3.2.1 શ્રેણિકની કક્ષા

જેમાં m હાર અને n સ્તંભ હોય તેવા શ્રેણિકને $m \times n$ કક્ષા (Order) વાળો શ્રેણિક અથવા $m \times n$ શ્રેણિક કહીશું. (m બાય n શ્રેણિક તરીકે વાંચીશું.) આથી શ્રેણિકના ઉપરનાં ઉદાહરણોના સંદર્ભમાં આપણી પાસે A એ 3×2 શ્રેણિક, B એ 3×3 શ્રેણિક અને C એ 2×3 શ્રેણિક છે. આપણે નિરીક્ષણ કરીએ કે, A ને $3 \times 2 = 6$ ઘટકો તથા B અને C ને અનુક્રમે 9 અને 6 ઘટકો છે.

વ્યાપક રીતે, $m \times n$ શ્રેણિકની લંબચોરસ સારણી નીચે પ્રમાણે છે :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mj} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

અથવા $A = [a_{ij}]_{m \times n}, \ 1 \le i \le m, \ 1 \le j \le n \quad i, j \in N$

આમ, i મી હાર ઘટકો $a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, \ldots, a_{in}$ થી બનેલી છે અને j મો સ્તંભ ઘટકો $a_{1j}, a_{2j}, a_{3j}, \ldots, a_{mj}$ થી બનેલો છે.

વ્યાપક રીતે, i મી હાર અને j મા સ્તંભમાં આવેલો ઘટક a_{ij} છે. આપણે તેને A નો (i, j)મો ઘટક પણ કહી શકીએ. $m \times n$ શ્રેણિકના ઘટકોની સંખ્યા mn થશે.

☛ નોંધ : આ પ્રકરણમાં,

(1) આપણે $m \times n$ કક્ષાવાળા શ્રેણિક Aને દર્શાવવા માટે સંકેત $A = [a_{ij}]_{m \times n}$નો ઉપયોગ કરીશું.

(2) આપણે શ્રેણિકના ઘટક, માત્ર વાસ્તવિક સંખ્યા અથવા વાસ્તવિક મૂલ્યવાળાં વિધેયો હોય તેવા જ શ્રેણિકનો વિચાર કરીશું.

આપણે સમતલના કોઈ પણ બિંદુ (x, y) ને પણ શ્રેણિક (સ્તંભ અથવા હાર) $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ (અથવા $[x \ y]$)થી દર્શાવી શકીએ. ઉદાહરણ તરીકે, બિંદુ P(0, 1)ને શ્રેણિકમાં $P = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ અથવા $[0 \quad 1]$ દ્વારા દર્શાવી શકાય.

આપણે નિરીક્ષણ કરી શકીએ કે, આ પ્રમાણે સીધી રેખાઓથી ઘેરાયેલી બંધ આકૃતિનાં શિરોબિંદુઓને પણ શ્રેણિક સ્વરૂપમાં દર્શાવી શકીએ. ઉદાહરણ તરીકે, ચતુષ્કોણ ABCD નાં શિરોબિંદુઓ A(1, 0), B(3, 2), C(1, 3), D(–1, 2) નો વિચાર કરીએ.

હવે, ચતુષ્કોણ ABCD ને શ્રેણિક સ્વરૂપમાં,

$$X = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}_{2 \times 4} \end{array} \quad \text{અથવા} \quad Y = \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \\ 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}_{4 \times 2} \quad \text{પ્રમાણે દર્શાવી શકાય.}$$

આમ, સમતલની ભૌમિતિક આકૃતિનાં શિરોબિંદુઓને શ્રેણિક સ્વરૂપમાં રજૂ કરી શકાય.

હવે આપણે કેટલાંક ઉદાહરણ વિશે વિચારીએ.

ઉદાહરણ 1 : ત્રણ કારખાનાં I, II અને III નાં પુરુષ અને સ્ત્રી કર્મીઓની સંખ્યાને લગતી માહિતી નીચે પ્રમાણે લઈએ :

	પુરુષ કર્મીઓની સંખ્યા	**સ્ત્રી કર્મીઓની સંખ્યા**
I	30	25
II	25	31
III	27	26

ઉપરની માહિતીને 3×2 શ્રેણિકમાં રજૂ કરો. ત્રીજી હાર અને બીજા સ્તંભનો ઘટક શું સૂચવે છે ?

ઉકેલ : માહિતીને 3×2 શ્રેણિક સ્વરૂપમાં નીચે પ્રમાણે રજૂ કરી શકાય :

$$A = \begin{bmatrix} 30 & 25 \\ 25 & 31 \\ 27 & 26 \end{bmatrix}$$

ત્રીજી હાર અને બીજા સ્તંભનો ઘટક કારખાના III ના સ્ત્રી કર્મીઓની સંખ્યા રજૂ કરે છે.

ઉદાહરણ 2 : જો કોઈ શ્રેણિકમાં બરાબર 8 ઘટકો હોય, તો તેની શક્ય કક્ષાઓ કઈ હશે ?

ઉકેલ : આપણે જાણીએ છીએ કે, જો શ્રેણિકની કક્ષા $m \times n$ હોય, તો તેને mn ઘટકો હોય. આમ, 8 ઘટકોવાળા શ્રેણિકની શક્ય તેટલી કક્ષા શોધવા આપણે જેનો ગુણાકાર 8 થાય તેવી પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓની બધી ક્રમયુક્ત જોડ શોધીશું.

આમ, બધી શક્ય ક્રમયુક્ત જોડીઓ (1, 8), (8, 1), (4, 2), (2, 4) થશે.

આથી, માંગેલ શ્રેણિકોની શક્ય કક્ષા 1×8, 8×1, 4×2, 2×4 છે.

ઉદાહરણ 3 : જે શ્રેણિકના ઘટકો $a_{ij} = \frac{1}{2}|i - 3j|$ દ્વારા મળે તેવા 3×2 શ્રેણિકની રચના કરો.

ઉકેલ : વ્યાપક રીતે, 3×2 શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$ મળે.

હવે, $a_{ij} = \frac{1}{2}|i - 3j|$, $i = 1, 2, 3$ અને $j = 1, 2$

તેથી, $a_{11} = \frac{1}{2}|1 - 3 \times 1| = 1$ $\quad a_{12} = \frac{1}{2}|1 - 3 \times 2| = \frac{5}{2}$

$a_{21} = \frac{1}{2}|2 - 3 \times 1| = \frac{1}{2}$ $\quad a_{22} = \frac{1}{2}|2 - 3 \times 2| = 2$

$a_{31} = \frac{1}{2}|3 - 3 \times 1| = 0$ $\quad a_{32} = \frac{1}{2}|3 - 3 \times 2| = \frac{3}{2}$

આથી, માંગેલો શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$ છે.

3.3 શ્રેણિકના પ્રકારો

આ વિભાગમાં, આપણે શ્રેણિકોના જુદા-જુદા પ્રકારોની ચર્ચા કરીશું.

*(i) **સ્તંભ શ્રેણિક :** જે શ્રેણિકમાં માત્ર એક જ સ્તંભ હોય તે શ્રેણિકને સ્તંભ શ્રેણિક (Column Matrix) કહે છે.*

ઉદાહરણ તરીકે, $A = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \\ -1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ *એ 4×1 કક્ષાવાળો સ્તંભ શ્રેણિક છે.*

વ્યાપક રીતે, $A = [a_{i1}]_{m \times 1}$ એ $m \times 1$ કક્ષાવાળો સ્તંભ શ્રેણિક છે. $i = 1, 2, 3, ..., m$

(ii) હાર શ્રેણિક : *જે શ્રેણિકમાં માત્ર એક જ હાર હોય તે શ્રેણિકને હાર શ્રેણિક (Row Matrix) કહે છે.*

ઉદાહરણ તરીકે, $B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \sqrt{5} & 2 & 3 \end{bmatrix}_{1 \times 4}$ હાર શ્રેણિક છે.

વ્યાપક રીતે, $B = [b_{1j}]_{1 \times n}$ એ $1 \times n$ કક્ષાવાળો હાર શ્રેણિક છે. $j = 1, 2, 3, ..., n$

(iii) ચોરસ શ્રેણિક : *જે શ્રેણિકની હારની સંખ્યા અને સ્તંભની સંખ્યા સમાન હોય તેવા શ્રેણિકને ચોરસ શ્રેણિક (Square Matrix) કહે છે. આમ જે $m \times n$ શ્રેણિકમાં $m = n$ હોય, તેવા $n \times n$ શ્રેણિકને ચોરસ શ્રેણિક કહે છે અને તે 'n' કક્ષાવાળા ચોરસ શ્રેણિક તરીકે ઓળખાય છે.*

ઉદાહરણ તરીકે, $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ \frac{3}{2} & 3\sqrt{2} & 1 \\ 4 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ એ 3 કક્ષાવાળો ચોરસ શ્રેણિક છે.

વ્યાપક રીતે, $A = [a_{ij}]_{m \times m}$ એ m કક્ષાવાળો ચોરસ શ્રેણિક છે.

> **☛ નોંધ :** જો $A = [a_{ij}]$ એ n કક્ષાવાળો ચોરસ શ્રેણિક હોય, તો ઘટકો $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ શ્રેણિક A નો વિકર્ણ બનાવે છે તેમ કહેવાય. જો $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ હોય, તો A ના વિકર્ણ ઘટકો 1, 4, 6 છે.

(iv) વિકર્ણ શ્રેણિક : *જો કોઈ ચોરસ શ્રેણિક $B = [b_{ij}]_{n \times n}$ ના વિકર્ણ ઘટકો સિવાયના બધા જ ઘટકો શૂન્ય હોય, તો B ને વિકર્ણ શ્રેણિક (Diagonal Matrix) કહે છે, એટલે કે જો શ્રેણિક $B = [b_{ij}]_{n \times n}$ માં $i \neq j$ માટે $b_{ij} = 0$ હોય, તો B ને વિકર્ણ શ્રેણિક કહેવાય છે.*

ઉદાહરણ તરીકે, $A = [4]$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -1.1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ એ વિકર્ણ શ્રેણિક છે. તેમની કક્ષા અનુક્રમે 1, 2, 3 છે.

(v) અદિશ શ્રેણિક : *જો કોઈ વિકર્ણ શ્રેણિકના બધા જ વિકર્ણ ઘટકો સમાન હોય, તો તે શ્રેણિકને અદિશ શ્રેણિક (Scalar Matrix) કહે છે, એટલે કે, જો ચોરસ શ્રેણિક $B = [b_{ij}]_{n \times n}$ માં $i \neq j$ માટે $b_{ij} = 0$ અને $i = j$ માટે કોઈક અચળ k માટે $b_{ij} = k$ હોય, તો Bને અદિશ શ્રેણિક કહેવાય.*

ઉદાહરણ તરીકે, $A = [3]$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$ એ અનુક્રમે 1, 2, 3 કક્ષાવાળા અદિશ શ્રેણિકો છે.

(vi) એકમ શ્રેણિક : *જો કોઈ ચોરસ શ્રેણિકના બધા જ વિકર્ણ ઘટકો 1 અને બાકીના બધા ઘટકો શૂન્ય હોય, તો તે શ્રેણિકને એકમ શ્રેણિક (Identity Matrix) કહે છે. બીજી રીતે કહીએ તો, જો ચોરસ શ્રેણિક $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ માં $i = j$ માટે $a_{ij} = 1$ અને $i \neq j$ માટે $a_{ij} = 0$ હોય, તો Aને એકમ શ્રેણિક કહેવાય. n કક્ષાવાળા એકમ શ્રેણિકને આપણે I_n થી દર્શાવીશું. જો શ્રેણિકના સંદર્ભમાં તેની કક્ષા સ્પષ્ટ હોય, તો આપણે તેને માત્ર I લખીશું.*

ઉદાહરણ તરીકે, $[1]$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ એ અનુક્રમે 1, 2, 3 કક્ષાવાળા એકમ શ્રેણિકો છે.

નિરીક્ષણ કરો કે, જો અદિશ શ્રેણિક B માં $k = 1$ હોય, તો અદિશ શ્રેણિક એ એકમ શ્રેણિક છે. પરંતુ પ્રત્યેક એકમ શ્રેણિક એ સ્પષ્ટપણે અદિશ શ્રેણિક છે.

(vii) *શૂન્ય શ્રેણિક : જો કોઈ શ્રેણિકના બધા જ ઘટકો શૂન્ય હોય, તો તે શ્રેણિકને શૂન્ય શ્રેણિક (Zero Matrix, Null Matrix) કહે છે.*

ઉદાહરણ તરીકે, $[0]$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $[0 \quad 0]$ એ બધા જ શૂન્ય શ્રેણિક છે.

આપણે શૂન્ય શ્રેણિકને O વડે દર્શાવીશું. શ્રેણિકના સંદર્ભમાં તેની કક્ષા સ્પષ્ટ છે.

3.3.1 શ્રેણિકોની સમાનતા

વ્યાખ્યા 2 : બે શ્રેણિક $A = [a_{ij}]$ અને $B = [b_{ij}]$ ના સંદર્ભમાં

જો (i) તેમની કક્ષા સમાન હોય

(ii) A નો દરેક સભ્ય B ના અનુરૂપ સભ્યને સમાન હોય, એટલે કે પ્રત્યેક i અને j માટે $a_{ij} = b_{ij}$ હોય, તો A અને B ને સમાન શ્રેણિક કહેવાય.

ઉદાહરણ તરીકે, $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ અને $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ સમાન શ્રેણિક છે, પરંતુ $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ અને $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ સમાન શ્રેણિક નથી. **જો A અને B સમાન શ્રેણિક હોય, તો સંકેતમાં આપણે A = B લખીશું.**

જો $\begin{bmatrix} x & y \\ z & a \\ b & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.5 & 0 \\ 2 & \sqrt{6} \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ હોય, તો $x = -1.5$, $y = 0$, $z = 2$, $a = \sqrt{6}$, $b = 3$, $c = 2$.

ઉદાહરણ 4 : જો $\begin{bmatrix} x+3 & z+4 & 2y-7 \\ -6 & a-1 & 0 \\ b-3 & -21 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 3y-2 \\ -6 & -3 & 2c+2 \\ 2b+4 & -21 & 0 \end{bmatrix}$ તો $a, b, c\ x, y$ અને z નાં મૂલ્ય શોધો.

ઉકેલ : આપેલા શ્રેણિક સમાન છે. આથી તેમના અનુરૂપ સભ્યો સમાન થશે. અનુરૂપ સભ્યોનાં મૂલ્યો સરખાવતાં, આપણને

$$x + 3 = 0, \quad z + 4 = 6, \quad 2y - 7 = 3y - 2$$
$$a - 1 = -3, \quad 0 = 2c + 2, \quad b - 3 = 2b + 4$$ મળે.

સમીકરણો ઉકેલતાં, આપણને

$a = -2$, $b = -7$, $c = -1$, $x = -3$, $y = -5$, $z = 2$ મળશે.

ઉદાહરણ 5 : નીચેના સમીકરણમાંથી a, b, c અને d નાં મૂલ્ય શોધો :

$$\begin{bmatrix} 2a+b & a-2b \\ 5c-d & 4c+3d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 11 & 24 \end{bmatrix}$$

ઉકેલ : બે શ્રેણિકની સમાનતાને આધારે, અનુરૂપ સભ્યોનાં મૂલ્યો સરખાવતાં, આપણને

$$2a + b = 4, \quad 5c - d = 11$$
$$a - 2b = -3, \quad 4c + 3d = 24$$ મળે.

આ સમીકરણો ઉકેલતાં, આપણને

$a = 1$, $b = 2$, $c = 3$ અને $d = 4$ મળશે.

સ્વાધ્યાય 3.1

1. શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 19 & -7 \\ 35 & -2 & \frac{5}{2} & 12 \\ \sqrt{3} & 1 & -5 & 17 \end{bmatrix}$ માટે

(i) શ્રેણિકની કક્ષા (ii) ઘટકોની સંખ્યા (iii) ઘટકો a_{13}, a_{21}, a_{33}, a_{24}, a_{23} લખો.

2. જો કોઈ શ્રેણિકને 24 ઘટકો હોય, તો તેની શક્ય કક્ષાઓ કઈ હોય ? જો તેને 13 ઘટકો હોય, તો તેની શક્ય કક્ષાઓ શું થશે ?

3. જો કોઈ શ્રેણિકને 18 ઘટકો હોય, તો તેની શક્ય કક્ષાઓ કઈ હોય ? જો તેને 5 ઘટકો હોય, તો તેની શક્ય કક્ષાઓ શું થાય ?

4. જો કોઈ 2 × 2 શ્રેણિક $A = [a_{ij}]$ ના સભ્યો

(i) $a_{ij} = \frac{(i+j)^2}{2}$ (ii) $a_{ij} = \frac{i}{j}$ (iii) $a_{ij} = \frac{(i+2j)^2}{2}$ થી મળે, તો શ્રેણિક A ની રચના કરો.

5. જો 3 × 4 શ્રેણિકના સભ્યો

(i) $a_{ij} = \frac{1}{2}|-3i + j|$ (ii) $a_{ij} = 2i - j$ દ્વારા મળે, તો તે શ્રેણિકની રચના કરો.

6. નીચેનાં સમીકરણોમાંથી x, y અને z નાં મૂલ્ય શોધો :

(i) $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ x & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y & z \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} x+y & 2 \\ 5+z & xy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} x+y+z \\ x+z \\ y+z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$

7. સમીકરણ $\begin{bmatrix} a-b & 2a+c \\ 2a-b & 3c+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 13 \end{bmatrix}$ માંથી a, b, c અને d નાં મૂલ્ય શોધો.

પ્રશ્નો 8, 9 તથા 10 માં વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલ વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો :

8. $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ચોરસ શ્રેણિક હોય, તો ....

(A) $m < n$ (B) $m > n$ (C) $m = n$ (D) આમાંથી એક પણ નહિ

9. x, y ની જે કિંમતો માટે શ્રેણિક જોડ $\begin{bmatrix} 3x+7 & 5 \\ y+1 & 2-3x \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & y-2 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$ સમાન થાય તેવી આપેલી x અને y ની કિંમત ....

(A) $x = -\frac{1}{3}, y = 7$ (B) શોધવું શક્ય નથી.

(C) $y = 7, x = -\frac{2}{3}$ (D) $x = -\frac{1}{3}, y = -\frac{2}{3}$

10. પ્રત્યેક ઘટક 0 અથવા 1 હોય તેવા 3 × 3 કક્ષાવાળા શ્રેણિકની સંખ્યા ....

(A) 27 (B) 18 (C) 81 (D) 512

3.4 શ્રેણિક પરની પ્રક્રિયાઓ

આ વિભાગમાં, આપણે શ્રેણિકોના સરવાળા, શ્રેણિકનો અદિશ વડે ગુણાકાર, શ્રેણિકના તફાવત અને ગુણાકાર જેવી પ્રક્રિયાઓનો પરિચય આપીશું.

3.4.1 શ્રેણિકના સરવાળા

ધારો કે A અને B સ્થળે ફાતિમાનાં બે કારખાનાં આવેલાં છે. દરેક કારખાનામાં છોકરાઓ અને છોકરીઓ માટે 1, 2 અને 3 નામપટ્ટી ચોંટાડેલા જુદી-જુદી કિંમતવાળા ત્રણ પ્રકારનાં રમતનાં જૂતાંનું ઉત્પાદન થાય છે. આગળ આપેલા શ્રેણિકમાં દરેક કારખાનામાં ઉત્પાદિત થયેલો જથ્થો રજૂ કર્યો છે :

$$\begin{array}{cc} & \text{સ્થળ A પરનું કારખાનું} \\ & \begin{matrix}\text{છોકરાઓ} & \text{છોકરીઓ}\end{matrix} \\ \begin{matrix}1\\2\\3\end{matrix} & \begin{bmatrix}80 & 60\\75 & 65\\90 & 85\end{bmatrix}\end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \text{સ્થળ B પરનું કારખાનું} \\ & \begin{matrix}\text{છોકરાઓ} & \text{છોકરીઓ}\end{matrix} \\ \begin{matrix}1\\2\\3\end{matrix} & \begin{bmatrix}90 & 50\\70 & 55\\75 & 75\end{bmatrix}\end{array}$$

ધારો કે ફાતિમાને દરેક પ્રકારની કિંમતવાળા રમતનાં જૂતાંનું કુલ ઉત્પાદન જાણવું છે. કુલ ઉત્પાદનમાં,

1 પ્રકારનાં જૂતાંની સંખ્યા : છોકરાઓ માટે (80 + 90), છોકરીઓ માટે (60 + 50)

2 પ્રકારનાં જૂતાંની સંખ્યા : છોકરાઓ માટે (75 + 70), છોકરીઓ માટે (65 + 55)

3 પ્રકારનાં જૂતાંની સંખ્યા : છોકરાઓ માટે (90 + 75), છોકરીઓ માટે (85 + 75)

આ માહિતીને શ્રેણિક સ્વરૂપમાં $\begin{bmatrix}80+90 & 60+50\\75+70 & 65+55\\90+75 & 85+75\end{bmatrix}$ રીતે રજૂ કરી શકાય.

આ નવો શ્રેણિક એ ઉપરના બે શ્રેણિકોનો 'સરવાળો' છે. આપણે નિરીક્ષણ કરીશું કે, આપેલા શ્રેણિકના અનુરૂપ ઘટકોના સરવાળા કરવાથી આપેલ બે શ્રેણિકના સરવાળાનો શ્રેણિક મળે છે. હજુ વધુ જોઈએ, તો બંને શ્રેણિકની કક્ષા સમાન હોવી જોઈએ.

આમ, જો 2 × 3 શ્રેણિક A = $\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{bmatrix}$ અને બીજો 2 × 3 શ્રેણિક B = $\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12} & b_{13}\\b_{21} & b_{22} & b_{23}\end{bmatrix}$ હોય,

તો આપણે A + B = $\begin{bmatrix}a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13}\\a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23}\end{bmatrix}$ થી વ્યાખ્યાયિત કરીશું.

વ્યાપક રીતે, જો સમાન કક્ષા $m \times n$ વાળા બે શ્રેણિક $A = [a_{ij}]$ અને $B = [b_{ij}]$ આપેલ હોય, તો A અને B ના સરવાળાનો શ્રેણિક પ્રત્યેક શક્ય કિંમતો i અને j માટે $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ દ્વારા શ્રેણિક $C = [c_{ij}]_{m \times n}$ તરીકે વ્યાખ્યાયિત થાય.

ઉદાહરણ 6 : જો A = $\begin{bmatrix}\sqrt{3} & 1 & -1\\2 & 3 & 0\end{bmatrix}$ અને B = $\begin{bmatrix}2 & \sqrt{5} & 1\\-2 & 3 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$ આપેલા હોય, તો A + B શોધો.

