ବୀଜଗାଣିତିକ ପରିପ୍ରକାଶ ଓ ଅଭେଦ
(ALGEBRAIC EXPRESSIONS & IDENTITIES)

ଅଧ୍ୟାୟ 3

3.1 ଉପକ୍ରମଣିକା (Introduction) :

ପୂର୍ବଶ୍ରେଣୀରେ ତୁମେମାନେ କେତେଗୁଡ଼ିଏ ବୀଜଗାଣିତିକ ପରିପ୍ରକାଶ (Algebraic expression) ସମ୍ବନ୍ଧରେ ପଢ଼ିଛ । ଅର୍ଥାତ୍ ଏମାନଙ୍କର ମଧ୍ୟରେ ବିଭିନ୍ନ ପ୍ରକ୍ରିୟା; ଯଥା– ମିଶାଣ, ଫେଡ଼ାଣ, ଗୁଣନ ଆଦି କିପରି ସଂଗଠିତ ହୋଇଥାଏ, ତା'ର ଧାରଣା ପାଇସାରିଛ । ବୀଜଗାଣିତିକ ପରିପ୍ରକାଶରେ କେତେଗୁଡ଼ିଏ ଅକ୍ଷର –ସଂକେତ (literals) ବ୍ୟବହୃତ ହୁଏ, ଯେଉଁଗୁଡ଼ିକୁ **ଚଳରାଶି (Variable)** କୁହାଯାଇଥାଏ । କେବଳ ଗୋଟିଏ ମାତ୍ର ଚଳରାଶି ଥାଇ ବୀଜଗାଣିତିକ ପରିପ୍ରକାଶଗୁଡ଼ିକ ମଧ୍ୟରେ ବିଭିନ୍ନ ପ୍ରକ୍ରିୟା କିପରି ସଂଗଠିତ ହୋଇଥାଏ, ତାହା ଜାଣିଛ । ଏହି ପରିପ୍ରକାଶ, ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ଠାରୁ କିପରି ଭିନ୍ନ ସେ ବିଷୟରେ ଆଲୋଚନା ଏ ଅଧ୍ୟାୟର ମୁଖ୍ୟ ଉଦ୍ଦେଶ୍ୟ । ଏଥି ସହ ପଲିନୋମିଆଲ୍ କ୍ଷେତ୍ରରେ ବିଭିନ୍ନ ପ୍ରକ୍ରିୟା କିପରି ସଂଗଠିତ ହୁଏ ସେ ବିଷୟରେ ମଧ୍ୟ ଆଲୋଚନା ଏହି ଅଧ୍ୟାୟରେ କରାଯିବ ।

3.2 ପଲିନୋମିଆଲ୍ (Polynomial) :

ଆକ୍ଷରିକ ସଂକେତ (ଯଥା x, y, z .... a, b, c... ଇତ୍ୟାଦି) ଦ୍ୱାରା ଯେକୌଣସି ପରିପ୍ରକାଶ ମାଧ୍ୟମରେ 'ବୀଜଗାଣିତିକ ତତ୍ତ୍ୱ'କୁ ପରିବେଷଣ କରାଯାଏ ।

ଉଦାହରଣସ୍ୱରୂପ, "x ଓ y ଦୁଇଟି ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ହେଲେ, x + y ମଧ୍ୟ ଏକ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ।''

ଏଠାରେ x ଓ y ର ଯେକୌଣସି ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ମାନ ପାଇଁ ଉପରୋକ୍ତ ଉକ୍ତିଟି ପ୍ରଯୁଜ୍ୟ ।

ଏଠାରେ "x ଓ y ଦୁଇଟି ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା $\Rightarrow$ x + y ଏକ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା'' । ଏହା ଏକ ବୀଜଗାଣିତିକ ତତ୍ତ୍ୱ ।

'x + y' ହେଉଛି ବୀଜଗାଣିତିକ ପରିପ୍ରକାଶ, x ଏବଂ y ହେଉଛି ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ପାଇଁ ବ୍ୟବହୃତ ଆକ୍ଷରିକ ସଂକେତ (literal) । ତୁମେ ସପ୍ତମ ଶ୍ରେଣୀରେ ପଢ଼ିଥିବା କେତେଗୁଡ଼ିଏ ବୀଜଗାଣିତିକ ପରିପ୍ରକାଶର ଉଦାହରଣ ହେଲା,

(i) $3x$, (ii) $2x + 3$ (iii) $5x^2 - 2x - 3$, (iv) $x^4 + 3x^2 - 9x + 5$

ଏଠାରେ ଲକ୍ଷ୍ୟ କର (a) ଦତ୍ତ ବୀଜଗାଣିତିକ ପରିପ୍ରକାଶ ଗୁଡ଼ିକରେ କେବଳ ଗୋଟିଏ ଚଳରାଶି 'x' ରହିଛି ।

(b) ପରିପ୍ରକାଶଗୁଡ଼ିକରେ ଥିବା ଚଳରାଶି 'x' ର ଘାତ ଅଣରଣାତ୍ମକ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା । ଅର୍ଥାତ୍ କୌଣସି କ୍ଷେତ୍ରରେ ଘାତଗୁଡ଼ିକ ରଣାତ୍ମକ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା ନୁହେଁ ।

(0, 1, 2, 3...... ଇତ୍ୟାଦିକୁ ଅଣରଣାତ୍ମକ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା କୁହାଯାଏ । ଉକ୍ତ ସଂଖ୍ୟାସମୂହକୁ ସଂପ୍ରସାରିତ ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟା କୁହାଯାଏ ।)

(c) (i), (ii), (iii) ଓ (iv) ରେ ଦତ୍ତ ପରିପ୍ରକାଶଗୁଡ଼ିକର ପଦସଂଖ୍ୟା ଯଥାକ୍ରମେ 1, 2, 3 ଏବଂ 4 । ତେଣୁ ସେଗୁଡ଼ିକୁ ଯଥାକ୍ରମେ ଏକପଦ, ଦୁଇପଦ, ତିନି ପଦ ଓ ଚାରିପଦ ବିଶିଷ୍ଟ ବହୁପଦ ରାଶି ବା ପରିପ୍ରକାଶ କହିବା ।

ବର୍ତ୍ତମାନ ଆସ ଦେଖିବା ନିମ୍ନଲିଖିତ ପରିପ୍ରକାଶଗୁଡ଼ିକ, ଉପରେ ଦିଆଯାଇଥିବା ପରିପ୍ରକାଶଗୁଡ଼ିକଠାରୁ କିପରି ଭିନ୍ନ ?

(1) $6 + 2x^{-2} + x^2$, (2) $x + x^{-1}$, (3) $2x^2 + x^{-\frac{1}{3}} + 4$

ଏଠାରେ ଲକ୍ଷ୍ୟ କର ଯେ, ପ୍ରତ୍ୟେକ ପରିପ୍ରକାଶରେ କିଛି ରଣାତ୍ମକ ଅଥବା ଭଗ୍ନସଂଖ୍ୟା ଘାତାଙ୍କ ବିଶିଷ୍ଟ ପଦ ରହିଛି । ଯଥା: (1) ରେ ମଧ୍ୟମ ପଦଟି $2x^{-2}$, (2) ରେ ଦ୍ୱିତୀୟ ପଦଟି x^{-1} ଏବଂ (3)ରେ ମଧ୍ୟମ ପଦଟି $x^{-\frac{1}{3}}$

କିନ୍ତୁ (i), (ii), (iii) ଓ (iv) ପରିପ୍ରକାଶରେ (ବହୁପଦ ରାଶି), ଚଳରାଶି x ର ଘାତାଙ୍କ ରଣାତ୍ମକ ଅଥବା ଭଗ୍ନସଂଖ୍ୟା ନୁହେଁ ।

ତେବେ ଆମେ (1), (2) ଓ (3) ପରିପ୍ରକାଶଗୁଡ଼ିକୁ, (i), (ii), (iii) ଓ (iv) ପରିପ୍ରକାଶଗୁଡ଼ିକଠାରୁ କିପରି ଭିନ୍ନ ଉପାୟରେ ପ୍ରକାଶ କରିପାରିବା ?

ଏଠାରେ ମନେରଖିବା ଯେ, (i), (ii), (iii), (iv) ଏବଂ (1), (2), (3) ଏମାନେ ପ୍ରତ୍ୟେକେ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ବୀଜଗାଣିତିକ ପରିପ୍ରକାଶ । କିନ୍ତୁ ପୃଥକ୍ କରି ପ୍ରକାଶ କରିବା ନିମନ୍ତେ (i), (ii), (iii) ଓ (iv) ପରିପ୍ରକାଶଗୁଡ଼ିକୁ ଅଲଗା ଭାବରେ ନାମକରଣ କରିବା ଯାହାକୁ **ପଲିନୋମିଆଲ୍** କହିବା ।

ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ସଂଜ୍ଞା ପ୍ରକରଣ କରିବା ।

ସଂଜ୍ଞା : ଯେଉଁ ବୀଜଗାଣିତିକ ପରିପ୍ରକାଶଗୁଡ଼ିକରେ ଚଳରାଶିର ଘାତାଙ୍କ ଅଣରଣାତ୍ମକ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା, ସେଗୁଡ଼ିକୁ ପଲିନୋମିଆଲ୍ (Polynomial) କୁହାଯାଏ ।

ଲକ୍ଷ୍ୟକର ନିମ୍ନ ଦତ୍ତ ଉଦାହରଣ ଗୁଡ଼ିକର କେବଳ ଏକ ମାତ୍ର ଚଳରାଶି 'x' ରହିଛି । ଏଗୁଡ଼ିକୁ 'x'ରେ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ପଲିନୋମିଆଲ୍ କୁହାଯାଏ । (i) $3x$, (ii) $2x + 3$ (iii) $5x^2 - 2x - 3$, (iv) $x^4 + 3x^2 - 9x + 5$

ବି.ଦ୍ର. : ଏକ ଚଳରାଶି ବିଶିଷ୍ଟ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଆଲୋଚନା କେବଳ ଏହି ଅଧ୍ୟାୟରେ କରାଯିବ ।

3.2.1 ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଘାତ :

ପଲିନୋମିଆଲରେ ଥିବା ଚଳରାଶି (x ର) ଉଚ୍ଚତମ ଘାତାଙ୍କକୁ ଦତ୍ତ ପଲିନୋମିଆଲର ଘାତ କୁହାଯାଏ । ପ୍ରକାଶ ଥାଉକି ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଉଚ୍ଚତମ ଘାତାଙ୍କ ବିଶିଷ୍ଟ ପଦର ସହଗ ଅଣଶୂନ୍ୟ ହେବା ଆବଶ୍ୟକ ।

ଲକ୍ଷ୍ୟ କର : (i) ଓ (ii) ପଲିନୋମିଆଲର ଘାତ 1 ଥିବା ବେଳେ, (iii) ଓ (iv) ରେ ଦତ୍ତ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଘାତ ଯଥାକ୍ରମେ 2 ଓ 4 ।

ନିଜେ କର

1. $x+1$ ଏକ ଏକଘାତୀ ପଲିନୋମିଆଲ । ଏହାକୁ $0.x^2+x+1$ ଆକାରରେ ଲେଖିଲେ ଏହାର ଘାତ କେତେ ହେବ ?
2. $x^2 + x + 1$ କୁ $0.x^3 + x^2 + x + 1$ ଆକାରରେ ଲେଖିଲେ ଏହା ଏକ ତିନିଘାତୀ ପଲିନୋମିଆଲ୍ ହେବ କି ?

