వేయండి. తరువాత దొర్లింపుతో మీరు 1ని పొందితే. 1కి ఎదురుగా సరిచూడు గుర్తువేయండి. సరైన సంఖ్యకు సరిచూడు గుర్తు వేయడాన్ని కొనసాగించండి. ఈ కార్యాచరణాన్ని 150 దొర్లింపులను పునరావర్తనం చేసి 150 దొర్లింపులకు మరియు లభించే ప్రతి ఫలితపు సంఖ్యను కనుగొనండి.

దత్తాంశంలో 1, 2, 3, 4, 5, 6 ఎన్నిసార్లు సంభవించాయో చూపడానికి దిమ్మ చిత్రం నిర్మించండి.

## వీటిని ప్రయత్నించండి.

(గుంపులో చేయండి)

1. ఒక నాణెమును 100 సార్లు ఎగురవేయండి. దత్తాంశాలను నమోదు చేయండి వీటిలో బొమ్మ మరియు బొరుసు సంభవించిన మొత్తం సంఖ్యను కనుగొనండి.
2. అఫ్తాబ్ ఒక పాచికను 250 సార్లు దొర్లించాడు కిందచూపినట్లుగా పట్టిక పొందాడు. ఈ దత్తాంశానికి దిమ్మ చిత్రం నిర్మించండి.

| పాచిక మీద సంఖ్య | సరిచూడు అంకెలు |
|---|---|
| 1 | 卌 卌 卌 卌 卌 卌 卌 \|\|\|\| |
| 2 | 卌 卌 卌 卌 卌 卌 卌 卌 |
| 3 | 卌 卌 卌 卌 卌 卌 卌 卌 卌 卌 \|\| |
| 4 | 卌 卌 卌 卌 卌 卌 卌 卌 卌 卌 \|\| |
| 5 | 卌 卌 卌 卌 卌 卌 卌 \|\|\| |
| 6 | 卌 卌 卌 卌 卌 卌 卌 卌 |

3. ఒక పాచికను 100 సార్లు దొర్లించి, దత్తాంశాలను నమోదు చేయండి. 1, 2, 3, 4, 5, 6 ఎన్నిసార్లు సంభవించాయో కనుగొనండి.

## సంభవనీయత అనగానేమి?

ఒక నాణెమును విసిరేసినప్పుడు బొమ్మ లేదా బొరుసు అను రెండు సాధ్యంగల ఫలితాలు వస్తాయని మీకు తెలిసింది. ఒక పాచికను దొర్లించినప్పుడు ఆరు సాధ్యంగల ఫలితాలు పొందుతాం. ఒక నాణెములో బొమ్మ లేదా బొరుసు పైకివచ్చే అవకాశం సమానంగా ఉంటుందని మనం అనుభవంతో తెలుసుకున్నాం. బొమ్మ లేదా బొరుసు పొందు సంభవనీయత/అవకాశం సమానం మరియు ప్రతియొక్కటి $\frac{1}{2}$ కు సమానంగా ఉటుంది. ఒక పాచికకు సంబంధించి 1, 2, 3, 4, 5 లేదా 6 పొందు సంభవనీయత సమానంగా ఉంటుంది. అనగా ఒక పాచిక దొర్లొంచినప్పుడు అసమానమైన/సాధ్యంగల ఫలితాలు ఉంటాయి. 1, 2, 3, 4, 5, 6, వీటిలో ప్రతిదానికి ఆరింట ఒకటి $(\frac{1}{6})$ సంభవనీయత ఉంటుందని మనం చెప్పుతాం పై తరగతులలో మనం దీనిగురించి

నేర్చుకుంటాం ఎక్కువ సాధ్యతలు కల్గియున్న ఘటనల సంభవనీయత 0 మరియు 1ల మధ్య ఉంటుంది. అని మనం చేసిన కార్యాచరణాలనుండి తెలుసుకున్నాం వాటిలో అసంభవ ఘటనల సంభవనీయత 0 మరియు ఖచ్చిత ఘటనల సంభవనీయత అయివుంటుంది.

ఇచ్చిన సందర్భం ఏదైనా అయివుండనీయండి. సాధ్యంగల వివిధ ఫలితాలను మనం అర్థం చేసుకోవడం చాలా అవసరం. ప్రతి ఫలితానికి సాధ్యంగల అవకాశాలను అధ్యయనం చేయాలి. నాణెం మరియు పాచిక ప్రసంగాలను మినహాయించినచో, ఒక ఘటనకు సంబంధించి దాని ఫలితాలన్నియు సంభవించడానికి సమాన అవకాశాలు పొందియుండవు.

**వీటిని ప్రయత్నించండి.**

ఫలితాలు సమాన అవకాశాలను పొందని ఐదు సందర్భాలు నిర్మించండి లేదా ఆలోచించండి.

ఉదాహరణకు ఒక పెట్టెలో 15 ఎరుపు రంగు బంతులు మరియు 9 తెల్లని రంగు బంతులుకలవు చూడకుండా ఒక బంతికి వెలుపలికి తీసినచో ఎరుపు రంగు బంతిని పొందుటకు అవకాశాలే ఎక్కువగావుంటాయి. ఎందుకు అనిమీరు చూడగలరా? ఒక తెల్లని బంతిని తీసే ఎన్ని అవకాశాలు ఒక ఎరుపుబంతిని తీయడానికిగలదు మరియు ఈ రెండు ఘటనల సంభవనీయత 0 మరియు 1 మధ్యవుంది.

## అభ్యాసం 3.4

1. కిందివి ఖచ్చితంగా జరుగుతున్నాయా? అసంభవమా, జరగవచ్చా. అయితే, ఖచ్చితంగా కాదు అనునది తెల్పండి.
   (i) మీరు నిన్నకంటే ఈ రోజు సీనియర్.
   (ii) ఎగురవేసిన ఒక నాణెం బొమ్మ పైకి వచ్చునట్లు పడుతుంది.
   (iii) ఒక పాచికను ఎగురవేసినప్పుడు పై నగల సంఖ్య 8 వస్తుంది.
   (iv) ముందున్న ట్రాఫిక్ లైట్‌లో ఆకుపచ్చరంగు కనబడటం
   (v) రేపు మోడం కప్పిన రోజు కావచ్చు.
2. ఒక పెట్టెలో ప్రతిదాని మీద 1 నుండి 6 సంఖ్యలతో గుర్తించిన 6 గోలీలు ఉన్నాయి.
   (i) సంఖ్య 2 గల ఒక గోలీని తీసెడిసంభవనీయత ఎంత?
   (ii) సంఖ్య 5గల ఒక గోలీని తీసిడి సంభంవనీయత ఎంత?
3. ఏ జట్టు ఆటను ప్రారంభించాలో నిర్ధారించడానికి ఒక నాణెం ఎగురవేయబడింది. మీ జట్టు ప్రారంభించు సంభవనీయత ఎంత?

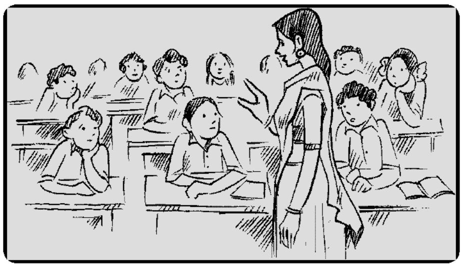
## మనం ఇప్పటి వరకు చర్చించిన అంశాలు

1. దత్తాంశాల సేకరణ దాఖలీకరణం మరియు చూపడం మన అనుభవాలను నిర్వహించడానికి మరియు వాటి నుండి తీర్మానం తీసుకోవడాని మనకు సహాయపడుతంది.
2. దత్తాంశాలను సేకరించడానికి ముందు మనం వాటిని దేనికి ఉపయోగిస్తామో అనేదానిని మనం తెలుసుకోవాల్సిన అవసరం ఉంది.
3. సేకరించిన దత్తాంశాలను ఒక సరైన పట్టికలో నిర్వహించినప్పుడు దానిని అర్థం చేసుకోవడానికి మరియు విశ్లేషించడానికి సులభమవుతతుంది.
4. సరాసరి ఒక సంఖ్యమైయుంది. అది దత్తాంశం లేదా వీక్షణల గుంపుయొక్క కేంద్రీయ ప్రవృత్తిని చూపుతుంది.
5. అంకగణిత సరాసరి దత్తాంశాలను చూపెడి విలువలలో ఒకటి.
6. రూఢివిలువ మరొక కేంద్రీయ ప్రవృత్తి లేదా ప్రాతినిధిక విలువ రూపంలో ఉంటుంది. వీక్షణలలో ఎక్కువగా పునరావర్తనం చెందిన వీక్షణే దాని రూఢివిలువ అవుతుంది.
7. మధ్యాంకం కూడా చూపెడి విలువయొక్క ఒకరూపం అది దత్తాంశాల మధ్యలోవుండి, సగం వీక్షణలు వీటికంటే పైన మరియు మిగిలిన సగం వాటి కింద ఉంటాయి.
8. సమానవెడల్పుగల స్తంభాలను ఉపయోగించి, సంఖ్యలను చూపడమే దిమ్మ చిత్రం లేదా స్తంభలేఖ.
9. ఒక దత్తాంశంలోని రెండు సంగ్రహాలను ఒకసారి చూడండి పోల్చడానికి ద్విదిమ్మ చిత్రాలు సహాయపడుతాయి.
10. మన జీవితంలోని కొన్ని సందర్భాలలో కొన్ని ఘటనలు ఖచ్చితంగా జరిగేటువంటివి, కొన్ని అసాధ్యమైనవి అలాగే కొన్ని కావచ్చు లేదా కాకపోవచ్చు. అయ్యేడి లేదా కానివిగల సందర్భాలు కలిగే ఒక అవకాశం ఉంటుంది.

అధ్యాయం - 4

# సరళ సమీకరణాలు

## 4.1 మనస్సులో వున్న దాన్ని చెప్పే ఆట



తరగతి గదిలో ఉపాధ్యాయులు ఈ రోజు సరళ సమీకరణాలు అనే క్రొత్త అధ్యాయంను ప్రారంభిస్తాం అని చెప్పారు. అప్పు, సరితా మరియు అమీనా 6వ తరగతిలోని బీజగణితం అధ్యాయాన్ని జ్ఞాపకం చేసుకొన్నారు. మీరు జ్ఞాపకం చేసుకోండి? అప్పు, సరితా మరియు అమీనా వేరొకరి మనస్సులోగల సంఖ్యను చెప్పు ఒక ఆటని నిర్మించి అందరి ముందు ప్రదర్శించుటకు ఉత్సాహితులైనారు.

ఉపాధ్యాయులు వారి ఉత్సాహాన్ని ప్రశంసించి ఆటను ప్రదర్శించుటకు ఆహ్వానించారు. అమీనా సారాను మనస్సులో ఒక సంఖ్యను పెట్టుకొని దానిని 4తో గుణించి. గుణలబ్దానికి 5ను కూడటానికి చెప్పెను. అమీనా అంతిమ ఫలితాంశాన్ని చెప్పమని సారాని అడిగినపుడు ఆమె 65 అని చెప్పెను. సారా మనస్సులోవున్న సంఖ్య 15 అని అమీనా తక్షణమే చెప్పినపుడు సారా ఔను అని తల ఊపింది తరగతిలోని అందరికీ మరియు సారాకు కూడా ఆశ్చర్యమైంది.

ఇప్పుడు అప్పు సరది. అప్పు బాలును మనస్సులో ఒక సంఖ్యను పెట్టుకొని దానిని 10తో గుణించి గుణలబ్ధంనుండి. 20 ని తీసివేయమని చెప్పెను. బాలును ఫలితాంశం అడిగినప్పుడు అతడు 50 అని చెప్పెను. అప్పు తక్షణమే బాలు మనస్సులో ఉన్న సంఖ్య 7 అని చెప్పెను బాలు అవును అనెను.

అప్పు, సరితా మరియు అమీనా ఇంకొకరి మనస్సులోగల సంఖ్యను ఎలా చెప్పారు అనే రహస్యాన్ని తెలుసుకోవాలని అందరు ఇష్టపడ్డారు. అది ఎలా అని మీరు తెలుసుకోవాలా? ఈ అధ్యాయం మరియు 12 వ అధ్యాయాన్ని అభ్యసించిన తరువాత మీకే అది ఎలా అని తెలుస్తుంది.

## 4.2 సమీకరణాన్ని రూపించడం లేదా నిర్మించడం.

అమీనా ఉదాహరణాన్ని తీసుకొందాం అమీనా సారాకు మనస్సులో ఒక సంఖ్యను పెట్టుకోమని చెప్పినపుడు అమీనాకు ఆ సంఖ్య ఏదని తెలియదు. ఆమెకు ఆ సంఖ్య **1, 2, 3, . . ., 11, . . . , 100, . . . .** ఇలా ఏదైనా అయివుండవచ్చు. తెలియని ఆ సంఖ్యను '$x$' అనుకొందాం '$x$' కు బదులు '$y$' లేదా '$t$' లేదా మరేదైన అక్షరాన్ని తీసుకోవచ్చు. సారా ఆ సంఖ్యకు **4**తో గుణించినపుడు గుణలబ్ధం $4x$ అవుతుంది. గుణలబ్ధానికి **5**ను చేర్చినపుడు అది $4x + 5$ అవుతుంది $(4x + 5)$ యొక్క విలువ '$x$' విలువ పై ఆధారపడివుంటుంది. కావున $x = 1$ అయినప్పుడు $4x + 5 = 4 \times 1 + 5 = 9$ అవుతుందంటే సారా మనస్సులోవుండిన సంఖ్య **1** అయివున్నింటే ఫలితాంశం **9** అయివుండేది. అదే విధంగా, ఆమే మనస్సులోని సంఖ్య **5** అయివుంటే, $x = 5$ అయితే $4x + 5 = 4 \times 5 + 5 = 25$, అంటే సారా మనస్సులోని సంఖ్య **5** అయివున్నింటే ఫలితాంశం **25** అయివుండేది

సారా మనస్సులోని సంఖ్యను తెలుసుకోవడానికి ఆమె జవాబు **65** మనం $x$ను కనిపెట్టడానికి ప్రయత్నిద్దాం.

$$4x + 5 = 65 \qquad (4,1)$$

ఈ సమీకరణం యొక్క పరిహారమే సారా మనస్సులోగల సంఖ్య

అదే విధంగా అప్పు ఉదాహరణంలో బాలు ఎన్నుకొనిన సంఖ్య '$y$' అనుకొందాం. అప్పు బాలును ఆ సంఖ్యను **10**తో గుణించి గుణలబ్ధం నుండి తీసివేయమని చెబుతాడు. బాలు '$y$' తో **10**ని గుణించినపుడు '$10y$' మరియు దానినుండి **20**ను తీసివేయగా $(10y - 20)$ అవుతుంది. బాలు యొక్క ఫలితాంశం **50** అయింది.

కావున
$$10y - 20 = 50 \qquad (4.2)$$

ఈ సమీకరణం యొక్క పరిహారమే బాలు మనస్సులోవున్న సంఖ్య.

## 4.3 అభ్యసనా అవలోకనం

(4.1) మరియు (4.2) రెండు సమీకరణాలు. **6**వ తరగతిలో సమీకరణాల గురించి నేర్చుకొన్న దానిని ఒకసారి జ్ఞాపకం చేసుకొందాం. 'సమీకరణం ఒక చరాక్షరంపైగల'. ఒక నిబంధనం సమీకరణం(**4.1**)లో '$x$' చరాక్షరమైతో (**4.2**)లో '$y$' చరాక్షరం.

చరాక్షరం అనగా మారడం అని అర్థం చరాక్షరానికి ఏదో ఒక విలువ నిర్దిష్టపరచలేదు చరాక్షరం విభిన్న విలువలను స్వీకరిస్తుంది. దాని విలువ స్థిరంకాదు. చరాక్షరాన్ని ఆంగ్ల అక్షరాలైన $x, y, z, l, m, n, p$ మొదలగు వాటిలో సూచిస్తాం. చరాక్షరాలనుండి మనం భీజోక్తులను రూపించవచ్చు. చరాక్షరాలను గణితపు మూల క్రియలైన సంకలనం వ్యవకలనం, గుణాకారం మరియు భాగాహారానికి లోబరచి బీజోక్తులను పొందవచ్చును. చరాక్షరం '$x$' నుండి $(4x + 5)$ అని రూపొందించాం. మొదలు '$x$' తో **4**ను గుణించి గుణలబ్ధానికి **5**ను కూడాము. అదే విధంగా '$y$' నుండి $(10y - 20)$ ను పొందాం. దీనికోసం, '$y$' తో **10**ని గుణించి, గుణలబ్ధంతో **20** ని తీసివేశాం. ఇవన్నీ భీజోక్తులకు ఉదాహరణాలు.

ఇలా రూపొందిన బీజోక్తి విలువ చరాక్షరం విలువ పై ఆధారపడివుంది. ఇదివరకే చూసినట్లుగా $x = 1$ అయినప్పుడు $4x + 5 = 9$, $x = 5$ అయినప్పుడు $4x + 5 = 25$ అవుతుంది.

అదేవిధంగా $x = 15$ అయినప్పుడు, $4x + 5 = 4 \times 15 + 5 = 65$

$x = 0$ అయినప్పుడు, $4x + 5 = 4 \times 0 + 5 = 5$ మొదలైనవి.

సమీకరణం **(4.1)** చరాక్షరం '$x$' పైగల నిబంధనం దాని ప్రకారం $(4x + 5)$ బీజోక్తి విలువ **65.**

$x = 15$ అయినప్పుడు సమీకరణానికి తాళెయాగుత్తదె.

కావున $4x + 5 = 65$ సమీకరణపు పరిహారం **15** అయినది. $x = 5$ అయినప్పుడు.

$4x + 5 = 25$ అవుతుందో కాని **65** అవ్వదు.

కావున $x = 5$ సమీకరణపు పరిహారం కాదు అదేవిధంగా $x = 0$ కూడా సమీకరణపు పరిహారంకాదు. $x = 15$ కాక వేరె విలువ $4x + 5 = 65$ సమీకరణానికి పొందిక కాదు.

**దీనిని ప్రయత్నించండి**

$(10y - 20)$ బీజోక్తి విలువ '$y$' యొక్క విలువ పై ఆధారపడివుంటుంది. '$y$' కు ఐదు వివిధ విలువలను ఇస్తూ $(10y - 20)$ విలువను సమీకరించి, **104-20**కి ఇస్తూ $10y - 20 = 50$ ఈ విలువకు సరిపోతుందా గమనించండి. సరిపోవక పోతే '$y$' యొక్క వివిధ విలువలతో $10y - 20 = 50$ సరిపోయేవరకు ప్రయత్నించండి.

## 4.4 సమీకరణం అనగా నేమి ?

ఒక సమీకరణంలో ఎల్లప్పుడూ సమానత్వ(=) చిహ్నం వుంటుంది. సమానత్వ చిహ్నపు ఎడమవైపు (Left hand side లేదా LHS) విలువ, సమానత్వ చిహ్నపు కుడివైపు (Right hand side లేదా RHS) విలువకు సమానంగా వుంటుంది.

సమీకరణం **4.1**లో$(4x + 5)$ LHS అయితే RHS **65** అయింది. సమీకరణం **(4.2)**లో LHS $(10y - 20)$ అయితే RHS **50** అయింది.

LHS మరియు RHS మధ్య 'సమానత్వ'చిహ్నంకు బదులుగా వేరే ఏ చిహ్నంవున్ననూ అది సమీకరణం కాదు. కావున $4x + 5 > 65$ ఒక సమీకరణంకాదు. ఎందుకంటే అది $(4x + 5)$ అనునది **65** కంటే పెద్దది అని సూచిస్తుంది.
అదేవిధంగా $4x + 5 < 65$ కూడా సమీకరణంకాదు.
అది $(4x + 5)$ అనునది **65** కంటే చిన్నది అని సూచిస్తుంది.

సాధారణంగా సమీకరణాలలో RHS ఒక సంఖ్య అనేదానిని గమనించాం. సమీకరణం (**4.1**) మరియు (**4.2**)లో RHS వరుసగా **64** మరియు **50**గా నుండెను. సమీకరణంలో RHS ఎల్లప్పుడూ సంఖ్యనే అయివుండాలని లేదు, అది చరాక్షరాని పొందియున్న బీజోక్తికూడా అయివుండవచ్చు. ఉదాహరణకు

$$4x + 5 = 6x - 25$$

సమీకరణంలో సమానత్వ చిహ్నం ఎడమవైపులో $(4x + 5)$

బీజోక్తి వుంటే కుడివైపు $(6x - 25)$ వుంది.

సూక్ష్మంగా చెప్పాలంటే సమీకరణం చరాక్షరాన్ని పొందియున్న ఒక నిబంధనం. ఆ నిబంధనం ఏమనగా రెండింటి బీజోక్తుల విలువ ఒకటిగావుండాలి. అలాగే ఒక బీజోక్తి యొక్క చరాక్షరాన్ని పొందివుండాలి.

సరళ సమీకరణాల ఒక సరళమైన మరియు అనుకూలమైన లక్షణాన్ని గమనిద్దాం. $4x + 5 = 65$ మరియు $65 = 4x + 5$ రెండూ ఒకటే అదేవిధంగా $6x - 25 = 4x + 5$ మరియు $4x + 5 = 6x - 25$ ఒకటే ఎడమవైపు మరియు కుడివైపుగల బీజోక్తులు తారుమారైనా సమీకరణంలో ఎలాంటి. మార్పురాదు. ఈ లక్షణం సరళ సమీకరణాలను సాధించుటకు సహాయకారిగా నున్నది.

**ఉదాహరణం 1 :** కింది వ్యాఖ్యానాలను సమీకరణ రూపంలో రాయండి.

(i) '$x$' మూడింతలు మరియు **11** యొక్క మొత్తం **32.**

(ii) ఒక సంఖ్యయొక్క **6** రింతలనుండి **5**ను తీసివేసినపుడు **7** లభిస్తుంది.

(iii) '$m$' యొక్క నాలుగు భాగాలలో ఒకటి **7** కంటే **3** ఎక్కువగాకలదు

(iv) ఒక సంఖ్య యొక్క మూడవ భాగంలో ఒక భాగానికి **5**ను కూడిన మొత్తం **8.**

**సాధన :**

(i) '$x$' యొక్క మూడింతలు = $3x$

$3x$ మరియు **11** మొత్తం $(3x + 11)$ దీని మొత్తం **32.**

సమీకరణం $3x + 11 = 32$ ఆగిదే.

(ii) ఆ సంఖ్య '$z$' అయివుండని సంఖ్య **6**ను గుణించినప్పుడు '$6z$' అవుతుంది.

'$6z$' నుండి **5**ను తీసివేసినప్పుడు $(6z - 5)$ లభిస్తుంది.

దాని ఫలితాంశం **7** సమీకరణం $6z - 5 = 7$.

(iii) '$m$' యొక్క నాల్గింటిలో ఒక భాగం $\frac{m}{4}$.

ఇది 7కంటే 3 ఎక్కువైనది అనగా $(\frac{m}{4} - 7)$ వ్యత్యాసం 3.

సమీకరణం $\frac{m}{4} - 7 = 3$.

(iv) ఆ సంఖ్య '$n$' అయివుండని '$n$' యొక్క మూడింటిలో ఒకటంత $\frac{n}{3}$.

$n$ మూడింటిలో ఒకటంత మరియు 5ల మొత్తం $\frac{n}{3} + 5$ దీని విలువ 8.

సమీకరణం $\frac{n}{3} + 5 = 8$.

**ఉదాహరణం 2 :** కింది సమీకరణాలను వ్యాఖ్యా రూపానికి పరివర్తించండి.

(i) $x - 5 = 9$ (ii) $5p = 20$ (iii) $3n + 7 = 1$ (iv) $\frac{m}{5} - 2 = 6$

**సాధన :**

(i) '$x$' నుండి 5 ను తీసివేసిన వ్యత్యాసం 9.

(ii) '$p$' యొక్క ఐదింతలు 20.

(iii) '$n$' యొక్క మూడింతలుకు 7ను చేర్చినపుడు 1

(iv) '$n$' యొక్క ఐదింటిలో ఒకటంత 2ను తీసివేసినప్పుడు 6 లభిస్తుంది.

ఒక ముఖ్యమైన అంశం అనగా ఒక సమీకరణానికి ఒకటికంటే ఎక్కువ వ్యాఖ్యానాలను రూపించవచ్చును.

ఉదాహరణకు సమీకరణం (i)కి రూపించదగిన వ్యాఖ్యానాలు. '$x$' నుండి 5ను తీసివేసినప్పుడు 9 లభిస్తుంది లేదా సంఖ్య '$x$', 9 కంటే 5 ఎక్కువగావుంది లేదా '$x$' అనునది 9 కంటే 5 పెద్దదిగావుంది లేదా '$x$' మరియు 5ల వ్యత్యాసం 9 మొదలగునవి.

**వీటిని ప్రయత్నించండి.**

సమీకరణం (ii), (iii), (iv) లకు ఇంకాకా రూపం వ్యాఖ్యానాలను రాయండి.

**ఉదాహరణం 3 :** కింది సందర్భాలను గమనించండి.

రాజ తండ్రి వయస్సు రాజు వయస్సుయొక్క మూడింతలకంటే ఎక్కువవుంది. 5 సంవత్సరాలు రాజు తండ్రి వయస్సు 44 సంవత్సరాలైతే రాజు వయస్సు కనిపెట్టడానికి సమీకరణం రాయండి.

**సాధన :** రాజు వయస్సు మనకు తెలియదు. అతనికి '$y$' సంవత్సరాలు అని అనుకుందాం. రాజుయొక్క వయస్సుకంటే మూడింతలు అనగా $3y$. రాజు తండ్రి వయస్సు $3y$ కంటె 5 ఎక్కువైంది. అంటే రాజు యొక్క తండ్రి వయస్సు $(3y+5)$ రాజ తండ్రి వయస్సు 44 అని చెప్పబడింది.

కావున $3y + 5 = 44$ (4.3)

ఇది *'y'* చరాక్షరమైన సమీకరణం దీనిని సూక్ష్మీకరించినప్పుడు రాజు వయస్సు తెలియును.

**ఉదాహరణం 4:** ఒక అంగడి వ్యాపారి ఒక పెద్ద బుట్టి మరియు ఒక చిన్న బుట్టులోగల మామిడి పళ్ళను అమ్ముతాడు. పెద్ద బుట్టలో చిన్న బుట్టలోఉన్న మామిడిపళ్ళ **8** రెట్లు రియు **4** విడి మామిడిపళ్ళు ఎక్కువగా కలవు పెద్దబుట్టలో **100** మామిడిపళ్ళువుంటే చిన్న బుట్టలో పళ్ళ సంఖ్య సూచించు సమీకరణం రాయండి.

**సాధన :** చిన్న బుట్టలోగల మామిడిపళ్ళ *'m'* అనుకుందాం. పెద్ద బుట్టలో **8** రెట్లు మరియు **4** విడి మామిడి పళ్ళు ఎక్కువకలవు అనగా $8m + 4$. అయితే పెద్ద బుట్టలో పళ్ళ సంఖ్య **100**

కావున $8m + 4 = 100$ (4.4)

ఈ సమీకరణాన్ని సాధించడంవల్ల చిన్న బుట్టలోగల పళ్ళ సంఖ్యను తెలుసుకోవచ్చు.

## అభ్యాసం 4.1

1. పట్టికలోని చివరి వరసను పూరించండి.

| క్ర. సంఖ్య | సమీకరణం | విలువ | సమీకరణం సరితూగుతుందా? తెలపండి. (ఔను/కాదు) |
|---|---|---|---|
| (i) | $x + 3 = 0$ | $x = 3$ | |
| (ii) | $x + 3 = 0$ | $x = 0$ | |
| (iii) | $x + 3 = 0$ | $x = -3$ | |
| (iv) | $x - 7 = 1$ | $x = 7$ | |
| (v) | $x - 7 = 1$ | $x = 8$ | |
| (vi) | $5x = 25$ | $x = 0$ | |
| (vii) | $5x = 25$ | $x = 5$ | |
| (viii) | $5x = 25$ | $x = -5$ | |
| (ix) | $\frac{m}{3} = 2$ | $m = 6$ | |
| (x) | $\frac{m}{3} = 2$ | $m = 0$ | |
| (xi) | $\frac{m}{3} = 2$ | $m = 6$ | |

2. ఆవరణంలో ఇచ్చిన విలువలు, ఇచ్చిన సమీకరణాలకు పరిహారమా/సాధిననా కాదా పరీక్షించండి.

(a) $n + 5 = 19$ $(n = 1)$ (b) $7n + 5 = 19$ $(n = -2)$ (c) $7n + 5 = 19$ $(n = 2)$

(d) $4p - 3 = 13$ $(p = 1)$ (e) $4p - 3 = 13$ $(p = -4)$ (f) $4p - 3 = 13$ $(p = 0)$

3. విచారణా పరాధాలు (ప్రయత్నం మరియు దోషం) (trial and error) విధానం ద్వారా కింది సమీకరణాలను సాధించండి.
   (i) $5p + 2 = 17$ (ii) $3m - 14 = 4$

4. కింది వ్యాఖ్యానాలకు సమీకరణాలు రాయండి.
   (i) '$x$' మరియు 4 యొక్క మొత్తం 9.
   (ii) '$y$' నుండి 2ను తీసివేసినప్పుడు 8 లభిస్తుంది.
   (iii) '$a$' యొక్క 10 రెట్లు 70.
   (iv) '$b$' ని 5 నుండి భాగించినప్పుడు 6 లభిస్తుంది.
   (v) '$t$' యొక్క నాల్గింటిలో మూడింతలు 15.
   (vi) '$m$' యొక్క 7 ఇంతలు మరియు 7 వీటి మొత్తం 77.
   (vii) '$x$' యొక్క సంఖ్యలో నాల్గవవంతుకు 4ను తీసివేసినప్పుడు 4 లభిస్తుంది.
   (viii) '$y$' యొక్క 6 రెట్లునుండి 6ను తీసివేసినప్పుడు 60 లభిస్తుంది.
   (ix) '$z$' యొక్క మూడవవంతుకు 3ను కూడినప్పుడు 30 లభిస్తుంది.

5. కింది సమీకరణాలను వ్యాఖ్యానాల రూపంలో రాయండి.
   (i) $p + 4 = 15$ (ii) $m - 7 = 3$ (iii) $2m = 7$ (iv) $\frac{m}{5} = 3$
   (v) $\frac{3m}{5} = 6$ (vi) $3p + 4 = 25$ (vii) $4p - 2 = 18$ (viii) $\frac{p}{2} + 2 = 8$

6. కింది వ్యాఖ్యానాలను సమీకరణ రూపంలో రాయండి.
   (i) ఇర్ఫాన్ తన దగ్గర హర్మీత్ దగ్గరవున్న గోళీలకన్న ఐదురెట్లుకంటె 7 గోళీలు ఎక్కువగానున్నది అని చెబులౌడు. ఇర్ఫాన్ దగ్గర 37 గోళీలుకలవు (హర్మీత్ దగ్గరవున్న గోళీల సంఖ్య '$m$' అని తీసుకోండి).
   (ii) లక్ష్మి తండ్రికి 49 సంవత్సరాలు తండ్రికి లక్ష్మి వయస్సుకన్న మూడురెట్లుకంటె 4 సంవత్సరాలు ఎక్కువగావుంది. (లక్ష్మి వయస్సు '$y$'అని తీసుకోండి).
   (iii) తరగతిగదిలో ఉపాధ్యాయులు, ఒక విద్యార్థి పొందిన గరిష్ఠ అంకములు మరొక విద్యార్థి పొందిన అతి తక్కువ అంకములు 2 రెట్లుకంటె 7 అంకములు ఎక్కువగావున్నది అని చెబుతారు. గరిష్ఠ అంకములు 87 (తక్కువ అంకములను '$l$' అని తీసుకోండి).
   (iv) సమద్విబాహు త్రిభుజంలో శీర్షకోణం (Vertex angle) ఏదైనా ఒక పాదపుకోణం రెండు రెట్లుకలదు (పాదకోణం $b$ డిగ్రి అనుకోండి. త్రిభుజాల అంతర్ కోణాల మొత్తం $180°$ అని జ్ఞాపకముండని)

## 4.4.1 సమీకరణాన్ని సాధించడం.

సమానత్వాన్ని గమనించండి $8 - 3 = 4 + 1$ (4.5)

ఇక్కడ (4.5) రెండు వైపలు సమానంగావుండడాన్ని సమానత్వం సాధించింది (రెండు వైపులు = 5)

- రెండు వైపులు 2ను కూడినపుడు
  LHS $= 8 - 3 + 2 = 5 + 2 = 7$ RHS $= 4 + 1 + 2 = 5 + 2 = 7$.
  మరొకసారి సమానత్వం సాధించింది (LHS మరియు RHS సమానంగావుంది)
  ఇలా, ఒక సమానత్వం యొక్క రెండు వైపులు ఒకే సంఖ్యను కూడితే మళ్ళీ సమానంగావుంటుంది.
- రెండు వైపులా 2ను తీసివేసినప్పుడు
  LHS $= 8 - 3 - 2 = 5 - 2 = 3$ RHS $= 4 + 1 - 2 = 5 - 2 = 3$.
  మరొకసారి సమానంగావుంది.
  ఇలా, ఒక సమానత్వం రెండు వైపులా ఒకే సంఖ్యను తీసివేసినప్పుడు, అవి మళ్ళీ సమానత్వం అన్వయమవుతుంది.
- అదేవిధంగా, సమానత్వం రెండువైపుల శూన్యంకాని సంఖ్యతో గుణించినప్పుడు మరియు భాగించినపుడు అవి మరొకసారి సమనానంగావుంటుంది.
  ఉదాహరణకు, సమానత్వం రెండు వైపులను 3 నుండి గుణిస్తాం.
  LHS $= 3 \times (8 - 3) = 3 \times 5 = 15$,
  RHS $= 3 \times (4 + 1) = 3 \times 5 = 15$.
  సమానత్వం సాధించింది.
  ఇప్పుడు సమానత్వపు రెండు వైపులను 2తో భాగిస్తాం,
  LHS $= (8 - 3) \div 2 = 5 \div 2 = \frac{5}{2}$
  RHS $= (4+1) \div 2 = 5 \div 2 = \frac{5}{2}$ = LHS
  మళ్ళీ సమానత్వం సాధించింది. ఏ సమానత్వాన్ని పరీక్షించిననూ, ఇదే ఫలితాంశం లభిస్తుంది.

మనం ఈ నియమాలను గమనించకుండా సమానత్వపు రెండు వైపుల ఒకే సంఖ్యను కూడడానికి బదులుగా వేర్వేరు సంఖ్యలను కూడి యుంటే సమానత్వాన్ని సాధించుటకు సాధ్యమయ్యేదికాదు. (రెండు వైపులు అసమానంగా వుండేవి) మరొకసారి సమానత్వం (4.5)ను తీసుకొందాం.

$$8 - 3 = 4 + 1$$

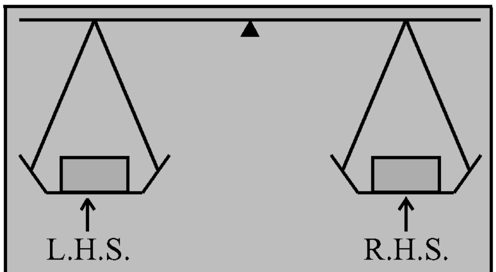
LHS కు 2 ను మరియు RHS కు 3ను కూడుదాం. ఇప్పుడు LHS, $8-3+2 = 5+2 = 7$ మరియు RHS, $4+1+3 = 5+2 = 8$.

ఇక్కడ LHS మరియు RHS సమానంగా లేనందువల్ల

సమానత్వాన్ని సాధించుటకు సాధ్యంకాలేదు ఇలా సమానత్వం రెండువైపులా ఒకే విధమైన గణిత క్రియను ఒకే సంఖ్యను ఉపయోగించి చేయకపోతే సమానత్వాన్ని సాధించుటకు కాదు.

చరాక్షరాలన్ని కలిగియున్న సమానత్వమే సమీకరణం.

ఒక సమీకరణంలో చరాక్షరాలు సంఖ్యను ప్రతినిధించడంవల్ల (represent) ఈ నిర్ణమాలు అక్కడ కూడ చెల్లుబాటు అవుతుంది.



ఒక సమతుల్యమైన సమీకరణం తట్టలలో సమబరువులను కలిగివున్న తక్కడి.

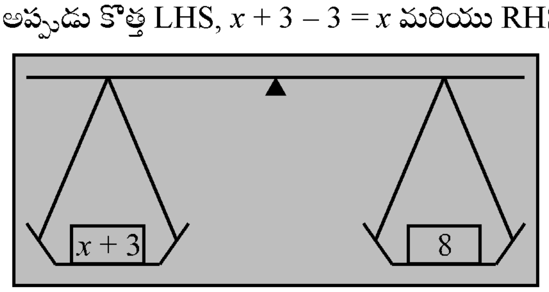
సమీకరణాన్ని ఒక తక్కెడతో (Weighing balance) పోల్చవచ్చు. సమీకరణంలో జరుగు గణిత క్రియ తక్కెడ తట్టనుండి. బరువులను తీయు మరియు చేర్పు క్రియలాగేవుంది. సమీకరణంలో తట్టలలో సమబరువులను కలిగియున్న తక్కడే అయినది. తట్టలలో సమబరువున్నప్పుడు తక్కెడ పట్టి సమతలంగా (horizontal) వుంటుంది. సమబరువులను తట్టలో చేర్చినప్పుడు పట్టి (arm) సమతలంగావుంటుంది. అదే విధంగా సమబరువులను తట్టనుండి తీసినపుడు కూడా పట్టి (arm) సమతలంలోనే వుంటుంది. వేర్వేరు బరువులను తట్టలకు చేర్చించినా లేదా తీసిన పట్టీ వాలుతుండేది (tilt) మరియు సమతలంగా వుండేదికాదు.

ఇదే తత్వాన్ని సమీకరణాన్ని సూక్ష్మీకరించేటపుకు ఉపయోగిస్తాం. ఇక్కడ సమతోలనం అనునది కాల్పనికం సంఖ్యలను బరువులకు బదులు భౌతికంగా సమతోలనాన్ని సాధించుటకు ఉపయోగించబడుతుంది. తత్వాన్ని ఉపయోగించు నిజమైన ఉద్దేశం ఇదే కొన్ని ఉదాహరణాలను తీసుకొందాం.

- కింది సమీకరణాన్ని తీసుకొందాం $x + 3 = 8$ (4.6)

  సమీకరణపు రెండు వైపుల నుండి 3ను తీసివేద్దాం.

  అప్పుడు కొత్త LHS, $x + 3 - 3 = x$ మరియు RHS $8 - 3 = 5$




మనం 3నే ఎందుకు తీసివేయాలి? వేరే సంఖ్యను ఎందుకు తీసివేయరాదు?
3ను కూడడానికి ప్రయత్నించండి.
దీనివల్ల సమీకరణాన్ని సాధించుటకు సహాయపడుతుందా?
ఎందుకు అవ్వదు?
3ను తీసివేయడంవల్ల
LHS లో '$x$' మాత్రం మిగులుతుంది.

సమీకరణపు సమతోలనంలోఎలాంటి వ్యత్యాసం లేనందువల్ల.

క్రొత్తదైన LHS = క్రొత్తదైన RHS లేదా $x = 5$

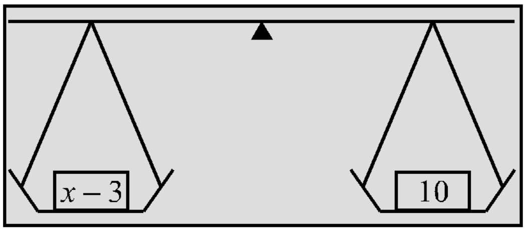
మనకు అవసరమున్నది కూడా ఇదే $x = 5$ అనునది సమీకరణపు (4.6) యొక్క సాధన.

మన జవాబు సరిగ్గావుందో అని ధృవీకరించుటకు $x = 5$ ను మూలసమీకరంలో ఆదేశించి పరిశీలిద్దాం.

LHS $= x + 3 = 5 + 3 = 8$, ఇది అవసరమున్న RHS కు సమానంగావుంది.

సమీకరణపు రెండు వైపుల సరైన గణిత క్రియను (3నుండి తీసివేసినది) అన్వయించడంవల్ల సరైన పరిహారం/సాధన లభించింది.

- ఇంకొంక సమీకరణాన్ని చూద్దాం $\qquad x - 3 = 10 \qquad (4.7)$




ఇక్కడ ఏమి చేయవలెను? రెండు వైపులా 3ను కూడడం వల్ల సమీకరణం సమతోలనంలోనే LHS లో '$x$' మాత్రం మిగులుతుంది.

క్రొత్తదైన LHS $= x - 3 + 3 = x$, క్రొత్తదైన RHS $= 10 + 3 = 13$

కావున $x = 13$, అవసరమైన పరిహారం/సాధన

$x = 13$ యొక్క విలువను మూల సమీకరణంలో (4.7) ఆదేశించి పరిహారాన్ని ధృవీకరించవచ్చు.

మూల సమీకరణపు LHS $= x - 3 = 13 - 3 = 10$

ఇది అవసరమైన LHS

- అదేవిధంగా కింది సమీకరణాలను చూద్దాం.

$$5y = 35 \qquad (4.8)$$

$$\frac{m}{2} = 5 \qquad (4.9)$$

మొదటి ప్రకరణలో, రెండు వైపులను 5లో భాగించవలెను. దీనివల్ల LHS లో $y$ మాత్రం మిగులుతుంది.

క్రొత్తదైన LHS $= \frac{5y}{5} = \frac{5 \times y}{5} = y$, $\qquad$ క్రొత్తదైన RHS $= \frac{35}{5} = \frac{5 \times 7}{5} = 7$

కావున $\qquad y = 7$

ఇది అవసరమైన పరిహారం/సాధన, $y = 7$ విలువను సమీకరణం(4.8) లో ఆదేశించి చేసుకోవచ్చు.