ઉકેલ : A અને B એ બંને સમાન કક્ષા 2 × 3 વાળા શ્રેણિક હોવાથી, A અને B નો સરવાળો

$$A + B = \begin{bmatrix}\sqrt{3}+2 & 1+\sqrt{5} & -1+1\\2-2 & 3+3 & 0+\frac{1}{2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2+\sqrt{3} & 1+\sqrt{5} & 0\\0 & 6 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$ થશે.

☛ **નોંધ :** (1) જો A અને B ની કક્ષા સમાન ન હોય, તો A + B વ્યાખ્યાયિત થશે નહિ.

ઉદાહરણ તરીકે, જો A = $\begin{bmatrix}2 & 3\\1 & 0\end{bmatrix}$, B = $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\1 & 0 & 1\end{bmatrix}$ તો A + B વ્યાખ્યાયિત થશે નહિ.

(2) આપણે નિરીક્ષણ કરીશું કે, બે શ્રેણિકોનો સરવાળો એ સમાન કક્ષાવાળા શ્રેણિકના ગણ પરની દ્વિક્ક્રિયાનું એક ઉદાહરણ છે.

3.4.2 શ્રેણિકનો અદિશ વડે ગુણાકાર

હવે, ધારો કે ફાતિમા કારખાના A નું ઉત્પાદન બધા જ પ્રકારમાં બે ગણું કરે છે. (3.4.1નો સંદર્ભ લો.)

કારખાના A નો પહેલાંનો મૂળ જથ્થો (પ્રમાણભૂત એકમમાં) :

$$\begin{array}{ccc} & \text{છોકરાઓ} & \text{છોકરીઓ} \\ 1 & 80 & 60 \\ 2 & 75 & 65 \\ 3 & 90 & 85 \end{array}$$

કારખાના A નો સુધારેલો જથ્થો નીચે આપેલો છે :

$$\begin{array}{ccc} & \text{છોકરાઓ} & \text{છોકરીઓ} \\ 1 & 2 \times 80 & 2 \times 60 \\ 2 & 2 \times 75 & 2 \times 65 \\ 3 & 2 \times 90 & 2 \times 85 \end{array}$$

તેને શ્રેણિક સ્વરૂપમાં $\begin{bmatrix} 160 & 120 \\ 150 & 130 \\ 180 & 170 \end{bmatrix}$ દ્વારા દર્શાવી શકાય. આપણે નિરીક્ષણ કરીશું કે, પ્રથમ શ્રેણિકના દરેક ઘટકને 2 વડે ગુણવાથી નવો શ્રેણિક મળે છે.

વ્યાપક રીતે, આપણે ***શ્રેણિકનો અદિશ વડે ગુણાકાર*** નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત કરીશું :

જો $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ***શ્રેણિક હોય અને*** k ***અદિશ હોય, તો A ના દરેક ઘટકને*** k ***વડે ગુણવાથી બીજો શ્રેણિક*** kA ***મળે છે.***

બીજી રીતે કહીએ તો, $kA = k\,[a_{ij}]_{m \times n} = [k(a_{ij})]_{m \times n}$, ***એટલે કે*** i ***અને*** j ***ની બધી જ શક્ય કિંમતો માટે*** ka_{ij} ***એ શ્રેણિક*** kA ***નો*** (i, j)***મો ઘટક છે.***

ઉદાહરણ તરીકે, જો $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1.5 \\ \sqrt{5} & 7 & -3 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ તો $3A = 3\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1.5 \\ \sqrt{5} & 7 & -3 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 3 & 4.5 \\ 3\sqrt{5} & 21 & -9 \\ 6 & 0 & 15 \end{bmatrix}$

વિરોધી શ્રેણિક : ***A નો વિરોધી શ્રેણિક (–1)A તરીકે વ્યાખ્યાયિત થાય છે અને તેને –A વડે દર્શાવાય છે.***

ઉદાહરણ તરીકે, $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -5 & x \end{bmatrix}$ લેતાં,

$$-A = (-1)A = (-1)\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -5 & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 5 & -x \end{bmatrix} \text{ મળે.}$$

શ્રેણિકનો તફાવત : જો $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ સમાન કક્ષા $m \times n$ વાળા બે શ્રેણિક હોય, તો તેમનો તફાવત શ્રેણિક $d_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$ લેતાં $D = [d_{ij}]$ તરીકે વ્યાખ્યાયિત થાય અને તેનો સંકેત A – B છે. બીજા શબ્દોમાં, D = A – B = A + (–1)B, એટલે કે શ્રેણિક A અને શ્રેણિક –B નો સરવાળો છે.

ઉદાહરણ 7 : જો $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ અને $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ તો 2A – B શોધો.

ઉકેલ : આપણને,

$$\begin{aligned} 2A - B &= 2\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 6 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} 2-3 & 4+1 & 6-3 \\ 4+1 & 6+0 & 2-2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 5 & 3 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix} \text{ મળે.}$$

3.4.3 શ્રેણિક સરવાળાના ગુણધર્મો

શ્રેણિક સરવાળો નીચેના ગુણધર્મોનું સમાધાન કરે છે :

(i) ક્રમનો નિયમ : જો A = $[a_{ij}]$, B = $[b_{ij}]$ સમાન કક્ષા $m \times n$ વાળા શ્રેણિક હોય, તો A + B = B + A

હવે, A + B $= [a_{ij}] + [b_{ij}]$

$= [a_{ij} + b_{ij}]$

$= [b_{ij} + a_{ij}]$ (વાસ્તવિક સંખ્યાઓ સરવાળા વિશે ક્રમના નિયમનું પાલન કરે છે.)

$= [b_{ij}] + [a_{ij}]$

= B + A

(ii) જૂથનો નિયમ : સમાન કક્ષા $m \times n$ વાળા ત્રણ શ્રેણિકો A = $[a_{ij}]$, B = $[b_{ij}]$, C = $[c_{ij}]$ માટે, (A + B) + C = A + (B + C)

હવે, (A + B) + C $= ([a_{ij}] + [b_{ij}]) + [c_{ij}]$

$= [a_{ij} + b_{ij}] + [c_{ij}]$

$= [(a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}]$

$= [a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})]$ (શા માટે ?)

$= [a_{ij}] + [(b_{ij} + c_{ij})]$

$= [a_{ij}] + ([b_{ij}] + [c_{ij}])$

= A + (B + C)

(iii) સરવાળા માટેના તટસ્થ શ્રેણિકનું અસ્તિત્વ : જો O એ $m \times n$ શૂન્ય શ્રેણિક હોય અને A એ કોઈ પણ $m \times n$ શ્રેણિક હોય, તો A + O = O + A = A. બીજા શબ્દોમાં, O એ શ્રેણિક સરવાળા માટે તટસ્થ ઘટક છે.

(iv) વિરોધી શ્રેણિકનું અસ્તિત્વ : A = $[a_{ij}]_{m \times n}$ કોઈ પણ શ્રેણિક હોય, તો આપણને બીજો શ્રેણિક $-A = [-a_{ij}]_{m \times n}$ મળે કે જેથી A + (–A) = (–A) + A = O થાય. આથી –A ને A નો વિરોધી અથવા Aનો ઋણ શ્રેણિક કહે છે.

3.4.4 શ્રેણિકના અદિશ વડે ગુણાકારના ગુણધર્મો

જો સમાન કક્ષા $m \times n$ વાળા બે શ્રેણિકો A = $[a_{ij}]$ અને B = $[b_{ij}]$ હોય, અને k અને l અદિશ હોય, તો

(i) $k(A + B) = kA + kB$ (ii) $(k + l)A = kA + lA$

(i) $k(A + B) = k([a_{ij}] + [b_{ij}])$

$= k\ [a_{ij} + b_{ij}]$

$= [k(a_{ij} + b_{ij})]$

$= [k\,a_{ij} + k\,b_{ij}]$

$= [k\ a_{ij}] + [k\,b_{ij}]$

$= k\,[a_{ij}] + k\,[b_{ij}]$

$= kA + kB$

(ii) $$\begin{aligned}(k + l)\,A &= (k + l)\,[a_{ij}]\\ &= [(k + l)\,a_{ij}]\\ &= [k\,a_{ij} + l\,a_{ij}]\\ &= [k\,a_{ij}] + [l\,a_{ij}]\\ &= k\,[a_{ij}] + l\,[a_{ij}]\\ &= kA + lA\end{aligned}$$

ઉદાહરણ 8 : જો $A = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 4 & -2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ અને $B = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$ તો $2A + 3X = 5B$ થાય એવો શ્રેણિક X શોધો.

ઉકેલ : આપણી પાસે, $2A + 3X = 5B$ છે.

અથવા $2A + 3X - 2A = 5B - 2A$

અથવા $2A - 2A + 3X = 5B - 2A$ (શ્રેણિકો સરવાળા વિશે ક્રમના નિયમનું પાલન કરે છે.)

અથવા $O + 3X = 5B - 2A$ (2Aનો વિરોધી –2A છે.)

અથવા $3X = 5B - 2A$ (O એ સરવાળા માટે તટસ્થ એકમ છે.)

અથવા $X = \frac{1}{3}(5B - 2A)$

અથવા $$X = \frac{1}{3}\left(5\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 4 & -2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{3}\left(\begin{bmatrix} 10 & -10 \\ 20 & 10 \\ -25 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -16 & 0 \\ -8 & 4 \\ -6 & -12 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 10-16 & -10+0 \\ 20-8 & 10+4 \\ -25-6 & 5-12 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -6 & -10 \\ 12 & 14 \\ -31 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & \frac{-10}{3} \\ 4 & \frac{14}{3} \\ \frac{-31}{3} & \frac{-7}{3} \end{bmatrix}$$

ઉદાહરણ 9 : જો $X + Y = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$ અને $X - Y = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ હોય, તો X અને Y શોધો.

ઉકેલ : $(X + Y) + (X - Y) = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

અથવા $(X + X) + (Y - Y) = \begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$

$\therefore$ $2X = \begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$

અથવા $X = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

$(X + Y) - (X - Y) = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

અથવા $(X - X) + (Y + Y) = \begin{bmatrix} 5-3 & 2-6 \\ 0 & 9+1 \end{bmatrix}$

∴ $2Y = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$

અથવા $Y = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

ઉદાહરણ 10 : નીચેના સમીકરણમાંથી x અને y નાં મૂલ્ય શોધો :

$$2\begin{bmatrix} x & 5 \\ 7 & y-3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 15 & 14 \end{bmatrix}$$

ઉકેલ : $2\begin{bmatrix} x & 5 \\ 7 & y-3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 15 & 14 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2x & 10 \\ 14 & 2y-6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 15 & 14 \end{bmatrix}$

અથવા $\begin{bmatrix} 2x+3 & 10-4 \\ 14+1 & 2y-6+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 15 & 14 \end{bmatrix}$

અથવા $\begin{bmatrix} 2x+3 & 6 \\ 15 & 2y-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 15 & 14 \end{bmatrix}$

અથવા $2x + 3 = 7$ અને $2y - 4 = 14$ (શા માટે ?)

અથવા $2x = 7 - 3$ અને $2y = 18$

અથવા $x = \frac{4}{2}$ અને $y = \frac{18}{2}$

અથવા $x = 2$ અને $y = 9$

ઉદાહરણ 11 : બે ખેડૂતો રામકિશન અને ગુરુચરનસિંઘ, બાસમતી, પરમલ અને નૌરા નામના ત્રણ પ્રકારના ચોખાની ખેતી કરે છે. સપ્ટેમ્બર અને ઑક્ટોબર મહિનામાં બંને ખેડૂતોએ કરેલા ત્રણે ય પ્રકારના ચોખાના વેચાણની વિગત (રૂપિયામાં) નીચેના શ્રેણિકો A અને B માં આપી છે :

સપ્ટેમ્બરનું વેચાણ (રૂપિયામાં)

$$A = \begin{array}{cccc} \text{બાસમતી} & \text{પરમલ} & \text{નૌરા} & \\ \left[\begin{matrix} 10{,}000 \\ 50{,}000 \end{matrix}\right. & \begin{matrix} 20{,}000 \\ 30{,}000 \end{matrix} & \left.\begin{matrix} 30{,}000 \\ 10{,}000 \end{matrix}\right] & \begin{matrix} \text{રામકિશન} \\ \text{ગુરુચરનસિંઘ} \end{matrix} \end{array}$$

ઑક્ટોબરનું વેચાણ (રૂપિયામાં)

$$B = \begin{array}{cccc} \text{બાસમતી} & \text{પરમલ} & \text{નૌરા} & \\ \left[\begin{matrix} 5000 \\ 20{,}000 \end{matrix}\right. & \begin{matrix} 10{,}000 \\ 10{,}000 \end{matrix} & \left.\begin{matrix} 6000 \\ 10{,}000 \end{matrix}\right] & \begin{matrix} \text{રામકિશન} \\ \text{ગુરુચરનસિંઘ} \end{matrix} \end{array}$$

(i) સપ્ટેમ્બર અને ઑક્ટોબરમાં પ્રત્યેક ખેડૂતે પ્રત્યેક પ્રકારનું કરેલું એકત્રિત વેચાણ શોધો.

(ii) સપ્ટેમ્બરથી ઑક્ટોબર દરમિયાનનાં વેચાણમાં થયેલો ઘટાડો શોધો.

(iii) જો બંને ખેડૂતને કુલ વેચાણ પર 2 % નફો મળતો હોય, તો ઑક્ટોબરનાં વેચાણમાં પ્રત્યેક ખેડૂતને પ્રત્યેક પ્રકારમાં મળતા નફાની ગણતરી કરો.

ઉકેલ : (i) સપ્ટેમ્બર અને ઑક્ટોબરમાં પ્રત્યેક ખેડૂતે પ્રત્યેક પ્રકારનું કરેલું એકત્રિત વેચાણ નીચે પ્રમાણે મળશે :

$$A + B = \begin{array}{cccc} \text{બાસમતી} & \text{પરમલ} & \text{નૌરા} & \\ \left[\begin{matrix} 15{,}000 \\ 70{,}000 \end{matrix}\right. & \begin{matrix} 30{,}000 \\ 40{,}000 \end{matrix} & \left.\begin{matrix} 36{,}000 \\ 20{,}000 \end{matrix}\right] & \begin{matrix} \text{રામકિશન} \\ \text{ગુરુચરનસિંઘ} \end{matrix} \end{array}$$

(ii) સપ્ટેમ્બરથી ઑક્ટોબર સુધીના વેચાણમાં થયેલ ફેરફાર (ઘટાડો) :

$$A - B = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{બાસમતી} & \text{પરમલ} & \text{નૌરા} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 5000 & 10,000 & 24,000 \\ 30,000 & 20,000 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{રામકિશન} \\ \text{ગુરુચરનસિંઘ} \end{array}$$

(iii) B ના 2 % $= \frac{2}{100} \times B = 0.02 \times B$

$$= 0.02 \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{બાસમતી} & \text{પરમલ} & \text{નૌરા} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 5000 & 10,000 & 6000 \\ 20,000 & 10,000 & 10,000 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{રામકિશન} \\ \text{ગુરુચરનસિંઘ} \end{array}$$

$$= \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{બાસમતી} & \text{પરમલ} & \text{નૌરા} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 100 & 200 & 120 \\ 400 & 200 & 200 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{રામકિશન} \\ \text{ગુરુચરનસિંઘ} \end{array}$$

આમ, ઑક્ટોબરમાં રામકિશનને દરેક પ્રકારના ચોખાના વેચાણમાં મળતો નફો અનુક્રમે ₹ 100, ₹ 200 અને ₹ 120 તથા ગુરુચરનસિંઘને દરેક પ્રકારના ચોખાના વેચાણમાં મળતો નફો અનુક્રમે ₹ 400, ₹ 200 અને ₹ 200 થાય.

3.4.5 શ્રેણિકોના ગુણાકાર

ધારો કે મીરા અને નદીમ બે મિત્રો છે. મીરા 2 પેન અને 5 વાર્તાનાં પુસ્તકો ખરીદવા ઇચ્છે છે, જ્યારે નદીમને 8 પેન અને 10 વાર્તાનાં પુસ્તકોની જરૂર છે. તે બંને ભાવની તપાસ કરવા દુકાને જાય છે.

તે નીચે પ્રમાણે લખેલા છે :

પ્રત્યેક પેનની કિંમત ₹ 5 અને પ્રત્યેક વાર્તાના પુસ્તકની કિંમત ₹ 50 છે.

દરેકને ખર્ચ પેટે કેટલી રકમની જરૂર છે ? સ્પષ્ટ છે કે, મીરાંને ₹ (5 × 2 + 50 × 5) એટલે ₹ 260, જ્યારે નદીમને ₹ (8 × 5 + 50 × 10) એટલે કે ₹ 540ની જરૂર પડશે. આપણે ઉપરની માહિતીને શ્રેણિકના સ્વરૂપમાં નીચે પ્રમાણે રજૂ કરી શકીએ :

આવશ્યકતા — એક નંગની કિંમત (રૂપિયામાં) — આવશ્યક રકમ (રૂપિયામાં)

$$\begin{array}{l} \\ \text{મીરા} \\ \text{નદીમ} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{પેન} & \text{પુસ્તક} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 8 & 10 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{l} \text{પેન} \\ \text{પુસ્તક} \end{array} \begin{bmatrix} 5 \\ 50 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 \times 5 + 5 \times 50 \\ 8 \times 5 + 10 \times 50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 260 \\ 540 \end{bmatrix}$$

ધારો કે તે બીજી દુકાને ભાવની તપાસ કરે છે. તે નીચે પ્રમાણે દર્શાવેલ છે :

પ્રત્યેક પેનનું મૂલ્ય ₹ 4 અને પ્રત્યેક વાર્તાનું પુસ્તક ₹ 40 ના મૂલ્યનું છે.

હવે, મીરા અને નદીમને સામાનની ખરીદી કરવા અનુક્રમે ₹ (4 × 2 + 40 × 5) = ₹ 208 અને ₹ (8 × 4 + 10 × 40) = ₹ 432 રકમની જરૂરિયાત પડશે.

ફરીથી, ઉપરની માહિતીને નીચે પ્રમાણે રજૂ કરી શકાય :

આવશ્યકતા — એક નંગની કિંમત (રૂપિયામાં) — આવશ્યક રકમ (રૂપિયામાં)

$$\begin{array}{l} \\ \text{મીરા} \\ \text{નદીમ} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{પેન} & \text{પુસ્તક} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 8 & 10 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{l} \text{પેન} \\ \text{પુસ્તક} \end{array} \begin{bmatrix} 4 \\ 40 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 4 \times 2 + 40 \times 5 \\ 8 \times 4 + 10 \times 40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 208 \\ 432 \end{bmatrix}$$

હવે, બંને વિકલ્પોની માહિતીને સંયુક્ત રીતે શ્રેણિક સ્વરૂપમાં નીચે પ્રમાણે દર્શાવી શકાય :

આવશ્યકતા — એક નંગની કિંમત (રૂપિયામાં) — આવશ્યક રકમ (રૂપિયામાં)

$$\begin{array}{l} \\ \text{મીરા} \\ \text{નદીમ} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{પેન} & \text{પુસ્તક} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 8 & 10 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{l} \\ \text{પેન} \\ \text{પુસ્તક} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{I} & \text{II} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 50 & 40 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \begin{bmatrix} 5 \times 2 + 5 \times 50 & 4 \times 2 + 40 \times 5 \\ 8 \times 5 + 10 \times 50 & 8 \times 4 + 10 \times 40 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{I} & \text{II} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 260 & 208 \\ 540 & 432 \end{bmatrix} \end{array}$$

ઉપરની માહિતી એ શ્રેણિક ગુણાકારનું એક ઉદાહરણ છે. આપણે નિરીક્ષણ કરીએ કે, શ્રેણિક A અને B ના ગુણાકાર માટે A ના સ્તંભની સંખ્યા અને B ની હારની સંખ્યા સમાન હોવી જોઈએ. હજુ વધુ વિગત માટે આગળ જોઈએ તો, ગુણાકાર શ્રેણિકના ઘટકો મેળવવા, આપણે A ની હાર અને B ના સ્તંભ લઈ, તેમના અનુરૂપ ઘટકોનો ગુણાકાર કરી તે ગુણનફળોનો સરવાળો કરીએ તો ગુણાકાર શ્રેણિકના ઘટકો મળે છે. ઔપચારિક રીતે, આપણે શ્રેણિકના ગુણાકારને નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત કરીશું :

જો શ્રેણિક A ના સ્તંભની સંખ્યા અને શ્રેણિક B ની હારની સંખ્યા સમાન હોય, તો A અને B નો ગુણાકાર વ્યાખ્યાયિત છે. ધારો કે A = $[a_{ij}]$ એ $m \times n$ શ્રેણિક અને B = $[b_{jk}]$ એ $n \times p$ શ્રેણિક છે. તો પછી શ્રેણિક A અને B ના ગુણાકાર શ્રેણિક C ની કક્ષા $m \times p$ થશે. શ્રેણિક C નો $(i,\ k)$મો ઘટક c_{ik} મેળવવા માટે, આપણે A ની iમી હાર અને B નો kમો સ્તંભ લઈ તેમના અનુરૂપ ઘટકોનો ગુણાકાર કરી આ બધા ગુણનફળનો સરવાળો કરીએ છીએ. બીજા શબ્દોમાં કહીએ તો, જો A = $[a_{ij}]_{m \times n}$, B = $[b_{jk}]_{n \times p}$ હોય, તો A ની iમી હાર $[a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}]$ અને B ના kમા સ્તંભ $\begin{bmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{bmatrix}$ પરથી, $c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + a_{i3}b_{3k} + \ldots + a_{in}b_{nk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, b_{jk}$

શ્રેણિક C = $[c_{ik}]_{m \times p}$ એ શ્રેણિક A અને B નો ગુણાકાર AB છે.

ઉદાહરણ તરીકે, જો C = $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ અને D = $\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 1 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$, તો તેમનો ગુણાકાર

$$CD = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 1 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$$ વ્યાખ્યાયિત થાય.

આ 2 × 2 શ્રેણિકનો પ્રત્યેક ઘટક એ C ની ચોક્કસ હારના અને D ના ચોક્કસ સ્તંભના અનુરૂપ ઘટકોના ગુણનફળોનો સરવાળો છે. આ ચાર ગણતરી નીચે દર્શાવી છે :

પ્રથમ હાર પ્રથમ સ્તંભનો ઘટક $$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 1 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1)(2)+(-1)(-1)+(2)(5) & ? \\ ? & ? \end{bmatrix}$$

પ્રથમ હાર બીજા સ્તંભનો ઘટક $$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 1 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & (1)(7)+(-1)(1)+(2)(-4) \\ ? & ? \end{bmatrix}$$

બીજી હાર પ્રથમ સ્તંભનો ઘટક $$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 1 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & -2 \\ 0(2)+3(-1)+4(5) & ? \end{bmatrix}$$

બીજી હાર બીજા સ્તંભનો ઘટક $$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 1 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & -2 \\ 17 & 0(7)+3(1)+4(-4) \end{bmatrix}$$

આમ, $$CD = \begin{bmatrix} 13 & -2 \\ 17 & -13 \end{bmatrix}$$

ઉદાહરણ 12 : જો $A = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ અને $B = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 7 & 9 & 8 \end{bmatrix}$, તો AB શોધો.

