अध्याय 4

वर्गमूल एवं घनमूल

वर्ग

किसी संख्या (x) को उसी संख्या (x) से गुणा करने पर जो परिणाम (x^2) प्राप्त होता है, उसे उस संख्या का वर्ग कहते हैं। जैसे—संख्या 5 में 5 की गुणा करने पर अभीष्ट परिणाम $= 5 \times 5 = 5^2 = 25$ यहाँ 25, 5 का वर्ग है।

उदाहरण 1 किसी विद्यालय में छात्रों की संख्या छात्राओं की संख्या के वर्ग से आधी है। यदि छात्राओं की संख्या 26 हो तो विद्यालय में कुल कितने बच्चे हैं?

(a) 364 (b) 312 (c) 317 (d) 324

हल (*a*) दिया है, छात्राओं की संख्या = 26

$\therefore$ छात्रों की संख्या $= \frac{(26)^2}{2} = \frac{676}{2} = 338$

अत: कुल विद्यार्थी = छात्र + छात्राओं की संख्या
$= 338 + 26 = 364$

वर्गमूल

किसी संख्या का वर्गमूल वह संख्या होती है जिसे परस्पर दो बार गुणा करने पर दी गई संख्या प्राप्त होती है। इसे चिह्न $\sqrt{\ }$ से दर्शाते हैं।

जैसे— $\sqrt{25} = 5$; $\sqrt{16} = 4$; $\sqrt{196} = 14$

वर्गमूल ज्ञात करने की विधियाँ

किसी संख्या का वर्गमूल निम्नलिखित दो विधियों से ज्ञात किया जाता है

1. गुणनखण्ड विधि

सर्वप्रथम दी गई संख्या के अभाज्य गुणनखण्ड करते हैं। तत्पश्चात् प्रत्येक समान गुणनखण्ड के दो-दो के समूह बनाते हैं। प्रत्येक समूह या युग्म से एक-एक संख्या चुनकर उन सब की परस्पर गुणा कर देते हैं। प्राप्त गुणनफल ही अभीष्ट वर्गमूल होता है।

उदाहरणार्थ 1764 का वर्गमूल गुणनखण्ड विधि से ज्ञात करना

विधि सर्वप्रथम दी गई संख्या के अभाज्य गुणनखण्ड करने पर,

अभाज्य गुणनखण्ड $= 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 7 \times 7$

$= (\overline{2 \times 2}) \times (\overline{3 \times 3}) \times (\overline{7 \times 7})$ (जोड़े बनाने पर)

$= 2 \times 3 \times 7$ (एक-एक संख्या चुनने पर)

$= 42$

अत: $\sqrt{1764} = 42$

2	1764
2	882
3	441
3	147
7	49
7	7
	1

2. भाग विधि

माना संख्या $\sqrt{1764}$ है

चरण (i) इस विधि में सर्वप्रथम दी गई संख्या को एक ऊर्ध्वाधर रेखा खींचकर उसके दाईं ओर ज्यों का त्यों लिख देते हैं। उसके ऊपर भी एक रेखा खींचते हैं।

$\overline{1764}$

चरण (ii) दी गई संख्या के युग्म बनाते हैं जिसे दाईं ओर से ही आरम्भ करते हैं। यदि कोई संख्या बाईं ओर अकेली रहती है तो उसे बिना जोड़ा बनाए लिखते हैं।

$\overline{17}\ \overline{64}$

चरण (iii) पहले जोड़े (या अकेली संख्या) के लिए एक ऐसी संख्या लेते है जिसका वर्ग या तो उस जोड़े के बराबर हो या कम (यहाँ 4 का वर्ग 16 है जो 17 से कम है।) ली गई संख्या को ऊर्ध्व रेखा के बाईं ओर तथा ऊपर की सीधी रेखा के ऊपर भागफल के रूप में दर्शाते हैं।

```
   4
4 | 17 64
    16
    --
```

चरण (iv) ली गई संख्या तथा भागफल के गुणनफल को जोड़े (युग्म) वाली संख्या से घटाते हैं और भागफल के बराबर संख्या भाजक में जोड़ लेते हैं। प्राप्त योगफल नए भाजक से शेषफल एवं ऊपर से उतारे गए जोड़े में भाग क्रिया उपरोक्त प्रकार करते हैं

```
    42
4 | 17 64
+4| 16
--|----
82| 164
    164
    ---
      ×
```

