అధ్యాయం **7**

F9T9U8

పౌనఃపున్య విభాజన పట్టికలు, రేఖాచిత్రములు

7.0 పరిచయం

ఒకరోజు జగదీష్ T.V. చూస్తున్నాడు. 2012 ఒలంపిక్ క్రీడలలో ప్రపంచంలోని ఏయే దేశములు, ఎన్నెన్ని పతకాలను గెలుచుకున్నాయి అనే వివరాలను T.V. నందు క్రింది పట్టిక వలె చూపుతున్నారు.

2012 ఒలంపిక్స్ - పతకాల పట్టిక

స్థానము	దేశము	బంగారు పతకాలు	వెండి పతకాలు	కాంస్య పతకాలు	మొత్తం
1	అమెరికా సం.రా	46	29	29	104
2	చైనా	38	27	23	88
3	బ్రిటన్	29	17	19	65
4	రష్యా	24	26	32	82
5	కొరియా	13	8	7	28

పై పట్టిక 2012 ఒలంపిక్ క్రీడలలో మొదటి ఐదుస్థానములలోని దేశములు, అవి గెలుచుకొన్న పతకాల వివరాల గురించి తెలుపుతున్నది.

ఈ విధంగా సమాచారమును సంఖ్యాత్మకంగా, వివరణాత్మకంగా లేక రేఖాచిత్రముల ద్వారా తెలుపు వివరాలను 'దత్తాంశము' అంటారు. దత్తాంశము నుండి వివిధ రకాల వివరాలను తెలుసుకొనవచ్చును. ఉదాహరణకు

- ఏ దేశము అత్యధిక సంఖ్యలో పతకాలను సాధించింది?
- ఏ దేశము అత్యధిక సంఖ్యలో కాంస్య పతకాలను సాధించింది ?
- పై పట్టిక నుండి మరికొన్ని వివరాలను రాబట్టండి.

ప్రయత్నించండి :

ఏవైనా మూడు సంఖ్యాత్మక దత్తాంశములను, మూడు వివరణాత్మక దత్తాంశములను వ్రాయండి.

SCERT, TELANGANA

7.1 కేంద్రీయ స్థాన విలువలు

మనం సాధారణముగా సమాచారాన్ని సేకరించి, విశ్లేషించి ఆ దత్తాంశ స్వరూపం గురించి నిర్ణయానికి వస్తాము. ఆ దత్తాంశాన్ని అవగాహన చేసుకొనడానికి మనకు అంకమధ్యమం, మధ్యగతం మరియు బాహుళకము కనుగొనాల్సి ఉంటుంది. వీటినే కేంద్రీయ స్థాన కొలతలు అంటారు. వీటిని గుర్తు చేసుకొందాం.

7.1.1 అంకగణిత మధ్యమము

ఇది అతి సాధారణముగా ఉపయోగించే కేంద్రస్థాన కొలత. దీనిని సరాసరి, సగటు అని కూడ అంటారు. ఒక దత్తాంశములోని అన్ని రాశుల మొత్తమును రాశుల సంఖ్యచే భాగించగా వచ్చు ఫలితమును అంకగణిత మధ్యమము అంటారు.

ఒక దత్తాంశములోని రాశులు $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots \ldots . x_n$ అయిన ఆ దత్తాంశపు

$$\text{అంకగణిత మధ్యమము} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots\ldots\ldots + x_n}{N}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{N} \text{ (సంక్షిప్తంగా)}$$

> $\sum x_i$ అనగా దత్తాంశంలో గల అన్ని రాశుల (x_i లు) మొత్తము. x_i లో i విలువలు 1 నుండి n వరకు తీసుకొంటాము మరియు N అనేది రాశుల సంఖ్య

ఉదాహరణ 1: ఒక యూనిట్ పరీక్షలో వివిధ విషయములలో అశోక్ సాధించిన మార్కులు ఈ విధంగా ఉన్నవి. 20, 11, 21, 25, 23 మరియు 14. ఈ దత్తాంశమునకు అంకగణిత మధ్యమము ఎంత?

సాధన : దత్తాంశములోని రాశులు = 20, 11, 21, 25, 23, 14

$$\text{అంకగణిత మధ్యమము } \bar{x} = \frac{\sum x_i}{N}$$

$$= \frac{20+11+21+25+23+14}{6} = \frac{114}{6}$$

$$\bar{x} = 19$$

ఉదాహరణ 2: ఒక దత్తాంశములోని 7 రాశుల అంకగణిత మధ్యమము 32. ఆ దత్తాంశమునకు 48 అను మరొక రాశిని కూడగా ఫలిత అంకగణిత మధ్యమము ఎంత?

సాధన :

7 రాశుల అంకమధ్యమము $\bar{x} = 32$

7 రాశుల మొత్తము $\sum x_i = 32 \times 7 = 224$

కలిపిన 8వ రాశి $= 48$

8 రాశుల మొత్తము $\sum x_i = 224 + 48 = 272$

$\therefore$ 8 రాశుల అంకమధ్యమము $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{272}{8} = 34$

ఉదాహరణ 3: ఒక క్లబ్ నందలి 25 మంది సభ్యుల సరాసరి వయస్సు 38 సం||లు అందులో నుండి 42 సం||లు సరాసరి వయస్సు గల 5 మంది సభ్యులు క్లబ్‌ను విడిచి వెళ్ళినచో మిగిలిన సభ్యుల సరాసరి వయస్సు ఎంత?

సాధన : 25 మంది సభ్యుల సరాసరి వయస్సు = 38 సం||లు

SCERT, TELANGANA

మొత్తం 25 మంది వయస్సు	=	38 × 25	=	950
5 మంది సభ్యుల సరాసరి వయస్సు	=	42 సంll		
మొత్తం వయస్సు	=	42 × 5	=	210
మిగిలిన 20 మంది సభ్యుల మొత్తం వయస్సు	$\bar{x}$ =	950 – 210	=	740

$\therefore$ సరాసరి వయస్సు $\bar{x} = \dfrac{x_i}{N} = \dfrac{740}{20} = 37$ సంll

ఉదాహరణ 4: ఒక దత్తాంశములోని 9 రాశుల సగటు 45 అని లెక్కించ బడినది. అట్లు చేయుటలో ఒకరాశి 24 ను 42 గా పొరపాటుగా లెక్కించినచో 9 రాశులు అసలు సగటు ఎంత?

సాధన : 9 రాశుల సగటు = 45

9 రాశుల మొత్తము = 45 × 9 = 405

ఈ మొత్తమును గణించుటలో 24 ను 42 గా పొరపాటుగా తీసుకోవడం జరిగినది. కావున

$\therefore$ 9 రాశుల అసలు మొత్తము = 405 – 42 + 24 = 387

9 రాశుల అసలు సగటు $= \dfrac{x_i}{N} = \dfrac{387}{9} = 43$

పై అంశాలను పరిశీలించగా,

- అంకగణిత మధ్యమము దత్తాంశమంతటికి ప్రాతినిధ్యం వహిస్తుంది.
- ఇది అన్ని రాశుల విలువలపైన, రాశుల సంఖ్యపైన ఆధారపడుతుంది.
- ఇది ఒక దత్తాంశమునకు ఏకైకము.
- దత్తాంశములోని అన్ని రాశులకు ఒక సంఖ్యను కూడినా లేక అన్ని రాశుల నుండి ఒక సంఖ్యను తీసివేసినా ఆ దత్తాంశము యొక్క అంకగణిత మధ్యమం కూడా అదే విధంగా మార్పు చెందుతుంది.
- దత్తాంశములోని అన్ని రాశులను ఒకే సంఖ్యచే గుణించినా లేక భాగించినా ఆ దత్తాంశము యొక్క అంకగణిత మధ్యమము కూడా అదే సంఖ్యచే గుణింపబడుతుంది లేక భాగింపబడుతుంది.

7.1.2 విచలన పద్ధతి ద్వారా అంకగణిత మధ్యమము

ఒక దత్తాంశములో 7, 10, 15, 21, 27 అను ఐదు రాశులు కలవు. ఉపాధ్యాయుడు ఈ దత్తాంశమునకు అంకగణిత మధ్యమమును లెక్కించకుండా అంచనా వేయమని కోరగా కొందరు విద్యార్థులు క్రింది విధంగా చెప్పారు.

కమల్ : ఇది దత్తాంశంలోని అత్యల్ప, అత్యధిక రాశుల మధ్య విలువ 17 అవుతుంది.

నీలిమ : ఇది ఆరోహణ క్రమంలో వ్రాయబడిన దత్తాంశంలో మధ్య విలువ 15 కు సమానం అవుతుంది.

లేఖ్య : ఇది రాశుల మొత్తమును రాశుల సంఖ్యచే భాగించగా వచ్చిన 16 అవుతుంది.

ఈ ఒక్కొక్క అంచనాను "అంచనా వేసిన అంక గణిత మధ్యమము" లేదా "ఊహించిన అంక గణిత మధ్యమము" (Assumed mean) అంటారు. దీనిని 'A' తో సూచిస్తారు..

పై ముగ్గురు విద్యార్థులు చెప్పిన అంకగణిత మధ్యమము లలో ఏది అసలైన అంక గణిత మధ్యమమునకు దగ్గరగా ఉందో పరిశీలిద్దాము.

SCERT, TELANGANA

సందర్భం 1: కమల్ చెప్పిన ఊహించిన అంకగణిత మధ్యమము A = 17

కాని అసలు అంక గణిత మధ్యమము $\bar{x} = \frac{x_i}{N} = \frac{7+10+15+21+27}{5} = \frac{80}{5} = 16$

అన్ని రాశులను ఊహించిన అంకగణిత మధ్యమము (A) నుండి విచలనములతో సూచించినచో

రాశులు	**A**	విచలనాలలో
7	17	7 = 17 – 10
10	17	10 = 17 – 7
15	17	15 = 17 – 2
21	17	21 = 17 + 4
27	17	27 = 17 + 10

$$\bar{x} = \frac{(17-10)+(17-7)+(17-2)+(17+4)+(17+10)}{5}$$

$$= \frac{5\times17}{5} + \frac{-10-7-2+4+10}{5}$$

$$= 17 + \frac{-5}{5} = 17 - 1 = 16$$

∴ అంకగణితమధ్యమము = ఊహించిన అంకగణితమధ్యమం + విచలనముల సరాసరి

సందర్భం 2: నీలిమ చెప్పిన ఊహించిన అంకగణిత మధ్యమము A = 15

అంకగణితమధ్యమము $\bar{x} = \frac{x_i}{N} = \frac{7+10+15+21+27}{5}$

రాశులను విచలనాల రూపంలో వ్రాయగా

$$\bar{x} = \frac{(15-8)+(15-5)+(15-0)+(15+6)+(15+12)}{5}$$

$$= \frac{(5\times15)}{5} + \frac{(-8-5-0+6+12)}{5}$$

$$= 15 + \frac{5}{5} = 15 + 1 = 16$$

సందర్భం 3: లేఖ్య చెప్పిన ఊహించిన అంకగణితమధ్యమము A = 16

అంక గణిత మధ్యమము $\bar{x} = \frac{x_i}{N} = \frac{7+10+15+21+27}{5}$

రాశులను విచలనాల రూపంలో వ్రాయగా

$$\bar{x} = \frac{(16-9)+(16-6)+(16-1)+(16+5)+(16+11)}{5}$$

$$= \frac{(5\times16)}{5} + \frac{(-9-6-1+5+11)}{5}$$

$$= 16 + \frac{0}{5} = 16$$

ప్రయత్నించండి.

పై సందర్భాలకు ఊహించిన అంక మధ్యమము, విచలనాల పట్టికను తయారు చేయండి. విచలనాల సరాసరి ఊహించిన అంక మధ్యమము మరియు నిజమైన అంక గణిత మధ్యమము విలువలను గమనించండి. ఏమి గమనించారు?

[**సూచన :** విచలనాల సరాసరితో పోల్చి చూడండి.]

SCERT, TELANGANA

పై సాధనల నుండి, అన్ని రాశుల విచలనముల మొత్తం (లేక సరాసరి) సున్నకు సమానం అయినప్పుడు, ఊహించిన అంకగణిత మధ్యమమే అసలు అంక గణిత మధ్యమము అవుతుందని తెలియుచున్నది.

ఊహించిన అంక గణిత మధ్యమమును సరిచూచే పద్ధతిని ఉపయోగించి, అంక గణిత మధ్యమమును లెక్కించుట కూడా చేయవచ్చును.

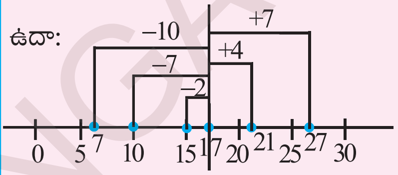
అంకగణిత మధ్యమము = ఊహించిన అంకగణిత మధ్యమము + విచలనముల సరాసరి

$$= \text{ఊహించిన అంకగణిత మధ్యమము} + \frac{\text{విచలనాల మొత్తము}}{\text{రాశుల సంఖ్య}}$$

$$\bar{x} = A + \frac{(x_i - A)}{N}$$

దత్తాంశములోని రాశులకు, ఊహించిన అంక గణిత మధ్యమునకు గల తేడాను విచలనం అంటారు.

ఉదా:



ఊహించిన అంక గణిత మధ్యమం = 17

ఉదాహరణ 5: 10 రాశుల గల దత్తాంశము 14, 36, 25, 28, 35, 32, 56, 42, 50, 62 యొక్క అంకగణిత మధ్యమము 40 అని ఊహించి దత్తాంశము యొక్క అంకగణిత మధ్యమము కనుగొనండి. సాధారణ పద్ధతిలో కూడా లెక్కించండి. ఏమి గమనించారు ?

సాధన : దత్తాంశంలోని రాశులు = 14, 25, 28, 32, 35, 36, 42, 50, 56, 62

ఊహించిన అంకగణిత మధ్యమం A = 40 అనుకొనుము.

$$\therefore \text{ అంకగణిత మధ్యమము} = A + \frac{(x_i - A)}{N}$$

$$\bar{x} = 40 + \frac{(14-40)+(25-40)+(28-40)+(32-40)+(35-40)+(36-40)+(42-40)+(50-40)+(56-40)+(62-40)}{10}$$

$$= 40 + \frac{(-26)+(-15)+(-12)+(-8)+(-5)+(-4)+(2)+(10)+(16)+(22)}{10}$$

$$= 40 + \frac{(-70+50)}{10}$$

$$= 40 - \frac{20}{10}$$

$$= 40 - 2 = 38$$

సాధారణ పద్ధతి ద్వారా అంకగణిత మధ్యమం

$$\bar{x} = \frac{x_i}{N} = \frac{14+25+28+32+35+36+42+50+56+62}{10}$$

$$= \frac{380}{10} = 38$$

పై రెండు పద్ధతుల ద్వారా ఫలితములు సమానం.