ઉકેલ : શ્રેણિક A ને 2 સ્તંભ છે અને તે સંખ્યા B ની હારની સંખ્યાને સમાન છે.

આથી, AB વ્યાખ્યાયિત થશે. હવે,

$$AB = \begin{bmatrix} 6(2)+9(7) & 6(6)+9(9) & 6(0)+9(8) \\ 2(2)+3(7) & 2(6)+3(9) & 2(0)+3(8) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 12+63 & 36+81 & 0+72 \\ 4+21 & 12+27 & 0+24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 75 & 117 & 72 \\ 25 & 39 & 24 \end{bmatrix}$$

નોંધ : જો AB વ્યાખ્યાયિત થાય, તો BA વ્યાખ્યાયિત થાય તે જરૂરી નથી. ઉપરના ઉદાહરણમાં, AB વ્યાખ્યાયિત છે, પરંતુ BA વ્યાખ્યાયિત નથી. કારણ કે B ને 3 સ્તંભ છે અને A ને 2 હાર છે (3 નથી.) જો A અને B અનુક્રમે $m \times n$ અને $k \times l$ શ્રેણિક હોય અને જો $n = k$ તથા $l = m$ હોય, તો અને તો જ AB અને BA બંને વ્યાખ્યાયિત થાય. વિશેષ વિકલ્પમાં, જો A અને B સમાન કક્ષાવાળા ચોરસ શ્રેણિક હોય, તો AB અને BA બંને વ્યાખ્યાયિત છે.

શ્રેણિકોનો ગુણાકાર ક્રમના નિયમનું પાલન કરતો નથી.

હવે, આપણે એક ઉદાહરણ લઈને જોઈશું કે, AB અને BA બંને વ્યાખ્યાયિત હોય, છતાં AB = BA થાય એ આવશ્યક નથી.

ઉદાહરણ 13 : જો $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ અને $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, તો AB તથા BA શોધો. સાબિત કરો કે $AB \neq BA$.

ઉકેલ : A એ 2×3 શ્રેણિક છે અને B એ 3×2 શ્રેણિક છે. આથી AB અને BA બંને વ્યાખ્યાયિત છે અને તે અનુક્રમે 2×2 અને 3×3 કક્ષાવાળા શ્રેણિક થશે. (આથી AB = BA હોવાનો પ્રશ્ન જ ઉપસ્થિત થતો નથી.)

નોંધો કે, $AB = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-8+6 & 3-10+3 \\ -8+8+10 & -12+10+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 10 & 3 \end{bmatrix}$

અને $BA = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-12 & -4+6 & 6+15 \\ 4-20 & -8+10 & 12+25 \\ 2-4 & -4+2 & 6+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 2 & 21 \\ -16 & 2 & 37 \\ -2 & -2 & 11 \end{bmatrix}$

સ્પષ્ટ છે કે $AB \neq BA$.

ઉપરના ઉદાહરણમાં AB અને BA ની કક્ષા ભિન્ન છે અને તેથી $AB \neq BA$. પરંતુ કોઈક એવું પણ વિચારી શકે છે કે કદાચ જો AB અને BA ની કક્ષા સમાન હોય, તો AB અને BA સમાન થાય. પરંતુ આમ નથી. AB અને BA ની કક્ષા સમાન હોય, છતાં ય તેઓ સમાન ન થાય તેવું એક ઉદાહરણ આપણે આપીએ.

ઉદાહરણ 14 : જો $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ અને $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ હોય, તો AB અને BA શોધો તથા બતાવો કે, $AB \neq BA$.

ઉકેલ : જો $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ અને $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, તો $AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $BA = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. સ્પષ્ટ છે કે $AB \neq BA$.

આમ, શ્રેણિકનો ગુણાકાર ક્રમના નિયમનું પાલન કરતો નથી.

☛ નોંધ : AB અને BA વ્યાખ્યાયિત હોય, પરંતુ હંમેશાં $AB \neq BA$ થાય તેવું અર્થઘટન પણ શ્રેણિકની પ્રત્યેક જોડ A અને B ના ગુણાકાર માટે કરી શકાય નહિ.

જો $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$, તો $AB = BA = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$.

નિરીક્ષણ કરો કે સમાન કક્ષાના વિકર્ણ શ્રેણિકના ગુણાકાર AB તથા BA માટે AB = BA છે જ.

બે શૂન્યેતર શ્રેણિકના ગુણાકાર તરીકે શૂન્ય શ્રેણિક

આપણે જાણીએ છીએ કે, વાસ્તવિક સંખ્યાઓ a અને b માટે જો $ab = 0$, તો $a = 0$ અથવા $b = 0$. આ પરિણામ શ્રેણિક માટે સત્ય હોય તે આવશ્યક નથી. આપણે ઉદાહરણ મારફતે આ સત્યનું નિરીક્ષણ કરીશું.

ઉદાહરણ 15 : જો $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ અને $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, તો AB શોધો.

ઉકેલ : $AB = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

આમ, બે શ્રેણિકનો ગુણાકાર શૂન્ય શ્રેણિક થાય તે માટે કોઈ એક શ્રેણિક શૂન્ય શ્રેણિક હોય તે જરૂરી નથી.

3.4.6 શ્રેણિકોના ગુણાકારના ગુણધર્મો

શ્રેણિકનો ગુણાકાર નીચેના ગુણધર્મો ધરાવે છે તે આપણે સાબિતી સિવાય સ્વીકારીશું.

(1) જૂથનો નિયમ : કોઈ પણ ત્રણ શ્રેણિક A, B અને C માટે જો (AB)C અને A(BC) વ્યાખ્યાયિત હોય, તો (AB)C = A(BC).

(2) વિભાજનનો નિયમ : ત્રણ શ્રેણિકો A, B અને C માટે,

(i) A(B + C) = AB + AC

(ii) (A + B)C = AC + BC.

અહીં સમાનતાની નિશાનીની બંને તરફના શ્રેણિકના ગુણાકાર વ્યાખ્યાયિત છે તેવું સ્વીકારી લીધું છે.

(3) ગુણાકારના એકમ ઘટકનું અસ્તિત્વ : પ્રત્યેક ચોરસ શ્રેણિક A ને સંગત તે જ કક્ષાનો એકમ શ્રેણિક I અસ્તિત્વ ધરાવે છે કે જેથી, IA = AI = A થાય.

હવે, આપણે આ ગુણધર્મો ઉદાહરણ દ્વારા ચકાસીશું.

ઉદાહરણ 16 : જો $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ અને $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$, તો A(BC), (AB)C શોધો અને દર્શાવો કે (AB)C = A(BC).

ઉકેલ : આપણને $AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0+1 & 3+2-4 \\ 2+0-3 & 6+0+12 \\ 3+0-2 & 9-2+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 18 \\ 1 & 15 \end{bmatrix}$ મળે.

$$(AB)C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 18 \\ 1 & 15 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2+2 & 4+0 & 6-2 & -8+1 \\ -1+36 & -2+0 & -3-36 & 4+18 \\ 1+30 & 2+0 & 3-30 & -4+15 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 & -7 \\ 35 & -2 & -39 & 22 \\ 31 & 2 & -27 & 11 \end{bmatrix}$$

હવે, $BC = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1+6 & 2+0 & 3-6 & -4+3 \\ 0+4 & 0+0 & 0-4 & 0+2 \\ -1+8 & -2+0 & -3-8 & 4+4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & 2 & -3 & -1 \\ 4 & 0 & -4 & 2 \\ 7 & -2 & -11 & 8 \end{bmatrix} \text{ મળે.}$$

તેથી, $A(BC) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 2 & -3 & -1 \\ 4 & 0 & -4 & 2 \\ 7 & -2 & -11 & 8 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 7+4-7 & 2+0+2 & -3-4+11 & -1+2-8 \\ 14+0+21 & 4+0-6 & -6+0-33 & -2+0+24 \\ 21-4+14 & 6+0-4 & -9+4-22 & -3-2+16 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 & -7 \\ 35 & -2 & -39 & 22 \\ 31 & 2 & -27 & 11 \end{bmatrix}.$$

સ્પષ્ટ છે કે, (AB)C = A(BC).

ઉદાહરણ 17 : જો $A = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 7 \\ -6 & 0 & 8 \\ 7 & -8 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ હોય, તો AC, BC અને (A + B)Cની ગણતરી કરો. ચકાસો કે (A + B)C = AC + BC.

ઉકેલ : હવે, $A + B = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 8 \\ -5 & 0 & 10 \\ 8 & -6 & 0 \end{bmatrix}$

આથી, $(A + B)C = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 8 \\ -5 & 0 & 10 \\ 8 & -6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0-14+24 \\ -10+0+30 \\ 16+12+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 28 \end{bmatrix}$

હવે, $AC = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 7 \\ -6 & 0 & 8 \\ 7 & -8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0-12+21 \\ -12+0+24 \\ 14+16+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \\ 30 \end{bmatrix}$

અને $BC = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0-2+3 \\ 2+0+6 \\ 2-4+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ -2 \end{bmatrix}$

આથી, $AC + BC = \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \\ 30 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 28 \end{bmatrix}$

સ્પષ્ટ છે કે, (A + B)C = AC + BC.

ઉદાહરણ 18 : જો $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ હોય, તો સાબિત કરો કે $A^3 - 23A - 40\,I = O$

ઉકેલ : આપણને $A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 4 & 8 \\ 1 & 12 & 8 \\ 14 & 6 & 15 \end{bmatrix}$ મળે.

$$\text{આથી, } A^3 = A \cdot A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 19 & 4 & 8 \\ 1 & 12 & 8 \\ 14 & 6 & 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 63 & 46 & 69 \\ 69 & -6 & 23 \\ 92 & 46 & 63 \end{bmatrix}$$

$$\text{હવે, } A^3 - 23A - 40\,I = \begin{bmatrix} 63 & 46 & 69 \\ 69 & -6 & 23 \\ 92 & 46 & 63 \end{bmatrix} - 23\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} - 40\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 63 & 46 & 69 \\ 69 & -6 & 23 \\ 92 & 46 & 63 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -23 & -46 & -69 \\ -69 & 46 & -23 \\ -92 & -46 & -23 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -40 & 0 & 0 \\ 0 & -40 & 0 \\ 0 & 0 & -40 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 63-23-40 & 46-46+0 & 69-69+0 \\ 69-69+0 & -6+46-40 & 23-23+0 \\ 92-92+0 & 46-46+0 & 63-23-40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = O$$

ઉદાહરણ 19 : વિધાનસભાની એક ચૂંટણીમાં, એક રાજકીય પક્ષ પોતાના ઉમેદવારનો પ્રચાર ટેલિફોન, પ્રત્યક્ષ મુલાકાત અને પત્રો લખવા જેવી ત્રણ રીતે કરવા પ્રસાર માધ્યમને ભાડે લે છે. શ્રેણિક A માં સંપર્ક દીઠ ભાવ (પૈસામાં) નીચે પ્રમાણે આપ્યો છે :

સંપર્ક દીઠ ભાવ

$$A = \begin{bmatrix} 40 \\ 100 \\ 50 \end{bmatrix}\begin{array}{l} \text{ટેલિફોન} \\ \text{પ્રત્યક્ષ મુલાકાત} \\ \text{પત્ર} \end{array}$$

બે શહેરો X અને Y માં, દરેક પ્રકારના સંપર્કની સંખ્યા નીચે પ્રમાણે આપી છે :

$$\begin{array}{ccc} \text{ટેલિફોન} & \text{પ્રત્યક્ષ મુલાકાત} & \text{પત્ર} \end{array}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1000 & 500 & 5000 \\ 3000 & 1000 & 10,000 \end{bmatrix}\begin{array}{l} \to X \\ \to Y \end{array}$$

બે શહેરો X અને Y માં પક્ષ દ્વારા ખર્ચવામાં આવેલ કુલ રકમ શોધો.

ઉકેલ : આપણને $BA = \begin{bmatrix} 40,000 + 50,000 + 2,50,000 \\ 1,20,000 + 1,00,000 + 5,00,000 \end{bmatrix}\begin{array}{l} \to X \\ \to Y \end{array}$

$= \begin{bmatrix} 3,40,000 \\ 7,20,000 \end{bmatrix}\begin{array}{l} \to X \\ \to Y \end{array}$ મળે.

આથી પક્ષે બંને શહેરમાં અનુક્રમે 3,40,000 પૈસા અને 7,20,000 પૈસા, અર્થાત્ ₹ 3400 અને ₹ 7200 ખર્ચ કર્યો હશે.

સ્વાધ્યાય 3.2

1. $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ હોય, તો નીચેના પૈકી પ્રત્યેક શ્રેણિક શોધો :

(i) $A + B$ (ii) $A - B$ (iii) $3A - C$

(iv) AB (v) BA

2. નીચેનાની ગણતરી કરો :

(i) $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} a^2 + b^2 & b^2 + c^2 \\ a^2 + c^2 & a^2 + b^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2ab & 2bc \\ -2ac & -2ab \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} -1 & 4 & -6 \\ 8 & 5 & 16 \\ 2 & 8 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 & 7 & 6 \\ 8 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ (iv) $\begin{bmatrix} cos^2x & sin^2x \\ sin^2x & cos^2x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} sin^2x & cos^2x \\ cos^2x & sin^2x \end{bmatrix}$

3. સૂચિત ગુણાકારની ગણતરી કરો :

(i) $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

(iv) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ (v) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ (vi) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

4. જો $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ અને $C = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ હોય, તો (A + B) અને (B – C)ની ગણતરી કરો. વળી, ચકાસો કે A + (B – C) = (A + B) – C.

5. જો $A = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 1 & \frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{7}{3} & 2 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$ અને $B = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & 1 \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{7}{5} & \frac{6}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$ હોય, તો 3A – 5Bની ગણતરી કરો.

6. સાદું રૂપ આપો : $cos\theta \begin{bmatrix} cos\theta & sin\theta \\ -sin\theta & cos\theta \end{bmatrix} + sin\theta \begin{bmatrix} sin\theta & -cos\theta \\ cos\theta & sin\theta \end{bmatrix}$

7. જો (i) $X + Y = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ અને $X - Y = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ હોય, તો X અને Y શોધો.

(ii) $2X + 3Y = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ અને $3X + 2Y = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$ હોય, તો X અને Y શોધો.

8. જો $Y = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ અને $2X + Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ હોય, તો X શોધો.

9. જો $2\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}$ હોય, તો x અને y શોધો.

10. જો $2\begin{bmatrix} x & z \\ y & t \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$ હોય, તો x, y, z અને t માટે સમીકરણ ઉકેલો.

11. જો $x\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix}$ હોય, તો x અને y નાં મૂલ્ય શોધો.

12. જો $3\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 6 \\ -1 & 2w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & x+y \\ z+w & 3 \end{bmatrix}$ હોય, તો x, y, z અને w નાં મૂલ્ય શોધો.

13. જો $F(x) = \begin{bmatrix} cos\,x & -sin\,x & 0 \\ sin\,x & cos\,x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ હોય, તો દર્શાવો કે $F(x)\,F(y) = F(x + y)$.

14. સાબિત કરો કે,

(i) $\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$

(ii) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

15. જો $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ હોય, તો $A^2 - 5A + 6I$ શોધો.

16. જો $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ હોય, તો સાબિત કરો કે $A^3 - 6A^2 + 7A + 2I = O$.

17. જો $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ અને $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ હોય, તો એવો k શોધો કે જેથી $A^2 = kA - 2I$ થાય.

18. જો $A = \begin{bmatrix} 0 & -tan\frac{\alpha}{2} \\ tan\frac{\alpha}{2} & 0 \end{bmatrix}$ અને I એ 2 કક્ષાવાળો એકમ શ્રેણિક હોય, તો સાબિત કરો કે

$I + A = (I - A)\begin{bmatrix} cos\,\alpha & -sin\,\alpha \\ sin\,\alpha & cos\,\alpha \end{bmatrix}$.

19. એક ટ્રસ્ટ પાસે ₹ 30,000નું ભંડોળ છે. ટ્રસ્ટને આ ભંડોળ બે જુદા-જુદા પ્રકારના બૉન્ડમાં રોકવું છે. પ્રથમ બૉન્ડ પ્રતિ વર્ષ 5 % વ્યાજ આપે છે અને બીજા બૉન્ડ પ્રતિ વર્ષ 7 % વ્યાજ આપે છે. જો ટ્રસ્ટને વાર્ષિક વ્યાજ (a) ₹ 1800 (b) ₹ 2000 મેળવવું હોય, તો ટ્રસ્ટે ₹ 30,000 બે બૉન્ડમાં રોકવા માટે મૂડીના કેવા ભાગ કરવા પડશે, તે શ્રેણિક ગુણાકારના ઉપયોગથી નક્કી કરો.

20. એક સવિશેષ શાળાના પુસ્તકભંડારમાં 10 ડઝન રસાયણવિજ્ઞાનનાં પુસ્તકો, 8 ડઝન ભૌતિકવિજ્ઞાનનાં પુસ્તકો અને 10 ડઝન અર્થશાસ્ત્રનાં પુસ્તકો છે. તેમની વેચાણકિંમત અનુક્રમે ₹ 80, ₹ 60 અને ₹ 40 છે. પુસ્તકભંડાર બધાં જ પુસ્તકોનું વેચાણ કરી દે, તો શ્રેણિક બીજગણિતની મદદથી ભંડારને કેટલી રકમ મળશે તે શોધો.

ધારો કે X, Y, Z, W અને P અનુક્રમે $2 \times n$, $3 \times k$, $2 \times p$, $n \times 3$ અને $p \times k$ કક્ષાવાળા શ્રેણિક છે. પ્રશ્નો 21 તથા 22 માં વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલ વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો :

21. PY + WY વ્યાખ્યાયિત થાય તે રીતે n, k અને p પર પ્રતિબંધ મૂકવામાં આવે તો :

(A) $k = 3, p = n$ (B) k સ્વૈર, $p = 2$

(C) p સ્વૈર, $k = 3$ (D) $k = 2, p = 3$

22. જો $n = p$ હોય, તો શ્રેણિક 7X – 5Zની કક્ષા :

(A) $p \times 2$ (B) $2 \times n$ (C) $n \times 3$ (D) $p \times n$

3.5 પરિવર્ત શ્રેણિક

આ વિભાગમાં, આપણે પરિવર્ત શ્રેણિક અને સંમિત તથા વિસંમિત શ્રેણિક જેવા વિશિષ્ટ પ્રકારના શ્રેણિકનો અભ્યાસ કરીશું.

વ્યાખ્યા 3 : જો $m \times n$ શ્રેણિક $A = [a_{ij}]$ ની બધી જ હારને અનુરૂપ સ્તંભમાં અને બધા જ સ્તંભને તેમની અનુરૂપ હારમાં અદલબદલ કરવામાં આવે તો તેથી મળતા શ્રેણિકને શ્રેણિક A નો પરિવર્ત શ્રેણિક (Transpose of a matrix) કહે છે. $A = [a_{ij}]$ ના પરિવર્ત શ્રેણિકને A' અથવા (A^T) વડે દર્શાવાય છે.

બીજી રીતે કહેતાં, જો $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ તો $A' = [a_{ji}]_{n \times m}$

ઉદાહરણ તરીકે, જો $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ \sqrt{3} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}_{3 \times 2}$, તો $A' = \begin{bmatrix} 3 & \sqrt{3} & 0 \\ 5 & 1 & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}_{2 \times 3}$.

3.5.1 પરિવર્ત શ્રેણિકના ગુણધર્મો

આપણે હવે પરિવર્ત શ્રેણિકના કેટલાક ગુણધર્મોને સાબિતી સિવાય દર્શાવીશું. યોગ્ય ઉદાહરણથી આપણે તેને ચકાસીશું. યોગ્ય કક્ષાના કોઈ પણ શ્રેણિક A અને B માટે,

(i) $(A')' = A$ (ii) કોઈ પણ અચળ k માટે $(kA)' = kA'$.

(iii) $(A + B)' = A' + B'$ (iv) $(AB)' = B'A'$

ઉદાહરણ 20 : જો $A = \begin{bmatrix} 3 & \sqrt{3} & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ અને $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$, તો ચકાસો કે

(i) $(A')' = A$ (ii) $(A + B)' = A' + B'$

(iii) કોઈ પણ અચળ k માટે $(kB)' = kB'$.

ઉકેલ : (i) $A = \begin{bmatrix} 3 & \sqrt{3} & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$. તેથી $A' = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ \sqrt{3} & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

$$\therefore \quad (A')' = \begin{bmatrix} 3 & \sqrt{3} & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} = A$$

આમ, $(A')' = A$

(ii) $A = \begin{bmatrix} 3 & \sqrt{3} & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$. આથી, $A + B = \begin{bmatrix} 5 & \sqrt{3}-1 & 4 \\ 5 & 4 & 4 \end{bmatrix}$.

તેથી, $(A + B)' = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ \sqrt{3}-1 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$

હવે, $A' = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ \sqrt{3} & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, $B' = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

માટે $A' + B' = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ \sqrt{3}-1 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$

આમ, $(A + B)' = A' + B'$

(iii) આપણને $kB = k\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2k & -k & 2k \\ k & 2k & 4k \end{bmatrix}$ મળે.

તેથી, $(kB)' = \begin{bmatrix} 2k & k \\ -k & 2k \\ 2k & 4k \end{bmatrix} = k\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ મળે.

આમ, $(kB)' = kB'$

ઉદાહરણ 21 : જો $A = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$, $B = [1 \quad 3 \quad -6]$, તો $(AB)' = B'A'$ ચકાસો.

ઉકેલ : આપણી પાસે $A = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$, $B = [1 \quad 3 \quad -6]$ છે.

આથી, $AB = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}[1 \quad 3 \quad -6] = \begin{bmatrix} -2 & -6 & 12 \\ 4 & 12 & -24 \\ 5 & 15 & -30 \end{bmatrix}$

$\therefore \quad (AB)' = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 5 \\ -6 & 12 & 15 \\ 12 & -24 & -30 \end{bmatrix}$

હવે, $A' = [-2 \quad 4 \quad 5]$, $B' = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix}$

$$B'A' = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix}[-2 \quad 4 \quad 5] = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 5 \\ -6 & 12 & 15 \\ 12 & -24 & -30 \end{bmatrix} = (AB)'$$

$\therefore \quad (AB)' = B'A'$ સ્પષ્ટ છે.

3.6 સંમિત અને વિસંમિત શ્રેણિક

વ્યાખ્યા 4 : *જો ચોરસ શ્રેણિક $A = [a_{ij}]$ માટે $A' = A$ હોય, તો A ને સંમિત શ્રેણિક કહેવાય છે, એટલે કે i અને j ની પ્રત્યેક શક્ય કિંમત માટે $a_{ij} = a_{ji}$ હોય, તો A સંમિત શ્રેણિક છે.*

ઉદાહરણ તરીકે, $A = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 2 & 3 \\ 2 & -1.5 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ માં $A' = A$ છે. આથી A સંમિત શ્રેણિક છે.