రెండవ ప్రకరణంలో, రెండు వైపులను 2తో గుణించవలెను.

దీనివల్ల LHS లో '$m$' మాత్రం మిగులుతుంది.

క్రొత్తదైన LHS = $\frac{m}{2} \times 2$ = $m$. క్రొత్తదైన RHS = 5 × 2 = 10.

కావున $m$ =10 (ఇది అవసరమైన పరిహారం/సాధన; పరిహారం సరిగ్గావున్నదా అని పరీక్షించవచ్చును) సమీకరణాన్ని సాధించుటకు ఏ గణిత క్రియను ఉపయోగాచాలి అనునది ఆ సమీకరణం పై ఆధారపడివుంటుంది. అని పై ఉదాహరణాలవల్ల తెలుసుకోవచ్చు. మన ప్రయత్నం చరాక్షరాన్ని ప్రత్యాకం చేయడమైయుండాలి ప్రత్యేకించుటకు ఒక్కొక్కసారి ఒకటికంటే ఎక్కువ గణిత క్రియలను ఉపయోగించవలసివుంటుంది. ఇప్పుడు ఈ విధమైన సమీకరణాలను సాధిద్దాం.

**ఉదాహరణం 5 :** సాధన (a) $3n + 7 = 25$ (4.10)

(b) $2p - 1 = 23$ (4.11)

**సాధన :**

(a) మనం దశలు దశలుగా LHS లోగల '$n$' ను ప్రత్యేకపరుస్తాం ఎడమవైపు $3n + 7$ అవుతుంది. మొదట 7ను తీసివేయడంవల్ల $3n$ ను పొందుతాం. తరువాతి దశలో 3నుండి భాగించండి. '$n$' పొందుతాం ఈ క్రియను సమీకరణపు రెండు వైపులా ఉపయోగించాలి అనునది జ్ఞాపకముండనీయండి, కావున రెండు వైపులా 7ను తీసివేసినప్పుడు.

$$3n + 7 - 7 = 25 - 7 \quad \text{(1వ దశ)}$$

లేదా $3n = 18$

ఇప్పుడు రెండు వైపుల 3తో భాగించినప్పుడు

$$\frac{3n}{3} = \frac{18}{3} \quad \text{(2వ దశ)}$$

లేదా $n = 6$, ఇది సాధించబడింది.

(b) మనం ఇక్కడ ఏం చేయవచ్చును? మొదట 1ని రెండు వైపులా కూడుదాం.

$$2p - 1 + 1 = 23 + 1 \quad \text{(1వ దశ)}$$

లేదా $2p = 24$

ఇప్పుడు రెండు వైపులా 2తో భాగిద్దాం $\frac{2p}{2} = \frac{24}{2}$ (2వ దశ)

లేదా $p = 12$, ఇది సాధించబడింది.

లభించిన జవాబును చేయడం, మనం పెంచుకోదగిన మంచి అలవాటు పై (a) సమస్యను చేయకపోయినా ఈ సమస్యను తాళె చేద్దాం.

సాధన, $p = 12$ సమీకరణంలో ఆదేశిద్దాం

$$\text{LHS} = 2p - 1 = 2 \times 12 - 1 = 24 - 1$$
$$= 23 = \text{RHS}$$

ఇలా పరీక్షించి సాధన సరిగ్గానున్నది అని తెలుసుకున్నాం.

మీరు, (a) యొక్క సాధనను/పరిహారాన్ని ఎందుకు పరిశీలించరాదు?

ఇప్పుడు మనం అప్పు, సరితా మరియు అమీనా జరిపించిన మనస్సులో సంఖ్యను చెప్పే ఆటకు వెళ్దాం. వారు జవాబులను ఎలా పొందారో వాటిని అర్థం చేసుకొందాం. ఈ ఉద్దేశం కోసం వరుసగా అమీన మరియు అప్పు ఉదాహరణాలకు సరిపోవు (4.1) మరియు (4.2)ను సమీకరణాలను గమనిద్దాం.

- మొదట ఈ సమీకరణాన్ని పరిగణిద్దాం $4x + 5 = 65$. (4.1)

  రెండు వైపులా 5ను తీసివేసినప్పుడు $4x + 5 - 5 = 65 - 5$.

  i.e. $4x = 60$

  రెండు వైపులను 4తో భాగించి ఇది '$x$' ను ప్రత్యేకిస్తుంది. $\frac{4x}{4} = \frac{60}{4}$

  లేదా $x = 15$. ఇది పరిహారమైనది/సాధన (సరిగ్గావుందా పరిశీలించండి)

- ఇప్పుడు $10y - 20 = 50$ ను పరిగణిద్దాం (4.2)

  రెండువైపులను 20ని కూడినప్పుడు, $10y - 20 + 20 = 50 + 20$ లేదా $10y = 70$

  రెండు వైపులను 10నుండి భాగించండి, $\frac{10y}{10} = \frac{70}{10}$

  లేదా $y = 7$. ఇది సాధించడమైంది (సరిగ్గావుందా పరిశీలించండి).

అప్పు, సరితా మరియు అమీనా సరిగ్గా ఇచ్చిన జవాబు ఇదే అని మీకు తెలుస్తుంది. వారు సమీకరణాన్ని రూపించి, సాధించడం తెలిసినందువల్ల మనస్సులోవున్న సంఖ్యను చెప్పే ఆటను నిర్మించి అందరిని ఆశ్చర్యవంతులైన విధంగా చేశారు. ఈ విభాగానికి మరొకసారి 4.7లో వెనుతిరుగుద్దాం.

## అభ్యాసం 4.2

1. కింది వాటిలో చరాక్షరాన్ని ప్రత్యేకించడానికి ఉపయోగించే ప్రథమదశను తెలపండి తరువాత సమీకరణాన్ని సాధించండి.

   (a) $x - 1 = 0$ (b) $x + 1 = 0$ (c) $x - 1 = 5$
   (d) $x + 6 = 2$ (e) $y - 4 = -7$ (f) $y - 4 = 4$
   (g) $y + 4 = 4$ (h) $y + 4 = -4$

2. ఈ కింది వాటిలో చరాక్షరాన్ని ప్రత్యేకించుటకు ఉపయోగించు ప్రథమ దశ తెలపండి తరువాత సమీకరణాన్ని సాధించండి.

   (a) $3l = 42$ (b) $\frac{b}{2} = 6$ (c) $\frac{p}{7} = 4$ (d) $4x = 25$
   (e) $8y = 36$ (f) $\frac{z}{3} = \frac{5}{4}$ (g) $\frac{a}{5} = \frac{7}{15}$ (h) $20t = -10$

3. చరాక్షరాలను ప్రత్యేకించు దశలను తెలపండి తరువాత సమీకరణాన్ని సాధించండి.

(a) $3n - 2 = 46$ (b) $5m + 7 = 17$ (c) $\frac{20p}{3} = 40$ (d) $\frac{3p}{10} = 6$

4. ఈ కింది సమీకరణాలను సాధించండి.

(a) $10p = 100$ (b) $10p + 10 = 100$ (c) $\frac{p}{4} = 5$ (d) $\frac{-p}{3} = 5$

(e) $\frac{3p}{4} = 6$ (f) $3s = -9$ (g) $3s + 12 = 0$ (h) $3s = 0$

(i) $2q = 6$ (j) $2q - 6 = 0$ (k) $2q + 6 = 0$ (l) $2q + 6 = 12$

## 4.5 ఇంకొన్ని సమీకరణాలు

ఇంకొన్ని సమీకరణాలు సాధించు అభ్యాసంచేద్దాం. ఈ సమీకరణాలను సాధించేటప్పుడు సంఖ్యలను ఒక వైపు నుండి మరొకవైపుకు మార్చడాన్ని నేర్చుకొందాం రెండు వైపులా సంఖ్యలను కూడడం లేదా తీసివేయడానికి బదులు మార్చవచ్చును.

**ఉదాహరణం 6:** $12p - 5 = 25$ సాధించండి (4.12)

**సాధన :**

- సమీకరణపు రెండువైపులా 5ను కూడినపుడు

  $12p - 5 + 5 = 25 + 5$ లేదా $12p = 30$

- రెండు వైపులను 12తో భాగించినపుడు

  $\frac{12p}{12} = \frac{30}{12}$ లేదా $p = \frac{5}{2}$

  $p = \frac{5}{2}$ సమీకరణాన్ని (4.12)లో ఆదేశించినపుడు

  $$\text{LHS} = 12 \times \frac{5}{2} - 5 = 6 \times 5 - 5$$
  $$= 30 - 5 = 25 = \text{RHS}$$

> సూచన : రెండు వైపులా 5ను కూడడం అనగా ఉండే వైపును మార్పు చేయడం (–5) అవుతుంది.
>
> $12p - 5 = 25$
>
> $12p = 25 + 5$
>
> వైపును మార్పుచేయడానికి స్థలాంతరం అంటారుభాగం. సంఖ్యను స్థలాంతరం చేయునపుడు మనం చిహ్నంను మార్చుదాము.

ఇదివరకు చూసినట్లు సమీకరణాన్ని సాధించేటప్పుడు సాధారణంగా ఉపయోగించే గణితప్రక్రియ అనగా ఒకే సంఖ్యను సమీకరణపు రెండు వైపులా కూడటం. లేదా తీసివేయడం. ఒక సంఖ్యను స్థలాంతరం చేయడమనగా (సంఖ్యను ఇంకొకవైపుకు తీసుకెళ్ళడం) అదే సంఖ్యను రెండు వైపులా కూడడం లేదా తీసివేయడం స్థలాంతరం చేయునప్పుడు సంఖ్యయొక్క చిహ్నాన్ని మార్చవలెను ఈ నియమం సంఖ్యలకు అన్వయించునట్లు బీజోక్తులకు కూడా అన్వయిస్తుంది. సంఖ్యలను స్థలాంతరం చేయు ఇంక రెండు ఉదాహరణాలను తీసుకొందాం.

| రెండు వైపులా కూడడం లేదా తీసివేయడం | స్థానాంతరం చేయడం |
|---|---|
| (i) $3p - 10 = 5$ | (i) $3p - 10 = 5$ |
| రెండు వైపులా 10ని కూడండి | $(-10)$ ను LHS నుండి RHS కు స్థానాంతరం చేయండి. |
| $3p - 10 + 10 = 5 + 10$ | $(-10$ ని స్థానాంతరం చేయునప్పుడు $+10$ అవుతుంది) |
| మరియు $3p = 15$ | $3p = 5 + 10$ లేదా $3p = 15$ |
| (ii) $5x + 12 = 27$ | (ii) $5x + 12 = 27$ |
| రెండు వైపులా 12ను తీసివేయండి. | $+12$ ను స్థానాంతరం చేసినప్పుడు. $(+12$ ను స్థానాంతరం చేయునప్పుడు $-12$ అవుతుంది) |
| $5x + 12 - 12 = 27 - 12$ | $5x = 27 - 12$ |
| లేదా $5x = 15$ | లేదా $5x = 15$ |

మనం ఇంకా రెండు సమీకరణాలను సాదిద్దాం.

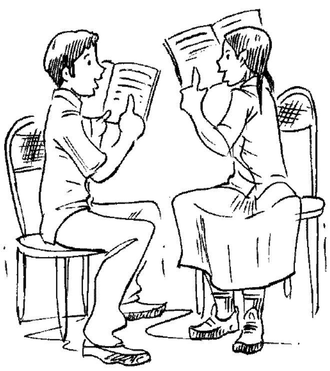
ఆవరణాన్ని పొందియున్న, సమీకరణాలను సాధించడానికి ముందు ఆవరణాన్ని తీయవలసిన ఇంకా రెండు సమీకరణాలను సాధిద్దాం.

**ఉదాహరణం 7 :** సాధించండి.

(a) $4(m + 3) = 18$ (b) $-2(x + 3) = 8$

**సాధన :**

(a) $4(m + 3) = 18$



రెండు వైపులను 4తో భాగించడంవల్ల LHS లో ఆవరణాన్ని తీయవచ్చును.

$m + 3 = \frac{18}{4}$ లేదా $m + 3 = \frac{9}{2}$

లేదా $m = \frac{9}{2} - 3$ (3ను RHS కు స్థానాంతరం చేయబడింది)

లేదా $m = \frac{3}{2}$ (సాధన) $\left(\text{as } \frac{9}{2} - 3 = \frac{9}{2} - \frac{6}{2} = \frac{3}{2}\right)$

**సరిచూడడం :** $\text{LHS} = 4\left[\frac{3}{2} + 3\right] = 4 \times \frac{3}{2} + 4 \times 3 = 2 \times 3 + 4 \times 3$ [put $m = \frac{3}{2}$]

$= 6 + 12 = 18 = \text{RHS}$

(b) $-2(x+3) = 8$

రెండు వైపులను (–2) నుండి భాగించి, LHS ఆవరణాన్ని తీయవచ్చును $x + 3 = -\frac{8}{2}$

లేదా $x + 3 = -4$

i.e., $x = -4 - 3$ (3ను RHS కు స్థళాంతరం చేయబడింది) లేదా $x = -7$ (సాధన)

సరిచూడడం LHS = $-2 \times (-7 + 3) = -2(-4)$

$= 8 =$ RHS

## 4.6 సాధనతో సమీకరణం

అకుల్ ఎప్పుడూ విభిన్నంగా ఆలోచిస్తాడు. అతడు సమీకరణాన్ని సాధించు వరుస దశలను గమనిస్తాడు. దీని వ్యతిరేకమార్గాన్ని ఎందుకు అనుసరించరాదు అనేదాని గురించి ఆశ్చర్యం వ్యక్తపరుస్తాడు.

సమీకరణం → పరిహారం (సాధారణ మార్గం)

పరిహారం → సమీకరణం (వ్యతిరేక మార్గం)

అతను అనుసరించు మార్గం :

ప్రారంభ $x = 5$

రెండు వైపులను 4తో గుణించండి. $4x = 20$

రెండు వైపులు 4తో భాగించండి.

రెండు వైపులనుండి 3ను తీసివేయండి $4x - 3 = 17$

రెండు వైపుల 3ను కూడండి.

**దీనిని ప్రయత్నించండి.**

$x = 5$ నుండి ప్రారంభించి రెండు విభిన్న సమీకరణాలను రాయండి. ఇద్దరు విద్యార్థులకు దీనిని సాధించయని చెప్పండి వారికి $x = 5$ పరిహారం లభించిందా పరిశీలించండి.

దీనినుండి సమీకరణం రూపొందింది కూడిభాగంలో చూపినవిధంగా ప్రతి దశలో వ్యతిరేక మార్గం అనుసరిస్తే పరిహారం లభిస్తుంది.

హితాకు ఇందులో ఆసక్తి పెరిగి, ముదటి దశనుండి ప్రారంభించి ఇంకొక సమీకరణం రాస్తుంది.

$x = 5$

రెండు వైపులా 3ను గుణించినప్పుడు, $3x = 15$

4ను రెండు వైపులా కూడినప్పుడు $3x + 4 = 19$

$y = 4$ నుండి ప్రారంభించి రెండు సమీకరణాలను రాసి మీ ముగ్గురి స్నేహితులను సమీకరణం రాయడానికి తెలపండి. వారు రాసిన సమీకరణాలు మీ సమీకరణాల కంటే భిన్నంగా వున్నాయా?

> సమీకరణాన్ని సాధించడమే కాదు మీరు సమీకరణాన్ని రచించవచ్చు. సమీకరణానికి ఒక పరిహారంవుంది అని గమనించారు. అలాగే ఒక పరిహారంనుండి అనేక సమీకరణాలను రాయవచ్చునని గమనించారా?

ఇప్పుడు సారా తను ఆలోచిస్తున్నా దాన్ని అందరితో పంచుకోవడానికి ఆసిస్తుంది, తను హితా రచించిన సమీకరణాన్ని వ్యాఖ్యాన రూపంలో పజిల్‌గా పరివర్తిస్తానని చెబుతుంది. ఉదాహరణకు, ఒక సంఖ్యను ఆలోచించండి. దానిని 3తో గుణించి గుణలబ్దానికి 4ను కూడడానికి చెప్పి మొత్తాన్ని అడుగుతుంది.

**వీటిని ప్రయత్నించండి.**

11 మరియు 100ను పరిహారంగా పొందివున్న రెండు సంఖ్యా పజిల్స్‌ను రాయడానికి ప్రయత్నించండి.

మొత్తం 19 అయివుంటే, హితా రచించిన సమీకరణం నుండి పరిహారం పొందవచ్చును హితా 5నుండి ప్రారంభించినందువల్ల అదే పరిహారమని తెలుసుకోవచ్చు.

సంఖ్యా పజిల్‌ను రచించడానికి అనుసరించిన మార్గం ఇదేనా అనిసారా, అప్పు, అమీనా మరియు సరితాను అడిగినప్పుడు వారు అవును అన్నారు.

సంఖ్యా పజిల్స్‌ను మరియు అదేవిధమైన సమస్యలను ఇలా రాయవచ్చునని మనం ఇప్పుడు తెలుసుకున్నాం.

## అభ్యాసం 4.3

1. కింది సమీకరణాలను సాధించండి.

(a) $2y+\frac{5}{2}=\frac{37}{2}$ (b) $5t + 28 = 10$ (c) $\frac{a}{5}+3=2$

(d) $\frac{q}{4}+7=5$ (e) $\frac{5}{2}x=-5$ (f) $\frac{5}{2}x=\frac{25}{4}$

(g) $7m+\frac{19}{2}=13$ (h) $6z + 10 = -2$ (i) $\frac{3l}{2}=\frac{2}{3}$

(j) $\frac{2b}{3}-5=3$

2. కింది సమీకరణాలను సాధించండి.

(a) $2(x + 4) = 12$ (b) $3(n - 5) = 21$ (c) $3(n - 5) = -21$

(d) $-4(2 + x) = 8$ (e) $4(2 - x) = 8$

3. కింది సమీకరణాలను సాధించండి.

(a) $4 = 5(p - 2)$ (b) $-4 = 5(p - 2)$ (c) $16 = 4 + 3(t + 2)$

(d) $4 + 5(p - 1) = 34$ (e) $0 = 16 + 4(m - 6)$

4. (a) $x = 2$ నుండి ప్రారంభించి మూడు సమీకరణాలను రాయండి.

(b) $x = -2$ నుండి ప్రారంభించి మూడు సమీకరణాలను రాయండి.

## 4.7 ప్రాయోగిక సందర్భాలలో సరళసమీకరణపు అన్వయాలు

వ్యవహారిక భాషలోని వ్యాఖ్యానాలను సమీకరణాలకు పరివర్తించడాన్ని ఇదివరకే చూశాం. సమీకరణాలను సాధించడాన్ని కూడా నేర్చుకొన్నాం. ఇప్పుడు ప్రాయోగిక సందర్భాలలో వచ్చు సమస్యలను పరిహరించవచ్చును మొదట ప్రాయోగిక సందర్భాల సమస్యలను సమీకరణ రూపానికి పరివర్తించి తరువాత సమీకరణాలను సాధించి సమస్యలకు కనుగొనవచ్చు మనం ఈ వెనుక గమనించిన (ఉదాహరణం 1(i) మరియు (iii), విభాగం 4.2) అంశాలనుండి. ప్రారంభిద్దాం.

**ఉదాహరణం 8 :** ఒక సంఖ్యయొక్క మూడురెట్లు మరియు 11ల మొత్తం 32 అయితే ఆ సంఖ్య ఏది?

**సాధన :**

- తెలియని ఆ సంఖ్య '$x$' అయితే ఆ సంఖ్యయొక్క మూడురెట్లు $3x$ అవుతుంది. $3x$ మరియు 11ల మొత్తం 32. $3x + 11 = 32$
- సమీకరణాన్ని సాధించుటకు 11ను RHS కు స్థళాంతరం చేస్తాం.

  $3x = 32 - 11$ లేదా $3x = 21$

  ఇప్పుడు రెండు వైపులను 3తో భాగించండి.

  అందువలన $x = \frac{21}{3} = 7$

  కావలసిన సంఖ్య 7 (7ను 3తో గుణించి గుణలబ్ధానికి 11ను కూడినప్పుడు 32 లభిస్తుంది).

**ఉదాహరణం 9 :** ఒక సంఖ్య యొక్క నాల్గింటిలో ఒకవంతు 7 కంటే మూడు ఎక్కువగావుంటే, ఆ సంఖ్యను కనిపెట్టండి.

**సాధన :**

- ఆసంఖ్య '$y$' అనుకొందాం '$y$' యొక్క నాల్గింటిలో ఒకవంతు $\frac{y}{4}$.

  సంఖ్య $\left(\frac{y}{4}\right)$ 7కంటే 3 ఎక్కువగావుంది.

  కావున $y$ యొక్క సమీకరణం $\frac{y}{4} - 7 = 3$

- దీనిని సాధించుటకు (–7) ను RHS కు స్థాలాంతరం చేయవలెను

**వీటిని ప్రయత్నించండి.**

(i) ఒక సంఖ్యను 6తో గుణించండి. గుణలబ్ధంతో 5ను తీసివేసినప్పుడు, మీకు 7 లభిస్తుంది ఆ సంఖ్య ఏది అని చెప్పగలరా?

(ii) ఒక సంఖ్య మూడింటిలో ఒకవంతుకు 5ను కూడినప్పుడు 8 లభిస్తుంది. ఆ సంఖ్య ఏది?

$$\frac{y}{4} = 3 + 7 = 10.$$

సమీకరణపు రెండు వైపుల 4తో గుణించినప్పుడు

$$\frac{y}{4} \times 4 = 10 \times 4 \quad \text{లేదా} \quad y = 40$$ (సాధించబడింది).

ఇప్పుడు రాసిన సమీకరణాన్ని పరిశీలిద్దాం. $y$ యొక్క విలువను సమీకరణంలో ఆదేశించినప్పుడు.

$$\text{LHS} = \frac{40}{4} - 7 = 10 - 7 = 3 = \text{RHS},$$

**ఉదాహరణం 10:** రాజు తండ్రి వయస్సు రాజు యొక్క వయస్సుకంటె మూడురెట్లుకంటె 5 సంవత్సరాలు ఎక్కువగావుంది. రాజు తండ్రి వయస్సు 44 అయితే రాజు వయస్సెంత?

**సాధన:**

- ఉదాహరణం 3లో చూపిన విధంగా రాజు యొక్క వయస్సు సూచించు సమీకరణం

$$3y + 5 = 44$$

- సమీకరణంను సాధించుటకు 5ను స్థాలాంతరం చేస్తే $3y = 44 - 5 = 39$

  రెండు వైపులను 3తో భాగించినప్పుడు, $y = 13$

  రాజు యొక్క వయస్సు 13 సంవత్సరాలు ( మీరు జవాబును పరిశీలించవచ్చు).

**వీటిని ప్రయత్నించండి.**

మామిడి పళ్ళుగల రెండు రకాల బుట్టలుకలవు పెద్ద బుట్టలలో 8 చిన్న బుట్టలలోగల పండ్ల కంటె 4 పళ్ళు ఎక్కువగా కలవు ప్రతియొక్క పెద్ద బుట్టలో 100 మామాడి పళ్ళు వుంటే ప్రతియొక్క చిన్న బుట్టిలోగల మామిడి పళ్ళు సంఖ్య ఎంత?

## అభ్యాసం 4.4

1. కింది వాటికి సమీకరణాన్ని రాసి, తెలియని ఆ సంఖ్యను కనిపెట్టండి.

   (a) ఒక సంఖ్యయొక్క 8 రెట్లుకు 4ను కూడినప్పుడు 60 లభిస్తుంది.

   (b) ఒక సంఖ్య యొక్క ఐదింటిలో 1వంతు 4ను తీసివేసినప్పుడు 3 లభిస్తుంది.

(c) ఒక సంఖ్యయొక్క నాల్గింటిలో మూడవ వంతు తీసుకొని మూడును కూడితే నాకు 21 లభిస్తుంది.

(d) ఒక సంఖ్య యొక్క రెండింతలకు 11ను తీసివేసినప్పుడు నాకు 15 లభిస్తుంది.

(e) మున్నా తనవద్దగల పుస్తకాల సంఖ్య యొక్క మూడింతలను 50 నుండి తీసివేసినప్పుడు అతనికి 8 లభిస్తుంది.

(f) ఇబెన్‌హాల్ ఒక సంఖ్యను ఆలోచిస్తుంది. ఆ సంఖ్యకు 19న కూడి 5తో భాగించినప్పుడు ఆమెకు 8 లభిస్తుంది.

(g) అన్వర్ ఒక సంఖ్యను ఆలోచిస్తాడు. ఆసంఖ్య యొక్క $\frac{5}{2}$ వంతులనుండి 7 తీసివేసినప్పుడు అతనికి 23 లభిస్తుంది.

**2.** కింది వాటిని సాధించండి:

(a) తరగతిగదిలో ఉపాధ్యాయులు, ఒక విద్యార్థి పొందిన గరిష్ట మార్కులు ఇంకొక విద్యార్థి పొందిన చాలా తక్కువ మార్కుల రెండు రెట్ల కంటె 7 ఎక్కువగా వుంది. గరిష్ట మార్కులు 87 అయితే తక్కువ మార్కులెంత?

(b) సమద్విబాహు త్రిభుజంలో పాదకోణాలు సమానంగావున్నాయి. శీర్షకోణం 40° అయితే పాదకోణాల కొలత ఎంత? (త్రిభుజం యొక్క అంతర్ కోణాల మొత్తం 180°సమం).

(c) సచిన్, రాహుల్ తీసుకున్న రన్‌ల (పరుగులు) రన్‌లకంటే రెండింతలు రన్‌లు (పరుగల) తీసుకున్నాడు. వారిద్దరు మొత్తంగా తీసుకున్న రన్‌లు (పరుగులు) ద్విశతకానికంటె 2 తక్కువయితే ఒకొక్కరు తీసుకున్న పరుగులు ఎంత?

**3.** కింది వాటిని సాధించండి.

(i) ఇర్ఫాన్ దగ్గర హర్మీత్ వద్దగల గోలిలకన్నా 5 ఇంతలుకంటే 7 గోళీలు ఎక్కువగాగలవు ఇర్ఫాన్ దగ్గర 37 గోళీలువుంటే పర్మీత్ దగ్గరవున్న గోళీల సంఖ్య ఎంత?

(ii) లక్ష్మి తండ్రికి 49 సంవత్సరాలు. తండ్రివయస్సు లక్ష్మి వయస్సు యొక్క మూడు రెట్లకంటె 4 సంవత్సరాలు ఎక్కువగావుంది. లక్ష్మి వయస్సెంత?

(iii) సుందర గ్రామం ఉద్యానవనంలో ప్రజలు మొక్కలను నాటారు వీటిలో కొన్ని పండ్ల మొక్కలు, ఇతర మొక్కలు పండ్ల మొక్కల సంఖ్య యొక్క మూడింతలుకంటె రెండు ఎక్కువగావుంది ఇతర మొక్కల సంఖ్య 77 వున్నచో, పండ్ల మొక్కల సంఖ్య ఎంత?

**4.** కింది వాటి చిక్కులను సాధించండి.

| | |
|---|---|
| నేనొక సంఖ్య | నేను ఎవరు చెప్పండి! |
| నా 7 రెట్లు మరియు | దానికి యాభై కూడండి! |
| త్రిశతకం పొందడానికి | ఇంకా నలభై కావలెను! |

## ఇదివరకు మీరేమి చర్చించారు?

**1.** సమీకరణం చరాక్షరాన్ని పొందివున్న బీజోక్తి అయివుండి రెండు బీజోక్తులు ఒకే విలువను కలిగివుండాలి.

**2.** సమీకరణానికి సరిదూగే చరాక్షరం విలువ ఆ సమీకరణపు పరిహారం.

**3.** LHS మరియు RHS ను తారుమారు చేసినను సమీకరణంలో ఎలాంటి మార్పు ఉండదు.

**4.** ఒక సమతోలన సమీకరణంలో

(i) ఒకే సంఖ్యను రెండు వైపుల కూడినప్పుడు లేదా

(ii) ఒకే సంఖ్యను రెండు వైపుల తీసివేసినప్పుడు లేదా

(iii) రెండు వైపుల ఒకే సంఖ్యతో గుణించినప్పుడు లేదా

(iv) రెండు వైపుల ఒకే సంఖ్యతో భాగించినప్పుడు సమీకరణం మార్పుచెందదు అంటే LHS మరియు RHS యొక్క విలువలు ఒకటే అయివుంటాయి.

**5.** పై లక్షణాలవల్ల సమీకరణాన్ని క్రమబద్ధంగా సాధించవచ్చు. రెండు వైపుల ఒకే విధమైన వరుస గణిత క్రియలను అన్వయించడం ద్వారా చరాక్షరాన్ని ఒక వైపు ప్రత్యేకించవచ్చు చివరి దశ సమీకరణపు పరిహారమైవుంటుంది.

**6.** స్థలాంతరం చేయడం అనగా ఇంకొక వైపు మార్చడం ఒక సంఖ్యను స్థలాంతరం చేయడం మరియు ఒకే సంఖ్యను రెండు వైపుల కూడడం లేదా (తీసివేయడం) పరిణామం ఒకటే అయివుంటుంది. ఒక సంఖ్యను ఒకవైపునుండి ఇంకొకవైపుల స్థలాంతరం చేసినప్పుడు మీరు చిహ్నం/గుర్తును మార్చవలెను.

ఉదాహరణకు, $x + 3 = 8$ సమీకరణంలో +3 ను LHS నుండి RHSకు స్థలాంతరంచేసినప్పుడు, $x = 8-3 = 5$. బీజోక్తులను (బీజపదాలను) కూడా ఇదే విధంగా స్థలాంతరంచేయవచ్చు.

**7.** ప్రయోగిక సందర్భాలకు అన్వయించునట్లు బీజోక్తులను (బీజపదాలను) రచించడాన్ని నేర్చుకొన్నాం

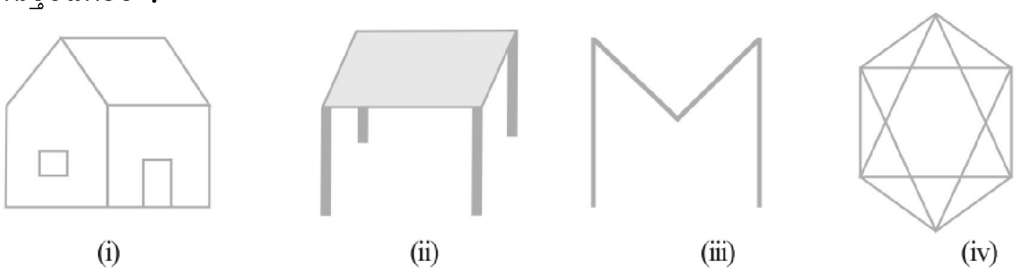
**8.** సమీకరణపు రెండు వైపుల గణిత క్రియను అన్వయించు తంత్రాన్ని అనుసరించి పరిహారం కనిపెట్టినట్లు పరిగహారంలో ప్రారంభించి సమీకరణం రచించడాన్ని నేర్చుకొనియున్నాం ముందువరించిన దత్త సమీకరణాన్ని ప్రాయోగిక సందర్భానికి పోల్చడం మరియు పజిల్స్ రాయడాన్ని నేర్చుకొన్నాం.

అధ్యాయం - 5

# రేఖలు మరియు కోణములు

## 5.1 పీఠిక

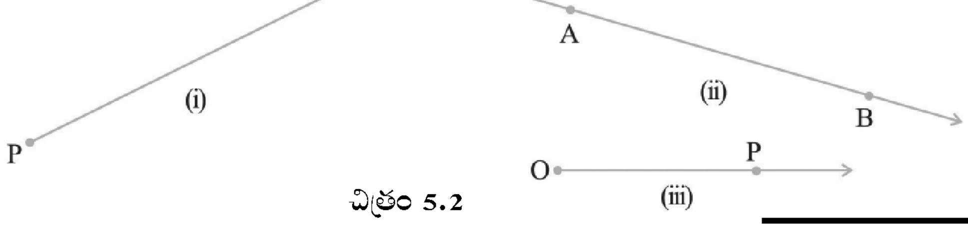
ఇచ్చిన ఆకృతులలో వివిధ రేఖలు, రేఖాఖండాలు మరియు కోణములు ఎలా గుర్తించాలో అనునది మీ కిదివరకే తెలిసింది. కింద ఇచ్చిన చిత్రాంలలో (చిత్రం 5.1) ఏర్పడిన వివిధ రేఖాఖండములు మరియు కోణములను మీరు గుర్తించగలరా?




చిత్రం 5.1

ఏర్పడిన కోణములు లఘు లేదా అధిక లేదా లంబ కోణములా? అనునది కూడా మీరు గుర్తించవచ్చు.

ఒక రేఖాఖండం రెండు అంత్య బిందువులను కలిగియుంటుదనునది జ్ఞాపకం చేసుకోండి. రెండు అంత్య బిందువులను రెండు దిక్కులలో అంత్యం లేకుండా వృద్ధిచేసినప్పుడు మనం రేఖను పొందుతాం అందువలన ఒక రేఖ ఏదైనా అంత్య బిందువులను కలిగియుండవని మనం చెప్పవచ్చు. మరొకవైపు, ఒక కిరణం ఒక అంత్య బిందువును కలిగియుంది. అనునది జ్ఞాపకం చేసుకోండి. (దాని ప్రారంభ బిందువు) ఉదాహరణకు కింద ఇచ్చిన చిత్రాలను గమనించండి.




చిత్రం 5.2

చిత్రం 5.2(i) ఒక రేఖాఖండాన్ని, చిత్రం 5.2 (ii) ఒక రేఖను మరియు చిత్రం 5.2 (iii) ఒక కిరణమును చూపుతోంది.

PQ రేఖాఖండాన్ని సాధారణంగా $\overline{PQ}$ సంకేతంతో సూచిస్తాం AB రేఖను $\overleftrightarrow{AB}$ సంకేతంతో సూచిస్తాం AB రేఖను $\overleftrightarrow{AB}$ సంకేతంతో సూచిస్తాం మరియు OP కిరణాన్ని $\overrightarrow{OP}$ అని సూచిస్తాం. రేఖాఖండాలు మరియు కోణములకు మీ నిత్యజీవితంలోగల కొన్ని ఉదాహరణములివ్వండి మరియు వాటిని మీ సహపాఠకులతో చర్చించండి.

రేఖలు లేదా రేఖా ఖండాలు కలిపినప్పుడు కోణం ఏర్పడుతుంది అనునది జ్ఞాపకం చేసుకోండి. చిత్రం 5.1లో మూలలు గమనించండి. రెండు రేఖలు లేదా రేఖాఖండాలు ఒక బిందువులో ఖండించినప్పుడు ఈ మూలలు ఏర్పడినాయి. ఉదాహరణకు కింద ఇచ్చిన చిత్రాలు గమనించండి.

చిత్రం 5.3

చిత్రం 5.3(i)లో AB మరియు BC రేఖాఖండాలు B లో కలిసి ABC కోణం ఏర్పడింది పునః BC మరియు AC రేఖాఖండాలు C లో ఖండించి ACB కోణాన్ని ఏర్పరచింది. అయితే చిత్రం 5.3 (ii)లో PQ మరియు RS రేఖలు O లో ఖండించి POS, SOQ, QOR మరియు ROP అను నాలుగు కోణాలను ఏర్పరచాయి కోణం ABC ని $\angle ABC$ Q సంకేతంతో సూచిస్తాం. చిత్రం 5.3(i) లోగల మూడు కోణములు $\angle ABC$, $\angle BCA$ మరియు $\angle BAC$ ఎలా ఏర్పడ్డాయి చిత్రం 5.3 (ii) లోగల నాలుగు కోణములు $\angle POS$, $\angle SOQ$, $\angle QOR$ మరియు $\angle POR$ ఏర్పడ్డాయి.

**వీటిని ప్రయత్నించండి.**

మీ చుట్టు ప్రక్కలగల పది చిత్రాలు పట్టీ చేయండి. వాటిలో కనబడు లఘు, అధిక మరియు లంబ కోణములను గుర్తించండి.

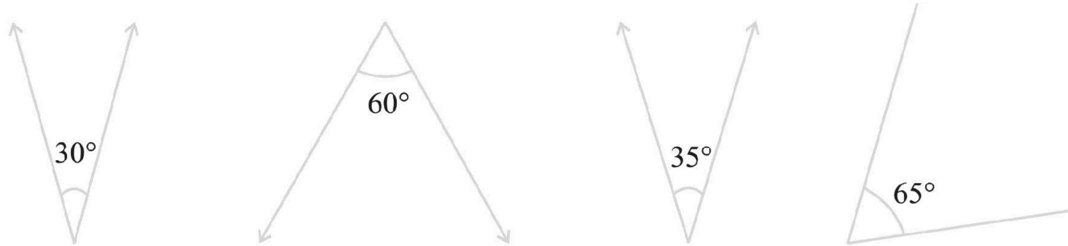
మీరిదివరకే కోణములను లఘు, అధిక లేదా లంబ కోణములుగా ఎలా వర్గీకరించవచ్చో నేర్చుకున్నారు.

**గమనించండి :** ABC కోణపు కొలతను సూచించునప్పుడు మనం $m\angle ABC$ అని రాయాలి. అయితే దానిని సులభంగా $\angle ABC$ అని రాస్తాం రాసిన సందర్భానుసారం అని కోణమా లేదా కోణపు కొలతా అనుదానిని గ్రహిస్తాం.

## 5.2 సంబంధించిన కోణములు

### 5.2.1 పూరక కోణములు

రెండు కోణముల కొలతల మొత్తం 90° అయినచో, ఆ కోణములను పూరక కోణములు అని రాస్తాం.




(i) (ii) (iii) (iv)

ఈ రెండు కోణములు పూరక కోణాలయ్యాయా? అవును

ఈ రెండు కోణములు పూరక కోణాలయ్యాయా? కాదు

చిత్రం 5.4

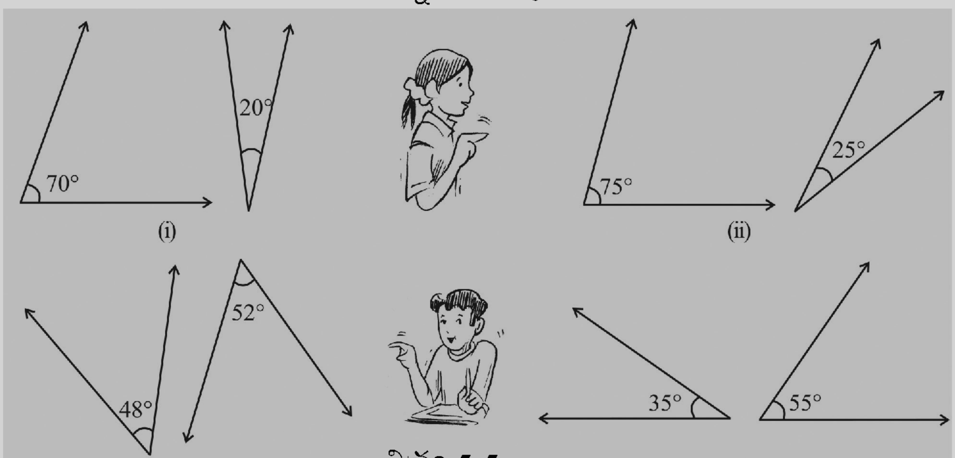
రెండు కోణములు పూరక కోణాలయినప్పుడు ప్రతి కోణం మరొక కోణపు పూరకంగా ఉంటుంది. పై చిత్రంలో (చిత్రం 5.4) '60° కోణపు పూరక కోణం 30° అయింది.

**ఆలోచించి, చర్చించి రాయండి.**

1. రెండు లఘు కోణములు పరస్పరం పూరకంగా ఉండవచ్చా?
2. రెండు అధిక కోణములు పరస్పరం పూరకంగా ఉండవచ్చా?
3. రెండు లంబ కోణములు పరస్పరం పూరకంగా ఉండవచ్చా?

**వీటిని ప్రయత్నించండి.**

1. కింది ఏ జంట కోణాలు పూరకంగా ఉన్నాయి? (చిత్రం 5.5)



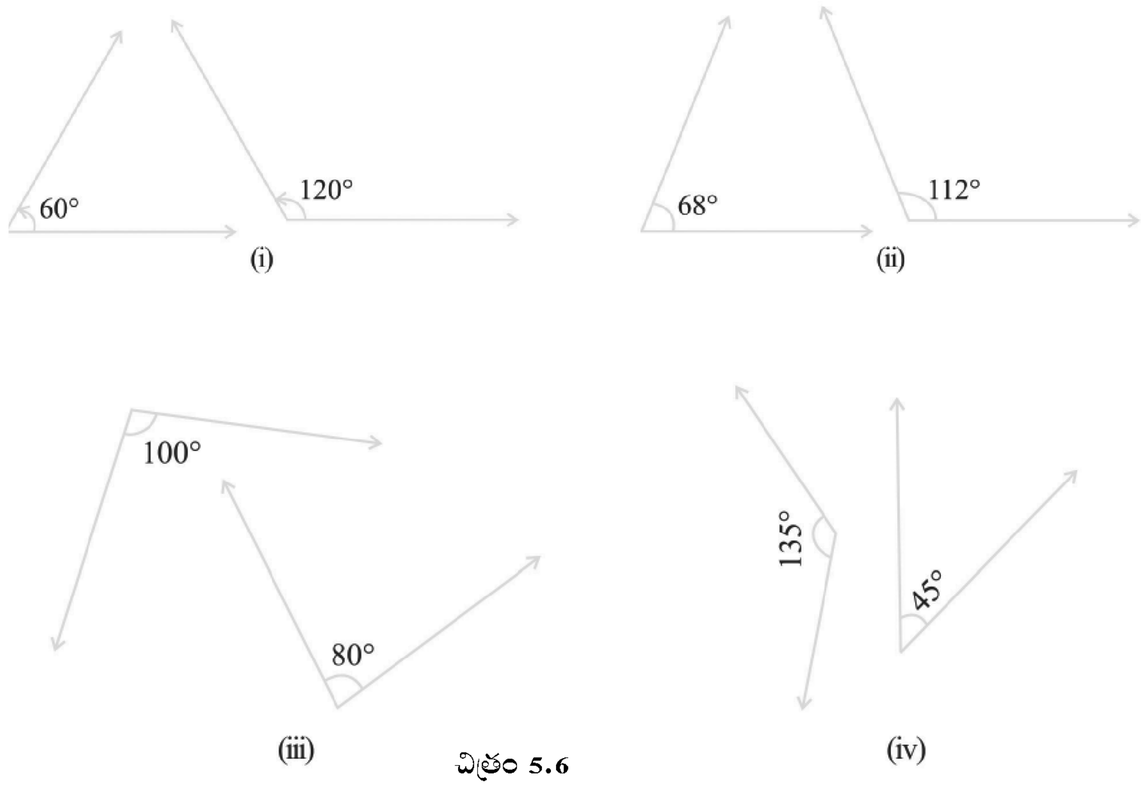

చిత్రం 5.5

2. కింద ఇచ్చిన ప్రతి కోణపు పూరక కొలత ఎంత?
   (i) $45^\circ$   (ii) $65^\circ$   (iii) $41^\circ$   (iv) $54^\circ$

3. రెండు పూరక కోణాల కొలతయొక్క వ్యత్యాసం $12^\circ$ ఉంది. ఆ కోణములు కనుగొనండి.