ନିମ୍ନ ଉଦାହରଣକୁ ଲକ୍ଷ୍ୟ କର ।

ଉଦାହରଣ –1 : ନିମ୍ନ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ମାନଙ୍କର ଘାତ ସ୍ଥିର କର ।

(i) $5x^2 + 13x - 9$, (ii) $y^3 + 17y$, (iii) $2p + 3$, (iv) -5

ସମାଧାନ : (i) $5x^2 + 13x - 9$ ର ଘାତ 2 ।

ତେଣୁ ଏହାକୁ ଏକ **ଦ୍ୱିଘାତୀ ପଲିନୋମିଆଲ୍ (Second degree Polynomial)** କୁହାଯାଏ ।

(ii) $y^3 + 17y$ ର ଘାତ 3 । ତେଣୁ ଏହାକୁ ଏକ **ତ୍ରିଘାତୀ ପଲିନୋମିଆଲ୍ (Third degree Polynomial)** କୁହାଯାଏ ।

(iii) $2p + 3$ ର ଘାତ 1 । ତେଣୁ ଏହାକୁ **ଏକଘାତୀ ପଲିନୋମିଆଲ୍ (First degree ଅଥବା Linear Polynomial)** କୁହାଯାଏ ।

(iv) -5 ଏକ ପଲିନୋମିଆଲ୍ । କାରଣ ଏହା $-5x^0$ ଆକାରରେ ପ୍ରକାଶିତ ହୋଇ ପାରିବ ।

ସୁତରାଂ -5 ଏକ **ଶୂନଘାତୀ ପଲିନୋମିଆଲ୍** ।

ଟୀକା :– (1) ଯେକୌଣସି ଅଣଶୂନ୍ୟ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ଏକ '0' ଘାତ ବିଶିଷ୍ଟ ପଲିନୋମିଆଲ୍ ହୋଇପାରିବ । ଏହାକୁ **ଧ୍ରୁବ ପଲିନୋମିଆଲ୍ (Constant Polynomial)** କୁହାଯାଏ ।

(2) ସଂକ୍ଷେପରେ ଦୁଇଘାତୀ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌କୁ Quadratic Polynomial, ତିନିଘାତୀ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌କୁ Cubic Polynomial ଏବଂ ଚାରିଘାତୀ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌କୁ Biquadratic ଅଥବା Quartic Polynomial କୁହାଯାଏ ।

3.2.2 ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ପଦ :

ପଲିନୋମିଆଲର ପ୍ରତ୍ୟେକ ପଦକୁ ମନୋମିଆଲ୍ (Monomial) କୁହାଯାଏ ।

ପଲିନୋମିଆଲ୍ ଯଦି ଏକପଦୀ ହୋଇଥାଏ ତେବେ ଏହାକୁ ମନୋମିଆଲ୍ କୁହାଯାଏ ।

ସେହିପରି ପଲିନୋମିଆଲ୍, ଦୁଇଟି ମନୋମିଆଲ୍‌କୁ ନେଇ ଗଠିତ ହୋଇଥିଲେ, ତାକୁ ଦ୍ୱିପଦୀ ପଲିନୋମିଆଲ୍ (Binomial) କୁହାଯାଏ ଏବଂ ତିନି ସଂଖ୍ୟକ ମନୋମିଆଲ୍ ଠାରୁ ଅଧିକ ଥିଲେ, ଆମେ କେବଳ ପଲିନୋମିଆଲ୍ ବୋଲି କହିବା ।

3.2.3 ମନୋମିଆଲ୍‌ର ସହଗ :

$x^2 - 2x - 3$ ଏକ ପଲିନୋମିଆଲ୍ । ଏହାର ପ୍ରତ୍ୟେକ ପଦ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ମନୋମିଆଲ୍ । ପଦଗୁଡ଼ିକ ମଧ୍ୟ କେତେକ ଉତ୍ପାଦକ (Factor)ର ଗୁଣଫଳ ହୋଇପାରେ । **କୌଣସି ପଦର ସାଂଖ୍ୟିକ ଉତ୍ପାଦକଟିକୁ ଉକ୍ତ ପଦର ସହଗ କୁହାଯାଏ ।** ଏଠାରେ $x^2 = 1 \times x^2$ ଏବଂ $-2x = -2 \times x$ ତେଣୁ x^2ର ସାଂଖ୍ୟିକ ସହଗ 1 ଏବଂ $-2x$ର ସାଂଖ୍ୟିକ ସହଗ -2 । ଦତ୍ତ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ତୃତୀୟପଦ -3 ।

$-3 = -3 \times x^0$ ହେତୁ -3, x^0ର ସହଗ ବା -3 ଏକ ଧ୍ରୁବକ ବୋଲି କହିପାରିବା ।

ନିଜେ କର

1. $2x - 5$ ଓ $3x^2 - 2x + 7$ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ରେ ଥିବା ପଦଗୁଡ଼ିକର ସହଗଗୁଡ଼ିକୁ ସ୍ଥିର କର ।

2. ଦୁଇଟି ଲେଖାଏଁ ଦ୍ୱିପଦୀ ଏବଂ ତ୍ରିପଦୀ ପଲିନୋମିଆଲ୍ ନେଇ, ସେମାନଙ୍କର ପଦସଂଖ୍ୟା, ଘାତ ଏବଂ ପ୍ରତ୍ୟେକ ପଦର ସାଂଖ୍ୟିକ ସହଗଗୁଡ଼ିକୁ ଲେଖ ।

3.2.4. ସଦୃଶ ପଦ (Like Monomials) :

ଯଦି ଏକ ଚଳରାଶି ଦ୍ୱାରା ଗଠିତ ଦୁଇଟି ମନୋମିଆଲ୍ ବା ଏକାଧିକ ମନୋମିଆଲ୍ ସମାନ ଘାତ ବିଶିଷ୍ଟ ହୁଅନ୍ତି, ତେବେ ସେମାନଙ୍କୁ ସଦୃଶ ମନୋମିଆଲ ବା ସଦୃଶ ପଦ କୁହାଯାଏ । ଉଦାହରଣସ୍ୱରୂପ 2x, 9x, –5x ଇତ୍ୟାଦି ସଦୃଶ ମନୋମିଆଲ୍ ।

ସେହିପରି $-3x^2, x^2, 7x^2$ ଇତ୍ୟାଦି ମଧ୍ୟ ସଦୃଶ ମନୋମିଆଲ୍ ଅଟନ୍ତି । ମାତ୍ର 2x, 3y, 5z, ଇତ୍ୟାଦି ସଦୃଶ ପଦ ନୁହଁନ୍ତି ।

ଟୀକା :(1) ଆମର ଆଲୋଚନା କେବଳ ଏକ ଚଳରାଶି ବିଶିଷ୍ଟ ପଲିନୋମିଆଲ୍ କ୍ଷେତ୍ରରେ ସୀମିତ ରହିବ ।

(2) ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଚଳରାଶି କହିଲେ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଅଜ୍ଞାତ ରାଶିକୁ ବୁଝିବ ।

3.3 ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଯୋଗ :

ସଦୃଶ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଯୋଗ :

ନିମ୍ନ ଉଦାହରଣକୁ ଦେଖ ।

(i) $2x + 3x = (2 + 3)x = 5x$ (ବଣ୍ଟନ ନିୟମର ପ୍ରୟୋଗ)

(ii) $\frac{2x^2}{5} + 3x^2 = \left(\frac{2}{5} + 3\right)x^2 = \frac{17}{5}x^2$ (ବଣ୍ଟନ ନିୟମର ପ୍ରୟୋଗ)

ଯୋଗ ସମ୍ବନ୍ଧରେ କେତୋଟି ଜାଣିବା କଥା :

(i) ବଣ୍ଟନ ନିୟମ ବ୍ୟବହାର କରି ସଦୃଶ ପଦମାନଙ୍କର ଯୋଗଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରାଯାଏ । (ଉପର ଉଦାହରଣକୁ ଦେଖ)

(ii) ଯେକୌଣସି ଦୁଇଟି ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଯୋଗଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ଲାଗି ସଦୃଶ ପଦଗୁଡ଼ିକୁ ଏକାଠି କରି ଯୋଗ କରାଯାଏ ।

(iii) ଯୋଗ ପ୍ରକ୍ରିୟାର ସୁବିଧା ଲାଗି ପ୍ରଥମେ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ପଦଗୁଡ଼ିକ ଚଳରାଶିର ଘାତ ଅନୁଯାୟୀ (ଅଧଃକ୍ରମ ବା ଊର୍ଦ୍ଧ୍ୱକ୍ରମ) ଲେଖାଯାଏ ।

ଉଦାହରଣ –2 : ଯୋଗଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର: $(7x + 8x^2+10)$ ଏବଂ $(3x^2+4x+30)$

ସମାଧାନ :

(i) ଧାଡ଼ି ପ୍ରଣାଳୀ : ଏହି ପ୍ରଣାଳୀରେ ପ୍ରତ୍ୟେକ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ପଦଗୁଡ଼ିକୁ ବଡ଼ରୁ ସାନ କ୍ରମରେ ଲେଖି ଯୋଗ କରାଯାଏ ।

ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ଯୋଗଫଳ $= (7x + 8x^2 + 10) + (3x^2 + 4x + 30)$

$= (8x^2 + 7x + 10) + (3x^2 + 4x + 30)$

$= (8x^2 + 3x^2) + (7x + 4x) + (10 + 30)$ (ସଦୃଶ ପଦ ଏକାଠି କରାଗଲା)

$= (8+3)x^2 + (7 + 4)x + (10 + 30)$ (ବଣ୍ଟନ ନିୟମ ପ୍ରୟୋଗ କରାଗଲା)

$= 11x^2 + 11x + 40$

(ii) ସ୍ତମ୍ଭ ପ୍ରଣାଳୀ : ଏହି ପ୍ରଣାଳୀରେ ଯୋଗ ପ୍ରକ୍ରିୟାକୁ ଧାଡ଼ିରେ ନ ଲେଖି ସ୍ତମ୍ଭ ଆକାରରେ ଲେଖି ଯୋଗ କରାଯାଏ ।

ପ୍ରଥମ : $8x^2 + 7x + 10$

ଦ୍ୱିତୀୟ : $3x^2 + 4x + 30$

ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ଯୋଗଫଳ $= (8+3)x^2 + (7+4)x + (10 + 30) = 11x^2 + 11x + 40$

ଉଦାହରଣ-3 : ଯୋଗଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର : $(2x^2-3+5x), (6-2x-x^2)$ ଏବଂ $(5x+3x^2-4)$

ସମାଧାନ : (ଧାଡ଼ି ପ୍ରଣାଳୀ)

ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ଯୋଗଫଳ $= (2x^2 - 3 + 5x) + (6 - 2x - x^2) + (5x + 3x^2 - 4)$

$= (2x^2 + 5x - 3) + (-x^2 - 2x + 6) + (3x^2 + 5x - 4)$

$= (2x^2 - x^2 + 3x^2) + (5x - 2x + 5x) + (-3 + 6 - 4)$

$= (2-1+3)x^2 + (5-2+5)x + (-3+6-4) = 4x^2 + 8x - 1$

ସ୍ତମ୍ଭ ପ୍ରଣାଳୀ : ପ୍ରଥମ : $2x^2 + 5x - 3$

ଦ୍ୱିତୀୟ : $-x^2 - 2x + 6$

ତୃତୀୟ : $3x^2 + 5x - 4$

ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ଯୋଗଫଳ $= (2-1+3)x^2 + (5-2+5)x + (-3+6-4) = 4x^2 + 8x - 1$

