જિલ્લા શિક્ષણાધિકારી કચેરી, ખેડા

"Study Material"

Std : 10, Subject : Mathematics

Chapter : 1 & 2

વિદ્યાર્થી મિત્રો અને વાલમિત્રો,

જય ભારત, આપ સૌ કુશળ હશો. ગુજરાત સરકારના શિક્ષણવિભાગ અને જિલ્લાશિક્ષણાધિકારીશ્રીની કચેરી, જિલ્લો ખેડાનાં માર્ગદર્શન હેઠળ **COVID-19** મહામારી અને તેના સંક્રમણથી શાળાના વિદ્યાર્થીઓને બચાવવા તેમજ તેમની સલામતીને અનુલક્ષીને ધોરણ **10**ના વિદ્યાર્થીઓ ઘરે બેઠા અભ્યાસ કરી શકે તે માટેનું **"Study Material"** આ સાથે પ્રસ્તુત કરી રહ્યા છીએ. આ **"Study Material"**નો અભ્યાસ કરી અને સાથે આપેલ સ્વાધ્યાય કાર્ય આપની નોટબુકમાં પૂર્ણ કરવાનું રહેશે. આભાર.

માર્ગદર્શક

શ્રી ટી.એસ. સોલંકી
શિક્ષણ નિરીક્ષકશ્રી

સુશ્રી કાજલબેન દવે
જિલ્લા શિક્ષણાધિકારીશ્રી

Prepared by

1) શ્રી સંજયકુમાર શર્મા (શ્રી શારદા મંદિર હાઈસ્કૂલ, મેનપુરા)
2) શ્રી વિરેનભાઈ પટેલ (શેઠ એમ.પી.મ્યુની. હાઈસ્કૂલ, કપડવંજ)
3) શ્રી અકીલ વ્હોરા (શ્રીમતી એમ.એમ.પટેલ હાઈસ્કૂલ, મહેમદાવાદ)
4) શ્રી નિલેશભાઈ પટેલ (શ્રી એ. જે. પટેલ હાઈસ્કૂલ, વસો)
5) શ્રી મેહુલભાઈ શાહ (શેઠ એમ.આર હાઈસ્કૂલ, કઠલાલ)