పెద్ద సంఖ్యలు లేక దశాంశ సంఖ్యలు రాశులుగా గల దత్తాంశములకు అంకగణిత మధ్యమము కనుగొనుటకు ఈ పద్ధతి అనువుగా ఉంటుంది.

SCERT, TELANGANA

క్రింది ఉదాహరణలు గమనించండి.

ఉదాహరణ 6: ఒక షేరు యొక్క మార్కెట్ విలువ ఒక వారములో క్రింది విధంగా మార్పు చెందినది (రూపాయలలో) 3672, 3657, 3673, 3665, 3668. ఆ వారములో షేర్ యొక్క సరాసరి విలువను కనుగొనండి.

సాధన : దత్తాంశములోని షేర్ విలువలు = 3657, 3665, 3668, 3672, 3673

ఊహించిన అంకగణిత మధ్యమము = 3668

అంకగణిత మధ్యమము $\bar{x} = A + \frac{(x_i - A)}{N}$

$$= 3668 + \frac{(3657-3668)+(3665-3668)+(3668-3668)+(3672-36\text{[redacted]})}{5}$$

$$= 3668 + \frac{(-11-3-0+4+5)}{5} = 3668 + \frac{(-5)}{5} = 3668 - 1 = ₹\ 3667.$$

ప్రయత్నించండి.

1. క్రింది దత్తాంశములకు అంకగణిత మధ్యమాలను అంచనావేసి వ్రాయండి.

   (i) 17, 25, 28, 35, 40

   (ii) 5, 6, 7, 8, 8, 10, 10, 10, 12, 12, 13, 19, 19, 19, 20

   పై సమస్యలను సాధారణ పద్ధతిలో సాధించుట ద్వారా పై సమాధానములను సరిచూడండి.

ప్రాజెక్టు పని :

1. ఇటీవల జరిగిన పరీక్షలలో మీ తరగతిలోని 10 మంది విద్యార్థులు వివిధ విషయాలలో పొందిన మార్కులను సేకరించండి. విషయం వారీగా అంకగణిత మధ్యమములను ఊహించి వ్రాయండి. సాధారణ పద్ధతిలో లెక్కించి, సరిచూడండి. మీరు ఊహించిన అంకగణిత మధ్యమాలు, ఎన్ని లెక్కించిన అంకగణిత మధ్యమాలతో సరిపోలినవో తెల్పండి?

2. మీ తరగతిలోని అందరు విద్యార్థుల ఎత్తులకు ఊహించిన అంకగణిత మధ్యమం వ్రాయండి. మీ వ్యాయామ ఉపాధ్యాయుని రికార్డుల ప్రకారం సరిపోల్చి చూడండి. ఏదైనా తేడాను గమనించారా?

7.1.3 మధ్యగతము

కేంద్ర స్థాన కొలతలలో మధ్యగతము మరొక ప్రముఖ విలువ. ఆరోహణ లేక అవరోహణ క్రమములో వ్రాయబడిన దత్తాంశములో మధ్యన గల రాశి విలువను ఆ దత్తాంశము యొక్క మధ్యగతము అంటారు. అనగా దత్తాంశంలో మధ్యగతము కన్నా ఎక్కువ విలువల రాశులు ఎన్ని ఉన్నవో, తక్కువ విలువ గల రాశులు అన్ని ఉంటాయి.

n రాశులు గల దత్తాంశ విలువలను ఆరోహణ /అవరోహణ క్రమంలో వ్రాయగా

- **n** బేసి సంఖ్య అయిన మధ్యగతము = $\frac{n+1}{2}$ వ రాశివిలువ

SCERT, TELANGANA

- n సరి సంఖ్య అయిన మధ్యగతము = $\frac{n}{2}$ మరియు $\frac{n}{2}+1$ రాశుల సరాసరి.

ఉదాహరణ 7: 14, 36, 25, 28, 35, 32, 56, 42, 50 రాశులు గల దత్తాంశము యొక్క మధ్యగతమును కనుగొనండి.

సాధన : ఆరోహణక్రమములోని రాశులు = 14, 25, 28, 32, 35, 36, 42, 50, 56

రాశుల సంఖ్య n = 9 (బేసిసంఖ్య)

$\therefore$ మధ్యగతము $= \frac{n+1}{2}$ వ రాశి

= 5 వ రాశి = 35

$\therefore$ మధ్యగతము = 35

ఉదాహరణ 8: పై దత్తాంశమునకు మరొక రాశి 61 కలుపగా క్రొత్త దత్తాంశము యొక్క మధ్యగతము ఎంత?

సాధన : రాశులు యొక్క క్రమము = 14, 25, 28, 32, 35, 36, 42, 50, 56, 61

రాశుల సంఖ్య n = 10 (సరిసంఖ్య)

రాశుల సంఖ్య సరిసంఖ్య కావున దత్తాంశము మధ్యలో రెండు రాశులు కలవు.

$\therefore$ మధ్యగతము M = $\frac{n}{2}, \left(\frac{n}{2}+1\right)$ వ రాశుల సరాసరి

= 5, 6 వ రాశుల సరాసరి

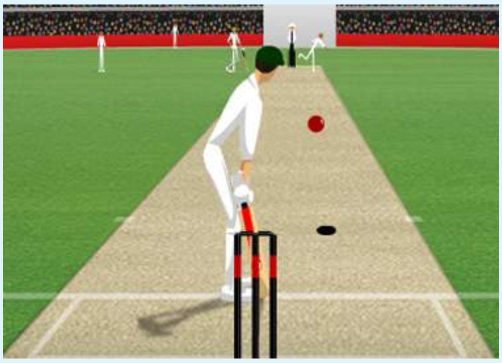
$= \frac{35+36}{2} = 35.5$

ఇది చేయండి :

కొందరు భారతీయ క్రికెట్ ఆటగాళ్ళ ఎత్తులు క్రింది పట్టికలో ఇవ్వబడ్డాయి. ఈ దత్తాంశమునకు మధ్యగతమును కనుగొనండి.

క్రమసంఖ్య	ఆటగాని పేరు	ఎత్తు
1.	వివిఎస్. లక్ష్మణ్	5'11"
2.	పార్థివ్ పటేల్	5'3"
3.	హర్భజన్ సింగ్	6'0"
4.	సచిన్ టెండూల్కర్	5'5"
5.	గౌతమ్ గంభీర్	5'7"
6.	యువరాజ్ సింగ్	6'1"
7.	రాబిన్ ఊతప్ప	5'9"
8.	వీరేంద్ర సెహ్వాగ్	5'8"
9.	జహీర్ ఖాన్	6'0"
10.	ఎం.ఎస్. ధోనీ	5'11"

5' 10" అనగా 5 అడుగుల 10 అంగుళాలు



SCERT, TELANGANA

గమనిక :

- ఆరోహణ / అవరోహణ క్రమంలో వ్రాయబడిన దత్తాంశములోని రాశులలో మధ్యమరాశి విలువయే ఆ దత్తాంశపు మధ్యగతము.
- ఇది దత్తాంశములోని రాశుల సంఖ్యపై మరియు క్రమంగా వ్రాయబడిన దత్తాంశంలో మధ్యమ రాశుల విలువలపై మాత్రమే ఆధారపడుతుంది. కానీ అత్యల్ప అత్యధిక విలువలపై ఆధారపడదు.

ప్రయత్నించండి :

1. 24,65,85,12,45,35,15 ల యొక్క మధ్యగతము కనుగొనండి.
2. x, $2x$, $4x$ రాశుల మధ్యగతము 12 అయిన ఆ రాశుల సరాసరి ఎంత?
3. 24, 29, 34, 38, x అను దత్తాంశము యొక్క మధ్యగతము 29 అయిన x విలువ
   (i) $x > 38$ (ii) $x < 29$ (iii) 29, 34 ల మధ్య (iv) ఏదీకాదు.

7.1.4 బాహుళకము

ఒక తరగతిలోని విద్యార్థులు ఇష్టపడే ఏకరూప దుస్తులు (uniform) రంగు ఏది? అత్యధికంగా అమ్ముడయ్యే రెడీమేడ్ దుస్తుల పరిమాణం (size) ఏది? ... మొదలగు వివరాలు రాబట్టుటకు బాహుళకము అను కేంద్ర స్థాన కొలతను ఉపయోగిస్తారు. క్రింది ఉదాహరణలను పరిశీలించండి.

ఉదాహరణ 9: ఒక చెప్పుల దుకాణంలో ఒక వారములో అమ్మబడిన బూట్ల కొలతలు అంగుళాలలో 7, 9, 10, 8, 7, 9, 7, 9, 6, 3, 5, 5, 7, 10, 7, 8, 7, 9, 6, 7, 7, 7, 10, 5, 4, 3, 5, 7, 8, 7, 9, 7. అయితే తరువాత వారము అమ్మకానికై ఏ కొలత బూట్లు ఎక్కువ సంఖ్యలో సిద్ధపరుచుకొనవలెను.

సాధన : దత్తాంశములోని రాశులను ఆరోహణ క్రమములో వ్రాయగా

3, 3, 4, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 9, 9, 9, 9, 9, 10, 10, 10.

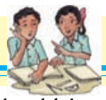
పై దత్తాంశము పరిశీలించగా 7 (అంగుళాలు) అను పరిమాణము ఎక్కువసార్లు పునరావృతము అవుతుంది. కావున దత్తాంశము యొక్క బాహుళకము 7 అనగా వచ్చే వారము అమ్మకమునకై 7 (అంగుళాలు) పరిమాణం గల బూట్లను ఎక్కువగా సిద్ధపరచుకోవాలి.

ఉదాహరణ 10: ఒక రక్తదాన శిబిరంలో రక్తదానం చేసిన 50 మంది దాతల రక్తము గ్రూపులు ఈ విధంగా ఉన్నవి A, AB, B, A, O, AB, O, O, A, AB, B, A, O, AB, O, O, A, B, A, O, AB, O, O, A, AB, B, O, AB, O, B, A, O, AB, O, O, A, AB, B, A, O, AB, O, A, AB, B, A, O, AB, O, O. ఈ దత్తాంశమునకు బాహుళకము కనుగొనండి.

సాధన: దత్తాంశమును పరిశీలించినపుడు A గ్రూపు దాతల సంఖ్య 12, B గ్రూపు దాతల సంఖ్య 7, AB గ్రూపు దాతల సంఖ్య = 12, O గ్రూపు దాతల సంఖ్య = 19

$\therefore$ ఇచ్చిన దత్తాంశము యొక్క బాహుళకము = 'O' గ్రూపు.

ఆలోచించండి, చర్చించండి మరియు వ్రాయండి.



ఒక దత్తాంశము యొక్క బాహుళకమునకు సమానమైన రాశులను కొన్నింటిని చేర్చగా దత్తాంశపు బాహుళకము ఎట్లు మారును?

SCERT TELANGANA

గమనిక :

- ఒక దత్తాంశములో ఎక్కువసార్లు పునరావృతమగు రాశిని బాహుళకము అంటారు.
- ఇది దత్తాంశములోని రాశుల సంఖ్యపై గానీ, ప్రతిరాశి విలువపై గాని ఆధారపడదు.
- సంఖ్యాత్మక, వివరణాత్మక దత్తాంశములు, రెండింటిని విశ్లేషణ చేయుటలో బాహుళకమును ఉపయోగిస్తారు.
- కొన్ని దత్తాంశములకు ఒకటి కన్నా ఎక్కువ బాహుళకములు ఉండవచ్చు. కొన్నింటికి ఒక్క బాహుళకము కూడా లేక పోవచ్చును.

అభ్యాసము - 7.1

1. ఒక దుకాణంలో వారంలో జరిగిన అమ్మకాలు రోజువారిగా ఇవ్వబడ్డాయి. వాటి అంకగణిత మధ్యమము కనుగొనండి.
   ₹10000, ₹ 10250, ₹ 10790, ₹ 9865, ₹ 15350, ₹ 10110
2. 10.25, 9, 4.75, 8, 2.65, 12, 2.35 రాశుల అంకగణిత మధ్యమమెంత ?
3. 8 రాశుల అంకగణిత మధ్యమము 25. వాని నుండి 11 అను రాశిని తొలగించగా మిగిలిన రాశుల అంకగణిత మధ్యమమును కనుగొనండి.
4. 9 రాశుల అంకగణిత మధ్యమము 38 గా లెక్కింపబడినది. కానీ అట్లు లెక్కించుటలో 72 ను 27 గా పొరపాటుగా తీసుకున్నారు. అయిన సరియైన అంకగణిత మధ్యమమును లెక్కించండి.
5. ఐదు సంవత్సరముల క్రిందట ఒక కుటుంబ సభ్యుల సరాసరి వయస్సు 25 సం॥లు ప్రస్తుతము ఆ కుటుంబసభ్యుల సరాసరి వయస్సు ఎంత? (సభ్యుల సంఖ్యలో మార్పులేదు)
6. రెండు సం॥ల క్రిందట ఒక సమూహములోని 40 మంది వయస్సుల సగటు వయస్సు 11 సం॥లు ప్రస్తుతము ఆ సమూహము నుండి ఒక వ్యక్తి బయటకు వెళ్ళిపోగా మిగిలిన సభ్యుల సగటు వయస్సు 12 సం॥లు. అయిన వెళ్ళిపోయిన వ్యక్తి వయస్సు ఎంత?
7. ఒక దత్తాంశములోని 5, 8, 10, 15, 22 అనురాశుల యొక్క అంకగణిత మధ్యమము నుండి వాని విచలనాల మొత్తమును కనుగొనండి.
8. 20 రాశుల సరాసరి నుండి వాని విచలనాల మొత్తము 100 అయిన, విచనలముల సరాసరి ఎంత?
9. ఒక యూనిట్ పరీక్షలో 12 మంది విద్యార్థులు సాధించిన మార్కులు 4, 21, 13, 17, 5, 9, 10, 20, 19, 12, 20, 14 అయిన ఒక విలువను ఊహించిన అంకగణిత మధ్యమంగా తీసుకొని దత్తాంశమునకు అంకగణిత మధ్యమమును కనుగొనండి. మరియొక సంఖ్యను ఊహించిన అంకగణిత మధ్యమంగా తీసుకొని మరలా సరాసరిని కనుగొండి. రెండు సార్లు సమాన ఫలితాలు వచ్చినవా? మీ అభిప్రాయం ఏమిటి?
10. ఒక తరగతిలో 10 మంది విద్యార్థుల మార్కుల సరాసరి 15 (25 మార్కులకు). వారిలో కరిష్మా అనే విద్యార్థి మిగిలిన 9 మంది విద్యార్థులను అడిగి తన కన్నా ఎన్ని మార్కులు ఎక్కువ లేక తక్కువ అనే వివరాలను సేకరించింది. ఆ విచలనాలు $-8, -6, -3, -1, 0, 2, 3, 4, 6$. అయిన ఆమెకు వచ్చిన మార్కులెన్ని?
11. 25 అను విలువ నుండి ఒక దత్తాంశములోని n రాశుల విచలనముల మొత్తము 25 మరియు 35 అను విలువ నుండి అవే రాశుల విచలనాల మొత్తం - 25 అయిన ఆ దత్తాంశము యొక్క అంకగణిత సగటు ఎంత?
12. 3.3, 3.5, 3.1, 3.7, 3.2, 3.8 రాశుల యొక్క మధ్యగతము ఎంత?
13. ఆరోహణక్రమములో నున్న రాశులు $10, 12, 14, x - 3, x, x+2, 25$ ల మధ్యగతము 15 అయిన x విలువ ఎంత?
14. 10, 12, 11, 10, 15, 20, 19, 21, 11, 9, 10 రాశుల యొక్క బాహుళకము ఎంత?.