ଉଦାହରଣ-4 : ଯୋଗଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

$(3x^3 - 4x + 7), (4 - 3x^2 + 8x + 4x^3)$ ଏବଂ $(7x^3 - 2x^2 + 9)$

ସମାଧାନ : (ଧାଡ଼ି ପ୍ରଣାଳୀ)

ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ଯୋଗଫଳ $= (3x^3 - 4x + 7) + (4 - 3x^2 + 8x + 4x^3) + (7x^3 - 2x^2 + 9)$

$= (3x^3 - 4x + 7) + (4x^3 - 3x^2 + 8x + 4) + (7x^3 - 2x^2 + 9)$

$= (3x^3 + 4x^3 + 7x^3) + (-3x^2 - 2x^2) + (-4x + 8x) + (7+4+9)$

$= (3 + 4 + 7)x^3 + (-3 - 2)x^2 + (-4 + 8)x + (7+4+9)$

$= 14x^3 - 5x^2 + 4x + 20$

ସ୍ତମ୍ଭ ପ୍ରଣାଳୀ : $3x^3 - 0.x^2 - 4x + 7$ (x^2 ର ସହଗକୁ '0' ନିଆଗଲା)

$4x^3 - 3x^2 + 8x + 4$

$7x^3 - 2x^2 + 0.x + 9$ (x ର ସହଗକୁ '0' ନିଆଗଲା)

ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ଯୋଗଫଳ $= (3 + 4 + 7)x^3 + (-3 - 2)x^2 + (-4 + 8)x + (7+4+9)$

$= 14x^3 - 5x^2 + 4x + 20$

ଅନୁଶୀଳନୀ - 3(a)

1. ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନ ପୂରଣ କର ।

(i) $3x+2x = (3+ ....)\ x = ...$

(ii) $5x + 7x = (.... + 7)\ x = ...$

(iii) $-6x + 4x = \{(...) + (...)\}\ x = ...$

(iv) $-2x - 3x = \{(...) + (...)\}x = ...$

(v) $x - 2x = \{(...) + (...)\}x = ...$

2. ଯୋଗଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(i) $4x$ ଓ $3x$ (ii) $2x$ ଓ $-3x$ (iii) $-3x^3$ ଓ $-2x^3$ (iv) $-5x^2$ ଓ $2x^2$

(v) $4x$ ଓ -4 (vi) $2x^2+3$ ଓ x^2-1 (vii) x^2+1 ଓ $x-1$ (viii) x^2+3+2x ଓ $x+1$

3. ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନ ପୂରଣ କର ।

(i) $3x + 2x = (\quad)$ (ii) $(\quad) + x = 8x$

(iii) $2x + (\quad) = 6x$ (iv) $3x + 4x = 4x + (\quad)$

(v) $2x + 5x = (\quad) + 2x = (\quad)$ (vi) $2x + 5y + z = (\quad) + z = (2x+z) + (\quad)$

4. ଯୋଗଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(i) $2x, \ 3x, \ 5x$

(ii) $5x^2, \ x^2, \ 3x^2$

(iii) $2x^3, \ 3x^3, \ 4x^3$

(iv) $3x^2 + 2x$ ଓ x^2+3x

(v) $x^3 + 3$ ଓ $4 - x^2+x$

(vi) $2x^2 + x - 2$ ଓ $x+2$

(vii) $5 - 2x+x^2$ ଓ $x^2+2x - 5$

(viii) $3x - 2 + x^2$ ଓ $x^2+3x - 2$

(ix) $1+ 2x^2 - 3x$ ଓ $2x+3+4x^2$

(x) $2x^2 - 4x - 3$ ଓ $4x+3- 2x^2$

3.4 ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ମାନଙ୍କର ବିୟୋଗ :

ଆମେ ଜାଣିଛେ ଯେ, a ରୁ b ବିୟୋଗ କରିବା ଯାହା a ସହ b ର ଯୋଗାତ୍ମକ ବିଲୋମୀ ଯୋଗକରିବା ତାହା, ତେଣୁ ଲେଖିବା $a - b = a + (-b)$

ଏହି ପଦ୍ଧତି ଅବଲମ୍ବନ କରି ଆମେ ଦୁଇଟି ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ବିୟୋଗ ଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିପାରିବା ।

ନିମ୍ନ ଉଦାହରଣଗୁଡ଼ିକ ଦେଖ ।

ଉଦାହରଣ – 5 : (ଧାଡ଼ି ପ୍ରଣାଳୀ) $(3x^2 - 6x + 17)$ ରୁ $(5x - 3x^2 + 19)$ ର ବିୟୋଗ କର ।

ସମାଧାନ :

ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ବିୟୋଗ ଫଳ $= (3x^2 - 6x + 17) - (5x - 3x^2 + 19)$

$= (3x^2 - 6x + 17) + (3x^2 - 5x - 19)$

$= (3x^2 + 3x^2) + (-6x - 5x) + (17-19)$

$= (3 + 3)x^2 + (-6 - 5)x + (17-19)$

$= 6x^2 - 11x - 2$

ସ୍ତମ୍ଭ ପ୍ରଣାଳୀ :

$$\begin{array}{rrr} 3x^2 & - 6x & + 17 \\ -3x^2 & + 5x & + 19 \\ (+) & (-) & (-) \\ \hline \end{array}$$

ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ବିୟୋଗ ଫଳ $= (3 + 3)x^2 + (-6 - 5)x + (17-19) = 6x^2 - 11x - 2$

ଉଦାହରଣ – 6 : $(4x^3 - 2x^2 + 5)$ ରୁ $(2x^3 - 3 - 5x)$ ର ବିୟୋଗ କର ।

ସମାଧାନ :

ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ବିୟୋଗ ଫଳ $= (4x^3 - 2x^2 + 5) - (2x^3 - 3 - 5x)$

$= (4x^3 - 2x^2 + 5) + (-2x^3 + 3 + 5x)$

$= (4x^3 - 2x^2 + 5) + (-2x^3 + 5x + 3)$

$= (4x^3 - 2x^3) + (-2x^2) + 5x + (5 + 3)$

$= (4 - 2)x^3 + (-2x^2) + 5x + (5 + 3)$

$= 2x^3 - 2x^2 + 5x + 8$

ସ୍ତମ୍ଭ ପ୍ରଣାଳୀ : $4x^3 - 2x^2 + 0.x + 5$

$2x^3 + 0.x^2 - 5x - 3$

$(-) \quad (-) \quad (+) \quad (+)$

ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ବିୟୋଗଫଳ $= (4-2)x^3 + (-2x^2) + 5x + (5+3)$

$= 2x^3 - 2x^2 + 5x + 8$

ଅନୁଶୀଳନୀ - 3(b)

1. ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନ ପୂରଣ କର :

(i) $5x - 3x = 5x + (\ ) = \{(\ ) + (\ )\}\ x = (...)$

(ii) $3x - (-2x) = 3x + (\ ) = \{(\ ) + (\ )\}\ x = (...)$

(iii) $-2x - 3x = -2x + (\ ) = \{(\ ) + (\ )\}\ x = (...)$

(iv) $(2+3x) - (3-2x) = (2+3x) + (...) = (2-3) + (3x+...) = (...)+(...)$

(v) $(x - 4) - (-3x+2) = (x - 4) + (...) = (x+3x) + (...) = ...+...$

2. ବିୟୋଗ କର :

(i) $12x$ ରୁ $9x$ (ii) $5x$ ରୁ $-3x$ (iii) $-2x$ ରୁ $3x$

(iv) $-4x$ ରୁ $-6x$ (v) $(x+2)$ ରୁ $(3x+2)$ (vi) 3 ରୁ x^2+x+1

(vii) $2x^2 - 2x - 2$ ରୁ $x^2 + 2x + 4$

3. ବିୟୋଗଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(i) $2x^2 + 2x$ ରୁ $2x^2$ (ii) $5x^2+3x$ ରୁ $x^2 + 3x$

(iii) $2x^2 - 2x$ ରୁ $x^2 + 2x$ (iv) $3x^2 + 3x + 2$ ରୁ $x^2 + 3x - 2$

(v) $2x^2 - 5x - 1$ ରୁ $x^2 + 5x - 1$ (vi) $4 + 3x + 2x^2 + x^3$ ରୁ $x^3 + 2x^2 - 3x - 4$

(vii) $2x^3 - 5 - 2x^2 - 10x$ ରୁ $x^3 + 20x - x^2 + 3$

3.5 ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଗୁଣନ :

(a) ଏକ ମନୋମିଆଲ୍ ସହିତ ଅନ୍ୟ ଏକ ମନୋମିଆଲ୍‌ର ଗୁଣନ :

ଆମେ ଜାଣିଛେ ଯେ,

$3 \times x = 3x$, $x \times x = x^2$, $x \times x^2 = x^3$, $2x^2 \times x = 2x^3$ ଇତ୍ୟାଦି ।

ବର୍ତ୍ତମାନ ନିମ୍ନସ୍ଥ ଗୁଣନ ଗୁଡ଼ିକୁ ଲକ୍ଷ୍ୟ କର :

(i) $2x \times 3x = (2 \times 3) \times (x \times x) = 6x^2$

(ii) $5x \times 4x^2 = (5 \times 4) \times (x \times x^2) = 20x^3$

(iii) $-7y \times 3y^3 = (-7 \times 3) \times (y \times y^3) = -21y^4$

ଲକ୍ଷ୍ୟ କଲେ ଜାଣିପାରିବ ଯେ,

(i) ଦୁଇଟି ମନୋମିଆଲ୍‌ର ଗୁଣଫଳ ଏକ ମନୋମିଆଲ୍ ଅଟେ ।

(ii) ଦୁଇଟି ମନୋମିଆଲ୍‌ର ଗୁଣଫଳର ସହଗ = ପ୍ରଥମ ମନୋମିଆଲ୍‌ର ସହଗ x ଦ୍ୱିତୀୟ ମନୋମିଆଲ୍‌ର ସହଗ

(iii) ତିନି ବା ତତୋଧିକ ମନୋମିଆଲ୍‌ର ଗୁଣଫଳ ସ୍ଥିର କରିବାକୁ ହେଲେ, ପ୍ରଥମେ ପ୍ରଥମ ଦୁଇଟିର ଗୁଣଫଳ ବାହାର କରାଯାଏ । ତତ୍ପରେ ଉକ୍ତ ଗୁଣଫଳକୁ ତୃତୀୟ ମନୋମିଆଲ୍ ସହିତ ଗୁଣନ କରାଯାଏ ।

ଏହିପରି ପରବର୍ତ୍ତୀ ମନୋମିଆଲ୍‌କୁ ପୂର୍ବବର୍ତ୍ତୀ ଗୁଣଫଳ ସହ ଗୁଣନ କରାଯାଇ ଗୁଣଫଳ ସ୍ଥିର କରାଯାଇପାରେ ।

(iv) ଗୁଣନ ପ୍ରକ୍ରିୟାରେ କ୍ରମବିନିମୟୀ ଓ ସହଯୋଗୀ ନିୟମକୁ ମଧ୍ୟ ବ୍ୟବହାର କରାଯାଇପାରେ ।

(b) ଏକ ମନୋମିଆଲ୍ ସହିତ ଏକ ବାଇନୋମିଆଲ୍ ଓ ଏକ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଗୁଣନ :

$2x$ ଓ $(3x+5)$ ର ଗୁଣଫଳ ସ୍ଥିର କରିବା ।

$2x \times (3x+5) = 2x \times 3x + 2x \times 5$ (ବଣ୍ଟନ ନିୟମ)