વ્યાખ્યા 5 : *જો ચોરસ શ્રેણિક $A = [a_{ij}]$ માટે $A' = -A$ થાય, તો A ને વિસંમિત શ્રેણિક કહેવાય છે, એટલે કે i અને j ની પ્રત્યેક શક્ય કિંમત માટે $a_{ji} = -a_{ij}$ મળે, તો A વિસંમિત શ્રેણિક છે.*

હવે જો આપણે $i = j$ લઈએ તો $a_{ii} = -a_{ii}$.

આથી $2a_{ii} = 0$ અથવા પ્રત્યેક i માટે $a_{ii} = 0$.

આનો અર્થ એ થાય કે, વિસંમિત શ્રેણિકના બધા વિકર્ણ ઘટક શૂન્ય છે.

ઉદાહરણ તરીકે, $B = \begin{bmatrix} 0 & e & f \\ -e & 0 & g \\ -f & -g & 0 \end{bmatrix}$ માટે $B' = -B$ છે. આથી B વિસંમિત શ્રેણિક છે.

હવે, આપણે સંમિત અને વિસંમિત શ્રેણિક વિશે કેટલાંક પરિણામ સાબિત કરીશું.

પ્રમેય 1 : જેના ઘટકો વાસ્તવિક સંખ્યાઓ હોય તેવા કોઈ પણ ચોરસ શ્રેણિક A માટે, A + A' સંમિત શ્રેણિક છે અને A – A' વિસંમિત શ્રેણિક છે.

સાબિતી : B = A + A' લેતાં,

$B' = (A + A')'$

$= A' + (A')'$ **((A + B)' = A' + B' હોવાથી)**

$= A' + A$ **((A')' = A હોવાથી)**

$= A + A'$ **(A + B = B + A હોવાથી)**

$= B$

માટે, B = A + A' સંમિત શ્રેણિક છે.

હવે, C = A – A' લેતાં,

$C' = (A - A')'$

$= A' - (A')'$ (શા માટે ?)

$= A' - A$ (શા માટે ?)

$= -(A - A)'$

$= -C$

માટે, C = A – A' વિસંમિત શ્રેણિક છે.

પ્રમેય 2 : કોઈ પણ ચોરસ શ્રેણિકને એક સંમિત અને એક વિસંમિત શ્રેણિકના સરવાળા તરીકે રજૂ કરી શકાય છે. (ખરેખર તો અનન્ય રીતે)

સાબિતી : ચોરસ શ્રેણિક A ને આપણે $A = \frac{1}{2}(A + A') + \frac{1}{2}(A - A')$ તરીકે લખી શકીએ.

પ્રમેય 1 પરથી આપણે જાણીએ છીએ કે, A + A' સંમિત શ્રેણિક છે અને A – A' વિસંમિત શ્રેણિક છે. કોઈ પણ શ્રેણિક A માટે $(kA)' = kA'$ હોવાથી $\frac{1}{2}(A + A')$ એ સંમિત શ્રેણિક છે અને $\frac{1}{2}(A - A')$ એ વિસંમિત શ્રેણિક છે. આમ, કોઈ પણ ચોરસ શ્રેણિકને એક સંમિત અને એક વિસંમિત શ્રેણિકના સરવાળા સ્વરૂપે રજૂ કરી શકાય.

ઉદાહરણ 22 : શ્રેણિક $B = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ ને એક સંમિત અને એક વિસંમિત શ્રેણિકના સરવાળા તરીકે વ્યક્ત કરો.

ઉકેલ : અહીં, $B' = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -4 & 4 & -3 \end{bmatrix}$

ધારો કે, $P = \frac{1}{2}(B + B') = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & 2 \\ -3 & 2 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & \frac{-3}{2} & \frac{-3}{2} \\ \frac{-3}{2} & 3 & 1 \\ \frac{-3}{2} & 1 & -3 \end{bmatrix}$

હવે, $P' = \begin{bmatrix} 2 & \frac{-3}{2} & \frac{-3}{2} \\ \frac{-3}{2} & 3 & 1 \\ \frac{-3}{2} & 1 & -3 \end{bmatrix} = P$

આમ, $P = \frac{1}{2}(B + B')$ એ સંમિત શ્રેણિક છે.

વળી, ધારો કે $Q = \frac{1}{2}(B - B') = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -1 & -5 \\ 1 & 0 & 6 \\ 5 & -6 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{2} & \frac{-5}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 3 \\ \frac{5}{2} & -3 & 0 \end{bmatrix}$

તો $Q' = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{-1}{2} & 0 & -3 \\ \frac{-5}{2} & 3 & 0 \end{bmatrix} = -Q.$

આમ, $Q = \frac{1}{2}(B - B')$ એ વિસંમિત શ્રેણિક છે.

હવે, $P + Q = \begin{bmatrix} 2 & \frac{-3}{2} & \frac{-3}{2} \\ \frac{-3}{2} & 3 & 1 \\ \frac{-3}{2} & 1 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{2} & \frac{-5}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 3 \\ \frac{5}{2} & -3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} = B$

નોંધ : $P + Q = \frac{1}{2}(B + B') + \frac{1}{2}(B - B') = B$ જ થાય ને!

આમ, B ને એક સંમિત અને એક વિસંમિત શ્રેણિકના સરવાળા તરીકે અભિવ્યક્ત કરી શકાય છે.

સ્વાધ્યાય 3.3

1. નીચેના પૈકી પ્રત્યેક શ્રેણિકનો પરિવર્ત શ્રેણિક મેળવો :

(i) $\begin{bmatrix} 5 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} -1 & 5 & 6 \\ \sqrt{3} & 5 & 6 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

2. જો $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 9 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ અને $B = \begin{bmatrix} -4 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ હોય, તો

(i) $(A + B)' = A' + B'$ (ii) $(A - B)' = A' - B'$ ચકાસો.

3. જો $A' = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ અને $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ હોય, તો

(i) $(A + B)' = A' + B'$ (ii) $(A - B)' = A' - B'$ ચકાસો.

4. જો $A' = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ અને $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ હોય, તો $(A + 2B)'$ શોધો.

5. નીચે આપેલા શ્રેણિક A અને B માટે ચકાસો કે $(AB)' = B'A'$:

(i) $A = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ (ii) $A = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \end{bmatrix}$

6. (i) જો A = $\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ હોય, તો ચકાસો કે, A' A = I

(ii) જો A = $\begin{bmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix}$ હોય, તો ચકાસો કે, A' A = I.

7. (i) સાબિત કરો કે શ્રેણિક A = $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ સંમિત શ્રેણિક છે.

(ii) સાબિત કરો કે શ્રેણિક A = $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ વિસંમિત શ્રેણિક છે.

8. શ્રેણિક A = $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$ માટે, ચકાસો કે

(i) (A + A') સંમિત શ્રેણિક છે.

(ii) (A – A') વિસંમિત શ્રેણિક છે.

9. જો A = $\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}$, તો $\frac{1}{2}(A + A')$ અને $\frac{1}{2}(A - A')$ શોધો.

10. નીચેના પ્રત્યેક શ્રેણિકને એક સંમિત અને એક વિસંમિત શ્રેણિકના સરવાળા તરીકે અભિવ્યક્ત કરો :

(i) $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

(ii) $\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \\ -4 & -5 & 2 \end{bmatrix}$

(iv) $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

પ્રશ્નો 11 તથા 12 માં વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલ વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો :

11. જો A અને B સમાન કક્ષાવાળા સંમિત શ્રેણિક હોય, તો AB – BA એ

(A) વિસંમિત શ્રેણિક છે.

(B) સંમિત શ્રેણિક છે.

(C) શૂન્ય શ્રેણિક છે.

(D) એકમ શ્રેણિક છે.

12. જો α નું મૂલ્ય .... હોય, તો A + A' = I થાય, જ્યાં A = $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$.

(A) $\frac{\pi}{6}$

(B) $\frac{\pi}{3}$

(C) π

(D) $\frac{3\pi}{2}$

3.7 શ્રેણિક પરની પ્રાથમિક પ્રક્રિયા (પરિવર્તન)

શ્રેણિકની હાર ઉપર ત્રણ પ્રકારની અને તેના સ્તંભ ઉપર ત્રણ પ્રકારની એમ છ પ્રાથમિક પ્રક્રિયાઓ (પરિવર્તનો) કરી શકાય છે. આ પ્રક્રિયાઓને પ્રાથમિક પ્રક્રિયાઓ (Elementary Operations) અથવા પરિવર્તનો (Transformations) કહે છે.

(i) કોઈ પણ બે હાર અથવા બે સ્તંભની અદલબદલ : i મી અને j મી હારની અદલબદલને સંકેતમાં $R_i \leftrightarrow R_j$ અને i મા તથા j મા સ્તંભની અદલબદલને $C_i \leftrightarrow C_j$ વડે દર્શાવાય છે.

ઉદાહરણ તરીકે, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & \sqrt{3} & 1 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$ પર $R_1 \leftrightarrow R_2$ કરતાં, આપણને $\begin{bmatrix} -1 & \sqrt{3} & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$ મળે.

(ii) કોઈ પણ હાર અથવા સ્તંભના તમામ ઘટકોનો શૂન્યેતર સંખ્યા વડે ગુણાકાર : i મી હારના દરેક ઘટકના $k\ (k \neq 0)$ વડે ગુણાકારને સંકેતમાં $R_i \leftrightarrow kR_i$ વડે દર્શાવાય છે. સ્તંભ માટેની આનુષંગિક પ્રક્રિયાને $C_i \leftrightarrow kC_i$ વડે દર્શાવાય છે.

ઉદાહરણ તરીકે, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$ પર $C_3 \rightarrow \frac{1}{7}C_3$ કરતાં, આપણને $\begin{bmatrix} 1 & 2 & \frac{1}{7} \\ -1 & \sqrt{3} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$ મળે.

(iii) કોઈ પણ હાર અથવા સ્તંભના ઘટકોમાં બીજી હાર અથવા સ્તંભના અનુરૂપ ઘટકોને કોઈ પણ શૂન્યેતર સંખ્યા વડે ગુણીને ઉમેરતાં : j મી હારના ઘટકોને k વડે ગુણીને i મી હારના અનુરૂપ ઘટકોમાં ઉમેરવાના સંકેતને $R_i \rightarrow R_i + kR_j$ વડે દર્શાવાય છે. સ્તંભ માટેની અનુરૂપ પ્રક્રિયાને $C_i \rightarrow C_i + kC_j$ વડે દર્શાવાય છે.

ઉદાહરણ તરીકે, $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ પર $R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1$ કરતાં, આપણને $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$ મળે.

3.8 વ્યસ્તસંપન્ન શ્રેણિક

જો m કક્ષાવાળા ચોરસ શ્રેણિક A ને સંગત બીજો એક m કક્ષાવાળો ચોરસ શ્રેણિક B મળે કે જેથી AB = BA = I થાય, તો B ને A નો વ્યસ્ત (inverse) શ્રેણિક કહેવાય અને તેને A^{-1} વડે દર્શાવાય છે. આ કિસ્સામાં A વ્યસ્તસંપન્ન શ્રેણિક કહેવાય.

ઉદાહરણ તરીકે, ધારો કે $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ અને $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ બે શ્રેણિકો છે.

હવે, $$AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4-3 & -6+6 \\ 2-2 & -3+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

વળી $BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$ ચકાસી શકાય. આમ, B એ A નો વ્યસ્ત શ્રેણિક છે. બીજા શબ્દોમાં કહીએ, તો $B = A^{-1}$ અને A પણ B નો વ્યસ્ત છે, અર્થાત્ $A = B^{-1}$.

☛ નોંધ : (1) ગુણાકાર શ્રેણિક AB અને BA વ્યાખ્યાયિત અને સમાન થાય, તે માટે A અને B સમાન કક્ષાના ચોરસ શ્રેણિક હોવા જરૂરી છે. આથી લંબચોરસ શ્રેણિકના વ્યસ્તનું અસ્તિત્વ નથી.

(2) જો A નો વ્યસ્ત B હોય, તો B નો વ્યસ્ત A પણ છે.

પ્રમેય 3 : *(વ્યસ્ત શ્રેણિકની અનન્યતા) જો ચોરસ શ્રેણિકનો વ્યસ્ત શ્રેણિક અસ્તિત્વ ધરાવે તો તે અનન્ય છે.*

સાબિતી : ધારો કે $A = [a_{ij}]$ ચોરસ શ્રેણિક છે. ધારો કે જો શક્ય હોય, તો A ને બે વ્યસ્ત શ્રેણિક B અને C છે.

B એ Aનો વ્યસ્ત હોવાથી, $AB = BA = I$ ...(1)

C પણ Aનો વ્યસ્ત હોવાથી, $AC = CA = I$ ...(2)

આમ, $B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C$

પ્રમેય 4 : *જો A અને B એ સમાન કક્ષાવાળા વ્યસ્તસંપન્ન શ્રેણિક હોય, તો $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.*

સાબિતી : વ્યસ્ત શ્રેણિકની વ્યાખ્યા પરથી,

$(AB)(AB)^{-1} = I$

અથવા $A^{-1}(AB)(AB)^{-1} = A^{-1}I$ (બંને તરફ A^{-1} વડે પૂર્વગુણન કરતાં)

અથવા $(A^{-1}A)B\,(AB)^{-1} = A^{-1}$ ($A^{-1}I = A^{-1}$ હોવાથી)

અથવા $IB\,(AB)^{-1} = A^{-1}$

અથવા $B\,(AB)^{-1} = A^{-1}$

અથવા $B^{-1}B\,(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

અથવા $I\,(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

તેથી $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

3.8.1 પ્રાથમિક પ્રક્રિયાઓથી વ્યસ્ત શ્રેણિક

X = AB થાય તેવા સમાન કક્ષાવાળા શ્રેણિક A અને B આપ્યા છે. X = AB પર પ્રાથમિક હાર પ્રક્રિયાઓની શ્રેણીનો ઉપયોગ કરવા માટે, X પર અને ગુણાકાર ABની ડાબી બાજુના શ્રેણિક A પર તે જ ક્રમમાં આ હાર પ્રક્રિયાઓનો ઉપયોગ કરીશું.

આ જ પ્રમાણે શ્રેણિક સમીકરણ X = AB પર પ્રાથમિક સ્તંભ-પ્રક્રિયાઓની શ્રેણીનો ઉપયોગ કરવાનો હોય, તો આ પ્રક્રિયાઓ આ જ ક્રમમાં X પર અને ગુણાકાર શ્રેણિક AB ના જમણી બાજુના શ્રેણિક B પર ઉપયોગ કરીશું.

ઉપરની ચર્ચાનું અવલોકન કરતાં, આપણે એવું તારણ કાઢીશું કે, જો શ્રેણિક A માટે A^{-1}નું અસ્તિત્વ હોય, તો પ્રાથમિક હાર-પ્રક્રિયાઓનો ઉપયોગ કરી A^{-1} મેળવવા, A = IA લખો અને આપણને I = BA ના મળે ત્યાં સુધી A = IA પર હાર-પ્રક્રિયાઓની શ્રેણીનો ઉપયોગ કરો. શ્રેણિક B એ A નો વ્યસ્ત શ્રેણિક થશે. આ જ પ્રમાણે જો આપણે સ્તંભ-પ્રક્રિયાઓનો ઉપયોગ કરી A^{-1} શોધવા ઇચ્છતા હોઈએ, તો A = AI લખો અને I = AB ના મળે ત્યાં સુધી A = AI પર સ્તંભ-પ્રક્રિયાઓની શ્રેણીનો ઉપયોગ કરો.

નોંધ : A = IA (A = AI) પર એક અથવા વધારે પ્રાથમિક હાર (સ્તંભ) પ્રક્રિયાઓ લગાડતાં, જો ડાબી બાજુના શ્રેણિક A ની એક અથવા વધારે હારમાં આપણને બધા ઘટક શૂન્ય મળે, તો A^{-1} નું અસ્તિત્વ નથી.

ઉદાહરણ 23 : પ્રાથમિક પ્રક્રિયાઓનો ઉપયોગ કરી શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$નો વ્યસ્ત શોધો.

ઉકેલ : પ્રાથમિક હાર-પ્રક્રિયાઓનો ઉપયોગ કરવા માટે આપણે A = IA લખીશું.

અથવા $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A$

આથી, $\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & -5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{bmatrix}A$ **($R_2 \to R_2 - 2R_1$ કરતાં)**

અથવા $\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ \frac{2}{5} & \frac{-1}{5}\end{bmatrix}A$ **($R_2 \to -\frac{1}{5}R_2$ કરતાં)**

અથવા $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{5} & \frac{2}{5}\\ \frac{2}{5} & \frac{-1}{5}\end{bmatrix}A$ **($R_1 \to R_1 - 2R_2$ કરતાં)**

આમ, $A^{-1} = \begin{bmatrix}\frac{1}{5} & \frac{2}{5}\\ \frac{2}{5} & \frac{-1}{5}\end{bmatrix}$

વૈકલ્પિક રીતે, પ્રાથમિક સ્તંભ પ્રક્રિયાઓનો ઉપયોગ કરવા માટે, આપણે A = AI લખીશું. અર્થાત્

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{bmatrix} = A\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$C_2 \to C_2 - 2C_1$ કરતાં, આપણને

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & -5\end{bmatrix} = A\begin{bmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{bmatrix} \text{ મળે.}$$

હવે, $C_2 \to -\frac{1}{5}C_2$ ના ઉપયોગથી, આપણને

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix} = A\begin{bmatrix}1 & \frac{2}{5}\\ 0 & \frac{-1}{5}\end{bmatrix} \text{ મળે.}$$

છેલ્લે $C_1 \to C_1 - 2C_2$ કરતાં, આપણને

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} = A\begin{bmatrix}\frac{1}{5} & \frac{2}{5}\\ \frac{2}{5} & \frac{-1}{5}\end{bmatrix} \text{ મળે.}$$

આથી, $A^{-1} = \begin{bmatrix}\frac{1}{5} & \frac{2}{5}\\ \frac{2}{5} & \frac{-1}{5}\end{bmatrix}$

ઉદાહરણ 24 : પ્રાથમિક પ્રક્રિયાઓની મદદથી નીચેના શ્રેણિકનો વ્યસ્ત મેળવો :

$$A = \begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

ઉકેલ : A = IA લખો. અર્થાત્ $\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}A$

અથવા $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ 3 & 1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}A$ **($R_1 \leftrightarrow R_2$ કરતાં)**

અથવા $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} A$ ($R_3 \to R_3 - 3R_1$ કરતાં)

અથવા $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} A$ ($R_1 \to R_1 - 2R_2$ કરતાં)

અથવા $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 5 & -3 & 1 \end{bmatrix} A$ ($R_3 \to R_3 + 5R_2$ કરતાં)

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{5}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} A$ ($R_3 \to \frac{1}{2} R_3$ કરતાં)

અથવા $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{5}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} A$ ($R_1 \to R_1 + R_3$ કરતાં)

અથવા $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ -4 & 3 & -1 \\ \frac{5}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} A$ ($R_2 \to R_2 - 2R_3$ કરતાં)

આથી, $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ -4 & 3 & -1 \\ \frac{5}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

વૈકલ્પિક રીતે, $A = AI$ લખો. અર્થાત્

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

અથવા $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ($C_1 \leftrightarrow C_2$)

અથવા $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ($C_3 \to C_3 - 2C_1$)

અથવા $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ($C_3 \to C_3 + C_2$)

અથવા $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \qquad \left(C_3 \to \tfrac{1}{2}C_3\right)$$

અથવા $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -5 & 3 & 1 \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} -2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \qquad (C_1 \to C_1 - 2C_2)$$

અથવા $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ -4 & 0 & -1 \\ \frac{5}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \qquad (C_1 \to C_1 + 5C_3)$$

અથવા $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ -4 & 3 & -1 \\ \frac{5}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \qquad (C_2 \to C_2 - 3C_3)$$

આથી, $$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ -4 & 3 & -1 \\ \frac{5}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

ઉદાહરણ 25 : $P = \begin{bmatrix} 10 & -2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$ આપેલ છે. જો P^{-1} અસ્તિત્વ ધરાવે, તો તે શોધો.

ઉકેલ : આપણી પાસે $P = IP$ અર્થાત્ $\begin{bmatrix} 10 & -2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}P$ છે.

અથવા $$\begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{5} \\ -5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}P \qquad \left(R_1 \to \tfrac{1}{10}R_1 \text{ કરતાં}\right)$$

અથવા $$\begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{5} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}P \qquad (R_2 \to R_2 + 5R_1 \text{ કરતાં})$$

આપણને ઉપરના સમીકરણની ડાબી બાજુના શ્રેણિકની બીજી હારના બધા ઘટકો શૂન્ય મળે છે. આથી P^{-1}નું અસ્તિત્વ નથી.

સ્વાધ્યાય 3.4

પ્રશ્ન 1થી 17 માં પ્રાથમિક પ્રક્રિયાઓનો ઉપયોગ કરો અને જો વ્યસ્ત શ્રેણિક અસ્તિત્વ ધરાવે, તો મેળવો :

1. $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ **2.** $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ **3.** $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix}2 & 3\\5 & 7\end{bmatrix}$ **5.** $\begin{bmatrix}2 & 1\\7 & 4\end{bmatrix}$ **6.** $\begin{bmatrix}2 & 5\\1 & 3\end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix}3 & 1\\5 & 2\end{bmatrix}$ **8.** $\begin{bmatrix}4 & 5\\3 & 4\end{bmatrix}$ **9.** $\begin{bmatrix}3 & 10\\2 & 7\end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix}3 & -1\\-4 & 2\end{bmatrix}$ **11.** $\begin{bmatrix}2 & -6\\1 & -2\end{bmatrix}$ **12.** $\begin{bmatrix}6 & -3\\-2 & 1\end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix}2 & -3\\-1 & 2\end{bmatrix}$ **14.** $\begin{bmatrix}2 & 1\\4 & 2\end{bmatrix}$ **15.** $\begin{bmatrix}2 & -3 & 3\\2 & 2 & 3\\3 & -2 & 2\end{bmatrix}$

16. $\begin{bmatrix}1 & 3 & -2\\-3 & 0 & -5\\2 & 5 & 0\end{bmatrix}$ **17.** $\begin{bmatrix}2 & 0 & -1\\5 & 1 & 0\\0 & 1 & 3\end{bmatrix}$

પ્રશ્ન 18 માં વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલ વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો :

18. જો .... તો A અને B એકબીજાના વ્યસ્ત શ્રેણિક છે.