## 5.2.2 పరిపూరక కోణములు

కింద ఇచ్చిన జంట కోణములు గమనిద్దాం. (చిత్రం 5.6).




చిత్రం 5.6

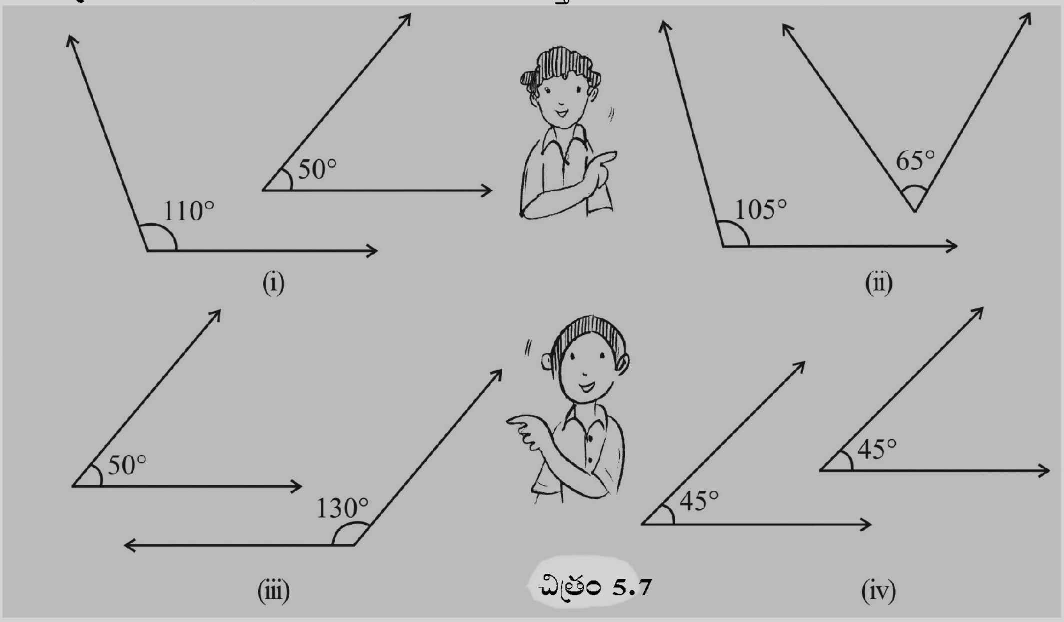
ఇచ్చిన ప్రతి జంట కోణములలో, రెండు కోణముల కొలత మొత్తం $180^\circ$ అయివుండుటను మీరు గమనించారా? ఈ విధమైన జంట కోణాలను **పరిపూరకకోణములు** అంటారు. రెండు కోణములు పరిపూరక కోణములయినచో, ప్రతి కోణం మరొకదాని **పరిపూరకంగా** ఉంటుంది.

**ఆలోచించి, చర్చించి రాయండి.**

1. రెండు అధిక కోణములు పరిపూరకంగాఉండవచ్చా?
2. రెండు లఘు కోణములు పరిపూరకంగాఉండవచ్చా?
3. రెండు లంబ కోణములు పరిపూరకంగాఉండవచ్చా?

**వీటిని ప్రయత్నించండి.**

**1.** చిత్రం 5.7లో పరిపూరక కోణముల జంటను గుర్తించండి.




చిత్రం 5.7

**2.** కింద ఇచ్చిన ప్రతి కోణపు పరిపూరక కొలత ఎంత?

(i) $100^{\circ}$ (ii) $90^{\circ}$ (iii) $55^{\circ}$ (iv) $125^{\circ}$

**3.** రెండు పరిపూరక కోణములలో పెద్ద కోణపు కొలత చిన్న కోణపు కొలత కంటే $44^{\circ}$ పెరిగింది ఆ కోణముల కొలత కనుగొనండి.

## 5.2.3 పార్శ్వ కోణములు

కింది చిత్రాలు గమనించండి.

ఒక పుస్తకం తెరచినప్పుడు అది పై చిత్రంలో ఉన్నట్లు కనబడుతుంది. A మరియు B లో ఒక జత కోణములు ఒకదాని ప్రక్కలో మరొకటి అమర్చినట్లు మనం చూస్తాం.

ఈ చిత్రం గమనించండి. చక్రం మధ్యలో ఒకదాని ప్రక్కలో మరొకటి ఉండునట్లు మూడు కోణాలు ఏర్పడి ముండుటను మీరు గమనించగలరు.

చిత్రం 5.8

A మరియు B రెండు శీర్షాల (శృంగాలు)లో ఒక జత కోణములు ఒకదాని ప్రక్కలో మరొకటి అమర్చిబడియుండుటను మనం చూస్తాం .

ఈ కోణములు

(i) ఒక సామాన్య శీర్షాన్ని కలిగియున్నాయి.

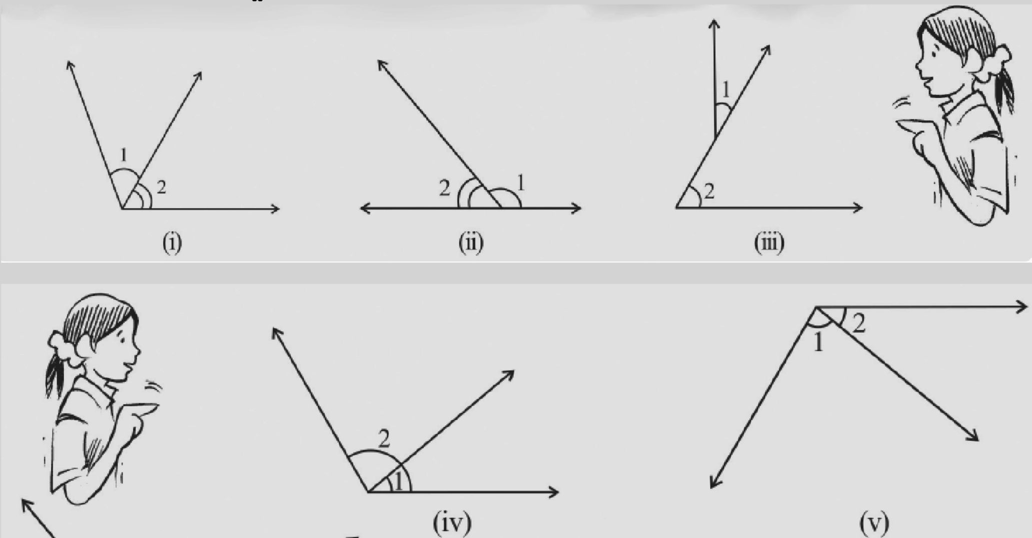
(ii) ఒక సామాన్య భుజాన్ని కలిగియున్నాయి మరియు

(iii) సామాన్యంకాని భుజాలు సాధారణ భుజం యొక్క రెండు వైపుల ఉంటాయి.

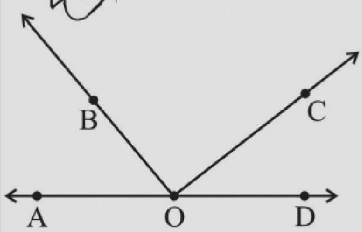
ఈ విధమైన జంట కోణాలను **పార్శ్వకోణములు** అని పిలుస్తాం. పార్శ్వకోణములు ఒక సామాన్య భుజాన్ని కలిగియుంటాయి. అయితే, ఏదైనా ఆంతరిక సామాన్య బిందువులను కలిగియుండవు.

**వీటిని ప్రయత్నించండి.**

1. 1 మరియు 2 అని గుర్తించిన కోణములు పార్శ్వకోణములా? (చిత్రం 5.9) పార్శ్వ కోణములు కానిచో ఎందుకో తెల్పండి.




చిత్రం 5.9




చిత్రం 5.10

2. చిత్రం 5.10లో కింద సూచించిన కోణములు పార్శ్వకోణములా?

(a) $\angle AOB$ మరియు $\angle BOC$ (b) $\angle BOD$ మరియు $\angle BOC$

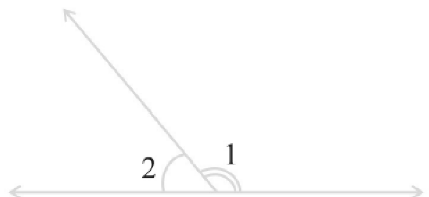
మీ జవాబును నిరూపించండి.

**ఆలోచించి, చర్చించి రాయండి.**

1. రెండు పార్శ్వకోణములు పరిపూరక కోణాలు కావచ్చా?
2. రెండు పార్శ్వకోణములు పరిపూరక కోణాలు కావచ్చా?
3. రెండు అధిక కోణములు పార్శ్వకోణాలు కావచ్చా?
4. ఒక లఘుకోణం ఒక అధిక కోణానికి పార్శ్వకోణం కావచ్చా?

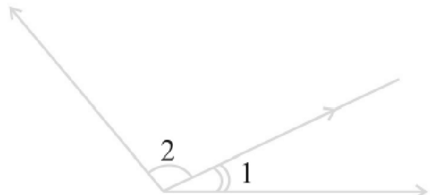
## 5.2.4 సరళయుగ్మములు

సరళ యుగ్మములు ఒక జత పార్శ్వకోణాలైవుండి, సామాన్యంకాని వాటి భుజాలు విరుద్ధ కిరణాలుగా ఉంటాయి




$\angle 1$ మరియు $\angle 2$ సరళయుగ్మములా? అవును

(i)




$\angle 1$ మరియు $\angle 2$ సరళయుగ్మములా? కాదు? (ఎందుకు)

(ii)

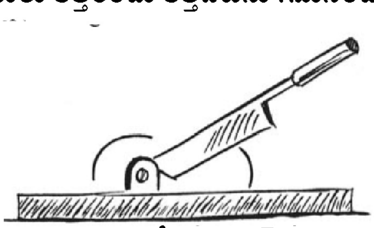
చిత్రం 5.11

చిత్రం 5.11(i) లో విరుద్ధ కిరణాలు ($\angle 1$ మరియు $\angle 2$ యొక్క సామాన్యం కాని భుజాలు) ఒక రేఖను ఏర్పరచినదానిని గమనించండి. అందువలన $\angle 1 + \angle 2$ ల మొత్తం $180°$.

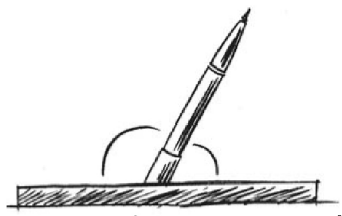
సరళయుగ్మంలోగల కోణాలు పరిపూరక కోణాలుగాఉంటాయి. మీ పరిసరంలో సరళయుగ్మాల మాదరీని గమనించారా?

ఒక జత పరిపూరక కోణాలను ఒకదాని ప్రక్కలో మరొకదాన్ని అమర్చినప్పుడు అవి సరళ యుగ్మాలవుతాయని సూక్ష్మంగా గమనించండి. మీ నిత్య జీవితంలో సరళ యుగ్మాలకు ఉదాహరణలు గుర్తించగలా?

కూరగాయలు కత్తరించు కత్తిపీటను గమనించండి. (చిత్రం 5.12)



కూరగాయలు కత్తరించు కత్తిపీట (కట్టర్) కత్తరించు బ్లేడు పీటతో సరళయుగ్మాలను ఏర్పరుస్తుంది.



పెన్‌స్ట్యాండ్ పెన్ పెన్‌స్ట్యాండ్‌తో సరళయుగ్మ కోణాలు ఏర్పరుస్తుంది.

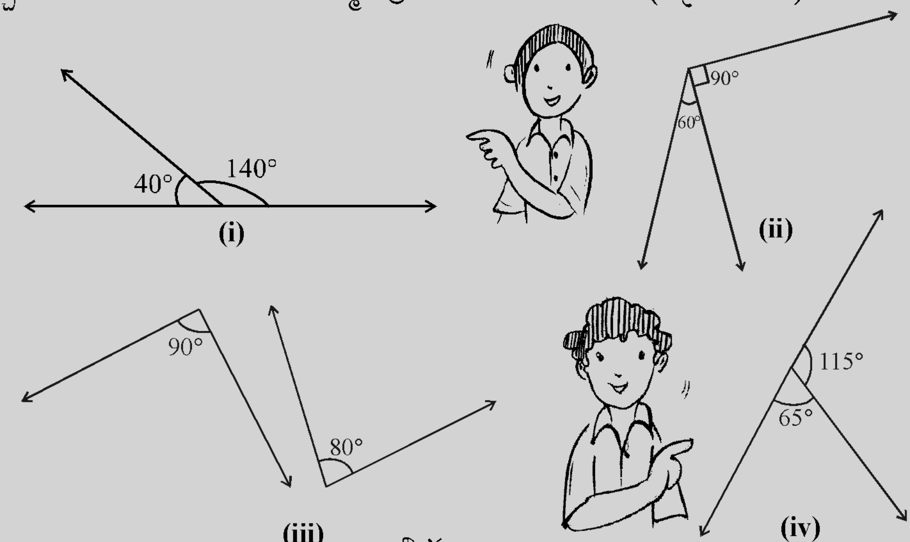
చిత్రం 5.12

**ఆలోచించి, చర్చించి, రాయండి.**

1. రెండు లఘుకోణాలు సరళయుగ్మాలవుతాయా?
2. రెండు అధిక కోణాలు సరళయుగ్మాలవుతాయా?
3. రెండు లంబకోణాలు సరళయుగ్మాలవుతాయా?

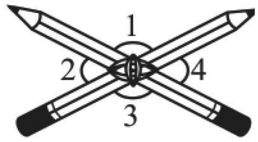
**వీటిని ప్రయత్నించండి.**

కింద ఇచ్చిన ఏ జత కోణాలు సరళ యుగ్మాలవుతాయో గమనించండి. (చిత్రం 5.13).




చిత్రం 5.13

## 5.2.5 శీర్షాభిముఖ కోణములు




చిత్రం 5.14

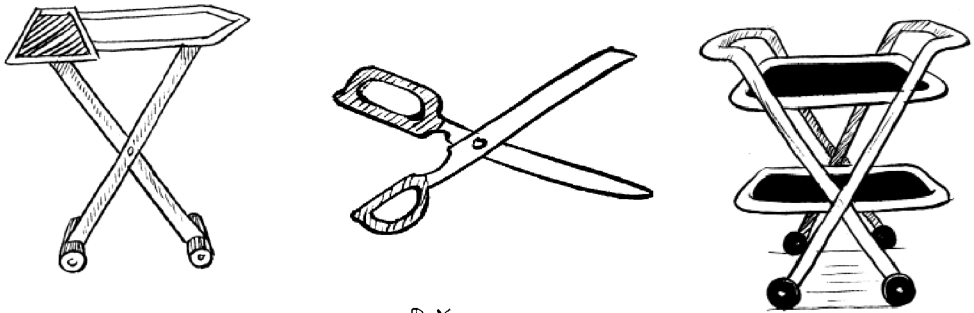
రెండు పెన్సిళ్ళు తీసుకొని ఒక రబ్బర్ బ్యాండ్ సహాయంతో వాటి మధ్యలో చిత్రంలో చూపినట్లు కట్టండి. (చిత్రం 5.14). ఇప్పుడు ఏర్పడిన $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$ మరియు $\angle 4$ ఈ నాలుగు కోణాలు గమనించండి. $\angle 3$ కు $\angle 1$ శీర్షాభిముఖమైనది $\angle 4$ కు $\angle 2$ శీర్షాభిముఖమైనది.

$\angle 1$ మరియు $\angle 3$ ను శీర్షాభిముఖాల ఒక జత అని మనం పిలుస్తాం.

$\angle 3$ కు $\angle 1$ సమానం అని కనబడుతున్నదా?

$\angle 4$ కు $\angle 2$ సమానం అని కనబడుతున్నదా?

దీనిని పరిశీలించడానికి ముందుగా మనం శీర్షాభిముఖాలకు నిజజీవితంలోని కొన్ని ఉదాహరణలు గమనిద్దాం (చిత్రం 5.15)



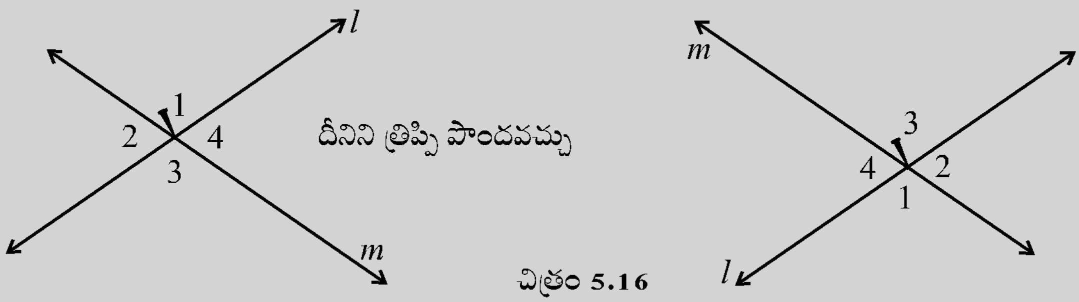
చిత్రం 5.15

## దీనిని చేయండి.

చిత్రం 5.16లో ఉన్నట్లుగా $l$ మరియు $m$ రేఖలు ఒక బిందువులో $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$ మరియు $\angle 4$ లను మీరిప్పుడు గుర్తించవచ్చు. ఒక పారదర్శక కాగితం మీద ఈ చిత్రాన్ని ట్రేస్ చేయండి.

ట్రేస్ చేసిన ప్రతిని మూల ప్రతి మీద $\angle 1$ దాని ప్రతితో పొందునట్లు, $\angle 2$ దాని ప్రతితో పొందునట్లు ......... పెట్టండి....

ఖండన బిందువులో ఒక గుండు సూదిని గ్రుచ్చండి. ప్రతిని $180^0$ కోణం ఏర్పడునట్లు త్రిప్పండి మరొకసారి రేఖలు ఐక్యమవుతాయా?




చిత్రం 5.16

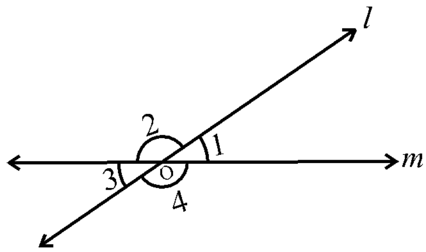
$\angle 1$ మరియు $\angle 3$ తమ స్థానాలను పరస్పరం మార్చుకొనియుండుటను గమనిస్తారు. అదేవిధంగా $\angle 2$ మరియు $\angle 4$ కూడా పరస్పరం స్థానం మార్చుకున్నాయి. రేఖల స్థానాన్ని అదేవిధంగా రక్షించుకొని దానిని చేయబడింది.

ఈ విధంగా, $\angle 1 = \angle 3$ మరియు $\angle 2 = \angle 4$

రెండు రేఖలు ఖండించినప్పుడు ఏర్పడు శీర్షాభిముఖ కోణములు సమానంగా ఉంటాయని మనం నిర్ణయించవచ్చు.

దీనిని జ్యామితి కల్పన ఉపయోగించి సాధించడానికి ప్రయత్నిద్దాం. $l$ మరియు $m$ రెండు రేఖలను గమనిద్దాం (చిత్రం 5.17) తార్కికంగా కారణాలను ఇవ్వడం ద్వారా కింది విధంగా ఫలితాలు పొందుతాం.

$l$ మరియు $m$ రెండు రేఖలు 'O' బిందువులో ఖండించండి. $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$ మరియు $\angle 4$ ను ఏర్పరచనీయండి.



చిత్రం 5.17

$\angle 1 = \angle 3$ మరియు $\angle 2 = \angle 4$ అని మనం సాధించాల్సిఉంది. ఇప్పుడు $\angle 1 = 180^0 - \angle 2$

[కారణం $\angle 1$ మరియు $\angle 2$సరళయుగ్మాలు అందువలన $\angle 1 + \angle 2 = 180^0$] (i)

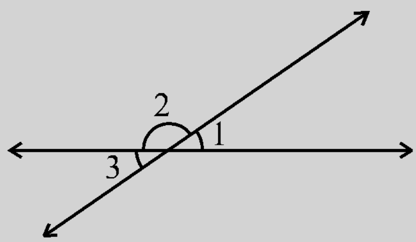
అదేవిధంగా $\angle 3 = 180^0 - \angle 2$ [కారణం $\angle 2$ మరియు $\angle 3$ సరళయుగ్మాలు అందువలన $\angle 2 + \angle 3 = 180^0$] (ii)

అందువలన $\angle 1 = \angle 3$ [(i) మరియు (ii) నుండి]

అదేవిధంగా $\angle 2 = \angle 4$ అని మనం సాధించవచ్చు. (దీనిని ప్రయత్నించండి)

**వీటిని ప్రయత్నించండి.**

1. ఇచ్చిన చిత్రంలో $\angle 1 = 30^0$ అయితే $\angle 2$ మరియు $\angle 3$ ను కనుగొనండి.
2. శీర్షాభిముఖ కోణాలకు మీ పరిసరం లోగల ఒక ఉదాహరణమివ్వండి.

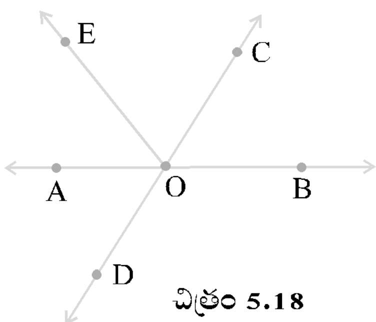


**ఉదాహరణం 1:** చిత్రం 5.18లో

(i) ఐదు జతల పార్శ్వ కోణా

(ii) మూడు సరళ యుగ్మాలు

(iii) రెండు జతల శీర్షాభిముఖ కోణాలను గుర్తించండి.



చిత్రం 5.18

**సాధన :**

(i) ఐదు జతల పార్శ్వ కోణాలు

($\angle$AOE, $\angle$EOC), ($\angle$EOC, $\angle$COB),

($\angle$AOC, $\angle$COB), ($\angle$COB, $\angle$BOD)

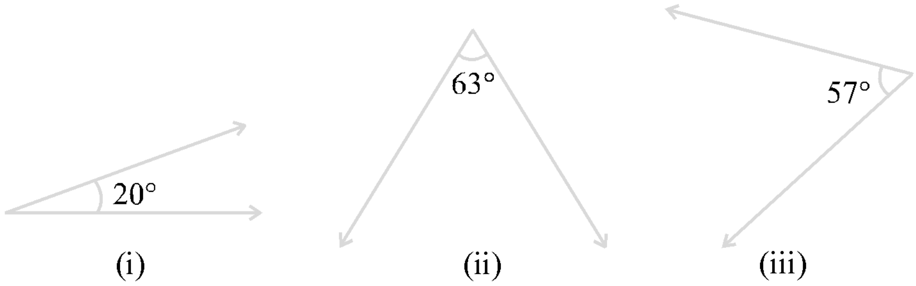
($\angle$EOB, $\angle$BOD).

(ii) సరళయుగ్మములు – ($\angle$AOE, $\angle$EOB), ($\angle$AOC, $\angle$COB) మరియు ($\angle$COB, $\angle$BOD)

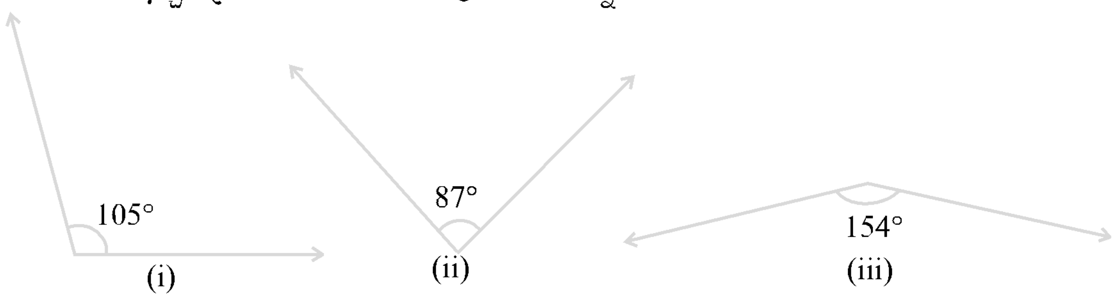
(iii) శీర్షాభిముఖ కోణాలు ($\angle$COB, $\angle$AOD) మరియు ($\angle$AOC, $\angle$BOD).

## అభ్యాసం 5.1

1. కింద ఇచ్చిన ప్రతి కోణానికి దాని పూరక కోణాన్ని కనుగొనండి.



2. కింద ఇచ్చిన ప్రతికోణానికి దాని పరిపూరక కోణాన్ని కనుగొనండి.




3. కింద ఇచ్చిన జత కోణాలలో పూరక మరియు పరిపూరక కోణాలు ఏవి? గుర్తించండి.

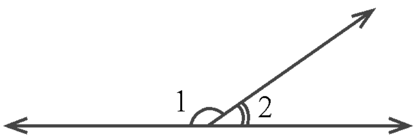
   (i) $65^0, 115^0$ (ii) $63^0, 27^0$ (iii) $112^0, 68^0$

   (iv) $130^0, 50^0$ (v) $45^0, 45^0$ (vi) $80^0, 10^0$

4. ఒక కోణం దాని పూరక కోణానికి సమానంగాఉంది. ఆ కోణాన్ని కనుగొనండి.

5. ఒక కోణం దాని పరిపూరక కోణానికి సమానంగాఉంది. ఆ కోణాన్ని కనుగొనండి. .

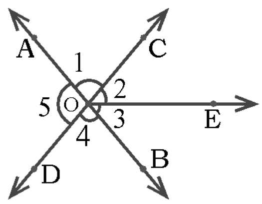
6. ఇచ్చిన చిత్రంలో $\angle 1$ మరియు $\angle 2$ పరిపూరక కోణాలు. $\angle 1$ ను తక్కువ చేసినప్పుడు రెండు కోణాలు పరిపూరక కోణాలుగానే రక్షించబడాలంటే $\angle 2$ లో ఏ మార్పులు కావాలి.




7. రెండు కోణాలు (i) లఘు కోణాలైనప్పుడు (ii) అధిక కోణాలైనప్పుడు (iii) లంబకోణాలైనప్పుడు, పరిపూరక కోణాలు కావచ్చా?

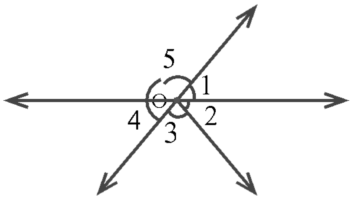
8. ఒక కోణపు కొలత 45° కంటే పెరిగింది. దాని పూరక కోణం 45° కంటే అధికంగా ఉంటుందా? లేదా 45° కు సమానంగా ఉంటుందా? లేదా 45° కంటే తక్కువగా ఉంటుందా?

**9.** చిత్రంలో (i) $\angle 2$ కు $\angle 1$ పార్శ్వకోణమా?, (ii) $\angle AOE$ కు $\angle AOC$ పార్శ్వకోణమా? (iii) $\angle COE$ మరియు $\angle EOD$ సరళయుగ్మం అవుతోందా? (iv) $\angle BOD$ మరియు $\angle DOA$ పరిపూరక కోణాలవుతాయా? (v) $\angle 4$ కు శీర్షాభిముఖ కోణమవుతుందా? (vi) $\angle 5$ కు శీర్షాభిముఖ కోణం ఏది?

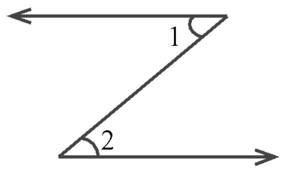



**10.** ఏ జత కోణాలు

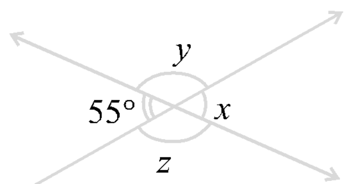
(i) శీర్షాభిముఖ కోణాలు, (ii) సరళయుగ్మాలు అవుతాయో? సూచించండి.



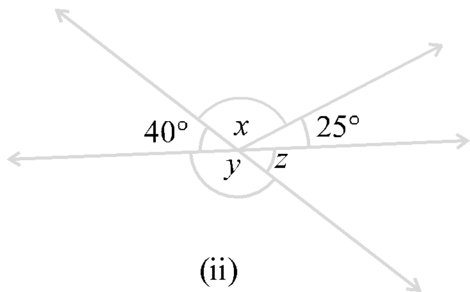

**11.** చిత్రంలో $\angle 2$ కు $\angle 1$ పార్శ్వకోణమా? కారణమివ్వండి.




**12.** కింది ప్రతిదానిలో $x$, $y$ మరియు $z$ కోణాలు విలువ కనుగొనండి.




(i)




(ii)

**13.** వదిలిన ఖాళీలను సరైన జవాబుతో నింపండి.

(i) రెండు కోణాలు పూరక కోణాలయినచో, ఆ కోణాల కొలత మొత్తం ______________

(ii) రెండు కోణాలు పరిపూరక కోణాలయినచో, ఆ కోణాల కొలత మొత్తం ____________

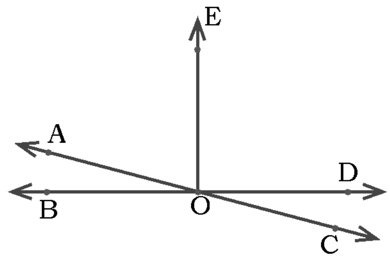
(iii) సరళయుగ్మం ఏర్పరచు రెండు కోణాలు ______________

(iv) రెండు పార్శ్వకోణాలు పరిపూరక కోణాలైనప్పుడు అవి __________________

(v) రెండు రేఖలు ఒక బిందువులో ఖండించినప్పుడు ఏర్పడు శీర్షాభిముఖ కోణాలు ఎల్లప్పుడూ ________________

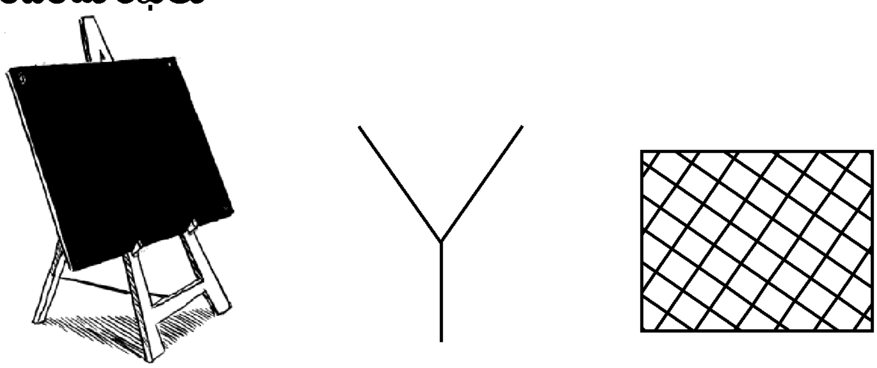
(vi) రెండు రేఖలు ఒక బిందువులో ఖండించినప్పుడు ఒక జత శీర్షాభిముఖ కోణాలు లఘు కోణాలైనప్పుడు మరొక జత శీర్షాభిముఖ కోణాలు _______________ అయివుంటాయి.

14. చిత్రం గమనించి కింద ఇచ్చిన జంట కోణాలను పేర్కొనండి.
   (i) అధిక కోణమైన శీర్షాభిముఖ కోణాలు.
   (ii) పార్శ్వకోణాలైన పూరక కోణాలు
   (iii) సమానంగాగల పరిపూరక కోణాలు.
   (iv) అసమానంగాగల పరిపూరక కోణాలు.
   (v) సరళయుగ్మంకాని పార్శ్వకోణాలు




## 5.3 జంట రేఖలు

### 5.3.1 ఖండించు రేఖలు

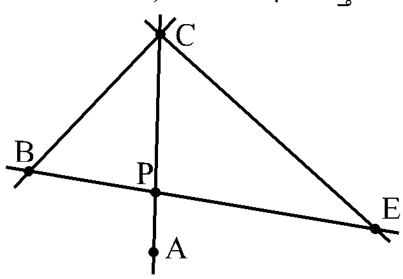


చిత్రం 5.19

స్టాండ్‌పైనగల నల్లబల్ల, రేఖాఖండాలతో ఏర్పడిన అక్షరం Y మరియు ఒక కిటికీ యొక్క గ్రిల్ వాకిలి (చిత్రం 5.19) వీటిలో సాధారణంగా కనబడు అంశం ఏది? అవి ఖండించు రేఖలకు ఉదాహరణలయ్యాయి? *l* మరియు *m* రేఖలు ఒక బిందువును సామాన్యంగా కలిగియున్నచో, అవి ఖండిస్తాయి, సామాన్య బిందువు 'O' వాటి ఖండన బిందువు అవుతుంది.

**ఆలోచించి, చర్చించి రాయండి.**

చిత్రం 5.20లో AC మరియు BE లు 'P' లో ఖండిస్తుంది. AC మరియు BC, 'C' లో ఖండిస్తుంది. AC మరియు EC, 'C' లో ఖండిస్తుంది. ఇంకా పది జతలు ఖండించు రేఖాఖండాలను కనుగొనడానికి ప్రయత్నించండి.




చిత్రం 5.20

ఏవైనా రెండు రేఖలు లేదా రేఖాఖండాలు ఖండనచేయాల్సిన అవసరంఉందా? చిత్రంలో రెండు జతల ఖండించని రేఖాఖండాలను మీరు కనుగొనగలరా?

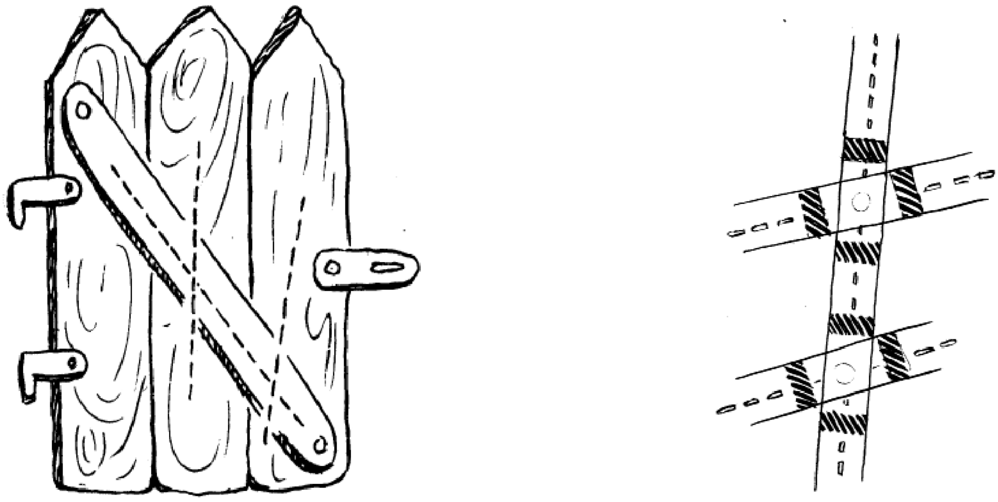
రెండు రేఖలు ఒకదాని కంటే ఎక్కువ బిందువులలో ఖండించవచ్చా? ఆలోచించండి.

**వీటిని ప్రయత్నించండి.**

1. రేఖలు లంబకోణాలలో ఖండించు కొన్ని ఉదాహరణలను మీ చుట్టు ప్రక్కలనుండి పట్టీచేయండి.
2. సమబాహు త్రిభుజపు శీర్షాలలో ఖండించు రేఖలతో ఏర్పడిన కోణాల కొలత కనుగొనండి.
3. ఒక దీర్ఘ చతురస్రం నిర్మించండి. ఖండించు రేఖలతో నాలుగు శీర్షాలలో ఏరపడిన కోణాలు కొలత కనుగొనండి. .
4. రెండు రేఖలు ఖండింపజేసినప్పుడు అవి ఎల్లప్పుడూ లంబకోణాలలలోనే ఖండిస్తాయా?

### 5.3.2 ఖండన

ఒక రోడ్డు రెండు లేదా ఎక్కువ రోడ్లకు అడ్డంగా సాగిపోవడాన్ని లేదా ఒక రైలు పట్టా చాలా పట్టాలను అడ్డంగా సాగిపోవడాన్ని మీరు చూసియుండవచ్చు (చిత్రం 5.21) అవి ఖండన యొక్క కల్పనను ఇస్తాయి.

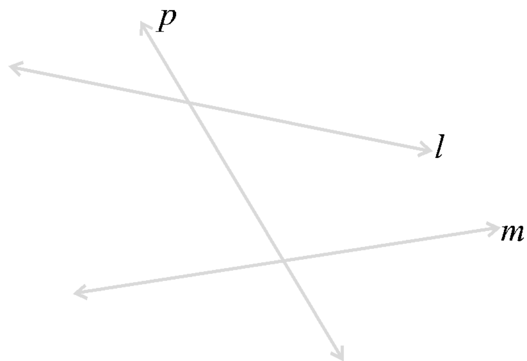


(i) (ii)

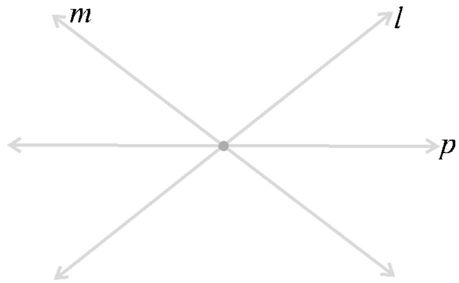
చిత్రం 5.21

ఒక రేఖ రెండు లేదా ఎక్కువ రేఖలను వివిధ బిందువులలో ఖండించు ఒక రేఖను ఖండన అని పిలుస్తాం.

చిత్రం 5.22లో $l$ మరియు $m$ రేఖలకు $p$ ఖండన అవుతుంది.




చిత్రం 5.22

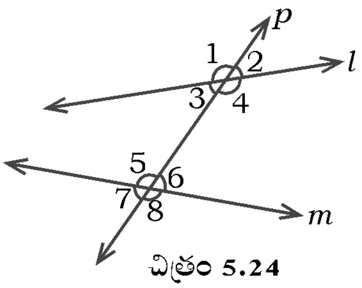



చిత్రం 5.23

చిత్రం 5.23లో $l$ మరియు $m$ రేఖలను P రేఖ ఖండించినప్పటికీ కూడా అది ఖండన కాదు ఎందుకో చెప్పగలరా?

## 5.3.3 ఒక ఖండనతో ఏర్పడిన కోణాలు

చిత్రం 5.24లో $l$ మరియు $m$ రేఖలు ఖండన రేఖ P నుండి ఖండించడాన్ని మీరు గమనిస్తారు. 1 నుండి 8 వరకు గుర్తించిన కోణాలు విశేషమైన పేర్లు కలిగియున్నాయి.




చిత్రం 5.24

**వీటిని ప్రయత్నించండి.**

1. రెండు రేఖలు ఇవ్వబడినవి. ఈ రేఖలకు మీరు ఎన్ని ఖండనలను గీయగలరు?
2. మూడు రేఖలకు ఒక రేఖ ఖండన అయినప్పుడు ఎన్ని ఖండన బిందువులుంటాయి?
3. మీ చుట్టు ప్రక్కల కనబడు కొన్నిఖండనలు గుర్తించడానికి ప్రయత్నించండి.

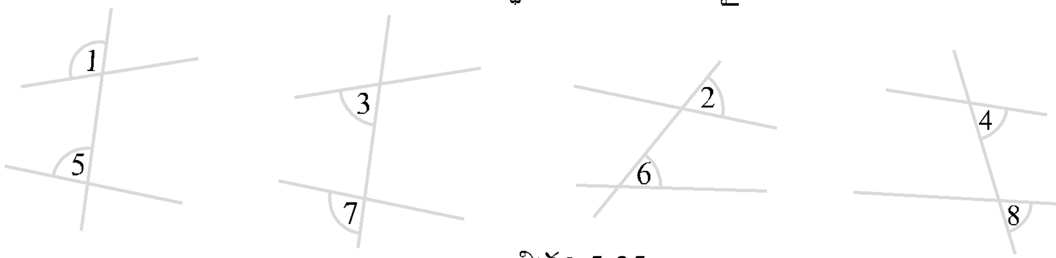
| | |
|---|---|
| అంతర కోణాలు | $\angle 3, \angle 4, \angle 5, \angle 6$ |
| బాహ్య కోణాలు | $\angle 1, \angle 2, \angle 7, \angle 8$ |
| అనురూప కోణాల జత | $\angle 1$ మరియు $\angle 5$, $\angle 2$ మరియు $\angle 6$ |
| అంతర్ పర్యాయ కోణాల జత | $\angle 3$ మరియు $\angle 7$, $\angle 4$ మరియు $\angle 8$ |
| బాహ్య పర్యాయ కోణాల జత | $\angle 1$ మరియు $\angle 8$, $\angle 2$ మరియు $\angle 7$ |
| ఖండన యొక్క ఒకే పార్శ్వంలోగల అంతర్ కోణాల జత | $\angle 3$ మరియు $\angle 5$, $\angle 4$ మరియు $\angle 6$ |

**గమనించండి :** అనురూప కోణాలు (చిత్రం 5.25లో ఉదా ∠1 మరియు ∠5).

(i) వేర్వేరు శీర్షాలు కలిగియుంటాయి.

