** કિંમત શોધો : $cos\left[cos^{-1}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{\pi}{6}\right]$

**3.** સાબિત કરો : $cot\left(\frac{\pi}{4} - 2cot^{-1}3\right) = 7$

**4.** $tan^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + cot^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + tan^{-1}\left(sin\left(\frac{-\pi}{2}\right)\right)$ નું મૂલ્ય શોધો.

**5.** $tan^{-1}\left(tan\frac{2\pi}{3}\right)$ નું મૂલ્ય શોધો.

**6.** સાબિત કરો : $2tan^{-1}(-3) = \frac{-\pi}{2} + tan^{-1}\left(\frac{-4}{3}\right)$

**7.** સમીકરણ $tan^{-1}\sqrt{x(x+1)} + sin^{-1}\sqrt{x^2+x+1} = \frac{\pi}{2}$ નો વાસ્તવિક ઉકેલ મેળવો.

**8.** $sin\left(2tan^{-1}\frac{1}{3}\right) + cos\left(tan^{-1}2\sqrt{2}\right)$ નું મૂલ્ય શોધો.

**9.** જો $2tan^{-1}(cos\,\theta) = tan^{-1}(2\,cosec\,\theta)$ હોય, તો સાબિત કરો કે, $\theta = n\pi + \frac{\pi}{4}$

$n$ એ કોઈ પૂર્ણાંક છે.

**10.** સાબિત કરો : $cos\left(2tan^{-1}\frac{1}{7}\right) = sin\left(4tan^{-1}\frac{1}{3}\right)$

**11.** ઉકેલો : $cos\left(tan^{-1}x\right) = sin\left(cot^{-1}\frac{3}{4}\right)$

## વિસ્તૃત જવાબી પ્રશ્નો (L.A.)

**12.** સાબિત કરો : $tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}\right) = \frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}cos^{-1}x^2$

**13.** સરળ સ્વરૂપમાં ફેરવો : $cos^{-1}\left(\frac{3}{5}cos\,x+\frac{4}{5}sin\,x\right)$, જ્યાં, $x \in \left[\frac{-3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$.

**14.** સાબિત કરો : $sin^{-1}\frac{8}{17} + sin^{-1}\frac{3}{5} = sin^{-1}\frac{77}{85}$

**15.** સાબિત કરો : $sin^{-1}\frac{5}{13} + cos^{-1}\frac{3}{5} = tan^{-1}\frac{63}{16}$

**16.** સાબિત કરો : $tan^{-1}\frac{1}{4} + tan^{-1}\frac{2}{9} = sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}}$

**17.** $4tan^{-1}\frac{1}{5} - tan^{-1}\frac{1}{239}$ નું મૂલ્ય શોધો.

**18.** $tan\left(\frac{1}{2}sin^{-1}\frac{3}{4}\right) = \frac{4-\sqrt{7}}{3}$ સાબિત કરો અને દર્શાવો તેનું મૂલ્ય $\frac{4+\sqrt{7}}{3}$ કેમ નથી ?

**19.** જો સમાંતર શ્રેણી $a_1, a_2, a_3,...,a_n$ ના બે ક્રમિક પદો વચ્ચેનો તફાવત $d$ હોય, તો નીચેની પદાવલિનું મૂલ્ય મેળવો :

$$tan\left[tan^{-1}\left(\frac{d}{1+a_1a_2}\right)+tan^{-1}\left(\frac{d}{1+a_2a_3}\right)+tan^{-1}\left(\frac{d}{1+a_3a_4}\right)+...+tan^{-1}\left(\frac{d}{1+a_{n-1}a_n}\right)\right]$$

## હેતુલક્ષી પ્રશ્નો

**વિધાન સત્ય બને તે રીતે આપેલ ચાર વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી નીચેના ક્રમાંક 20 થી 37 વાળા પ્રશ્નોના ઉત્તર આપો :**

**20.** નીચેના પૈકી $cos^{-1}x$ ની મુખ્ય કિંમતવાળી શાખા કઈ છે ?

(A) $\left[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ (B) $(0, \pi)$ (C) $[0, \pi]$ (D) $(0, \pi) - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$