(A) $AB = BA$ (B) $AB = BA = O$

(C) $AB = O, BA = I$ (D) $AB = BA = I$

પ્રકીર્ણ ઉદાહરણો

ઉદાહરણ 26 : જો $A = \begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\-\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$ હોય, તો સાબિત કરો કે $A^n = \begin{bmatrix}\cos n\theta & \sin n\theta\\-\sin n\theta & \cos n\theta\end{bmatrix}$, $n \in N$

ઉકેલ : ગાણિતિક અનુમાનના સિદ્ધાંતનો ઉપયોગ કરી આપણે આ પરિણામ સાબિત કરીશું.

આપણી પાસેનું વિધાન $P(n)$: જો $A = \begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\-\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$, તો $A^n = \begin{bmatrix}\cos n\theta & \sin n\theta\\-\sin n\theta & \cos n\theta\end{bmatrix}$, $n \in N$.

$P(1)$: જો $A = \begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\-\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$, તો $A^1 = \begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\-\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$

માટે, પરિણામ $n = 1$ માટે સત્ય છે.

ધારો કે, પરિણામ $n = k$ માટે સત્ય છે. આથી,

$P(k)$: જો $A = \begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\-\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$ હોય, તો $A^k = \begin{bmatrix}\cos k\theta & \sin k\theta\\-\sin k\theta & \cos k\theta\end{bmatrix}$

હવે, આપણે પરિણામ $n = k + 1$ માટે સત્ય છે તેમ સાબિત કરીશું.

હવે, $A^{k+1} = A \cdot A^k = \begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\-\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos k\theta & \sin k\theta\\-\sin k\theta & \cos k\theta\end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix}\cos\theta\cos k\theta - \sin\theta\sin k\theta & \cos\theta\sin k\theta + \sin\theta\cos k\theta\\-\sin\theta\cos k\theta - \cos\theta\sin k\theta & -\sin\theta\sin k\theta + \cos\theta\cos k\theta\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}\cos(\theta + k\theta) & \sin(\theta + k\theta)\\-\sin(\theta + k\theta) & \cos(\theta + k\theta)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos(k+1)\theta & \sin(k+1)\theta\\-\sin(k+1)\theta & \cos(k+1)\theta\end{bmatrix}$$

આથી, પરિણામ $n = k + 1$ માટે પણ સત્ય છે. આમ, ગાણિતિક અનુમાનના સિદ્ધાંતથી બધી જ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ માટે $A^n = \begin{bmatrix}\cos n\theta & \sin n\theta\\-\sin n\theta & \cos n\theta\end{bmatrix}$ સત્ય છે.

ઉદાહરણ 27 : જો A અને B સમાન કક્ષાવાળા સંમિત શ્રેણિક હોય, તો સાબિત કરો કે AB સંમિત હોય તો અને તો જ A અને B ના ગુણાકાર માટે AB = BA થાય.

ઉકેલ : A અને B બંને સંમિત શ્રેણિક હોવાથી, A' = A અને B' = B.

ધારો કે, AB સંમિત છે, તો (AB)' = AB.

પરંતુ $(AB)' = B'A' = BA$ **(કેમ ?)**

તેથી, BA = AB

આથી ઊલટું, જો AB = BA, તો આપણે દર્શાવીશું કે AB સંમિત છે.

$$(AB)' = B'A'$$
$$= BA \quad \textbf{(A અને B સંમિત હોવાથી)}$$
$$= AB$$

આથી, AB સંમિત છે.

ઉદાહરણ 28 : ધારો કે $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$. CD – AB = O થાય એવો શ્રેણિક D શોધો.

ઉકેલ : A, B, C એ 2 કક્ષાવાળા ચોરસ શ્રેણિક હોવાથી અને CD – AB વ્યાખ્યાયિત હોવાથી D એ 2 કક્ષાવાળો ચોરસ શ્રેણિક થશે.

ધારો કે $D = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ તથા CD – AB = O છે.

$$\therefore \quad \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} = O$$

અથવા $\begin{bmatrix} 2a+5c & 2b+5d \\ 3a+8c & 3b+8d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 43 & 22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

અથવા $\begin{bmatrix} 2a+5c-3 & 2b+5d \\ 3a+8c-43 & 3b+8d-22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

બંને શ્રેણિકના અનુરૂપ ઘટકો સરખાવતાં, આપણને

$$2a + 5c - 3 = 0 \qquad ...(1)$$
$$3a + 8c - 43 = 0 \qquad ...(2)$$
$$2b + 5d = 0 \qquad ...(3)$$

અને $3b + 8d - 22 = 0$ મળે. ...(4)

(1) અને (2)ને ઉકેલતાં, આપણને $a = -191$, $c = 77$ મળે. (3) અને (4) ઉકેલતાં, આપણને $b = -110$, $d = 44$ મળે.

માટે $D = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -191 & -110 \\ 77 & 44 \end{bmatrix}$

પ્રકીર્ણ સ્વાધ્યાય 3

1. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ છે. દર્શાવો કે $(aI + bA)^n = a^nI + na^{n-1}bA$. I એ 2 કક્ષાવાળો એકમ શ્રેણિક છે અને $n \in N$.

2. જો $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ હોય, તો સાબિત કરો કે $A^n = \begin{bmatrix} 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \\ 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \\ 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \end{bmatrix}$, $n \in N$.

3. જો $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ હોય, તો સાબિત કરો કે $A^n = \begin{bmatrix} 1+2n & -4n \\ n & 1-2n \end{bmatrix}$. n એ કોઈ પણ ધન પૂર્ણાંક છે.

4. જો A અને B સંમિત શ્રેણિક હોય, તો સાબિત કરો કે AB – BA વિસંમિત શ્રેણિક છે.

5. જો A સંમિત અથવા વિસંમિત શ્રેણિક હોય, તદનુસાર સાબિત કરો કે B'AB સંમિત અથવા વિસંમિત શ્રેણિક છે.

6. જો શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 0 & 2y & z \\ x & y & -z \\ x & -y & z \end{bmatrix}$ માટે, A'A = I હોય, તો x, y, z નાં મૂલ્ય શોધો.

7. x ની કઈ કિંમત માટે : $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ x \end{bmatrix} = O$?

8. જો $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ હોય, તો સાબિત કરો કે $A^2 - 5A + 7I = O$.

9. જો $\begin{bmatrix} x & -5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = O$ હોય, તો x શોધો.

10. એક ઉત્પાદક x, y, z એમ ત્રણ પ્રકારના માલનું ઉત્પાદન કરે છે. તે તેમનું બે બજારમાં વેચાણ કરે છે. વાર્ષિક વેચાણ નીચે દર્શાવેલ છે :

બજાર	ઉત્પાદન		
	x	y	z
I	10,000	2000	18,000
II	6000	20,000	8000

(a) જો x, y, z ની નંગ દીઠ વેચાણકિંમત અનુક્રમે ₹ 2.50, ₹ 1.50 અને ₹ 1.00 હોય, તો શ્રેણિક બીજગણિતની મદદથી પ્રત્યેક બજારમાંથી થતી કુલ આવક શોધો.

(b) જો ઉપરની ત્રણ વસ્તુનો નંગદીઠ ઉત્પાદન-ખર્ચ અનુક્રમે ₹ 2.00, ₹ 1.00 અને 0.50 પૈસા થતો હોય, તો કુલ નફો શોધો.

11. જો X $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -8 & -9 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ હોય, તો શ્રેણિક X શોધો.

12. જો A અને B સમાન કક્ષાવાળા એવા ચોરસ શ્રેણિક હોય, કે જેથી AB = BA થાય, તો ગાણિતિક અનુમાનના સિદ્ધાંતથી સાબિત કરો કે $AB^n = B^nA$. વધુમાં સાબિત કરો કે પ્રત્યેક $n \in N$ માટે $(AB)^n = A^nB^n$.

પ્રશ્નો 13 થી 15 માં વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલ વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો :

13. જો $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{bmatrix}$ માટે $A^2 = I$ થાય, તો ....

(A) $1 + \alpha^2 + \beta\gamma = 0$ (B) $1 - \alpha^2 + \beta\gamma = 0$

(C) $1 - \alpha^2 - \beta\gamma = 0$ (D) $1 + \alpha^2 - \beta\gamma = 0$

14. જો શ્રેણિક A એ સંમિત અને વિસંમિત બંને હોય, તો

(A) A વિકર્ણ શ્રેણિક છે. (B) A શૂન્ય શ્રેણિક છે.

(C) A ચોરસ શ્રેણિક છે. (D) આમાંથી એક પણ નહિ.

15. જો A એ $A^2 = A$ થાય તેવો ચોરસ શ્રેણિક A હોય, તો $(I + A)^3 - 7A =$ ....

(A) A (B) I – A (C) I (D) 3A

સારાંશ

- શ્રેણિક એ સંખ્યાઓ અથવા વિધેયોની ક્રમયુક્ત લંબચોરસ સારણી છે.
- m હાર અને n સ્તંભવાળા શ્રેણિકને $m \times n$ કક્ષાવાળો શ્રેણિક કહે છે.
- $[a_{i1}]_{m \times 1}$ એ સ્તંભ શ્રેણિક છે. $i = 1, 2, 3, ..., m$
- $[a_{1j}]_{1 \times n}$ એ હાર શ્રેણિક છે. $j = 1, 2, 3, ..., n$
- જો $m = n$ હોય, તો $m \times n$ શ્રેણિક એ ચોરસ શ્રેણિક છે.
- જો $i \neq j$ માટે $a_{ij} = 0$ હોય, તો $A = [a_{ij}]_{m \times m}$ વિકર્ણ શ્રેણિક છે.
- જો $i \neq j$ માટે $a_{ij} = 0$ તથા $i = j$ માટે $a_{ij} = k$ (k કોઈક અચળ છે) હોય, તો $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ અદિશ શ્રેણિક છે.
- જો $i \neq j$ માટે $a_{ij} = 0$ તથા $i = j$ માટે $a_{ij} = 1$ હોય, તો $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ એકમ શ્રેણિક છે.
- જો (i) A અને B ની કક્ષા સમાન હોય, (ii) i અને jની બધી જ શક્ય કિંમતો માટે $a_{ij} = b_{ij}$ થાય, તો $A = [a_{ij}] = [b_{ij}] = B$.
- $kA = k[a_{ij}]_{m \times n} = [ka_{ij}]_{m \times n}$
- $-A = (-1)A$
- $A - B = A + (-1)B$
- $A + B = B + A$
- સમાન કક્ષાવાળા A, B અને C માટે, $(A + B) + C = A + (B + C)$

- A અને B ની કક્ષા સમાન હોય, k અચળ હોય, તો $k(A + B) = kA + kB$.
- અચળ k અને l માટે, $(k + l)A = kA + lA$
- જો $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ અને $B = [b_{ij}]_{n \times p}$ તો $AB = C = [c_{ij}]_{m \times p}$, જ્યાં $c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$

  (i) $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $B = [b_{ij}]_{n \times p}$, $C = [c_{ij}]_{p \times q}$ તો $(AB)C = A(BC)$

  (ii) $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $B = [b_{ij}]_{n \times p}$, $C = [c_{ij}]_{n \times p}$ તો $A(B + C) = AB + AC$

  (iii) $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $B = [b_{ij}]_{m \times n}$, $C = [c_{ij}]_{n \times p}$ તો $(A + B)C = AC + BC$
- જો $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ તો A' અથવા $A^T = [a_{ji}]_{n \times m}$

  (i) $(A')' = A$, (ii) $(kA)' = kA'$, (iii) $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ તો $(A + B)' = A' + B'$

  (iv) $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ તથા $B = [b_{ij}]_{n \times p}$ તો $(AB)' = B'A'$
- જો $A' = A$ તો A સંમિત શ્રેણિક છે.
- જો $A' = -A$ તો A વિસંમિત શ્રેણિક છે.
- કોઈ પણ ચોરસ શ્રેણિકને એક સંમિત અને એક વિસંમિત શ્રેણિકના સરવાળા સ્વરૂપે (અનન્ય રીતે) રજૂ કરી શકાય.
- શ્રેણિક પરની પ્રાથમિક પ્રક્રિયાઓ નીચે પ્રમાણે છે :

  (i) $R_i \leftrightarrow R_j$ અથવા $C_i \leftrightarrow C_j$

  (ii) $R_i \rightarrow kR_i$ અથવા $C_i \rightarrow kC_i$

  (iii) $R_i \rightarrow R_i + kR_j$ અથવા $C_i \rightarrow C_i + kC_j$
- જો ચોરસ શ્રેણિક A અને B માટે $AB = BA = I$ હોય, તો Aનો વ્યસ્ત શ્રેણિક B છે અને તેને A^{-1} વડે દર્શાવાય છે અને B નો વ્યસ્ત A છે.
- જો ચોરસ શ્રેણિકનો વ્યસ્ત શ્રેણિક અસ્તિત્વ ધરાવે, તો તે અનન્ય છે.

◆

પ્રકરણ 4

નિશ્ચાયક

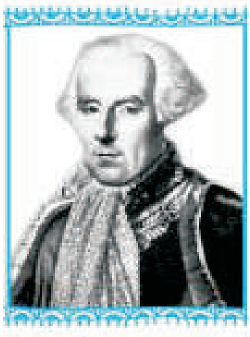
❖ *All Mathematical truths are relative and conditional. — C.P. STEINMETZ* ❖

4.1 પ્રાસ્તાવિક

અગાઉના પ્રકરણમાં આપણે શ્રેણિક અને તેના બીજગણિતનો અભ્યાસ કર્યો. હવે આપણે બૈજિક સમીકરણોની સંહતિને શ્રેણિક સ્વરૂપમાં કેવી રીતે દર્શાવી શકાય અને ઉકેલી શકાય તેનો અભ્યાસ કરીશું. આનો અર્થ કે,

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

જેવી સુરેખ સમીકરણોની સંહતિને $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$ તરીકે રજૂ કરી શકાય. હવે, આ સમીકરણ સંહતિનો ઉકેલ અનન્ય છે કે નહિ તે $a_1b_2 - a_2b_1$ ના મૂલ્યથી નક્કી કરી શકાય. (યાદ કરીએ કે, જો $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ અથવા $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, તો સુરેખ સમીકરણોની સંહતિને અનન્ય ઉકેલ મળે). સંખ્યા $a_1b_2 - a_2b_1$ એ સમીકરણના ઉકેલની અનન્યતા સ્થાપિત કરે છે અને તે શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$ સાથે સંબંધિત છે. તેને A નો નિશ્ચાયક અથવા *det* A કહે છે. ઈજનેરી શાખા, વિજ્ઞાન, અર્થશાસ્ત્ર, સામાજિક વિજ્ઞાન વગેરેમાં નિશ્ચાયકનો વિશાળ ઉપયોગ છે.


P.S. Laplace
(C.E. 1749-C.E.1827)

આ પ્રકરણમાં, આપણે માત્ર વાસ્તવિક ઘટકોવાળા ત્રણ કક્ષા સુધીના નિશ્ચાયકનો અભ્યાસ કરીશું. આપણે નિશ્ચાયકના વિવિધ ગુણધર્મોનો અભ્યાસ, ઉપનિશ્ચાયક, સહઅવયવ અને ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ શોધવા માટે નિશ્ચાયકના ઉપયોગનો અભ્યાસ, ચોરસ શ્રેણિકનો સહઅવયવજ શ્રેણિક અને વ્યસ્ત શ્રેણિક, સુરેખ સમીકરણોની સંહતિની સુસંગતતા અને અસંગતતા તથા વ્યસ્ત શ્રેણિકના ઉપયોગથી બે અથવા ત્રણ ચલવાળા સુરેખ સમીકરણના ઉકેલનો પણ અભ્યાસ કરીશું.

4.2 નિશ્ચાયક

પ્રત્યેક n કક્ષાવાળા ચોરસ શ્રેણિક $A = [a_{ij}]$ ને આપણે એક (વાસ્તવિક અથવા સંકર) સંખ્યા સાથે સાંકળી શકીએ. તે સંખ્યાને ચોરસ શ્રેણિક A નો નિશ્ચાયક કહે છે. a_{ij} એ શ્રેણિક A નો (i, j) સ્થાનમાં આવેલ

ઘટક છે. આ પરિણામને આપણે, પ્રત્યેક ચોરસ શ્રેણિકને અનન્ય (વાસ્તવિક અથવા સંકર) સંખ્યા સાથે સાંકળતા વિધેય તરીકે વિચારી શકીએ. જો M એ ચોરસ શ્રેણિકનો ગણ અને K એ (વાસ્તવિક અથવા સંકર) સંખ્યાઓનો ગણ હોય તથા એક વિધેય, $A \in M$ અને $k \in K$ માટે $f : M \rightarrow K$ ને $f(A) = k$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત કરીએ, તો $f(A)$ ને શ્રેણિક A નો નિશ્ચાયક કહેવાય. તેને $|A|$ અથવા $det\ A$ અથવા Δ વડે પણ દર્શાવાય છે.

જો $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, તો A ના નિશ્ચાયકને $|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = det\ (A)$ લખી શકાય.

નોંધ : (i) A ચોરસ શ્રેણિક હોય, તો શ્રેણિક $|A|$ ને A ના નિશ્ચાયક તરીકે વાંચીશું અને A ના માનાંક તરીકે નહિ.

(ii) માત્ર ચોરસ શ્રેણિકને જ નિશ્ચાયક હોય છે.

4.2.1 એક કક્ષાવાળા શ્રેણિકનો નિશ્ચાયક

એક કક્ષાવાળો શ્રેણિક $A = [a]$ લઈએ, તો A નો નિશ્ચાયક a છે તેમ વ્યાખ્યાયિત કરીશું.

4.2.2 બે કક્ષાવાળા શ્રેણિકનો નિશ્ચાયક

બે કક્ષાવાળો શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ લઈએ, તો A નો નિશ્ચાયક

$det\ (A) = |A| = \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ થી વ્યાખ્યાયિત કરીશું.

ઉદાહરણ 1 : $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$નું મૂલ્ય શોધો.

ઉકેલ : આપણને $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2(2) - 4(-1) = 4 + 4 = 8$ મળે.

ઉદાહરણ 2 : $\begin{vmatrix} x & x+1 \\ x-1 & x \end{vmatrix}$ની કિંમત શોધો.

ઉકેલ : આપણને $\begin{vmatrix} x & x+1 \\ x-1 & x \end{vmatrix} = x(x) - (x + 1)(x - 1) = x^2 - x^2 + 1 = 1$ મળે.

4.2.3 ત્રણ કક્ષાવાળા શ્રેણિકનો નિશ્ચાયક

બે કક્ષાવાળા નિશ્ચાયકમાં અભિવ્યક્તિ કરીને ત્રણ કક્ષાવાળા શ્રેણિકના નિશ્ચાયકનું મૂલ્ય નિશ્ચિત કરી શકાય. આ પદ્ધતિને હાર (અથવા સ્તંભ)થી નિશ્ચાયકનું વિસ્તરણ કહે છે. 3 કક્ષાવાળા નિશ્ચાયકનું વિસ્તરણ ત્રણ હારમાંથી પ્રત્યેક હાર (R_1, R_2 અને R_3) અને ત્રણ સ્તંભમાંના પ્રત્યેક સ્તંભ (C_1, C_2 અને C_3) દ્વારા એમ છ રીતે કરી શકાય. તે આગળ બતાવ્યા પ્રમાણે સમાન મૂલ્ય આપે છે :

ચોરસ શ્રેણિક $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ નો વિચાર કરીએ.

અર્થાત્ $|A| = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} & \boldsymbol{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

પ્રથમ હાર (R_1) દ્વારા વિસ્તરણ :

પગલું 1 : R_1ના પ્રથમ ઘટક a_{11} ને $(-1)^{1+1}$ $[(-1)^{a_{11}}$ માં આવતા અનુગ 1 તથા 1 નો સરવાળો$]$ સાથે અને a_{11} એ પ્રથમ હાર R_1 અને પ્રથમ સ્તંભ C_1 માં આવેલો હોવાથી $|A|$ ની પ્રથમ હાર અને પ્રથમ સ્તંભના ઘટકોને દૂર કરી બાકીના ઘટકોને તે જ સ્થિતિમાં રાખી મળતા દ્વિહાર નિશ્ચાયક સાથે ગુણો.

એટલે કે, $(-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

પગલું 2 : R_1ના બીજા ઘટક a_{12} ને $(-1)^{1+2}$ $[(-1)^{a_{12}}$ માં આવતા અનુગ 1 તથા 2 નો સરવાળો$]$ અને a_{12} એ R_1 તથા C_2 માં આવેલો હોવાથી, $|A|$ ની પ્રથમ હાર R_1 અને બીજા સ્તંભ C_2 ના ઘટકોને દૂર કરી બાકીના ઘટકોને તે જ સ્થિતિમાં રાખી મળતા દ્વિહાર નિશ્ચાયક સાથે ગુણો.

અર્થાત્ $(-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$.

પગલું 3 : R_1ના ત્રીજા ઘટક a_{13} ને $(-1)^{1+3}$ $[(-1)^{a_{13}}$ માં આવતા અનુગ 1 તથા 3 નો સરવાળો$]$ અને a_{13} એ R_1 તથા C_3 માં આવેલો હોવાથી, $|A|$ ની પ્રથમ હાર R_1 અને ત્રીજા સ્તંભ C_3 ના ઘટકોને દૂર કરી બાકીના ઘટકોને તે જ સ્થિતિમાં રાખી મળતા દ્વિહાર નિશ્ચાયક સાથે ગુણો.

અર્થાત્ $(-1)^{1+3} a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$.

પગલું 4 : હવે નિશ્ચાયક A નું વિસ્તરણ, ઉપરનાં પગલાં 1, 2 અને 3 માં મેળવેલાં ત્રણ પદોના સરવાળા તરીકે લખી શકાય અને તે

$$det\ A = |A| = (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

અથવા $|A| = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{31}a_{23} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{31}a_{22} \quad ...(1)$$

☛ **નોંધ :** આપણે ચારેય પદો સાથે પ્રયોજી શકીએ.

બીજી હાર (R_2) દ્વારા વિસ્તરણ :

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} & \boldsymbol{a_{23}} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

R_2 દ્વારા વિસ્તરણ કરતાં, આપણને

$$|A| = (-1)^{2+1} a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \text{ મળે.}$$

$$= -a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}) + a_{22}(a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13}) - a_{23}(a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12})$$

$$|A| = -a_{21}a_{12}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{22}a_{11}a_{33} - a_{22}a_{31}a_{13} - a_{23}a_{11}a_{32} + a_{23}a_{31}a_{12}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{31}a_{22} \quad ...(2)$$

પ્રથમ સ્તંભ (C_1) દ્વારા વિસ્તરણ :

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

C_1 દ્વારા વિસ્તરણ કરતાં, આપણને

$$|A| = a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{21}(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \text{ મળે.}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})$$

$$\therefore \quad |A| = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{21}a_{12}a_{33} + a_{21}a_{13}a_{32} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{13}a_{22}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{31}a_{22} \qquad ...(3)$$

સ્પષ્ટ છે કે, (1), (2) અને (3) માં મળતાં $|A|$ નાં મૂલ્ય સમાન છે. $|A|$ નું R_3, C_2 અને C_3 દ્વારા વિસ્તરણ કરી, મૂલ્ય મેળવીને તેનું મૂલ્ય (1), (2) અને (3)માં મેળવેલા $|A|$ ના મૂલ્યને સમાન છે તેમ સ્વાધ્યાય સ્વરૂપે ચકાસવાનું વાચક પર છોડવામાં આવે છે.