(ii) ఖండనరేఖ యొక్క ఒకే పార్శ్వంలో ఉంటాయి మరియు

(iii) అవి రెండ రేఖలకు సంబంధించి అనురూప స్థానంలో ఉంటాయి (పైన లేదా కింద, ఎడమ లేదా కుడికి)



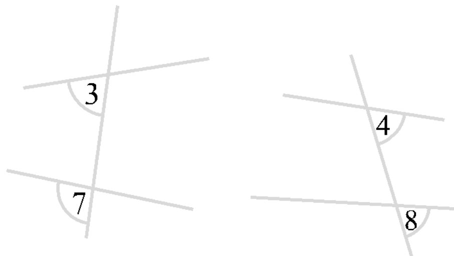

చిత్రం 5.25

పర్యాయ అంతర్ కోణాలు (చిత్రం 5.26 లో ∠3 మరియు ∠6).

(i) వేర్వేరు శీర్షాలు కలిగియుంటాయి.

(ii) ఖండనరేఖ యొక్క ఉభయ పార్శ్వాలలో అభిముఖంగా ఉంటాయి మరియు

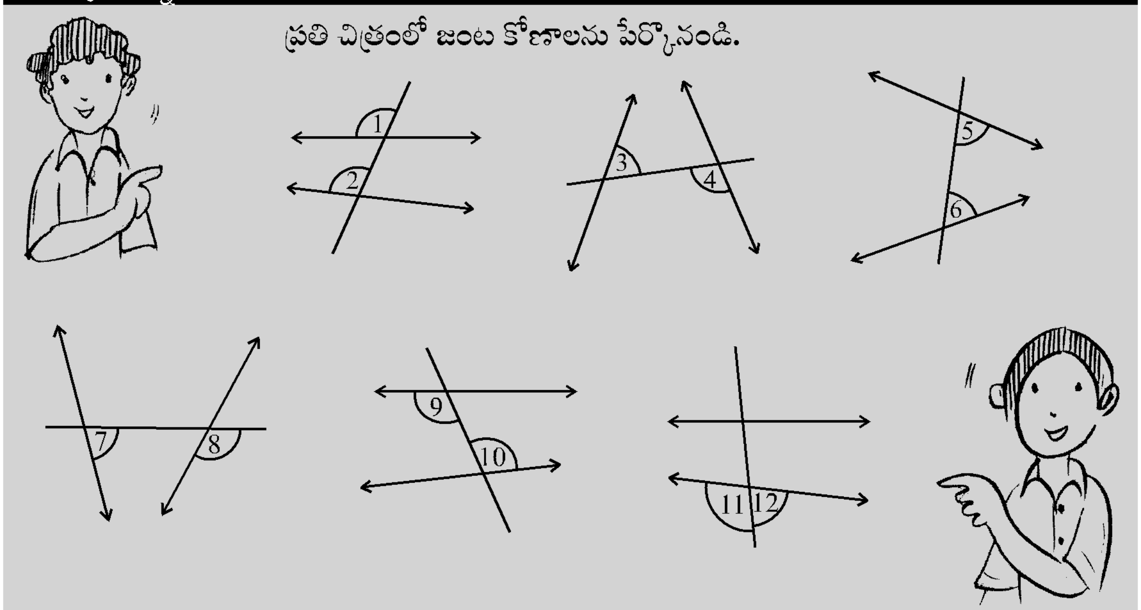
(iii) రెండు రేఖల మధ్య ఉంటాయి.




చిత్రం 5.26

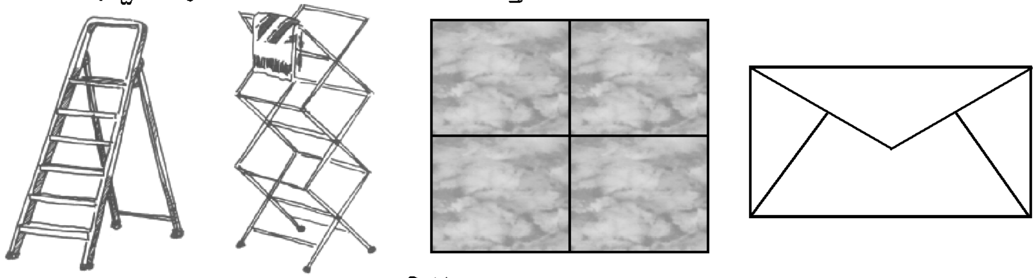
**వీటిని ప్రయత్నించండి.**

ప్రతి చిత్రంలో జంట కోణాలను పేర్కొనండి.



### 5.3.4 సమాంతర రేఖల ఖండన

సమాంతర రేఖలు అనగానేమో మీరు జ్ఞాపకం చేసుకోగలరా? అవి అన్నియూ ఖండించిన ఒకే సమతలంలోగల రేఖలు కింద ఇచ్చిన చిత్రాలలో సమాంతర రేఖలను గుర్తించగలరా?



చిత్రం 5.27

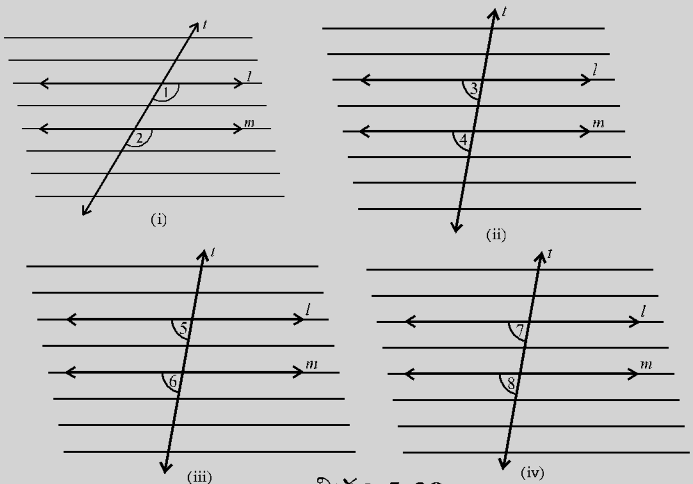
సమాంతర రేఖల ఖండనలు కొన్ని కుతూహలకర ఫలితాలనిస్తాయి.

**దీనిని చేయండి**

గీతలుగల ఒక కాగితం తీసుకోండి $l$ మరియు $m$ రెండు సమాంతర రేఖలు గీయండి. (ముదురు రంగుతో) $l$ మరియు $m$ రేఖలకు ఖండనం. $t$ ని గీయండి. చిత్రంలో చూపినట్లు $\angle 1$ మరియు $\angle 2$ అని గుర్తించండి (చిత్రం 5.28 (i)]. రాసిన చిత్రం మీద ట్రేసింగ్ కాగితాన్ని పెట్టండి. $l$, $m$ మరియు $t$ రేఖలను ట్రేస్ చేయండి. $l$ రేఖ $m$ తో ఐక్యమయ్యేవరకు ట్రేసింగ కాగితాన్ని $t$ పొడవునా జరపండి.

మూల చిత్రం యొక్క $\angle 2$ తో ట్రేస్ చేసిన చిత్రం యొక్క $\angle 1$ ఐక్యం కావడాన్ని మీరు గమనిస్తారు. ఈ విధమైన ట్రేసింగ్ మరియు జరిగించు కార్యాచరణం వలన వాస్తవంగా మీరు ఈ కింది ఫలితాలను పొందవచ్చు.

(i) $\angle 1 = \angle 2$ (ii) $\angle 3 = \angle 4$ (iii) $\angle 5 = \angle 6$ (iv) $\angle 7 = \angle 8$



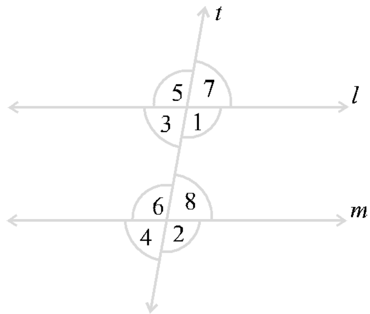

చిత్రం 5.28

ఈ కార్యాచరణం కింది అంశాలను స్పష్టంచేస్తుంది.

**రెండు సమాంతర రేఖలను ఒక ఖండన రేఖ ఖండించినప్పుడు ఏర్పడు ప్రతి జత అనురూప కోణాలు సమానంగా ఉంటాయి.**

మరొక ఆసక్తికరమైన ఫలితం పొందడానికి ఈ ఫలితాలను ఉపయోగించుకుంటాం చిత్రం **5.29**ను గమనించండి.

$l$ మరియు $m$ సమాంతర రేఖలను '$t$' రేఖ ఖండించినప్పుడు $\angle 3 = \angle 7$ (శీర్షాభిముఖ కోణాలు) పొందుతాం అయితే $\angle 7 = \angle 8$ (అనురూప కోణాలు) అందువలన $\angle 3 = \angle 8$ ఇదేవిధంగా మీరు $\angle 1 = \angle 6$ అని చూపవచ్చు దీనివలన కింది ఫలితాలను పొందుతాం.



చిత్రం **5.29**

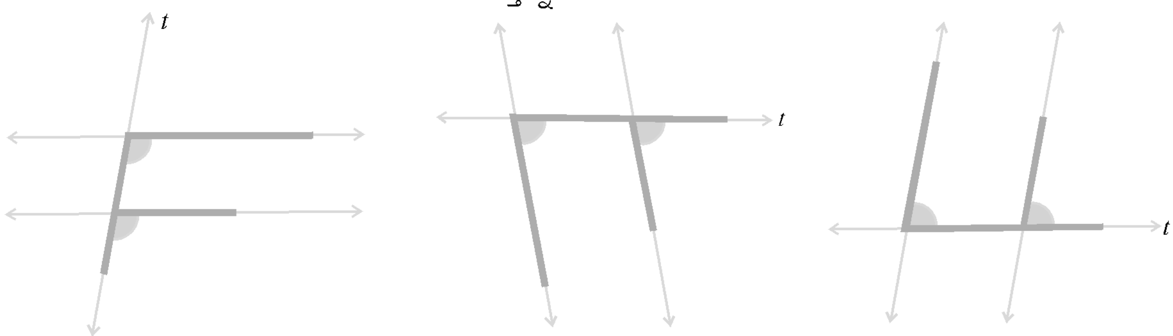
**రెండు సమాంతర రేఖలను ఒక ఖండనరేఖ ఖండించినప్పుడు ఏర్పడు ప్రతి జత పర్యాయ అంతరకోణాలు సమానంగా ఉంటాయి.**

రెండవ ఫలితం మరొక కుతూహలకర లక్షణానికి దారి కల్పిస్తుంది. మరొకసారి చిత్రం **5.29**నుండి $\angle 3 + \angle 1 = 180^\circ$ ($\angle 3$ మరియు $\angle 1$ సరళయుగ్మాలవుతాయి) అయితే $\angle 1 = \angle 6$ (ఒక జత పర్యాయ అంతరకోణాలు) అందువలన $\angle 3 + \angle 6 = 180^\circ$ అని మనం చెప్పవచ్చు అదేవిధంగా $\angle 1 + \angle 8 = 180^\circ$ దీనివలన మనకు కింది ఫలితం లభిస్తుంది

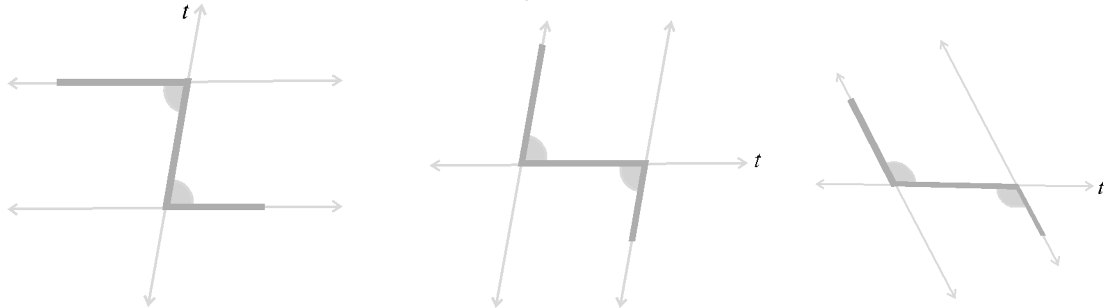
**రెండు సమాంతర రేఖలను ఒక ఖండన రేఖ ఖండించినప్పుడు, ఖండన రేఖ యొక్క ఒకే పార్శ్వంలోగల ప్రతి జత అంతరకోణాలు సరళ కోణ పూరకాలుగాఉంటాయి.**

మీరు ఈ ఫలితాలను చాలా సులభంగా గుర్తుంచుకోవాలంటే వాటికి సంబంధించిన కింద ఇచ్చిన ఆకారాలను గమనించండి.

F - ఆకారం అనురూప కోణాలను సూచిస్తున్నది.



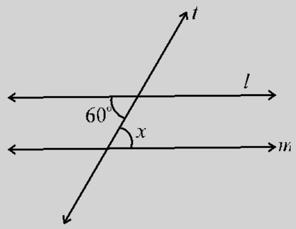
Z - ఆకారం పర్యాయ కోణాలను సూచిస్తున్నది



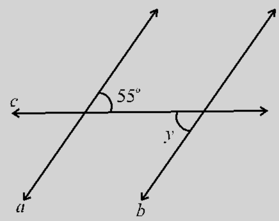

### దీనిని చేయండి.

ఒక జత సమాంతర రేఖలు గీయండి. ఒక ఖండన రేఖ గీయండి. కొలవడం ద్వారా పై మూడు వ్యాఖ్యానాలను పరీక్షించండి.

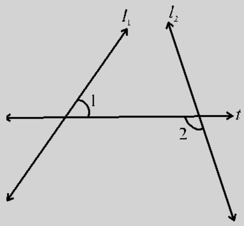
### వీటిని ప్రయత్నించండి.



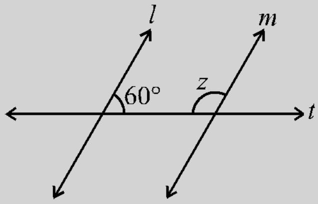

రేఖలు $l \parallel m$, ఖండనరేఖ t $\angle x$ = ?



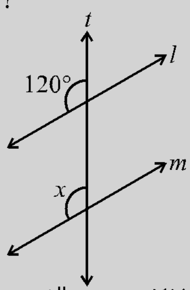

రేఖలు $a \parallel b$ ఖండనరేఖ c $\angle y$ = ?



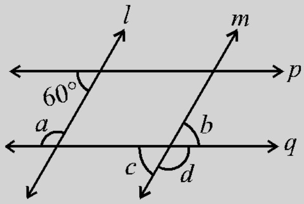
$l_1$ మరియు $l_2$ రెండురేఖలు ఖండన రేఖ t. $\angle 1 = \angle 2$ అవుతాయా?




రేఖలు $l \parallel m$ ఖండన రేఖ t $\angle z$ = ?



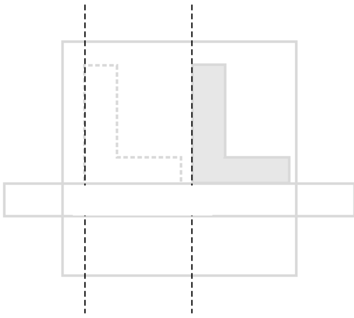

రేఖలు $l \parallel m$ ఖండన రేఖ t, $\angle x$ = ?




రేఖలు $l \parallel m$, $p \parallel q$; a,b,c,d కనుగొనండి.

## 5.4 సమాంతర రేఖలా? అని పరీక్షించడం

రెండు సమాంతర రేఖలను ఒక ఖండన రేఖ ఖండించినప్పుడు అనురూప కోణాల జత సమానం పర్యాయ అంతర కోణాలు సమానం ఖండన రేఖ యొక్క ఒకే పార్శ్వంలోగల అంతర కోణాలు పరిపూరక కోణాలవుతాలు అనునది మీకు తెలిసింది.



చిత్రం 5.30

రెండు రేఖలు ఇచ్చినప్పుడు అవి సమాంతరమా లేదా కాదా అనునది పరీక్షించడానికి ఏదైనా విధానం ఉందా? జీవనాధారిత చాలా సన్నివేశాలలో మీకు ఈ నైపుణ్యాపు అవసరం ఉంటుంది.

ఒక భూపటకారుడు బడగి ఉపయోగించు వర్గాకార సాధనం మరియు కొలతబద్దను ఉపయోగించండి. చిత్రం 5.30లో ఉన్నట్లు నిర్మాణం చేస్తాడు. తరువాత అవి సమాంతరం అని చెప్పతాడు ఎలా?

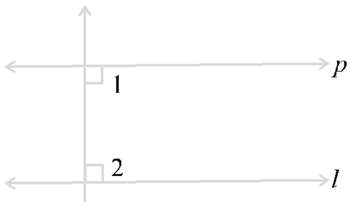
అతడు అనురూప కోణాలు సమానంగా ఉండునట్లు ఉంచియుండుటను మీరు గమనించగలరా? (ఇందులో ఖండనరేఖ ఏది?)



చిత్రం 5.31

దీనివలన, ఒక ఖండన రేఖ రెండు రేఖలను ఖండించినప్పుడు ఏర్పడు అనురూప కోణాల జత సమానంగా ఉన్నప్పుడు ఆ రెండు రేఖలు పరస్పరం సమాంతరంగా ఉంటాయి.

Z అక్షరం గమనించండి (చిత్రం 5.31) ఇందులో పర్యాయ కోణాలు సమానంగా ఉండటం వలన అడ్డ గీతలు సమాంతరంగా ఉంటాయి.




చిత్రం 5.32

ఒక ఖండన రేఖ రెండు రేఖలను ఖండించినప్పుడు ఏర్పడు పర్యాయ అంతర కోణాల జత సమానంగా ఉన్నప్పుడు ఆ రెండు రేఖలు పరస్పరం సమాంతరంగా ఉంటాయి.

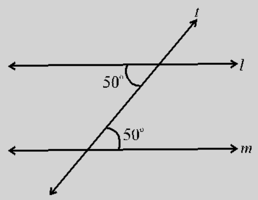
ఒక $l$ అను సరళ రేఖ గీయండి. (చిత్రం 5.32) $l$ కు లంబంగా ఉండునట్లు $m$ రేఖను గీయండి. $m$ కు లంబంగా ఉండునట్లు తిరిగి $p$ అను రేఖ గీయండి.

దీనివలన $p$ అనునది $l$ కు లంబంగాగల రేఖకు లంబంగా ఉంటుంది.

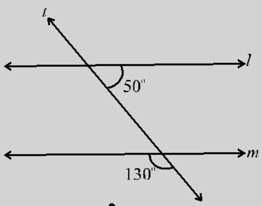
$P \parallel l$ అనునది మీరు గమనించగలరు. ఎలా? దీనికి కారణం $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$ అగునట్లు మీరు P రేఖ గీయగలరు.

అదేవిధంగా ఒక ఖండనరేఖ రెండు రేఖలను ఖండించినప్పుడు, ఖండన రేఖ యొక్క ఒకే పార్శ్వంలోగల అంతర కోణాల జత పరిపూరక కోణాలైనప్పుడు ఆ రెండు రేఖలు సమాంతరంగా ఉంటాయి.

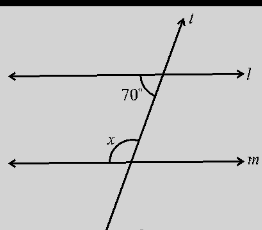
**వీటిని ప్రయత్నించండి.**




$l \parallel$ m అవుతోందా? ఎందుకు?



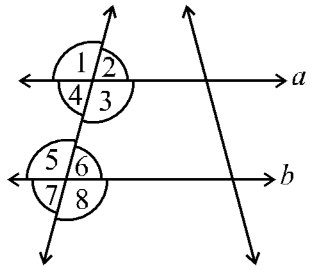

$l \parallel$ m అవుతోందా? ఎందుకు?




$l \parallel$ m అయితే, $\angle x$ విలువ ఎంత?

## అభ్యాసం 5.2

1. కింది ప్రతి వ్యాఖ్యానంలో ఉపయోగించిన లక్షణాన్ని పేర్కొనండి.

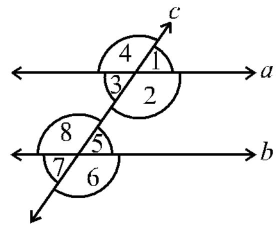



   (i) $a \parallel b$ అయితే $\angle 1 = \angle 5$ అవుతుంది.

   (ii) $\angle 4 = \angle 6$ అయితే $a \parallel b$ అవుతుంది.

   (iii) $\angle 4 + \angle 5 = 180^0$ అయితే $a \parallel b$ అవుతుంది.

2. చిత్రంలో కింది వాటిని గుర్తించండి.



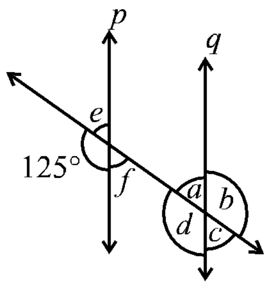

   (i) అనురూప కోణాల జత

   (ii) పర్యాయ అంతర కోణాల జత

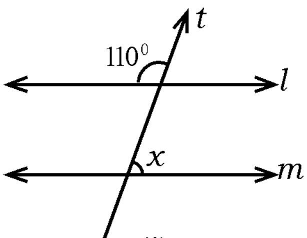
   (iii) ఖండన రేఖ యొక్క ఒకే పార్శ్వంలోగల అంతర కోణాల జత

   (iv) శీర్షాభిముఖ కోణాలు

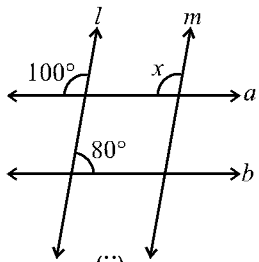
3. చిత్రంలో $p \parallel q$ తెలియని కోణాలు కనుగొనండి.




4. కింది చిత్రాలలో $l \parallel m$ అయినప్పుడు $x$ విలువ కనుగొనండి.



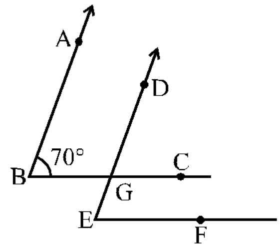
(i)



(ii)

5. చిత్రంలో రెండు కోణాల భుజాలు సమాంతరంగా ఉంటాయి.

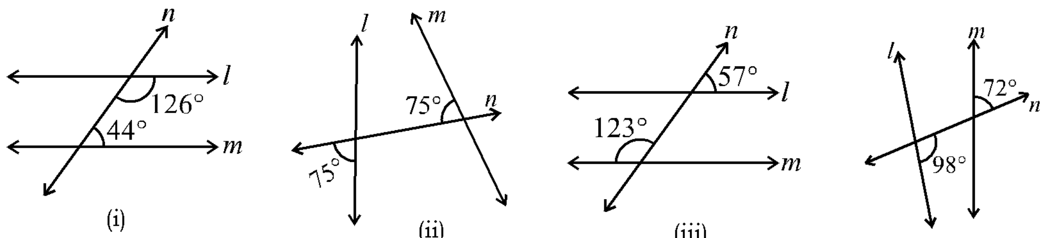
   $\angle ABC = 70^0$ అయితే




   (i) $\angle DGC$

   (ii) $\angle DEF$ కనుగొనండి.

6. ఇచ్చిన చిత్రాలలో $l$ రేఖ $m$ రేఖకు సమాంతరంగా ఉందా అనేదానిని నిర్ణయించండి.




(i) (ii) (iii) (iv)

## ఇప్పటి వరకు చర్చించిన అంశాలు

1. (i) ఒక రేఖా ఖండం రెండు అంత్య బిందువులను కలిగియుంటుంది.

   (ii) ఒక కిరణం ఒకే ఒక అంత్యబిందువును కలిగియుంటుంది (దాని ప్రారంభ బిందువు); మరియు

   (iii) ఒక రేఖ తన రెండు వైపుల అంత్యబిందువులను కలిగియుండదు. అనునది జ్ఞాపక ముంచుకోండి.

2. రెండు రేఖలు (లేదా కిరణాలు లేదా రేఖా ఖండాలు) ఖండించినప్పుడు ఒక కోణం ఏర్పడుతుంది.

| కోణాల జత | నిబంధనలు |
|---|---|
| రెండు పూరక కోణాలు | కోణాల కొలత మొత్తం $90°$ అయివుండాలి. |
| రెండు పరిపూరక కోణాలు | కోణాల కొలత మొత్తం $180°$ అయివుండాలి. |
| రెండు పార్శ్వ కోణాలు | సామాన్య శీర్షం మరియు సామాన్య భుజాలు కలిగియుంటాయి. అయితే, సామాన్య ఆంతరిక భాగాలు కలిగియుండవు. |
| సరళయుగ్మాలు | పార్శ్వకోణాలైయుండి, పరిపూరక కోణాలైయుండాలి. |

3. $l$ మరియు $m$ రేఖలు ఖండించినప్పుడు, అవి ఖండిస్తాయి అని చెప్పుతాం. ఖండించిన బిందువును ఖండన బిందువు అని పిలుస్తాం. ఒక కాగితం మీద గీచిన రేఖలు ఎంత పొడవునా వృద్ధిచేసినప్పటికీ అవి ఖండించనిచో వాటిని మనం సమాంతర రేఖలు అని పిలుస్తాం.

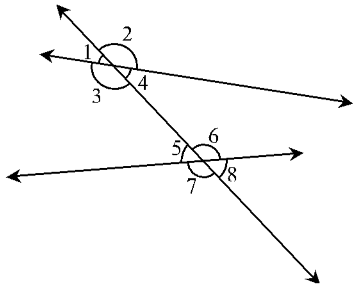
4. (i) రెండు రేఖలు ఖండించినప్పుడు (X అక్షరంలాగా కనబడు) రెండు జతల అభిముఖ కోణాలు ఏర్పడుతాయి. వాటిని శీర్షాభిముఖ కోణాలు అని పిలుస్తాం. అవి కొలతలో సమానంగా ఉంటాయి.

   (ii) ఖండన ఒక రేఖయైవుండి, రెండు లేదా అంతకంటే ఎక్కువ రేఖలను వివిధ బిందువులలో ఖండిస్తుంది.

   (iii) ఒక ఖండన రేఖ చాలా రకాల కోణాలను ఏర్పరుస్తుంది.

(iv) చిత్రంలో

| కోణాల రకాలు | కోణాలు |
|---|---|
| అంతరకోణాలు | $\angle 3$, $\angle 4$, $\angle 5$, $\angle 6$ |
| బాహ్య కోణాలు | $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 7$, $\angle 8$ |
| అనురూప కోణాలు | $\angle 1$ మరియు $\angle 5$, $\angle 2$, మరియు $\angle 6$, $\angle 3$ మరియు $\angle 7$, $\angle 4$ మరియు $\angle 8$ |
| పర్యాయ అంతర కోణాలు | $\angle 3$ మరియు $\angle 6$, $\angle 4$ మరియు$\angle 5$ |
| పర్యాయ బాహ్య కోణాలు | $\angle 1$ మరియు $\angle 8$, $\angle 2$ మరియు $\angle 3$ |
| ఖండన రేఖ యొక్క ఒకే పార్శ్వంలోగల అంతర కోణాలు | $\angle 3$ మరియు $\angle 5$, $\angle 4$ మరియు $\angle 6$ |

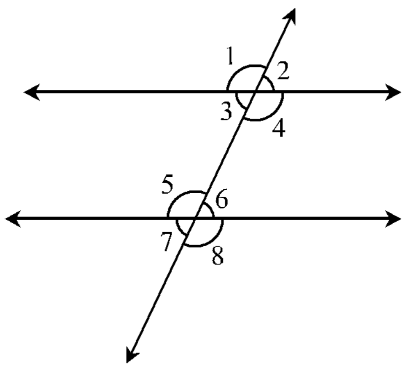



(v) మనం రెండు సమాంతర రేఖలను ఒక ఖండన రేఖ ఖండించినప్పుడు కింది సంబంధాలను చూస్తాం.

ప్రతి జత అనురూప కోణాలు సమానంగా ఉంటాయి. $\angle 1 = \angle 5$, $\angle 3 = \angle 7$, $\angle 2 = \angle 6$, $\angle 4 = \angle 8$

ప్రతి జత పర్యాయ కోణాలు సమానంగా ఉంటాయి. $\angle 3 = \angle 6$, $\angle 4 = \angle 5$ ఖండన రేఖకు ఒకే పార్శ్వంలోగల ప్రతి జత అంతర కోణాలు పరిపూరక కోణాలవుతాయి.

$\angle 3 + \angle 5 = 180°$, $\angle 4 + \angle 6 = 180°$

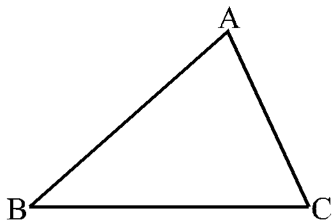


అధ్యాయం - 6

# త్రిభుజాలు మరియు వాటి లక్షణాలు

## 6.1 పీఠిక

మీకు తెలిసినట్లుగా ఒక త్రిభుజం మూడు రేఖాఖండాలతో ఆవృతమైన సరళ ఆకృతి. అది మూడు శీర్షాలు, మూడు భుజాలు మరియు మూడు కోణాలు కలిగియుంటుంది చిత్రం **6.1**లో ABC ఒక త్రిభుజం దాని



చిత్రం **6.1**

**భుజాలు** : $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$

**కోణాలు** : $\angle BAC$, $\angle ABC$, $\angle BCA$.

**శీర్షాలు** : A, B, C అవుతాయి

శీర్షం A కి ఎదురుగానున్న భుజం BC. భుజం AB కి ఎదురుగానున్న కోణాన్ని పేర్కొనగలరా?

త్రిభుజాలను (i) భుజాలు (ii) కోణాల ఆధారంగా ఎలా వర్గీకరించవచ్చో మీకు తెలిసింది.

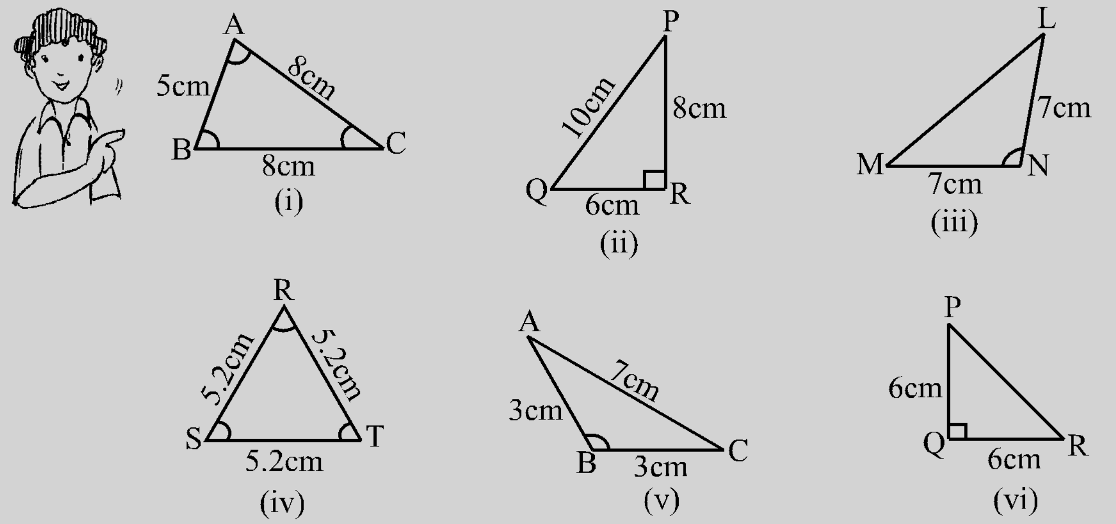
(i) భుజాల ఆధారంగా : అసమ బాహు త్రిభుజం, సమద్విబాహు త్రిభుజం మరియు సమబాహు త్రిభుజం.

(ii) కోణాల ఆధారంగా : లఘుకోణ త్రిభుజం, అధిక కోణ త్రిభుజం మరియు లంబకోణ త్రిభుజం.

కాగితం కత్తిరించి, పై త్రిభుజాల నమూనాను చేయండి. మీరు చేసిన నమూనాలను మీ సహపాఠకులు చేసిన నమూనాలతో పోల్చి చర్చించండి.

**వీటిని ప్రయత్నించండి.**

1. $\Delta$ ABC యొక్క ఆరు అంశాలను రాయండి. (అనగా 3భుజాలు మరియు 3 కోణాలు)
2. కింది వాటిని గీయండి.
   (i) $\Delta$ PQR లో శీర్షం Q కు ఎదురుగానున్న భుజం.
   (ii) $\Delta$ LMN లో భుజం LM కు ఎదురుగానున్న కోణం.
   (iii) $\Delta$ RST లో భుజం RT కి ఎదురుగానున్న శీర్షం.
3. చిత్రం 6.2ను గమనించి, ప్రతి త్రిభుజాన్ని వాటి
   (a) భుజాలు మరియు
   (b) కోణాల ఆధారంగా వర్గీకరించండి.

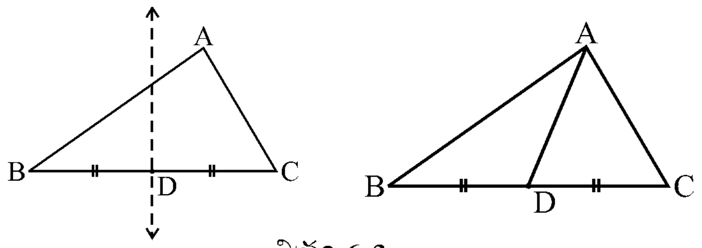



చిత్రం 6.2

మనం త్రిభుజాల గురించి ఇంకా ఎక్కువ విషయాలను అన్వేషించడానికి ప్రయత్నిద్దాం.

## 6.2 ఒక త్రిభుజంలోని మధ్యరేఖలు

కాగితం మడిచే విధానం నుండి ఒక దత్త రేఖాఖండపు ఒక లంబార్ధకాన్ని ఎలా కనుగొనవచ్చో మీకు తెలిసింది. ఒక కాగితంతో త్రిభుజం ABCలను కత్తరించండి. (చిత్రం 6.3) వాటి ఏవైనా ఒక భుజం $\overline{BC}$ని పరిగణించండి. కాగితం మడిచే విధానంతో భుజం యొక్క లంబార్ధకాన్ని గుర్తించండి మడిచిన గీత మడత $\overline{BC}$ లను D లో ఖండిస్తుంది. అది $\overline{BC}$ యొక్క మధ్యబిందువు $\overline{AD}$లను కలపండి.




చిత్రం 6.3

$\overline{BC}$ యొక్క మధ్యబిందువు మరియు వాటి అభిముఖ శీర్షం A ను కలుపు రేఖాఖండం $\overline{AD}$ ని త్రిభుజం యొక్క రేఖాఖండం అని పిలుస్తాం.

త్రిభుజం యొక్క భుజాలైన $\overline{AB}$ మరియు $\overline{CA}$ లను పరిగణించి ఇంకా రెండు మధ్యరేఖలను కనుగొనండి.

మధ్యరేఖ త్రిభుజంలోని ఒక శీర్షం మరియు దాని అభిముఖ భుజం యొక్క మధ్యబిందువును కలుపుతుంది.

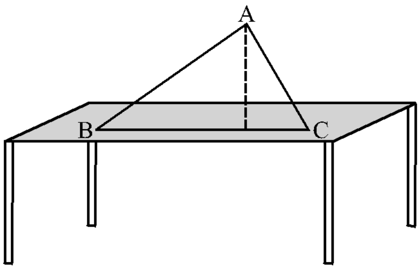
**ఆలోచించి, చర్చించి రాయండి.**

1. ఒక త్రిభుజం ఎన్ని మధ్యరేఖలు కల్గియుండవచ్చు?
2. ఒక మధ్యరేఖ పూర్తిగా త్రిభుజపు లోపలి భాగంలోనే ఉంటుందా? (అది నిజం కాదు అని మీరు ఆలోచించినచో ఈ ప్రకరణాన్ని చూపడానికి ఒక చిత్రం గీయండి.)

## 6.3 ఒక త్రిభుజపు ఎత్తులు

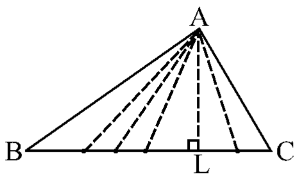
ABC త్రిభుజాకారపు ఆకృతిని కార్డుబోర్డు ఉపయోగించి చేయండి. దానిని నేరుగా మేజా మీద పెట్టండి. త్రిభుజం ఎంత ఎత్తుగా ఉంది?

A అను శీర్షం నుండి $\overline{BC}$ (చిత్రం 6.4లో) వరకు గల దూరం ఎత్తుగా ఉంటుంది.




చిత్రం 6.4

A నుండి $\overline{BC}$ వరకు, అనేక రేఖాఖండాలను గీయవచ్చునని మీరు ఆలోచించవచ్చు. (చిత్రం 6.5ను గమనించండి). వాటిలో ఏది ఎత్తును సూచిస్తుంది?



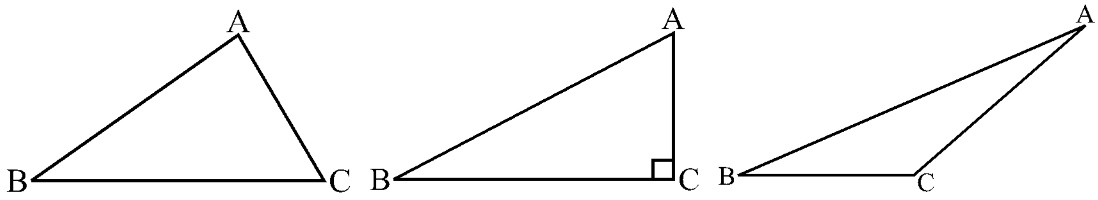

చిత్రం 6.5

A నుండి ప్రారంభమై నేరుగా $\overline{BC}$ కి గీచిన మరియు $\overline{BC}$ కి లంబంగానున్న రేఖాఖండం ఎత్తును సూచిస్తుంది. $\overline{AL}$ రేఖాఖండ త్రిభుజం ఎత్తుగా ఉంటుంది.

ఎత్తు యొక్క ఒక అంత్య బిందువు త్రిభుజం యొక్క శీర్షం మీద ఉంటుంది. మరొకటి దాని అభిముఖ భుజంతోకూడిన రేఖ మీద ఉంటుంది. ప్రతి శీర్షం ద్వారా ఒక ఎత్తును గీయవచ్చు.

### ఆలోచించి, చర్చించి గీయండి.

1. ఒక త్రిభుజం ఎన్ని ఎత్తులు కలిగియుంటుంది?
2. కింద ఇచ్చిన త్రిభుజాలకు (చిత్రం 6.6) A నుండి BC కి ఎత్తు గీయండి. (శుద్ధ రేఖా చిత్రం గీయండి).




లఘుకోణ త్రిభుజం | లంబకోణ త్రిభుజం | అధిక కోణ త్రిభుజం

చిత్రం 6.6

3. త్రిభుజపు ఎత్తు ఎల్లప్పుడూ త్రిభుజం లోపలి భాగంలోనే ఉంటుందా? అది నిజంగా ఉండనవసరం లేదు. అని మీరు ఆలోచించినచో, అలాంటి ప్రకరణాన్ని చూపడానికి ఒక శుద్ధ రేఖా చిత్రం గీయండి.
4. త్రిభుజపు రెండు ఎత్తులు అదే త్రిభుజానికి భుజాలైన ఒక త్రిభుజాన్ని మీరు ఆలోచించగలరా?
5. ఒక త్రిభుజానికి ఎత్తు మరియు మధ్యరేఖ ఒకటే అయివుండవచ్చా?

[మరుపదం (క్లూ)] : ప్రశ్న సంఖ్య 4 మరియు 5 యొక్క ప్రతి రకం త్రిభుజానికి ఎత్తులను గీచి పరీక్షించండి).

### వీటిని చేయండి.

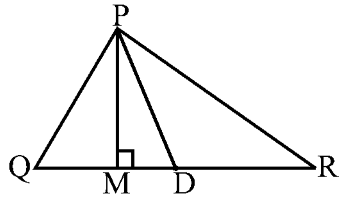
(i) సమబాహు త్రిభుజం (ii) సమద్విబాహు త్రిభుజం మరియు

(iii) అసమబాహు త్రిభుజాల కొన్ని నమూనాలు తీసుకోండి.

వాటి ఎత్తులు మరియు మధ్యరేఖలను కనుగొనండి. వాటి గురించి ఏమైనా విశేషతను మీరు గమనించగలరా? మీ సహపాఠకులతో వీటిని చర్చించండి.

## అభ్యాసం 6.1

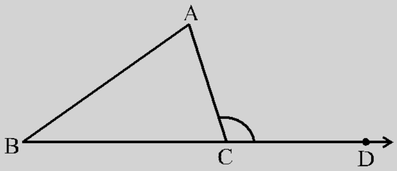
1. Δ PQR లో, $\overline{QR}$ మధ్యబిందువు D అయింది. అప్పుడు
$\overline{PM}$ ______________ మరియు
PD ______________ అయివుంటుంది.
QM = MR అవుతుందా?




2. కింది వాటికి శుద్ధ రేఖాచిత్రాలు గీయండి.
   (a) Δ ABC లో BE మధ్యరేఖ.
   (b) Δ PQR లో PQ మరియు PR త్రిభుజపు ఎత్తులు.
   (c) Δ XYZ లో, YL త్రిభుజపు బాహ్యంలో ఎత్తుగా ఉంటుంది.
3. సమద్విబాహు త్రిభుజంలో మధ్యరేఖ మరియు ఎత్తు ఒకటే అయివుండవచ్చా? చిత్రం గీచి పరిశీలించవచ్చు.