$= 6x^2 + 10x$

ସେହିପରି ଅନ୍ୟ ଏକ ଉଦାହରଣ ନେବା ।

$-3y$ ଓ $(6 - 7y)$ ର ଗୁଣଫଳ ସ୍ଥିର କରିବା ।

$-3y \times (6 - 7y) = -3y \times \{6 + (-7y)\} = (-3y) \times 6 + (-3y) \times (-7y) = -18y + 21y^2$

ବଣ୍ଟନ ନିୟମ ପ୍ରୟୋଗ କରି ତୁମେମାନେ ଏକ ମନୋମିଆଲ୍ ସହିତ ଏକ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଗୁଣନ କରିପାରିବ ।

ଉଦାହରଣସ୍ୱରୂପ : $2x \times (x^2+3x+5)$

$= 2x \times x^2 + 2x \times 3x + 2x \times 5 = 2x^3 + 6x^2 + 10x$

(c) ଏକ ପଲିନୋମିଆଲ୍ ସହିତ ଅନ୍ୟ ଏକ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଗୁଣନ :

ଦୁଇଗୋଟି ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଗୁଣଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କଲାବେଳେ ଆମେ ବଣ୍ଟନ ନିୟମ ପ୍ରୟୋଗ କରିଥାଉ । ଉଦାହରଣସ୍ୱରୂପ : $(2x + 1)$ ଏବଂ $(x+3)$ ର ଗୁଣଫଳ ଅର୍ଥାତ୍

$(2x + 1)(x+3) = 2x(x + 3) + 1(x + 3)$ (ବଣ୍ଟନ ନିୟମ)

$= 2x^2 + 6x + x + 3 = 2x^2 + 7x + 3$ (ପୁନଃ ବଣ୍ଟନ ନିୟମ)

ସେହିପରି $(2x^2 + 1)$ ଏବଂ $(x-5)$ର ଗୁଣଫଳ

$= (2x^2 + 1)(x - 5) = 2x^2(x - 5) + 1(x - 5)$

$= 2x^2 \times x + 2x^2 \times (-5) + 1 \times (x) + 1 \times (-5) = 2x^3 - 10x^2 + x - 5$

ଗୁଣନ ପରେ ଗୁଣଫଳରେ ଥିବା ସଦୃଶପଦମାନଙ୍କୁ ଏକତ୍ର କରି ଦିଆଯାଏ ଓ x ର ଘାତାଙ୍କ କ୍ରମରେ ସଜାଇ ଉତ୍ତର ଲେଖାଯାଏ ।

ଟୀକା : ବଣ୍ଟନ ନିୟମ : $a(b+c) = ab + ac$ ବା $(b+c)a = ba + ca = ab + ac$

ମନେରଖ :

(i) ପଲିନୋମିଆଲ୍‌କୁ 0 (ଶୂନ) ଦ୍ୱାରା ଗୁଣିଲେ, ଗୁଣଫଳ ଶୂନ ହୁଏ ।

(ii) ପଲିନୋମିଆଲ୍‌କୁ 1 ଦ୍ୱାରା ଗୁଣିଲେ, ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ଟି ନିଜେ ଗୁଣଫଳ ହୋଇଥାଏ ।

(iii) ଗୁଣନ ପ୍ରକ୍ରିୟା ଆରମ୍ଭ କରିବା ପୂର୍ବରୁ ପଲିନୋମିଆଲ୍ ଗୁଡ଼ିକୁ ଘାତାଙ୍କ କ୍ରମରେ ସଜାଇ ଲେଖାଯାଏ ।

(iv) ବଣ୍ଟନ ନିୟମ ପ୍ରୟୋଗ କରି ଗୁଣନ କରାଯାଏ ।

(v) ଗୁଣଫଳର ସଦୃଶ ପଦମାନଙ୍କୁ ସଜାଇ ଏକତ୍ର ଲେଖି ସରଳ କରାଯାଏ ।

(vi) ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଗୁଣନ ପ୍ରକ୍ରିୟାରେ କ୍ରମବିନିମୟୀ ଓ ସହଯୋଗୀ ନିୟମ ପ୍ରଯୁଜ୍ୟ ହୋଇଥାଏ ।

ଉଦାହରଣ-7 : ଗୁଣଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର : $(x + 4)$ ଏବଂ $(3x - 5)$

ସମାଧାନ : ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ଗୁଣଫଳ $= (x + 4)\ (3x-5) = x(3x - 5) + 4(3x - 5)$

$= x.\,3x + x\,.\,(-5) + 4.3x + 4.\,(-5)$

$= 3x^2 - 5x + 12x - 20 = 3x^2 + 7x - 20$

ଲକ୍ଷ୍ୟ କର **ଦୁଇଟି ଏକଘାତୀ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଗୁଣଫଳରେ ଏକ ଦ୍ୱିଘାତୀ ପଲିନୋମିଆଲ୍ ସୃଷ୍ଟି ହୁଏ ।**

ଉଦାହରଣ-8 : $(x+2), (x-1)$ ଏବଂ $(2x-5)$ ର ଗୁଣଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

ସମାଧାନ :

ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ଗୁଣଫଳ $= (x+2)\ (x-1)(2x-5) = \{(x+2) \times (x-1)\} \times (2x-5)$

$= \{(x+2)x + (x + 2)(-1)\} \times (2x-5) = (x^2 + 2x - x - 2)\ (2x - 5)$

$= (x^2 + x - 2)\ (2x - 5) = (x^2 + x - 2)2x + (x^2 + x - 2)\ (-5)$

$= 2x^3 + 2x^2 - 4x - 5x^2 - 5x + 10 = 2x^3 + 2x^2 - 5x^2 - 4x - 5x + 10$

$= 2x^3 - 3x^2 - 9x + 10$

ଉଦାହରଣ-9 : ଗୁଣଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର : $(x^2 + x + 1)$ ଏବଂ $(x^2 - x + 1)$

ସମାଧାନ : ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ଗୁଣଫଳ $= (x^2 + x + 1)\ (x^2 - x + 1)$

$= x^2.\,(x^2 - x + 1) + x.\,(x^2 - x + 1) + 1.\,(x^2 - x + 1)$

$= x^2.\,x^2 + x^2\,(-x) + x^2.\,1 + x.\,x^2 + x\,.\,(-x) + x.\,1 + x^2 - x + 1$

$= x^4 - x^3 + x^2 + x^3 - x^2 + x + x^2 - x + 1$

$= x^4 - x^3 + x^3 + x^2 - x^2 + x^2 + x - x + 1 = x^4 + x^2 + 1$

ଲକ୍ଷ୍ୟ କର, **ଦୁଇଟି ଦ୍ୱିଘାତୀ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଗୁଣଫଳ ଏକ ଚାରିଘାତୀ ପଲିନୋମିଆଲ୍ ଅଟେ ।**

ଉଦାହରଣ-10 : ଗୁଣଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର : $(2x + 5)$ ଏବଂ $(x^2 + 3x - 7)$

ସମାଧାନ :

ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ଗୁଣଫଳ $= (2x + 5)\ (x^2 + 3x - 7)$

$= 2x\,.\,(x^2 + 3x - 7) + 5\ (x^2 + 3x - 7)$

$= 2x\,.x^2 + 2x\,.3x + 2x\,.(-7) + 5\,.\,x^2 + 5.3x + 5.(-7)$

$= 2x^3 + 6x^2 - 14x + 5x^2 + 15x - 35$

$= 2x^3 + 6x^2 + 5x^2 - 14x + 15x - 35 = 2x^3 + 11x^2 + x - 35$

ଅନୁଶୀଳନୀ - 3(c)

1. ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନ ପୂରଣ କର :

(i) $3 \times 5x = (...)$ (ii) $3x^2 \times 2x^2 = (...)$

(iii) $2x \times 0 = (...)$ (iv) $3x^3 \times 1 = (...)$

2. ନିମ୍ନ ସାରଣୀଟିକୁ ପୂରଣ କର :

ପ୍ରଥମ ମନୋମିଆଲ୍ → ଦ୍ୱିତୀୟ ମନୋମିଆଲ୍ ↓	$2x$	$-5x$	$3x^2$	$-4x$	$7x^2$	$9x^3$
$2x$					$14x^3$	
$-5x$			$-15x^3$			
$3x^2$						
$-4x$		$20x^2$				
$7x^3$						
$-9x^2$						

3. ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନ ପୂରଣ କର :

(i) $3 \times (2x - 7) = 3 \times 2x + 3 \times (.........)$

(ii) $(-2) \times (3x + 1) = (-2) \times 3x + (-2) \times (.........)$

(iii) $(2x - 6) \times (-x) = 2x \times (.........) + (.........) (-x)$

(iv) $(-3x^2)(2x + 4) = (.........) \times 2x + (-3x^2) \times (.........)$

4. ଗୁଣଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(i) $(x - 1) \times (x + 1)$ (ii) $(x - 1) \times (x^2 + x + 1)$ (iii) $(x + 1) \times (x^2 - x + 1)$

(iv) $(2x + 1) \times (x - 2)$ (v) $(2x + 3) \times (x^2 - 2x + 5)$ (vi) $(-x - 3) \times (x^2 - 5x - 2)$

(vii) $(x^2 + 1) \times (x^2 - 1)$ (viii) $(x^2 + 1) \times (2x^2 - x + 1)$ (ix) $(x^2 - 1) \times (x^2 + x + 1)$

3.6 ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଭାଗକ୍ରିୟା :

ଗୁଣନ ପ୍ରକ୍ରିୟା ସହ ତୁମେ ଅଭ୍ୟସ୍ତ । ତେଣୁ କୁହ $20x \div 5$ ଭାଗକ୍ରିୟାର ଭାଗଫଳ ଆମେ କିପରି ପାଇବା ? ତେଣୁ ଆମକୁ ପ୍ରଥମେ ସ୍ଥିର କରିବାକୁ ହେବ ଯେ $5 \times$ (କେତେ ?) $= 20x$

ତେଣୁ ତୁମେ ସହଜରେ ଜାଣିପାରିବ ଯେ $5 \times (4x) = 20x$ $\quad \therefore \; 20x \div 5 = \frac{20x}{5} = 4x$

ନିଜେ କର ନିମ୍ନସ୍ଥ ସାରଣୀଟି ପୂରଣ କର ।

$2x \times 7 =$ ——	—— $\times 7 = 14x$	$\frac{14x}{7} =$ ——
$3x \times 8 =$ ——	—— $\times 8 = 24x$	$\frac{24x}{8} =$ ——
$4x \times 6 =$ ——	—— $\times 6 = 24x$	$\frac{24x}{6} =$ ——
$x \times a =$ ——	—— $\times a = ax$	$\frac{ax}{a} =$ ——, $a \neq 0$

(a) ଶୂନଘାତୀ ପଲିନୋମିଆଲ୍ (ଧ୍ରୁବରାଶି) ଭାଜକ ଦ୍ୱାରା ଭାଗକ୍ରିୟାର କେତେକ ଉଦାହରଣ ନିମ୍ନରେ ଦିଆଗଲା ।

(i) $10x \div 5 = \frac{10x}{5} = 2x$

(ii) $(21x + 7) \div 7 = \frac{21x+7}{7} = \frac{21x}{7} + \frac{7}{7} = 3x+1$

ମନେରଖ : ଯଦି $c \neq 0$ ହୁଏ, ତେବେ $(ax+b) \div c = \frac{ax+b}{c} = \frac{a}{c}x + \frac{b}{c}$

ଆବଶ୍ୟକତା ଦୃଷ୍ଟିରୁ ସ୍ଥିର କରିବା : $x^2 \div x$ ର ଅର୍ଥ କ'ଣ ?