SCERT TELANGANA

15. కొన్ని రాశుల బాహుళకము x, దత్తాంశములోని అన్ని రాశుల నుండి 3 తీసివేయగా, క్రొత్త దత్తాంశమునకు బాహుళకము ఎంత?
16. 1 నుండి 100 వరకు సహజ సంఖ్యలను వ్రాయుటలో ఉపయోగించు అంకెలన్నింటి యొక్క బాహుళకము ఎంత?.
17. ఒక దత్తాంశములోని రాశులు 5, 28, 15, 10, 15, 8, 24. నాలుగు రాశులను కలుపగా దత్తాంశము యొక్క సరాసరి, మధ్యగతములో మార్పులేదు కానీ బాహుళకము 1 పెరిగినది. అయిన కలిపిన 4 సంఖ్యలేవి.
18. $x_1, x_2, ..., ..., x_{10}$ రాశుల సరాసరి 20. అయిన $x_1 + 4, x_2 + 8, x_3 + 12, ..., x_{10} + 40$ రాశుల సరాసరి కనుగొనుము.
19. 9 పూర్ణసంఖ్యల జాబితాలో 6 పూర్ణసంఖ్యలు 7, 8, 3, 5, 9 మరియు 5 లు అయిన ఆ 9 పూర్ణసంఖ్యలకు గల గరిష్ఠ మధ్యగతము కనుగొనండి?
20. 9 వేర్వేరు రాశుల మధ్యగతము 20. అందు గల నాలుగు మిక్కిలి పెద్ద సంఖ్యలకు ప్రతి రాశికి 2 కలపగా వచ్చు కొత్త రాశుల మధ్యగతము కనుగొనండి.

7.2 దత్తాంశ నిర్వహణ; వర్గీకృత దత్తాంశము

తక్కువ రాశుల గల దత్తాంశమును గణన చిహ్నాలు వినియోగిస్తూ ఎట్లు సూక్ష్మరూపములో అమర్చవచ్చునో క్రింది తరగతులలో నేర్చుకొని ఉన్నాము. కానీ ఎక్కువ రాశులు ఉన్నప్పుడు దత్తాంశమును ఎట్లు నిర్వహించవలెను (అమర్చవలెను) అని పరిశీలించుదాం. క్రింది ఉదాహరణను గమనించండి.

ఒక గృహ నిర్మాణ సంస్థ ఉద్యోగుల కొరకు వారివారి ఆదాయములకు అనుగుణంగా ఇండ్లు నిర్మించి ఇవ్వవలెనని ప్రణాళిక చేస్తున్నది. అందుకొరకై ఇండ్లు కావాలనుకొన్న 100 మంది ఉద్యోగుల నెలసరి ఆదాయములను సేకరించగా అవి (రూపాయలలో) 15000, 15750, 16000, 16000,16050, 16400, 16600, 16800, 17000, 17250, 17250................. 75000.

ఈ దత్తాంశములోని 100 రాశులు ₹ 15000 నుండి ₹ 75000 మధ్యన విస్తరించి ఉన్నవి. ఎక్కువ రాశులు ఉన్నప్పుడు ఈ రాశులకు పౌనఃపున్య విభాజనము తయారు చేసినా అది పెద్ద పట్టిక అవుతుంది.

అందువల్ల దత్తాంశములోని రాశులను కొన్ని అనువైన సమూహములుగా విభజించుకొని అనగా ఆదాయ సమూహాలు ₹10001 నుండి 20000, ₹ 20001 నుండి 30000, . . . , వరకు

₹ 70001 నుండి 80000 వరకు విభజించుకొని పౌనఃపున్య విభాజన పట్టిక తయారు చేయుట అనువుగా ఉంటుంది. ఇటువంటి సమూహములను 'తరగతి అంతరం' అంటారు. ఉదాహరణకు 10001 – 20000 ఒక తరగతి అంతరం, ఈ సమూహములోని రాశులు 10001 నుండి 20000 వరకు విలువలు కలిగి ఉంటాయి. ఇందులో 10001 ని 'దిగువ అవధి' అని 20000 ని 'ఎగువ అవధి' అని అంటారు. దిగువ, ఎగువ అవధులు రెండూ 'తరగతి అంతరాని' కి చెందుతాయి కావున దీనిని 'విలీన తరగతి అంతరం' (Inclusive class inverval) అంటారు.

7.2.1 వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనము; అవగాహన

ఉదాహరణ 11: గణిత పరీక్షలో 30 మంది విద్యార్థుల మార్కులు ప్రక్క పట్టికలో ఇవ్వబడ్డాయి. అయిన

(i) దత్తాంశం ఎన్ని తరగతులుగా విభజింపబడినది?

వ. సం.	మార్కులు	విద్యార్థుల సంఖ్య
1	0 – 5	5
2	5 – 10	7
3	10 – 15	10
4	15 – 20	6
5	20 – 25	2

SCERT, TELANGANA

(ii) మూడవ తరగతి అంతరంలో ఎంతమంది విద్యార్థులు కలరు?

(iii) 10 మార్కులు పొందిన విద్యార్థి ఏ తరగతి అంతరంలో ఉంటాడు ?

(iv) 4 వ తరగతి అంతరంలోని 6 మంది విద్యార్థుల మార్కులు ఎన్నెన్ని?

(v) 5 వ తరగతి అంతరంలోని ఇద్దరు విద్యార్థుల మార్కులు ఒక్కొక్కరివి ఎంతెంత?

సాధన:

(i) ఈ దత్తాంశం 5 తరగతి అంతరాలుగా విభజించబడినది.

(ii) మూడవ తరగతి అంతరంలో 10 మంది విద్యార్థులు కలరు.

(iii) ఇచ్చట 10 రెండవ తరగతి అంతరం యొక్క ఎగువ అవధి మరియు మూడవ తరగతి అంతరం యొక్క దిగువ అవధి, ఇటువంటి సందర్భములలో ఎగువ అవధి తరగతికి చెందదు మరియు ఈ తరగతులను 'మినహాయింపు తరగతులు' అంటారు. కావున 10 మార్కులు మూడవ తరగతి అంతరంకు చెందుతుంది.

(iv) నాల్గవ తరగతి అంతరంలోని 6 మంది మార్కులు 15 నుండి 20లోపు విస్తరించి ఉంటాయి.

(v) ఒక్కొక్క విద్యార్థి మార్కులను (విలువలను) ఈ విభాజన పట్టిక నుండి కనుగొనలేము. అవి 20 నుండి 25 మధ్యలో ఉండవచ్చు.

ఇవి చేయండి :

ఒక అపార్ట్‌మెంట్ భవన సముదాయంలోని 90 మంది వ్యక్తుల వయస్సులు ప్రక్క వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనము నందు ఇవ్వబడ్డాయి. ఈ దత్తాంశమునుండి క్రింది ప్రశ్నలకు జవాబివ్వండి.

వయస్సు	వ్యక్తుల సంఖ్య
1 – 10	15
11 – 20	14
21 – 30	17
31 – 40	20
41 – 50	18
51 – 60	4
61 – 70	2

(i) దత్తాంశము ఎన్ని తరగతులుగా విభజింపబడినది ?

(ii) 21-30 తరగతిలో ఎంత మంది కలరు?

(iii) ఏ తరగతి వయస్సు వారు ఎక్కువ మంది కలరు?

(iv) చివరి తరగతిలోని ఇద్దరి వయస్సులు 61, 70 లేదా మరి ఏదైనా వయస్సువారిని చెప్పవచ్చా?

7.2.2 అవధులు మరియు హద్దులు

కొంతమంది విద్యార్థుల మార్కుల దత్తాంశమునకు వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనమును నిర్మిస్తున్నాము అనుకుందాము. తరగతులు 1-10, 11-20 ,...... ఉండి, ఒక విద్యార్థి మార్కులు 10.5 అయిన అది 1-10 లేదా 11-20 తరగతికి చెందుతుందా? చెందదు. కనుక ఇటువంటి సందర్భములో అవధులను కాకుండా 'నిజ తరగతి అవధులు' లేక 'హద్దులను" ఉపయోగిస్తాము.

SCERT TELANGANA

తరగతి హద్దులు	
అవధులు	హద్దులు
1 – 10	0.5 - 10.5
11 – 20	10.5 – 20.5
21 – 30	20.5 – 30.5
31 – 40	30.5 – 40.5

ప్రక్క పట్టికలోని తరగతి అంతరాలను పరిగణించండి.

- ఒక తరగతి యొక్క ఎగువ అవధి మరియు తరువాత తరగతి యొక్క దిగువ అవధుల సరాసరియే మొదటి తరగతి యొక్క ఎగువ హద్దు, రెండవ తరగతి యొక్క దిగువ హద్దు అవుతుంది. అనగా 10, 11 ల సరాసరి; $\frac{10+11}{2}$ = 10.5 ఎగువ హద్దు అవుతుంది.
- ఇప్పుడు 0.5 నుండి 10.5 లోపు (10.5 తప్ప) అన్ని రాశులు మొదటి తరగతికి చెందుతాయి. 10.5 నుండి 20.5 లోపు (20.5 తప్ప) రాశులన్ని 11-20 తరగతికి చెందుతాయి. అనగా 11-20 తరగతి హద్దులు 10.5 నుండి 20.5 అందువలన 10.5 అనేది 11-20 తరగతికి చెందును.
- మొదటి తరగతి కన్నా ముందు ఒక తరగతిని ఊహించి దాని ఎగువ అవధి సహాయంతో (సాధారణంగా '0' ఉంటుంది) మొదటి తరగతి యొక్క దిగువ హద్దును లెక్కించాలి. అనగా 0, 1 ల సరాసరి $\frac{0+1}{2} = 0.5$ అదే విధంగా చివరి తరగతి తరువాత తరగతి యొక్క దిగువ అవధి సహాయంతో చివరి తరగతి యొక్క ఎగువ హద్దును లెక్కిస్తారు. అనగా 40, 41 ల సరాసరి $\frac{40+41}{2} = 40.5$ ఇదే చివరి తరగతి ఎగువ హద్దు. ఈ హద్దులను తరగతి యొక్క 'నిజ అవధులు' అని కూడా అంటారు.

క్రింది తరగతుల అవధులు మరియు హద్దులను పరిశీలించండి.

తరగతి అంతరాలు (విలీన తరగతులు)	అవధులు		హద్దులు	
	దిగువ అవధి	ఎగువ అవధి	దిగువ హద్దు	ఎగువ హద్దు
1-10	1	10	0.5	10.5
11-20	11	20	10.5	20.5
21-30	21	30	20.5	30.5

తరగతి అంతరాలు (మినహాయింపు తరగతులు)	అవధులు		హద్దులు	
	దిగువ అవధి	ఎగువ అవధి	దిగువ హద్దు	ఎగువ హద్దు
0-10	0	10	0	10
10-20	10	20	10	20
20-30	20	30	20	30

పై పట్టికలను పరిశీలించినట్లయితే విభాజిత శ్రేఢి (విలీన తరగతులు) లో, తరగతి అవధులు, హద్దులు వేరు వేరుగా ఉంటాయి. అవిభాజత శ్రేఢిలో (మినహాయింపు తరగతులు) తరగతి అవధులు, హద్దులు సమానం అని తెలియుచున్నది.

SCERT, TELANGANA

ఒక తరగతి యొక్క ఎగువ, దిగువ హద్దుల యొక్క భేదమును 'తరగతి అంతరము' లేక 'తరగతి పొడవు' అంటారు. దీని 'C' తో సూచిస్తారు.

ఇవి చేయండి.

1. ఒక తరగతిలోని 30 మంది విద్యార్థులు దుమికిన దూరాలు ఈ విధంగా ఉన్నవి.

దూరము (సెం.మీ.లతో)	101 – 200	201 – 300	301 – 400	401 – 500	501 – 600
విద్యార్థుల సంఖ్య	4	7	15	3	1

I. ఇచ్చిన తరగతి అంతరాలు విలీన తరగతి అంతరాలా ? మినహాయింపు తరగతి అంతరాలా?

II. రెండవ తరగతి అంతరంలో ఎంతమంది విద్యార్థులు కలరు?

III. 3.01మీ లేక అంతకన్నా ఎక్కువ దూరం దుమికిన వారెందరు ?

IV. 4.005 మీ దూరం దుమికిన విద్యార్థి ఏ తరగతికి చెందుతాడు ?

2. పై దత్తాంశములోని తరగతులకు హద్దులు వ్రాయండి.

3. పై దత్తాంశములోని ఒక్కొక్క తరగతి అంతరమెంత?

