1. **વક્ર $y = \sin x$, $x = 0$ અને $x = 2\pi$ વચ્ચેના સિમિત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ મેળવો.**

➥ સિમિત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ $= \left| \int_0^{2\pi} \sin x \, dx \right|$

$$= \left| \int_0^{\pi} \sin x \, dx \right| + \left| \int_{\pi}^{2\pi} \sin x \, dx \right|$$

$$= \left| -(\cos x)_0^{\pi} \right| + \left| -(\cos x)_{\pi}^{2\pi} \right|$$

$$= \left| -(\cos\pi - \cos 0) \right| + \left| -(\cos 2\pi - \cos\pi) \right|$$

$$= |-(-1 - 1)| + |-(1 + 1)|$$

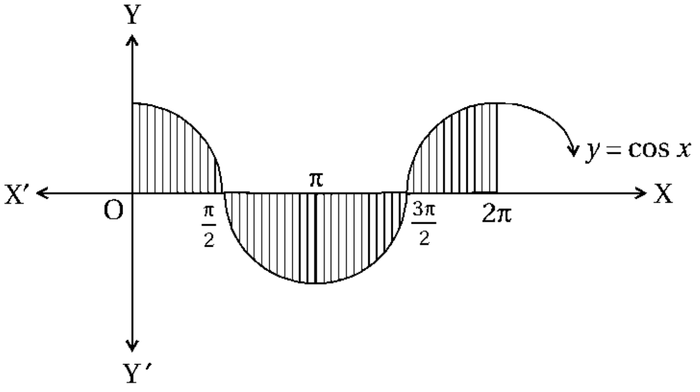
$$= |-(-2)| + |-2|$$

$$= 2 + 2$$

$= 4$ ચો.એકમ

2. **વક્ર $y = 2\cos x$ નું X- અક્ષ અને $x = 0$ તથા $x = 2\pi$ વચ્ચેના આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ મેળવો.**

➥



માંગેલ ક્ષેત્રફળ $= \left| \int_0^{2\pi} 2\cos x \, dx \right|$

$$= 4 \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos x \, dx \right|$$

$$= 8 \left| (\sin x)_0^{\pi/2} \right|$$

$$= 8 \left| \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 \right|$$

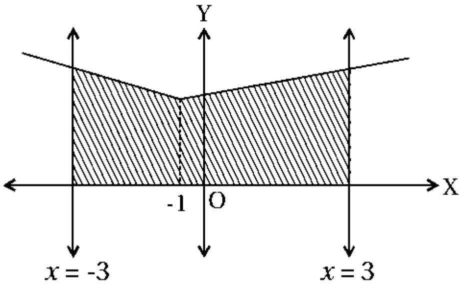
$$= 8 \, |1 - 0|$$

$= 8$ ચો.એકમ

3. **વક્ર $y = 1 + |x + 1|$ નો આલેખ દોરો તથા $y = 0$, $x = -3$ તથા $x = 3$ વચ્ચેના આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ મેળવો.**

➥ અહીં $y = 1 + |x + 1|$

$$\therefore y = \begin{cases} -x, & x < -1 \\ x + 2, & x > -1 \end{cases}$$



$\therefore$ માંગેલ જરૂરી ક્ષેત્રફળ $= \int_{-3}^{-1} -x\, dx + \int_{-1}^{3} (x + 2)\, dx$

$$= -\left(\frac{x^2}{2}\right)_{-3}^{-1} + \left(\frac{x^2}{2} + 2x\right)_{-1}^{3}$$

$$= -\left(\frac{1}{2} - \frac{9}{2}\right) + \left(\frac{9}{2} + 6 - \frac{1}{2} + 2\right)$$

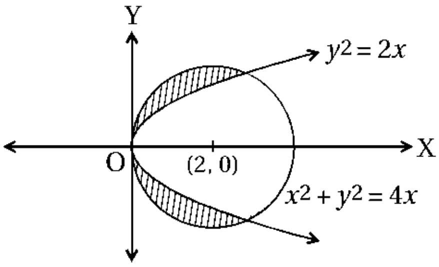
$= -(-4) + (4 + 6 + 2)$

$= 4 + 12$

$= 16$ ચો.એકમ

4. **વક્રો $x^2 + y^2 = 4x$ અને $y^2 = 2x$ વચ્ચેના આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ મેળવો.**

➥ અહીં સમીકરણ $x^2 + y^2 = 4x$ એ C(2, 0) કેન્દ્ર અને 2 એકમ ત્રિજ્યાવાળું વર્તુળ દર્શાવે છે. અને $y^2 = 2x$ એ ઉગમબિંદુ શિર્ષ તથા X- અક્ષ પરત્વે સંમિત પરવલય છે.