## 6.4 ఒక త్రిభుజపు బాహ్యకోణం మరియు వాటి లక్షణాలు

**దీనిని చేయండి.**



చిత్రం 6.7

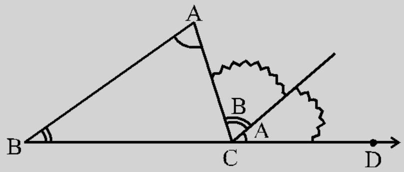
1. చిత్రం 6.7లో చూపినట్లుగా ABC త్రిభుజం గీచి, దాని ఒక భుజం BC ని వృద్ధిచేయండి. C బిందువులో ఏర్పడిన కోణం ACD లను గమనించండి. ఈ కోణం Δ ABC యొక్క వెలుపల ఉంది. దీనిని Δ ABC యొక్క శీర్షం C లో ఏర్పడిన బాహ్యకోణం అంటారు.

స్పష్టంగా ∠ACD కి ∠BCA పార్శ్వకోణం మిగిలిన రెండు కోణాలైన ∠A మరియు ∠B లను త్రిభుజపు అంతరాభిముఖ కోణాలు లేదా ∠ACD యొక్క దూరపు రెండు అంతరకోణాలు అని అంటారు. ఇప్పుడు ∠A మరియు ∠B లను కత్తరించండి. (లేదా ట్రేస్ ప్రతులు చేయండి). చిత్రం 6.8లో చూపినట్లుగా ఒకదాని ప్రక్కలో మరొకటి అమర్చండి.

ఈ రెండు భాగాలు ∠ACD లను పూర్తిగా ఆవరించుతున్నాయా?

m ∠ACD = m∠A + m ∠B అని మీరు చెప్పవచ్చా?

2. పైన చేసిన విధంగానే, బాహ్యకోణం ACD ఏర్పడునట్లు త్రిభుజం ABC గీయండి. కోణమానిని తీసుకొని ∠ACD, ∠A మరియు ∠B గీయండి.
   ∠A + ∠B యొక్క మొత్తం కనుగొని ∠ACD కొలతతో పోల్చండి.
   ∠ACD అనునది ∠A + ∠B కి సమానంగానుండుటను మీరు గమనించగలరా? (లేదా కొలవడంలో దోషాలున్నచో, కొలతకు సమానంగా ఉంటుంది)



చిత్రం 6.8

ఇంకా ఎక్కువ త్రిభుజాలను బాహ్యకోణాలున్నట్లు గీచి, పైన తెలిపిన రెండు కార్యాచరణాలను మీరు పునరావర్తనం చేయవచ్చు. ప్రతిసారి కూడా త్రిభుజపు బాహ్యకోణం అంతరాభిముఖ కోణాల మొత్తానికి సమానంగా ఉండుటను మీరు గమనించగలరు.

దశలుదశలుగా తార్కికంగా చర్చించడం ద్వారా ఈ వ్యాఖ్యానాన్ని ధృడీకరించవచ్చు.

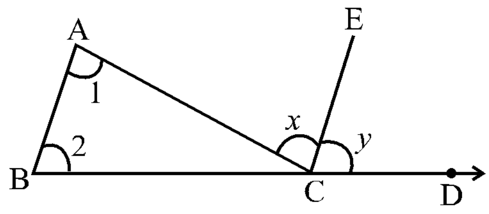
త్రిభుజపు ఒక బాహ్యకోణం దాని అంతరాభిముఖాల మొత్తానికి సమానంగా ఉంటుంది.

**దత్తాంశం :** $\Delta ABC$ పరిగణించండి.

$\angle ACD$ బాహ్యకోణం

**సాధన :** $m\angle ACD = m\angle A + m\angle B$.

ద్వారా $\overline{BA}$ కి సమాంతరంగా ఉండునట్లు $\overline{CE}$ గీయండి.



చిత్రం 6.9

**సమర్ధన**

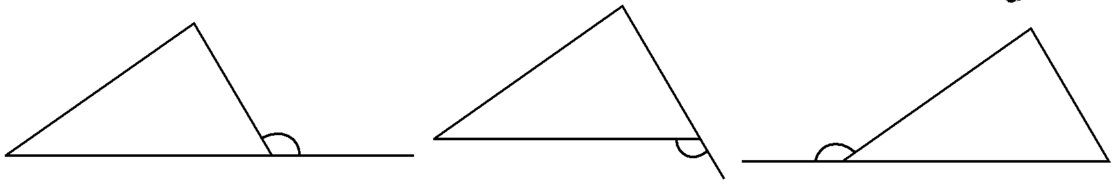
| **దశలు** | **కారణాలు** |
|---|---|
| (a) $\angle 1 = \angle x$ | $\overline{BA} \parallel \overline{CE}$ మరియు $\overline{AC}$ ఖండనరేఖ అందువలన పర్యాయ కోణాలు సమానం. |
| (b) $\angle 2 = \angle y$ | $\overline{BA} \parallel \overline{CE}$ మరియు $\overline{BD}$ ఖండనరేఖ అందువలన అనురూపకోణాలు సమానం. |
| (c) $\angle 1 + \angle 2 = \angle x + \angle y$ | |
| (d) $\angle x + \angle y = m\angle ACD$ | |

అందువలన $\angle 1 + \angle 2 = \angle ACD$

బాహ్యకోణం మరియు దాని రెండు అంతరాభిముఖ కోణాల మధ్యగల సంబంధాన్ని త్రిభుజపు బాహ్యకోణ లక్షణం అంటారు.

### ఆలోచించి, చర్చించి రాయండి.

1. ఒక త్రిభుజానికి బాహ్యకోణాలు అనేకరకాలుగా ఏర్పడవచ్చు. వాటిలో మూడింటిని కింద చూపబడినవి. (చిత్రం 6.10)



చిత్రం 6.10

బాహ్యకోణాలను పొందడానికి ఇంకా మూడు రకాలున్నాయి. ఆ శుద్ధ రేఖాకృతులను నిర్మాణం చేయడానికి ప్రయత్నించండి.

2. ఒక త్రిభుజపు ప్రతి శీర్షంలో ఏర్పడిన బాహ్యకోణాలు సమానంగా ఉంటాయా?

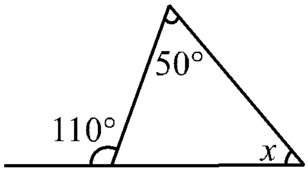
3. ఒక త్రిభుజపు బాహ్యకోణం మరియు దాని పాక్షిక అంతరకోణపు మొత్తం గురించి మీరేమి చెప్పగలరు?

**ఉదాహరణం 1 :** చిత్రం **6.11**లో కోణం $x$ కనుగొనండి.

**సాధన :** అంతరాభిముఖ కోణాల మొత్తం = బాహ్యకోణం

$50^0 + x = 110^0$

$x = 60^0$



చిత్రం **6.11**

**ఆలోచించి, చర్చించి రాయండి.**

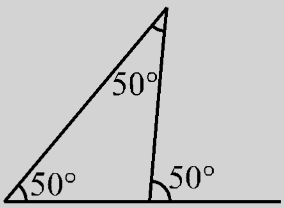
1. ఒక త్రిభుజపు బాహ్యకోణం

   (i) లంబకోణం అయినప్పుడు (ii) అధికకోణం అయినప్పుడు

   (iii) లఘుకోణం అయినప్పుడు వాటి ప్రతి అంతరాభిముఖ కోణం గురించి మీరేమి చెప్పగలరు?

2. ఒక త్రిభుజపు బాహ్యకోణం సరళకోణం కావడానికి సాధ్యమా?

**వీటిని ప్రయత్నించండి.**



చిత్రం **6.12**

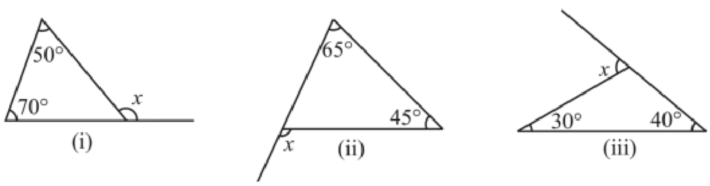
1. ఒక త్రిభుజపు బాహ్యకోణం కొలత 70° మరియు దాని ఒక అంతరాభిముఖ కోణం కొలత 25° మరొక అంతరాభిముఖ కోణం కొలత కనుగొనండి.

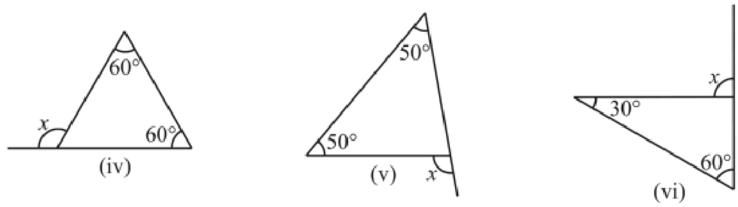
2. ఒక త్రిభుజపు బాహ్యకోణానికి ఎదురుగానున్న రెండు అంతరాభిముఖ కోణాల కొలత 60° మరియు 80° బాహ్యకోణపు కొలత కనుగొనండి.

3. ఇచ్చిన చిత్రంలో ఏమైనా తప్పు ఉందా? (చిత్రం **6.12**) అభిప్రాయం వ్యక్తపరచండి.

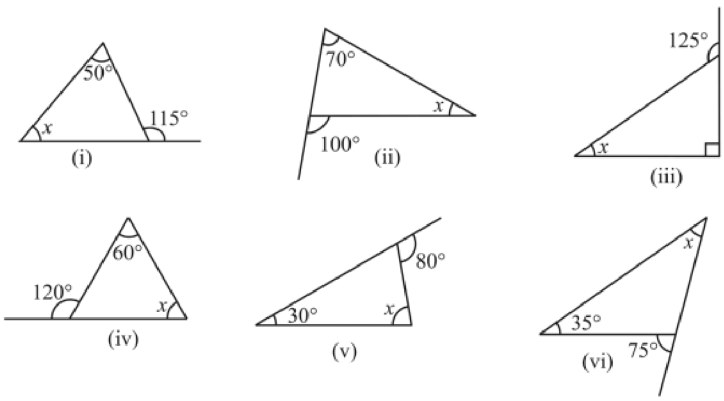
**అభ్యాసం 6.2**

1. కింద ఇచ్చిన చిత్రాలలో తెలియని బాహ్యకోణం $x$ విలువ కనుగొనండి.





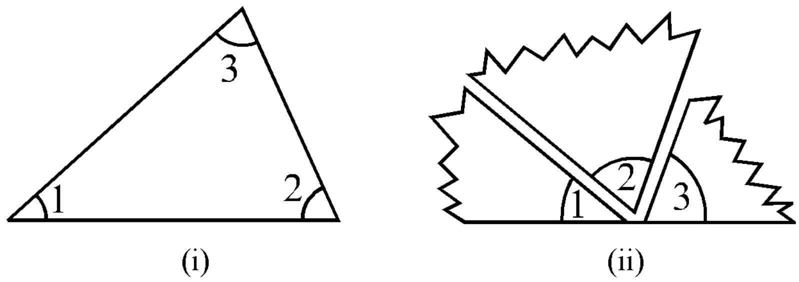

2. కింద ఇచ్చిన చిత్రాలలో తెలియని అంతరకోణం $x$ కనుగొనండి.




## 6.5 త్రిభుజపు అంతరకోణాల మొత్తపు లక్షణాలు

త్రిభుజం యొక్క మూడు కోణాలకు సంబంధించి ఒక గమనించదగ్గ లక్షణం ఉంది. కింది నాలుగు కార్యాచరణాల వలన దీనిని మీరు గమనించగలరు.

1. ఒక త్రిభుజాన్ని నిర్మించి మూడు కోణాలు కత్తరించండి. చిత్రం **6.13** (i), (ii) లలో చూపినట్లుగా పునర్ అమర్చండి. ఇప్పుడు మూడు కోణాలు ఒకకోణాన్ని ఏర్పరుస్తుంది. ఈ కోణం 180° కొలతగల సరళకోణం అవుతుంది.

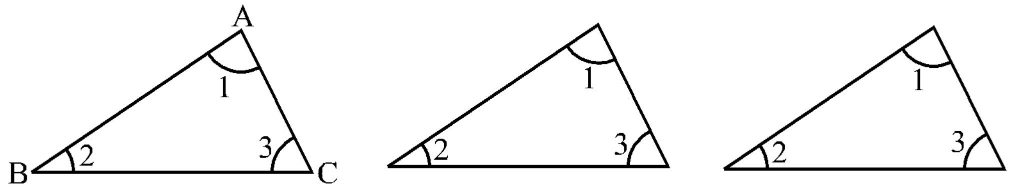



చిత్రం **6.13**

దీనివలన ఒక త్రిభుజపు మూడు అంతరకోణాల కొలతల మొత్తం 180°.

2. వేరె విధానంలో కూడా ఇదే అంశాన్ని మీరు గమనించవచ్చు.

$\Delta$ ABC యొక్క మూడు ప్రతులను తీసుకోండి (చిత్రం 6.14)

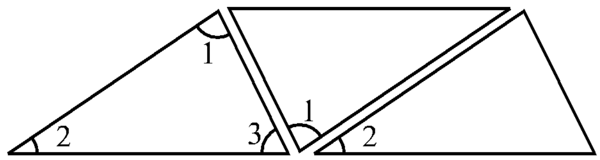



చిత్రం 6.14

చిత్రం 6.15లో ఉన్నట్లుగా అమర్చండి.

$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3$ ల గురించి మీరేమి పరిశీలిస్తారు?

(బాహ్యకోణపు లక్షణాన్ని కూడా మీరు గమనించగలరా?)

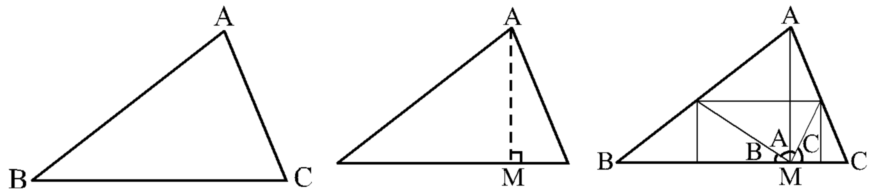



చిత్రం 6.15

3. ఒక కాగితంలో $\Delta$ ABC కత్తరించండి. (చిత్రం 6.16)

A ద్వారా AM ఎత్తు అయ్యేకొద్దీ $\Delta$ ABC ని మడచండి.

ఇప్పుడు A, B మరియు C శీర్షాలు M లో కలిసేటట్లు ఖండించునట్లు మూడు మూలలను మడచండి.




చిత్రం 6.16

మూడు కోణాలు కలిసి సరళకోణం ఏర్పరుచుటను మీరు గమనించగలరు. ఒక త్రిభుజంలోని మూడు అంతరకోణాల మొత్తం $180^0$ అని మరొకసారి చూపుతుంది.

4. మీ పుస్తకంలో (నోటుబుక్)$\Delta$ ABC, $\Delta$ PQR మరియు $\Delta$ XYZ మూడు త్రిభుజాలను నిర్మించండి.

కోణమానిని ఉపయోగించి ఆ త్రిభుజాలలోని కోణాలను కొలవండి. కొలతలను పట్టికలో నింపండి.

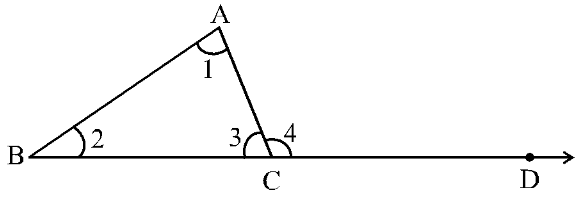
| త్రిభుజం | కోణాల కొలత | | | మూడు కోణాల మొత్తం |
|---|---|---|---|---|
| $\Delta$ ABC | $m\angle A$ = | $m\angle B$ = | $m\angle C$ = | $m\angle A + m\angle B + m\angle C$ = |
| $\Delta$ PQR | $m\angle P$ = | $m\angle Q$ = | $m\angle R$ = | $m\angle P + m\angle Q + m\angle R$ = |
| $\Delta$ XYZ | $m\angle X$ = | $m\angle Y$ = | $m\angle Z$ = | $m\angle X + m\angle Y + m\angle Z$ = |

కొలతలోగల కొన్ని దోషాలను పరిగణించినచో పట్టికలో మూడు కోణాల మొత్తం ఎల్లప్పుడు 180° అవుతుంది. (లేదా 180° కు సమీపంలో ఉంటుంది).

పరిపూర్ణ నిఖరతతో చెప్పడానికి సాధ్యమైనప్పుడు, అది కూడా త్రిభుజపు మూడు కోణాల మొత్తం 180° అని చూపుతుంది.

మీ ప్రతిపాదనను తార్కిక చర్చ ద్వారా సమర్థన నివ్వడానికి మీరిప్పుడు తయారుకాగలరు.

**వ్యాఖ్యానం:** ఒక త్రిభుజంలోని మూడు అంతర కోణాల మొత్తం 180° దీనిని నిరూపించడానికి త్రిభుజం యొక్క బాహ్యాకోణపు లక్షణాన్ని ఉపయోగిద్దాం.



చిత్రం 6.17

**దత్తాంశం:** $\Delta$ ABCయొక్క కోణాలు $\angle 1, \angle 2, \angle 3$ (చిత్రం 6.17)

BC ను D వరకు వృద్ధి చేసినప్పుడు బాహ్యాకోణం $\angle 4$ ఏర్పడింది.

**సమర్థన:** $\angle 1 + \angle 2 = \angle 4$ (త్రిభుజపు బాహ్యాకోణ లక్షణంనుండి).

$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = \angle 4 + \angle 3$ (రెండువైపుల $\angle 3$ కూడినప్పుడు)

అయితే, $\angle 4$ మరియు $\angle 3$ సరళయుగ్మములు అందువలన వాటి మొత్తం 180°.

అందువలన $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$

చాలా రకాలుగా ఈ లక్షణాన్ని ఎలా ఉపయోగించవచ్చు అని మనం చూడవచ్చు.

**ఉదాహరణ 2:** ఇచ్చిన చిత్రంలో (చిత్రం 6.18) $m\angle P$ కనుగొనండి.

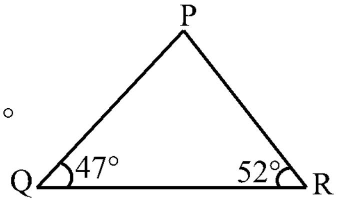
**సాధన:** త్రిభుజం యొక్క కోణాల మొత్తపు లక్షణంనుండి.

$m\angle P + 47° + 52° = 180°$

$m\angle P = 180° - 47° - 52°$

$= 180° - 99°$

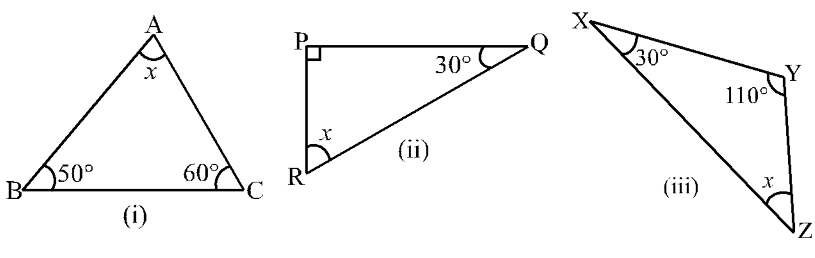
$= 81°$

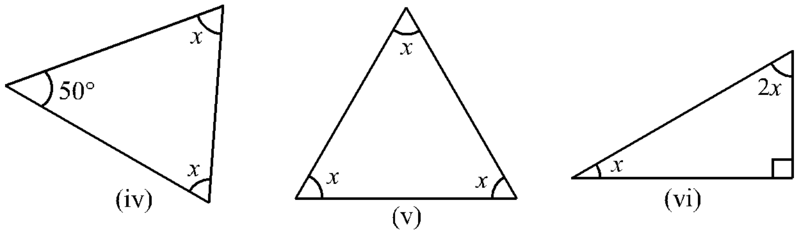


చిత్రం 6.18

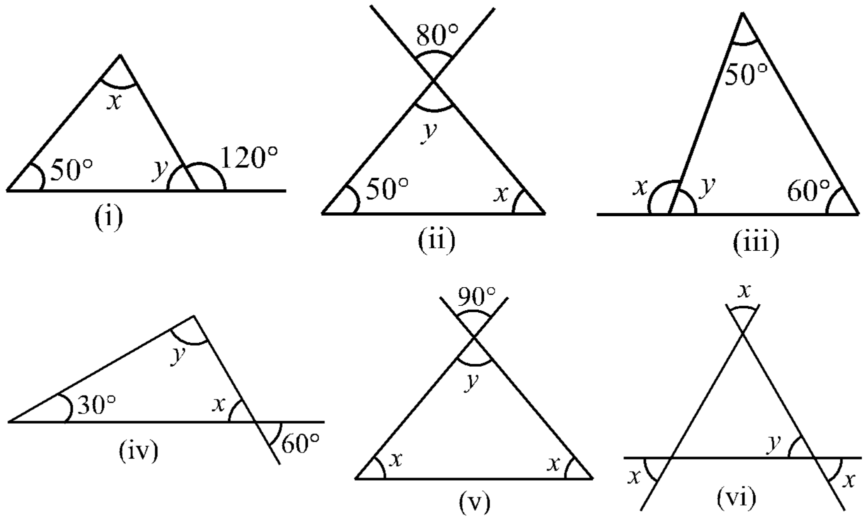
## అభ్యాసం 6.3

1. కింది చిత్రాలలో తెలియని $x$ విలువ కనుగొనండి.






2. కింది చిత్రాలలో తెలియని పదాలైన $x$ మరియు $y$ విలువలను కనుగొనండి.




**వీటిని ప్రయత్నించండి.**

1. త్రిభుజపు రెండు కోణాలు $30^\circ$ మరియు $80^\circ$ మూడవ కోణపు కొలత కనుగొనండి.
2. త్రిభుజపు ఒక కోణం కొలత $80^\circ$ మరియు మిగిలిన రెండు కోణాలు సమానంగా ఉన్నాయి. సమానంగా గల ప్రతికోణపు కొలత కనుగొనండి.
3. త్రిభుజపు మూడు కోణాలు **1:2:1** నిష్పత్తిలో ఉన్నాయి. త్రిభుజపు కోణాలన్నింటిని కనుగొనండి. రెండు రకాల విధానంలో త్రిభుజాలను వర్గీకరించండి.

**ఆలోచించి, చర్చించి రాయండి.**

1. ఒక త్రిభుజంలో రెండు లంబకోణాలు ఉండవచ్చా?
2. ఒక త్రిభుజంలో రెండు అధికకోణాలు ఉండవచ్చా?
3. ఒక త్రిభుజంలో రెండు లఘుకోణాలు ఉండవచ్చా?
4. ఒక త్రిభుజంలో మూడుకోణాలు $60^\circ$ కంటే ఎక్కువగా ఉండవచ్చా?

5. ఒక త్రిభుజంలో మూడు కోణాలు $60^\circ$ లకు సమానంగా ఉండవచ్చా?

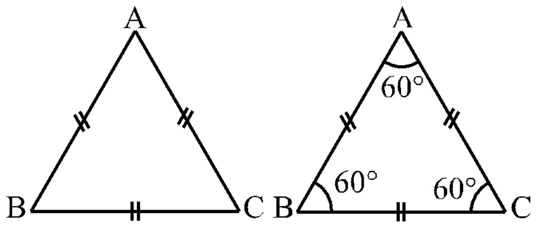
6. ఒక త్రిభుజంలో మూడు కోణాలు $60^\circ$ కంటే తక్కువ ఉండవచ్చా?

## 6.6 రెండు ప్రత్యేక త్రిభుజాలు : సమబాహు మరియు సమద్విబాహు త్రిభుజాలు

ఒక త్రిభుజంలో అన్ని మూడు భుజాలు సమానంగా ఉన్నచో వాటిని సమబాహు త్రిభుజం అని అంటారు.

ABC సమబాహు త్రిభుజపు రెండు ప్రతులను తీసుకోండి. (చిత్రం 6.19) ఒకదానిని స్థిరంగా ఉంచండి. మరొకదానిని దానిమీద పెట్టండి. రెండు పరస్పరం ఐక్యం అవుతాయి. ఏ రకంగా త్రిప్పినప్పటికీ కూడా రెండూ పరస్పరం ఐక్యం అవుతాయి. త్రిభుజం యొక్క మూడు భుజాలు సమానంగా ఉన్నప్పుడు వాటి మూడు కోణాలు కూడా సమానంగా ఉంటాయని మీరు గమనించగలరా?

సమబాహు త్రిభుజంలో కింది వాటిని మనం తీర్మానించవచ్చు.

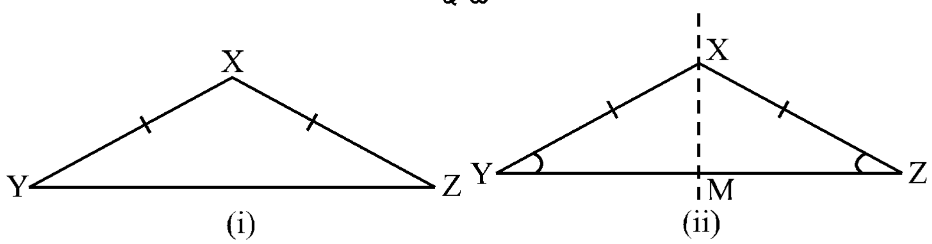


చిత్రం 6.19

(i) భుజాలన్నియు సమానం

(ii) ప్రతి కోణపు కొలత $60^\circ$.

**ఒక త్రిభుజంలో రెండు భుజాలు సమానంగా ఉన్నప్పుడు వాటిని సమబాహు త్రిభుజం అని అంటారు.**



చిత్రం 6.20

కాగితంతో XY = XZ ఉండునట్లు ఒక సమద్విబాహు త్రిభుజం కత్తరించండి. (చిత్రం 6.20) Y మీద Z ఉండునట్లు దానిని మడచండి. ఇప్పుడు X ద్వారా సాగిపోవు XM రేఖ సమమితి అక్షంగా ఉంటుంది. (దీనిని అధ్యాయం 14లో మీరు అభ్యాసం చేయగలరు) $\angle Y$ మరియు $\angle Z$ ఐక్యం కావడాన్ని మీరు గమనించగలరు. XY మరియు XZ లను సమబాహువులు; YZ ను పాదం; $\angle Y$ మరియు $\angle Z$ లను పాద కోణాలు అంటారు మరియు అవి కూడా సమానంగా ఉంటాయి.

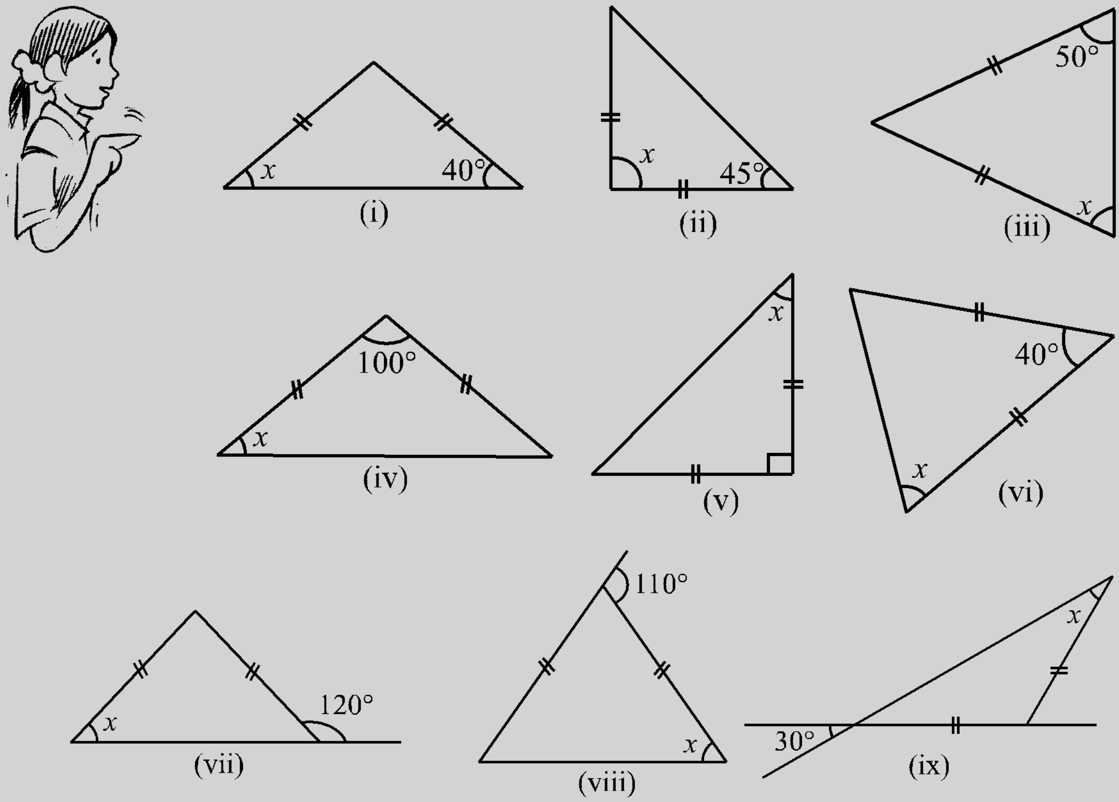
దీనివలన ఒక సమద్విబాహు త్రిభుజంలో

(i) రెండు భుజాలు సమానం.

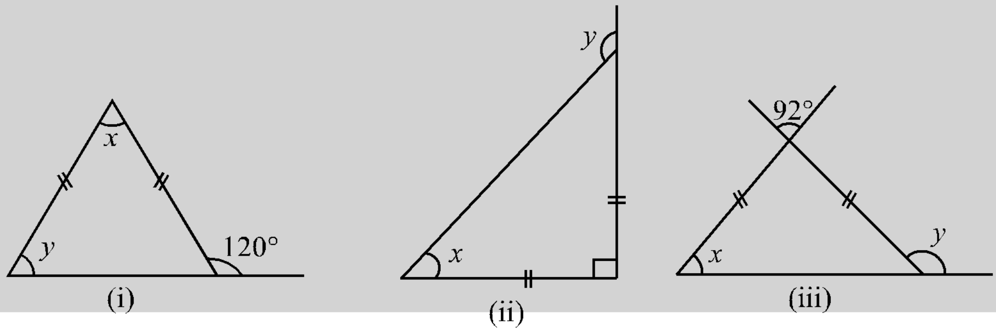
(ii) సమానభుజాలకు ఎదురెదుగానున్న పాద కోణాలు సమానం.

**వీటిని ప్రయత్నించండి.**

1. ప్రతి చిత్రంలో $x$ కోణం కనుగొనండి.

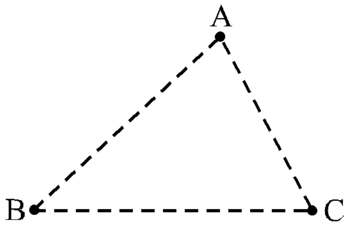



2. ప్రతి చిత్రంలో $x$ మరియు $y$ కోణాలను కనుగొనండి.




## 6.7 ఒక త్రిభుజపు రెండు భుజాల మొత్తం

1. మీ ఆట మైదానంలో A, B మరియు C మూడు ఏక రేఖాగణితం కాని స్థలాలను గుర్తించండి. సున్నపు పొడి ఉపయోగించి AB, BC మరియు AC మార్గాలను గీయండి.



చిత్రం 6.21

మీ సహపాఠకునికి A నుండి ప్రారంభించి ఒకటి లేదా ఎక్కువ మార్గాల ద్వారా నడచి C చేరమని చెప్పండి. ఉదాహరణకు వారు మొదట AB తరువాత BC పొడవునా నడచి C చేరవచ్చు లేదా నేరుగా AC పొడవునా నడవవచ్చు. సహజంగా వారు నేరుగానున్న AC మార్గానికి ప్రాధాన్యత ఇస్తారు. వారు మరొక మార్గాన్ని (మొదట AB తరువాత BC) ఎన్నుకొన్నచో ఎక్కువ దూరం నడవవలిసి ఉంటుంది. అనగా,

AB + BC > AC (i)

అదేవిధంగా, ఒకరు B నుండి ప్రారంభించి A కి చేరడానికి వారు BC మరియు CA మార్గాలను ఎన్నుకోరు. అయితే, BA మార్గానికి ప్రాధాన్యతనిస్తారు.

ఎందుకనగా BC + CA > AB (ii)

అదేవిధంగా చర్చవలన CA + AB > BC అని మీరు కనుగొనగలరు. (iii)

అది త్రిభుజంలోని ఏవైనా రెండు భుజాల మొత్తం మూడవ భుజం కంటే ఎక్కువగా ఉంటుంది. అనునది సూచిస్తుంది.

2. 6cm, 7cm, 8cm, 9cm, ................ 20cm వివిధ పొడవులుగల పదహైదు చిన్నపుల్లలు (లేదా పట్టీలు) సేకరించండి.

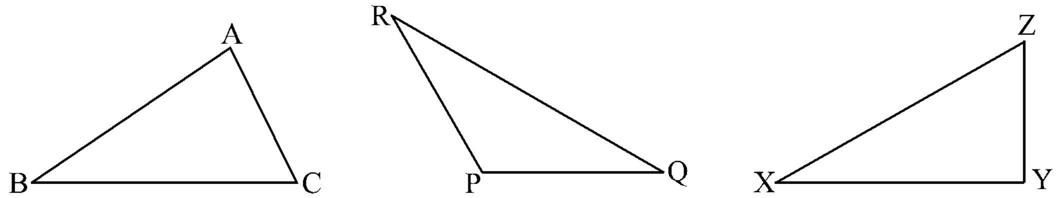
వీటిలో ఏవైనా మూడు పుల్లలను ఉపయోగించి త్రిభుజం ఏర్పరచడానికి ప్రయత్నించండి. వేర్వేరు మూడు పుల్లల సంయోజనంతో దీనిని పునరావర్తనం చేయండి.

మీరు మొదట 6cm మరియు 12cm పొడవుగల రెండు పుల్లలను ఎన్నుకొంటారని అనుకోండి. మీ మూడవ పుల్ల పొడవు 12−6 = 6cm కంటే ఎక్కువ ఉండాలి మరియు 12+6 = 18cm కంటే తక్కువ ఉంటాలి. దీనిని ప్రయత్నించి ఇది ఎందుకలా అనుదానిని కనుగొనండి.

ఒక త్రిభుజాన్ని నిర్మించడానికి మీకు ఏవైనా మూడు పుల్లల అవసరండుంది. వాటిలో ఏవైనా రెండు పుల్లల పొడవుల మొత్తం ఎల్లప్పుడూ మూడవ పుల్ల పొడవు కంటే ఎక్కువగా ఉంటుంది.

ఇది కూడా త్రిభుజపు ఏవైనా రెండు భుజాల మొత్తం మూడావ భుజం కంటే ఎక్కువగా ఉంటుంది అని సూచిస్తుంది.

3. Δ ABC, Δ PQR మరియు Δ XYZ, మూడు త్రిభుజాలను మీ పుస్తకంలో (నోటు పుస్తకంలో) నిర్మించండి. (చిత్రం 6.22)




చిత్రం 6.22

కొలతబద్ద ఉపయోగించి త్రిభుజపు భుజాల పొడవు కనుగొని కింద ఇచ్చిన పట్టికలో నింపండి.

| త్రిభుజం Δ | భుజాల పొడవు | ఇది సరినా? | |
|---|---|---|---|
| Δ ABC | AB ----- | AB – CB < CA<br>— + — > — | (అవును / కాదు) |
| | BC ----- | BC – CA < AB<br>— + — > — | (అవును / కాదు) |
| | CA ----- | CA – AB < BC<br>— + — > — | (అవును / కాదు) |
| Δ PQR | PQ ----- | PQ – QR < RP<br>— + — > — | (అవును / కాదు) |
| | QR ----- | QR – RP < PQ<br>— + — > — | (అవును / కాదు) |
| | RP ----- | RP – PQ < QR<br>— + — > — | (అవును / కాదు) |
| Δ XYZ | XY ----- | XY – YZ < ZX<br>— + — > — | (అవును / కాదు) |
| | YZ ----- | YZ – ZX < XY<br>— + — > — | (అవును / కాదు) |
| | ZX ----- | ZX – XY < YZ<br>— + — > — | (అవును / కాదు) |

మీ మొదటి ఊహకు ఇదికూడా పుష్టినిస్తుంది. అందువలన, త్రిభుజంలోని ఏవైనా రెండు భుజాల మొత్తం మూడవ భుజం కంటే ఎక్కువగా ఉంటుందని మనం తీర్మానించవచ్చు.

ఒక త్రిభుజంలోని ఏవైనా రెండు భుజాల వ్యత్యాసం మూడవ భుజం కంటే తక్కువ ఉంటుందని కూడా మనం గమనించవచ్చు.

**ఉదాహరణం 3:** భుజాల పొడవు 10.2cm, 5.8cm, మరియు 4.5cm గల ఒక త్రిభుజం ఉండవచ్చా?

**సాధన:** ఈ విధంగా త్రిభుజం ఉండవచ్చని అనుకొందాం. అప్పుడు ఏవైనా రెండు భుజాల మొత్తం మూడవ భుజం కంటే ఎక్కువగా ఉండాలి. దీనిని పరిశీలిద్దాం.

$4.5 + 5.8 > 10.2$ అవుతుందా? అవును

$5.8 + 10.2 > 4.5$ అవుతుందా? అవును

$10.2 + 4.5 > 5.8$ అవుతుందా? అవును

అందువలన ఈ త్రిభుజం ఏర్పడవచ్చు.

**ఉదాహరణం 4:** ఒక త్రిభుజంలోని రెండు భుజాల పొడవు 6cm, మరియు 8cm, ఉంది. మూడవ భుజం ఏ రెండు సంఖ్యల మధ్య ఉంటుంది.

**సాధన:** మూడవ భుజం, రెండు భుజాల మొత్తం కంటే తక్కువ ఉండాలి. అందువలన మూడవ భుజం

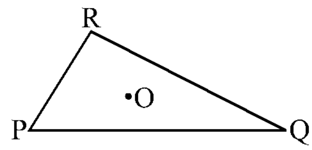
$8+6 = 14$cm కంటే తక్కువ ఉండాలి.

మూడవ భుజం రెండు భుజాల వ్యత్యాసం కంటే తక్కువ ఉండకూడదు. దీనివలన మూడవ భుజం $8-6 = 2$cm కంటే ఎక్కువగా ఉండాలి.

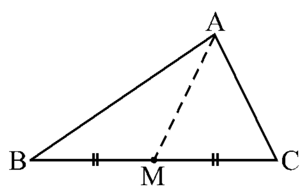
మూడవ భుజం పొడవు 2cm కంటే ఎక్కువ మరియు 14cm కంటే తక్కువగల ఏదైనా కొలత అయివుండాలి.

## అభ్యాసం 6.4

1. కింద ఇచ్చిన భుజాలతో కూడిన త్రిభుజం ఉండవచ్చా?
   (i) 2cm, 3cm, 5cm, (ii) 3cm, 6cm, 7cm,
   (iii) 6cm, 3cm, 2cm,



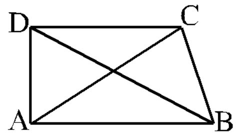

2. త్రిభుజం PQR యొక్క అంతరభాగంలో 'O' బిందువు ఉంది.
   (i) $OP + OQ > PQ$.
   (ii) $OQ + OR > QR$
   (iii) $OR + OP > RP$. అవుతుందా?




3. త్రిభుజం ABC యొక్క మధ్యరేఖ AM
   $AB + BC + CA > 2\,AM$ అవుతుందా?
   ($\Delta$ ABM మరియు $\Delta$ AMC ల భుజాలను పరిగణించండి)

4. ABCD ఒక చతురస్రం.

$AB + BC + CD + DA > AC + BD$ అవుతుందా?




5. ABCD ఒక చతురస్రం.

$AB + BC + CD + DA < 2(AC + BD)$ అవుతుందా?

6. ఒక త్రిభుజంలోని రెండు భుజాల పొడవు 12cm మరియు 15Cm మూడవ భుజం పొడవు ఏ రెండు కొలతల మధ్య ఉంటుంది?

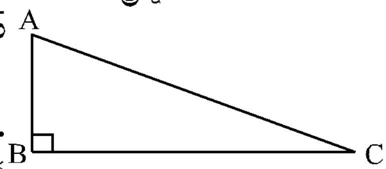
**ఆలోచించి, చర్చించి రాయండి.**

1. ఒక త్రిభుజంలోని రెండు కోణాల మొత్తం ఎల్లప్పుడూ మూడవ కోణం కంటే ఎక్కువగా ఉంటుందా?

## 6.8 లంబకోణ త్రిభుజాలు మరియు పైథాగరస్ సిద్ధాంతం

క్రీ.పూ. ఆరవ శతాబ్ధంలో పైథాగరస్ అను గ్రీకు తత్వజ్ఞాని లంబకోణ త్రిభుజాల ఒక చాలాముఖ్య మరియు ఉపయోగకర సిద్ధాంతం/ లక్షణాన్ని కనుగొన్నాడని చెప్పబడింది. ఆ సిద్ధాంతాన్ని వారి పేరుతో పిలువబడింది.

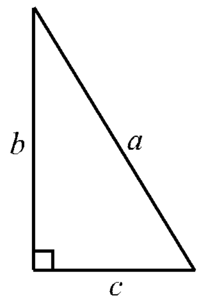
ఈ సిద్ధాంతం వాస్తవంగా చాలా దేశాల ప్రజలకు కూడా తెలుసు. భారతీయ గణిత శాస్త్రజ్ఞుడు బోధాయన కూడా ఈ సిద్ధాంతానికి సమానరూపమైన సిద్ధాంతాన్నిచ్చాడు. ఇప్పుడు పైథాగరస్ సిద్ధాంతాన్ని వివరించడానికి ప్రయత్నిద్దాం.