આથી, કોઈ પણ હાર અથવા સ્તંભ દ્વારા નિશ્ચાયકનું વિસ્તરણ સમાન મૂલ્ય આપે છે.

નોંધ :

(1) ગણતરી સરળ કરવા, આપણે નિશ્ચાયકની જે હાર અથવા સ્તંભ વધારે સંખ્યામાં શૂન્ય ધરાવે, તેના દ્વારા નિશ્ચાયકનું વિસ્તરણ કરીશું.

(2) વિસ્તરણ કરતી વખતે, $(-1)^{i+j}$થી ગુણવાને બદલે, આપણે $(i + j)$ યુગ્મ છે કે અયુગ્મ તે પ્રમાણે અનુક્રમે +1 કે –1 વડે આપણે ગુણીશું.

(3) $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ અને $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ લઈએ, તો એ ચકાસવું સરળ છે કે $A = 2B$. વળી $|A| = 0 - 8 = -8$ અને $|B| = 0 - 2 = -2$. નિરીક્ષણ કરો કે, $|A| = 4(-2) = 2^2|B|$ અથવા $|A| = 2^n|B|$, જ્યાં n એ ચોરસ શ્રેણિક A અને B ની કક્ષા છે.

વ્યાપક રીતે, n કક્ષાવાળા ચોરસ શ્રેણિક A અને B માટે, જો $A = kB$, તો $n = 1, 2, 3$ માટે $|A| = k^n|B|$.

ઉદાહરણ 3 : નિશ્ચાયક $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ નું મૂલ્ય મેળવો.

ઉકેલ : નોંધીશું કે, ત્રીજા સ્તંભના બે ઘટકો શૂન્ય છે. આથી ત્રીજા સ્તંભ (C_3) દ્વારા વિસ્તરણ કરતાં,

$$\Delta = 4\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 4(-1 - 12) - 0 + 0 = -52$$

ઉદાહરણ 4 : $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & \sin\alpha & -\cos\alpha \\ -\sin\alpha & 0 & \sin\beta \\ \cos\alpha & -\sin\beta & 0 \end{vmatrix}$ નું મૂલ્ય શોધો.

ઉકેલ : R_1 દ્વારા વિસ્તરણ કરતાં, આપણને,

$$\Delta = 0\begin{vmatrix} 0 & \sin\beta \\ -\sin\beta & 0 \end{vmatrix} - \sin\alpha\begin{vmatrix} -\sin\alpha & \sin\beta \\ \cos\alpha & 0 \end{vmatrix} - \cos\alpha\begin{vmatrix} -\sin\alpha & 0 \\ \cos\alpha & -\sin\beta \end{vmatrix} \text{ મળે.}$$

$$= 0 - \sin\alpha\,(0 - \sin\beta\cos\alpha) - \cos\alpha\,(\sin\alpha\sin\beta - 0)$$

$$= \sin\alpha\sin\beta\cos\alpha - \cos\alpha\sin\alpha\sin\beta = 0$$

ઉદાહરણ 5 : જો $\begin{vmatrix} 3 & x \\ x & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$ હોય, તો x નું મૂલ્ય શોધો.

ઉકેલ : આપણી પાસે, $\begin{vmatrix} 3 & x \\ x & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$ છે.

અર્થાત્ $3 - x^2 = 3 - 8$

અર્થાત્ $x^2 = 8$

આથી, $x = \pm 2\sqrt{2}$

સ્વાધ્યાય 4.1

પ્રશ્ન 1 અને 2 માં આપેલા નિશ્ચાયકનું મૂલ્ય શોધો.

1. $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -5 & -1 \end{vmatrix}$

2. (i) $\begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}$ (ii) $\begin{vmatrix} x^2 - x + 1 & x - 1 \\ x + 1 & x + 1 \end{vmatrix}$

3. જો $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ હોય, તો સાબિત કરો કે $|2A| = 4|A|$.

4. જો $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ હોય, તો સાબિત કરો કે $|3A| = 27|A|$.

5. નીચે આપેલા નિશ્ચાયકનાં મૂલ્યો શોધો :

(i) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 3 & -5 & 0 \end{vmatrix}$ (ii) $\begin{vmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

(iii) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$ (iv) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & -5 & 0 \end{vmatrix}$

6. જો $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 5 & 4 & -9 \end{bmatrix}$ હોય, તો $|A|$ શોધો.

7. x નું મૂલ્ય શોધો :

(i) $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & 4 \\ 6 & x \end{vmatrix}$ (ii) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 3 \\ 2x & 5 \end{vmatrix}$

પ્રશ્ન 8 માં વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલ વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો :

8. જો $\begin{vmatrix} x & 2 \\ 18 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 18 & 6 \end{vmatrix}$ હોય, તો x = ...

(A) 6 (B) ± 6 (C) –6 (D) 0

4.3 નિશ્ચાયકના ગુણધર્મો

આગળના વિભાગમાં, આપણે નિશ્ચાયકનું વિસ્તરણ કેવી રીતે કરવું તે શીખ્યાં. આ વિભાગમાં, આપણે જેમના ઉપયોગથી હાર અથવા સ્તંભમાં વધુમાં વધુ શૂન્ય ઘટકો તરીકે મળે તેવા નિશ્ચાયકના કેટલાક ગુણધર્મોનો અભ્યાસ કરીશું. તેથી નિશ્ચાયકનું મૂલ્ય મેળવવું સરળ બનશે. કોઈ પણ કક્ષાના નિશ્ચાયક માટે આ ગુણધર્મો સત્ય છે. તેમ છતાં, આપણે આ ચર્ચા 3 કક્ષાવાળા નિશ્ચાયક પૂરતી મર્યાદિત રાખીશું.

ગુણધર્મ 1 : નિશ્ચાયકની બધી જ હાર અને બધા સ્તંભની અદલબદલ કરતાં નિશ્ચાયકનું મૂલ્ય બદલાતું નથી.

ચકાસણી : ધારો કે $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

પ્રથમ હાર દ્વારા વિસ્તરણ કરતાં,

$$\Delta = a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$= a_1\,(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2\,(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3\,(b_1c_2 - b_2c_1)$$

Δ ની હાર અને સ્તંભની અદલબદલ કરતાં, આપણને નિશ્ચાયક

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \text{ મળે.}$$

પ્રથમ સ્તંભ દ્વારા Δ_1નું વિસ્તરણ કરતાં, આપણને

$$\Delta_1 = a_1\,(b_2c_3 - c_2b_3) - a_2\,(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3\,(b_1c_2 - b_2c_1) \text{ મળે.}$$

આથી, $\Delta = \Delta_1$

જો A ચોરસ શ્રેણિક હોય અને A' એ Aનો પરિવર્ત શ્રેણિક હોય, તો *det* (A') = det A. ઉપરના ગુણધર્મની નીપજ છે.

☛ નોંધ : જો R_i = i મી હાર અને C_i = i મો સ્તંભ હોય, તો આપણે હાર અને સ્તંભની અદલબદલને સંકેતમાં $R_i \leftrightarrow C_i$ દ્વારા દર્શાવીશું.

ચાલો, ઉપરના ગુણધર્મને આપણે એક ઉદાહરણ દ્વારા ચકાસીએ.

ઉદાહરણ 6 : $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 6 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & -7 \end{vmatrix}$ માટે ગુણધર્મ 1 ચકાસો.

ઉકેલ : પ્રથમ હાર દ્વારા નિશ્ચાયકનું વિસ્તરણ કરતાં, આપણને

$$\Delta = 2\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 5 & -7 \end{vmatrix} - (-3)\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 1 & -7 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \text{ મળે.}$$

$$= 2(0 - 20) + 3(-42 - 4) + 5(30 - 0)$$

$$= -40 - 138 + 150 = -28$$

હાર અને સ્તંભની અદલબદલ કરતાં, આપણને

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 \\ -3 & 0 & 5 \\ 5 & 4 & -7 \end{vmatrix} \text{ મળે.}$$

$$= 2\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 4 & -7 \end{vmatrix} - (-3)\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 4 & -7 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}$$ (પ્રથમ સ્તંભ દ્વારા વિસ્તરણ)

$$= 2(0 - 20) + 3(-42 - 4) + 5(30 - 0)$$

$$= -40 - 138 + 150 = -28$$

સ્પષ્ટ છે કે, $\Delta = \Delta_1$

આથી, ગુણધર્મ 1 ની ચકાસણી થઈ.

ગુણધર્મ 2 : જો નિશ્ચાયકની કોઈ પણ બે હાર (અથવા સ્તંભ) ની અદલબદલ કરવામાં આવે, તો નિશ્ચાયકનું મૂલ્ય ચિહ્નમાં બદલાય છે.

ચકાસણી : ધારો કે $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

પ્રથમ હાર દ્વારા વિસ્તરણ કરતાં,

$$\Delta = a_1 (b_2c_3 - b_3c_2) - a_2 (b_1c_3 - b_3c_1) + a_3 (b_1c_2 - b_2c_1)$$

પ્રથમ અને તૃતીય હારની અદલબદલ કરતાં મળતો નવો નિશ્ચાયક

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}$$

ત્રીજી હાર દ્વારા વિસ્તરણ કરતાં,

$$\Delta_1 = a_1 (c_2b_3 - b_2c_3) - a_2 (c_1b_3 - c_3b_1) + a_3 (b_2c_1 - b_1c_2)$$

$$= -[a_1 (b_2c_3 - b_3c_2) - a_2 (b_1c_3 - b_3c_1) + a_3 (b_1c_2 - b_2c_1)]$$

સ્પષ્ટ છે કે, $\Delta_1 = -\Delta$

એ જ પ્રકારે, કોઈ પણ બે સ્તંભની અદલબદલ કરીને આપણે પરિણામની ચકાસણી કરી શકીએ.

> **☛ નોંધ :** હારની અદલબદલને આપણે $R_i \leftrightarrow R_j$ દ્વારા અને સ્તંભની અદલબદલને $C_i \leftrightarrow C_j$ દ્વારા દર્શાવીએ છીએ.

ઉદાહરણ 7 : $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 6 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & -7 \end{vmatrix}$ માટે ગુણધર્મ 2 ની ચકાસણી કરો.

ઉકેલ : $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 6 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & -7 \end{vmatrix} = -28$ (જુઓ ઉદાહરણ 6.)

હાર R_2 અને R_3 ની અદલબદલ કરતાં, અર્થાત્ $R_2 \leftrightarrow R_3$ કરતાં, આપણને

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 5 & -7 \\ 6 & 0 & 4 \end{vmatrix} \text{ મળે.}$$

નિશ્ચાયક Δ_1 નું પ્રથમ હાર દ્વારા વિસ્તરણ કરતાં, આપણને

$$\Delta_1 = 2\begin{vmatrix} 5 & -7 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} - (-3)\begin{vmatrix} 1 & -7 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 2(20 - 0) + 3(4 + 42) + 5(0 - 30)$$

$$= 40 + 138 - 150 = 28 \text{ મળે.}$$

સ્પષ્ટ છે કે $\Delta_1 = -\Delta$

આથી, ગુણધર્મ 2 ની ચકાસણી થઈ.

ગુણધર્મ 3 : જો નિશ્ચાયકની બે હાર (અથવા બે સ્તંભ) સમાન (બધા અનુરૂપ ઘટકો સમાન) હોય, તો નિશ્ચાયકનું મૂલ્ય શૂન્ય છે.

સાબિતી : જો આપણે નિશ્ચાયક Δ ની સમાન હાર (અથવા સ્તંભ)ની અદલબદલ કરીએ તો નિશ્ચાયક બદલાશે નહિ, તેમ છતાં, ગુણધર્મ 2 અનુસાર Δ નું ચિહ્ન બદલાશે.

આથી, $\Delta = -\Delta$

અથવા $\Delta = 0$

ચાલો, આપણે ઉપરનો ગુણધર્મ ઉદાહરણ દ્વારા ચકાસીએ.

ઉદાહરણ 8 : $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ નું મૂલ્ય શોધો. ($R_1 = R_3$ છે.)

ઉકેલ : પ્રથમ હાર દ્વારા વિસ્તરણ કરતાં, આપણને

$$\Delta = 3(6 - 6) - 2(6 - 9) + 3(4 - 6)$$

$$= 0 - 2(-3) + 3(-2) = 6 - 6 = 0$$

અહીં R_1 અને R_3 સમાન છે.

ગુણધર્મ 4 : જો નિશ્ચાયકની કોઈ એક હાર (અથવા સ્તંભ)ના પ્રત્યેક ઘટકને અચળ k વડે ગુણવામાં આવે, તો તેનું મૂલ્ય k વડે ગુણાશે.

ચકાસણી : $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ લો.

અને Δ ની પ્રથમ હારના ઘટકોને k વડે ગુણવાથી નિશ્ચાયક Δ_1 મળે છે.

આથી, $\Delta_1 = \begin{vmatrix} ka_1 & kb_1 & kc_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

પ્રથમ હાર દ્વારા વિસ્તરણ કરતાં,

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= ka_1\,(b_2c_3 - b_3c_2) - kb_1\,(a_2c_3 - c_2a_3) + kc_1\,(a_2b_3 - b_2a_3)\\ &= k\,[a_1\,(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1\,(a_2c_3 - c_2a_3) + c_1\,(a_2b_3 - b_2a_3)]\\ &= k\Delta\end{aligned}$$

આથી $\begin{vmatrix} ka_1 & kb_1 & kc_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

☛ નોંધ :

(1) આ ગુણધર્મને આધારે, આપણે આપેલા નિશ્ચાયકની કોઈ પણ એક હાર અથવા કોઈ પણ એક સ્તંભમાંથી શૂન્યેતર સામાન્ય અવયવને બહાર લઈ જઈ શકીશું.

(2) જો નિશ્ચાયકની કોઈ પણ બે હાર (અથવા સ્તંભ)ના અનુરૂપ ઘટકો સમપ્રમાણ (સમાન ગુણોત્તર)માં હોય, તો તેનું મૂલ્ય શૂન્ય થાય છે. ઉદાહરણ તરીકે

$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ ka_1 & ka_2 & ka_3 \end{vmatrix} = 0$ (હાર R_1 અને R_2 સમપ્રમાણમાં છે.)

ઉદાહરણ 9 : $\begin{vmatrix} 102 & 18 & 36 \\ 1 & 3 & 4 \\ 17 & 3 & 6 \end{vmatrix}$ નું મૂલ્ય શોધો.

ઉકેલ : $\begin{vmatrix} 102 & 18 & 36 \\ 1 & 3 & 4 \\ 17 & 3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6(17) & 6(3) & 6(6) \\ 1 & 3 & 4 \\ 17 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 17 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & 4 \\ 17 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 0$

(ગુણધર્મો 3 અને 4 નો ઉપયોગ કરતાં)

ગુણધર્મ 5 : જો નિશ્ચાયકની કોઈ હાર (અથવા સ્તંભ)ના કેટલાક અથવા બધા જ ઘટકોને બે (અથવા વધારે) પદોના સરવાળા તરીકે દર્શાવી શકાય, તો નિશ્ચાયકને બે (અથવા વધારે) નિશ્ચાયકના સરવાળા તરીકે દર્શાવી શકાય.

ઉદાહરણ તરીકે, $\begin{vmatrix} a_1+\lambda_1 & a_2+\lambda_2 & a_3+\lambda_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

ચકાસણી : ડા.બા. $= \begin{vmatrix} a_1+\lambda_1 & a_2+\lambda_2 & a_3+\lambda_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

પ્રથમ હાર દ્વારા નિશ્ચાયકનું વિસ્તરણ કરતાં, આપણને

$$\begin{aligned}\Delta &= (a_1 + \lambda_1)(b_2c_3 - b_3c_2) - (a_2 + \lambda_2)(b_1c_3 - b_3c_1) + (a_3 + \lambda_3)(b_1c_2 - b_2c_1)\\ &= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2\,(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3\,(b_1c_2 - b_2c_1)\\ &\qquad + \lambda_1(b_2c_3 - b_3c_2) - \lambda_2\,(b_1c_3 - b_3c_1) + \lambda_3\,(b_1c_2 - b_2c_1)\end{aligned}$$

(પદોનું પુનર્ગઠન કરતાં)

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \text{જ.બા. મળે.}$$

એ જ પ્રકારે, આપણે ગુણધર્મ 5 ને બીજી કોઈ પણ હાર અથવા સ્તંભ માટે ચકાસી શકીએ.

ઉદાહરણ 10 : સાબિત કરો કે $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a+2x & b+2y & c+2z \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0$

ઉકેલ : $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a+2x & b+2y & c+2z \\ x & y & z \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2x & 2y & 2z \\ x & y & z \end{vmatrix}$$ (ગુણધર્મ 5 દ્વારા)

$= 0 + 0 = 0$ મળે. (ગુણધર્મ 3 અને 4 નો ઉપયોગ કરતાં)

ગુણધર્મ 6 : જો નિશ્ચાયકની કોઈ પણ હાર અથવા સ્તંભના પ્રત્યેક ઘટકમાં અન્ય હાર (અથવા સ્તંભ)ના અનુરૂપ ઘટકોના સમાન ગુણિત ઉમેરવામાં આવે, તો નિશ્ચાયકનું મૂલ્ય સમાન રહે છે. એટલે કે, જો આપણે $R_i \to R_i + kR_j$ અથવા $C_i \to C_i + kC_j$ પ્રક્રિયાનું પ્રયોજન કરીએ, તો નિશ્ચાયકનું મૂલ્ય એનું એ જ રહે છે. $(i \neq j)$

ચકાસણી : ધારો કે $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$ અને $\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_1+kc_1 & a_2+kc_2 & a_3+kc_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

Δ પર $R_1 \to R_1 + kR_3$ પ્રક્રિયા કરવાથી Δ_1 મળે છે.

અહીં, આપણે ત્રીજી હાર R_3 ના ઘટકોને અચળ k વડે ગુણીને પ્રથમ હાર R_1 ના અનુરૂપ ઘટકોમાં ઉમેર્યા છે.

સાંકેતિક રીતે, આપણે આ પ્રક્રિયાને $R_1 \to R_1 + kR_3$ પ્રમાણે લખીશું.

હવે,

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} kc_1 & kc_2 & kc_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$ (5 મા ગુણધર્મનો ઉપયોગ કરતાં)

$= \Delta + 0$ (R_1 અને R_3 સમપ્રમાણમાં હોવાથી)

આથી, $\Delta = \Delta_1$

☛ **નોંધ :**

(1) જો Δ પર $R_i \to kR_i$ અથવા $C_i \to kC_i$ ના પ્રયોજનથી Δ_1 મેળવીએ, તો $\Delta_1 = k\Delta$ થાય.

(2) જો $R_i \to R_i + kR_j$ જેવી એકથી વધારે પ્રક્રિયા એક જ પગલામાં કરીએ, તો એક પ્રક્રિયાથી જે હારને અસર થઈ હોય તેનો ઉપયોગ બીજી પ્રક્રિયામાં થાય નહિ તેની કાળજી લેવી જોઈએ. આ જ પ્રકારની નોંધ સ્તંભ-પ્રક્રિયા માટે સમજવી.

ઉદાહરણ 11 : સાબિત કરો કે $\begin{vmatrix} a & a+b & a+b+c \\ 2a & 3a+2b & 4a+3b+2c \\ 3a & 6a+3b & 10a+6b+3c \end{vmatrix} = a^3$

ઉકેલ : આપેલા નિશ્ચાયક Δ પર, $R_2 \to R_2 - 2R_1$ અને $R_3 \to R_3 - 3R_1$ પ્રક્રિયાઓ કરતાં, આપણને

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & a+b & a+b+c \\ 0 & a & 2a+b \\ 0 & 3a & 7a+3b \end{vmatrix} \text{ મળે.}$$

હવે, $R_3 \to R_3 - 3R_2$ કરતાં, આપણને

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & a+b & a+b+c \\ 0 & a & 2a+b \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} \text{ મળે.}$$

C_1 દ્વારા વિસ્તરણ કરતાં,

$$\Delta = a\begin{vmatrix} a & 2a+b \\ 0 & a \end{vmatrix} + 0 + 0$$

$$= a\,(a^2 - 0) = a(a^2) = a^3$$

ઉદાહરણ 12 : વિસ્તરણ કર્યા સિવાય સાબિત કરો :

$$\Delta = \begin{vmatrix} x+y & y+z & z+x \\ z & x & y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ઉકેલ : Δ પર, $R_1 \to R_1 + R_2$ કરતાં,

$$\Delta = \begin{vmatrix} x+y+z & x+y+z & x+y+z \\ z & x & y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

R_1 અને R_3 સમપ્રમાણમાં હોવાથી, $\Delta = 0$.

ઉદાહરણ 13 : $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix}$નું મૂલ્ય શોધો.

ઉકેલ : $R_2 \to R_2 - R_1$ અને $R_3 \to R_3 - R_1$ કરતાં,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 0 & b-a & c(a-b) \\ 0 & c-a & b(a-c) \end{vmatrix}$$

R_2 અને R_3માંથી અનુક્રમે $(b - a)$ અને $(c - a)$ અવયવો સામાન્ય લેતાં,

$$\Delta = (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 0 & 1 & -c \\ 0 & 1 & -b \end{vmatrix}$$

$$\therefore \quad \Delta = (b-a)(c-a)\,[(-b+c)] \qquad \text{(પ્રથમ સ્તંભ દ્વારા વિસ્તરણ કરતાં)}$$

$$= (a-b)(b-c)(c-a)$$

ઉદાહરણ 14 : સાબિત કરો કે $\begin{vmatrix} b+c & a & a \\ b & c+a & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix} = 4abc$

ઉકેલ : $\Delta = \begin{vmatrix} b+c & a & a \\ b & c+a & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix}$ લેતાં,

Δ પર $R_1 \to R_1 - R_2 - R_3$ પ્રયોજતાં, આપણને

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -2c & -2b \\ b & c+a & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix} \text{ મળે.}$$

R_1 દ્વારા વિસ્તરણ કરતાં,

$$\Delta = 0\begin{vmatrix} c+a & b \\ c & a+b \end{vmatrix} - (-2c)\begin{vmatrix} b & b \\ c & a+b \end{vmatrix} + (-2b)\begin{vmatrix} b & c+a \\ c & c \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}\therefore \quad \Delta &= 2c\,(ab + b^2 - bc) - 2b\,(bc - c^2 - ac) \\ &= 2abc + 2cb^2 - 2bc^2 - 2b^2c + 2bc^2 + 2abc \\ &= 4abc\end{aligned}$$

ઉદાહરણ 15 : જો x, y, z ભિન્ન હોય અને $\Delta = \begin{vmatrix} x & x^2 & 1+x^3 \\ y & y^2 & 1+y^3 \\ z & z^2 & 1+z^3 \end{vmatrix} = 0$ હોય, તો સાબિત કરો કે $1 + xyz = 0$.