પ્રકરણ : 1 વાસ્તવિક સંખ્યાઓ

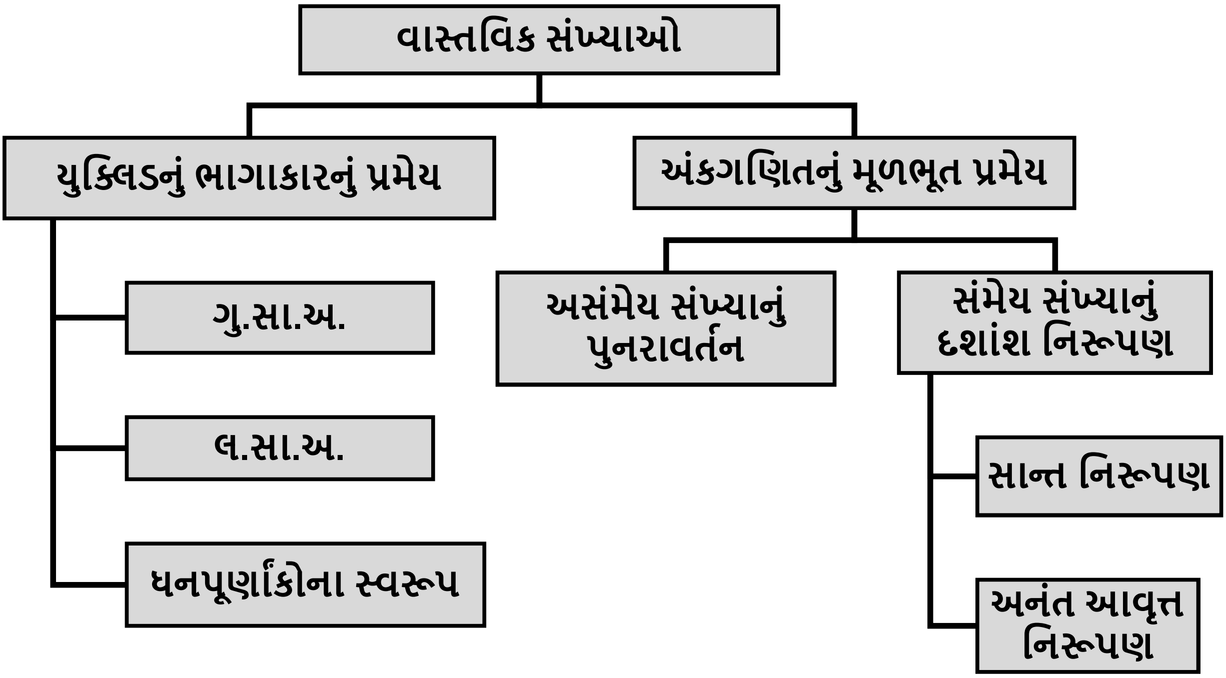
- **જરૂરી પર્વજ્ઞાનઃ-**

1) એકા – અગિયારા, 2) ગુણાકાર, 3) ભાગાકાર,

4) સંખ્યાઓની ઓળખ, 5) વિભાજ્યતાની ચાવીઓ,

6) ગુ.સા.અ. 7) લ.સા.અ

- **પ્રકરણની રૂપરેખાઃ-**



- **યુક્લિડનું ભાગાકારનું પૂર્વપ્રમેય (પ્રમેય 1.1) :-** આપેલ ધન પૂર્ણાંકો a અને b ને સંગત અનન્ય અનૃણ પૂર્ણાંકો q અને r એવા મળે જ કે જેથી $a = bq + r, 0 \leq r < b$.
  - યુક્લિડ ભાગ પ્રવિધિને વિભાજ્યતા સાથે સંબંધ છે, જેમ કે ધન પૂર્ણાંક a (a=15 ધારો)ને બીજા કોઇ ધન પૂર્ણાંક b (b=2 ધારો) વડે ભાગવામાં આવે તો અનૃણ (ઋણ સિવાયની એટલે કે શૂન્ય અથવા ધન પૂર્ણાંક) શેષ (r=1) વધે છે, જે હંમેશા b (b=2) કરતાં નાની જ હોય $a = bq + r \therefore 15 = 2 \times 7 + 1$

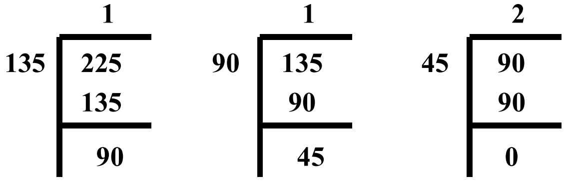
ઉદાહરણઃ-

1) યુક્લિડની ભાગપ્રવિધિનો ઉપયોગ કરી ગુ.સા.અ. શોધો. 135 અને 225

$225 = 135 \times 1 + 90$

$\therefore 135 = 90 \times 1 + 45$

$\therefore 90 = 45 \times 2 + 0$



ગુ.સા.અ. (135, 225) = 45

2) યુક્લિડની ભાગપ્રવિધિનો ઉપયોગ કરી ગુ.સા.અ. શોધો. 196 અને 38220

$$38220 = 196 \times 195 + 0$$

```
          195
196 | 38220
    | 38220
    |------
    |     0
```

ગુ.સા.અ. (196, 38220) = 196

Homework :- યુક્લિડની ભાગપ્રવિધિનો ઉપયોગ કરી ગુ.સા.અ. શોધો.

1) 867 અને 255   2) 4052 અને 12576 3) 455 અને 42

- <u>અંકગણિતનું મૂળભૂત પ્રમેયઃ-</u> દરેક વિભાજ્ય પૂર્ણાંક (એટલેકે ઓછામાં ઓછી બે અવિભાજ્ય સંખ્યાઓનો ગુણાકાર) એ અવિભાજ્ય પૂર્ણાંક (એટલે કે એક કરતાં મોટી એવી પૂર્ણાંક સંખ્યા કે જેને તે સંખ્યા પોતે અને એક સિવાય કોઇ જ અવયવ ના હોય)ના ગુણાકાર તરીકે અનન્ય રીતે દર્શાવી શકાય. આ અગત્યના ગુણધર્મને અંકગણિતનો મૂળભૂત પ્રમેય કહે છે.
  - આપણે જાણીએ છીએ કે કોઈપણ પ્રાકૃતિક સંખ્યાને તેના અવિભાજ્યઅવયવોના ગુણાકારરૂપે લખી શકાય છે.
  - <u>ઉદાહરણ</u>