చిత్రం 6.23

లంబకోణ త్రిభుజంలో భుజాలు కొన్ని ప్రత్యేకమైన పేర్లు పొందాయి. లంబకోణానికి ఎదురుగానున్న భుజాన్ని వికర్ణం అని అంటారు. మిగిలిన రెండు భుజాలను లంబకోణాలతో కూడిన భుజాలు అని అంటారు.

$\Delta ABC$లో (చిత్రం 6.23), B లో లంబకోణం ఉంది. అందువలన AC వికర్ణం అవుతుంది. AB మరియు BC, $\Delta$ ABC యొక్క లంబకోణాలతో కూడిన భుజాలు

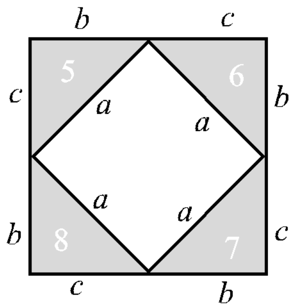


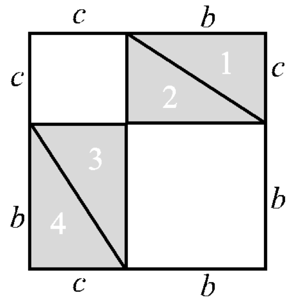
చిత్రం 6.24

మీ ఎంపికలాగా ఏదైనా కొలతగల ఎనిమిది తద్రూపి లంబకోణ త్రిభుజపు ప్రతులను చేయండి. ఉదాహరణకు వికర్ణం '$a$' ప్రమాణాలు మరియు లంబకోణాలతో కూడిన భుజాల పొడవు '$b$' ప్రమాణాలు మరియు $c$ ప్రమాణాలు ఉండునట్లు ఒక లంబకోణ త్రిభుజం నిర్మించండి. (చిత్రం 6.24)

భుజాల పొడవు $b + c$ ఉండునట్లు రెండు తద్రూపి చతురస్రాలను ఒక కాగితం మీద నిర్మించండి.

ఒక చతురస్రంలో నాలుగు భుజాలను మరియు మిగిలిన నాలుగు భుజాలను మరొక చతురస్రంలో కింద ఇచ్చిన చిత్రంలో ఉన్నట్లుగా మీరు పెట్టాలి. (చిత్రం 6.25).




చతురస్రం A చిత్రం 6.25 చతురస్రం B

చతురస్రాలు తద్రూపులయ్యాయి; ఉంచిన త్రిభుజాలు కూడా తద్రూపులయ్యాయి.

A చతురస్రంలో ఆవృతమైన భాగం = B చతురస్రంలో ఆవృతమైనభాగం.

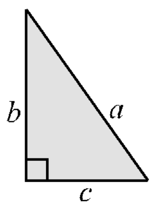
అనగా, A మార్గంలోగల అంతర చతురస్రం యొక్క

= (B చతురస్రంలో ఆవృతమైన వైశాల్యం = రెండు చతురస్రాల మొత్తం వైశాల్యం.

$$a^2 = b^2 + c^2$$

ఇది పైథాగరస్ సిద్ధాంతం. దీనిని కిందివిధంగా వ్యాఖ్యానించవచ్చు.

> ఒక లంబకోణ త్రిభుజంలో
>
> వికర్ణపు పై చతురస్రం = లంబకోణాలతో కూడిన భుజాల పైనగల చతురస్రాల మొత్తం.

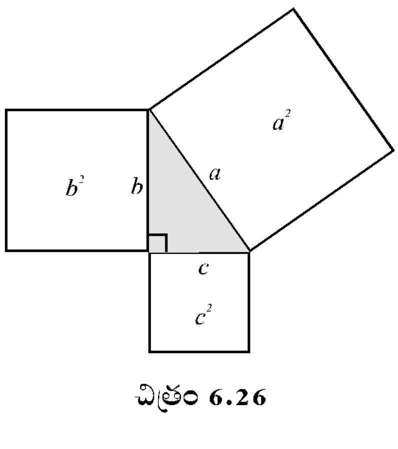



గణితంలో పైథాగరస్ సిద్ధాంతం ఒక చాలా ఉపయోగకరమైన సాధన. పై తరగతులలో దీనని ఒక సిద్ధాంతంలాగా మీరు సాధించగలరు. దీని అర్థం మీకు స్పష్టంగా తెలిసి ఉండాలి.

ఏదైనా లంబకోణ త్రిభుజంలో వికర్ణం పైనగల చతురస్రం, లంబకోణంతో కూడిన భుజాల పైనగల చతురస్రాల మొత్తానికి సమానంగా ఉంటుంది.

ఒక వర్గాకృతి కాగితం మీద లంబకోణ త్రిభుజం నిర్మించండి. దాని భుజాల మీద చతురస్రం నిర్మించండి. ఈ చతురస్రాల వైశాల్యం కనగొనండి.

సిద్ధాంతాన్ని ప్రయోగికంగా పరిశీలించండి.



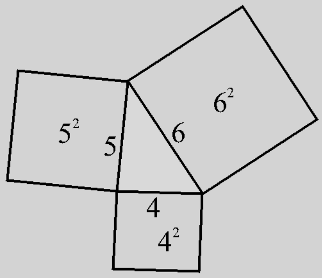

చిత్రం 6.26

పైథాగరస్ సిద్ధాంతం లంబకోణ త్రిభుజానికి సరిపోతుంది. ఏదైనా ఒక త్రిభుజానికి పైథాగరస్ సిద్ధాంతం సరిపోయేటట్లయితే, అది లంబకోణ త్రిభుజం అవుతుందా? (ఆ సమస్యలను విలోమ

సమస్యలు అంటారు). మనం దీనికి జవాబివ్వడానికి ప్రయత్నిద్దాం. ఒక త్రిభుజంలో ఏవైనా రెండు భుజాల పైనగల చతురస్రాల మొత్తం మూడవ భుజం యొక్క పైనగల చతురస్రానికి సమానంగా ఉన్నచో, అది లంబకోణ త్రిభుజం అయివుండాలని మనమిప్పుడు చూపుదాం.

**వీటిని ప్రయత్నించండి.**

1. భుజాల పొడవు 4cm, 5cm, 6cm, గల మూడు వర్గాకృతులను తీసుకోండి. ఒక త్రిభుజాకృతిని పొందడానికి చతురస్రాల మూలలను చిత్రంలో (చిత్రం 6.27) చూపినట్లుగా సరిగ్గా అమర్చండి ఏర్పడిన త్రిభుజాన్ని గుర్తించండి, త్రిభుజంలోని ప్రతి కోణాన్ని కొలవండి. ఎటువంటి లంబకోణం లేకపోవడాన్ని మీరు గమనిస్తారు.
   ఈ ప్రకరణలో ప్రతి కోణం లఘుకోణం అయింది.



చిత్రం 6.27

   $4^2 + 5^2 \neq 6^2$, $5^2 + 6^2 \neq 4^2$ మరియు $6^2 + 4^2 \neq 5^2$ అయివుండుటను గమనించండి

2. భుజాల పొడవు 4cm, 5cm, మరియు 7cm గల చతురస్రాల నుండి పై కార్యాచరణాన్ని పునరావర్తనం చేయండి. మీకు అధికకోణ త్రిభుజం లభిస్తుంది.
   $4^2 + 5^2 \neq 7^2$ అనునది గమనించండి.

పైథాగరస్ సిద్ధాంతం సరిపోవాలంటే అది లంబకోణ త్రిభుజమే అయివుండాలని అది చూపుతోంది. అందువలన, కింది వ్యాఖ్యానాన్ని పొందుతాం.

**పైథాగరస్ సిద్ధాంతం సరిపోయినచో, అది లంబకోణ త్రిభుజం అయివుంటుంది.**

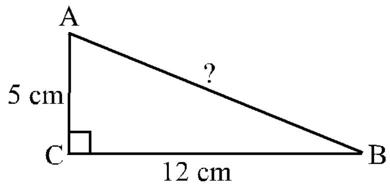
**ఉదాహరణం 5 :** భుజాల పొడవు 3cm, 4cm, మరియు 5cm గల త్రిభుజం లంబకోణ త్రిభుజం అవుతుందా? నిర్ధారించండి.

**సాధన :** $3^2 = 3\times3 = 9$, $4^2 = 4\times4 = 16$ ; $5^2 = 5\times5 = 25$ , $3^2 + 4^2 = 5^2$ కావడాన్ని మనం గమనించవచ్చు.

అందువలన త్రిభుజం లంబకోణ త్రిభుజం అయింది.

**సూచన :** ఏదైనా లంబకోణ త్రిభుజంలో వికర్ణం చాలా పెద్ద భుజంగా ఉంటుంది. ఈ ఉదాహరణలో 5cm భుజం వికర్ణం.

**ఉదాహరణం 6 :** $\Delta$ ABC లో కోణం C లంబకోణం అవుతుంది. AC = 5cm. మరియు BC = 12cm. అయితే ABల పొడవు కనుగొనండి.



చిత్రం 6.28

**సాధన :** సమస్యకు అనుగుణంగా శుద్ధ చిత్రం నిర్మించండి. (చిత్రం 6.28)

పైథాగరస్ సిద్ధాంతంనుండి.

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

$$= 5^2 + 12^2 = 25+144 = 169 = 13^2$$

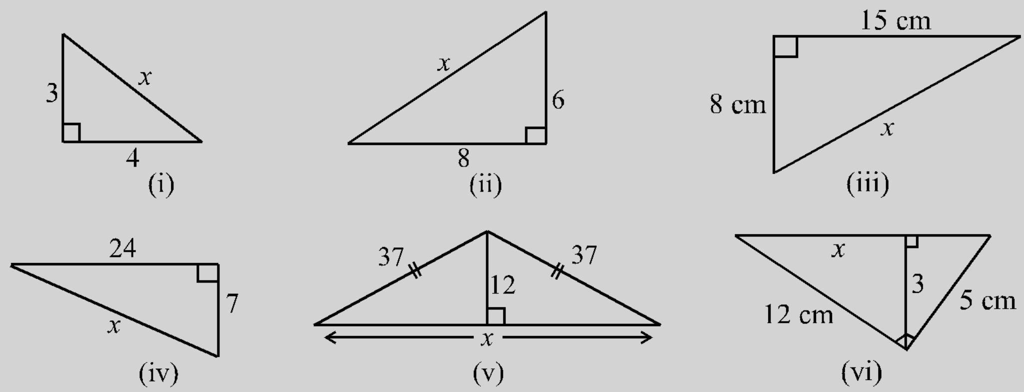
$AB^2 = 13^2$ అందువలన $AB = 13$.

AB ల పొడవు 13cm.

**సూచన :** పూర్ణ వర్గ సంఖ్యలను గుర్తించడానికి మీరు ప్రధాన సంఖ్యల (అపవర్తన) విధానాలను ఉపయోగించవచ్చు.

**వీటిని ప్రయత్నించండి.**

కింద ఇచ్చిన చిత్రాలలో (చిత్రం 6.29) తెలియని పొడవు $x$ ను కనుగొనండి.

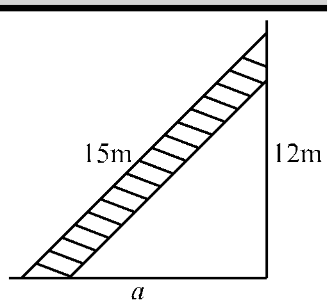



చిత్రం 6.29

## అభ్యాసం 6.5

1. PQR త్రిభుజంలో P లంబకోణం. PQ = 10cm మరియు PR = 24cm అయితే, QRను కనుగొనండి.

2. ABC త్రిభుజంలో C లంబకోణం AB = 25cm మరియు AC = 7cm అయితే BC కనుగొనండి.




3. 15m పొడవుగల నిచ్చెనను నేలనుండి 12m ఎత్తులోగల ఒక కిటికీని చేరునట్లు గోడనుండి '$a$'m దూరంలో నిల బెట్టబడింది. నిచ్చెన పాదం నుండి గోడకుగల దూరం కనుగొనండి.

**4.** కింది వాటిలో ఏవి లంబకోణ త్రిభుజాల భుజాలు కావచ్చు?

(i) 2.5cm, 6.5cm, 6.cm,

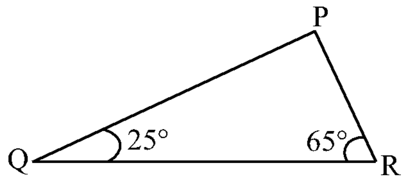
(ii) 2cm, 2cm, 5cm,

(iii) 1.5cm, 2cm, 2.5cm,

లంబకోణ త్రిభుజలయినచో, లంబకోణాలను గుర్తించండి.

**5.** ఒక వృక్షం నేలనుండి 5m ఎత్తులో విరిగింది. దాని పై తుది, వృక్షం మొదటనుండి 12m దూరంలో నేలను తాకుతోంది. మూల జవాబు కనుగొనండి.

**6.** $\Delta$ PQR కోణాలైన Q మరియు R యొక్క కొలతలు 25° మరియు 65° ఉంది. కిందివాటిలో ఏది సరియో రాయండి.




(i) $PQ^2 + QR^2 = RP^2$

(ii) $PQ^2 + RP^2 = QR^2$

(iii) $RP^2 + QR^2 = PQ^2$

**7.** పొడవు 40cm మరియు కర్ణం 41cm గల ఒక ధీర్ఘ చతురస్రం చుట్టుకొలత కనుగొనండి.

**8.** ఒక వజ్రాకృతి యొక్క కర్ణాల కొలత 16cm మరియు 30cm ఉంది. దాని చుట్టుకొలత కనుగొనండి.

**ఆలోచించి, చర్చించి రాయండి.**

**1.** P లంబకోణంగాగల త్రిభుజం PQR లో చాలా పొడవైన భుజం ఏది?

**2.** B లంబకోణంగాగల త్రిభుజం ABC లో చాలా పొడవైన భుజం ఏది?

**3.** ఒక లంబకోణ త్రిభుజంలో చాలా పొడవైన భుజం ఏది?

**4.** ఒక ధీర్ఘచతురస్రం పొడవు మరియు వెడల్పులు వేర్వేరుగా ఏర్పరచు మొత్తం వైశాల్యాన్ని ఆ ధీర్ఘ చతురస్రపు కర్ణం ఏర్పరుస్తుంది. అది బోధాయన సిద్ధాంతం దీనిని పైథాగరస్ సిద్ధాంతంతో పోల్చండి.

**దీనిని ప్రయత్నించండి.**

కార్యాచరణం :

పైథాగరస్ సిద్ధాంత సాధనకు ఖండన మరియు పునర్ అమరిక యొక్క చాలా రకాల విధానాలున్నాయి. వాటిలో కొన్నింటిని సేకరించండి మరియు చార్టులు రాసి వివరించండి.

## ఇప్పటి వరకు చర్చించిన అంశాలు

1. మూడు కోణాలు మరియు మూడు భుజాలు త్రిభుజం యొక్క ఆరు అంశాలు.
2. త్రిభుజపు ఒక శీర్షం మరియు దాని అభిముఖ భుజం యొక్క మధ్యబిందువును కలిపే రేఖాఖండాన్ని త్రిభుజపు మధ్యరేఖ అని అంటారు. ఒక త్రిభుజం మూడు మధ్యరేఖలను కలిగియుంటుంది.
3. త్రిభుజపు ఒక శీర్షం నుండి దాని అభిముఖ ఎదురు భుజానికి గీచిన లంబ రేఖా ఖండాన్ని త్రిభుజపు ఎత్తు అని అంటారు. ఒక త్రిభుజం మూడు ఎత్తులు కలిగియుంటుంది.
4. త్రిభుజం యొక్క ఒక భుజాన్ని పెంచినప్పుడు బాహ్యకోణం ఏర్పడుతుంది. ప్రతి శీర్షంలో మీరు రెండు విధాలలో బాహ్యకోణాలను ఏర్పరచవచ్చు.
5. **బాహ్యకోణాల లక్షణాలు :**

   ఒక త్రిభుజం యొక్క బాహ్యకోణపు కొలత అంతరాభిముఖ కోణాల మొత్తానికి సమానంగా ఉంటుంది.
6. త్రిభుజపు కోణాల మొత్తపు లక్షణం : త్రిభుజపు మూడు అంతరకోణాల మొత్తం $180^\circ$.
7. త్రిభుజంలోని ప్రతి భుజం ఒకే పొడవు కలిగియున్నచో దానిని సమబాహు త్రిభుజం అంటారు. సమబాహు త్రిభుజంలో ప్రతి కోణపు కొలత $60^\circ$.
8. త్రిభుజంలో కనిష్ఠం రెండు భుజాలు ఒకే పొడవు కలిగియున్నచో దానిని సమద్విబాహు త్రిభుజం అంటారు.

   సమద్విబాహు త్రిభుజపు అసమబాహువును దాని పాదం అంటారు. సమద్విబాహు త్రిభుజపు పాదకోణాల కొలత సమానంగా ఉంటాయి.
9. త్రిభుజపు భుజాల లక్షణాలు.

   త్రిభుజపు ఏవైనా రెండు భుజాల మొత్తం మూడవ భుజం కంటే ఎక్కువగా ఉంటుంది.

   త్రిభుజపు ఏవైనా రెండు భుజాల వ్యత్యాసం మూడవ భుజం కటే తక్కువ ఉంటుంది.

   మూడు భుజాల కొలత తెలిసినప్పుడు త్రిభుజం నిర్మించడానికి సాధ్యమా అని తెలుసుకోవడానికి ఈ సిద్ధాంతం ఉపయోగంగా ఉంటుంది.

10. లంబకోణ త్రిభుజంలో లంబకోణానికి అభిముఖంగానున్న బాహువును వికర్ణం అంటారు, మిగిలిన రెండు భుజాలను లంబకోణాలతో కూడిన భుజాలు అంటారు.

11. పైథాగరస్ సిద్ధాంతం

ఒక లంబకోణ త్రిభుజంలో

వికర్ణపు పై చతురస్రం = లంబకోణాలతో కూడిన భుజాల మొత్తం చతురస్రాల మొత్తం.

లంబంకోణ త్రిభుజం కానట్లయితే, ఈ సిద్ధాంతం/లక్షణం సరిపోదు. ఇచ్చిన త్రిభుజం లంబకోణ త్రిభుజమా లేదా కాదా అని తీర్మానించడానికి ఈ ధర్మం ఉపయోగకరంగా ఉంటుంది.

అధ్యాయం - 7

# త్రిభుజాల సర్వసమానత్వం

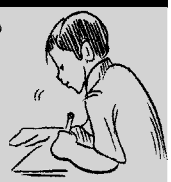
## 7.1 పీఠిక:

ఒక చాలా ముఖ్యమైన రేఖాగణితం యొక్క కల్పన **సర్వసమానత్వాన్ని** నేర్చుకోవడానికి మీరిప్పుడు సిద్ధంగా ఉన్నారు. నిర్దిష్టంగా మీరు త్రిభుజాల సర్వసమానత్వం గురించి ఎక్కువ అధ్యయం చేస్తారు.

సర్వసమానత్వం అనగానేమో అర్థం చేసుకోవడానికి కొన్ని కార్యాచరణాలు చేపట్టుదాం.

**వీటిని చేయండి.**

ఒకే ముఖవిలువ కలిగిన రెండు తపాలా బిళ్ళలను తీసుకోండి (చిత్రం 7.1) ఒక తపాలా బిళ్ళను మరొక దానిమీద పెట్టండి. మీరు ఏమేమి గమనించగలరు?

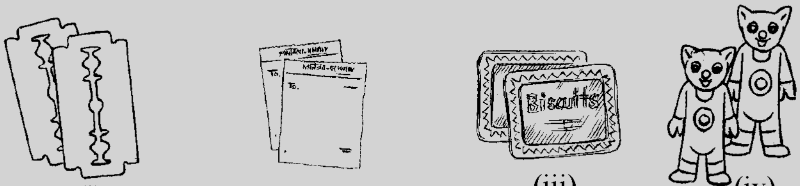


చిత్రం 7.1

ఒక తపాలా బిళ్ళ మరొకదాని మీద పూర్తిగా మరియు నిఖరంగా ఆవృతమైంది. దాని అర్థం రెండు తపాలా బిళ్ళలు ఒకే ఆకారం మరియు ఒకే పరిమాణాన్ని కలిగియున్నాయి. అలాంటి వస్తువులను సర్వసమానం అంటారు. మీరు ఉపయోగించిన రెండు తపాలా బిళ్ళలు పరస్పరం సర్వసమానంగా ఉన్నాయి. సర్వసమాన ఆకృతులు ఒకటి మరొకదాని తద్రూపి ప్రతులుగా ఉంటాయి.

కింద ఇచ్చిన వస్తువులు సర్వసమానమా లేదా కాదా అని మీరిప్పుడు చెప్పగలరా?

1. ఒకే కంపెని షేవింగ్ బ్లేడులు [చిత్రం 7.2 (i)]
2. ఒకే లెటర్ ప్యాడ్‌లోని కాగితాలు [చిత్రం 7.2) (ii)]
3. ఒకే ప్యాకెట్‌లోగల బిస్కట్‌లు [చిత్రం 7.2) (iii)]
4. ఒకే అచ్చుతో చేసిన బొమ్మలు [చిత్రం 7.2) (iv)].

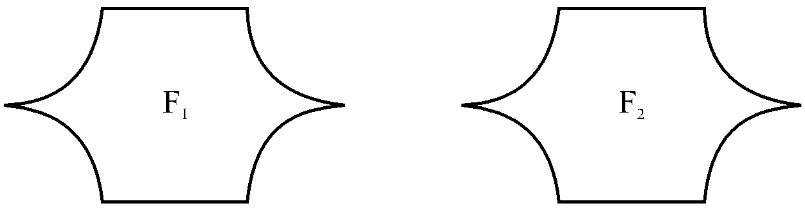



(i) (ii) చిత్రం 7.2 (iii) (iv)

సర్వసమానంగల రెండు వస్తువుల మధ్యగల సంబంధాన్ని సర్వసమానత్వం అని అంటారు. సర్వసమానత్వం అనునది త్రిమితీయ ఆకృతులకు అన్వయించు సామాన్య కల్పన అయినప్పటికీ కూడా ప్రస్తుతం మనం సమతలాకృతులను మాత్రమే ఇక్కడ అధ్యయనం చేస్తాం. మనం ముందుగానే తెలిసిన సమతలాకృతుల సర్వసమానత్వం యొక్క నిఖరమైన అర్థాన్ని తెలుసుకోవడానికి ప్రయత్నిద్దాం.

## 7.2 సమతలాకృతుల సర్వసమానత్వం.

కింద ఇచ్చిన రెండు చిత్రాలను గమనించండి. అవి సర్వసమానమా? (చిత్రం 7.3)




(i) చిత్రం 7.3 (ii)

ఒకదానిపై మరొక దానిని ఉంచే విధానాన్ని మీరు ఉపయోగించవచ్చు. వాటిలోని ఒకదాని ట్రేస్ ప్రతి పొంది మరొకదాని మీద పెట్టండి. రెండు ఆకృతులు పూర్తిగా పరస్పరం ఐక్యమయినచో అవి సర్వసమానం. పర్యాయం గా వాటిలోగల ఒక ఆకృతిని కత్తరించి, మరొకదాని మీద పెట్టాలి. కత్తరించిన ఆకృతిని (లేదా ట్రేస్ ప్రతిని) వంచడంకాని, త్రిప్పడంగాని లేదా వ్యాకోచింపజేయడంగాని చేయునట్లు మీకు అవకాశం లేదు.

చిత్రం 7.3లో $F_1$ చిత్రం $F_2$ చిత్రానికి సర్వ సమానం అయినచో $F_1 \cong F_2$ అని రాస్తాం.

## 7.3 రేఖాఖండాల సర్వసమానత్వం

రెండు రేఖా ఖండాలు ఎప్పుడు సర్వసమానం అవుతాయి? కింద ఇచ్చిన రెడు జతల రేఖాఖండాలను గమనించండి. (చిత్రం 7.4)

(i) (ii)

చిత్రం 7.4

చిత్రం 7.4 (i) లోగల రేఖా ఖండాల జతకు ట్రేస్‌చేసి, ఒకదాని పై మరొకటి ఉంచెండి విధానాన్ని ఉపయోగించండి. $\overline{CD}$ ని $\overline{AB}$ పైన ఉంచండి A మీద C మరియు B మీద D అగునట్లు $\overline{CD}$ అనునది $\overline{AB}$ తో ఐక్యమవుతుంది. అందువలన రేఖాఖండాలు సర్వసమానం $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ అని రాస్తాం.

చిత్రం 7.4 (ii) లోగల రేఖాఖండాల జతకు ఈ కార్యాచరణాన్ని పునరావర్తనం చేయండి. మీరు ఏమేమి గమనిస్తారు? అవి సర్వసమానం కాదు? అది మీకెలా తెలిసింది? ఎందుకనగా, రేఖాఖండాలను ఒకదాని మీద మరొకదానిని పెట్టినప్పుడు అవి పరస్పరం ఐక్యం కావు.

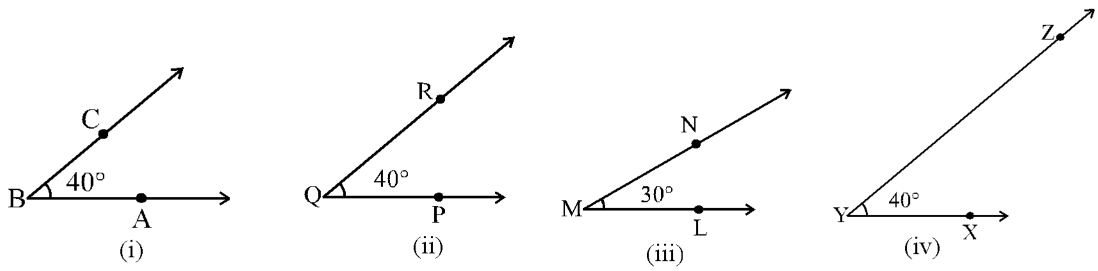
చిత్రం 7.4 (i) లోగల రేఖాఖండాల జత పరస్పరం సర్వసమానం ఎందుకనగా వాటి పొడవు ఒకటే అయింది చిత్రం 7.4 (ii) లో సర్వసమానం కాదు అనునది మనం గమనించియుండవచ్చు.

రెండు రేఖాఖండాల పొడవు ఒకటే అయినచో (అనగా సమానం), అవి సర్వసమానం లేదా రెండు రేఖాఖండాలు సర్వసమానంగానున్నచో, వాటి పొడవు ఒకటే అయివుంటుంది.

పై వ్యాఖ్యానానికి సంబంధించి రెండు రేఖాఖండాలు సర్వసమానంగానున్నప్పుడు, ఆ రేఖా ఖండాలు సమానం అని మాత్రమే ఒక్కొక్కసారి చెప్పుతాం AB = CD అని రాస్తాం. (నిజంగా $AB \cong CD$ అని అర్థం).

## 7.4 కోణాల సర్వసమానత్వం

కింద ఇచ్చిన నాలుగు కోణాలను గమనించండి. (చిత్రం 7.5)




చిత్రం 7.5

$\angle PQR$ ను ట్రేస్ చేయండి, ట్రేస్ చేసిన ప్రతిని $\angle ABC$ మీద ఉంచండి. ముందుగా B మీద Q ను $\overline{BA}$ పొడవునా $\overline{QP}$ ని పెట్టండి. $\overline{QR}$ దేనితో ఐక్యమవుతుంది? అది $\overline{BC}$ తో ఐక్యమగుతుంది.

అనగా, $\angle PQR$ మరియు $\angle ABC$ సర్వసమానం.

దీనివలన $\angle ABC$ తో $\angle PQR$ నిఖరంగా పొందిక అవుతుంది.

(రెండు సర్వసమాన కోణాల కొలత ఒకటే అయివుండుటను గమనించండి)

$\angle ABC \cong \angle PQR$ అని రాస్తాం. (i)

లేదా $m\angle ABC = m\angle PQR$ (ఈ ప్రకరణలో కొలత $40^0$)

ఇప్పుడు $\angle LMN$ ను ట్రేస్ చేసిన ప్రతిని తీసుకోండి. $\angle ABC$ మీద పెట్టడానికి ప్రయత్నించండి. B మీద M ను మరియు $\overline{BA}$ పొడవునా $\overline{ML}$ ను పెట్టండి. $\overline{MN}$ , $\overline{BC}$ తో ఐక్యమవుతుందా? కాదు ఈ ప్రకరణలో

అది ఐక్యంకాదు $\angle ABC$ మరియు $\angle LMN$ పరస్పరం ఐక్యం కాదు. అందువలన అవి సర్వసమానం కాదు.

(ఈ ప్రకరణలో $\angle ABC$ మరియు $\angle LMN$ కొలతలు సమానం కాదు అని గమనించండి.)

$\angle XYZ$ మరియు $\angle ABC$ గురించి మీరేమి చెప్పగలరు? $\overline{YX}$ మరియు $\overline{YZ}$ కిరణాలు వరుసగా $\overline{BA}$ మరియు $\overline{BC}$ కంటే పొడవుగా ఉన్నట్లు కనబడుతుంది (చిత్రం 7.5(iv)లో) అందువలన $\angle ABC$ అనునది $\angle XYZ$ కంటే చిన్నది అని మీరు ఆలోచించవచ్చు. అయితే, చిత్రంలోగల కిరణాలు దిక్కును మాత్రమే సూచిస్తాయి. పొడవును కాదని జ్ఞాపకముంచుకోండి. ఒకదానిపై మరొక దానిని ఉంచినప్పుడు రెండు కోణాలు కూడా సర్వ సమానమని మీరు గమనించగలరు.

$\angle ABC \cong \angle XYZ$ అని రాస్తాం. (ii)

లేదా $m\angle ABC = m\angle XYZ$

(i) మరియు (ii) నుండి కిందివిధంగా రాయవచ్చు.

$$\angle ABC \cong \angle PQR \cong \angle XYZ$$

రెండు కోణాల కొలత ఒకటే అయినచో, అవి సర్వసమానం లేదా రెండు కోణాలు సర్వసమాంగానున్నచో, వాటి కొలత ఒకటే అయివుంటుంది.

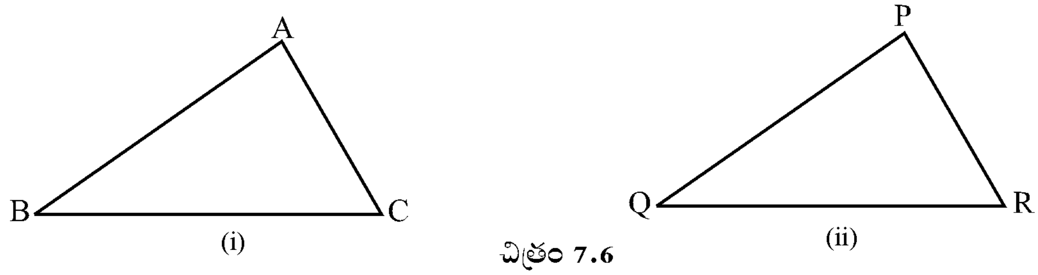
రేఖాఖండాల ప్రకరణంలాగా, కోణాల సర్వసమానత్వం కూడా పూర్తిగా వాటి కొలత మీద ఆధారపడియుంటుంది. రెండు కోణాలు సర్వసమానం అని చెప్పేటప్పుడు మనం ఒక్కొక్కసారి కోణాలు సమానం అని మాత్రమే చెప్పుతాం.

$\angle ABC = \angle PQR$ అని రాస్తాం. (దీని అర్థం $\angle ABC \cong \angle PQR$)

## 7.5 త్రిభుజాల సర్వసమానత్వం

రెండు రేఖాఖండాలలో ఒకదాని కొలత మరొక దానికి సమానంగా ఉంటుంది. అనగా అవి సర్వసమానం అని మనం తెలుసుకున్నాం, అదేవిధంగా రెండు కోణాలలో ఒకదాని కొలత మరొకదానికి సమానంగానున్నప్పుడు అవి సర్వసమానంగా ఉంటాయి. ఈ కల్పనను మనం త్రిభుజాలకు విస్తరిద్దాం.

రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానం కావాలంటే, అవి పరస్పరం తద్రూపులుగా ఉంటాలి మరియు ఒకదాపై మరొక దానిని పెట్టినప్పుడు అవి పరస్పరం ఐక్యం కావాలి.




చిత్రం 7.6

$\Delta ABC$ మరియు $\Delta PQR$లు ఒకే ఆకారం మరియు ఒకే పరిమాణం కలిగియున్నాయి. అవి సర్వసమానం అందువలన $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ అని వ్యక్తపరచవచ్చు.

దీని అర్థం $\Delta ABC$ మీద $\Delta PQR$ ను పెట్టినప్పుడు A తో P, B తో Q, C తో R, $\overline{AB}$, తో $\overline{PQ}$ $\overline{BC}$ తో $\overline{QR}$ మరియు $\overline{AC}$ తో $\overline{PR}$ ఐక్యమగుతుంది. రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానమైనప్పుడు పరస్పరం పొందుకొను అనురూప భాగాలు (అనగా, కోణాలు మరియు భుజాలు) సమానంగా ఉంటాయి. దీనివలన ఈ రెండు సర్వసమాన త్రిభుజాలలో

| | |
|---|---|
| అనురూప శీర్షాలు | : A మరియు P, B మరియు Q, C మరియు R |
| అనురూప భుజాలు | : $\overline{AB}$ మరియు $\overline{PQ}$, $\overline{BC}$ మరియు $\overline{QR}$, $\overline{AC}$ మరియు $\overline{PR}$ |
| అనురూప కోణాలు | : $\angle A$ మరియు $\angle P$ , $\angle B$ మరియు $\angle Q$, $\angle C$ మరియు $\angle R$. |

P మరియు B తో ఐక్యం అగునట్లు మీరు $\Delta ABC$ మీద $\Delta PQR$ను పెట్టినప్పుడు, వేరే శీర్షాలు కూడా ఐక్యమవుతాయా? అవి కానేకావాలని లేదు, త్రిభుజాల ట్రేస్ ప్రతులను తీసుకొని కనుగొనడానికి ప్రయత్నించండి.

త్రిభుజాల సర్వసమానత్వం గురించి చెప్పేటప్పుడు, కోణాల కొలత మరియు భుజాల పొడవు అంతేకాకుండా శీర్షాల పొందికను కూడా పరిగణించాలి. పై ప్రకరణంలో అనురూపత కిందివిధంగా ఉంటుంది.

$A \leftrightarrow P,\ B \leftrightarrow Q,\ C \leftrightarrow R$ అని రాయవచ్చు

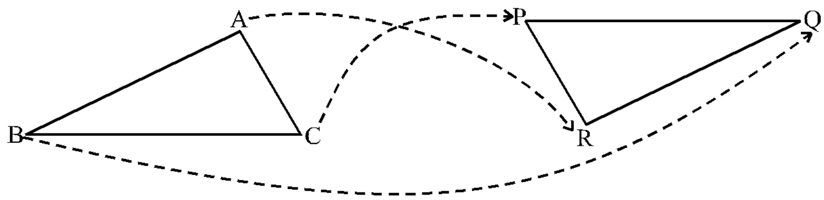
దీనిని $ABC \leftrightarrow PQR$ అని రాయవచ్చు

**ఉదాహరణం 1 :** $ABC \leftrightarrow RQP$ అనురూపతలో $\Delta\, ABC$ మరియు $\Delta\, PQR$ సర్వసమానంగా ఉంటాయి.

(i) $\overline{PQ}$ (ii) $\angle Q$ (iii) $\overline{RP}$ లకు అనురూపంగాగల

$\Delta ABC$ యొక్క భాగాలను రాయండి.

**సాధన :** అనురూపతను ఉత్తమ రీతిలో అర్థం చేసుకోవడానికి కింది చిత్రం ఉపయోగిద్దాం(చిత్రం 7.7).




చిత్రం 7.7

అనురూపత $ABC \leftrightarrow RQP$

దీని అర్థం $A \leftrightarrow R,\ B \leftrightarrow Q;$ మరియు $C \leftrightarrow P$

అందువలన (i) $PQ \leftrightarrow CB$ (ii) $\angle Q \leftrightarrow \angle B$ మరియు (iii) $RP \leftrightarrow AC$

**ఆలోచించి, చర్చించి రాయండి.**

$\Delta ABC$ మరియు $\Delta PQR$ లను ఇవ్వబడినవి మొత్తం 6 పొందికలు లేదా అనురూపతలు సాధ్యం వాటిలో రెండు ఈ విధంగా ఉన్నాయి.

(i) $ABC \leftrightarrow PQR$ (ii) $ABC \leftrightarrow QRP$

త్రిభుజపు రెండు ప్రతులను (నమూనాలను) ఉపయోగించి, వేరె నాలుగు అనురూపతలను కనుగొనండి. ఈ అనురూపతలన్నీ సర్వసమానత్వానికి దారి కల్పిస్తున్నాయా? వీటి గురించి ఆలోచించండి.

**అభ్యాసం 7.1**

1. కింది వ్యాఖ్యానాలను సరైన పదాలతో పూరించండి.

(a) రెండు రేఖాఖండాలు సర్వసమానం కావాలంటే ____________

(b) రెండు సర్వసమాన కోణాలలో ఒకదాని కొలత $70^0$, మరొకదాని కొలత ____________ ,

(c) $\angle A = \angle B$ అని రాసినప్పుడు; వీటి నిజమైన అర్థం __________

2. సర్వసమాన ఆకృతులకు నిజ జీవితంలోని ఏవైనా రెండు ఉదాహరణలివ్వండి.

3. $ABC \leftrightarrow FED$ అనురూపతలో $\Delta ABC \cong \Delta FED$ అయినచో సర్వసమాన త్రిభుజంలోని అనురూప భాగాలన్నింటిని రాయండి.

4. $\Delta DEF \cong \Delta BCA$ అయినచో, $\Delta BCA$ లో అనురూపంగానున్న భాగాలను రాయండి.

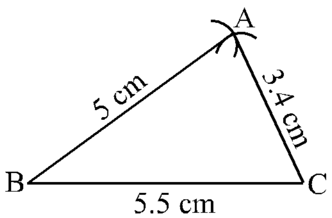
i) $\angle E$ (ii) $\overline{EF}$ (iii) $\angle F$ (iv) $\overline{DF}$ లకు

## 7.6 త్రిభుజాల సర్వసమానత్వానికి నిబంధనలు

నిత్య జీవితంలో త్రిభుజాకార ఆకృతులు మరియు నమూనాలను అప్పుడప్పుడు మనం ఉపయోగిస్తుంటాం త్రిభుజాకృతులు ఎప్పుడు సర్వసమానంగా ఉంటాయో కనుగొందాం. మీ పుస్తకంలో గీసిన రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానమా అని పరిశీలించాలని మీరు కోరుకున్నచో ప్రతిసారి కూడా త్రిభుజాలను కత్తరించి ఒకదానిపై మరొకటి ఉంచి, పరస్పరం ఐక్యమవుతాయా అని తెలుసుకోవడానికి కాదు. దీనికి బదులుగా కొన్ని సరైన కొలతలు ఉపయోగించి మనం సర్వసమానత్వాన్ని తీర్మానించవచ్చు. అది చాలా ఉపయోగకరమైనది దీనిని చేయడానికి ప్రయత్నిద్దాం.

## ఒక ఆట

అప్పు మరియు టిప్పు ఒక ఆట ఆడుతారు. అప్పు త్రిభుజం ABC నిగీచి, ప్రతి భుజం పొడవు మరియు ప్రతి కోణం పొడవును గుర్తించాడు టిప్పు దానిని చూడలేదు . అప్పు ఇచ్చిన కొన్ని వివరాల ఆధారంగా తన $\Delta ABC$ కి తద్రూపి అయిన త్రిభుజాన్ని రాయగలవా అని టిప్పుకు సవాలు విసిరాడు. అప్పు ఇచ్చిన వివరాలను ఉపయోగించి $\Delta ABC$ కి సర్వసమానంగానున్న త్రిభుజం గీయడానికి టిప్పు ప్రయత్నించాడు ఆట ప్రారంభమయింది. జాగ్రత్తగా వారి సంభాషణ మరియు ఆటను గమనించండి.

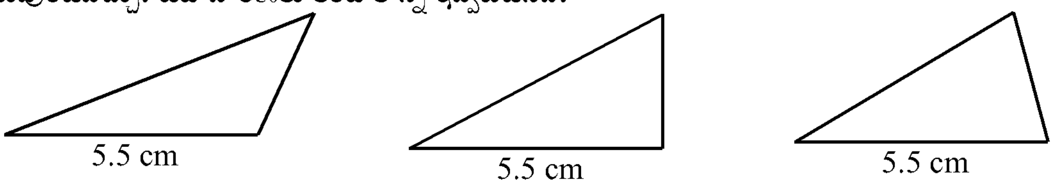



చిత్రం 7.8
అప్పు గీచిన త్రిభుజం

### భుభుభు (బాబాబా)ఆట:

అప్పు : త్రిభుజంలోని ఒక భుజం 5 cm

టిప్పు : ఒక వివరాలతో నేను అనేక త్రిభుజాలు గీయవచ్చు (చిత్రం 7.9). అయితే, అవన్నియు $\Delta ABC$ తద్రూపులు అయి ఉండాలనిలేదు. నేను గీచిన త్రిభుజం అధికకోణం లేదా లంబకోణం లేదా లఘుకోణ త్రిభుజం అయివుండవచ్చు. ఉదాహరణకు కింద కొన్ని ఇవ్వబడినవి.




(అధిక కోణం) (లంబకోణం) (లఘుకోణం)

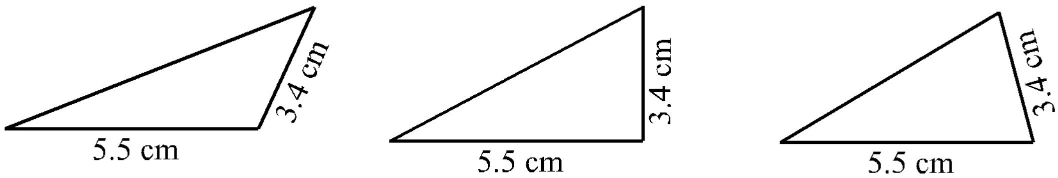
చిత్రం 7.9

వేరె భుజాలకు ఎటువంటి నిర్బంధం లేని కొలతలు ఉపయోగించాను దీని వలన పాదం పొడవు 5.5cm గల అనేక త్రిభుజాలు ఏర్పడ్డాయి.