$x^2 \div x = \frac{x^2}{x} = \frac{x \times x}{x} = x \qquad (X \neq O)$

ମନେରଖ : ଯଦି $x \neq 0$ ହୁଏ, ତେବେ $\frac{x}{x} = 1$ ହେବ ।

(b) ବର୍ତ୍ତମାନ ଏକଘାତୀ ପଲିନୋମିଆଲ୍ – ଭାଜକ ଦ୍ୱାରା ଭାଗକ୍ରିୟାର କେତେକ ଉଦାହରଣ ଦେଖ ।

(i) $20x^2 \div 5x = \frac{20x^2}{5x} = \frac{20 \times x \times x}{5x} = 4x$

(ii) $(20x^2 + 10x) \div 5x = \frac{20x^2 + 10x}{5x} = \frac{20x^2}{5x} + \frac{10x}{5x} = 4x + 2$

ଉଦାହରଣ – 11 : ଭାଗଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର : (i) $12x \div 4$ (ii) $15x^2 \div 5$ (iii) $24x^2 \div 8x$

ସମାଧାନ : (i) $12x \div 4$ କେତେ, ଏହା ପାଇବା ଲାଗି ଆମେ ସ୍ଥିର କରିବା :

$4 \times$ (କେତେ ?) $= 12x$

ଆମେ ଜାଣୁ, $4 \times 3 = 12 \quad \therefore 4 \times 3x = 12x$ ତେଣୁ $12x \div 4 = 3x$

(ii) $15x^2 \div 5$ କେତେ, ଏହା ପାଇବା ପାଇଁ ଆମେ ସ୍ଥିର କରିବା :

$5 \times$ (କେତେ ?) $=15x^2$ ଆମେ ଜାଣୁ $5 \times 3 = 15$ ତେଣୁ $5 \times 3x^2 = 15x^2 \quad \therefore 15x^2 \div 5 = 3x^2$

(iii) $24x^2 \div 8x =$ କେତେ ସ୍ଥିର କରିବା ।

ବର୍ତ୍ତମାନ ସ୍ଥିର କରିବା : $8 \times$ (କେତେ ?)$= 24$ ଓ $x \times$ (କେତେ ?)$= x^2$

ଆମେ ଜାଣୁ $8 \times (3) = 24$ ଓ $x \times (x) = x^2 \quad \therefore 8x \times 3x = 24x^2$ ତେଣୁ $24x^2 \div 8x = 3x$

ଉଦାହରଣ– 12 : ଭାଗଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(i) $3x^2 + 9x \div 3x$ (ii) $2x^2 + 6x \div 2x$ (iii) $24x^3 - 16x^2 + 8x \div 4x$

ସମାଧାନ :– (i) $\frac{3x^2+9x}{3x} = \frac{3x^2}{3x} + \frac{9x}{3x} = x + 3$

(ii) $\frac{2x^2+6x}{2x} = \frac{2x^2}{2x} + \frac{6x}{2x} = x + 3$

(iii) $\frac{24x^3 - 16x^2 + 8x}{4x} = \frac{24x^3}{4x} - \frac{16x^2}{4x} + \frac{8x}{4x} = 6x^2 - 4x + 2$

ଅନୁଶୀଳନୀ - 3(d)

1. ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନ ପୂରଣ କର ।

(i) $3 \times (\text{——}) = 12x$ (ii) $2x \times (\text{——}) = 12x^2$

(iii) $4 \times (\text{——}) = -16x^2$ (iv) $-3x \times (\text{——}) = 15x^2$

ଭାଗଫଳ ସ୍ଥିର କର ।

2. (i) $8x \div 4$ (ii) $8x \div (-4)$ (iii) $(-8x) \div 4$ (iv) $(-8x) \div (-4)$

3. (i) $21x^2 \div 3$ (ii) $-21x^2 \div 3x$ (iii) $21x^2 \div (-7x)$

(iv) $21x^2 \div 3x^2$ (v) $21x^2 \div (-3x^2)$

4. (i) $(15x^2 + 10) \div 5$ (ii) $(16x^2 - 12) \div 4$

(iii) $(24x^2 - 8x+12) \div 4$ (iv) $(20x^2 + 15x) \div 5x$

(v) $(24x^2 + 20x) \div 4x$ (vi) $(48x^2 - 44x) \div (-4x)$

3.7 ବିସ୍ତୃତ ପ୍ରଣାଳୀରେ ଭାଗକ୍ରିୟା:

ମନେକର ଆମେ $12x^2 + 9x$ କୁ $3x$ ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କରିବା ।

ଏଠାରେ ଭାଜ୍ୟ $= 12x^2 + 9x$, ଭାଜକ $= 3x$

ଭାଜକ 3xକୁ ଯେଉଁ ରାଶିରେ ଗୁଣିଲେ ଭାଜ୍ୟର ପ୍ରଥମ ପଦ $12x^2$ ମିଳିବ, ତାହା ଭାଗଫଳର ପ୍ରଥମ ପଦ ହେବ । ଭାଜକ 3x କୁ ଯେଉଁ ରାଶିରେ ଗୁଣିଲେ ଭାଜ୍ୟର ଦ୍ୱିତୀୟ ପଦ 9x ମିଳିବ, ତାହାହେବ ଭାଗଫଳର ଦ୍ୱିତୀୟ ପଦ ।

ଆମେ ନିମ୍ନମତେ ପ୍ରକ୍ରିୟାଟି ଦେଖାଇବା ।

$$
\begin{array}{r|l}
 & 4x + 3 \\ \hline
3x & 12x^2 + 9x \\
 & 12x^2 \\
 & (-) \\ \hline
 & \quad + 9x \\
 & \quad + 9x \\
 & \quad (-) \\ \hline
 & \qquad 0
\end{array}
$$

ଏକାଧିକ ପଦବିଶିଷ୍ଟ ପଲିନୋମିଆଲ୍– ଭାଜକ ଦ୍ୱାରା ଭାଗକ୍ରିୟା

ଏକାଧିକ ପଦବିଶିଷ୍ଟ ପଲିନୋମିଆଲ୍ – ଭାଜକ ଦ୍ୱାରା ଭାଗକ୍ରିୟାର ବିଭିନ୍ନ ସୋପାନ ଓ କେତେକ ଉଦାହରଣ ନିମ୍ନରେ ଦେଖ ।

ଭାଗକ୍ରିୟାର ବିଭିନ୍ନ ସୋପାନ :

(i) ଏକାଧିକ ପଦବିଶିଷ୍ଟ ପଲିନୋମିଆଲ୍ – ଭାଜକ ଦ୍ୱାରା ଭାଗକ୍ରିୟା ସମୟରେ ପ୍ରଥମେ ଭାଜ୍ୟ ଓ ଭାଜକ ଉଭୟର ପଦଗୁଡ଼ିକୁ ବଡ଼ରୁ ସାନ (ବା ସାନରୁ ବଡ଼) ଘାତ କ୍ରମରେ ସଜାଇବା ଆବଶ୍ୟକ ।

(ii) ଭାଜକ ଏକାଧିକ ପଦବିଶିଷ୍ଟ ହେଲେ ମଧ୍ୟ ଭାଜ୍ୟର ପ୍ରଥମ ପଦକୁ ଭାଜକର ପ୍ରଥମ ପଦ ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କରି ଭାଗଫଳର ପ୍ରଥମ ପଦ ସ୍ଥିର କରାଯାଏ ।

(iii) ଭାଜକ ଓ ଭାଗଫଳର ପ୍ରଥମ ପଦର ଗୁଣଫଳକୁ ଭାଜ୍ୟରୁ ବିୟୋଗ କରାଯାଏ ।

(iv) ନିର୍ଣ୍ଣିତ ବିୟୋଗଫଳକୁ ପରବର୍ତ୍ତୀ ପର୍ଯ୍ୟାୟରେ ଭାଜ୍ୟ ରୂପେ ନିଆଯାଏ । ପୁନଶ୍ଚ ଏହି ଭାଜ୍ୟର ପ୍ରଥମ ପଦକୁ ଭାଜକର ପ୍ରଥମ ପଦଦ୍ୱାରା ଭାଗ କରାଯାଇ ଭାଗଫଳର ଦ୍ୱିତୀୟ ପଦ ସ୍ଥିର କରାଯାଏ ।

ଏହିପରି ଭାବରେ ଭାଗଶେଷ 0 ହେବା ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ପ୍ରକ୍ରିୟା ସମ୍ପାଦନ କରାଯାଇ ଭାଗଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରାଯାଏ ।

ଉଦାହରଣ – 13 : ଭାଗଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର: $(x^3 + x^2 + x + 6) \div (x + 2)$

ସମାଧାନ : $x^2 - x + 3$

$x+2 \,)\, x^3 + x^2 + x + 6$

$x^3 + 2x^2$

$(-)\;(-)$

$-x^2 + x + 6$

$-x^2 - 2x$

$(+)\;(+)$

$3x + 6$

$3x + 6$

$(-)\;(-)$

0

ଟୀକା :- ଯେଉଁ ପର୍ଯ୍ୟାୟରେ ବିୟୋଗଫଳର ଘାତ, ଭାଜକର ଘାତ ଠାରୁ କମ୍ ହେବ , ସେହି ପର୍ଯ୍ୟାୟରେ ଭାଗକ୍ରିୟା ଶେଷ ହେବ ଏବଂ ପ୍ରାପ୍ତ ବିୟୋଗଫଳ ହେବ ଭାଗଶେଷ ।

∴ ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ଭାଗଫଳ $= x^2 - x + 3$

ଦତ୍ତ ଭାଗକ୍ରିୟା ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ସୂଚନା :

ପ୍ରଥମ ସୋପାନ : ଭାଜ୍ୟର ପ୍ରଥମ ପଦକୁ ଭାଜକର ପ୍ରଥମ ପଦରେ ଭାଗକଲେ ଭାଗଫଳ x^2 ହେଲା ।

∴ ଭାଗଫଳର ପ୍ରଥମ ପଦ $= x^2$

ନିର୍ଣ୍ଣିତ ଭାଗଫଳ x^2 ଓ ଭାଜକର ଗୁଣଫଳକୁ ଭାଜ୍ୟରୁ ବିୟୋଗ କରାଗଲା ।

ଦ୍ୱିତୀୟ ସୋପାନ : ଉପରିସ୍ଥ ବିୟୋଗଫଳ ଏହି ପର୍ଯ୍ୟାୟରେ ଭାଜ୍ୟ ହେଲା ।

ଏହି ଭାଜ୍ୟର ପ୍ରଥମପଦକୁ ଭାଜକର ପ୍ରଥମପଦ ଦ୍ୱାରା ଭାଗକରି ମିଳିଥିବା ଭାଗଫଳ ହେଲା $(-x)$ ।

∴ ଭାଗଫଳର ଦ୍ୱିତୀୟ ପଦ $= -x$

ଏହି ସୋପାନର ନିର୍ଣ୍ଣିତ ଭାଗଫଳ ଓ ଭାଜକର ଗୁଣଫଳକୁ ଭାଜ୍ୟରୁ ବିୟୋଗ କରାଗଲା ।

ତୃତୀୟ ସୋପାନ : ଉପରିସ୍ଥ ବିୟୋଗଫଳ ଏହି ପର୍ଯ୍ୟାୟରେ ଭାଜ୍ୟ ହେଲା ।

ଏହି ଭାଜ୍ୟର ପ୍ରଥମ ପଦକୁ ଭାଜକର ପ୍ରଥମ ପଦ ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କଲେ ଭାଗଫଳ ହେଲା 3 ।