7.2.3 వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజన పట్టికను నిర్మించుట

మొదటి సంగ్రహణాత్మక పరీక్షలో గణితములో 50 మంది విద్యార్థులు సాధించిన మార్కులు క్రింది విధంగా ఉన్నవి. 31, 14, 0, 12, 20, 23, 26, 36, 33,41, 37,25, 22, 14,3, 25, 27, 34, 38, 43, 32, 22, 28, 18, 7, 21, 20, 35, 36, 45, 9, 19, 29, 25, 33, 47, 35, 38, 25, 34, 38, 24, 39, 1, 10, 24, 27, 25, 18, 8.

ఇప్పుడు ఇచ్చిన దత్తాంశమును ఎన్ని తరగతులుగా విభజించాలి? దత్తాంశం లోని రాశులను తరగతుల వారీగా ఎట్లు విభజించవలెను ? ఇవి తెలుసుకోవడానికై క్రింది సోపానములను పరిశీలించండి.

సోపానం1: దత్తాంశము యొక్క వ్యాప్తిని కనుగొనండి.

వ్యాప్తి = గరిష్ఠరాశి – కనిష్ఠ రాశి

= 47 – 0 = 47

సోపానం 2: విభజించవలసిన తరగతుల సంఖ్యను నిర్ణయించుకోవలెను (సాధారణంగా 5 నుండి 8 తరగుతులుగా విభజిస్తాము)

తరగతుల సంఖ్య = 6 అయిన

తరగతి అంతరము = $\frac{47}{6}$ 8 (సుమారుగా)

తరగతుల (మార్కులు)	గణన చిహ్నాలు	పౌనఃపున్యం
0 – 7	||||	4
08 – 15	卌 |	6
16 – 23	卌 ||||	9
24 – 31	卌 卌 |||	13
32 – 39	卌 卌 ||||	14
40 – 47	||||	4

SCERT TELANGANA

సోపానం 3: దత్తాంశములోని కనిష్ట రాశితో ప్రారంభించి, లెక్కించిన తరగతి అంతరం ఉండునట్లుగా సమ్మిళిత తరగతులను వరుసగా వ్రాయవలెను. అనగా 0-7 ,8-15, 16-23 .....

సోపానం 4: గణన చిహ్నాలను వినియోగిస్తూ ఒక్కొక్క తరగతికి చెందు రాశులను గుర్తిస్తూ దత్తాంశమును విభజించాలి.

సోపానం 5: ఒక్కొక్క తరగతిలోని గణన చిహ్నాలను లెక్కించి ఆ తరగతి పౌనఃపున్యముగా వ్రాయాలి.

పై దత్తాంశమునకు మినహాయింపు తరగతులు ఉపయోగించి పౌనఃపున్య పట్టిక తయారు చేయండి.

ఆలోచించండి, చర్చించండి మరియు వ్రాయండి.

1. క్రింది రాశుల దత్తాంశమునకు పౌనఃపున్య విభాజన పట్టికను వ్రాయండి. 1, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 7, 7.
2. క్రింది సంఖ్యల దత్తాంశమునకు పౌనఃపున్య విభాజన పట్టికను వ్రాయండి.
   2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 9, 11, 12, 12, 13, 13, 13, 14, 14, 14, 15, 16, 17, 18, 18, 19, 20, 20, 21, 22, 24, 24, 25. (**సూచన :** విలీన తరగతులను తీసుకోండి.)
3. పై రెండు దత్తాంశములలో బేధమేమి? వాని పౌనఃపున్య విభాజనములను ఏమంటారు?
4. పై సమస్యల యొక్క పౌనఃపున్య విభాజన పట్టికలలో దేని నుండి మరలా దత్తాంశము లోని రాశులను విడివిడిగా వ్రాయగలము ?

7.2.4 వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనము యొక్క లక్షణాలు

1. ఇది దత్తాంశమును కొన్ని అనువైన చిన్నచిన్న సమూహాలుగా (తరగతులుగా) విభజిస్తుంది.
2. 5-10 అను తరగతిలో 5 ను తరగతి యొక్క దిగువ అవధి అని 10 ని ఎగువ అవధి అంటారు.
3. 1-10, 11-20, 21-30 .... వంటి తరగతులలో ప్రతి తరగతి యొక్క ఎగువ దిగువ అవధులు రెండును అదే తరగతికి చెందుతాయి. కావున వీటిని సమ్మిళిత తరగతులు అంటారు.
4. 0-10, 10-20, 20-30 ... వంటి తరగతులలో ప్రతి తరగతి యొక్క దిగువ అవధి అదే తరగతికి చెందుతుంది. కానీ ఎగువ అవధి చెందదు. కావున వీటిని మినహాయింపు తరగతులు అంటారు.
5. ఒక తరగతి యొక్క ఎగువ అవధి, తరువాత తరగతి యొక్క దిగువ అవధుల సరాసరి మొదటి తరగతి యొక్క ఎగువ హద్దు అవుతుంది. అదే రాశి తరువాత తరగతి యొక్క దిగువ హద్దు అవుతుంది.
6. మినహాయింపు తరగతులలో అవధులు, హద్దులు సమానములు కానీ సమ్మిళిత తరగతులలో అవధులు, హద్దులు సమానము కాదు.
7. ఒక తరగతి యొక్క ఎగువ, దిగువ హద్దుల బేధమును ఆ తరగతి యొక్క 'అంతరము' లేక 'పొడవు' (C) అంటారు.
8. ఈ పట్టిక నుంచి అన్ని రాశులను విడివిడిగా వ్రాయలేము. అందువల్ల ఒక తరగతిలోని ప్రతి రాశి యొక్క విలువ ఆ తరగతి యొక్క దిగువ, ఎగువ హద్దుల సరాసరికి సమానంగా తీసుకొంటారు. ఈ సరాసరిని 'తరగతి మార్కు' లేక 'తరగతి మధ్యవిలువ' (x) అంటారు.

SCERT, TELANGANA

ఉదాహరణ 12: మార్చి 2010, SSC పరీక్షలలో గణితంలో 30 మంది విద్యార్థులు సాధించిన మార్కుల శాతములు క్రింది విధంగా ఉన్నవి.

45, 56, 75, 68, 35, 69, 98, 78, 89, 90, 70, 56, 59, 35, 46, 47, 13, 29, 32, 39, 93, 84, 76, 79, 40, 54, 68, 69, 60, 59. పై దత్తాంశమునకు వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనమును తయారుచేయండి. 0 – 34 ఉత్తీర్ణులు కాని వారు, 35 – 49 మూడవ శ్రేణిలో ఉత్తీర్ణుయినవారు 50 – 60 రెండవ శ్రేణిలో ఉత్తీర్ణులయిన వారు, 60 – 74 మొదటి శ్రేణిలో ఉత్తీర్ణులయినావారు, 75 – 100 విశిష్ట శ్రేణిలో ఉత్తీర్ణులయినవారు అను తరగతులుగా విభజించండి.

సాధన: సమస్య నందే తరగతులు కూడా సూచించబడ్డాయి కావున

సోపానం 3: తరగతులు ఇచ్చిన విధంగా రాయాలి.

సోపానం 4: ఇచ్చిన తరగతులు సమ్మిళిత తరగతులు కావున ఎగువ, దిగువ అవధులు రెండునూ తరగతికి చెందుతాయి అని గుర్తించండి. గణన చిహ్నాలను ఉపయోగించి దత్తాంశము లేని రాశులను విభజించి గుర్తించండి.

సోపానం 5: ప్రతి తరగతిలో గణన చిహ్నాలను లెక్కించి ఆ తరగతి యొక్క పౌనఃపున్యంగా వ్రాయండి.

తరగతులు (మార్కులు)	గణన చిహ్నాలు	పౌనఃపున్యం (విద్యార్థుల సంఖ్య)
0 – 34	|||	3
35 – 49	~~||||~~ ||	7
50 – 59	~~||||~~	5
60 – 74	~~||||~~ |	6
75 – 100	~~||||~~ ||||	9

(**గమనిక :** తరగతి అంతరాల పొడవులు సమానంగా లేవని గమనించవచ్చు).

ఉదాహరణ 13: క్రింది వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనము నందు తరగతి మార్కులు ఇవ్వబడ్డాయి. వాటి నుండి తరగతులను వ్రాయండి.

తరగతి మార్కులు	7	15	23	31	39	47
పౌనఃపున్యం	5	11	19	21	12	6

సాధన : తరగతి మార్కు అనగా తరగతి మధ్య విలువ, దిగువ ఎగువ హద్దుల సరాసరి. కావున సమాన తరగతి అంతరాలు గల తరగతులలో వరుస తరగతి మార్కుల మధ్య (సరాసరి) వరుస హద్దులు ఉంటాయి.

సోపానం 1: వరుస తరగతి మార్కుల మధ్య బేధమును కనుక్కోండి $h = 15 - 7 = 8$.

(ప్రతి రెండు వరుస తరగతుల మార్కుల బేధము సమానమేనా?)

సోపానం 2: ఒక్కొక్క తరగతి మార్కు 'x' అయిన ఆ తరగతి హద్దులు $x - h/2$, $x + h/2$ అని లెక్కించండి.

మొదటి తరగతి దిగువ హద్దు $= 7 - \frac{8}{2} = 3$

ఎగువ హద్దు $= 7 + \frac{8}{2} = 11$

ఇదే విధంగా మిగిలిన తరగతులను వ్రాయవలెను.

SCERT TELANGANA

తరగతి మార్కు	తరగతి అంతరాలు	పౌనఃపున్యము
7	(7 – 4) – (7 + 4) = 03 – 11	5
15	(15 – 4) – (15 + 4) = 11 – 19	11
23	(23 – 4) – (23 + 4) = 19 – 27	19
31	(31 – 4) – (31 + 4) = 27 – 35	21
39	(39 – 4) – (39 + 4) = 35 – 43	12
47	(47 – 4) – (47 + 4) = 43 – 51	6

7.3 సంచిత పౌనఃపున్యము

ఒక పోటీ పరీక్షలో 1000 మంది అభ్యర్థులు పాల్గొనగా వారి ఉత్తీర్ణతా వివరాలను ప్రక్క పటములో వలె నోటీసు బోర్డు ప్రకటించినారు. ఈ బోర్డును పరిశీలిస్తున్న ఇద్దరు అభ్యర్థుల మధ్య సంభాషణ గమనించండి.

తరగతి అంతరం (మార్కులు)	విద్యార్థుల సంఖ్య
0 – 10	25
10 – 20	45
20 – 30	60
30 – 40	120
40 – 50	300
50 – 60	360
60 – 70	50
70 – 80	25
80 – 90	10
90 – 100	5

శరత్ : పరీక్షకు ఎంత మంది అభ్యర్థులు పోటీపడ్డారు?

శంకర్: ఈ సమాచారం ప్రకారం 1000 మంది పోటీ పరీక్షను వ్రాసారు.

శరత్ : ఇది చూసావా ? 50 నుండి 60 లోపు మార్కులు సాధించిన వారే 360 మంది ఉన్నారు.

శంకర్: ఆహా! ఉత్తీర్ణతా మార్కులు 60 గా నిర్ణయిస్తే ఎంతమందికి ఇంటర్వ్యూ కొరకు పిలువు వస్తుందనుకొంటున్నావు ?

శరత్ : అంటే, 60 మార్కులు, అంతకన్నా ఎక్కువ మార్కులు సాధించిన వారు ఎంతమంది అభ్యర్థులు అని నీ ఉద్దేశ్యమా?

శంకర్ : అవును, గమనిస్తే 50 + 25 + 10 + 5, అంటే 90 మందికి ఇంటర్వ్యూ కొరకు పిలుపు వస్తుంది కదా.

శరత్ : కానీ 105 ఖాళీలను భర్తీ చేయాలి కదా, అంటే 50 మార్కులను ఉత్తీర్ణతా మార్కులుగా తీసుకుంటారో ఏమో.

శంకర్: అయితే, 360 + 50 + 25 + 10 + 5 అయితే 450 మంది అభ్యర్థులకు ఇంటర్వ్యూ కొరకు పిలువు రావచ్చును.

అదే విధంగా మనము కూడా మరికొన్ని అంచనాలను చేయవచ్చును.

90 మార్కులు లేక అంతకన్నా ఎక్కువ మార్కులు సాధించిన అభ్యర్థులు (దిగువ హద్దు) = 5

9వ తరగతి అంతరం దిగువ హద్దుకు సమానం లేక ఎక్కువ మార్కులు సాధించిన వారు = 10 + 5 = 15

8వ తరగతి అంతరం దిగువ హద్దుకు సమానం లేక ఎక్కువ మార్కులు సాధించిన వారు = 25 + 15 = 40

7వ తరగతి అంతరం దిగువ హద్దుకు సమానం లేక ఎక్కువ మార్కులు సాధించిన వారు = 50 + 40 = 90

SCERT, TELANGANA

ఈ ఫలితాలన్నీ ఎగువ నుండి ఆయా తరగతుల వరకు ఉండే మొదటి లేదా చివరి తరగతి నుండి వరుస పౌనఃపున్యముల మొత్తమునకు సమానం. కావున వీటిని సంచిత పౌనఃపున్యము అంటారు. చివరి తరగతి నుండి ఒక నిర్దుష్ట దిగువ హద్దు కలిగిన తరగతి వరకు వచ్చే వరుస పౌనఃపున్యాల మొత్తమును అవరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యములు (అ.స.పౌ) అంటారు. దత్తాంశములోని అన్ని తరగతులకు ఈ సంచిత పౌనఃపున్యములను ఎట్లు వ్రాయవచ్చునో పరిశీలిద్దాము.

1. చివరి తరగతి యొక్క పౌనఃపున్యమును ఆ తరగతి యొక్క అవరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యముగా తీసుకొనవలెను.
2. 9వ తరగతి అంతరం యొక్క పౌనఃపున్యమును 10వ తరగతి అంతరం యొక్క అవరోహణ సంచిత పౌనఃపున్య ను కలుపగా 9వ తరగతి అంతరం యొక్క అవరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యము అవుతుంది.
3. ఇదే విధంగా వరుసగా క్రింది తరగతులకు అవరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యములను వ్రాయవచ్చును.