1) 8=2x2x2   2)36=2x2x3x3   3)253=11x23   4) 32760=2x2x2x3x3x5x7x13

ઉપરોક્ત ઉદાહરણને અવિભાજ્ય સંખ્યાઓના ઘાતના ગુણાકાર રૂપે નીચે મુજબ લખી શકાય

$$32760 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 13$$

- <u>Homework</u> નીચેની દરેક સંખ્યાને તેના અવિભાજ્ય અવયવોના ગુણાકાર સ્વરૂપે દર્શાવો

1) 140   2)156   3) 3825   4)5005   5) 7429

- <u>પ્રમેય 1.2 (અંકગણિતનું મૂળભૂત પ્રમેય) :-</u> દરેક વિભાજ્ય સંખ્યાને, તેના અવયવોના ક્રમને અવગણીને અવિભાજ્ય સંખ્યાઓના ગુણાકાર તરીકે અનન્ય રીતે લખી શકાય છે.

"1 થી મોટી કોઇ પણ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનું અવિભાજ્ય અવયવોમાં અવયવીકરણ તેના ક્રમને અવગણીએ તો અનન્ય હોય છે."

- <u>ધન પૂર્ણાંકોના ગુ.સા.અ. અને લ.સા.અ.</u>

1) 12 અને 18નો ગુ.સા.અ. શોધો.

ગુ.સા.અ. એટલે બે પૂર્ણાંકોનો મોટામાં મોટો સામાન્ય અવયવ અને લ.સા.અ. એટલે બે પૂર્ણાંકોનો નાનામાં નાનો અવયવી

$12 = 2 \times 2 \times 3 = 2^2 \times 3$ $18 = 2 \times 3 \times 3 = 2 \times 3^2$

ગુ.સા.અ. = 2x3 = 6   અને   લ.સા.અ. = $2^2 \times 3^2 = 4 \times 9 = 36$

2) 12 ,18 અને 24 નો ગુ.સા.અ. અને લ.સા.અ. શોધો .

$12 = 2 \times 2 \times 3 = 2^2 \times 3$ $18 = 2 \times 3 \times 3 = 2 \times 3^2$ $24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 2^3 \times 3$

ગુ.સા.અ. = 2 x 3 = 6   અને   લ.સા.અ. = $2^3 \times 3^2 = 8 \times 9 = 72$

- **Homework** નીચેના ગુ.સા.અ. અને લ.સા.અ. શોધો

  1) 12,15,21 2)17,23,29 3) 8,9,25

બે પૂર્ણાંકોના ગુણાકાર =બે પૂર્ણાંકોનો ગુ.સા.અ. x બે પૂર્ણાંકોનો લ.સા.અ.
ગુ.સા.અ. (a, b) x લ.સા.અ. (a, b) = a x b

❖ **96 અને 404 નો ગુ.સા.અ. અવિભાજ્યની અવયવની રીતે મેળવો અને તે પરથી લ.સા.અ. શોધો.**

$96=2^5x3$ $404=2^2x101$

ગુ.સા.અ. $=2^2=4$ લ.સા.અ.(96,404)= (96x404/4) =9696

1) 26 અને 91. 2)510 અને 92 3)336 અને 54

4) જો ગુ.સા.અ.(306,657)=9 આપેલ હોય, તો લ.સા.અ.(306,657)શોધો.

5) એક રમતના મેદાનમાં વર્તુળાકાર મેદાન છે.સોનિયાને તેનું પરિભ્રમણ પૂર્ણ કરતાં 18 મિનિટ લાગે છે અને રવિને તેનું એક પરિભ્રમણ પૂર્ણ કરતાં 12 મિનિટ લાગે છે. ધારોકે બંને એક જ સમયે એક જ બિંદુએથી એક જ દિશામાં પરિભ્રમણ કરવાનું પ્રારંભ કરે છે. તો કેટલી મિનિટ બાદ બંને ફરી પ્રારંભ બિંદુએ ભેગા થાય?