उदाहरण 2 $\sqrt{15876}$ का मान है

(a) 136 (b) 126
(c) 106 (d) 116

हल (*b*)

```
      126
1   | 1 58 76
+1  | 1
--  |-------
22  | × 58
+2  |   44
--  |-------
246 |  1476
    |  1476
    |  ----
    |    ×
```

अत: $\sqrt{15876} = 126$

दशमलव संख्याओं का वर्गमूल ज्ञात करना

यदि किसी दशमलव संख्या (भिन्न) में दशमलव बिन्दु के बाद अंकों की संख्या विषम है तो उसके अन्त में एक शून्य और लगा देते हैं और अब दाईं ओर से दो-दो अंकों के जोड़े बनाकर भाग विधि से वर्गमूल ज्ञात कर लेते हैं।

✓ उदाहरण 3 $\sqrt{0.9}$ का मान है

(a) 0.3 (b) 0.84
(c) 0.948 (d) 0.99

हल *(c)* दी गई संख्या में दशमलव के सम स्थान बनाने के लिए 0.9 = 0.90 लिखेंगे।

	0.948
9	0.90 00 00
+9	81
184	9 00
+4	7 36
1888	1 64 00
	1 51 04

दशमलव के तीन स्थानों तक $\sqrt{0.9}$ का मान 0.948 होगा।

घन

यदि किसी संख्या को स्वयं से दो बार गुणा कर दें तो वह दी गई संख्या का घन कहलाएगी। इसे चिह्न $()^3$ से दर्शाते हैं। जैसे— दी गई संख्या = 4

दो बार गुणा करने पर = $4 \times (4 \times 4) = 64$

अत: 64 एक घन संख्या है।

✓ उदाहरण 4 $(28)^3$ का मान है

(a) 21952 (b) 23792
(c) 20252 (d) 21752

हल *(a)* $(28)^3 = 28 \times 28 \times 28 = 21952$

घनमूल

किसी दी गई संख्या का घनमूल वह संख्या है जिसे स्वयं से दो बार गुणा करने पर दी गई संख्या प्राप्त होती है। इसे चिह्न $\sqrt[3]{\ }$ या $()^{\frac{1}{3}}$ से दर्शाते हैं।

जैसे— 512 का घनमूल = $\sqrt[3]{512}$ या $(512)^{\frac{1}{3}} = 8$

घनमूल ज्ञात करने की विधि

किसी संख्या का घनमूल ज्ञात करने के लिए उस संख्या के अभाज्य गुणनखण्ड करते हैं और प्रत्येक समान अभाज्य संख्याओं के तीन-तीन के समूह बनाते हैं। इसके बाद प्रत्येक समूह से एक-एक संख्या लेकर उनका गुणनफल ज्ञात करते हैं। यही गुणनफल अभीष्ट घनमूल होता है।

जैसे— $\sqrt[3]{5832}$ का मान अभाज्य गुणनखण्ड विधि से ज्ञात करना।

विधि

2	5832
2	2916
2	1458
3	729
3	243
3	81
3	27
3	9
3	3
	1

$\Rightarrow \quad \sqrt[3]{5832} = \sqrt[3]{(2 \times 2 \times 2) \times (3 \times 3 \times 3) \times (3 \times 3 \times 3)}$
$= 2 \times 3 \times 3$
$= 18$

✓ उदाहरण 5. 21600 को किस छोटी-से-छोटी संख्या से गुणा करें कि प्राप्त गुणनफल पूर्ण घन प्राप्त हो।

(a) 8 (b) 10 (c) 12 (d) 14

हल *(b)* सर्वप्रथम दी गई संख्या के अभाज्य गुणनखण्ड करने पर,

2	21600
2	10800
2	5400
2	2700
2	1350
3	675
3	225
3	75
5	25
5	5
	1

अभाज्य गुणनखण्ड = $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5$
$= (2 \times 2 \times 2) \times 2 \times 2 \times (3 \times 3 \times 3) \times 5 \times 5$

स्पष्ट है कि यदि उपरोक्त में 2 तथा 5 की गुणा कर दी जाए, तो यह पूर्ण घन संख्या बन जाएगी।

अत: गुणा की जाने वाली न्यूनतम संख्या = $2 \times 5 = 10$

✓ उदाहरण 6. वह कौन-सी छोटी संख्या है, जिससे 3600 को भाग देने पर परिणाम पूर्ण घन प्राप्त हो?