తరగతులు (మార్కులు)	దిగువ హద్దు	పౌనఃపున్యము (అభ్యర్థుల సంఖ్య)	అవరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యం
0 – 10	0	25	25+975 = 1000
10 – 20	10	45	45+930 = 975
20 – 30	20	60	60+870 = 930
30 – 40	30	120	120+750 = 870
40 – 50	40	300	300+450 = 750
50 – 60	50	360	360+ 90 = 450
60 – 70	60	50	50 + 40 = 90
70 – 80	70	25	25 + 15 = 40
80 – 90	80	10	10 + 5 = 15
90 – 100	90	5	5

ఒక పౌనఃపున్య విభాజనంలో తరగతుల యొక్క దిగువ హద్దులతో మరియు ఆయా తరగతుల అవరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యములచే సూచించినట్టి విభాజనాన్ని అవరోహణ సంచిత పౌనఃపున్య విభాజనము అంటారు.

ఒక విధంగా కొన్ని సందర్భాలలో ఇందుకు వ్యతిరేకముగా ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యము లెక్కించవలసి వస్తుంది. ఉదాహరణకు ఒక ఉపాధ్యాయుడు తన తరగతిలో ఒక స్థాయి మార్కులు కన్నా తక్కువ మార్కులు సాధించిన వారికి ప్రత్యేక తరగతులు నిర్వహించవలెనని భావిస్తే, ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యం లెక్కించాలి.

మొదటి తరగతి ఎగువ హద్దు నుండి పౌనఃపున్యాలను వరుసగా తరవాత తరగతుల పౌనఃపున్యాల కలుపుగా వచ్చే విలువలను ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యం (ఆ.స.పౌ) అంటారు.

తరగతి అంతరం మార్కులు	ఎగువ హద్దు	విద్యార్థుల సంఖ్య పౌనఃపున్యం	అరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యం
0 – 5	5	7	7
5 – 10	10	10	10+7 = 17
10 – 15	15	15	15+17 = 32
15 – 20	20	8	8+32 = 40
20 – 25	25	3	3+40 = 43

43 మంది విద్యార్థుల మార్కులు వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజన పట్టికలో ఇవ్వబడ్డాయి. ఈ దత్తాంశమునకు ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యములను ఎట్లు వ్రాయవలెనో పరిశీలిద్దాము.

1. మొదటి తరగతి పౌనఃపున్యము ఆ తరగతి యొక్క ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యము అవుతుంది.
2. రెండవ తరగతి పౌనఃపున్యముకు 1వ తరగతి యొక్క ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యము కలుపగా అది రెండవ తరగతి యొక్క ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యము అవుతుంది.

SCERT, TELANGANA

3. ఇదేవిధంగా వరుస పౌనఃపున్యములను కలుపుతూ ఆ వరుస ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యములను వ్రాయవచ్చును.

> ఒక పౌనఃపున్య విభాజనంలో తరగతుల యొక్క ఎగువ హద్దులు మరియు ఆయా తరగతుల ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యాలచే సూచించినట్టి విభాజనాన్ని ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్య విభాజనము అంటారు.

ప్రయత్నించండి.

1. ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యము ______________ తో సంబంధము కలిగి ఉంటుంది.
2. అవరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యము ______________ తో సంబంధము కలిగి ఉంటుంది.
3. క్రింది దత్తాంశమునకు ఆరోహణ, అవరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యాలు వ్రాయండి.

తరగతి	1 -10	11 - 20	21 - 30	31 - 40	41 - 50
పౌనఃపున్యం	4	7	12	5	2

4. పై దత్తాంశములో పౌనఃపున్యముల మొత్తం (రాశుల సంఖ్య) ఎంత? చివరి తరగతి యొక్క ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యము ఎంత? నీవేమి చెప్పగలవు?

ఉదాహరణ 14: కొందరు విద్యార్థుల మార్కులు ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్య విభాజనము రూపంలో ఇవ్వబడ్డాయి. అయిన వివిధ తరగతుల యొక్క పౌనఃపున్యములు మరియు అవరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యములు వ్రాయండి. మొత్తం విద్యార్థులు ఎంతమంది?

తరగతి (మార్కులు)	1 -10	11 - 20	21 - 30	31 - 40	41 - 50
ఆ.సం.పౌ(విద్యార్థుల సంఖ్య)	12	27	54	67	75

సాధన:

తరగతులు (మార్కులు)	ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యం	పౌనఃపున్యం (విద్యార్థుల సంఖ్య)	అవరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యం
1 – 10	12	12	12 + 63 = 75
11 – 20	27	27 - 12 = 15	15 + 48 = 63
21 – 30	54	54 - 27 = 27	27 + 21 = 48
31 – 40	67	67 - 54 = 13	13 + 8 = 21
41 – 50	75	75 - 67 = 8	8

మొత్తం విద్యార్థుల సంఖ్య అనగా పౌనఃపున్యముల మొత్తము లేక చివరి తరగతి ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యం లేక మొదటి తరగతి అవరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యము 75 కి సమానం అని గమనించండి.

SCERT TELANGANA

అభ్యాసము - 7.2

1. ఒక కాలనీలోని 45 మంది యొక్క వయస్సులు క్రింది విధంగా ఉన్నవి.

33	8	7	25	31	26	5	50	25	48	56
33	28	22	15	62	59	16	14	19	24	35
26	9	12	46	15	42	63	32	5	22	11
42	23	52	48	62	10	24	43	51	37	48
36										

6 తరగతులు ఉండునట్లుగా వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనము తయారు చేయండి.

2. ఒక పాఠశాలలోని 30 తరగతులలో విద్యార్థుల సంఖ్యలు ఇవ్వబడ్డాయి. తరగతి పొడవు 4 (విద్యార్థులు) ఉండునట్లుగా ఈ దత్తాంశమునకు వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనమును తయారు చేయండి.

25	30	24	18	21	24	32	34	22	20	22
32	40	28	30	22	26	31	34	15	38	28
20	16	15	20	24	30	25	18			

3. ఒక వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనము నందు ఇవ్వబడిన తరగతులు 4 – 11, 12 – 19, 20 – 27, 28 – 35, 36 – 43. అయిన (i) తరువాత రెండు తరగతులను వ్రాయండి. (ii) తరగతి హద్దులు వ్రాయండి.

4. క్రింది వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనము నందు తరగతి మార్కులు (మధ్య విలువలు) ఇవ్వబడ్డాయి.

తరగతి మార్కులు	10	22	34	46	58	70
పౌనఃపున్యము	6	14	20	21	9	5

(i) దత్తాంశమునకు మినహాయింపు తరగతులను నిర్మించండి.

(ii) ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యములను వ్రాయండి.

(iii) అవరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యములను వ్రాయండి.

5. 35 మంది విద్యార్థులకు సాంఖ్యక శాస్త్ర పరీక్షలో 50 మార్కులకు గాను సాధించిన మార్కులు క్రింద ఇవ్వబడ్డాయి.

35	1	15	35	45	23	31	40	21	13	15
20	47	48	42	34	43	45	33	37	11	13
27	18	12	37	39	38	16	13	18	5	41
47	43									

పై దత్తాంశమునకు వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనమును తయారు చేయండి. విభాజన చేయు తరగతులతో ఒకటి 10-20 ఉండవలెను. (20 ఆ తరగతికి చెందకూడదు).

SCERT, TELANGANA

6. క్రింది వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనమునకు తరగతి హద్దులు వ్రాయండి. ఆరోహణ మరియు అవరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యములు కనుగొనండి.

వయస్సు	1 - 3	4 - 6	7 - 9	10 - 12	13 - 15
పిల్లల సంఖ్య	10	12	15	13	9

7. క్రింది విభాజన పట్టికలో సంచిత పౌనఃపున్యములు ఇవ్వబడ్డాయి. ఎటువంటి సంచిత పౌనఃపున్యమో గుర్తించండి. పౌనఃపున్యములు వ్రాయండి.

పరుగులు	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50
క్రికెట్ ఆటగాళ్ళ సంఖ్య	3	8	19	25	30

8. క్రింది వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనము నందు అవరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యములు ఇవ్వబడ్డాయి. అయితే అన్ని తరగతులకు పౌనఃపున్యములు ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యములు వ్రాయండి.

పుస్తకముల సంఖ్య	1-10	11-20	21-30	31-40	41-50
అవరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యం	42	36	23	14	6

7.4 రేఖాచిత్రాలతో దత్తాంశ ప్రదర్శన

ఒక దత్తాంశములోని రాశులను పౌనఃపున్యములతో గానీ లేక తరగతులను పౌనఃపున్యములతో గాని అమర్చి వ్రాసిన అమరికను పౌనఃపున్య విభాజన పట్టిక అంటారు.

అవిభాజ్యత దత్తాంశమును పటచిత్రాలు, కమ్మీ రేఖా చిత్రము, రెండు కమ్మీల రేఖాచిత్రము, పై రేఖాచిత్రములుగా చూపుట గురించి క్రింది తరగతులలో చర్చించి ఉన్నాము.

ఇదేవిధంగా వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనము సోపాన చిత్రమును గీయుట గూర్చి చర్చిద్దాము. ముందుగా కమ్మీ రేఖా చిత్రముల గూర్చి పునర్విమర్శ చేసుకొందాము.

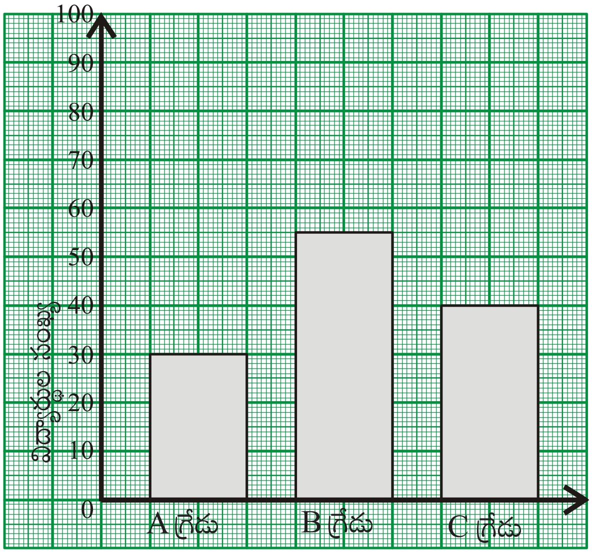
7.4.1 కమ్మీ రేఖాచిత్రము

సమాన మధ్యదూరములు కలిగి, సమాన వెడల్పుల, పౌనఃపున్యములకు అనుపాతములో పొడవులు గల కమ్మీలతో దత్తాంశమును చూపు రేఖా చిత్రమును కమ్మీ రేఖా చిత్రము అంటారు.

క్రింది ప్రశ్నలకు సమాధానములను చర్చించుట ద్వారా కమ్మీ రేఖా చిత్రములు యొక్క ఏయే అంశములను గూర్చి తెలుసుకొనవచ్చునో పునర్విమర్శ చేయండి.

(i) ప్రక్క కమ్మీ రేఖాచిత్రము ప్రకటించు వివరాలేవి?

(ii) ఎంతెంత మంది విద్యార్థులు A, B లేక C గ్రేడులు సాధించారు?



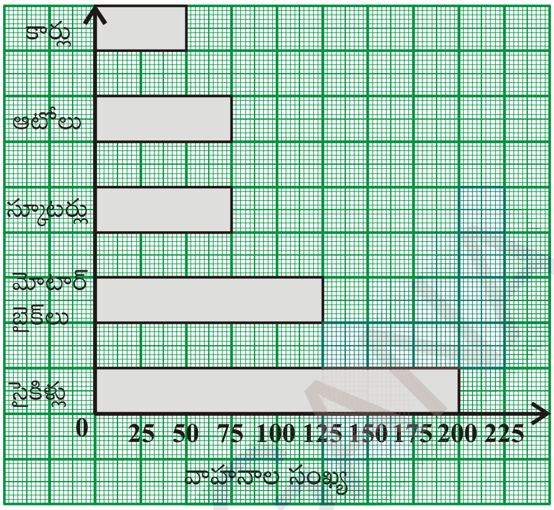
పరీక్షలో సాధన

SCERT, TELANGANA

(iii) ఎక్కువ మంది సాధించిన గ్రేడు ఏమిటి?

(iv) తరగతిలో ఎంత మంది విద్యార్థులు కలరు?

ఇదేవిధంగా కొన్ని సందర్భములలో అడ్డు కమ్మీ రేఖా చిత్రములు కూడా ఉపయోగిస్తాము. ఉదాహరణకు ప్రక్క పటంలో అడ్డు కమ్మీల ద్వారా నెల్లూరు జిల్లాలోని సంగం గ్రామములో 2010లో గల వాహనముల వివరాలు తెలుపబడ్డాయి.



ఆలోచించండి, చర్చించండి, రాయండి.

1. ఒక కమ్మీ రేఖా చిత్రములో అన్ని కమ్మీల ________________ .

   (a) పొడవులు సమానం (b) వెడల్పులు సమానం (c) వైశాల్యములు సమానం (d) విలువలు సమానం

2. ఒక కమ్మీ రేఖా చిత్రంలో ప్రతి కమ్మీ యొక్క పొడవు మిగిలిన కమ్మీల పొడవుపై ఆధారపడి ఉంటుందా?

3. ఏదైనా ఒక కమ్మీలో చేసిన మార్పు మిగిలిన కమ్మీలలో మార్పును కలుగజేస్తుందా?

4. ఏయే సందర్భములలో నిలువు కమ్మీ లేక అడ్డు కమ్మీ రేఖ చిత్రాలను ఉపయోగిస్తాము?

7.5 వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనములకు రేఖా చిత్రములు

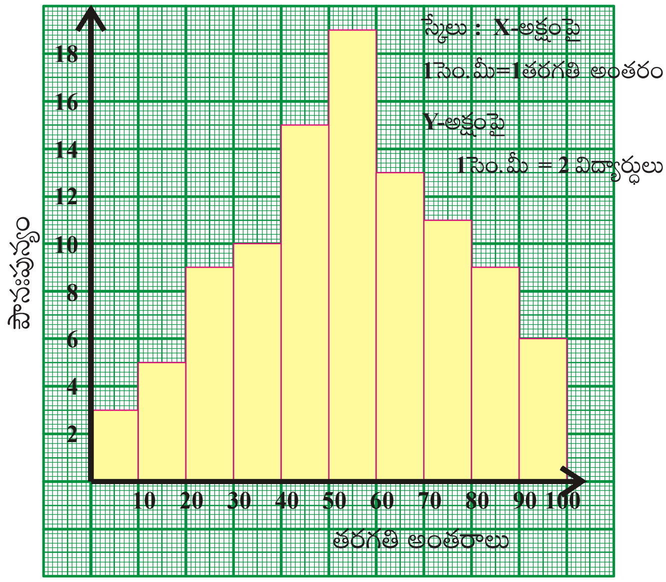
అవిభాజ్య శ్రేఢి (మినహాయింపు తరగతులు) గల వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనమునకు గీయు రేఖా చిత్రములలో మొదటిది సోపాన రేఖా చిత్రము

7.5.1 సోపాన రేఖా చిత్రము (Histogram)

7.5.1.1 సోపాన రేఖా చిత్రముపై అవగాహన

ఇవ్వబడిన వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనమునకు సోపాన రేఖా చిత్రము గీయబడినది. పరిశీలించి క్రింది ప్రశ్నలకు సమాధానములు రాబట్టండి.