સૌ પ્રથમ આપેલા વક્રોનું છેદબિંદુ મેળવતાં,

$\therefore$ તેમનાં સમીકરણો ઉકેલતાં,

અક્ષ $y^2 = 2x$ અને $x^2 + y^2 = 4x$

$\therefore y^2 = 4x - x^2$

$\therefore 4x - x^2 = 2x$

$\therefore -x^2 = 2x - 4x$

$\therefore -x^2 = -2x$

$\therefore x^2 = 2x$

$\therefore x(x - 2) = 0$

$\therefore x = 0$ અને $x = 2$

જરૂરી ક્ષેત્રફળ $= \left| \int_a^b \left(f_1(x) - f_2(x) \right) dx \right|$

અહીં $x^2 + y^2 = 4x$

$\therefore\ x^2 - 4x + 4 + y^2 = 4$

$\therefore\ (x-2)^2 + y^2 = 4$

$\therefore\ y^2 = 4 - (x-2)^2$

$\therefore\ y = \sqrt{(2)^2 - (x-2)^2}$

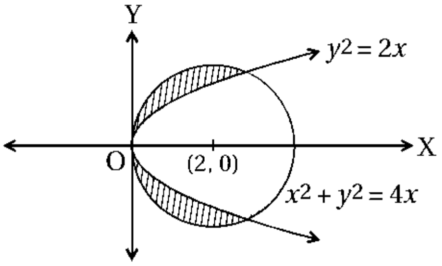
$\therefore\ f_1(x) = \sqrt{(2)^2 - (x-2)^2}$

અને $y^2 = 2x$

$\therefore\ y = \sqrt{2} \cdot \sqrt{x}$

$\therefore\ f_2(x) = \sqrt{2} \cdot \sqrt{x}$

➥ અહીં સમીકરણ $x^2 + y^2 = 4x$ એ C(2, 0) કેન્દ્ર અને 2 એકમ ત્રિજ્યાવાળું વર્તુળ દર્શાવે છે. અને $y^2 = 2x$ એ ઉગમબિંદુ શિર્ષ તથા X- અક્ષ પરત્વે સંમિત પરવલય છે.



સૌ પ્રથમ આપેલા વક્રોનું છેદબિંદુ મેળવતાં,

$\therefore$ તેમનાં સમીકરણો ઉકેલતાં,

અક્ષ $y^2 = 2x$ અને $x^2 + y^2 = 4x$

$\therefore\ y^2 = 4x - x^2$

$\therefore\ 4x - x^2 = 2x$

$\therefore\ -x^2 = 2x - 4x$

$\therefore\ -x^2 = -2x$

$\therefore\ x^2 = 2x$

$\therefore\ x(x-2) = 0$

$\therefore\ x = 0$ અને $x = 2$

જરૂરી ક્ષેત્રફળ $= \left| \int_a^b \left(f_1(x) - f_2(x) \right) dx \right|$

અહીં $x^2 + y^2 = 4x$

$\therefore\ x^2 - 4x + 4 + y^2 = 4$

$\therefore\ (x-2)^2 + y^2 = 4$

$\therefore\ y^2 = 4 - (x-2)^2$

$\therefore\ y = \sqrt{(2)^2 - (x-2)^2}$

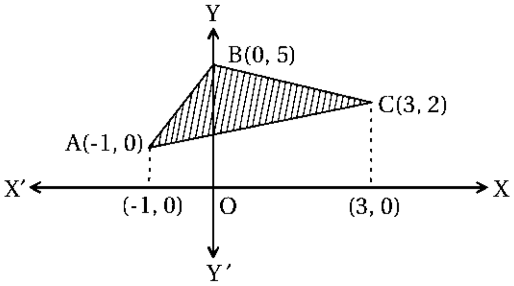
$\therefore\ f_1(x) = \sqrt{(2)^2 - (x-2)^2}$