ઉકેલ : અહીં,

$$\Delta = \begin{vmatrix} x & x^2 & 1+x^3 \\ y & y^2 & 1+y^3 \\ z & z^2 & 1+z^3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x & x^2 & 1 \\ y & y^2 & 1 \\ z & z^2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ y & y^2 & y^3 \\ z & z^2 & z^3 \end{vmatrix}$$

(5 મા ગુણધર્મનો ઉપયોગ કરતાં)

$$= (-1)^2\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} + xyz\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}$$

(પ્રથમ નિશ્ચાયકમાં $C_3 \to C_2$ અને પછી $C_1 \to C_2$ નો ઉપયોગ કરતાં અને બીજા નિશ્ચાયકમાંથી xyz સામાન્ય લેતાં.)

$$= \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}(1 + xyz)$$

$$= (1 + xyz)\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & y-x & y^2-x^2 \\ 0 & z-x & z^2-x^2 \end{vmatrix}$$

($R_2 \to R_2 - R_1$ અને $R_3 \to R_3 - R_1$નો ઉપયોગ કરતાં)

R_2 માંથી $(y - x)$ અને R_3 માંથી $(z - x)$ સામાન્ય અવયવ બહાર કાઢતાં, આપણને

$$\Delta = (1 + xyz)(y - x)(z - x)\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & y+x \\ 0 & 1 & z+x \end{vmatrix} \text{ મળે.}$$

$$= (1 + xyz)(y - x)(z - x)(z - y) \qquad (C_1 \text{ દ્વારા વિસ્તરણ કરતાં})$$

$\Delta = 0$ અને x, y, z ભિન્ન હોવાથી, અર્થાત્ $x - y \neq 0$, $y - z \neq 0$, $z - x \neq 0$ હોવાથી, આપણને $1 + xyz = 0$ મળે.

ઉદાહરણ 16 : સાબિત કરો કે $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} = abc\left(1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = abc + bc + ca + ab$

ઉકેલ : અનુક્રમે R_1, R_2 અને R_3 માંથી અવયવો a, b, c સામાન્ય લેતાં,

$$\text{ડા.બા.} = abc\begin{vmatrix} \frac{1}{a}+1 & \frac{1}{a} & \frac{1}{a} \\ \frac{1}{b} & \frac{1}{b}+1 & \frac{1}{b} \\ \frac{1}{c} & \frac{1}{c} & \frac{1}{c}+1 \end{vmatrix}$$

$R_1 \to R_1 + R_2 + R_3$ કરતાં,

$$\Delta = abc\begin{vmatrix} 1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} & 1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} & 1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \\ \frac{1}{b} & \frac{1}{b}+1 & \frac{1}{b} \\ \frac{1}{c} & \frac{1}{c} & \frac{1}{c}+1 \end{vmatrix}$$

$$\therefore \Delta = abc\left(1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{b} & \frac{1}{b}+1 & \frac{1}{b} \\ \frac{1}{c} & \frac{1}{c} & \frac{1}{c}+1 \end{vmatrix}$$

હવે $C_2 \to C_2 - C_1$, $C_3 \to C_3 - C_1$ કરતાં,

$$\Delta = abc\left(1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{b} & 1 & 0 \\ \frac{1}{c} & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\therefore \Delta = abc\left(1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)[1(1 - 0)]$$

$$= abc\left(1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = abc + bc + ca + ab = \text{જ.બા.}$$

☛ **નોંધ :** વૈકલ્પિક રીતે, $C_1 \to C_1 - C_2$ અને $C_3 \to C_3 - C_2$ કરી, પછી $C_1 \to C_1 - aC_3$ કરો.

સ્વાધ્યાય 4.2

પ્રશ્ન 1 થી 5 માં નિશ્ચાયકના ગુણધર્મનો ઉપયોગ કરી અને વિસ્તરણ કર્યા સિવાય સાબિત કરો :

1. $\begin{vmatrix} x & a & x+a \\ y & b & y+b \\ z & c & z+c \end{vmatrix} = 0$

2. $\begin{vmatrix} a-b & b-c & c-a \\ b-c & c-a & a-b \\ c-a & a-b & b-c \end{vmatrix} = 0$

3. $\begin{vmatrix} 2 & 7 & 65 \\ 3 & 8 & 75 \\ 5 & 9 & 86 \end{vmatrix} = 0$

4. $\begin{vmatrix} 1 & bc & a(b+c) \\ 1 & ca & b(c+a) \\ 1 & ab & c(a+b) \end{vmatrix} = 0$

5. $\begin{vmatrix} b+c & q+r & y+z \\ c+a & r+p & z+x \\ a+b & p+q & x+y \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & p & x \\ b & q & y \\ c & r & z \end{vmatrix}$

પ્રશ્ન 6 થી 14 માં નિશ્ચાયકના ગુણધર્મનો ઉપયોગ કરીને સાબિત કરો :

6. $\begin{vmatrix} 0 & a & -b \\ -a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{vmatrix} = 0$

7. $\begin{vmatrix} -a^2 & ab & ac \\ ba & -b^2 & bc \\ ca & cb & -c^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2$

8. (i) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$

(ii) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$

9. $\begin{vmatrix} x & x^2 & yz \\ y & y^2 & zx \\ z & z^2 & xy \end{vmatrix} = (x-y)(y-z)(z-x)(xy+yz+zx)$

10. (i) $\begin{vmatrix} x+4 & 2x & 2x \\ 2x & x+4 & 2x \\ 2x & 2x & x+4 \end{vmatrix} = (5x+4)(4-x)^2$

(ii) $\begin{vmatrix} y+k & y & y \\ y & y+k & y \\ y & y & y+k \end{vmatrix} = k^2(3y+k)$

11. (i) $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a + b + c)^3$

(ii) $\begin{vmatrix} x+y+2z & x & y \\ z & y+z+2x & y \\ z & x & z+x+2y \end{vmatrix} = 2(x + y + z)^3$

12. $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ x^2 & 1 & x \\ x & x^2 & 1 \end{vmatrix} = (1 - x^3)^2$

13. $\begin{vmatrix} 1+a^2-b^2 & 2ab & -2b \\ 2ab & 1-a^2+b^2 & 2a \\ 2b & -2a & 1-a^2-b^2 \end{vmatrix} = (1 + a^2 + b^2)^3$

14. $\begin{vmatrix} a^2+1 & ab & ac \\ ab & b^2+1 & bc \\ ca & cb & c^2+1 \end{vmatrix} = 1 + a^2 + b^2 + c^2$

પ્રશ્નો 15 તથા 16 માં વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલ વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો :

15. A એ 3 × 3 કક્ષાનો ચોરસ શ્રેણિક હોય, તો $|kA|$ = ...

(A) $k|A|$ (B) $k^2|A|$ (C) $k^3|A|$ (D) $3k|A|$

16. નીચે આપેલામાંથી કયું વિધાન સત્ય છે ?

(A) નિશ્ચાયક એ ચોરસ શ્રેણિક છે.

(B) નિશ્ચાયક એ શ્રેણિક સાથે સંકળાયેલ એક સંખ્યા છે.

(C) નિશ્ચાયક એ ચોરસ શ્રેણિક સાથે સંકળાયેલ એક સંખ્યા છે.

(D) આમાંથી કોઈ નહિ.

4.4 ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ

આપણે આગળનાં ધોરણોમાં શીખી ગયાં છીએ કે, જેનાં શિરોબિંદુઓ (x_1, y_1), (x_2, y_2) અને (x_3, y_3) હોય તેવા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ અભિવ્યક્તિ $\frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$ ના નિરપેક્ષ મૂલ્ય દ્વારા મળે છે. હવે આ અભિવ્યક્તિને નિશ્ચાયક સ્વરૂપમાં

$\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$ પ્રમાણે લખી શકાય. ...(1)

નોંધ : (1) ક્ષેત્રફળ ધન સંખ્યા હોવાથી, આપણે હંમેશા (1)ના નિશ્ચાયકનું નિરપેક્ષ મૂલ્ય લઈશું.

(2) જો ક્ષેત્રફળ આપ્યું હોય, તો ગણતરી કરવા માટે નિશ્ચાયકના ધન અને ઋણ બંને મૂલ્યનો ઉપયોગ કરો.

(3) જો ક્ષેત્રફળની અભિવ્યક્તિ ધરાવતા નિશ્ચાયકનું મૂલ્ય શૂન્ય હોય, તો (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) સમરેખ હોય.

ઉદાહરણ 17 : (3, 8), (–4, 2) અને (5, 1) શિરોબિંદુવાળા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

ઉકેલ : ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ

$$\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 3 & 8 & 1 \\ -4 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}[3(2-1) - 8(-4-5) + 1(-4-10)]$$

$$= \frac{1}{2}(3 + 72 - 14) = \frac{61}{2} \text{ મળે.}$$

ઉદાહરણ 18 : નિશ્ચાયકનો ઉપયોગ કરી A(1, 3) અને B(0, 0) ને જોડતી રેખાનું સમીકરણ શોધો અને જો ત્રિકોણ ABD નું ક્ષેત્રફળ 3 ચોરસ એકમ થાય તેવું બિંદુ D(k, 0) હોય, તો k શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે P(x, y) એ AB પરનું કોઈ પણ બિંદુ છે. ત્રિકોણ ABPનું ક્ષેત્રફળ શૂન્ય થશે. (શા માટે ?)

$$\text{આથી, } \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2}(y - 3x) = 0 \text{ અથવા } y = 3x$$

આ માંગેલ રેખા AB નું સમીકરણ છે.

વળી, ત્રિકોણ ABD નું ક્ષેત્રફળ 3 ચોરસ એકમ હોવાથી, આપણને

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ k & 0 & 1 \end{vmatrix} = \pm 3 \text{ મળે.}$$

$$\therefore \quad \frac{3k}{2} = \pm 3 \text{ અર્થાત્ } k = \pm 2$$

સ્વાધ્યાય 4.3

1. નીચે આપેલાં શિરોબિંદુવાળા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ શોધો :

(i) (1, 0), (6, 0), (4, 3)   (ii) (2, 7), (1, 1), (10, 8)

(iii) (–2, –3), (3, 2), (–1, –8)

2. સાબિત કરો કે બિંદુઓ

A(a, $b + c$), B(b, $c + a$), C(c, $a + b$) સમરેખ છે

3. જો (i) (k, 0), (4, 0), (0, 2)   (ii) (–2, 0), (0, 4), (0, k)

શિરોબિંદુવાળા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ 4 ચોરસ એકમ હોય, તો k નું મૂલ્ય શોધો.

4. (i) નિશ્ચાયકનો ઉપયોગ કરી (1, 2) અને (3, 6) ને જોડતી રેખાનું સમીકરણ શોધો.

(ii) નિશ્ચાયકનો ઉપયોગ કરી (3, 1) અને (9, 3) ને જોડતી રેખાનું સમીકરણ શોધો.

પ્રશ્ન 5 માં વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલ વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો :

5. જો (2, –6), (5, 4) અને (k, 4) શિરોબિંદુવાળા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ 35 ચોરસ એકમ હોય, તો k નું મૂલ્ય ....

(A) 12 (B) –2 (C) –12, –2 (D) 12, –2

4.5 ઉપનિશ્ચાયક અને સહઅવયવ

આ વિભાગમાં આપણે ઉપનિશ્ચાયક અને સહઅવયવનો ઉપયોગ કરી નિશ્ચાયકનું વિસ્તરણ સંક્ષિપ્ત સ્વરૂપમાં લખવાનું શીખીશું.

વ્યાખ્યા 1 : *નિશ્ચાયકનો ઘટક a_{ij} એ i મી હાર અને j મા સ્તંભમાં આવેલો છે. આ હાર અને સ્તંભને દૂર કરી બાકીના ઘટકોને તે જ સ્થિતિમાં રાખી મળતા નિશ્ચાયકને ઘટક a_{ij} નો ઉપનિશ્ચાયક કહે છે. ઘટક a_{ij} ના ઉપનિશ્ચાયકને M_{ij} વડે દર્શાવાય છે.*

નોંધ : $n\,(n \geq 2)$ કક્ષાવાળા નિશ્ચાયકના કોઈ પણ ઘટકનો ઉપનિશ્ચાયક એ $n - 1$ કક્ષાવાળો નિશ્ચાયક છે.

ઉદાહરણ 19 : નિશ્ચાયક $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ ના ઘટક 6 નો ઉપનિશ્ચાયક શોધો.

ઉકેલ : ઘટક 6 એ બીજી હાર અને ત્રીજા સ્તંભમાં આવેલો હોવાથી, તેનો ઉપનિશ્ચાયક

$M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 8 - 14 = -6$ મળે. (Δ ની R_2 અને C_3 ને દૂર કરતાં તે મળ્યો.)

વ્યાખ્યા 2 : *a_{ij} ના ઉપનિશ્ચાયક M_{ij} ને $(-1)^{i+j}$ વડે ગુણીને a_{ij} નો સહઅવયવ મેળવવામાં આવે છે અને તેને સંકેત A_{ij} વડે દર્શાવવામાં આવે છે. આમ, $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.*

ઉદાહરણ 20 : નિશ્ચાયક $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$ ના બધા જ ઘટકના ઉપનિશ્ચાયક અને સહઅવયવ શોધો.

ઉકેલ : ઘટક a_{ij} નો ઉપનિશ્ચાયક M_{ij} છે.

અહીં $a_{11} = 1$. આથી, $M_{11} = a_{11}$ નો ઉપનિશ્ચાયક $= 3$

M_{12} = ઘટક a_{12} નો ઉપનિશ્ચાયક $= 4$

M_{21} = ઘટક a_{21} નો ઉપનિશ્ચાયક $= -2$

M_{22} = ઘટક a_{22} નો ઉપનિશ્ચાયક $= 1$

હવે, a_{ij} નો સહઅવયવ A_{ij} છે, આથી

$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = (-1)^2 (3) = 3$

$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = (-1)^3 (4) = -4$

$A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = (-1)^3 (-2) = 2$

$A_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = (-1)^4 (1) = 1$

ઉદાહરણ 21 : આપેલ નિશ્ચાયકના ઘટકો a_{11}, a_{21} ના ઉપનિશ્ચાયક અને સહઅવયવ શોધો.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

ઉકેલ : ઉપનિશ્ચાયક અને સહઅવયવની વ્યાખ્યા પરથી, આપણને

a_{11} નો ઉપનિશ્ચાયક $= \mathrm{M}_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}$

a_{11} નો સહઅવયવ $= \mathrm{A}_{11} = (-1)^{1+1}\ \mathrm{M}_{11} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}$

a_{21} નો ઉપનિશ્ચાયક $= \mathrm{M}_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}$

a_{21} નો સહઅવયવ $= \mathrm{A}_{21} = (-1)^{2+1}\ \mathrm{M}_{21} = (-1)\,(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) = -a_{12}a_{33} + a_{13}a_{32}$

નોંધ : ઉદાહરણ 21 ના નિશ્ચાયક Δ નું R_1 દ્વારા વિસ્તરણ કરતાં, આપણને

$$\Delta = (-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$ મળે.

$= a_{11}\mathrm{A}_{11} + a_{12}\mathrm{A}_{12} + a_{13}\mathrm{A}_{13}$, જ્યાં A_{ij} એ a_{ij} નો સહઅવયવ છે.

$= \mathrm{R}_1$ ના ઘટકોના તેમના અનુરૂપ સહઅવયવો સાથેના ગુણનફળનો સરવાળો.

આ જ પ્રમાણે, Δ ની ગણતરી R_2, R_3, C_1, C_2 અને C_3 ની સાથેના વિસ્તરણથી બીજી પાંચ રીતે કરી શકાય.

આથી Δ = કોઈ પણ હાર (અથવા સ્તંભ)ના ઘટકોના અનુરૂપ સહઅવયવો સાથેના ગુણનફળનો સરવાળો.

☛ નોંધ : જો એક હાર (અથવા સ્તંભ) ના ઘટકોને અન્ય કોઈ હાર (અથવા સ્તંભ) ના સહઅવયવો સાથે ગુણીએ, તો તેમનો સરવાળો શૂન્ય થાય છે. ઉદાહરણ તરીકે,

$$\Delta = a_{11}\mathrm{A}_{21} + a_{12}\mathrm{A}_{22} + a_{13}\mathrm{A}_{23}$$

$$= a_{11}(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$ (R_1 અને R_2 સમાન હોવાથી)

આ જ પ્રમાણે આપણે અન્ય હાર અને સ્તંભ માટે પ્રયત્ન કરી શકીએ.

ઉદાહરણ 22 : નિશ્ચાયક $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 6 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & -7 \end{vmatrix}$ ના ઘટકોના ઉપનિશ્ચાયક અને સહઅવયવ શોધો તથા ચકાસો કે $a_{11}\mathrm{A}_{31} + a_{12}\mathrm{A}_{32} + a_{13}\mathrm{A}_{33} = 0$.

ઉકેલ : $M_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 5 & -7 \end{vmatrix} = 0 - 20 = -20;$ $\quad A_{11} = (-1)^{1+1}(-20) = -20$

$M_{12} = \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 1 & -7 \end{vmatrix} = -42 - 4 = -46;$ $\quad A_{12} = (-1)^{1+2}(-46) = 46$

$M_{13} = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 30 - 0 = 30;$ $\quad A_{13} = (-1)^{1+3}(30) = 30$

$M_{21} = \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 5 & -7 \end{vmatrix} = 21 - 25 = -4;$ $\quad A_{21} = (-1)^{2+1}(-4) = 4$

$M_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -7 \end{vmatrix} = -14 - 5 = -19;$ $\quad A_{22} = (-1)^{2+2}(-19) = -19$

$M_{23} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 10 + 3 = 13;$ $\quad A_{23} = (-1)^{2+3}(13) = -13$

$M_{31} = \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -12 - 0 = -12;$ $\quad A_{31} = (-1)^{3+1}(-12) = -12$

$M_{32} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 30 = -22;$ $\quad A_{32} = (-1)^{3+2}(-22) = 22$

અને $M_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 18 = 18;$ $\quad A_{33} = (-1)^{3+3}(18) = 18$

હવે, $a_{11} = 2,\ a_{12} = -3,\ a_{13} = 5;\ \ A_{31} = -12,\ A_{32} = 22,\ A_{33} = 18$

તેથી, $a_{11}A_{31} + a_{12}A_{32} + a_{13}A_{33}$

$= 2(-12) + (-3)(22) + 5(18) = -24 - 66 + 90 = 0$

સ્વાધ્યાય 4.4

નીચે આપેલા નિશ્ચાયકના પ્રત્યેક ઘટકના ઉપનિશ્ચાયક અને સહઅવયવ લખો :

1. (i) $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$ (ii) $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$

2. (i) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ (ii) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

3. બીજી હારના ઘટકોના સહઅવયવના ઉપયોગથી $\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 8 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ નું મૂલ્ય શોધો.

4. ત્રીજા સ્તંભના ઘટકોના સહઅવયવના ઉપયોગથી $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x & yz \\ 1 & y & zx \\ 1 & z & xy \end{vmatrix}$ નું મૂલ્ય શોધો.

પ્રશ્ન 5 માં વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલ વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો :

5. જો $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ અને a_{ij} નો સહઅવયવ A_{ij} હોય, તો Δ નું મૂલ્ય ....

(A) $a_{11}A_{31} + a_{12}A_{32} + a_{13}A_{33}$ (B) $a_{11}A_{11} + a_{12}A_{21} + a_{13}A_{31}$

(C) $a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + a_{23}A_{13}$ (D) $a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}$

4.6 સહઅવયવજ અને વ્યસ્ત શ્રેણિક

આગળના પ્રકરણમાં, આપણે શ્રેણિકના વ્યસ્ત વિશે અભ્યાસ કર્યો. આ વિભાગમાં, આપણે વ્યસ્ત શ્રેણિકના અસ્તિત્વ માટેની શરતની ચર્ચા કરીશું.

શ્રેણિક A નો વ્યસ્ત શ્રેણિક, અર્થાત્ A^{-1} શોધવા, આપણે સૌપ્રથમ સહઅવયવજ શ્રેણિકની વ્યાખ્યા આપીશું.

4.6.1 સહઅવયવજ શ્રેણિક

વ્યાખ્યા 3 : $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ ચોરસ શ્રેણિક છે. ઘટક a_{ij} ના સહઅવયવ A_{ij} માટે શ્રેણિક $[A_{ij}]_{n \times n}$ ના પરિવર્ત શ્રેણિકને A નો સહઅવયવજ શ્રેણિક (Adjoint matrix) કહે છે. શ્રેણિક A ના સહઅવયવજ શ્રેણિકને adjA દ્વારા દર્શાવાય છે.

ધારો કે, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

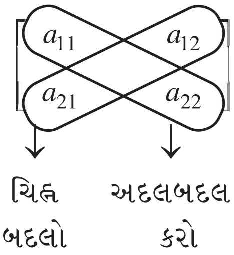
તો $adjA = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$ નો પરિવર્ત શ્રેણિક $= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$.

ઉદાહરણ 23 : જો $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ હોય, તો $adjA$ શોધો.

ઉકેલ : આપણને $A_{11} = 4$, $A_{12} = -1$, $A_{21} = -3$, $A_{22} = 2$ મળશે.

આથી, $adjA = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

નોંધ : 2 કક્ષાવાળા ચોરસ શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ માટે, a_{11} અને a_{22} ની અદલબદલ કરી તથા a_{12} અને a_{21} ના ચિહ્ન બદલીને પણ $adjA$ મેળવી શકાય. અર્થાત્



$$adjA = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

આપણે નીચેનું પ્રમેય સાબિતી વગર સ્વીકારીશું :

પ્રમેય 1 : *n કક્ષાવાળા કોઈ પણ ચોરસ શ્રેણિક A માટે,*

$$A(adjA) = (adjA)A = |A|\,I$$

અહીં, I એ n કક્ષાવાળો એકમ શ્રેણિક છે.

સાબિતી : જો $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ હોય, તો $adjA = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$

હાર (અથવા સ્તંભ)ના ઘટકોને તેમના અનુરૂપ સહઅવયવ વડે ગુણીને સરવાળો કરતાં સરવાળાનું મૂલ્ય $|A|$ જેટલું મળે અને અન્યથા સરવાળો શૂન્ય થતો હોવાથી, આપણને

$$A(adjA) = \begin{bmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{bmatrix} = |A| \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = |A|\,I \text{ મળે.}$$

એ જ રીતે, આપણે $(adjA)\,A = |A|\,I$ મેળવી શકીએ.