∴ ଭାଗଫଳର ତୃତୀୟ ପଦ $= +3$

ଏହି ପର୍ଯ୍ୟାୟରେ ମିଳିଥିବା ଭାଗଫଳ ଓ ଭାଜକର ଗୁଣଫଳକୁ ଭାଜ୍ୟରୁ ବିୟୋଗ କରାଗଲା ।

ବିୟୋଗଫଳ (ଅର୍ଥାତ୍ ଭାଗଶେଷ) 0 ହେବାରୁ ଭାଗକ୍ରିୟା ଶେଷ ହେଲା ଏବଂ ଭାଗକ୍ରିୟା ତିନି ସୋପାନରେ ମିଳିଥିବା ଭାଗଫଳ ତ୍ରୟର ସମଷ୍ଟି ନେବାରୁ ଭାଗଫଳ ହେଲା $(x^2 - x + 3)$ ।

ଉଦାହରଣ –14 : ଭାଗଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର : $(-8x^3 + 12x^2 - 6x + 1) \div (2x - 1)$

ସମାଧାନ :

$$
\begin{array}{r|l}
 & -4x^2 + 4x - 1 \\
\hline
2x-1 & -8x^3 + 12x^2 - 6x + 1 \\
 & -8x^3 + 4x^2 \\
 & (+) \quad (-) \\
\hline
 & \qquad 8x^2 - 6x + 1 \\
 & \qquad 8x^2 - 4x \\
 & \qquad (-) \quad (+) \\
\hline
 & \qquad\qquad -2x + 1 \\
 & \qquad\qquad -2x + 1 \\
 & \qquad\qquad (+) \quad (-) \\
\hline
 & \qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

∴ ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ଭାଗଫଳ $= -4x^2 + 4x - 1$

ଉଦାହରଣ –15 : ଭାଗଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର : $(x^3 - 5x + 2) \div (x - 2)$

ସମାଧାନ :

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 + 2x - 1 \\
\hline
x-2 & x^3 \qquad\quad - 5x + 2 \\
 & x^3 - 2x^2 \\
 & (-) \quad (+) \\
\hline
 & \qquad 2x^2 - 5x + 2 \\
 & \qquad 2x^2 - 4x \\
 & \qquad (-) \quad (+) \\
\hline
 & \qquad\qquad -x + 2 \\
 & \qquad\qquad -x + 2 \\
 & \qquad\qquad (+) \; (-) \\
\hline
 & \qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

∴ ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ଭାଗଫଳ $= x^2 + 2x - 1$

ଟୀକା : ଲକ୍ଷ୍ୟକର ଯେ, ଭାଜ୍ୟରେ ପଦଗୁଡ଼ିକ ଘାତାଙ୍କର ଅଧଃକ୍ରମରେ ସଜ୍ଜିତ ଅଛନ୍ତି, ମାତ୍ର x^2 ଥିବା କୌଣସି ପଦ ଏଥିରେ ନାହିଁ । ଏଣୁ ଭାଗକ୍ରିୟାରେ ଭାଜ୍ୟ ଲେଖିଲାବେଳେ x^3 ଓ $-5x$ ପଦଦ୍ୱୟ ଲେଖିବା ସମୟରେ ଏହି ପଦଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରେ ଗୋଟିଏ ପଦଲାଗି ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନ ରଖାଯାଇଛି ।

3.7.1. ଭାଗକ୍ରିୟାରେ ଇଉକ୍ଲିଡୀୟ ପଦ୍ଧତି (Euclidean Algorithm) :

ଉପରଲିଖିତ ଉଦାହରଣ ଦୁଇଟିରେ ଭାଗଶେଷ 0 ହେଉଛି । ମାତ୍ର 7 କୁ 2 ରେ ଭାଗକଲେ ଭାଗଶେଷ 0 ହୁଏ ନାହିଁ । ସେହିପରି 9 କୁ 2 ରେ ଭାଗକଲେ ଭାଗଶେଷ ମଧ୍ୟ 0 ହେବ ନାହିଁ । କାରଣ 7 ରୁ 3 ଥର 2 ନେଲା ପରେ 1 ବଳକା ହୁଏ । ଅର୍ଥାତ $7 = 2 \times 3 + 1$

ସାଧାରଣ ଭାବେ କହିଲେ, **ଭାଜ୍ୟ = ଭାଜକ x ଭାଗଫଳ + ଭାଗଶେଷ**

ଏହାକୁ **ଇଉକ୍ଲିଡୀୟ ପଦ୍ଧତି (Euclidean Algorithm)** କୁହାଯାଏ ।

ଗୋଟିଏ ପଲିନୋମିଆଲ୍ – ଭାଜ୍ୟକୁ ଅନ୍ୟ ଏକ ପଲିନୋମିଆଲ୍ – ଭାଜକ ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କଲା ବେଳେ ଲକ୍ଷ୍ୟ କଲେ ଜଣାଯିବ ଯେ ଗୋଟିଏ ସୋପାନରୁ ପରବର୍ତ୍ତୀ ସୋପାନକୁ ଭାଜ୍ୟର ଘାତ କ୍ରମଶଃ କମି କମି ଯାଉଛି । ମାତ୍ର ଭାଜକର ଘାତ ସ୍ଥିର ଅଛି । ଏଣୁ ଏକ ସମୟ ଆସିବ ଯେଉଁଠି ଭାଜ୍ୟର ଘାତ ଭାଜକର ଘାତରୁ କମିଯିବ । ଏହି ସମୟରେ ମିଳିଥିବା ରାଶିଟିକୁ ଭାଗଶେଷ କୁହାଯିବ । ଦେଖିବା ଏହ କିପରି ହେଉଛି ।

ଉଦାହରଣ–16 : ଭାଗଫଳ ଓ ଭାଗଶେଷ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର: $(x^2 + 11x + 21) \div (x + 2)$

ସମାଧାନ :

$$
\begin{array}{r|l}
 & x + 9 \\
\hline
x + 2 & x^2 + 11x + 21 \\
 & x^2 + 2x \\
 & (-) \quad (-) \\
\hline
 & \quad 9x + 21 \\
 & \quad 9x + 18 \\
 & \quad (-) \quad (-) \\
\hline
 & \qquad 3 \text{ (ଭାଗଶେଷ)}
\end{array}
$$

ଲକ୍ଷ୍ୟ କର : ଭାଗଶେଷ 3 ର ଘାତ 0, ଭାଜକ $(x + 2)$ ର ଘାତ (1) ଠାରୁ କମ୍

ଏ କ୍ଷେତ୍ରରେ $x^2 + 11x + 21 = (x + 2)(x + 9) + 3$

ଅର୍ଥାତ୍ ଭାଗକ୍ରିୟାରେ ଭାଗଫଳ = $x+9$, ଭାଗଶେଷ $=3$

ଉଦାହରଣ–17 : ଭାଗଫଳ ଓ ଭାଗଶେଷ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର: $(x^3 + 8) \div (x - 2)$

ସମାଧାନ :

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 + 2x + 4 \\
\hline
x - 2 & x^3 \qquad\qquad +8 \\
 & x^3 - 2x^2 \\
 & (-) \quad (+) \\
\hline
 & \quad 2x^2 \qquad + 8 \\
 & \quad 2x^2 - 4x \\
 & \quad (-) \quad (+) \\
\hline
 & \qquad 4x + 8 \\
 & \qquad 4x - 8 \\
 & \qquad (-) \quad (+) \\
\hline
 & \qquad\quad 16 \text{ (ଭାଗଶେଷ)}
\end{array}
$$

ଭାଗଫଳ = $x^2 + 2x + 4$, ଭାଗଶେଷ $=16$

ଉଦାହରଣ–18 : ଏକ ଭାଗପ୍ରକ୍ରିୟାରେ ଭାଜ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଯଦି,

ଭାଜକ = $x+5$, ଭାଗଫଳ = x^2-1 ଓ ଭାଗଶେଷ = -3

ସମାଧାନ : ଭାଜ୍ୟ = ଭାଜକ x ଭାଗଫଳ + ଭାଗଶେଷ

$= (x + 5)(x^2 - 1) + (-3) = x(x^2-1) + 5(x^2 - 1) - 3$

$= x^3 - x + 5x^2 - 5 - 3 = x^3 + 5x^2 - x - 8$

ଉଦାହରଣ-19 : ଯଦି $x^2 - 7x + a$, $x - 3$ ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ହୁଏ, ତେବେ a ର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ :

$$
\begin{array}{r|l}
 & x - 4 \\
\hline
x - 3 & x^2 - 7x + a \\
 & x^2 - 3x \\
 & (-)\ (+) \\
\hline
 & -4x + a \\
 & -4x + 12 \\
 & (+)\ \ (-) \\
\hline
 & a - 12
\end{array}
$$

ଏଠାରେ ଭାଗଶେଷ = $a - 12$

କିନ୍ତୁ ଦତ୍ତ ଅଛି $x^2 - 7x + a$, $x - 3$ ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ, ତେଣୁ ଏଠାରେ $a - 12 = 0$ ହେବ ।

$\therefore a = 12$ ହେବ ।

ଅନୁଶୀଳନୀ - 3(e)

1. ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନ ପୂରଣ କର :

(i) ଭାଜକ = $2x+1$, ଭାଗଶେଷ $=0$ ଓ ଭାଗଫଳ $=3x$ ହେଲେ ଭାଜ୍ୟ=....(0, $3x$, $2x+1$, $6x^2 + 3x$)

(ii) ଭାଜ୍ୟ = $3x^2$, ଭାଗଶେଷ = 0, ଓ ଭାଗଫଳ = $3x$ ହେଲେ ଭାଜକ = ... (0, $2x$, $3x$, x...)

(iii) ଭାଜ୍ୟ = $6x^3 + 4x + 1$, ଭାଗଶେଷ =1 ଓ ଭାଜକ = $2x$ ହେଲେ

ଭାଗଫଳ = ...(1, $2x^2+2$, $3x^2+1$, $3x^2 + 2$)

(iv) ଭାଜକ = $2x^2$, ଭାଜ୍ୟ = $8x^4 + 6x^2 + 1$ ଏବଂ ଭାଗଫଳ = $4x^2+3$ ହେଲେ

ଭାଗଶେଷ =...(0, 1, $4x^2 + 3$, $3x^2 + 4$)

(v) ଭାଜକ = $4x$, ଭାଗଫଳ $=3x+2$ ଓ ଭାଗଶେଷ = 2 ହେଲେ ଭାଜ୍ୟ = ...