અને $y^2 = 2x$

$\therefore\ y = \sqrt{2} \cdot \sqrt{x}$

$\therefore\ f_2(x) = \sqrt{2} \cdot \sqrt{x}$

5. **A(–1, 1), B(0, 5) અને C(3, 2) શિરોબિંદુવાળા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ સંકલનની મદદથી મેળવો.**

➡ 

A(– 1, 1), B(0, 5) તથા C(3, 2) દ્વારા ΔABC બને છે.

$\overleftrightarrow{AB}$ નું સમીકરણ : $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

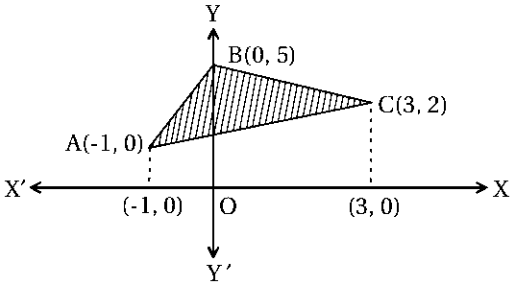
$\Rightarrow 4x - y + 5 = 0$

$\overleftrightarrow{BC}$ નું સમીકરણ : $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow x + y - 5 = 0$

$\overleftrightarrow{AC}$ નું સમીકરણ : $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow x - 4y + 5 = 0$

➡ 

A(– 1, 1), B(0, 5) તથા C(3, 2) દ્વારા ΔABC બને છે.

$\overleftrightarrow{AB}$ નું સમીકરણ : $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow 4x - y + 5 = 0$

$\overleftrightarrow{BC}$ નું સમીકરણ : $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow x + y - 5 = 0$

$\overleftrightarrow{AC}$ નું સમીકરણ : $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$

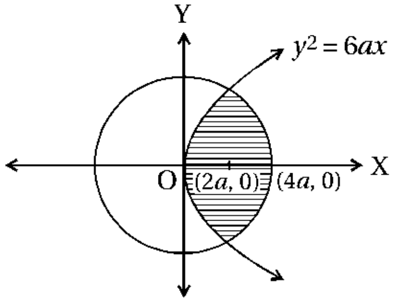
$\Rightarrow x - 4y + 5 = 0$

6. **ગણ $\{(x, y) \,/\, y^2 \le 6ax$ અને $x^2 + y^2 = 16a^2\}$ ની આકૃતિ દોરો. તેમાં રહેલા આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ મેળવો.**

➡ અહીં અસમતાનું રૂપાંતર સમાનતામાં કરતાં,

$\therefore y^2 = 6ax$ અને $x^2 + y^2 = 16a^2$

હવે $x^2 + y^2 = 16a^2$ એ ઉગમબિંદુ કેન્દ્ર અને $4a$ ત્રિજ્યા ધરાવતું વર્તુળ છે તથા $y^2 = 6ax$ અને X- અક્ષની ધન દિશામાં રહેલ પરવલય છે.



વક્રોના છેદબિંદુ માટે આપેલ વક્રોના સમીકરણ ઉકેલતાં,

$\therefore\ x^2 + y^2 = 16a^2$ અને $y^2 = 6ax$

$\therefore\ x^2 + 6ax = 16a^2$

$\therefore\ x^2 + 6ax - 16a^2 = 0$

$\therefore\ x^2 + 8ax - 2ax - 16a^2 = 0$

$\therefore\ x(x + 8a) - 2a(x + 8a) = 0$

$\therefore\ (x - 2a)(x + 8a) = 0$

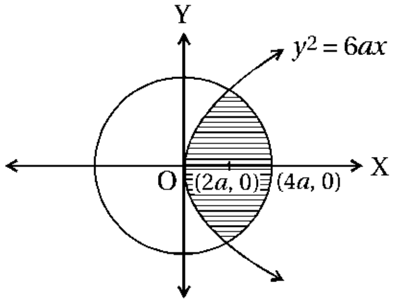
$\therefore\ x = 2a$ અને $x = -8a$

અહીં $x = -8a$ શક્ય નથી. કારણ $y^2 < 0$ થાય.