(a) 450 (b) 216000
(c) 4 (d) 225

हल *(a)* $\because 3600 = 3 \times 3 \times \overline{2 \times 2 \times 2} \times 2 \times 5 \times 5$

अत: 3600 में $3 \times 3 \times 2 \times 5 \times 5$ अर्थात् 450 से भाग देने पर परिणाम पूर्ण घन होगा।

✓ अभ्यास के लिए प्रश्न

1. $\sqrt{110\frac{1}{4}}$ बराबर है
(a) 12.0 (b) 11.5
(c) 11.0 (d) 10.5

2. चार अंकों वाली सबसे छोटी पूर्ण वर्ग संख्या है
(a) 1009 (b) 1016
(c) 1024 (d) 1025

3. छः अंकों वाली सबसे बड़ी पूर्ण वर्ग संख्या है
(a) 998001 (b) 999976
(c) 999856 (d) 997649

4. यदि $\sqrt{2^x} = 256$ है, तो x का मान होगा
(a) 14 (b) 16
(c) 18 (d) 20

5. 15876 के वर्गमूल में इकाई का अंक क्या होगा?
(a) 8 (b) 6
(c) 4 (d) 2

6. 0.09 का वर्गमूल है
(a) 0.3
(b) 0.98
(c) 0.03
(d) उपरोक्त में से कोई नहीं

7. $0.\overline{4}$ का वर्गमूल है
(a) $0.\overline{8}$ (b) $0.\overline{6}$
(c) $0.\overline{7}$ (d) $0.\overline{9}$

8. $\sqrt{\frac{0.49}{0.25}} + \sqrt{\frac{0.81}{0.36}}$ बराबर है
(a) $7\frac{9}{10}$ (b) $\frac{9}{10}$
(c) $2\frac{9}{10}$ (d) $4\frac{9}{10}$

9. $(272)^2 - (128)^2$ का वर्गमूल है
(a) 256 (b) 200
(c) 240 (d) 144

10. किस संख्या के वर्गमूल का $\frac{1}{3}$ भाग 0.001 है?
(a) 0.0009
(b) 0.000001
(c) 0.00009
(d) 0.000009

11. 120 तथा 300 के मध्य कितनी पूर्ण वर्ग संख्याएँ हैं?
(a) 5 (b) 6
(c) 7 (d) 8

12. 5808 को किस छोटी-से-छोटी संख्या से गुणा किया जाए कि वह पूर्ण वर्ग बन जाए?
(a) 2 (b) 11
(c) 7 (d) 3

13. वह छोटी-से-छोटी संख्या जिसे 680621 में जोड़ने पर योगफल पूर्ण वर्ग बन जाता है, निम्न है
(a) 4 (b) 5 (c) 6 (d) 8

14. वह छोटी-से-छोटी संख्या जिसे 63520 में से घटाने पर एक पूर्ण वर्ग प्राप्त हो, क्या है?
(a) 16 (b) 20
(c) 24 (d) 30

15. दो संख्याओं के वर्गों का योगफल 386 है। यदि एक संख्या 5 है तो दूसरी संख्या होगी
(a) 18 (b) 19
(c) 15 (d) 20

16. $\sqrt[3]{4\frac{12}{125}}$ का मान है
(a) 1.6 (b) 1.3
(c) 1.5 (d) 2.6

17. $\sqrt[3]{0.004096}$ का मान है
(a) 0.16 (b) 0.4
(c) 1.6 (d) 0.004

18. $\sqrt[3]{1372} \times \sqrt[3]{1458} \div \sqrt[3]{343}$ का मान है
(a) 18 (b) 15
(c) 13 (d) 12

19. $[(50)^3 + (-30)^3 + (-20)^3]$ बराबर है
(a) 17000 (b) 15000
(c) 90000 (d) 900000

20. $\sqrt[3]{333 + \sqrt[3]{987 + \sqrt[3]{2197}}}$ बराबर है
(a) 21 (b) 18
(c) 7 (d) 3

21. यदि 175616 का घनमूल 56 है तो
$\sqrt[3]{175.616} + \sqrt[3]{0.175616} + \sqrt[3]{0.000175616}$
का मान कितना होगा?
(a) 0.168
(b) 62.16
(c) 6.216
(d) 6.116