(0, $12x^2$, $12x^2 + 8x$, $12x^2 + 8x + 2$)

2. ଭାଗଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(i) $(x^2 - 11x + 28) \div (x - 4)$

(ii) $(x^2 - 11x + 28) \div (x - 7)$

(iii) $(x^2 + 8x + 15) \div (x + 3)$

(iv) $(x^2 - 1) \div (x + 1)$

(v) $(x^3 + 1) \div (x+1)$

(vi) $(x^3 - 1) \div (x - 1)$

(vii) $(2x^3 - x^2 + x + 1) \div (2x + 1)$

(viii) $(x^3 - 4x^2 + x + 6) \div (-x-1)$

(ix) $(x^3 - 4x^2 + x + 6) \div (x - 3)$

(x) $(5x^2 - 4 + 6x^3) \div (-2 + 3x)$

3. ଭାଗଫଳ ଓ ଭାଗଶେଷ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(i) $(x^2 + 15x + 56) \div (x + 1)$ (ii) $(x^2 - 12x + 30) \div (x - 1)$

(iii) $(-7 - 6x + 4x^2) \div (2x - 1)$ (iv) $(6x + 27x^3 - 9x^2 + 1) \div (3x - 1)$

(v) $(8x^3 - 1) \div (2x + 1)$ (vi) $(x^3 - 1) \div (-x - 1)$

4. a ର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(i) ଯଦି, $x^2 - 5x + a$, $x + 2$ ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ; (ii) ଯଦି, $4x^2 - 6x + a$, $2x - 1$ ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ;

(iii) ଯଦି, $6x^2 - 4x + a$, $3x + 1$ ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ।

3.8 ଅଭେଦ (Identity) :

ଆସ ଆମେ ନିମ୍ନ ଗାଣିତିକ ଉକ୍ତିକୁ ପରୀକ୍ଷା କରିବା ।

$(a + 1)(a + 2) = a^2 + 3a + 2$... (1)

$a = 10$ ପାଇଁ

ବାମପାର୍ଶ୍ୱ $= (a+1)(a+2) = (10 + 1)(10 + 2) = 11 \times 12 = 132$

ଦକ୍ଷିଣ ପାର୍ଶ୍ୱ $= a^2 + 3a + 2 = 10^2 + 3 \times 10 + 2$

$= 100 + 30 + 2 = 132$

$\therefore a = 10$ ପାଇଁ (1) ଉକ୍ତିର ବାମପାର୍ଶ୍ୱ = ଦକ୍ଷିଣପାର୍ଶ୍ୱ

ସେହିପରି $a = -5$ ନେଲେ

ବାମପାର୍ଶ୍ୱ $= (a + 1)(a + 2) = (-5+1)(-5 + 2) = (-4) \times (-3) = 12$

ଦକ୍ଷିଣ ପାର୍ଶ୍ୱ $= a^2 + 3a + 2 = (-5)^2 + 3 \times (-5) + 2 = 25 - 15 + 2 = 12$

ଏଠାରେ ମଧ୍ୟ $a = -5$ ପାଇଁ (1) ଉକ୍ତିର ବାମପାର୍ଶ୍ୱ = ଦକ୍ଷିଣ ପାର୍ଶ୍ୱ

a ର ଆଉ କେତେକ ମୂଲ୍ୟ ନେଇ ଦେଖ । ଦେଖିବ a ର ପ୍ରତ୍ୟେକ ମୂଲ୍ୟ ପାଇଁ, (1) ଉକ୍ତିର ବାମପାର୍ଶ୍ୱ = ଦକ୍ଷିଣପାର୍ଶ୍ୱ ହେବ ।

ମନେରଖ : **ଯେଉଁ ଉକ୍ତିଟି ଏଥିରେ ଥିବା ବୀଜଗାଣିତିକ ସଂକେତମାନଙ୍କର ଯେକୌଣସି ମାନ ପାଇଁ ସତ୍ୟ ହୁଏ, ତାହାକୁ ଅଭେଦ କୁହାଯାଏ ।**

ଅତଏବ $(a+1)(a+2) = a^2 + 3a + 2$ ଏକ ଅଭେଦ ଅଟେ ।

ଅନ୍ୟ ପକ୍ଷରେ ଅନ୍ୟ ଏକ ଉକ୍ତିକୁ ନିଆଯାଉ । ଉକ୍ତିଟି ହେଲା : $a^2 + 3a + 2 = 132$ ... (2)

ଏହା $a = 10$ ପାଇଁ ସତ୍ୟ ଅଟେ । (ପରୀକ୍ଷା କରି ଦେଖ)

ମାତ୍ର $a = -5$ କିମ୍ବା $a = 2$ ଇତ୍ୟାଦି ପାଇଁ ସତ୍ୟ ନୁହେଁ । ତେଣୁ (2) ଉକ୍ତିଟି ଅଭେଦ ନୁହେଁ । **ଉକ୍ତିଟି ବୀଜଗାଣିତିକ ସଂକେତର କେବଳ କେତେକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ମାନ ପାଇଁ ସତ୍ୟ ହେଉଥିଲେ ସେହି ଉକ୍ତିଟିକୁ ଆମେ, ଅଭେଦ ନ କହି ସମୀକରଣ କହିବା** । ପରବର୍ତ୍ତୀ ଅଧ୍ୟାୟରେ ସମୀକରଣ ବିଷୟରେ ଆଲୋଚନା କରାଯିବ ।

3.9 କେତେକ ଉପଯୋଗୀ ଅଭେଦ :

(a) ଦୁଇଟି ଦ୍ୱିପଦୀ ପରିପ୍ରକାଶ (Binomial) ର ଗୁଣଫଳରୁ ସୃଷ୍ଟ ନିମ୍ନ ଅଭେଦଗୁଡ଼ିକ ବୀଜଗଣିତର ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ଉପଯୋଗୀ ଅଭେଦ ।

(i) $\mathbf{(a+b)^2 = (a+b)\,(a+b)}$ (ସଂଜ୍ଞା)

$= a(a+b) + b\,(a+b)$ (ବଣ୍ଟନ ନିୟମ)

$= a^2 + ab + ba + b^2$ (ବଣ୍ଟନ ନିୟମ)

$= a^2 + ab + ab + b^2$ ($\because ab = ba$) (ଗୁଣନର କ୍ରମବିନିମୟୀ ନିୟମ)

$= a^2 + 2ab + b^2$ $\therefore (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ... (I)

(ii) $\mathbf{(a-b)^2 = (a-b)\,(a-b)}$ (ସଂଜ୍ଞା)

$= a\,(a-b) - b(a-b)$ (ବଣ୍ଟନ ନିୟମ)

$= a^2 - ab - ba + b^2$ (ବଣ୍ଟନ ନିୟମ)

$= a^2 - ab - ab + b^2$ ($\because ab = ba$) (ଗୁଣନର କ୍ରମବିନିମୟୀ ନିୟମ)

$= a^2 - 2ab + b^2$ $\therefore (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ .....(II)

(iii) $\mathbf{(a+b)\,(a-b) = a\,(a-b) + b\,(a-b)}$ (ବଣ୍ଟନ ନିୟମ)

$= a^2 - ab + ba - b^2$

$= a^2 - ab + ab - b^2$ ($\because ab = ba$)(ଗୁଣନର କ୍ରମବିନିମୟୀ ନିୟମ)

$= a^2 - b^2$

$\therefore (a+b)\,(a-b) = a^2 - b^2$........ (III)

(iv) $\mathbf{(x+a)\,(x+b) = x\,(x+b) + a\,(x+b)}$ (ବଣ୍ଟନ ନିୟମ)

$= x^2 + xb + ax + ab$ (ପୁନଃ ବଣ୍ଟନ ନିୟମ)

$= x^2 + bx + ax + ab$ (ଗୁଣନର କ୍ରମବିନିମୟୀ ନିୟମ)

$= x^2 + ax + bx + ab$ (ଯୋଗର କ୍ରମବିନିମୟୀ ନିୟମ)

$= x^2 + (a + b)\, x + ab$

$\therefore (x+a)\,(x + b) = x^2 + (a+b)\, x + ab$........ (IV)

ଟୀକା : 1. ଅଭେଦ (IV)ରେ $b = -b$ ନେଲେ ପାଇବା,

$(x+a)\,(x - b) = x^2 + (a - b)\, x - ab$

2. ଅଭେଦ (IV)ରେ $a = -a$ ଏବଂ $b = -b$ ନେଲେ ପାଇବା,

$(x-a)\,(x - b) = x^2 - (a+b)\, x + ab$

3. ଅଭେଦ (IV)ରେ $a = -a$ ନେଲେ ପାଇବା,

$(x-a)\,(x + b) = x^2 - (a-b)\, x - ab$

ନିଜେ କର

1. ଅଭେଦ (I) ରେ b ସ୍ଥାନରେ –b ନେଇ ଦେଖ; ଅଭେଦ (II) ମିଳୁଛି କି ?
2. $a = 2, b = 3, x = 5$ ନେଇ, ଅଭେଦ (IV) ର ସତ୍ୟତା ପରୀକ୍ଷା କର ।
3. ଅଭେଦ (IV) ରେ $a = b$ ନେଲେ ତୁମକୁ କ'ଣ ମିଳିବ ?

   ଏହାର କ'ଣ ଅଭେଦ (I) ସହିତ କିଛି ସମ୍ବନ୍ଧ ଅଛି ?
4. ଅଭେଦ (IV) ରେ $a = -c$ ଏବଂ $b = -c$ ନେଲେ କ'ଣ ମିଳିବ ? ଏହାର ଅଭେଦ (II) ସହିତ କ'ଣ ସମ୍ବନ୍ଧ ଅଛି ?
5. ଅଭେଦ (IV) ରେ $b = -a$ ନେଲେ ତୁମେ କ'ଣ ପାଇବ ? ଏହାର ଅଭେଦ (III) ସହିତ କ'ଣ ସମ୍ବନ୍ଧ ଅଛି ?

ଉଦାହରଣ-1: ଅଭେଦ (I) ବ୍ୟବହାର କରି (i) $(2x + 3y)^2$ (ii) $(103)^2$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : (i) $(2x + 3y)^2$

$= (2x)^2 + 2(2x)\,(3y) + (3y)^2$ (ଅଭେଦ (I) ବ୍ୟବହାର କରି)

$= 4x^2 + 12xy + 9y^2$

(ii) $(103)^2$

$= (100 + 3)^2$

$= (100)^2 + 2 \times 100 \times 3 + 3^2$ (ଅଭେଦ (I) ବ୍ୟବହାର କରି)

$= 10000 + 600 + 9 = 10609$

ଉଦାହରଣ-2: ଅଭେଦ (II) ବ୍ୟବହାର କରି(i) $(4p - 3q)^2$ (ii) $(4.9)^2$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : (i) $(4p - 3q)^2$

$= (4p)^2 - 2(4p)(3q) + (3q)^2 = 16p^2 - 24pq + 9q^2$

(ii) $(4.9)^2$

$= (5.0 - 0.1)^2 = (5.0)^2 - 2(5.0)(0.1) + (0.1)^2$

$= 25.00 - 1.00 + 0.01 = 24.01$

ଉଦାହରଣ-3: ଅଭେଦ (III) ବ୍ୟବହାର କରି

(i) $(3m + 2n)(3m - 2n)$ (ii) $983^2 - 17^2$ (iii) 194×209 ର ସରଳୀକୃତ ମାନ ସ୍ଥିର କର ।

ସମାଧାନ :

(i) $(3m + 2n)(3m - 2n) = (3m)^2 - (2n)^2 = 9m^2 - 4n^2$

(ii) $983^2 - 17^2 = (983 + 17)(983 - 17) = 1000 \times 966 = 966000$

[$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ ଅଭେଦରେ $a = 983$ ଏବଂ $b = 17$ ନେଇ]

(iii) $194 \times 206 = (200 - 6) \times (200 + 6) = 200^2 - 6^2 = 40000 - 36 = 39964$

ଉଦାହରଣ-4: ଅଭେଦ (IV) ପ୍ରୟୋଗରେ ନିମ୍ନଲିଖିତ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଗୁଣଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(i) $(P + 5)(P + 3)$; (ii) $(a + 2)(a - 4)$; (iii) $(x - 7)(x - 6)$