➢ **<u>અસંમેય સંખ્યાઓનું પુનરાવર્તનઃ-</u>** જે સંખ્યાને પૂર્ણાંક p તથા શૂન્યેતર પૂર્ણાંક q માટે $\frac{p}{q}$ સ્વરૂપમાં ન દર્શાવી શકાય તેવી સંખ્યા s ને અસંમેય સંખ્યા કહે છે.

દા. ત. $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt[3]{15}, -\frac{5}{\sqrt{3}}, \pi, 0.21211211121111$ .... વગેરે અસંમેય સંખ્યાઓ છે.

➢ **પ્રમેય 1.3** *:* ધારોકે ***p*** એ એક અવિભાજ્ય સંખ્યા છે. ધન પૂર્ણાંક ***a*** માટે, a^2 એ ***p*** વડે વિભાજ્ય હોય, તો ***a*** પણ ***p*** વડે વિભાજ્ય હોય.

<u>સાબિતીઃ-</u>

ધારોકે ***a*** નું અવિભાજ્ય અવયવોમાં અવયવીકરણ નીચે પ્રમાણે છેઃ

$a = p_1p_2p_3p_4p_6 \dots\dots p_n$ જ્યાં $p_1p_2p_3p_4p_6 \dots\dots p_n$ એ અવિભાજ્ય સંખ્યા છે.

$a^2 = (p_1p_2p_3p_4p_6 \dots\dots p_n)(p_1p_2p_3p_4p_6 \dots\dots p_n)$

$\therefore a^2 = {p_1}^2{p_2}^2{p_3}^2{p_4}^2 \dots\dots {p_n}^2$

$\therefore a^2$ એ ***p*** વડે વિભાજ્ય છે.   (આપેલ છે)

$\therefore p$ એ a^2 નો એક અવિભાજ્ય અવયવ છે. (અંકગણિતના મૂળભૂત પ્રમેય પરથી)

$\therefore$ p એ $p_1p_2p_3p_4p_6 \dots\dots p_n$ પૈકીનો એક છે.

$\therefore$ p એ a નો અવયવ છે.

➢ **પ્રમેય 1.4** *:* સાબિત કરો કે $\sqrt{2}$ એ અસંમેય છે.

<u>સાબિતીઃ-</u>

ધારોકે $\sqrt{2}$ એ સંમેય સંખ્યા છે.

$\therefore \sqrt{2} = \frac{a}{b}$ જ્યાં ગુસાઅ $(a, b) = 1$

$\therefore b\sqrt{2} = a$

$\therefore 2b^2 = a^2$ (વર્ગ કરતાં)

$\therefore a^2$ એ *2* વડે વિભાજ્ય છે.

$\therefore a$ એ *2* વડે વિભાજ્ય છે. (પ્રમેય *1.3*)

ધારો કે $a = 2c$ (જ્યાં c કોઇ પૂર્ણાંક છે.)

$\therefore a^2 = 4c^2$ (વર્ગ કરતાં)

$\therefore 2b^2 = 4c^2$ (a^2 ની કિંમત મૂકતાં)

$\therefore b^2 = 2c^2$

$\therefore b^2$ એ *2* વડે વિભાજ્ય છે.

$\therefore b$ એ *2* વડે વિભાજ્ય છે. (પ્રમેય *1.3*)

$\therefore$ ગુસાઅ $(a, b) = 2$

પણ, ગુસાઅ $(a, b) = 1$

જે આપણી ધારણાથી વિરુદ્ધ છે.

માટે, આપણી ધારણા $\sqrt{2}$ એ સંમેય સંખ્યા છે, એ ખોટી છે.

માટે, સાબિત થાય છે કે, $\sqrt{2}$ એ અસંમેય સંખ્યા છે.

Homework: સાબિત કરો કેઃ $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}$ એ અસંમેય સંખ્યા છે.

Ex :- સાબિત કરો કે $6 + \sqrt{2}$ એ અસંમેય સંખ્યા છે.

આથી, ઊલટું ધારો કે $6 + \sqrt{2}$ એ સંમેય સંખ્યા છે.

આથી, પરસ્પર અવિભાજ્ય પૂર્ણાંક a અને b શોધી શકીએ કે જેથી,

$6 + \sqrt{2} = \frac{a}{b}$

$\therefore 6 - \frac{a}{b} = \sqrt{2}$

$\therefore \frac{6b-a}{b} = \sqrt{2}$

આથી, $\frac{6b-a}{b}$ એ સંમેય મળે જેથી, $\sqrt{2}$ એ સંમેય સંખ્યા થાય.