✓ विगत् वर्षों के प्रश्न

22. 1008 को किस एक अंक वाली संख्या से विभाजित किया जाए कि भागफल एक पूर्ण वर्ग संख्या बन जाए? **[SSC कांस्टेबल, 2015]**
(a) 8 (b) 7
(c) 4 (d) 9

23. $\sqrt{.000441}$ का मान क्या है? **[SSC कांस्टेबल, 2015]**
(a) 0.0021
(b) 0.21
(c) 0.00021
(d) 0.021

24. 243000 को किस लघुत्तम संख्या से विभाजित किया जाए कि भागफल एक पूर्ण घन संख्या बन जाए? **[SSC कान्स्टेबल, 2015]**
(a) 1 (b) 3
(c) 27 (d) 9

25. यदि $0.42 \times 100^k = 42$ हो, तो k का मान कितना है? **[SSC कांस्टेबल, 2011]**
(a) 4 (b) 2
(c) 1 (d) 3

उत्तरमाला

1 (d)	2 (c)	3 (a)	4 (b)	5 (b)
6 (a)	7 (b)	8 (c)	9 (c)	10 (d)
11 (c)	12 (d)	13 (a)	14 (a)	15 (b)
16 (a)	17 (a)	18 (a)	19 (c)	20 (c)
21 (c)	22 (b)	23 (d)	24 (d)	25 (c)

संकेत एवं हल

1. (d) $\sqrt{110\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{440+1}{4}}$

$= \sqrt{\frac{441}{4}}$

$= \frac{21}{2} = 10.5$

2. (c) चार अंकों की सबसे छोटी संख्या = 1000

1000 के सबसे निकटतम पूर्ण वर्ग संख्या = 1024

3. (a) छः अंकों की सबसे बड़ी संख्या = 999999

9	999 99 99 99
+9	81
189	18 99
+9	17 01
1989	1 98 99
	1 79 01
	19 98

अतः छः अंकों की सबसे बड़ी संख्या

= 999999 – 1998 = 998001

4. (b) $\sqrt{2^x} = 256$ $(\sqrt{2^x})^2 = 256 \times 256$

$2^x = 256 \times 256 = 2^8 \times 2^8$

$2^x = 2^{8+8}$

$2^x = 2^{16}$

$\therefore \quad x = 16$

5. (b)

2	15876
2	7938
3	3969
3	1323
3	441
3	147
7	49
7	7
	1

$\sqrt{15876} = \sqrt{2^2 \times 3^2 \times 3^2 \times 7^2}$

$= 2 \times 3 \times 3 \times 7 = 126$

अतः अभीष्ट इकाई अंक = 6

6. (a) 0.09 का वर्गमूल $= \sqrt{0.09} = \sqrt{\frac{9}{100}}$

$= \frac{3}{10} = 0.3$

7. (b) $0.\overline{4}$ का वर्गमूल $= \sqrt{0.\overline{4}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$

$= 0.666666\ldots = 0.\overline{6}$

8. (c) $\sqrt{\frac{0.49}{0.25}} + \sqrt{\frac{0.81}{0.36}} = \sqrt{\frac{49}{25}} + \sqrt{\frac{81}{36}}$

$= \frac{7}{5} + \frac{9}{6} = \frac{7}{5} + \frac{3}{2}$

$= \frac{14+15}{10} = \frac{29}{10} = 2\frac{9}{10}$

9. (c) $\sqrt{272^2 - 128^2}$

$= \sqrt{(272+128)(272-128)}$

$[\because a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)]$

$= \sqrt{400 \times 144} = 20 \times 12 = 240$

10. (d) माना x के वर्गमूल का $\frac{1}{3} = 0.001$

$\sqrt{x} \times \frac{1}{3} = 0.001 \Rightarrow \sqrt{x} = 3 \times 0.001 = 0.003$

$x = 0.003 \times 0.003 = 0.000009$

11. (c) 120 तथा 300 के मध्य पूर्ण वर्ग संख्याएँ इस प्रकार हैं

$11^2 = 121, 12^2 = 144, 13^2 = 169, 14^2 = 196$

$15^2 = 225, 16^2 = 256, 17^2 = 289$ कुल सात (7)