➡ અહીં અસમતાનું રૂપાંતર સમાનતામાં કરતાં,

$\therefore\ y^2 = 6ax$ અને $x^2 + y^2 = 16a^2$

હવે $x^2 + y^2 = 16a^2$ એ ઉગમબિંદુ કેન્દ્ર અને $4a$ ત્રિજ્યા ધરાવતું વર્તુળ છે તથા $y^2 = 6ax$ અને X- અક્ષની ધન દિશામાં રહેલ પરવલય છે.



વક્રોના છેદબિંદુ માટે આપેલ વક્રોના સમીકરણ ઉકેલતાં,

$\therefore\ x^2 + y^2 = 16a^2$ અને $y^2 = 6ax$

$\therefore\ x^2 + 6ax = 16a^2$

$\therefore\ x^2 + 6ax - 16a^2 = 0$

$\therefore\ x^2 + 8ax - 2ax - 16a^2 = 0$

$\therefore\ x(x + 8a) - 2a(x + 8a) = 0$

$\therefore\ (x - 2a)(x + 8a) = 0$

$\therefore\ x = 2a$ અને $x = -8a$

અહીં $x = -8a$ શક્ય નથી. કારણ $y^2 < 0$ થાય.

7. **સંકલનની મદદથી નીચે આપેલ બાજુઓના સમીકરણથી રચાતા ત્રિકોણીય પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.**

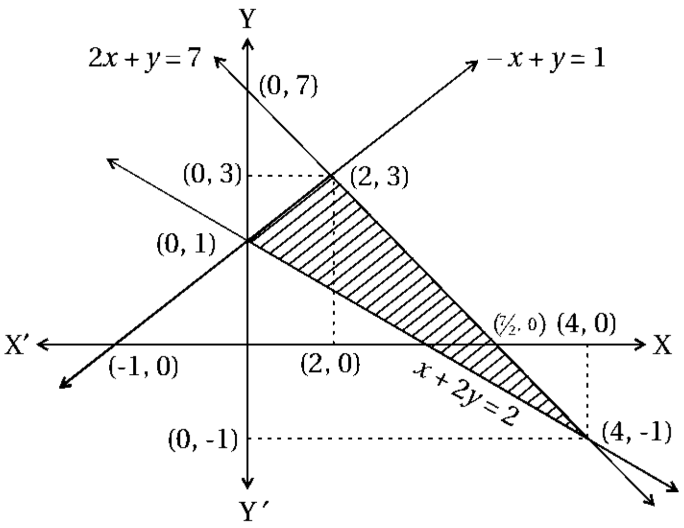
$x + 2y = 2$, $y - x = 1$ અને $2x + y = 7$

➡ આપેલ રેખાઓ $x + 2y = 2$ ....(i)

$y - x = 1$ ....(ii)

અને $2x + y = 7$ ....(iii)

કોઈ ત્રિકોણની બાજુઓ દર્શાવે છે.