SCERT, TELANGANA



తరగతి అంతరాలు (మార్కులు)	పౌనఃపున్యం (విద్యార్థుల సంఖ్య)
0 – 10	3
10 – 20	5
20 – 30	9
30 – 40	10
40 – 50	15
50 – 60	19
60 – 70	13
70 – 80	11
80 – 90	9
90 -100	6

(i) రేఖా చిత్రములో ఎన్ని తరగతి అంతరాలు ఉన్నవి ?

(ii) దీర్ఘచతురస్రాల పొడవులు దేనికి అనుపాతములో ఉన్నవి?

(iii) అన్ని దీర్ఘచతురస్రాల వెడల్పులు సమానం. కారణమేమి?

(iv) రేఖా చిత్రములోని ఏ రెండు దీర్ఘచతురస్రాలు అయినా పరస్పర స్థాన భ్రంశం చేయవచ్చునా?

పై రేఖాచిత్రము నుండి నీవు గ్రహించినది:

(i) పౌనఃపున్య విభాజనములోని 10 తరగతులకు రేఖా చిత్రములో 10 దీర్ఘచతురస్రాలు ఉన్నవి.

(ii) దీర్ఘచతురస్రాల యొక్క పొడవులు, దీర్ఘచతురస్రాలచే సూచించబడు పౌనఃపున్యములకు అనుపాతములో ఉన్నవి.

(iii) అన్ని తరగతుల అంతరములు సమానములు కావున వాటిని సూచించు దీర్ఘచతురస్రాలు వెడల్పులు సమానములు.

(iv) దత్తాంశము అవిభాజ్య శ్రేఢి కావున వరుస తరగతులు అదే వరుసలో దీర్ఘచతురస్రాలను సూచిస్తాయి. కావున ఏ రెండు దీర్ఘచతురస్రాలను అయినా పరస్పర స్థానభ్రంశం చేయరాదు.

ప్రయత్నించండి.

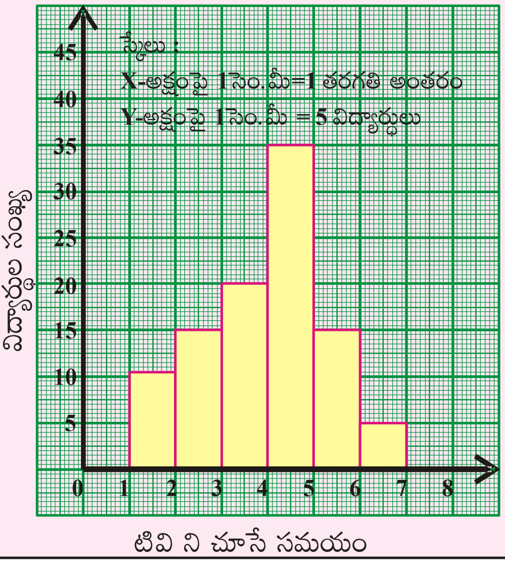
ప్రక్క సోపాన రేఖా చిత్రమును పరిశీలించి క్రింది ప్రశ్నలకు జవాబులివ్వండి.

(i) ఈ సోపాన రేఖా చిత్రము ఏ సమాచారమును సూచిస్తున్నది?

(ii) ఏ తరగతి నందు గరిష్ఠ సంఖ్యలో విద్యార్థులు కలరు?

(iii) ఎంతమంది మంది విద్యార్థులు 5 గంటలు లేక అంతకన్నా ఎక్కువ సమయం TV ను వీక్షిస్తున్నారు?

(iv) ఎంతమంది విద్యార్థులపై సర్వే నిర్వహించబడినది ?



7.5.1.2 సోపాన రేఖా చిత్ర నిర్మాణము

వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనము రూపములో ఇవ్వబడిన దత్తాంశమును సోపాన రేఖా చిత్రము వలె ఎట్లు సూచించవలెనో ఉదాహరణ పూర్వకంగా తెలుసుకుందాం.

ఒక TV కేంద్రం వారు వారి ప్రసారములను ఎంతమంది తిలకిస్తున్నారో తెలుసుకోవాలని అనుకొన్నారు. ఒక అపార్టుమెంటులో చేసిన సర్వే వివరాలు ఇవ్వబడ్డాయి. ఈ దత్తాంశమునకు సోపాన రేఖా చిత్రం నిర్మించుదాం.

తరగతి అంతరం (వయస్సు)	పౌనఃపున్యం (వీక్షకుల సంఖ్య)	తరగతి అంతరం
11 – 20	10	10.5 – 20.5
21 – 30	15	20.5 – 30.5
31 – 40	25	30.5 – 40.5
41 – 50	30	40.5 – 50.5
51 – 60	20	50.5 – 60.5
61 – 70	5	60.5 – 70.5
అవధులు		హద్దులు

సోపానం1: ఇచ్చి దత్తాంశములో సమ్మిళిత తరగతులు ఉంటే వాటికి మినహాయింపు తరగతులు (హద్దులు) వ్రాయవలెను.

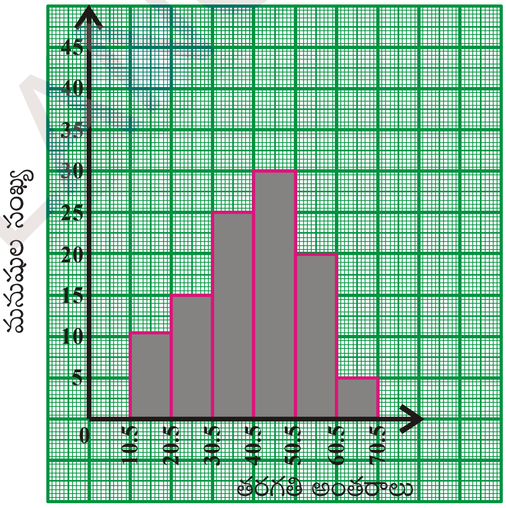
సోపానం 2:సరియైన సూచికను తీసుకొని x-అక్షంపై తరగతి అంతరాలను గుర్తించవలెను.

సోపానం 3: సరియైన సూచికను తీసుకొని y-అక్షముపై పౌనఃపున్యములను గుర్తించవలెను.

సూచిక : X-అక్షం 1సెం.మీ = 1 తరగతి
Y-అక్షం 1 సెం.మీ = 5 మంది

సోపానం4: తరగతి అంతరము వెడల్పుతో వరుస పౌనః పున్యములకు అనుపాత పొడవులతో దీర్ఘ చతురస్రాలను నిర్మించవలెను.

స్కేలు : **X**-అక్షంపై **1**సెం.మీ = **1** తరగతి అంతరం
Y-అక్షంపై **1**సెం.మీ = **5** గురు మనుషులు



7.5.1.3 విభిన్న వెడల్పులు గల భూములతో సోపాన రేఖాచిత్రము

ఒక పాఠశాలలోని SSC విద్యార్థుల ఉత్తీర్ణతా వివరాలు క్రింది వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనములో ఇవ్వబడ్డాయి.

కేటగిరి	తరగతి అంతరాలు(మార్కులు)	విద్యార్థుల సంఖ్య శాతం
ఉత్తీర్ణులుకానివారు	0-35	28
తృతీయ శ్రేణి విద్యార్థులు	35-50	12
ద్వితీయ శ్రేణి విద్యార్థులు	50-60	16
ప్రథమ శ్రేణి విద్యార్థులు	60-100	44

పట్టికలో దత్తాంశమును పరిశీలిస్తే తరగతి అంతరములు వేరువేరుగా ఉన్నవి. మొదటి శ్రేణి విద్యార్థులు 44 % శాతం అయినను వారి విస్తరణ 40 (60 నుండి 100 వరకు) మాత్రమే. ద్వితీయ శ్రేణి విద్యార్థులు 16% అయినను వారి విస్తరణ 10 (50 నుండి 60 వరకు). కావున ఇటువంటి విస్తరణలకు పౌనఃపున్య సోపాన రేఖాచిత్రం గీయునప్పుడు తరగతి అంతరముల వెడల్పులు పరిగణలోనికి తీసుకోవలెను.

SCERT, TELANGANA

రెండు రాశులను పోల్చుటకు వాని మధ్య కనీసం ఒక లక్షణంలో సారూప్యత అవసరం. అందువల్ల 'పౌనఃపున్య సాంద్రత' అనగా ప్రమాణ తరగతి అంతరమునకు పౌనఃపున్యమును లెక్కించి వానితో సోపాన చిత్రమును నిర్మించుట సరియైనది. అనగా సోపాన చిత్రంలోని ఒక్కొక్క సోపానం పొడవు సంబంధిత తరగతి యొక్క పౌనఃపున్య సాంద్రతకు అనుపాతంలో ఉండవలెను.

$$\therefore \text{పౌనఃపున్య సాంద్రత} = \frac{\text{ఒక తరగతి పౌనఃపున్యం}}{\text{ఆ తరగతి పొడవు}} \times \text{దత్తాంశములో తరగతుల కనిష్ఠ పొడవు}$$

తరగతి (మార్కులు)	పౌనఃపున్యము (విద్యార్థుల శాతం)	తరగతి పొడవు	దీర్ఘచతురస్రం పొడవు (పౌనఃపున్య సాంద్రత)
0 – 35	28	35	$\frac{28}{35}\times 10 = 8$
35 – 50	12	15	$\frac{12}{15}\times 10 = 8$
50 – 60	16	10	$\frac{16}{10}\times 10 = 16$
60 – 100	44	40	$\frac{44}{40}\times 10 = 11$

లెక్కించిన పౌనఃపున్యములతో ముందు ఉదాహరణలో వలె సోపాన చిత్రమును నిర్మించవలెను.

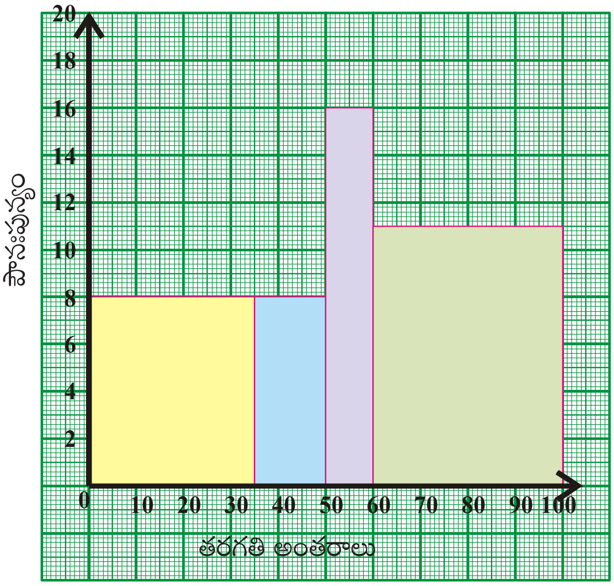
సోపానం 1: సరియైన సూచికను గుర్తించి X-అక్షముపై తరగతి అంతరాలు గుర్తించండి.

సోపానం 2: సరియైన సూచికను గుర్తించి Y- అక్షముపై పౌనఃపున్యములు గుర్తించండి.

సూచిక: X-అక్షము: 1 సెం.మీ = 1 కనిష్ఠ తరగతి అంతరం

Y-అక్షము: 1 సెం.మీ = 2 %

సోపానం 3: వివిధ తరగతి అంతరాలు భూములుగా (వెడల్పులుగా), సంబంధిత పౌనఃపున్య సాంద్రతలు పొడవులుగా దీర్ఘచతురస్రాలు నిర్మించండి.



7.5.1.4 తరగతి మధ్య విలువలతో ఇవ్వబడిన వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనమునకు సోపాన చిత్రము

ఉదాహరణ 15: 8వ తరగతిలోని 65 మంది విద్యార్థులు పొందిన మొత్తం మార్కుల వివరాలు క్రింది వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనములో ఇవ్వబడ్డాయి. సోపాన చిత్రం నిర్మించండి.

తరగతి (మధ్యవిలువలు)	150	160	170	180	190	200
పౌనఃపున్యం(విద్యార్థుల సంఖ్య)	8	10	25	12	7	3

సాధన: ఇవ్వబడిన తరగతి మార్కు (మధ్యవిలువ)ల నుండి తరగతులను తయారు చేసుకొనవలెను.

సోపానం 1: రెండు వరుస తరగతుల మధ్య విలువల మధ్య బేధం లెక్కించవలెను. h = 160 -150 = 10.

(ప్రతి రెండు వరుస తరగతుల మధ్యబేధము సమానమేనా?)

సోపానం 2: తరగతుల యొక్క దిగువ, ఎగువ హద్దులను తరగతి మధ్యవిలువ x గా తీసుకొని $x-\frac{h}{2}$ నుండి $x+\frac{h}{2}$ లోపు నిర్ణయించవలెను.

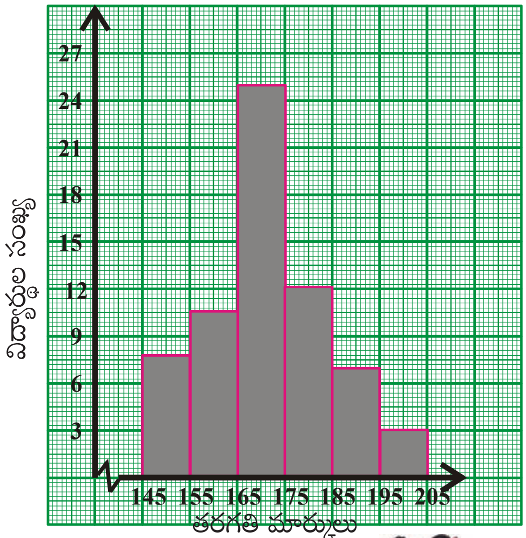
సోపానం 3: సరియైన సూచికను ఎన్నుకొనవలెను.