આથી, $A(adjA) = (adjA)\,A = |A|\,I$

વ્યાખ્યા 4 : *જો $|A| = 0$, તો ચોરસ શ્રેણિક A ને અસામાન્ય શ્રેણિક કહે છે.*

ઉદાહરણ તરીકે, શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$નો નિશ્ચાયક શૂન્ય છે. આથી A અસામાન્ય શ્રેણિક છે.

વ્યાખ્યા 5 : *જો $|A| \neq 0$ હોય, તો ચોરસ શ્રેણિક A ને સામાન્ય શ્રેણિક કહે છે.*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ લેતાં, } |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2 \neq 0 \text{ થાય.}$$

આથી, A સામાન્ય શ્રેણિક છે.

આપણે સાબિતી આપ્યા સિવાય નીચેના પ્રમેયનો ઉપયોગ કરીશું.

પ્રમેય 2 : *જો A અને B સમાન કક્ષાવાળા સામાન્ય શ્રેણિક હોય, તો AB અને BA પણ તે જ સમાન કક્ષાવાળા સામાન્ય શ્રેણિક છે.*

પ્રમેય 3 : *બે શ્રેણિકના ગુણાકારનો નિશ્ચાયક એ તેમના અનુરૂપ નિશ્ચાયકના ગુણાકારની બરાબર છે. અર્થાત્ જો A અને B સમાન કક્ષાવાળા ચોરસ શ્રેણિક હોય, તો $|AB| = |A|\,|B|$.*

નોંધ : આપણે જાણીએ છીએ કે $(adjA)\,A = |A|\,I = \begin{bmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{bmatrix}$, $|A| \neq 0$

બંને તરફ શ્રેણિકના નિશ્ચાયક લેતાં, આપણને

$$|(adjA)\,A| = \begin{vmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{vmatrix} \text{ મળે.}$$

અર્થાત્ $|(adjA)|\,|A| = |A|^3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ (શા માટે ?)

અર્થાત્ $|(adj\mathrm{A})||\mathrm{A}| = |\mathrm{A}|^3$ (1)

અર્થાત્ $|(adj\mathrm{A})| = |\mathrm{A}|^2$ (A સામાન્ય શ્રેણિક હોય, તો)

વ્યાપક રીતે, જો A એ n કક્ષાવાળો સામાન્ય શ્રેણિક હોય, તો $|(adj\mathrm{A})| = |\mathrm{A}|^{n-1}$

પ્રમેય 4 : જો ચોરસ શ્રેણિક A ને વ્યસ્ત શ્રેણિક હોય, તો અને તો જ A સામાન્ય શ્રેણિક છે.

સાબિતી : ધારો કે n કક્ષાવાળા શ્રેણિક A ના વ્યસ્ત શ્રેણિકનું અસ્તિત્વ છે અને I એ n કક્ષાવાળો એકમ શ્રેણિક છે.

તો, AB = BA = I થાય તેવા n કક્ષાવાળા ચોરસ શ્રેણિક B નું અસ્તિત્વ છે.

હવે AB = I.

તેથી $|\mathrm{AB}| = |\mathrm{I}|$ અથવા $|\mathrm{A}||\mathrm{B}| = 1$ ($|\mathrm{I}| = 1, |\mathrm{AB}| = |\mathrm{A}||\mathrm{B}|$)

તે પરથી $|\mathrm{A}| \neq 0$ મળે.

આથી A સામાન્ય છે.

તેનાથી ઊલટું, ધારો કે A સામાન્ય છે. આથી, $|\mathrm{A}| \neq 0$

હવે, $\mathrm{A}(adj\mathrm{A}) = (adj\mathrm{A})\mathrm{A} = |\mathrm{A}|\,\mathrm{I}$ (પ્રમેય 1)

અથવા $\mathrm{A}\left(\frac{1}{|\mathrm{A}|}adj\mathrm{A}\right) = \left(\frac{1}{|\mathrm{A}|}adj\mathrm{A}\right)\mathrm{A} = \mathrm{I}$

અથવા $\mathrm{B} = \frac{1}{|\mathrm{A}|}\, adj\mathrm{A}$ માટે AB = BA = I

આમ, A ને વ્યસ્ત છે અને $\mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathrm{A}|}\, adj\mathrm{A}$

ઉદાહરણ 24 : જો $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, તો $\mathrm{A}\, adj\mathrm{A} = |\mathrm{A}|\,\mathrm{I}$ ની ચકાસણી કરો. A^{-1} પણ શોધો.

ઉકેલ : આપણને $|\mathrm{A}| = 1(16-9) - 3(4-3) + 3(3-4) = 1 \neq 0$ મળે છે.

હવે, $\mathrm{A}_{11} = 7$, $\mathrm{A}_{12} = -1$, $\mathrm{A}_{13} = -1$, $\mathrm{A}_{21} = -3$, $\mathrm{A}_{22} = 1$, $\mathrm{A}_{23} = 0$, $\mathrm{A}_{31} = -3$, $\mathrm{A}_{32} = 0$, , $\mathrm{A}_{33} = 1$

માટે $adj\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\text{હવે } \mathrm{A}\,(adj\mathrm{A}) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7-3-3 & -3+3+0 & -3+0+3 \\ 7-4-3 & -3+4+0 & -3+0+3 \\ 7-3-4 & -3+3+0 & -3+0+4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= (1)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= |A|\, I$$

વળી, $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\, adj A = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

ઉદાહરણ 25 : જો $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$ અને $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, તો $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$ ની ચકાસણી કરો.

ઉકેલ : આપણને $AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 5 & -14 \end{bmatrix}$ મળે.

$|AB| = -11 \neq 0$ હોવાથી, $(AB)^{-1}$ નું અસ્તિત્વ છે અને

$(AB)^{-1} = \frac{1}{|AB|}\, adj\, (AB) = -\frac{1}{11}\begin{bmatrix} -14 & -5 \\ -5 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 14 & 5 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$ મળે છે.

વળી, $|A| = -11 \neq 0$ અને $|B| = 1 \neq 0$. આથી A^{-1} અને B^{-1} બંનેનું અસ્તિત્વ છે.

અને $A^{-1} = -\frac{1}{11}\begin{bmatrix} -4 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, $B^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

માટે $B^{-1}A^{-1} = -\frac{1}{11}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{11}\begin{bmatrix} -14 & -5 \\ -5 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 14 & 5 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$

તેથી $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

ઉદાહરણ 26 : સાબિત કરો કે શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ એ શ્રેણિક સમીકરણ $A^2 - 4A + I = O$ નું સમાધાન કરે છે, જ્યાં I એ 2 × 2 એકમ શ્રેણિક છે અને O એ 2 × 2 શૂન્ય શ્રેણિક છે. આ શ્રેણિક સમીકરણના ઉપયોગથી A^{-1} શોધો.

ઉકેલ : આપણને $A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 12 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$ મળે.

આથી, $A^2 - 4A + I = \begin{bmatrix} 7 & 12 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 & 12 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O$

હવે, $A^2 - 4A + I = O$

માટે $AA - 4A = -I$

અથવા $AA(A^{-1}) - 4AA^{-1} = -IA^{-1}$ ($|A| \neq 0$ હોવાથી A^{-1} વડે ઉત્તર ગુણાકાર કરતાં)

અથવા $A(AA^{-1}) - 4I = -A^{-1}$

અથવા $AI - 4I = -A^{-1}$

અથવા $A^{-1} = 4I - A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ તેથી $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

સ્વાધ્યાય 4.5

પ્રશ્ન 1 અને 2 પૈકીના પ્રત્યેક શ્રેણિકના સહઅવયવજ શ્રેણિક શોધો.

1. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ **2.** $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

પ્રશ્ન 3 અને 4 પૈકી પ્રત્યેકમાં ચકાસો કે $A\,(adj A) = (adj A)\,A = |A|\,I$.

3. $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -6 \end{bmatrix}$ **4.** $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

પ્રશ્ન 5 થી 11 ના પ્રત્યેક શ્રેણિકના વ્યસ્તનું અસ્તિત્વ હોય, તો તે શોધો.

5. $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ **6.** $\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ **7.** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 5 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ **9.** $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 0 \\ -7 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ **10.** $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}$

11. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix}$

12. જો $A = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ અને $B = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$ હોય, તો ચકાસો કે $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

13. જો $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ હોય, તો સાબિત કરો કે $A^2 - 5A + 7I = O$. તે પરથી A^{-1} શોધો.

14. શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ માટે સંખ્યાઓ a અને b શોધો કે જેથી, $A^2 + aA + bI = O$.

15. શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ માટે સાબિત કરો કે $A^3 - 6A^2 + 5A + 11\,I = O$

અને તે પરથી A^{-1} શોધો.

16. જો $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ હોય, તો સાબિત કરો કે $A^3 - 6A^2 + 9A - 4\,I = O$

અને તે પરથી A^{-1} શોધો.

પ્રશ્નો 17 તથા 18 માં વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલ વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો :

17. જો A એ 3×3 કક્ષાવાળો સામાન્ય ચોરસ શ્રેણિક હોય, તો $|adj A| =$ ....

(A) $|A|$ (B) $|A|^2$ (C) $|A|^3$ (D) $3|A|$

18. જો A એ 2 કક્ષાવાળો સામાન્ય શ્રેણિક હોય, તો A^{-1} નો નિશ્ચાયક .... છે.

(A) $det(A)$ (B) $\frac{1}{det(A)}$ (C) 1 (D) 0

4.7 નિશ્ચાયક અને શ્રેણિકના ઉપયોગો

આ વિભાગમાં, આપણે બે અથવા ત્રણ ચલની સુરેખ સમીકરણોની સંહતિનો ઉકેલ મેળવવા તથા સુરેખ સમીકરણોની સંહતિની સુસંગતતા તપાસવા માટે નિશ્ચાયક અને શ્રેણિકના ઉપયોગની ચર્ચા કરીશું.

સુસંગત સંહતિ : જો સુરેખ સમીકરણોની સંહતિના એક અથવા એકથી વધારે ઉકેલનું અસ્તિત્વ હોય, તો તે સંહતિ સુસંગત (consistent) છે એમ કહેવાય.

અસંગત સંહતિ : જો સમીકરણોની સંહતિના ઉકેલનું અસ્તિત્વ ન હોય, તો સંહતિ સુસંગત નથી (inconsistent) એટલે કે અસંગત છે એમ કહેવાય.

☛ નોંધ : આ પ્રકરણમાં, આપણી ચર્ચા માત્ર અનન્ય ઉકેલ હોય તેવી સમીકરણોની સંહતિ પૂરતી જ મર્યાદિત રાખીશું.

4.7.1 શ્રેણિકના વ્યસ્ત શ્રેણિકના ઉપયોગથી સુરેખ સમીકરણોની સંહતિનો ઉકેલ

આપણે સુરેખ સમીકરણોની સંહતિને શ્રેણિક સમીકરણમાં દર્શાવીશું અને વ્યસ્ત શ્રેણિકના ઉપયોગથી ઉકેલ મેળવીશું.

સમીકરણ સંહતિ $a_1x + b_1y + c_1z = d_1$

$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$

$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$ નો વિચાર કરીએ.

ધારો કે $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ અને $B = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$

સમીકરણોની સંહતિને $AX = B$ સ્વરૂપે લખી શકાય.

અર્થાત્ $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$

વિકલ્પ 1 : જો A સામાન્ય શ્રેણિક હોય તો તેના વ્યસ્તનું અસ્તિત્વ છે. હવે

$$AX = B$$

$$\therefore A^{-1}(AX) = A^{-1}B$$ (A^{-1} થી પૂર્વગુણન કરતાં)

$$\therefore (A^{-1}A)X = A^{-1}B$$ (જૂથના ગુણધર્મ પરથી)

$$\therefore IX = A^{-1}B$$

$$\therefore X = A^{-1}B$$

શ્રેણિકનો વ્યસ્ત અનન્ય હોવાથી આપેલ સમીકરણોની સંહતિનો ઉકેલ અનન્ય છે તેમ શ્રેણિક સમીકરણ દ્વારા પ્રાપ્ત થાય છે. સમીકરણોની સંહતિના ઉકેલની આ રીતને ***શ્રેણિક પદ્ધતિ*** કહે છે.

વિકલ્પ 2 : જો A અસામાન્ય શ્રેણિક હોય, તો $|A| = 0$

આ વિકલ્પમાં, આપણે $(adj\mathrm{A})\,\mathrm{B}$ ની ગણતરી કરીએ.

જો $(adj\mathrm{A})\,\mathrm{B} \neq \mathrm{O}$, (O એ શૂન્ય શ્રેણિક છે), તો ઉકેલનું અસ્તિત્વ નથી અને સંહતિ સુસંગત નથી તેમ કહીશું.

જો $(adj\mathrm{A})\,\mathrm{B} = \mathrm{O}$, તો સંહતિને અનંત સંખ્યાના ઉકેલ છે અથવા ઉકેલ નથી તદનુસાર સંહતિ સુસંગત છે અથવા સુસંગત નથી.

ઉદાહરણ 27 : સુરેખ સમીકરણોની સંહતિ $\begin{matrix} 2x + 5y = 1 \\ 3x + 2y = 7 \end{matrix}$ નો ઉકેલ મેળવો.

ઉકેલ : આપેલ સુરેખ સમીકરણોની સંહતિને નીચે પ્રમાણે AX = B સ્વરૂપમાં લખી શકાય.

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix},\quad \mathrm{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{અને} \quad \mathrm{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix}$$

હવે, $|A| = -11 \neq 0$.

આથી, A સામાન્ય શ્રેણિક છે અને તેથી સંહતિને અનન્ય ઉકેલ છે.

નોંધીશું કે, $\mathrm{A}^{-1} = -\frac{1}{11}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

$$\therefore \quad \mathrm{X} = \mathrm{A}^{-1}\mathrm{B} = -\frac{1}{11}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix}$$

અર્થાત્ $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -\frac{1}{11}\begin{bmatrix} -33 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$

તેથી $x = 3$, $y = -1$

ઉદાહરણ 28 : શ્રેણિક પદ્ધતિથી નીચેનાં સુરેખ સમીકરણોની સંહતિનો ઉકેલ મેળવો :

$$3x - 2y + 3z = 8$$
$$2x + y - z = 1$$
$$4x - 3y + 2z = 4$$

ઉકેલ : આપેલ સુરેખ સમીકરણોની સંહતિને નીચે પ્રમાણે AX = B સ્વરૂપમાં લખી શકાય :

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 2 \end{bmatrix},\ \mathrm{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \text{અને} \quad \mathrm{B} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

આપણે જોઈએ કે,

$$|A| = 3(2 - 3) + 2(4 + 4) + 3(-6 - 4) = -17 \neq 0$$

આથી, A સામાન્ય છે અને તેથી તેના વ્યસ્તનું અસ્તિત્વ છે. હવે

$$A_{11} = -1, \quad A_{12} = -8, \quad A_{13} = -10$$

$$A_{21} = -5, \quad A_{22} = -6, \quad A_{23} = 1$$

$$A_{31} = -1, \quad A_{32} = 9, \quad A_{33} = 7$$

$$\therefore \quad A^{-1} = -\frac{1}{17}\begin{bmatrix} -1 & -5 & -1 \\ -8 & -6 & 9 \\ -10 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

આથી, $X = A^{-1}B = -\frac{1}{17}\begin{bmatrix} -1 & -5 & -1 \\ -8 & -6 & 9 \\ -10 & 1 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$

અર્થાત્ $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = -\frac{1}{17}\begin{bmatrix} -17 \\ -34 \\ -51 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

આથી, $x = 1$, $y = 2$ અને $z = 3$.

ઉદાહરણ 29 : ત્રણ સંખ્યાઓનો સરવાળો 6 છે. જો આપણે ત્રીજી સંખ્યાને 3 વડે ગુણીને તેમાં બીજી સંખ્યા ઉમેરીએ, તો આપણને 11 મળે. પ્રથમ અને ત્રીજી સંખ્યાઓનો સરવાળો કરતાં, આપણને બીજી સંખ્યાના બમણા મળે. આ માહિતીને બૈજિક સ્વરૂપમાં દર્શાવો અને શ્રેણિક પદ્ધતિનો ઉપયોગ કરી તે સંખ્યાઓ શોધો.

ઉકેલ : આપણે પ્રથમ, બીજી અને ત્રીજી સંખ્યાને અનુક્રમે x, y અને z તરીકે દર્શાવીએ. આપેલ શરતો અનુસાર આપણને

$$x + y + z = 6$$

$$y + 3z = 11$$

$x + z = 2y$ અથવા $x - 2y + z = 0$ મળે.

આ સંહતિને નીચે પ્રમાણે AX = B સ્વરૂપમાં લખી શકાય :

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ અને $B = \begin{bmatrix} 6 \\ 11 \\ 0 \end{bmatrix}$

અહીં, $|A| = 1(1 + 6) - 1(0 - 3) + 1(0 - 1) = 9 \neq 0$. હવે આપણે *adj*A શોધીશું.

$$A_{11} = 1(1 + 6) = 7, \quad A_{12} = -(0 - 3) = 3, \quad A_{13} = -1$$

$$A_{21} = -(1 + 2) = -3, \quad A_{22} = 0, \quad A_{23} = -(-2 - 1) = 3$$

$$A_{31} = (3 - 1) = 2, \quad A_{32} = -(3 - 0) = -3, \quad A_{33} = (1 - 0) = 1$$

આથી, $adjA = \begin{bmatrix} 7 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

આમ, $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\,adj(A) = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 7 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

$X = A^{-1}B$ હોવાથી

$$X = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 7 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 \\ 11 \\ 0 \end{bmatrix}$$

અથવા $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 42-33+0 \\ 18+0+0 \\ -6+33+0 \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 9 \\ 18 \\ 27 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

આમ $x = 1, y = 2, z = 3$

સ્વાધ્યાય 4.6

પ્રશ્ન 1 થી 6 માં આપેલાં સમીકરણોની સંહતિની સુસંગતતા ચકાસો :

1. $x + 2y = 2$
$2x + 3y = 3$

2. $2x - y = 5$
$x + y = 4$

3. $x + 3y = 5$
$2x + 6y = 8$

4. $x + y + z = 1$
$2x + 3y + 2z = 2$
$ax + ay + 2az = 4$

5. $3x - y - 2z = 2$
$2y - z = -1$
$3x - 5y = 3$

6. $5x - y + 4z = 5$
$2x + 3y + 5z = 2$
$5x - 2y + 6z = -1$

પ્રશ્ન 7 થી 14 માં આપેલાં સુરેખ સમીકરણોની સંહતિનો ઉકેલ શ્રેણિકના ઉપયોગથી મેળવો :

7. $5x + 2y = 4$
$7x + 3y = 5$

8. $2x - y = -2$
$3x + 4y = 3$

9. $4x - 3y = 3$
$3x - 5y = 7$

10. $5x + 2y = 3$
$3x + 2y = 5$

11. $2x + y + z = 1$
$x - 2y - z = \frac{3}{2}$
$3y - 5z = 9$

12. $x - y + z = 4$
$2x + y - 3z = 0$
$x + y + z = 2$

13. $2x + 3y + 3z = 5$
$x - 2y + z = -4$
$3x - y - 2z = 3$

14. $x - y + 2z = 7$
$3x + 4y - 5z = -5$
$2x - y + 3z = 12$

15. જો $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ હોય, તો A^{-1} શોધો. A^{-1}ના ઉપયોગથી નીચેની સમીકરણ સંહતિ ઉકેલો :

$$2x - 3y + 5z = 11$$
$$3x + 2y - 4z = -5$$
$$x + y - 2z = -3$$

16. 4 કિગ્રા ડુંગળી, 3 કિગ્રા ઘઉં અને 2 કિગ્રા ચોખાની કિંમત ₹ 60 છે. 2 કિગ્રા ડુંગળી, 4 કિગ્રા ઘઉં અને 6 કિગ્રા ચોખાની કિંમત ₹ 90 છે. 6 કિગ્રા ડુંગળી, 2 કિગ્રા ઘઉં અને 3 કિગ્રા ચોખાની કિંમત ₹ 70 છે. શ્રેણિકની રીતે દરેક વસ્તુનો પ્રતિકિગ્રા ભાવ શોધો.

પ્રકીર્ણ ઉદાહરણો

ઉદાહરણ 30 : જો a, b, c પૈકી પ્રત્યેક બે અસમાન અને પ્રત્યેક ધન હોય, તો સાબિત કરો કે નિશ્ચાયક

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$$ નું મૂલ્ય ઋણ છે.

ઉકેલ : આપેલ નિશ્ચાયક પર $C_1 \to C_1 + C_2 + C_3$ કરતાં,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a+b+c & b & c \\ a+b+c & c & a \\ a+b+c & a & b \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & c & a \\ 1 & a & b \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & c-b & a-c \\ 0 & a-b & b-c \end{vmatrix}$$ **($R_2 \to R_2 - R_1$ અને $R_3 \to R_3 - R_1$ કરતાં)**

$$= (a+b+c)\,[(c-b)(b-c) - (a-c)(a-b)]$$ **(C_1 દ્વારા વિસ્તરણ કરતાં)**

$$= (a+b+c)\,(-a^2 - b^2 - c^2 + ab + bc + ca)$$

$$= \frac{-1}{2}(a+b+c)\,(2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca)$$

$$= \frac{-1}{2}(a+b+c)\,\left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right]$$

આ ઋણ સંખ્યા છે. **($a + b + c > 0$ અને $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 > 0$ હોવાથી)**

ઉદાહરણ 31 : જો a, b, c સમાંતર શ્રેણીમાં હોય, તો

$$\begin{vmatrix} 2y+4 & 5y+7 & 8y+a \\ 3y+5 & 6y+8 & 9y+b \\ 4y+6 & 7y+9 & 10y+c \end{vmatrix}$$ નું મૂલ્ય શોધો.

ઉકેલ : આપેલ નિશ્ચાયકમાં $R_1 \to R_1 + R_3 - 2R_2$ કરતાં, આપણને

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3y+5 & 6y+8 & 9y+b \\ 4y+6 & 7y+9 & 10y+c \end{vmatrix} = 0$$ મળે. **($2b = a + c$ હોવાથી)**

ઉદાહરણ 32 : સાબિત કરો કે,

$$\Delta = \begin{vmatrix} (y+z)^2 & xy & zx \\ xy & (x+z)^2 & yz \\ xz & yz & (x+y)^2 \end{vmatrix} = 2xyz\,(x+y+z)^3$$

ઉકેલ : Δ માં $R_1 \to xR_1$, $R_2 \to yR_2$, $R_3 \to zR_3$ કરી અને xyz વડે ભાગતાં, આપણને

$$\Delta = \frac{1}{xyz}\begin{vmatrix} x(y+z)^2 & x^2y & x^2z \\ xy^2 & y(x+z)^2 & y^2z \\ xz^2 & yz^2 & z(x+y)^2 \end{vmatrix}$$ મળે.