અહીં સમીકરણ (i) અને (ii) ઉકેલતાં,

$x + 2y = 2$ અને $y - x = 1$

$\therefore y - 1 = x$

$\therefore y - 1 + 2y = 2$

$\therefore 3y = 3$

$\therefore y = 1$

$\therefore x = y - 1$

$\therefore x = 1 - 1$

$\therefore x = 0$

$\therefore A(0, 1)$

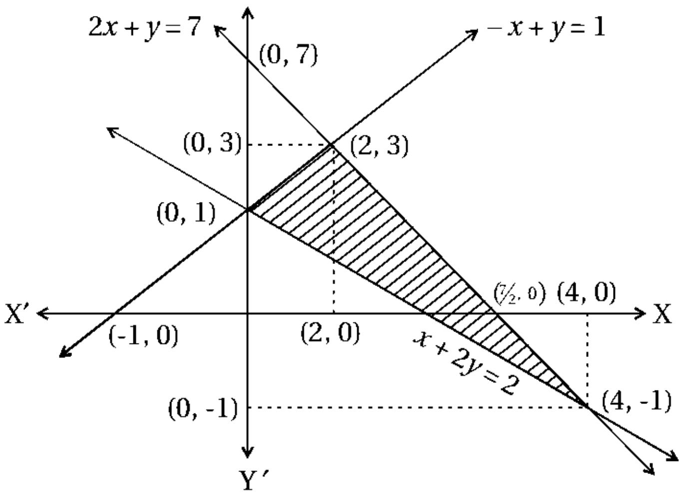
➡ આપેલ રેખાઓ $x + 2y = 2$ ....(i)

$y - x = 1$ ....(ii)

અને $2x + y = 7$ ....(iii)

કોઈ ત્રિકોણની બાજુઓ દર્શાવે છે.

Y



અહીં સમીકરણ (i) અને (ii) ઉકેલતાં,

$x + 2y = 2$ અને $y - x = 1$

$\therefore y - 1 = x$

$\therefore$ y − 1 + 2y = 2

$\therefore 3y = 3$

$\therefore y = 1$

$\therefore x = y - 1$

$\therefore x = 1 - 1$

$\therefore x = 0$

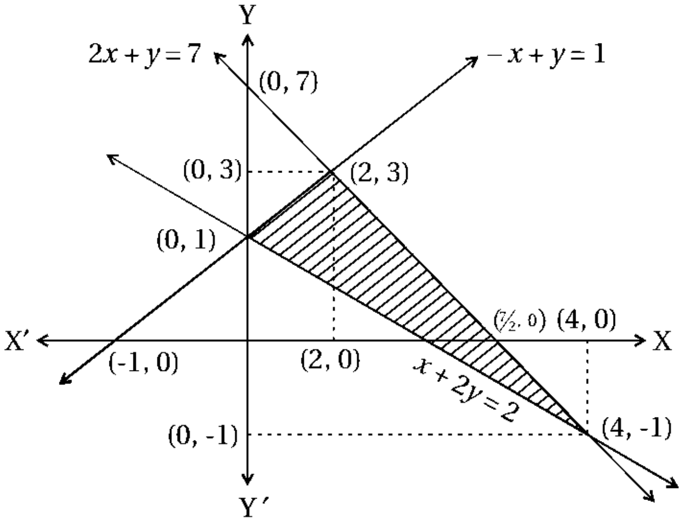
$\therefore$ A(0, 1)

➡ આપેલ રેખાઓ $x + 2y = 2$ ....(i)

$y - x = 1$ ....(ii)

અને $2x + y = 7$ ....(iii)

કોઈ ત્રિકોણની બાજુઓ દર્શાવે છે.



અહીં સમીકરણ (i) અને (ii) ઉકેલતાં,

$x + 2y = 2$ અને $y - x = 1$

$\therefore y - 1 = x$

$\therefore$ y − 1 + 2y = 2

$\therefore\ 3y = 3$

$\therefore\ y = 1$

$\therefore\ x = y - 1$

$\therefore\ x = 1 - 1$

$\therefore\ x = 0$

$\therefore$ A(0, 1)

8. સંકલનની મદદથી નીચે આપેલ બાજુઓના સમીકરણની મદદથી રચાયેલ આકૃતિનું ક્ષેત્રફળ મેળવો.