కేవలం ఒకేఒక భుజం పొడవు, $\Delta ABC$ కి తద్రూపి త్రిభుజాన్ని గీయడానికి నాకు సహాయపడదు.

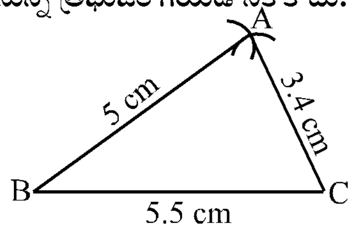
అప్పు : సరి నేను నీకు ఇంకొక భుజం పొడవు ఇస్తాను. $\Delta$ ABC యొక్క రెండు భుజాలు 5.5cm మరియు 3.4cm అని తీసుకో.

టిప్పు : నిర్మాణానికి ఇది కూడా సరిపోదు. ఇచ్చిన వివరాలనుండి, నేను అనేక త్రిభుజాలు గీయవచ్చు. (చిత్రం 7.10) అవి $\Delta ABC$ కి తద్రూపిగా ఉండవచ్చు. కింద కొన్ని త్రిభుజాలు ఇవ్వబడ్డాయి. అవి మీ వాదనకు ఆధారంగా ఉన్నాయి.




చిత్రం 7.10

రెండు భుజాల పొడవులు మాత్రమే ఇచ్చినప్పుడు మీ త్రిభుజానికి తద్రూపిగానున్న త్రిభుజం గీయడానికి కాదు.




చిత్రం 7.11

అప్పు : సరి అలాగయితే త్రిభుజంలోని భుజాలన్నింటి పొడవును ఇస్తాను. $\Delta ABC$ లో AB = 5cm, BC = 5.5cm, మరియు AC = 3.4cm.

టిప్పు : నా ఆలోచన ప్రకారం అది సాధ్యం కానే కావాలి ఇప్పుడుప్రయత్నిస్తాను. ముందుగా ఒక శుద్ధ చిత్రం గీస్తాను. దీనివలన నేను పొడవులను సులభంగా గుర్తుంచుకోవచ్చు.

$\overline{BC}$ యొక్క పొడవు 5.5cm గీస్తాను.

B ని కేంద్రంగా పెట్టుకొని, 5cm వ్యాసార్థంగల ఒక కంసం గీస్తాను. A బిందువు ఈ కంసం మీద ఉండాలి. C ని కేంద్రంగా పెట్టుకొని, 3.4cm వ్యాసార్థంగల కంసం గీస్తాను. A బిందువు ఈ కంసం పైన కూడా ఉండాలి. అందువలన గీచిన రెండు కంసాల మీద A ఉంటుంది. దీని అర్థం కంసాల ఖండన బిందువు A అవుతుంది. ఇప్పుడు నీకు A, B మరియు C బిందువుల స్థానం తెలిసింది నేను వాటిని కలిపి $\Delta ABC$ పొందుతాను (చిత్రం 7.11).

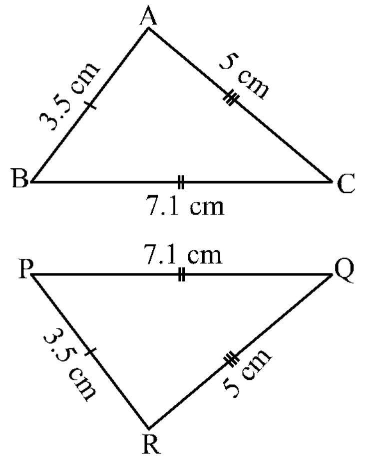
అప్పు : అత్యుత్తమం, ఇచ్చిన $\Delta ABC$యొక్క తద్రూపి త్రిభుజం గీయడానికి (అనగా $\Delta ABC$ కి సర్వ సమానం గానున్న త్రిభుజం గీయడానికి) మీకు మూడు భుజాల పొడవు అవసరం ఉంది. ఈ నిబంధనను భుజం – భుజం – భుజం నిబంధన అని పిలుద్దామా?

టిప్పు : సులభంగా భు–భు–భు నిబంధన అని ఎందుకు పిలువకూడదు?

**భు–భు–భు సర్వసమానత్వ నిబంధన :**
ఒక త్రిభుజంలోని మూడు భుజాలు మరొక త్రిభుజంలోని మూడు అనురూప భుజాలకు సమానమైనచో ఆ రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానంగా ఉంటాయి.

**ఉదాహరణ 2 :** $\Delta$ ABC మరియు $\Delta$ PQR లలో AB = 3.5cm, BC = 7.1cm, AC = 5cm PQ = 7.1cm, QR = 5cm మరియు PR = 3.5cm రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానమా లేదా కాదా పరీక్షించండి. సర్వసమానమైనచో సమరూప సంబంధాలను సంకేత రూపంలో రాయండి.

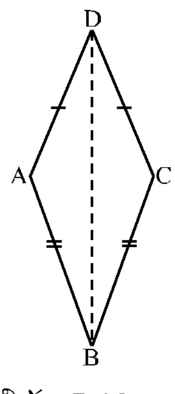
**సాధన :** ఇక్కడ AB = PR ( = 3.5cm ),
BC = PQ ( = 7.1cm )
మరియు AC = QR ( = 5cm )



చిత్రం 7.12

ఒక త్రిభుజంలోని మూడు భుజాలు మరొక త్రిభుజంలోని మూడు భూజాలకు సమానమైనాయని చూపుతుంది. అందువలన భుభుభు సర్వ సమానత్వ నియమం నుండి రెండు త్రిభుజాలు సర్వ సమానం పై మూడు సమానత్వ సంబంధం నుండి చాలా సులభంగా $A \leftrightarrow R$, $B \leftrightarrow P$ మరియు $C \leftrightarrow Q$ గా చూడవచ్చు. అందువలన $\Delta ABC \cong \Delta RPQ$

**ముఖ్య సూచన :** సర్వసమాన త్రిభుజాల పేరులోగల అక్షరాల క్రమం అనురూపతయొక్క సంబంధాలను తెలుపుతుంది. దీనివలన $\Delta ABC \cong \Delta RPQ$ అని మీరు రాసినప్పుడు A అనునది R తో B అనునది P తో C అనునది Q తో $\overline{AB}$ అనునది $\overline{RP}$ తో $\overline{BC}$ అనునది $\overline{PQ}$ తో మరియు $\overline{AC}$ అనునది $\overline{RQ}$ తో ఐక్యమవుతుందని మీకు తెలుస్తుంది.



చిత్రం 7.13

**ఉదాహరణం 3 :** చిత్రం 7.13లో AD = CD మరియు AB = CB.

(i) $\Delta$ABD మరియు $\Delta$CBD లలో మూడు జతం సమాన భాగాలను గీయండి.

(ii) $\Delta ABD \cong \Delta CBD$ అవుతుందా? ఎందుకు లేదా ఎందుకు కాదు?

(iii) $\angle ABC$ ని BD ద్విభాగిస్తున్నదా? కారణమివ్వండి.

**సాధన :** (i) $\Delta$ABD మరియు $\Delta$CBD లలో మూడు జతల సమానభాగాలు కిందివిధంగా ఉంటాయి.

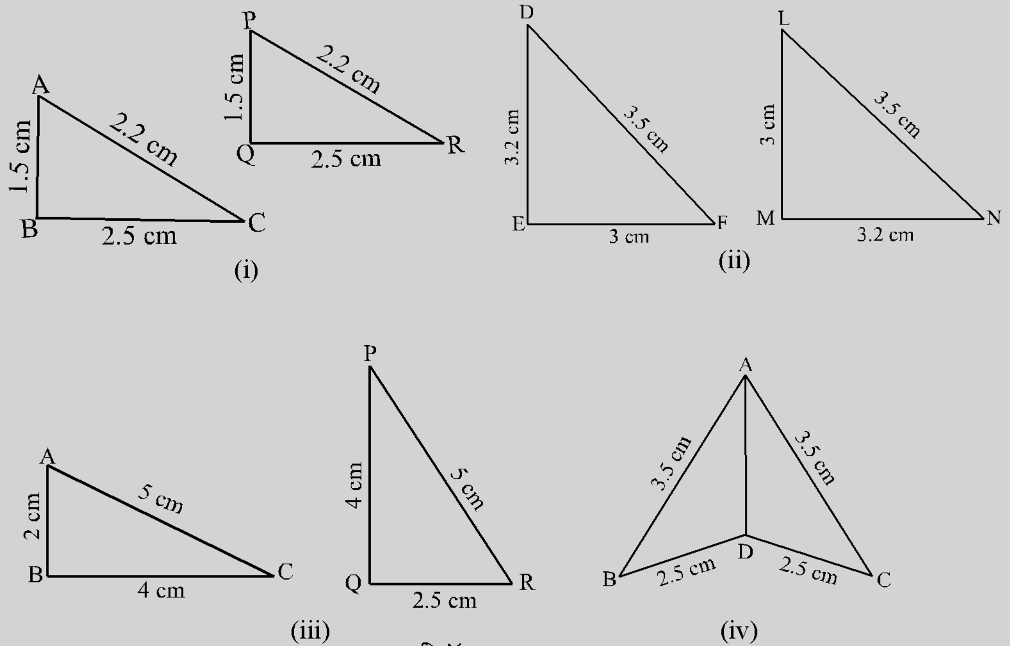
AB = CB (దత్తాంశం)
AD = CD (దత్తాంశం)
మరియు BD = BD (ఉభయ సామాన్యం)

(ii) పై (i) నుండి $\Delta ABD \cong \Delta CBD$ (బాబాబా (భుభుభు) సర్వసమానత్వం నియమం నుండి)

(iii) $\angle ABD = \angle CBD$ (సర్వసమాన త్రిభుజాల అనురూప భాగాలు) అందువలన $\angle ABC$ ని BD ద్విభాగిస్తుంది.

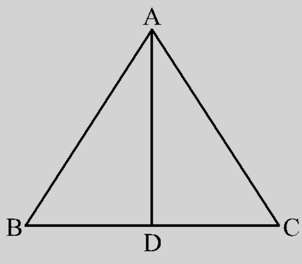
**వీటిని ప్రయత్నించండి.**

1. చిత్రం 7.14లో త్రిభుజాల భుజాల పొడవును సూచించబడింది. భుభుభు సర్వసమానత్వ నియమం ఉపయోగించి, ఏ త్రిభుజాల జతలు సర్వసమానంగా ఉంటాయో కనుగొనండి. సర్వసమాన త్రిభుజాలైనచో, ఫలితాలను సంకేత రూపంలో రాయండి.

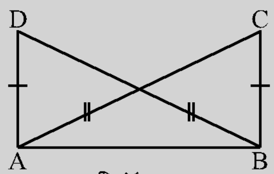



చిత్రం 7.14

2. చిత్రం 7.15లో $AB = AC$ మరియు $BC$ యొక్క మధ్యబిందువు $D$.
   (i) $\Delta ADB$ మరియు$\Delta ADC$ లలో మూడు జతల సమాన భాగాలను రాయండి.
   (ii) $\Delta ADB \cong \Delta ADC$ అవుతుందా? కారణమివ్వండి
   (iii) $\angle B = \angle C$ అవుతుందా? ఎందుకు?




చిత్రం 7.15

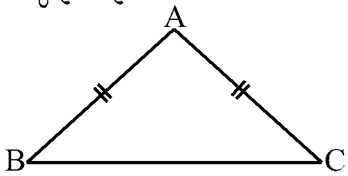



చిత్రం 7.16

3. చిత్రంలో 7.16లో $AC = BD$ మరియు $AD = BC$ కింది ఏ వ్యాఖ్యానాలను అర్థం వంతంగా రాయబడ్డాయి?
   (i) $\Delta ABC \cong \Delta ABD$ (ii) $\Delta ABC \cong \Delta BAD$

**ఆలోచించి, చర్చించి రాయండి.**

ABC సమద్విబాహు త్రిభుజంలో AB = AC (చిత్రం 7.17) $\Delta ABC$ యొక్క ట్రేస్ ప్రతి చేసి దానిని కూడా $\Delta ABC$ అని పేర్కొనండి.



చిత్రం 7.17

(i) $\Delta ABC$ మరియు $\Delta ACB$ లలో మూడు జతల సమానభాగాలను గీయండి.

(ii) $\Delta ABC \cong \Delta ACB$ అవుతుందా? ఎందుకు లేదా ఎందుకు కాదు?

(iii) $\angle B = \angle C$ అవుతుందా? ఎందుకు లేదా ఎందుకు కాదు?

అప్పు మరియు టిప్పు ఆటలో కొద్దిగా మార్పుచేసి ఇప్పుడు ఆట ఆడటం ప్రారంభించారు.

## భుకోభు ఆట

అప్పు : తద్రూపి త్రిభుజం గీయు ఆట నియమాలను ఇప్పుడు కొద్దిగా మార్పు చేద్దామా.

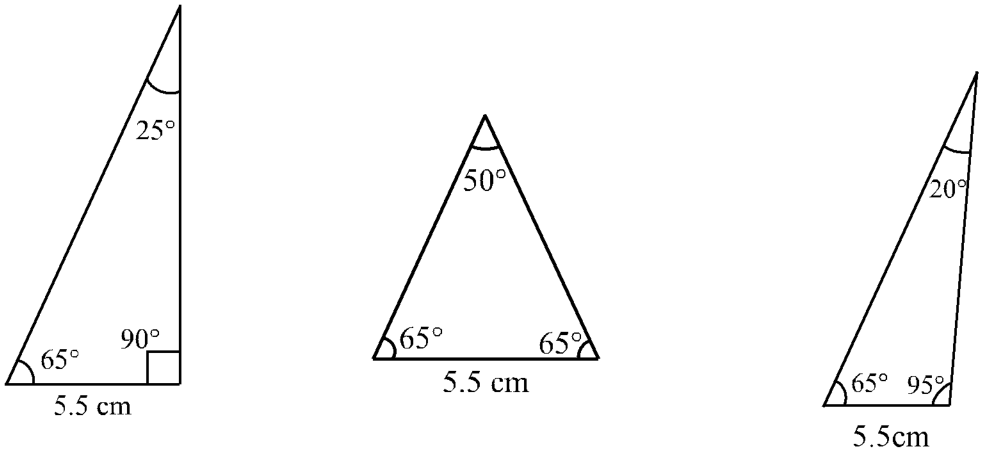
టిప్పు : సరి చెప్పు.

అప్పు : ఒకే ఒక భుజం పొడవు ఇచ్చినప్పుడు అది ప్రయోజనానికి రాదు అని నీవు ఇదివరకే కనుగొన్నావు

టిప్పు : అవును

అప్పు : ఆ ప్రకరణంలోని $\Delta ABC$ లో ఒక భుజం 5.5 cm మరియు ఒకకోణం $65^\circ$ ఉంది.

టిప్పు : ఈ వివరాలు కూడా త్రిభుజ నిర్మాణానికి సరిపోవు. నీ వివరాలకు సరిపోవునట్లు నేను అనేక త్రిభుజాలు నిర్మించవచ్చు. అయితే, అవి $\Delta ABC$ కి తద్రూపి అయివుండవు ఉదాహరణకు కింది కొన్ని చిత్రాలు ఇచ్చాను (చిత్రం 7.18)



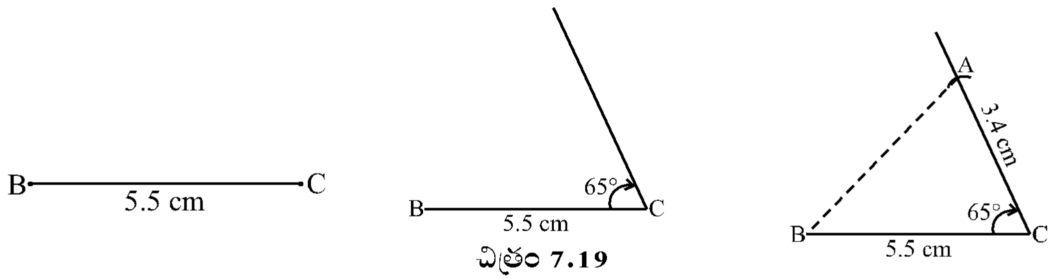
చిత్రం 7.18

అప్పు : అలాగయితే ఇప్పుడు ఏమి చేద్దాం?

టిప్పు : ఇంకా ఎక్కువ వివరాల అవసరం ఉంది.

అప్పు : అలాగయితే నా మొదట వ్యాఖ్యానాన్ని కొద్దిగా మార్చుతాను $\Delta ABC$ లో రెండు భుజాలు 5.5cm మరియు 3.4cm అయ్యాయి. ఈ రెండు భుజాల మధ్యగల కోణం $65^\circ$ ఉంది.

టిప్పు : నాకు ఈ వివరం సహాయపడుతుంది. ప్రయత్నిస్తాను. మొదట BC పొడవు 5.5cm గీస్తాను. [చిత్రం 7.19 (i)] ఇప్పుడు C లో $65^0$ కోణం నిర్మిస్తాను [చిత్రం 7.19 (ii)].




చిత్రం 7.19

అవును – నాకు లభించింది A అనునది Cతో గీచిన కోణపు రేఖమీద 3.4cm దూరంలో ఉండాలి C ని కేంద్రంగా పెట్టుకొని వ్యాసార్ధం 3.4cm గల ఒక కంసాన్ని నిర్మిస్తాను అది $65^0$ కోణపు రేఖను Aలో ఖండిస్తుంది. ఇప్పుడు AB ని కలిపి $\Delta ABC$ పొందుతాను [చిత్రం 7.19 (iii)]

అప్పు : నీవు భుజం – కోణం – భుజం ఉపయోగించావా కోణపు భుజాల మధ్య ఉంది.

టిప్పు : అవును ఈ నిబంధనను మనమెలా పేర్కొందాం?

అప్పు : అది భు.కో.భు నిబంధన తెలిసిందా?

టిప్పు : అవును, తెలిసింది.

> **భుకోభు సర్వసమానత్వ నిబంధన :**
> ఒక త్రిభుజంలోని రెండు భుజాలు మరియు వాటితో ఏర్పడిన కోణం మరొక త్రిభుజపు అనురూప భుజాలు మరియు వాటితో ఏర్పడిన కోణానికి సమానంగానున్నచో, ఆ రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానంగా ఉంటాయి.

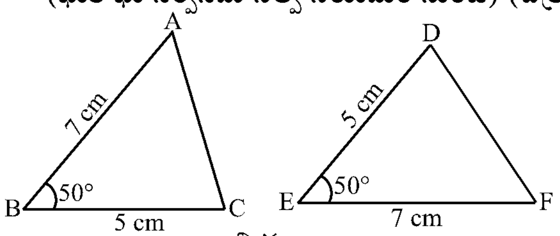
**ఉదాహరణం 4:** రెండు త్రిభుజాల కొన్ని భాగాల కొలతలను కింద ఇవ్వబడినవి. భుకోభు సర్వసమానత్వ నియమం ఉపయోగించి రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానమా లేదా కాదా పరీక్షించండి. త్రిభుజాలు సర్వసమానమైనచో వాటిని సంకేత రూపంలో రాయండి.

| | $\Delta ABC$ | | $\Delta DEF$ | | |
|---|---|---|---|---|---|
| (a) AB = 7 cm, | BC = 5 cm, | $\angle B = 50^0$ | DE = 5 cm, | EF = 7Cm, | $\angle E = 50^0$ |
| (b) AB = 4.5 cm, | AC = 4 cm, | $\angle A = 60^0$ | DE = 4 cm, | EF = 4.5Cm, | $\angle D = 55^0$ |
| (c) BC = 6 cm, | AC = 4 cm, | $\angle B = 35^0$ | DF = 4 cm, | EF = 6 cm, | $\angle E = 35^0$ |

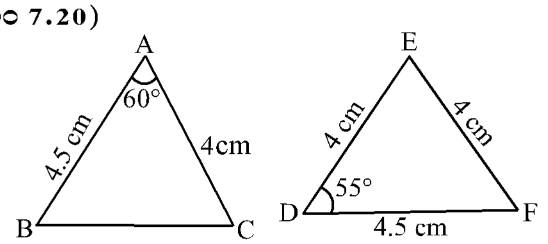
(ఎల్లప్పుడూ ప్రశ్నకు జవాబివ్వడానికి ముందు శుద్ధ చిత్రం గీచి కొలతలను నమోదు చేయండి. ప్రశ్న సాధించడానికి సహాయపడుతుంది).

**సాధన :**

(a) ఇక్కడ AB = EF (= 7 cm), BC = DE (= 5 cm) మరియు మధ్యగల ∠B = మధ్యగల ∠E (= $50^0$) అలాగే A ↔ F, B ↔ E మరియు C ↔ D. అందువలన ΔABC ≅ ΔFED (భుకోభు సర్వసమానత్వ నియమం నుండి) (చిత్రం 7.20)



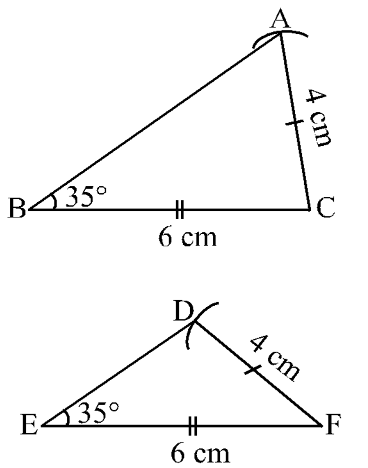
చిత్రం 7.20



చిత్రం 7.21

b) ఇక్కడ AB = FD మరియు AC = DE (చిత్రం 7.21) అయితే, మధ్యగల ∠A ≠ మధ్యగల ∠D అందువలన త్రిభుజాలు సర్వసమానం అని చెప్పబడవు.

c) ఇక్కడ BC = EF, మరియు AC = DF మరియు ∠B = ∠E అయితే ∠B , AC మరియు BC భుజాలతో ఏర్పడిన కోణం కాదు. అదేవిధంగా ∠E తో EF మరియు DF భుజాలతో ఏర్పడిన కోణం కాదు. అందువలన భు.కో.భు సర్వసమానత్వ నియమాన్ని అన్వయించడానికి సాధ్యం కాదు. అందువలన ఈ రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానంకాదు అని తీర్మానించడానికి సాధ్యంకాదు.



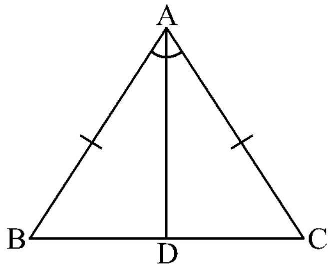
చిత్రం 7.22

**ఉదాహరణం 5 :** చిత్రం 7.23లో, AB = AC మరియు ∠BAC యొక్క కోణార్ధకం AD అవుతుంది.

(i) త్రిభుజం ADB మరియు ADC లలో మూడు జతల సమాన భాగాలను గీయండి.

(ii) ΔADB ≅ ΔADC అవుతుందా? కారణమివ్వండి.

(iii) ∠B = ∠C అవుతుందా? కారణమివ్వండి.



చిత్రం 7.23

**సాధన :**

(i) మూడు జతల సమాన భాగాలు కిందివిధంగా ఉంటాయి.

AB = AC (దత్తాంశం)

$\angle BAD = \angle CAD$ ( $\underline{|BAC}$ యొక్క కోణార్ధకం AD)

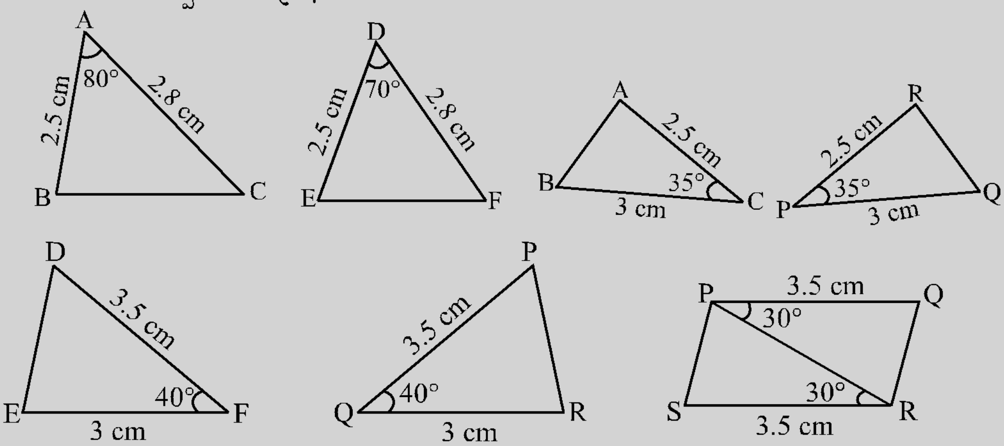
మరియు AD = AD (ఉభయ సామాన్యం)

(ii) అవును $\Delta ADB \cong \Delta ADC$ (భుకోభు సర్వసమానత్వ నియమం)

(iii) $\angle B = \angle C$ (సర్వసమాన త్రిభుజాల అనురూప భుజాలు)

**వీటిని ప్రయత్నించండి.**

1. $\Delta$ DEF లో ఏ కోణం DE మరియు EF మధ్య ఉంది?
2. భుకోభు సర్వసమానత్వ నియమం అన్వయించండి. $\Delta PQR \cong \Delta FED$ అని చూపబడినది. PQ = FE మరియు RP = DF అని ఇవ్వబడినది. సర్వసమానత్వాన్ని చూపడానికి ఇంకా ఏ వివరాల అవసరం ఉంది?
3. చిత్రం 7.24లో త్రిభుజాల కొన్ని భాగాల కొలతలు ఇవ్వబడినవి భు.కో.భు సర్వసమానత్వ నియమం ఉపయోగించి సర్వసమాన త్రిభుజాల జతను కనుగొనండి. వాటిని సంకేత రూపంలో రాయండి.




చిత్రం 7.24

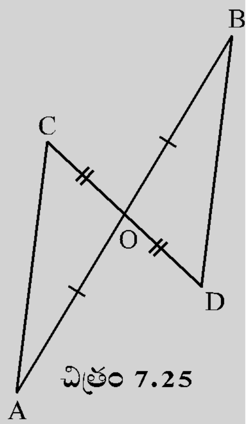
4. చిత్రం 7.25లో $\overline{AB}$ మరియు $\overline{CD}$ 'O' బిందువులో ఖండిస్తుంది.

(i) AOC మరియు BOD త్రిభుజాలలో మూడు జతల సమానభాగాలను గీయండి/రాయండి.

(ii) కింది ఏ వ్యాఖ్యానాలు సరి?

(a) $\Delta AOC \cong \Delta DOB$

(b) $\Delta AOC \cong \Delta BOD$




చిత్రం 7.25

భు.కో.భు ఆట

కింద ఇచ్చిన వివరాలు మీకు తెలిసినచో అప్పు యొక్క త్రిభుజాన్ని నిర్మించగలరా?

(i) వాటిలోని ఒక కోణం మాత్రమే

(ii) వాటిలోని రెండు కోణాలు మాత్రమే

(iii) రెండు కోణాలు మరియు ఏదైనా ఒక భుజం.

(iv) రెండు కోణాలు మరియు వాటి మధ్యగల భుజం

పైన ఇచ్చిన ప్రశ్నలకు జవాబివ్వడానికి ప్రయత్నించినప్పుడు కింద ఇచ్చిన నిబంధన లభిస్తుంది.

**భుకోభు సర్వసమానత్వ నిబంధన :**

ఒక త్రిభుజంలోని రెండు కోణాలు మరియు వాటి సామాన్య భుజం, మరొక త్రిభుజపు రెండు కోణాలు మరియు వాటి సామాన్య భుజాలకు అనురూపంగా సమానంగానున్నచో, ఆ రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానంగా ఉంటాయి.

**ఉదాహరణం 6 :** భు.కో.భు సర్వసమానత్వ నియమం ఉపయోగించి $\Delta ABC \cong \Delta QRP$ అని చూపాల్సి ఉంది. BC=RP గా ఇవ్వబడినది. సర్వసమానం అని చూపడానికి ఇంకా ఎక్కువ ఏ వివరాలు కావాలి?

**సాధన :** భు.కో.భు సర్వసమానత్వ నియమం ఉపయోగించడానికి రెండు భుజాలైన BC మరియు RP లతో కూడిన కోణాల అవసరం ఉంది. అందువలన కావలసిన అధిక వివరాలు కిందివిధంగా ఉంటాయి.

$\angle B = \angle R$

మరియు $\angle C = \angle P$

**ఉదాహరణం 7 :** చిత్రం 7.26లో భు.కో.భు సర్వసమానత్వ నియమం ఉపయోగించి $\Delta AOC \cong \Delta BOD$ అని తీర్మానించవచ్చా?

**సాధన :** AOC మరియు BOD రెండు త్రిభుజాలలో $\angle C = \angle D$ (ప్రతియొక్కటి $70^0$)

$\angle AOC = \angle BOD = 30°$ (శీర్ష్యాభిముఖ కోణాలు)

$\Delta AOC$ యొక్క $\angle A = 180° - (70^0 + 30^0) = 80^0$

(త్రిభుజంలోని కోణాల మొత్తం ధర్మం/లక్షణం ఉపయోగించండి).

అదేవిధంగా

$\Delta BOD$ యొక్క $\angle B = 180^0 - (70^0 + 30^0) = 80^0$

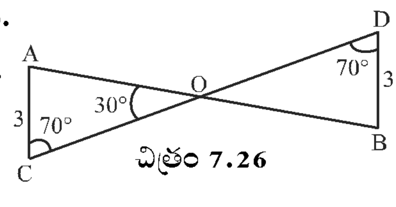
అందువలన $\angle A = \angle B$, AC = BD మరియు $\angle C = \angle D$

ఇప్పుడు AC భుజం $\angle A$ మరియు $\angle C$ మధ్య ఉంది.

BD భుజం $\angle B$ మరియు $\angle D$ మధ్య ఉంది.

అందువలన భు.కో.భు సర్వసమానత్వ నియమం నుండి.

$\Delta AOC \cong \Delta BOD$.

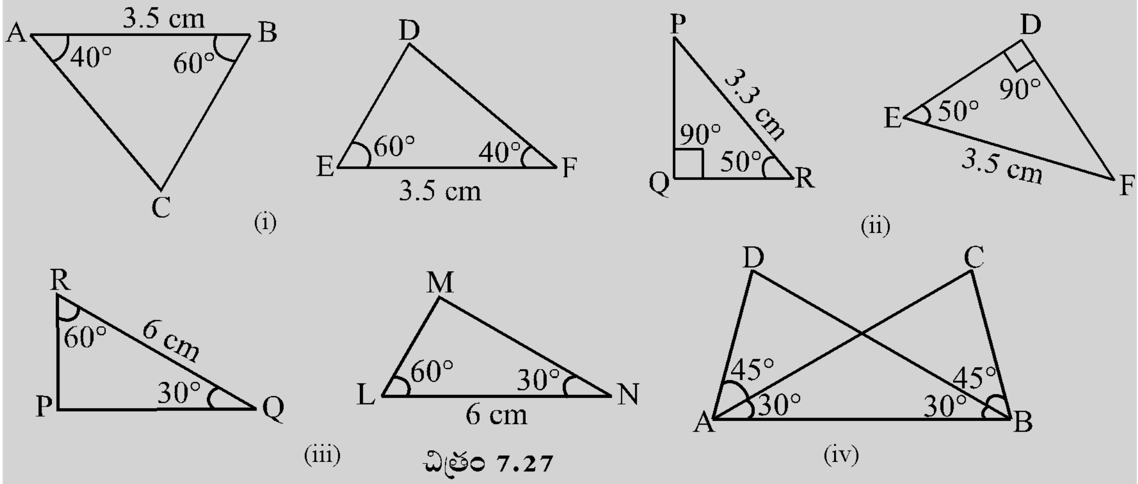



చిత్రం 7.26

**గమనించండి :** ఒక త్రిభుజంలోని రెండు కోణాలు ఇచ్చినప్పుడు మీరు మూడవ కోణం కనుగొనవచ్చు, అందువలన ఎప్పుడైనా ఒక త్రిభుజంలోని రెండు కోణాలు మరియు ఒక భుజం మరొక భుజం యొక్క రెండు కోణాలు మరియు ఒక భుజానికి అనురూపంగా సమానంగానున్నచో, దానిని మీరు సర్వసమానత్వ రూపమైన రెండు కోణాలు మరియు వాటితో కూడిన భుజానికి మార్చి తరువాత భు.కో.భు సర్వసమానత్వ నియమం అన్వయించవచ్చు.

**వీటిని ప్రయత్నించండి.**

1. $\Delta MNP$ లో M మరియు N కోణాల మధ్యగల భుజం ఏది?
2. భు.కో.భు సర్వసమానత్వ నియమం ఉపయోగించి $\Delta DEF \cong \Delta MNP$ అని మీరు చూపాల్సి ఉంటుంది. $\angle D = \angle M$ మరియు $\angle F = \angle P$ గా ఇవ్వబడినది. సర్వసమానం అని చూపడానికి ఏ వివరాల అవసరం ఉంది? (శుద్ధ చిత్రం గీచి తరువాత ప్రయత్నించండి).
3. చిత్రం 7.27లో కొన్ని భాగాల కొలతలు సూచించబడినవి భు.కో.భు సర్వసమానత్వ నియమం అన్వయించి ఏ త్రిభుజాల జతలు సర్వసమానమో కనుగొనండి సర్వ సమానత్వ ప్రకరణంలో ఫలితాలను సంకేత రూపంలో రాయండి.

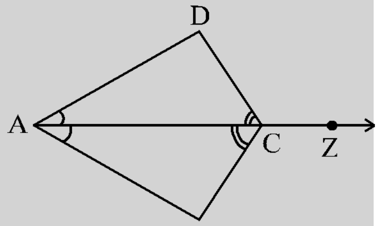



చిత్రం 7.27

4. రెండు త్రిభుజాల కొన్ని భాగాల కొలతలను కింద ఇవ్వబడినవి. భు.కో.భు సర్వసమానత్వ నియమం ఉపయోగించి, రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానమా లేదా కాదా పరీక్షించండి సర్వసమానంగానున్నచో సంకేత రూపంలో రాయండి.

| | $\Delta DEF$ | $\Delta PQR$ |
|---|---|---|
| (i) | $\angle D = 60^0$, $\angle F = 80^0$, DF = 5 cm | $\angle Q = 60^0$, $\angle R = 80^0$, QR = 5 cm |
| (ii) | $\angle D = 60^0$, $\angle F = 80^0$, DF = 6 cm | $\angle Q = 60^0$, $\angle R = 80^0$, QP = 6Cm |
| (iii) | $\angle E = 80^0$, $\angle F = 30^\circ$, EF = 5 cm | $\angle P = 80^0$, PQ = 5Cm, $\angle R = 30^0$ |

5. చిత్రం 7.28లో AZ కిరణం $\angle DAB$ మరియు $\angle DCB$ ని ద్విభాగిస్తుంది.
   (i) $\Delta BAC$ మరియు $\Delta DAC$ లలో మూడు జతల సమాన భాగాలను గీయండి.
   (ii) $\Delta BAC \cong \Delta DAC$ అవుతుందా? కారణమివ్వండి.
   (iii) AB = AD అవుతుందా? మీ జవాబులను నిరూపించండి.
   (iv) CD = CB అవుతుందా? కారణమివ్వండి.

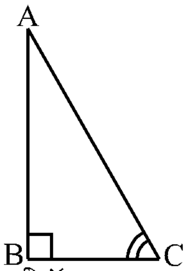


చిత్రం 7.28

## 7.7 లంబకోణ త్రిభుజాలలోని సర్వసమానత్వం

లంబకోణ త్రిభుజాలలోని సర్వసమానత్వానికి ప్రత్యేక దృష్టి ఇవ్వవలసి ఉంది. ఇలాంటి త్రిభుజాలలో నిస్సంకోశంగా లంబకోణాలు సమానంగా ఉంటాయి. అందువలన సర్వసమానత్వ నిబంధన సులభమవుతుంది.

$\Delta ABC$ లో (చిత్రం 7.29లో చూపబడిన) $\angle B = 90^0$ మరియు



చిత్రం 7.29

(i) BC మాత్రమే తెలిసినప్పుడు

(ii) $\angle C$ మాత్రమే తెలిసినప్పుడు

(iii) $\angle A$ మరియు $\angle C$ తెలిసినప్పుడు

(iv) AB మరియు AC తెలిసినప్పుడు

(v) AC మరియు AB లేదా BC లలో ఒకటి తెలిసినప్పుడు $\Delta ABC$ లను మీరు నిర్మించగలరా?

శుద్ధ చిత్రాలు గీచి వీటిని ప్రయత్నించండి (iv) మరియు (v) త్రిభుజాలు నిర్మించడానికి మీకు సహాయపడుతుంది. అయితే, ప్రకరణం (iv) సులభమైన భు.కో.భు నిబంధన. ప్రకరణం (v) కొద్దిగా క్రొత్తది. అది కింది నిబంధనకు దారికల్పిస్తుంది.

**లంబకోణం, కర్ణం, భుజం (లం.క.భు) సర్వసమానత్వ నిబంధన**

రెండు లంబకోణ త్రిభుజాలలో ఒకదాని కర్ణం మరియు ఒకదాని భుజం మరొకదాని త్రిభుజపు కర్ణం మరియు అనురూప భుజానికి సమానంగా ఉన్నప్పుడు ఆ లంబకోణ త్రిభుజాలు సర్వసమానంగా ఉంటాయి.

దీనిని లం.కో.భు సర్వసమానమని ఎందుకు పిలుస్తాం? దీని గురించి ఆలోచించండి.

**ఉదాహరణం 8 :** రెండు త్రిభుజాల కొన్ని భాగాల కొలతలను కింద ఇవ్వబడినవి లం.కో.భు. సర్వసమానత్వ నియమం ఉపయోగించి రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానమా లేదా కాదా పరీక్షించండి. సర్వసమాన త్రిభుజాలైనచో సంకేత రూపంలో రాయండి.

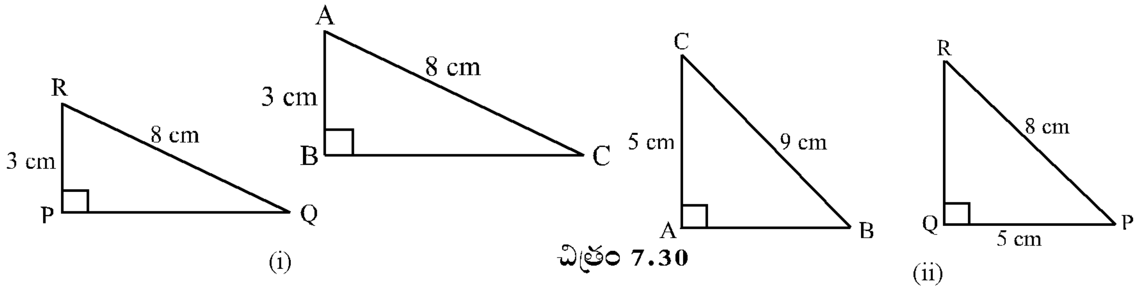
| | $\Delta ABC$ | $\Delta PQR$ |
|---|---|---|
| (i) | $\angle B = 90^0$, AC = 8 cm, AB = 3 cm | $\angle P = 90^0$, PR = 3 cm, QR = 8 cm |
| (ii) | $\angle A = 90^0$, AC = 5 cm, BC = 9 cm | $\angle Q = 90^0$, PR = 8 cm, PQ = 5 cm. |

**సాధన:** ఇక్కడ $\angle B = \angle P = 90^0$

వికర్ణం AC = వికర్ణం RQ (= 8 cm) మరియు

భుజాలు AB = భుజాలు RP (= 3Cm)

అందువలన, $\Delta ABC \cong \Delta RPQ$ (లం.కో.భు. సర్వసమానత్వ నియమం నుండి). [చిత్రం **7.30** (i)].




చిత్రం **7.30**

(ii) ఇక్కడ $\angle A = \angle Q$ $(=90^0)$ మరియు

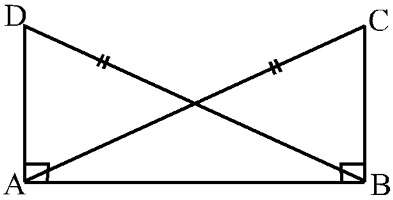
భుజాలు AC = భుజాలు PQ (=5 cm)

అయితే, వికర్ణం BC $\neq$ వికర్ణం PQ [చిత్రం **7.30** (ii)]

అందువలన త్రిభుజాలు సర్వసమానం కాదు.

**ఉదాహరణం 9 :**

చిత్రం **7.31**లో $DA \perp AB$, $CB \perp AB$ మరియు AC = BD. $\Delta ABC$ మరియు $\Delta DAB$ లలో మూడు జతల సమానభాగాలను గీయండి. కింద ఇచ్చిన వ్యాఖ్యానాలలో ఏది అర్థ పూర్ణంగా ఉంది?




చిత్రం **7.31**

(i) $\Delta ABC \cong \Delta BAD$ (ii) $\Delta ABC \cong \Delta ABD$

**సాధన:** మూడు జతల సమాన భాగాలు

$\angle ABC = \angle BAD$ $(= 90^0)$

AC = BD (దత్తాంశం)

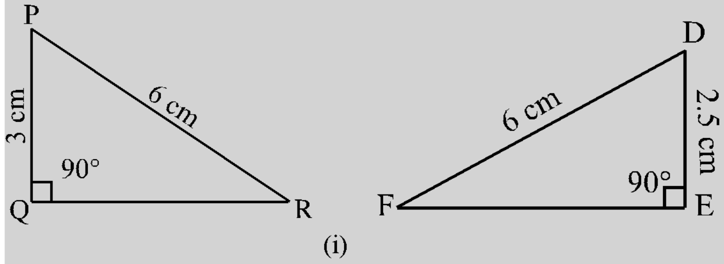
AB = BA (సామాన్య భుజం)

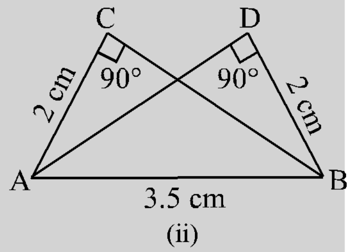
$\Delta ABC \cong \Delta BAD$ (లం.కో.భు. సర్వసమానత్వనియమం నుండి).