अतः कुल सात संख्याएँ हैं।

12. (d) 5808 के अभाज्य गुणनखण्ड करने पर,

2	5808
2	2904
2	1452
2	726
3	363
11	121
11	11
	1

$\therefore \quad 5808 = 2^2 \times 2^2 \times 3 \times 11^2$

अतः यदि उपरोक्त में 3 से गुणा कर दी जाए, तो दी गई संख्या पूर्ण वर्ग बन जाएगी।

13. (a) 680621 (दी गई संख्या)

चूँकि $\sqrt{680625} = \sqrt{(825)^2} = 825$

अतः जोड़ी जाने वाली संख्या

= 680625 – 680621 = 4

14. (a)

	252
2	63520
+2	4
45	235
+5	225
502	1020
	1004
	16

अतः घटाई जाने वाली संख्या शेषफल = 16

15. (b) माना संख्याएँ x और y हैं।

प्रश्नानुसार, $x^2 + y^2 = 386$

(इनमें एक संख्या = 5 है)

अतः $5^2 + y^2 = 386$

$y^2 = 386 - 25 = 361 \Rightarrow y = 19$

16. (a) $\sqrt[3]{4\frac{12}{125}} = \sqrt[3]{\frac{500+12}{125}}$

$= \left(\frac{512}{125}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{8}{5} = 1.6$

17. (a) $\sqrt[3]{0.004096} = \sqrt{\frac{4096}{1000000}}$

$= \sqrt[3]{\frac{16 \times 16 \times 16}{100 \times 100 \times 100}} = \frac{16}{100} = 0.16$

18. (a) $\sqrt[3]{1372} \times \sqrt[3]{1458} \div \sqrt[3]{343}$

$= \frac{\sqrt[3]{1372 \times 1458}}{\sqrt[3]{343}} = \sqrt[3]{\frac{1372 \times 1458}{343}}$

$= \sqrt[3]{4 \times 1458} = \sqrt[3]{4 \times 2 \times 729}$

$= \sqrt[3]{(2)^3 \times (9)^3} = 2 \times 9 = 18$

19. (c) $[(50)^3 + (-30)^3 + (-20)^3]$

$= 125000 + (-27000) + (-8000)$

$= 125000 - 27000 - 8000$

$= 125000 - 35000 = 90000$

20. (c) $\sqrt[3]{333 + \sqrt[3]{987 + \sqrt[3]{2197}}}$

$= \sqrt[3]{333 + \sqrt[3]{987 + 13}}$

$= \sqrt[3]{333 + \sqrt[3]{1000}}$

$= \sqrt[3]{333 + 10} = \sqrt[3]{343} = 7$

21. (c) 175616 का घनमूल = 56

$\sqrt[3]{175.616} + \sqrt[3]{0.175616} + \sqrt[3]{0.000175616}$

$\because \quad (56)^3 = 175616$

$\therefore \quad (5.6)^3 = 175.616 \quad \ldots(i)$

$\therefore \quad (0.56)^3 = 0.175616 \quad \ldots(ii)$

$(.056)^3 = 0.000175616 \quad \ldots(iii)$

उपरोक्त तीनों समीकरणों से,

अभीष्ट मान = 5.6 + 0.56 + 0.056 = 6.216

22. (b) $1008 = \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{3 \times 3} \times 7$

स्पष्ट है कि संख्या 1008 को संख्या 7 से विभाजित करने पर भागफल एक पूर्ण वर्ग संख्या बन जाएगी।

23. (d)

$\sqrt{.000441} = \sqrt{\frac{441}{1000000}} = \sqrt{\frac{21 \times 21}{1000 \times 1000}}$

$= \frac{21}{1000} = 0.021$

24. (d) $243000 = 243 \times 1000$

$= \underline{3 \times 3} \times \underline{3 \times 3} \times \underline{3 \times 10} \times \underline{10 \times 10}$

स्पष्ट है कि $3 \times 3 = 9$ वह लघुत्तम संख्या है जिससे 243000 को विभाजित करने पर भागफल पूर्ण घन बन जाएगी।

25. (c) $0.42 \times 100^k = 42 \Rightarrow \frac{42}{100} \times 100^k = 42$

$\Rightarrow \quad 100^k = \frac{42 \times 100}{42} = 100$

$\Rightarrow \quad 100^k = 100^1$

$\Rightarrow \quad k = 1$