$y = 4x + 5$, $y = 5 - x$ અને $4y = x + 5$

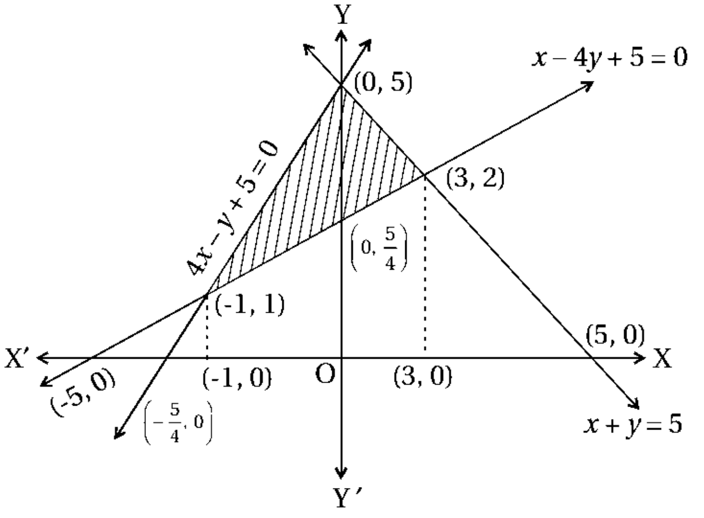
➡ આપેલ રેખાઓ $4x - y + 5 = 0$ ....(i)

$x + y - 5 = 0$ ....(ii)

અને $x - 4y + 5 = 0$ ....(iii)

રેખા $4x - y + 5 = 0$ અક્ષોને $A\left(-\frac{5}{4}, 0\right)$ અને B(0, 5)માં છેદશે.

રેખા $x + y = 5$ અક્ષોને (5, 0) તથા (0, 5)માં છેદશે અને રેખા $x - 4y + 5 = 0$ અક્ષોને (–5, 0) અને $\left(0, \frac{5}{4}\right)$માં છેદશે.



હવે ત્રિકોણના શિરોબિંદુઓ મેળવવા માટે આપેલ રેખાના સમીકરણોને ઉકેલતાં,

સૌપ્રથમ $x + y = 5$ અને $x - 4y + 5 = 0$ ને ઉકેલતાં છેદબિંદુ (3, 2) મળે અને રેખા $4x - y + 5 = 0$ તથા $x - 4y + 5 = 0$ ને ઉકેલતાં છેદબિંદુ (–1, 1) મળે.

➡ આપેલ રેખાઓ $4x - y + 5 = 0$ ....(i)

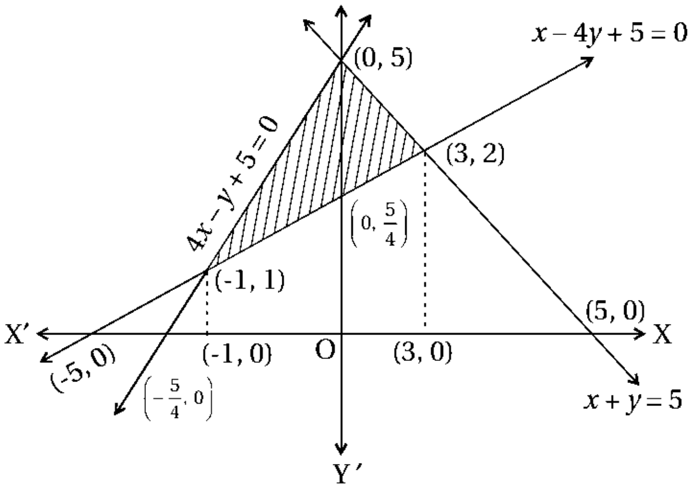
$x + y - 5 = 0$ ....(ii)

અને $x - 4y + 5 = 0$ ....(iii)

રેખા $4x - y + 5 = 0$ અક્ષોને $A\left(-\frac{5}{4}, 0\right)$ અને B(0, 5)માં છેદશે.

રેખા $x + y = 5$ અક્ષોને (5, 0) તથા (0, 5)માં છેદશે અને રેખા $x - 4y + 5 = 0$ અક્ષોને (–5, 0) અને $\left(0, \frac{5}{4}\right)$માં છેદશે.

Y



હવે ત્રિકોણના શિરોબિંદુઓ મેળવવા માટે આપેલ રેખાના સમીકરણોને ઉકેલતાં,

સૌપ્રથમ $x + y = 5$ અને $x - 4y + 5 = 0$ ને ઉકેલતાં છેદબિંદુ $(3, 2)$ મળે અને રેખા $4x - y + 5 = 0$ તથા $x - 4y + 5 = 0$ ને ઉકેલતાં છેદબિંદુ $(-1, 1)$ મળે.