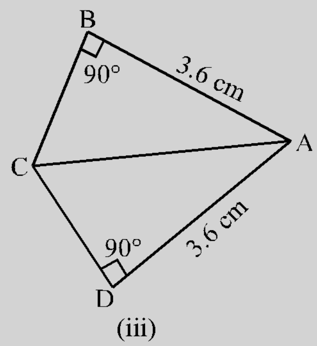
అందువలన వ్యాఖ్యానం (i) సరి వ్యాఖ్యానం (ii) అర్థవంతంగా లేదు ఎందుకనగా శీర్షాల మధ్యగల అనురూపత సరిపోదు

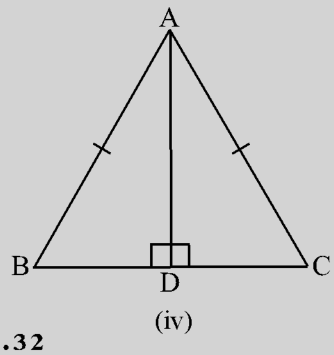
### వీటిని ప్రయత్నించండి.

1. చిత్రం 7.32లో త్రిభుజాల కొన్ని భాగాల కొలతలు ఇవ్వబడినవి, లం.కో.భు సర్వసమానత్వ నియమం అన్వయించి ఏ త్రిభుజాల జతలు సర్వసమానమో కనుగొనండి. సర్వసమాన త్రిభుజాలైనచో ఫలితాలను సంకేత రూపంలో రాయండి.



చిత్రం 7.32

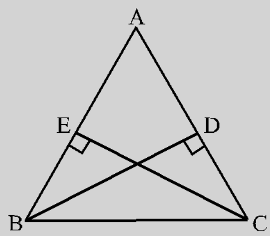
2. లం.కో.భు సర్వసమానత్వ నియమం ఉపయోగించి $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ గా చూపబడినది. $\angle B = \angle P = 90^0$ మరియు $AB = RP$ ఇవ్వబడినది సర్వసమానంగా చూపడానికి ఇంకా ఏ వివరాల అవసరం ఉంది?

3. చిత్రం 7.33లో $BD = CE$ అగునట్లు BD మరియు CE లు $\Delta ABC$ యొక్క ఎత్తులవుతాయి.

   (i) $\Delta CBD$ మరియు $\Delta BCE$ లలో మూడు జతల సమాన భాగాలను గీయండి.

   (ii) $\Delta CBD \cong \Delta BCE$ అవుతుందా? ఎందుకు లేదా ఎందుకు కాదు?

   (iii) $\angle DCB = \angle EBC$ అవుతుందా? ఎందుకు లేదా ఎందుకు కాదు?




చిత్రం 7.33

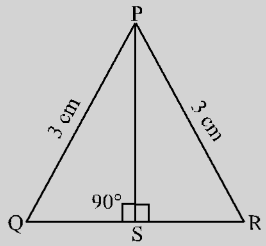
4. ABC ఒక సమద్విబాహు త్రిభుజం AB = AC మరియు AD దాని ఎత్తు (చిత్రం 7.34)

(i) Δ ABD మరియు Δ ADC లలో మూడు జతల సమాన భాగాలను గీయండి?

(ii) $\Delta ADB \cong \Delta ADC$ అవుతుందా? ఎందుకు లేదా ఎందుకు కాదు?

(iii) $\angle B = \angle C$ అవుతుందా? ఎందుకు లేదా ఎందుకు కాదు?

(iv) BD = CD అవుతున్నదా? ఎందుకు లేదా ఎందుకు కాదు?



చిత్రం 7.34

ఇప్పుడు ఇప్పటివరకు అధ్యయనం చేసిన నిబంధనల మీద ఉదాహరణలు మరియు సమస్యలను గమనిద్దా.

## అభ్యాసం 7.2

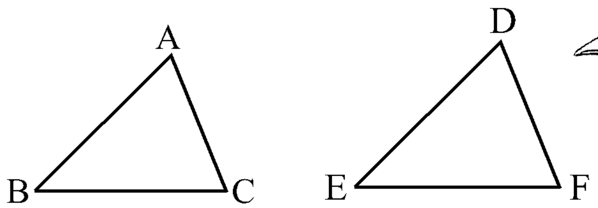
1. కింది వాటిలో ఏ సర్వసమానత్వ నిబంధనను మీరు ఉపయోగిస్తారు.

(a) దత్తాంశం

AC = DF

AB = DE

BC = EF



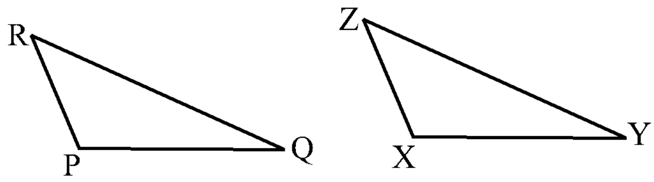

అందువలన $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

(b) దత్తాంశం:

ZX = RP

RQ = ZY

$\angle PRQ = \angle XZY$

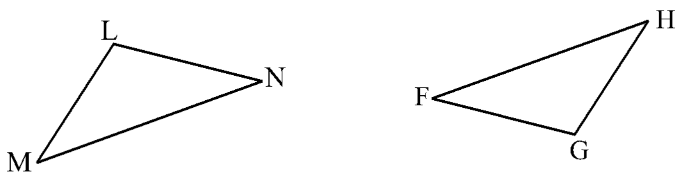



అందువలన $\Delta PQR \cong \Delta XYZ$

(c) దత్తాంశం $\angle MLN = \angle FGH$

$\angle NML = \angle GFH$

ML = FG

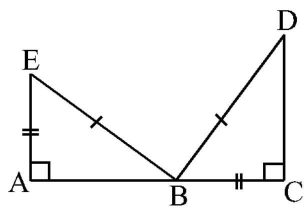



అందువలన $\Delta LMN \cong \Delta GFH$

(d) దత్తాంశం: EB = DB

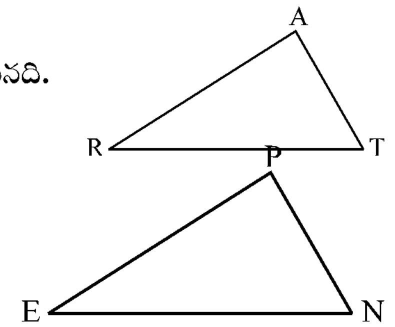
AE = BC

$\angle A = \angle C = 90^0$




అందువలన $\Delta ABE \cong \Delta CDB$.

2. $\Delta ART \cong \Delta PEN$ అని మీరు చూపాల్సి ఉంది.




(a) మీరు భు.భు.భు నిబంధన ఉపయోగించినచో, మీరు చూపవలసినది.

(i) AR =     (ii) RT =     ii) AT =

(b) $\angle T = \angle N$ అని ఇవ్వబడినది మీరు భు.కో.భు నిబంధన ఉపయోగించాల్సి ఉంది. అప్పుడు మీకు కావలసినది

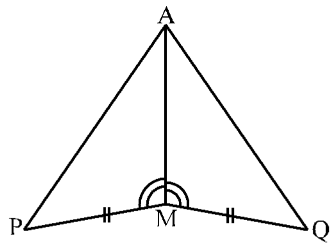
(i) RT =     మరియు     (ii) PN =

(c) AT = PN అని ఇవ్వబడినది మీరు కో.భు.కో నిబంధన ఉపయోగించాల్సి ఉంది. అప్పుడు మీకు కావలసినది

(i) ?     (ii) ?

3. $\Delta AMP \cong \Delta AMQ$ అని మీరు చూపాల్సి ఉంది కింద ఇచ్చిన సాధనలో వదిలిన కారణాలను నింపండి.

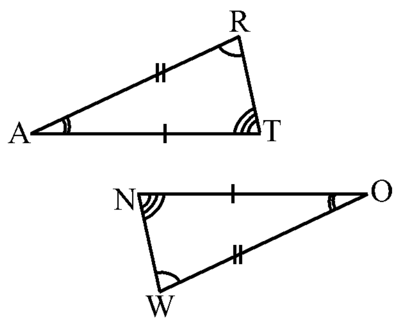
| దశలు | కారణాలు |
|---|---|
| (i) PM = QM | (i) . . . . . |
| (ii) $\angle PMA = \angle QMA$ | (ii) . . . . |
| (iii) AM = AM | (iii) . . . . . |
| (iv) $\Delta AMP \cong \Delta AMQ$ | (iv) . . . . . |



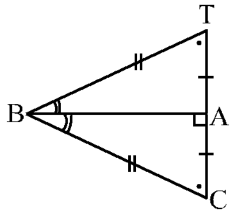

4. $\Delta ABC$ లో $\angle A = 30°$, $\angle B = 40^0$ మరియు $\angle C = 110^0$.

$\Delta PQR$లో $\angle P = 30^0$, $\angle Q = 40^0$ మరియు $\angle R = 110^0$. కో.కో.కో సర్వసమానత్వ నిబంధనతో $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ అని ఒక విద్యార్థి చెప్పుతాడు. అతడు సమర్థిస్తున్నాడా? ఎందుకు లేదా ఎందుకు కాదు?

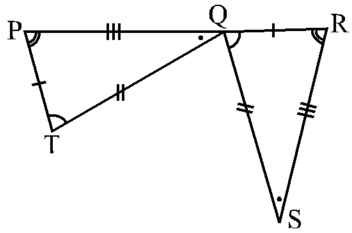
5. చిత్రంలో రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానం అనురూప భాగాలను గుర్తించబడింది. అలాగయితే $\Delta RAT \cong$ ?



6. సర్వసమానత్వ వ్యాఖ్యానాన్ని పూరించండి.




$\Delta BCA \cong ?$



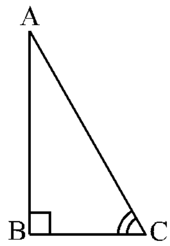

$\Delta QRS \cong ?$

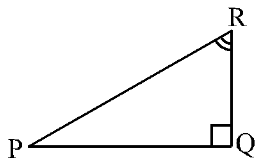
7. చదరాలుగల ఒక కాగితంలో సమాన వైశాల్యం గల

(i) రెండు సర్వసమాన త్రిభుజాలను,

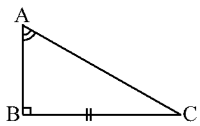
(ii) సర్వసమానంకాని రెండు త్రిభుజాలు నిర్మించండి. వాటి చుట్టుకొలత గురించి మీరేమి చెప్పగలరు?

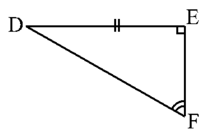
8. ఐదు జతల సర్వసమానంగల భాగాలు కలిగియున్నప్పటికీ కూడా, సర్వసమానంకాని రెండు త్రిభుజాల శుద్ధ చిత్రాలు నిర్మించండి.




9. $\Delta ABC$ మరియు $\Delta PRQ$ సర్వసమానం కావాలంటే ఒక జత అనురూప భాగాలను పేర్కొనండి. ఏ నిబంధన మీరు ఉపయోగిస్తారు.




10. $\Delta ABC \cong \Delta FED$ ఎందుకు? వివరించండి.

## పుష్టీకరణ కార్యాచరణం :

సమతలాకృతుల సర్వసమానత్వాన్ని పరీక్షించడానికి ఒకదానిపై మరొక దానిని అమర్చు విధానం ఉపయోగకరంగా ఉంటుందనితెలుసుకున్నాం. రేఖాఖండాలు, కోణాలుమరియు త్రిభుజాలసర్వసమానత్వానికినిబంధనలనుమనం చర్చించాం. ఈ కల్పనను వేరె సమతలాకృతులకు విస్తరించడానికి మీరిప్పుడు ప్రయత్నించవచ్చు.

1. వేర్వేరు పరిమాణాలుగల చతురస్రాల (వర్గములు) నమూనాను పరిగణించి వర్గాల చతురస్రాల సర్వసమానత్వానికి నిబంధనను కనుగొనడానికి ఒకదానిపై మరొకటి అమర్చు విధానం అనుసరించండి. సర్వసమానత్వంలోగల అనురూప భాగాల కల్పన ఎలా అన్వయిస్తుంది? అనురూప భుజాలున్నాయా? అనురూప కర్ణాలున్నాయా?
2. వృత్తాలను తీసుకొన్నచో ఏమవుతుంది? రెండు వృత్తాల సర్వసమానత్వానికి నిబంధన ఏమిటి? పునః మీరు ఒకదానిపై మరొకటి అమర్చు విధానం ఉపయోగించవచ్చు. పరీక్షించండి.
3. ఈ కల్పనను వేరె సమతలాకృతులైన నియమిత షడ్భుజాకృతి మొదలగువాటికి విస్తరించడానికి ప్రయత్నించండి.

4. ఒక త్రిభుజపు రెండు సర్వసమాన ప్రతులను తీసుకోండి. కాగితం మడచు విధానంతో అవి సమాన ఎత్తులను కలిగియున్నాయా? పరీక్షించండి. అవి సమాన మధ్య రేఖలు కలిగియున్నాయా? వాటి చుట్టుకొలత మరియు వైశాల్యాల గురించి మీరేమి చెప్పగలరు.

## ఇప్పటి వరకు చర్చించిన అంశాలు

1. సర్వసమానాకృతులు ఒకదానిపై మరొకటి తద్రూపిగా ఉంటాయి.
2. ఒకదానిపై మరొకటి అమర్చు విధానం సమతలాకృతుల సర్వసమానత్వాన్ని పరీక్షిస్తాయి.
3. $F_1$ మరియు $F_2$ రెండు సమతలాకృతులలో, $F_1$ ట్రేస్ ప్రతి $F_2$ తో ఐక్యమయినప్పుడు అవి సర్వ సమానం అంటాం. దీనిని $F_1 \cong F_2$ అని రాస్తాం.
4. రెండు రేఖాఖండాలు $\overline{AB}$ మరియు $\overline{CD}$ సమాన పొడవు కలిగియున్నచో, అవి సర్వసమానం అంటారు. దీనిని $AB \cong CD$ అని రాస్తాం సామాన్యంగా $\overline{AB} = \overline{CD}$ అని రాస్తాం.
5. రెండు కోణాలు $\angle ABC$ మరియు $\underline{|PQR}$ సమాన కొలతలు కలిగియున్నచో, అవి సర్వసమానంగా ఉంటాయి. దీనిని $\angle ABC \cong \underline{|PQR}$ లేదా $m\underline{|ABC} = m\underline{|PQR}$ సామాన్యంగా $\angle ABC = \angle PRQ$ అని రాయడం రూఢీలో ఉంది.
6. రెండు త్రిభుజాల భు.భు.భు సర్వసమానత్వ నియమం ఒక త్రిభుజంలోని మూడు భుజాలు మరొక త్రిభుజపు మూడు అనురూప భుజాలకు సమానమైనచో, ఆ రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానంగా ఉంటాయి.
7. రెండు త్రిభూజాల భు.కో.భు సర్వసమానత్వ నియమం ఒక త్రిభుజపు రెండు భుజాలు మరియు వాటితో ఏర్పడిన కోణం మరొక త్రిభుజపు అనురూప భుజాలు మరియు వాటితో ఏర్పడిన కోణానికి సమానంగానున్నచో ఆ రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానంగా ఉంటాయి.
8. రెండు త్రిభుజాల కో.భు.కో సర్వసమానత్వ నియమం ఒక త్రిభుజపు రెండుకోణాలు మరియు వాటి సామాన్య భుజం మరొక త్రిభుజపు రెండు కోణాలు మరియు వాటి సామాన్య భుజాలకు అనురూపంగా సమానంగానున్నచో, ఆ రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానంగా ఉంటాయి.
9. రెండు లంబకోణ త్రిభుజాల లం.క.భు సర్వసమానత్వ నియమం రెండు లంబకోణ త్రిభుజాలలో ఒకదాని కర్ణం మరియు ఒక భుజం మరొక త్రిభుజపు కర్ణం మరియు అనురూప భుజానికి సమానంగా ఉన్నప్పుడు ఆ లంబకోణ త్రిభుజాలు సర్వసమానంగా ఉంటాయి.

**10.** రెండు త్రిభుజాల సర్వసమానత్వానికి కో.కో.కో. నిబంధన లేదు అనురూప కోణాలు సమానంగానున్న రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానం కానేకావాలని లేదు. ఇలాంటి ప్రకరణలలో ఒకటి మరొకదాని విస్తృత ప్రతిగా ఉండవచ్చు. (ఒకటి మరొక దాని తద్రూపిగా ఉన్నప్పుడు మాత్రమే అవి సర్వ సమానంగా ఉంటాయి).

# జవాబులు

## అభ్యాసం 1.1

1. (a) లాహుల్ స్థితి : –8°C, శ్రీనగర్ : –2°C, శిమ్లా: 5°C, ఊటి: 14°C, బెంగళూరు : 22°C

   (b) 30°C (c) 6°C (d) సరి, తప్పు

2. 35

3. –7°C; –3°C

4. 6200 m

5. ధన పూర్ణాంకం నుండి : Rs 358

6. ఋణ పూర్ణాంకంనుండి : – 10.

7. (ii) మాయాచదరం అవుతుంది.

9. (a) < (b) < (c) >

   (d) s< (e) >

10. (i) 11 దుముకులు (ii) 5 దుముకులు

    (iii) (a) –3 + 2 –3 + 2 – 3 + 2 – 3 + 2 –3 + 2 –3 = – 8

    (b) 4 – 2 + 4 – 2 + 4 = 8

    (b) లో 8 అనునది 8 దశలను చూపుతుంది.

## అభ్యాసం 1.2

1. అలాంటి ఒక జత:

   (a) –10, 3 (b) – 6, 4; (– 6 – 4 = –10) (c) –3, 3

2. అలాంటి ఒక జత :

   (a) –2, –10; [–2 – (–10) = 8] (b) – 6, 1

   (c) –1, 2; (–1 – 2 = –3)

3. రెండు జట్ల అంకములు సమానం అనగా i.e., –30; సరిగ్గాఉంది.

4. (i) –5 (ii) 0 (iii) –17 (iv) –7

   (v) –3

## అభ్యాసం 1.3

1. (a) –3 (b) –225 (c) 630 (d) 316 (e) 0

   (f) 1320 (g) 162 (h) –360 (i) –24 (j) 36

3. (i) – $a$ (ii) (a) 22 (b) –37 (c) 0

4. $-1 \times 5 = -5, -1 \times 4 = -4 = -5 + 1, -1 \times 3 = -3 = -4 + 1,$
$-1 \times 2 = -2 = -3 + 1, -1 \times 1 = -1 = -2 + 1, -1 \times 0 = 0 = -1 + 1$ so, $-1 \times (-1) = 0 + 1 = 1.$

5. (a) 480 (b) – 53000 (c) – 15000 (d) – 4182
(e) – 62500 (f) 336 (g) 493 (h) 1140

6. – 10°C

7. (i) 8 (ii) 15 (iii) 0

8. (a) ₹1000 అంత (b) 4000 సంచులు

9. (a) – 9 (b) – 7 (c) 7 (d) – 11

## అభ్యాసం 1.4

1. (a) –3 (b) –10 (c) 4 (d) –1
(e) –13 (f) 0 (g) 1 (h) –1 (i) 1

3. (a) 1 (b) 75 (c) – 206 (d) –1
(e) – 87 (f) – 48 (g) –10 (h) –12

4. (–6, 2), (–12, 4), (12, – 4), (9, –3), (–9, 3) (అలాంటి అనేక జతలు)

5. 9 p.m.; – 14°C 6. (i) 8 (ii) 13 7. 1 గంట

## అభ్యాసం 2.1

1. (i) $\frac{7}{5}$ (ii) $\frac{39}{8}\left(=4\frac{7}{8}\right)$ (iii) $\frac{31}{35}$ (iv) $\frac{91}{165}$

(v) $\frac{13}{5}\left(=2\frac{3}{5}\right)$ (vi) $\frac{37}{6}\left(=6\frac{1}{6}\right)$ (vii) $\frac{39}{8}\left(=4\frac{7}{8}\right)$

2. (i) $\frac{2}{3}, \frac{8}{21}, \frac{2}{9}$ (ii) $\frac{7}{10}, \frac{3}{7}, \frac{1}{5}$ 3. అవును 4. $\frac{139}{3}\left(=46\frac{1}{3}\right)$cm

5. (i) $8\frac{17}{20}$cm (ii) $7\frac{5}{6}$cm ; ΔABE యొక్క చుట్టు కొలత పెద్దది

6. $\frac{3}{10}$cm 7. $\frac{2}{5}$; **రీతు;** $\frac{1}{5}$ 8. **వైభవ్;** $\frac{1}{6}$ గంటలంత

## అభ్యాసం 2.2

**1.** (i) (d) (ii) (b) (iii) (a) (iv) (c)

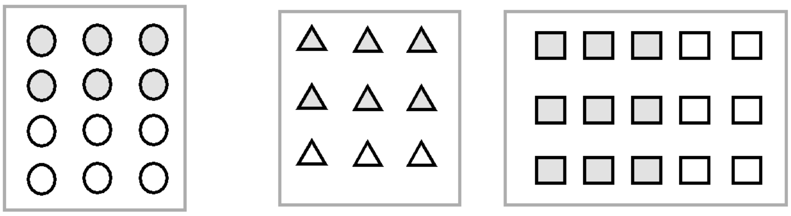
**2.** (i) (c) (ii) (a) (iii) (b)

**3.** (i) $4\frac{1}{5}$ (ii) $1\frac{1}{3}$ (iii) $1\frac{5}{7}$

(iv) $1\frac{1}{9}$ (v) $2\frac{2}{3}$

(vi) 15 (vii) $6\frac{2}{7}$ (viii) 16 (ix) $4\frac{1}{3}$
(x) 9

**4.** దీనిని నిర్వహించు ఒక విధానం :



(i) (ii) (iii)

**5.** (a) (i) 12 (ii) 23 (b) (i) 12 (ii) 18 (c) (i) 12 (ii) 27
(d) (i) 16 (ii) 28

**6.** (a) $15\frac{3}{5}$ (b) $33\frac{3}{4}$ (c) $15\frac{3}{4}$ (d) $25\frac{1}{3}$

(e) $19\frac{1}{2}$ (f) $27\frac{1}{5}$

**7.** (a) (i) $1\frac{3}{8}$ (ii) $2\frac{1}{9}$ (b) (i) $2\frac{19}{48}$ (ii) $6\frac{1}{24}$ **8.**(i) 2 litres (ii) $\frac{3}{5}$

## అభ్యాసం 2.3

**1.** (i) (a) $\frac{1}{16}$ (b) $\frac{3}{20}$ (c) $\frac{1}{3}$ (ii) (a) $\frac{2}{63}$ (b) $\frac{6}{35}$ (c) $\frac{3}{70}$

**2.** (i) $1\frac{7}{9}$ (ii) $\frac{2}{9}$ (iii) $\frac{9}{16}$ (iv) $1\frac{2}{25}$

(v) $\frac{5}{8}$ (vi) $1\frac{13}{20}$ (vii) $1\frac{13}{35}$

**3.** (i) $2\frac{1}{10}$ (ii) $4\frac{44}{45}$ (iii) 8 (iv) $2\frac{1}{42}$ (v) $1\frac{33}{35}$

(vi) $7\frac{4}{5}$ (vii) $2\frac{1}{7}$

**4.** (i) $\frac{3}{5}$ of $\frac{5}{8}$ (ii) $\frac{1}{2}$ of $\frac{6}{7}$ **5.** $2\frac{1}{4}$m **6.** $10\frac{1}{2}$ గంటలు **7.** 44 km

**8.** (a) (i) $\frac{5}{10}$ (ii) $\frac{1}{2}$ (b) (i) $\frac{8}{15}$ (ii) $\frac{8}{15}$

## అభ్యాసం 2.4

**1.** (i) 16 (ii) $\frac{84}{5}$ (iii) $\frac{24}{7}$ (iv) $\frac{3}{2}$ (v) $\frac{9}{7}$

(vi) $\frac{7}{5}$

**2.** (i) $\frac{7}{3}$ (అపక్రమ భిన్నం) (ii) $\frac{8}{5}$ (అపక్రమ భిన్నం)

(iii) $\frac{7}{9}$ (క్రమ భిన్నం) (iv) $\frac{5}{6}$ (క్రమ భిన్నం)

(v) $\frac{7}{12}$ (క్రమ భిన్నం) (vi) 8(పూర్ణసంఖ్య)

(vii)11 (పూర్ణసంఖ్య)

**3.** (i) $\frac{7}{6}$ (ii) $\frac{4}{45}$ (iii) $\frac{6}{91}$ (iv) $\frac{13}{9}$ (v) $\frac{7}{8}$ (vi) $\frac{31}{49}$

**4.** (i) $\frac{4}{5}$ (ii) $\frac{2}{3}$ (iii) $\frac{3}{8}$ (iv) $\frac{35}{9}$ (v) $\frac{21}{16}$

(vi) $\frac{4}{15}$ (vii) $\frac{48}{25}$ (viii) $\frac{11}{6}$

## అభ్యాసం 2.5

1. (i) 0.5 (ii) 0.7 (iii) 7 (iv) 1.49 (v) 2.30
   (vi) 0.88
2. (i) ₹ 0.07 (ii) ₹ 7.07 (iii) ₹ 77.77 (iv) ₹ 0.50 (v) ₹ 2.35
3. (i) 0.05m, 0.00005 km (ii) 3.5 cm, 0.035m, 0.000035 km
4. (i) 0.2 kg (ii) 3.470 kg (iii) 4.008 kg
5. (i) $2 \times 10 + 0 \times 1 + 0 \times \frac{1}{10} + 3 \times \frac{1}{100}$

   (ii) $2 \times 1 + 0 \times \frac{1}{10} + 3 \times \frac{1}{100}$

   (iii) $2 \times 100 + 0 \times 10 + 0 \times 1 + 0 \times \frac{1}{10} + 3 \times \frac{1}{100}$

   (iv) $2 \times 1 + 0 \times \frac{1}{10} + 3 \times \frac{1}{100} + 4 \times \frac{1}{1000}$
6. (i) ఒకట్లు (ii) పదులు (iii) పదులు (iv) వందలు (v) వేలు
7. 900 m 0.9 km అంత ఎక్కువ ఆయుబ్ ప్రయాణించాడు.
8. సరళ ఎక్కువ పండ్లనుకొనింది 9. 14.6 km

## అభ్యాసం 2.6

1. (i) 1.2 (ii) 36.8 (iii) 13.55 (iv) 80.4
   (v) 0.35 (vi) 844.08 (vii) 1.72
2. 17.1 $cm^2$
3. (i) 13 (ii) 368 (iii) 1537 (iv) 1680.7 (v) 3110
   (vi) 15610 (vii) 362 (viii) 4307 (ix) 5 (x) 0.8
   (xi) 90 (xii) 30
4. 553 km 5. (i) 0.75 (ii) 5.17 (iii) 63.36 (iv) 4.03
   (v) 0.025 (vi) 1.68 (vii) 0.0214 (viii) 10.5525
   (ix) 1.0101 (x) 110.011

## అభ్యాసం 2.7

**1.** (i) 0.2 (ii) 0.07 (iii) 0.62 (iv) 10.9
(v) 162.8 (vi) 2.07 (vii) 0.99 (viii) 0.16

**2.** (i) 0.48 (ii) 5.25 (iii) 0.07 (iv) 3.31
(v) 27.223 (vi) 0.056 (vii) 0.397

**3.** (i) 0.027 (ii) 0.003 (iii) 0.0078 (iv) 4.326
(v) 0.236 (vi) 0.9853

**4.** (i) 0.0079 (ii) 0.0263 (iii) 0.03853 (iv) 0.1289 (v) 0.0005

**5.** (i) 2 (ii) 180 (iii) 6.5 (iv) 44.2 (v) 2
(vi) 31 (vii) 510 (viii) 27 (ix) 2.1

**6.** 18 km

## అభ్యాసం 3.1

**2.**

<table>
<tr><th>అంకములు</th><th>ట్యాలీలు</th><th>ఆవృత్తి</th></tr>
<tr><td>1</td><td>|</td><td>1</td></tr>
<tr><td>2</td><td>||</td><td>2</td></tr>
<tr><td>3</td><td>|</td><td>1</td></tr>
<tr><td>4</td><td></td><td>3</td></tr>
<tr><td>5</td><td><s>||||</s></td><td>5</td></tr>
<tr><td>6</td><td>||||</td><td>4</td></tr>
<tr><td>7</td><td>||</td><td>2</td></tr>
<tr><td>8</td><td>|</td><td>1</td></tr>
<tr><td>9</td><td>|</td><td>1</td></tr>
</table>

(i) 9 (ii) 1 (iii) 8 (iv) 5

**3.** 2 **4.** 50 **5.** (i) 12.5 (ii) 3

(iii) $\frac{0+8+6+4}{4} = \frac{18}{4}$ or $\frac{9}{2}$ (iv) A

**6.** (i) ఎక్కువ అంకములు చాలా తక్కువ అంకములు = 39 (ii) 56 (iii) 73

**7.** 2058 **8.** (i) 20.5 (ii) 5.9 (iii) 5

**9.** (i) 151 cm (ii) 128 cm (iii) 23 cm (iv) 141.4 cm (v) 5

## అభ్యాసం 3.2

1. బహులక = 20, మధ్యాంకం = 20, అవును. 2. సరాసరి = 39, బహులక =15, మధ్యాంకం = 15, No.
3. (i) బహులక = 38, 43; మధ్యాంకం = 40 (ii) సరి అవి, 2 లు.
4. బహులక = 14, మధ్యాంకం = 14
5. (i) T (ii) F (iii) T (iv) F

## అభ్యాసం 3.3

1. (a) పిల్లి (b) 8
4. (i) గణితం (ii) సమాజ విజ్ఞానం (iii) హింది
5. (ii) క్రికేట్ (iii) క్రీడ వీక్షించడానికి
6. (i) జమ్ము (ii) జమ్ము, బెంగళూరు
   (iii) బెంగళూరు మరియు జైపూర్ లేదా బెంగళూరు మరియు
   (iv) ముంబై

## అభ్యాసం 3.4

1. (i) ఖచ్చిత ఘటన (ii) సంభవనీయం అనగా ఖచ్చితం కాదు
   (iii) అసాధ్య
   (iv) సంభవనీయం అయితే ఖచ్చితం కాదు (v) సంభవనీయం అయితే ఖచ్చితం కాదు,
2. (i) $\frac{1}{6}$ (ii) $\frac{1}{6}$ 3. $\frac{1}{2}$

## అభ్యాసం 4.1

1. (i) తప్పు (ii) తప్పు (iii) సరి (iv) తప్పు (v) సరి
   (vi) తప్పు (vii) సరి (viii) తప్పు (ix) తప్పు (x)తప్పు
   (xi) సరి
2. (a) తప్పు (b) తప్పు (c) సరి (d)తప్పు (e) తప్పు (f) తప్పు
3. (i) $p = 3$ (ii) $m = 6$
4. (i) $x + 4 = 9$ (ii) $y - 2 = 8$ (iii) $10a = 70$ (iv) $\frac{b}{5} = 6$
   (v) $\frac{3t}{4} = 15$ (vi) $7m + 7 = 77$ (vii) $\frac{x}{4} - 4 = 4$ (viii) $6y - 6 = 60$
   (ix) $\frac{z}{3} + 3 = 30$

5. (i) $p$ 4 యొక్క మొత్తం15 (ii) $m$ నుండి 7ను తీసివేసినప్పుడు లభిస్తుంది.

(iii) $m$ యొక్క రెండు రెంట్లు 7 అయింది (iv) $m$ యొక్క ఒక 3 అయింది

(v) $m$ మూడవ ఐదింతలు 6 అయింది.

(vi) $p$ యొక్క మూడింతలు 4కు కలిపినచో 25 లభిస్తుంది.

(vii) $p$ యొక్క నాలిగింత 2ను తీసివేసినచో 18 లభిస్తుంది.

(viii) 8 ను పొందడానికి $p$ యొక్క సగానికి 2ను కలపాలి.

6. (i) $5m + 7 = 37$ (ii) $3y + 4 = 49$ (iii) $2l + 7 = 87$ (iv) $4b = 180°$

## అభ్యాసం 4.2

1. (a) రెండు వైపుల 1 ని కలపండి ; $x = 1$ (b) రెండు వైపుల నుండి 1 తీసివేయండి; $x = -1$

(c) రెండు వైపుల 1 ని కలపండి; $x = 6$ (d) రెండు వైపుల నుండి 6ను తీసివేయండి; $x = -4$

(e) రెండు వైపుల 4ని కలపండి; $y = -3$ (f) రెండు వైపుల 1 ని కలపండి; $y = 8$

(g) రెండు వైపుల నుండి 4ను తీసివేయండి; $y = 0$

(h) రెండు వైపుల నుండి 4ను తీసివేయండి; $y = -8$

2. (a) రెండు వైపుల నుండి 3తో భాగించండి ; $l = 14$

(b) రెండు వైపులను 2తో గుణించండి; $b = 12$

(c) రెండు వైపులను 7తో గుణించండి; $p = 28$ (d) రెండు వైపులను 3తో గుణించండి; $x = \frac{25}{4}$

(e) రెండు వైపులను 8తో భాగించండి; $y = \frac{36}{8}$ (f) రెండు వైపులను 20తో గుణించండి; $z = \frac{15}{4}$

(g) రెండు వైపులను 5తో గుణించండి; $a = \frac{7}{3}$ (h) రెండు వైపులను 20తో భాగించండి. $t = -\frac{1}{2}$

3. (a) 1వ దశ : రెండు వైపుల 2ను కలపండి

(b) 1వ దశ : రెండు వైపులనుండి 7ను తీసివేయండి.

2వ దశ : రెండు వైపులను 3తో భాగించండి; $n = 16$

2వ దశ : రెండు వైపులను 5తో భాగించండి; $m = 2$

(c) **1వ దశ : రెండు వైపులను 3తో భాగించండి.**

(d) **1వ దశ : 10తో రెండు వైపులను గుణించండి**

**2వ దశ : రెండు వైపుల 20తో భాగించండి;** $p = 6$

**2వ దశ : రెండు వైపుల 2ను కలపండి;** $p = 20$

**4.** (a) $p = 10$ (b) $p = 9$ (c) $p = 20$ (d) $p = -15$ (e) $p = 8$ (f) $s = -3$
(g) $s = -4$ (h) $s = 0$ (i) $q = 3$ (j) $q = 3$ (k) $q = -3$ (l) $q = 3$

## అభ్యాసం 4.3

**1.** (a) $y = 8$ (b) $t = \frac{-18}{5}$ (c) $a = -5$ (d) $q = -8$ (e) $x = -4$
(f) $x = \frac{5}{2}$ (g) $m = \frac{1}{2}$ (h) $z = -2$ (i) $l = \frac{4}{9}$ (j) $b = 12$

**2.** (a) $x = 2$ (b) $n = 12$ (c) $n = -2$ (d) $x = -4$ (e) $x = 0$

**3.** (a) $p = \frac{12}{5}$ (b) $p = \frac{6}{5}$ (c) $t = 2$ (d) $p = 7$ (e) $m = 2$

**4.** (a) **సాధ్యపడే సమీకరణాలు :** $10x + 2 = 22$; $\frac{x}{5} = \frac{2}{5}$ $5x - 3 = 7$

(b) **సాధ్యంగల సమీకరణాలు :** $3x = -6$; $3x + 7 = 1$; $3x + 10 = 4$

## అభ్యాసం 4.4

**1.** (a) $8x + 4 = 60$; $x = 7$ (b) $\frac{x}{5} - 4 = 3$; $x = 35$

(c) $\frac{3}{4} y + 3 = 21$; $y = 24$ (d) $2m - 11 = 15$; $m = 13$

(e) $50 - 3x = 8$; $x = 14$ (f) $\frac{x+19}{5} = 8$; $x = 21$

(g) $\frac{5n}{2} - 7 = 23$; $n = 12$

**2.** (a) అనిష్ట అంకములు $= 40$ (b) ప్రతియొక్కరు $70°$

(c) సచిన్: **132** రన్‌లు, రాహుల్: **66**రన్‌లు

**3.** (i) 6 (ii) 15 సంవత్సరాలు (iii) 25 4. 30

## అభ్యాసం 5.1

1. (i) 70° (ii) 27° (iii) 33°
2. (i) 75° (ii) 93° (iii) 26°
3. (i) పూరక (ii) పరిపూరక (iii) పూరక
   (iv) పూరక (v) పరిపూరక (vi) పరిపూరక
4. 45° 5. 90°
6. $\angle 1$ యొక్క కొలత తక్కువ $\angle 2$ యొక్క విలువ పెరుగుతుంది.
7. (i) తప్పు (ii) తప్పు (iii) సరి 8. 45° సరి
9. (i) సరి (ii) తప్పు (iii) సరి (iv) సరి (v) సరి (vi) COB
10. (i) $\angle 1, \angle 4; \angle 5, \angle 2 + \angle 3$ (ii) $\angle 1, \angle 5; \angle 4, \angle 5$
11. $\angle 1$ మరియు $\angle 2$ పార్శ్వ కోణాలలో ఎందుకనగా వాటి శీర్ష్యాలు ఒకటేకాదు.
12. (i) $x = 55°, y = 125°, z = 125°$ (ii) $x = 115°, y = 140°, z = 40°$
13. (i) 90° (ii) 180° (iii) పూరక
    (iv) రేఖాత్మక జంట (v) సమానం (vi) అధిక కోణాలు
14. (i) $\angle AOD, \angle BOC$ (ii) $\angle EOA, \angle AOB$
    (iii) $\angle EOB, \angle EOD$ (iv) $\angle EOA, \angle EOC$
    (v) $\angle AOB, \angle AOE; \angle AOE, \angle EOD; \angle EOD, \angle COD$

## అభ్యాసం 5.2

1. (i) అనురూప కోణాల లక్షణాలు (ii) పర్యాయ అంతర కోణాల లక్షణం
   (iii) ఖండన యొక్క ఒకే వైపు కోణాలు పూరకం
2. (i) $\angle 1, \angle 5; \angle 2, \angle 6; \angle 3, \angle 7; \angle 4, \angle 8$ (ii) $\angle 2, \angle 8; \angle 3, \angle 5$
   (iii) $\angle 2, \angle 5; \angle 3, \angle 8$ (iv) $\angle 1, \angle 3; \angle 2, \angle 4; \angle 5, \angle 7; \angle 6, \angle 8$
3. $a = 55°; b = 125°; c = 55°; d = 125°; e = 55°; f = 55°$
4. (i) $x = 70°$ (ii) $x = 100°$
5. (i) $\angle DGC = 70°$ (ii) $\angle DEF = 70°$
6. (i) $l$ వు $m$ కు సమాంతరంగా లేదు (ii) $l$ వు $m$ కు సమాంతరంగా లేదు
   (iii) $l$ వు $m$ కు సమాంతరంగా ఉంది (iv) $l$ వు $m$ కు సమాంతరంగా ఉంది

## అభ్యాసం 6.1

1. ఎత్తు, మధ్యరేఖ, లేదు.

## అభ్యాసం 6.2

1. (i) 120° (ii) 110° (iii) 70° (iv) 120° (v) 100° (vi) 90°
2. (i) 65° (ii) 30° (iii) 35° (iv) 60° (v) 50° (vi) 40°

## అభ్యాసం 6.3

1. (i) 70° (ii) 60° (iii) 40°
   (iv) 65° (v) 60° (vi) 30°
2. (i) $x = 70°, y = 60°$ (ii) $x = 50°, y = 80°$
   (iii) $x = 110°, y = 70°$ (iv) $x = 60°, y = 90°$
   (v) $x = 45°, y = 90°$ (vi) $x = 60°, y = 60°$

## అభ్యాసం 6.4

1. (i) సాధ్యంకాదు (ii) సాధ్యంఉంది (iii) సాధ్యంకాదు
2. (i) సరి (ii) సరి (iii) సరి 3. సరి 4. సరి 5. తప్పు
6. 3 మరియు 27ర మధ్యసంఖ్య

## అభ్యాసం 6.5

1. 26 cm 2. 24 cm 3. 9 m 4. (i) and (iii)
5. 18m 6. (ii) 7. 98 cm 8. 68 cm

## అభ్యాసం 7.1

1. (a) అవి ఒకటే పొడవులను పొందియున్నాయి. (b) 70° (c) $m\angle A = m\angle B$
3. $\angle A \leftrightarrow \angle F, \angle B \leftrightarrow \angle E, \angle C \leftrightarrow \angle D, \overline{AB} \leftrightarrow \overline{FE}, \overline{BC} \leftrightarrow \overline{ED}, \overline{AC} \leftrightarrow \overline{FD}$
4. (i) $\angle C$ (ii) $\overline{CA}$ (iii) $\angle A$ (iv) $\overline{BA}$

## అభ్యాసం 7.2

1. (a) భుభుభు సర్వసమానత్వ నిర్ధారక లక్షణం (b) భుకోభు సర్వ సమానత్వం
   (c) కోభుకో సర్వసమానత్వం (d) లంకవా సర్వసమానత్వం
2. (a) (i) PE (ii) EN (iii) PN (b) (i) EN (ii) AT
   (c) (i) $\angle RAT = \angle EPN$ (ii) $\angle ATR = \angle PNE$
3. (i) దత్తాంశం (ii) దత్తాంశం (iii) ఉభయ సామాన్యం (iv) భుకోభు సర్వసమానత్వం
4. లేదు
5. $\Delta WON$ 6. $\Delta BTA, \Delta TPQ$ 9. BC = QR, ASA అనుగుణ్యాత ప్రమాణం