X- అక్షము 1 సెం.మీ = 1 తరగతి అంతరం

Y- అక్షము 1సెం.మీ = 4 విద్యార్థులు

సోపానం 4: తరగతి అంతరాలను వెడల్పులుగా, పౌనఃపున్యములు పొడవులుగా వరుస సోపానములు నిర్మించవలెను.

తరగతి మార్కులు (x)	తరగతి అంతరాలు	పౌనఃపున్యం విద్యార్థుల సంఖ్య
150	145 – 155	8
160	155 – 165	10
170	165 – 175	25
180	175 – 185	12
190	185 – 195	7
200	195 – 205	3



Y

SCERT TELANGANA

ఆలోచించండి, చర్చించండి.

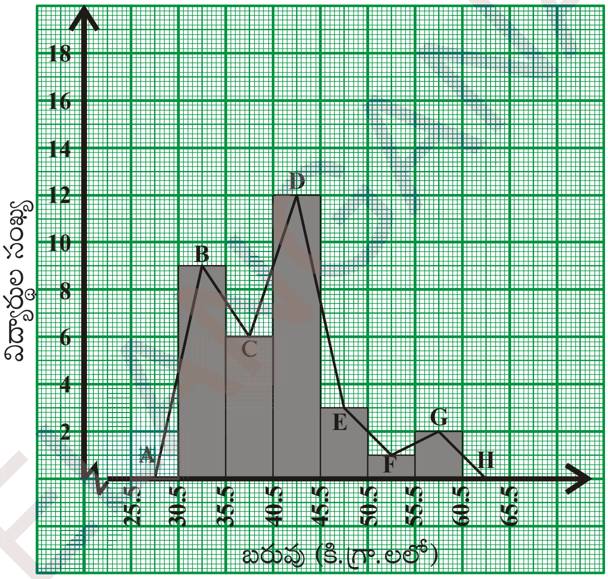
1. సోపాన చిత్రంలో X -అక్షంపై తరగతి యొక్క హద్దులు గుర్తిస్తాం. కాని అవధులు కాదు. ఎందువల్ల?
2. సోపాన చిత్రంలో దీర్ఘచతురస్రాలు వెడల్పులను నిర్ణయించు అంశమేది?
3. అన్ని దీర్ఘచతురస్రాల పొడవుల మొత్తం దేనిని సూచిస్తుంది?

7.5.2 పౌనఃపున్య బహుభుజి

7.5.2.1 పౌనఃపున్య బహుభుజిపై వ్యాఖ్యానించుట

వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనమును సూచించుటకు సోపాన రేఖా చిత్రము కంటే మెరుగైన రేఖా పటము పౌనఃపున్య బహుభుజి. ప్రక్క సోపాన చిత్రములో ఒక తరగతిలోని 33 మంది విద్యార్థుల బరువుల వివరాలు ఇవ్వబడ్డాయి.

సోపానముల యొక్క పై వెడల్పు యొక్క మధ్య బిందువులు B, C, D, E, F, G లు గుర్తించి రేఖా ఖండములతో కలుపబడ్డాయి. ఇచ్చిన తరగతులకు ముందు ఒకటి, తరువాత ఒకటి తరగతులను 'O' పౌనఃపున్యముతో ఊహించి వాని మధ్య బిందువులు కలిపితే BCDEFG పటము వస్తుంది. బహుభుజి పూర్తి చేయడానికి 30.5-35.5 తరగతి ముందు తరగతి పౌనఃపున్యం, 55.5 - 60.5 తరగతి తరవాత తరగతి పౌనఃపున్యం సున్నాలుగా తీసుకొని వాటిని A, H బిందువులుగా గుర్తించి కలుపుతాం. అప్పుడు ABCDEFGH పౌనఃపున్య బహుభుజి వస్తుంది.



పరిశీలించినచో సోపాన చిత్ర వైశాల్యము బహుభుజి వైశాల్యము సమానములని తెలియుచున్నది కదా!

ఆలోచించి, చర్చించి రాయండి.

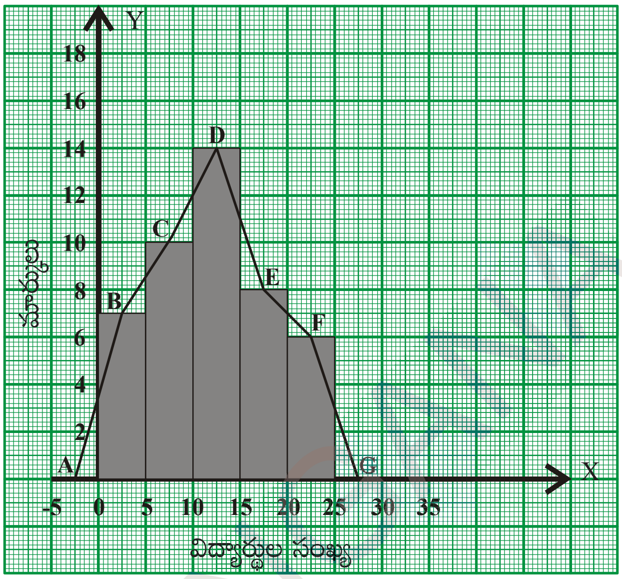
1. దత్తాంశములోని మొదటి తరగతికి ముందు తరగతి లేనిచో బహుభుజిని ఎట్లు పూరించగలవు ?
2. ఒక దత్తాంశము యొక్క సోపాన రేఖా చిత్రము, పౌనఃపున్య బహుభుజిల వైశాల్యములు సమానము. ఎట్లు?
3. పౌనఃపున్య బహుభుజి నిర్మాణమునకు ముందుగా సోపాన చిత్రము నిర్మించవలెనా?
4. విభాజిత శ్రేఢి / అవర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనమునకు 'పౌనఃపున్య బహుభుజి'ని గీయగలమా?

7.5.2.2 పౌనఃపున్య బహుభుజి నిర్మాణము

ఒక తరగతిలోని 45 మంది విద్యార్థులు ఒక పరీక్షలో సాధించిన మార్కులు (గరిష్ఠం 25)క్రింది వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనము నందు ఇవ్వబడ్డాయి. ఈ దత్తాంశమునకు పౌనఃపున్య బహుభుజిని నిర్మిద్దాము.

SCERT, TELANGANA

తరగతి అంతరాలు (మార్కులు)	పౌనఃపున్యము (విద్యార్థులు సంఖ్య)	మధ్య విలువలు
0-5	7	2.5
5-10	10	7.5
10-15	14	12.5
15-20	8	17.5
20-25	6	22.5
Total	45	



నిర్మాణ సోపానములు

సోపానం 1: తరగతి మధ్యవిలువలను గణించవలెను.

సోపానం 2: దత్తాంశమునకు సోపాన రేఖా చిత్రమును నిర్మించి ప్రతి సోపానము యొక్క పై వెడల్పుల మధ్య బిందువులు B, C, D, E, F లను గుర్తించి కలుపవలెను.

సోపానం 3: తరగతుల యొక్క ముందు తరగతి, తరువాత తరగతులను ఊహించి వాని పౌనఃపున్యములు '0' గా తీసుకొని తరగతి మధ్యవిలువలు గుర్తించవలెను.

సోపానం 4: మొదటి తరగతికి ముందు తరగతిని, చివరి తరగతికి తరువాత తరగతులను ఊహించుకోండి. అంటే 0 - 5 తరగతికి ముందు తరగతి X-అక్షమునకు ఋణాత్మక దిశలో – 5 – 0 గా తీసుకోండి. అదే విధంగా 20 - 25 తరగతికి తరవాత తరగతి 25-30 గా తీసుకోండి. వీటి మధ్య విలువలను A, G లుగా గుర్తించండి.

సోపానం5: ఇప్పుడు B బిందువును A తోనూ, F బిందువును G తోనూ కలిపితే పౌనఃపున్య బహుభుజి ఏర్పడుతుంది. పౌనఃపున్య బహుభుజి నిర్మించుటకు ప్రతిసారి సోపాన రేఖా చిత్రము నిర్మించనవసరము లేదు. దీనికి బదులుగా తరగతి మధ్య విలువలను, పౌనఃపున్యములను ఉపయోగించి పౌనఃపున్య బహుభుజిని నిర్మించవలెను.

ఇవి చేయండి :

1. క్రింది వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనములకు పౌనఃపున్య బహుభుజులు నిర్మించండి.

(i) ఒక తరగతిలోని విద్యార్థుల మధ్య జరిగిన స్నేహపూర్వక క్రికెట్ ఆట నందు వారి పరుగుల వివరాలు

చేసిన పరుగులు	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50	50 – 60
విద్యార్థుల సంఖ్య	3	5	8	4	2

(ii) ఒక నాటక ప్రదర్శన కొరకు అమ్మిన టిక్కెట్ల వివరాలు

టిక్కెట్టు రేటు	10	15	20	25	30
టిక్కెట్ల సంఖ్య	50	30	60	30	20

SCERT, TELANGANA

7.5.2.3 పౌనఃపున్య బహుభుజి యొక్క ముఖ్యలక్షణాలు :

1. విభాజిత / అవిభాజిత దత్తాంశములను పౌనఃపున్య బహుభుజి వలె సూచింపవచ్చును.
2. తరగతి మధ్యవిలువలను X- అక్షముపై సంబంధిత పౌనఃపున్యములను Y- అక్షముపై గుర్తించి పౌనఃపున్య బహుభుజి నిర్మించవలెను.
3. ఒకే దత్తాంశమునకు గీయబడిన సోపాన రేఖాచిత్రము, పౌనఃపున్య బహుభుజిల వైశాల్యములు సమానం.

ఆలోచించండి, చర్చించండి మరియు వ్రాయండి.

1. సోపాన రేఖా చిత్రము నందు ఒక తరగతిలోని విడివిడి రాశులకు పౌనఃపున్యములను విడివిడిగా గుర్తించవచ్చునా?
2. పౌనఃపున్య బహుభుజి నుండి ఒక తరగతిలోని ఒక ప్రత్యేక రాశి విలువకు పౌనఃపున్యమును కనుగొనవచ్చునా?

7.5.2.4 వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనమునకు పౌనఃపున్య బహుభుజిని నిర్మించుట (సోపాన రేఖా చిత్రము నిర్మించకుండా)

డయాబెటిస్ వ్యాధిగ్రస్తులపై జరిపిన సర్వేలోని కొన్ని వివరాలు క్రింది పట్టికలో ఇవ్వబడ్డాయి. ఈ దత్తాంశమునకు పౌనఃపున్య బహుభుజిని నిర్మిద్దాం.

వయస్సు	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50	50 – 60
వ్యాధిగ్రస్తుల సంఖ్య	5	9	16	11	3

సోపానచిత్రం నిర్మించకుండానే పౌనఃపున్య బహుభుజిని నిర్మించడం తెలుసుకుందాం.

సోపానం 1: తరగతుల మధ్య విలువలు గుర్తించాలి.

సోపానం 2: సూచికను నిర్ణయించవలెను.

X-అక్షము 1 సెం.మీ = 1 తరగతి అంతరము

Y-అక్షము 1 సెం.మీ = 2 మార్కులు

సోపానం 3: తరగతి మధ్యవిలువలు 'x' మరియు ఆ తరగతి పౌనఃపున్యము f అయిన బిందువు ('x', f) ను గ్రాఫు కాగితంపై గుర్తించవలెను.

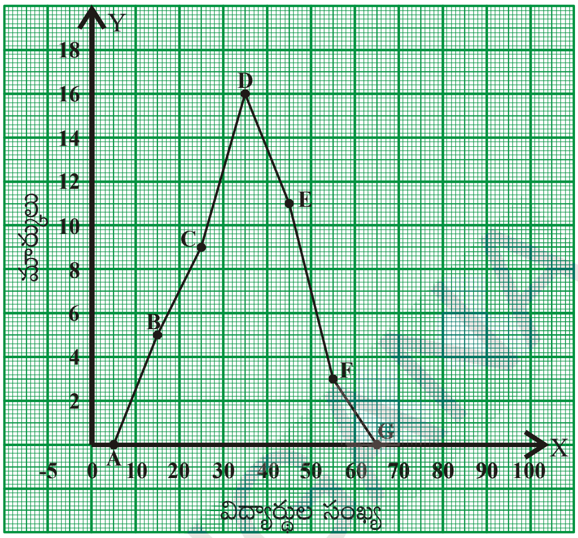
సోపానం 4: అన్ని తరగతులకు బిందువులు గుర్తించి వరుసగా కలుపవలెను.

సోపానం 5: దత్తాంశములోని మొదటి తరగతి కన్నా ఒక తరగతి, చివరి తరగతి తరువాత ఒక తరగతిని 'సున్నా' పౌనఃపున్యములో ఊహించి వాని తరగతి మధ్యవిలువలను గ్రాఫుపై గుర్తించవలెను.

సోపానం 6: అన్ని మధ్య బిందువులను కలిపి బహుభుజి పూర్తిచేయవలెను.

SCERT, TELANGANA

తరగతిఅంతరాలు (వయస్సు)	వ్యాధిగ్రస్తుల సంఖ్య	తరగతి మధ్యవిలువ	బిందువులు
0 – 10	0	5	(5, 0)
10 – 20	5	15	(15, 5)
20 – 30	9	25	(25, 9)
30 – 40	16	35	(35, 16)
40 – 50	11	45	(45, 11)
50 – 60	3	55	(55, 3)
60 – 70	0	65	(65, 0)



7.5.3 వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనంనకు పౌనఃపున్య వక్రము

పౌనఃపున్య విభాజనములోని తరగతి మధ్య బిందువులను ఆ తరగతుల పౌనఃపున్యములను తీసుకొని నిర్మించు వక్రమును పౌనఃపున్య వక్రము అంటారు.

పైన చర్చించిన దత్తాంశమునకు పౌనఃపున్య వక్రము నిర్మించు సోపానములు గమనించండి.

సోపానం 1: తరగతుల మధ్యవిలువలు గుర్తించాలి.

సోపానం 2: సూచికను నిర్ణయించవలెను.