પણ, $\sqrt{2}$ એ અસંમેય સંખ્યા છે.

જેથી, આપણી ધારણા $6 + \sqrt{2}$ એ સંમેય સંખ્યા છે, એ ખોટી છે.

જેથી સાબિત થાય છે કે, $6 + \sqrt{2}$ એ અસંમેય સંખ્યા છે.

Homework: સાબિત કરો કે નીચે આપેલી સંખ્યાઓ અસંમેય છે.

$(1) 5 - \sqrt{3}$ $(2) 3 + 2\sqrt{5}$ $(3) 7\sqrt{5}$ $(4) \frac{1}{\sqrt{2}}$

- **સંમેય સંખ્યા અને તેનું દશાંશ નિરૂપણઃ-**
  - **જેનું દશાંશ નિરૂપણ સાન્ત છે તેવી સંમેય સંખ્યાને આપણે $\frac{p}{q}$ સ્વરૂપમાં દર્શાવી શકીએ છીએ (જ્યાં $q \neq 0$, ગુસાઅ $(p, q) = 1$ અને અનૃણ પૂર્ણાંકો n, m માટે q નું અવિભાજ્ય અવયોવોમાં અવયવીકરણ $2^n 5^m$ સ્વરૂપમાં હોય.**
  - **જો $\frac{p}{q}$ માટે n = m = 0 લેતાં, $q = 2^0 5^0 = 1 \times 1 = 1$ જેથી $\frac{p}{q}$ એ પૂર્ણાંક છે.**
  - **જો $\frac{p}{q}$ જ્યાં $q \neq 0$, ગુસાઅ $(p, q) = 1$ માટે જો અનૃણ પૂર્ણાંકો n, m માટે q નું અવિભાજ્યોમાં અવયવીકરણ $2^n 5^m$ સ્વરૂપનું હોય તેવી સંમેય સંખ્યાનું દશાંશ નિરૂપણ અનંત અને આવૃત્ત હોય છે.**
    1. **$\frac{8}{21} = \frac{8}{7\times3}$ નું દશાંશ નિરૂપણ અનંત અને આવૃત્ત છે.**
    2. **$\frac{1}{3}$ નું દશાંશ નિરૂપણ અનંત અને આવૃત્ત છે.**
    3. **$\frac{7}{210} = \frac{7}{7\times3\times2\times5} = \frac{1}{3\times2\times5}$ નું દશાંશ નિરૂપણ અનંત અને આવૃત્ત છે.**

Homework પાઠ્યપુસ્તક સ્વાધ્યાય 1.4

Example : માગ્યા પ્રમાણે ઉત્તર આપોઃ

1. **સંમેય સંખ્યાનું સ્વરૂપ __________ છે.**
2. **$\frac{p}{q}$ જ્યાં $q \neq 0$ એ ક્યા પ્રકારની સંખ્યા છે ?**
3. **$\frac{p}{q}$ જ્યાં $q \neq 0$ સંમેય સંખ્યા હોય, તો ગુસાઅ (p, q) = ______**
4. **$\frac{p}{q}$ જ્યાં $q \neq 0$ આપણે q=1 લઇએ તો p એ ક્યા પ્રકારની સંખ્યા કહેવાય ?**
5. **$\frac{p}{q}$ માં અંશ _______ અને છેદ _______ છે.**
6. **10 ના અવિભાજ્ય અવયવો _____ અને _____ છે.**

- **વાસ્તવિક સંખ્યાને છેદમાં 10ના ઘાતવાળી પૂર્ણાંક સંખ્યા હોય, તો તેનું દશાંશ નિરૂપણ સાન્ત હોય છે.**

  ઉદાહરણઃ

  1. $0.375 = \frac{375}{1000} = \frac{375}{10^3} = \frac{375}{2^3 \times 5^3}$
  2. $0.108 = \frac{108}{1000} = \frac{108}{10^3} = \frac{108}{2^3 \times 5^3}$
  3. $0.0975 = \frac{975}{10000} = \frac{975}{10^4} = \frac{975}{2^4 \times 5^4}$
  4. $92.4671 = \frac{924671}{10000} = \frac{924671}{10^4} = \frac{924671}{2^4 \times 5^4}$