ସମାଧାନ :- (i) $(P + 5)(P + 3)$

$= P^2 + (5 + 3)P + 5 \times 3 = P^2 + 8P + 15$

(ii) $(a + 2)(a - 4)$

$= a^2 + \{2 + (-4)\}a + 2(-4) = a^2 - 2a - 8$

(iii) $(x - 7)(x - 6)$

$= x^2 + \{(-7) + (-6)\}x + (-7)(-6) = x^2 - 13x + 42$

ଉଦାହରଣ-5: ଅଭେଦ (IV) ପ୍ରୟୋଗରେ ନିମ୍ନଲିଖିତ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଗୁଣଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(i) 501×502 (ii) 95×103

ସମାଧାନ :

(i) $501 \times 502 = (500 + 1) \times (500 + 2)$

$= 500^2 + (1 + 2) \times 500 + 1 \times 2$

$= 250000 + 1500 + 2 = 251502$

(ii) $95 \times 103 = (100 - 5) \times (100 + 3)$

$= 100^2 + (-5 + 3) \times 100 + (-5) \times 3$

$= 10000 - 200 - 15 = 9785$

(b) ଦୁଇଟି ତ୍ରିପଦୀ ପରିପ୍ରକାଶ (ପଲିନୋମିଆଲ୍)ର ଗୁଣଫଳରୁ ସୃଷ୍ଟ ଅନ୍ୟ ଏକ ଗୁରୁତ୍ୱପୂର୍ଣ୍ଣ ଅଭେଦ ସଂପର୍କରେ ଆଲୋଚନା କରିବା ।

$(a + b + c)^2 = (a + b + c)\ (a + b + c)$ (ସଂଜ୍ଞା)

$= a(a + b + c) + b(a + b + c) + c(a + b + c)$ (ବଣ୍ଟନ ନିୟମ)

$= a^2 + ab + ac + ba + b^2 + bc + ca + cb + c^2$

$= a^2 + b^2 + c^2 + ab + ba + ac + ca + bc + cb$

$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$ ($\because$ $ab = ba$, $bc = cb$ ଏବଂ $ca = ac$)

$\therefore (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$ .... (V)

ବିକଳ୍ପ ପ୍ରଣାଳୀ :

ଅଭେଦ (I)ର ପ୍ରୟୋଗରେ ପାଇବା

$(a + b + c)^2 = \{(a + b) + c)\}^2 = (a + b)^2 + 2\ (a + b)c + c^2$ (ଅଭେଦ (I)ର ପ୍ରୟୋଗ)

$= a^2 + 2ab + b^2 + 2ca + 2bc + c^2$

$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

$\therefore (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$ .... (V)

ଟୀକା : 1. ଅଭେଦ (V) ରେ $c = -c$ ନେଲେ ପାଇବା,

$(a + b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2bc - 2ca$

2. ଅଭେଦ (V) ରେ $b = -b$ ନେଲେ ପାଇବା,

$(a - b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc + 2ca$

3. ଅଭେଦ (V) ରେ $b = -b$ ଏବଂ $c = -c$ ନେଲେ ପାଇବା,

$$(a - b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2bc - 2ca$$

ଉଦାହରଣ-6 : ନିମ୍ନସ୍ଥ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ଗୁଡ଼ିକର ବର୍ଗ ସ୍ଥିର କରିବା ।

(i) $a + 2b + c$ (ii) $x + 2y - 3z$

ସମାଧାନ : (i) $(a + 2b + c)^2 = a^2 + (2b)^2 + c^2 + 2.a.2b + 2.\ 2b.c + 2.c.a$

$= a^2 + 4b^2 + c^2 + 4ab + 4bc + 2ca$

(ii) $(x + 2y - 3z)^2 = x^2 + (2y)^2 + (-3z)^2 + 2.x.2y + 2.2y.(-3z) + 2(-3z).x$

$= x^2 + 4y^2 + 9z^2 + 4xy - 12yz - 6zx$

ଉଦାହରଣ-7 : ନିମ୍ନଲିଖିତ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ଗୁଡ଼ିକୁ ପୂର୍ଣ୍ଣବର୍ଗ ରାଶିରେ ପରିଣତ କର ।

(i) $a^2 + 8ab + 16b^2$ (ii) $4x^2 - 4x + 1$

(iii) $9x^2 - 12xy + 4y^2$ (iv) $x^2 + 6xy + 9y^2$

(v) $4x^2 + 9y^2 + 16z^2 + 12xy + 24\ yz + 16\ xz$

(vi) $m^2 + 4n^2 + 25z^2 - 4mn - 20nz + 10\ mz$

ସମାଧାନ :

(i) $a^2 + 8ab + 16b^2 = (a)^2 + 2.\ a.\ 4b + (4b)^2 = (a + 4b)^2$ ଅଭେଦ -(I)

(ii) $4x^2 - 4x + 1 = (2x)^2 - 2.2x.1 + (1)^2 = (2x - 1)^2$ ଅଭେଦ -(II)

(iii) $9x^2 - 12xy + 4y^2 = (3x)^2 - 2.3x.2y + (2y)^2 = (3x - 2y)^2$ ଅଭେଦ -(II)

(iv) $x^2 + 6xy + 9y^2 = (x)^2 + 2.x.3y + (3y)^2 = (x + 3y)^2$ ଅଭେଦ -(I)

(v) $4x^2 + 9y^2 + 16z^2 + 12xy + 24\ yz + 16\ xz$

$= (2x)^2 + (3y)^2 + (4z)^2 + 2.2x.3y + 2.3y.4z + 2.4z.2x$

$= (2x + 3y + 4z)^2$ ଅଭେଦ -(V)

(vi) $m^2 + 4n^2 + 25z^2 - 4mn - 20nz + 10\ mz$

$= (m)^2 + (2n)^2 + (5z)^2 - 2.m.2n - 2.2n.5z + 2.5zm$

$= (m - 2n + 5z)^2$ ଅଭେଦ -(V), ଟୀକା-(2)

ବିକଳ୍ପ ପ୍ରଣାଳୀ :

$m^2 + 4n^2 + 25z^2 - 4mn - 20nz + 10\ mz$

$= (m)^2 + (-2n)^2 + (5z)^2 + 2.m\ (-2n) + 2.(-2n)\ 5z + 2.5z.m$

$= (m - 2n + 5z)^2$ ଅଭେଦ -(V)

ଅନୁଶୀଳନୀ -3(f)

1. ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନ ପୂରଣ କର ।

(i) $(a + 2)^2 = a^2 + (\text{——})\ a + 2^2$ (2, 2a, 4, 4a)

(ii) $(3 + y)^2 = 9 + 3\ (\text{——}) + y^2$ (y, 2y, 3y, 4y)

(iii) $(4 - y)^2 = 16 + 2\ (\text{——}) + y^2$ (–2, –2y, –4, –4y)

(iv) $(2x - 3y)^2 = 4x^2 - 3\ (\text{——}) + 9y^2$ (2xy, 3xy, 4xy, 12xy)

(v) $(x + a)\ (x - b) = x^2 + (\text{——})\ x - ab$ (a+b, a–b, b–a, –(a+b))

2. ସୂତ୍ର ପ୍ରୟୋଗ କରି ନିମ୍ନଲିଖିତ ରାଶିର ବର୍ଗ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(i) $b + c$ (ii) $(4 + b)$ (iii) $r - 10$ (iv) $3n + 2$

(v) $2m + n$ (vi) $7p - q$ (vii) $2x + 3y$ (viii) $2m - 3n - P$

(ix) $x - y + 4z$ (x) $a + 2b + 3c$

3. ଆବଶ୍ୟକ ସୂତ୍ର ପ୍ରୟୋଗ କରି ନିମ୍ନସ୍ଥ ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କର ବର୍ଗ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(i) 102 (ii) 304 (iii)1003 (iv) 4001

4. ଆବଶ୍ୟକ ଅଭେଦ ପ୍ରୟୋଗ କରି ମୂଲ୍ୟ ନିରୂପଣ କର ।

(i) 99^2 (ii) 998^2 (iii) 297×303 (iv) 78×82

(v) 8.9^2 (vi) 1.05×9.5 (vii) $51^2 - 49^2$ (viii) $(1.02)^2 - (0.98)^2$

(ix) $153^2 - 147^2$

5. $(x + a)\ (x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$ ଅଭେଦ ପ୍ରୟୋଗ କରି ଗୁଣଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(i) 103×104 (ii) 5.1×5.2 (iii) 103×98 (iv) 9.7×9.8

6. ଆବଶ୍ୟକ ଅଭେଦ ପ୍ରୟୋଗ କରି ଗୁଣଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(i) $(x + 3)(x + 3)$ (ii) $(2y + 5)(2y + 5)$

(iii) $2a - 7(2a - z)$ (iv) $(1.1m - 0.4)(1.1m + 0.4)$

(v) $(a^2 + b^2)(-a^2 + b^2)$ (vi) $(6x - 7)(6x + 7)$

(vii) $(P - 5)(P + 5)$ (viii) $(2x + 3y)(3y - 2x)$

(ix) $(x + 1)(x - 1)(x^2 + 1)$ (x) $(2y + 3)(2y - 3)(4y^2 + 9)$

7. $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$ ଅଭେଦ ପ୍ରୟୋଗ କରି ଗୁଣଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(i) $(x + 3)(x + 7)$ (ii) $(4x + 5)(4x + 1)$

(iii) $(4x - 5)(4x - 1)$ (iv) $(4x + 5)(4x - 1)$

(v) $(2a^2 + 9)(2a^2 + 5)$ (vi) $(xyz - 4)(xyz - 2)$

8. ସରଳ କର ।

(i) $(a^2 - b^2)^2 + (a^2 + b^2)^2$ (ii) $(2x + 5)^2 - (2x - 5)^2$

(iii) $(7m - 8n)^2 + (7m + 8n)^2$ (iv) $(4m + 5n)^2 + (5m + 4n)^2$

(v) $(2.5p - 1.5q)^2 - (1.5p - 2.5q)^2$ (vi) $(ab + bc)^2 - 2ab^2c$

(vii) $(m^2 - n^2m)^2 + 2m^2n^2$ (viii) $(a+b-c)^2 + (a-b-c)^2$

(ix) $(2a-3b-c)^2+(2a-b+5c)^2$ (x) $(3x-4y+z)^2-(x-2y-z)^2$

9. ନିମ୍ନଲିଖିତ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ଗୁଡ଼ିକୁ ପୂର୍ଣ୍ଣବର୍ଗରେ ପରିଣତ କର ।

(i) $4x^2 + 12xy + 9y^2$ (ii) $64m^2 - 48mn + 9n^2$

(iii) $4x^2 - 4x + 1$ (iv) $x^2 + 4y^2 + z^2 + 4xy + 4yz + 2zx$

(v) $4x^2 + y^2 + z^2 - 4xy + 2yz - 4xz$ (vi) $9x^2 + 4y^2 + z^2 - 12xy - 4yz + 6zx$

10. (i) ଦର୍ଶାଅ ଯେ, $(a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab$ (ii) ଦର୍ଶାଅ ଯେ, $(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2+b^2)$

(iii) ଦର୍ଶାଅ ଯେ, $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = ab$ (iv) ଦର୍ଶାଅ ଯେ, $(2a+b)^2 = (2a-b)^2 = 8ab$

(v) ଦର୍ଶାଅ ଯେ, $(3x-2y)^2 + 12xy = 9x^2+4y^2$

ସୂଚନା : ଅଭେଦ (I) ଓ ଅଭେଦ (II) ପ୍ରୟୋଗରେ ଉପରୋକ୍ତ ଅଭେଦଗୁଡ଼ିକୁ ପାଇବାକୁ ଚେଷ୍ଟା କର ।

*****