**21.** નીચેના પૈકી $cosec^{-1}x$ ની મુખ્ય કિંમતવાળી શાખા કઈ છે ?

(A) $\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ (B) $[0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ (C) $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ (D) $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$

**22.** જો $3tan^{-1} x + cot^{-1} x = \pi$ હોય, તો $x$ = .......... .

(A) 0 (B) 1 (C) –1 (D) $\frac{1}{2}$

**23.** $sin^{-1}\left(cos\left(\frac{33\pi}{5}\right)\right)$ નું મૂલ્ય .......... છે.

(A) $\frac{3\pi}{5}$ (B) $\frac{-7\pi}{5}$ (C) $\frac{\pi}{10}$ (D) $\frac{-\pi}{10}$

**24.** $cos^{-1} (2x - 1)$ નો પ્રદેશગણ .......... છે.

(A) [0, 1] (B) [–1, 1] (C) ( –1, 1) (D) [0, π]

**25.** $f(x) = sin^{-1} \sqrt{x-1}$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત વિધેયનો પ્રદેશગણ .......... છે.

(A) [1, 2] (B) [–1, 1] (C) [0, 1] (D) આ પૈકી એક પણ નહિ.

**26.** જો $cos\left(sin^{-1}\frac{2}{5} + cos^{-1}x\right) = 0$ હોય, તો $x$ = .......... .

(A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{2}{5}$ (C) 0 (D) 1

**27.** $sin(2tan^{-1}(0.75))$ નું મૂલ્ય .......... છે.

(A) 0.75 (B) 1.5 (C) 0.96 (D) $sin\ 1.5$

**28.** $cos^{-1}\left(cos\frac{3\pi}{2}\right)$ નું મૂલ્ય .......... છે.

(A) $\frac{\pi}{2}$ (B) $\frac{3\pi}{2}$ (C) $\frac{5\pi}{2}$ (D) $\frac{7\pi}{2}$

**29.** $2\ sec^{-1} 2 + sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ નું મૂલ્ય .......... છે.

(A) $\frac{\pi}{6}$ (B) $\frac{5\pi}{6}$ (C) $\frac{7\pi}{6}$ (D) 1

**30.** જો $tan^{-1} x + tan^{-1}y = \frac{4\pi}{5}$ હોય, તો $cot^{-1} x + cot^{-1} y$ = .......... .

(A) $\frac{\pi}{5}$ (B) $\frac{2\pi}{5}$ (C) $\frac{3\pi}{5}$ (D) π

**31.** જો $sin^{-1}\left(\frac{2a}{1+a^2}\right) + cos^{-1}\left(\frac{1-a^2}{1+a^2}\right) = tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$ હોય, તો જ્યાં, $a, x \in (0, 1)$, તો $x$ નું મૂલ્ય ......... છે.

(A) 0 (B) $\frac{a}{2}$ (C) $a$ (D) $\frac{2a}{1-a^2}$

**32.** $cot\left[cos^{-1}\left(\frac{7}{25}\right)\right]$ નું મૂલ્ય .......... છે.

(A) $\frac{25}{24}$ (B) $\frac{25}{7}$ (C) $\frac{24}{25}$ (D) $\frac{7}{24}$

**33.** $tan\left(\frac{1}{2}cos^{-1}\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ નું મૂલ્ય .......... છે.

(A) $2+\sqrt{5}$ (B) $\sqrt{5}-2$ (C) $\frac{\sqrt{5}+2}{2}$ (D) $5+\sqrt{2}$

[ **સૂચન** : $tan\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1-cos\theta}{1+cos\theta}}$ ] $\left(tan\ \frac{\theta}{2} > 0\ ?\right)$

**34.** જો $|\ x\ | \le 1$ હોય, તો $2\ tan^{-1}\ x + sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) =$ .......... .

(A) $4\ tan^{-1}\ x$ (B) 0 (C) $\frac{\pi}{2}$ (D) $\pi$

**35.** જો $cos^{-1}\ \alpha + cos^{-1}\ \beta + cos^{-1}\ \gamma = 3\pi$ હોય, તો $\alpha\ (\beta + \gamma) + \beta\ (\gamma + \alpha) + \gamma\ (\alpha + \beta) =$ .......... .

(A) 0 (B) 1 (C) 6 (D) 12

**36.** સમીકરણ $\sqrt{1+cos\,2x} = \sqrt{2}\,cos^{-1}\,(cos\,x)$ ના $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ માં આવેલા ઉકેલોની સંખ્યા .......... છે.

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) અનંત

**37.** જો $cos^{-1}x > sin^{-1}x$ હોય, તો

(A) $\frac{1}{\sqrt{2}} < x \le 1$ (B) $-1 \le x \le 1$ (C) $-1 \le x < \frac{1}{\sqrt{2}}$ (D) $x > 0$

**વિધાન સત્ય બને તે રીતે ક્રમાંક 38 થી 48 વાળા પ્રશ્નોની ખાલી જગ્યા પૂરો :**

**38.** $cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ ની કિંમત .......... છે.

**39.** $sin^{-1}\left(sin\frac{3\pi}{5}\right)$ નું મૂલ્ય .......... છે.

**40.** જો $cos\ (tan^{-1}\ x + cot^{-1}\sqrt{3}) = 0$ હોય, તો $x$ નું મૂલ્ય .......... છે.

**41.** $sec^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ નાં મૂલ્યોનો ગણ .......... છે.

**42.** $tan^{-1}\sqrt{3}$ ની કિંમત ........... છે.

**43.** $cos^{-1}\left(cos\frac{14\pi}{3}\right)$ નું મૂલ્ય ......... છે.

**44.** $cos\ (sin^{-1}\ x + cos^{-1}\ x),\ |x| \le 1$ નું મૂલ્ય ......... છે.

**45.** $tan\left(\frac{sin^{-1}x + cos^{-1}x}{2}\right)$ નું મૂલ્ય $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ માટે ......... છે.

**46.** જો પ્રત્યેક $x$ માટે $y = 2tan^{-1}x + sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$ હોય, તો ........... $< y <$ ........... .

(મહત્તમ તથા ન્યૂનતમ શક્ય મૂલ્યો)

**47.** પરિણામ $tan^{-1}x - tan^{-1}y = tan^{-1}\left(\frac{x-y}{1+xy}\right)$ એ $xy$ ની .......... કિંમત માટે સત્ય છે.

**48.** પ્રત્યેક $x \in \mathbf{R}$ માટે $cot^{-1}(-x)$ નું મૂલ્ય $cot^{-1}x$ ના સ્વરૂપમાં .......... છે.

**નીચેના ક્રમાંક 49 થી 55 નાં વિધાનો સત્ય છે કે અસત્ય તે નક્કી કરો :**

**49.** દરેક ત્રિકોણમિતીય વિધેયોનું પ્રતિવિધેય તેના પ્રદેશગણ પર મળે છે.

**50.** પદાવલિ $(cos^{-1}x)^2$ નું મૂલ્ય $sec^2 x$ બરાબર છે.

**51.** ત્રિકોણમિતીય વિધેયનું પ્રતિવિધેય વ્યાખ્યાયિત કરવા મર્યાદિત પ્રદેશગણ તરીકે તેની શાખાઓ પૈકી (મુખ્ય શાખા સિવાયની) કોઈ પણ શાખા લઈ શકાય.

**52.** $\theta$ ના નાનામાં નાના ધન કે ઋણ મૂલ્યને તે ત્રિકોણમિતીય વિધેયની મુખ્ય કિંમત કહે છે.

**53.** આપેલ ત્રિકોણમિતીય વિધેયના આલેખ પરથી તેના પ્રતિવિધેયનો આલેખ $x$-અક્ષ અને $y$-અક્ષની અદલાબદલી કરી મેળવી શકાય.

**54.** $n$ નું નાનામાં નાનું મૂલ્ય કે જેથી, $tan^{-1}\frac{n}{\pi} > \frac{\pi}{4}$, $n \in \mathbf{N}$ થાય, તે 5 છે.

**55.** $sin^{-1}\left[cos\left(sin^{-1}\frac{1}{2}\right)\right]$ ની મુખ્ય કિંમત $\frac{\pi}{3}$ છે.