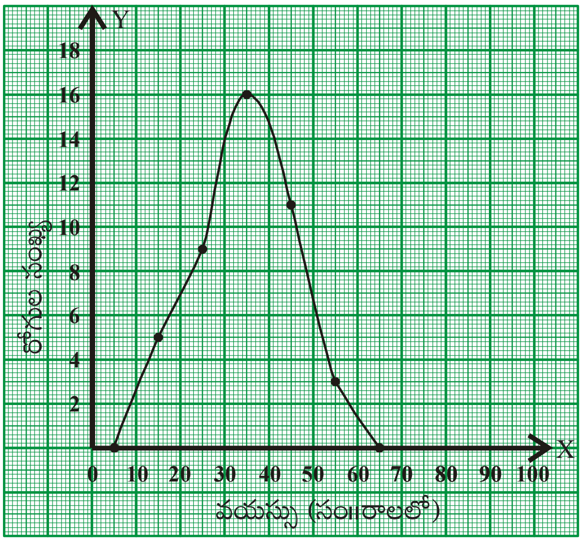
X-అక్షము 1 సెం.మీ = 1 తరగతి అంతరం

Y-అక్షము 1 సెం.మీ = 2 మార్కులు

సోపానం 3: తరగతి మధ్యవిలువ 'x' మరియు ఆ తరగతి పౌనఃపున్యం f అయిన బిందువు (x, f) ను గ్రాఫు కాగితంపై గుర్తించాలి.

సోపానం 4: అన్ని తరగతులకు బిందువులను గుర్తించి, ఆ వరుస బిందువుల గుండా సున్నిత వక్రము గీయాలి.

తరగతి అంతరం (వయస్సు)	వ్యాధిగ్రస్తుల సంఖ్య	తరగతి మధ్య విలువ	బిందువులు
0 – 10	0	5	(5, 0)
10 – 20	5	15	(15, 5)
20 – 30	9	25	(25, 9)
30 – 40	16	35	(35,16)
40 – 50	11	45	(45,11)
50 – 60	3	55	(55, 3)
60 – 70	0	65	(65, 0)



7.5.4 సంచిత పౌనఃపున్య వక్రాల రేఖాచిత్రాలు

వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనము నందలి దిగువ / ఎగువ హద్దులను, సంచిత పౌనఃపున్యములకు గీయు సున్నిత వక్రమును 'సంచిత పౌనఃపున్య వక్రము' లేక 'ఓజివ్ వక్రము' అంటారు. ఒక అవిచ్ఛిన్న శ్రేఢి యొక్క సంచిత పౌనఃపున్య వక్రము నుండి, దత్తాంశములోని ఏదైనా ఒక హద్దు వరకు లేక ఒక హద్దు నుండి దత్తాంశం చివరి వరకు ఎన్ని రాశులు కలవో తెలుసుకొనవచ్చును.

7.5.4.1 ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్య వక్రము

ఒక డిపార్టుమెంటు నందు భవన నిర్మాణ పనులు కొరకై గుత్తేదారులు ధరఖాస్తులు (tenders) క్రింది విధంగా ఉన్నవి.

తరగతి (రోజులు)	0 – 4	4 - 8	8 - 12	12 – 16	16 – 20
ధరఖాస్తులు (tenders)	2	5	12	10	3

సోపానం 1: ఇచ్చిన దత్తాంశంలోని తరగతులు సమ్మిళిత తరగతులయితే, మినహాయింపు తరగతులుగా మార్చవలెను.

సోపానం 2: ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యాలను గణించవలెను

సోపానం 3: X – అక్షంపై ఎగువ హద్దుల, Y- అక్షంపై ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యములు గుర్తించాలి.

సూచిక :

X-అక్షం 1 సెం.మీ = 1 తరగతి అంతరం

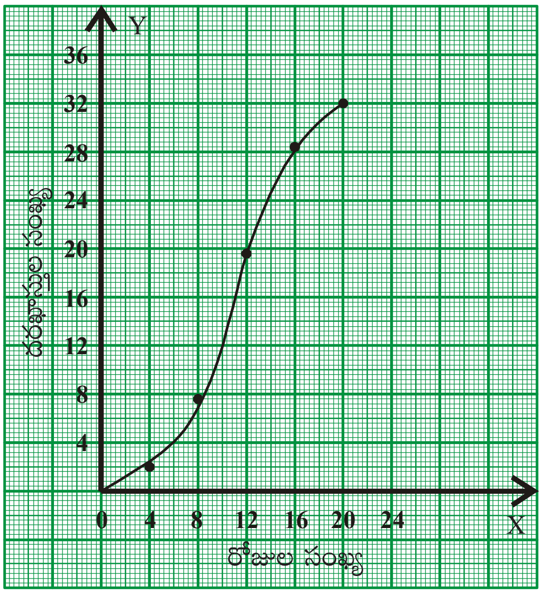
Y-అక్షం 1 సెం.మీ= 4 ధరఖాస్తులు

సోపానం 4: మొదటి తరగతి దిగువ హద్దు (ఊహించిన ముందు తరగతి యొక్క ఎగువహద్దు) పౌనఃపున్యము '0' తో బిందువును గుర్తించవలెను..

తరగతులు (రోజులు)	దరఖాస్తుల సంఖ్య	ఎగువ హద్దు	ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యం
0 – 4	2	4	2
4 – 8	5	8	7
8 – 12	12	12	19
12 – 16	10	16	29
16 – 20	3	20	32

సోపానం 5: అన్ని బిందువులను వరుసగా సున్నిత వక్రముచే కలుపవలెను. ఈ వక్రమును 'ఓజివ్ వక్రము' అంటారు.

ఇదేవిధంగా తరగతి ఎగువ హద్దులను X-అక్షంపై ఆ తరగతుల అవరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యములను Y-అక్షంపై గుర్తించి 'అవరోహణ సంచిత పౌనఃపున్య వక్రము' లేక 'ఓజివ్ వక్రము'ను గీయవచ్చును.



అభ్యాసము - 7.3

1. 45 మంది విద్యార్థుల యొక్క ప్రజ్ఞా సూచిక (IQ) స్థాయిలు ఇవ్వబడినవి క్రింది వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనమునకు సోపాన రేఖా చిత్రము నిర్మించండి.

తరగతి(IQ స్థాయి)	60-70	70-80	80-90	90-100	100-110	110-120	120-130
విద్యార్థుల సంఖ్య	2	5	6	10	9	8	5

2. 7వ తరగతి వార్షిక పరీక్షలలో 600 మంది విద్యార్థులు సాధించిన మార్కులు క్రింది పౌనఃపున్య విభాజనములో ఇవ్వబడ్డాయి. సోపాన రేఖా చిత్రమును నిర్మించండి.

మార్కులు	360	400	440	480	520	560
విద్యార్థుల సంఖ్య	100	125	140	95	80	60

3. క్రింది వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనమునందు 250 మంది శ్రామికుల ఒక వారపు వేతనాలు ఇవ్వబడ్డాయి. ఈ దత్తాంశమునకు సోపాన రేఖాచిత్రము, పౌనఃపున్య బహుభుజిలను ఒకే గ్రాఫు నందు నిర్మించండి.

వారపు వేతనము	500-550	550-600	600-650	650-700	700-750	750-800
శ్రామికుల సంఖ్య	30	42	50	55	45	28

4. ఒక మండలములోని 60 మంది ప్రాథమిక పాఠశాల ఉపాధ్యాయుల వయస్సులు ఇవ్వబడ్డాయి. ఈ దత్తాంశమునకు పౌనఃపున్య బహుభుజి, పౌనఃపున్య వక్రములను వేరువేరు గ్రాఫులపై నిర్మించండి.

వయస్సు	24 – 28	28 – 32	32 – 36	36 – 40	40 – 44	44 – 48
ఉపాధ్యాయులసంఖ్య	12	10	15	9	8	6

5. క్రింది దత్తాంశమునకు తరగతులు పౌనఃపున్యములు వ్రాయండి. ఆ దత్తాంశమునకు ఓజివ్ వక్రములను రెండింటిని గీయండి.

మార్కులు	5 కన్న తక్కువ	10 కన్న తక్కువ	15 కన్న తక్కువ	20 కన్న తక్కువ	25 కన్న తక్కువ
విద్యార్థుల సంఖ్య	2	8	18	27	35

SCERT, TELANGANA

మనం ఏమి చర్చించాం

G6Y2B2

1. రాశుల అంకగణిత మధ్యమము $= \frac{x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n}{n}$ లేక $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{N}$ (సూక్ష్మ రూపం) ఇందు $\sum x_i$ అనేది అన్ని x_i ల మొత్తాన్ని తెలుపుతుంది. x_i లో 'i' విలువలు 1 నుండి n వరకు తీసుకొంటాం.

2. అంకగణిత మధ్యమము = ఊహించిన అంకగణిత మొత్తం + విచలనముల సరాసరి లేక $\bar{x} = A + \frac{\sum (x_i - A)}{N}$

3. అంకగణిత మధ్యమమును సంఖ్యాత్మక దత్తాంశము విశ్లేషించుటకు ఉపయోగిస్తారు.

4. ఆరోహణ లేక అవరోహణ క్రమంలోని దత్తాంశములో మధ్యమరాశిని మధ్యగతం అంటాం.

5. విశ్లేషణపై ప్రభావం చూపు అత్యల్ప / అత్యధిక (అంత్యరాశులు) రాశులు గల సంఖ్యాత్మక దత్తాంశమును విశ్లేషించుటకు మధ్యగతమును ఉపయోగిస్తారు.

6. దత్తాంశంలో ఎక్కువ సార్లు పునరావృతం అయిన రాశిని బాహుళకం అంటాం. ఒక దత్తాంశమునకు ఎక్కువ బాహుళకములు ఉండవచ్చును. అసలే లేకపోవచ్చును.

7. సంఖ్యాత్మక, వివరణాత్మక దత్తాంశములు రెండింటిలోనూ బాహుళకములు ఉపయోగిస్తాం.

8. దత్తాంశములోని రాశులను పౌనఃపున్యములతో సూచించు పట్టికను 'పౌనఃపున్య విభాజనము' లేక 'విభాజన పట్టిక' అంటారు.

9. ఒక తరగతి యొక్క ఎగువ, దిగువ హద్దుల బేధమును ఆ తరగతి యొక్క 'తరగతి పొడవు' లేక 'తరగతి అంతరము' అంటారు. దీనిని C తో సూచిస్తారు.

10. దత్తాంశములో ఏదయినా ఒక తరగతి యొక్క దిగువ హద్దుకు సమానం లేక ఎక్కువ విలువ గల దత్తాంశములోని అన్ని రాశులసంఖ్యను "అవరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యము" అంటారు.

11. దత్తాంశములో ఏదయినా ఒక తరగతి యొక్క ఎగువహద్దు కన్నా తక్కువ విలువ గల దత్తాంశములోని అన్ని రాశుల సంఖ్యను 'ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యము' అంటారు.

12. ఒక తరగతిలో మొదటి విలువను దిగువ అవధి అని చివరి విలువను ఎగువ అవధి అని అంటారు.

13. ఒక తరగతిలో ఎగువ అవధి, తరవాత తరగతి దిగువ అవధుల సరాసరిని ఆ తరగతి ఎగువ హద్దు అంటారు.

14. ఒక తరగతిలో దిగువ అవధి, దాని ముందున్న తరగతి ఎగువ అవధుల సరాసరిని ఆ తరగతి దిగువ హద్దు అంటారు.

SCERT, TELANGANA

15. మినహాయింపు తరగతుల ఆధారంగా వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనమునకు గీచిన రేఖాచిత్రమును పౌనఃపున్య సోపానచిత్రము అంటారు.

16. వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనం నందు తరగతి అంతరాలు వేర్వేరుగా ఉన్నప్పుడు సోపానా రేఖాచిత్రములోని దీర్ఘచతురస్రాలను పౌనఃపున్య సాంద్రత ఆధారం చేసుకొని నిర్మించాలి.

$$\text{పౌనఃపున్య సాంద్రత} = \frac{\text{తరగతి పౌనఃపున్యం}}{\text{ఆ తరగతి పొడవు}} \times \text{కనిష్ఠ తరగతి పొడవు}$$

17. విచ్ఛిన్న/అవిచ్ఛిన్న శ్రేణుల యొక్క తరగతి మధ్యవిలువలను పౌనపున్యములను తీసుకొని నిర్మించిన రేఖాచిత్రాన్ని పౌనఃపున్య బహుభుజి అంటారు.

18. పౌనఃపున్య బహుభుజి/ వక్రం నందు X-అక్షంపై తరగతి మధ్య విలువలను Y-అక్షంపై పౌనః పున్యములను తీసుకోవాలి.

19. ఒకే దత్తాంశమునకు నిర్మించిన సోపానరేఖాచిత్రము, పౌనఃపున్య బహుభుజిల వైశాల్యములు సమానం.

20. ఒక పౌనఃపున్య విభాజనంలోని దిగువ లేదా ఎగువ హద్దులకు సంబంధిత సంచిత పౌనః పున్యాలను గుర్తించి గీచిన సున్నిత వక్రములను 'ఓజివ్ వక్రం' లేదా అరోహణ/అవరోహణ సంచిత పౌనఃపున్య వక్రం అంటారు.

హేతుబద్ధంగా ఆలోచించండి

కొన్ని రేఖాచిత్రాల, పటాల యొక్క దత్తాంశములను పరిశీలించి వ్యక్తుల యొక్క ఆలోచనా విధానం, అంతర్దృష్టిపై ఆధారపడి ఉంటాయి. క్రింది పటాలను పరిశీలించి క్రింది ప్రశ్నలకు సమాధానాలివ్వండి. ఇచ్చిన సమాధానాలను తిరిగి సరిచూసుకోండి.

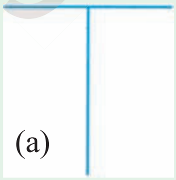
(a) అడ్డురేఖా, నిలువు రేఖలలో ఏది పొడవైనది?

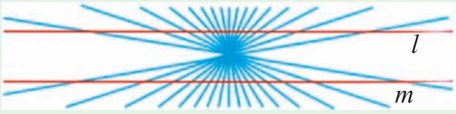
(b) l మరియు m రేఖలు సమాంతర రేఖాలేనా?

(c) $\overline{AB}$ లేదా $\overline{BC}$ రేఖాఖండాలలో ఏది పెద్దది?

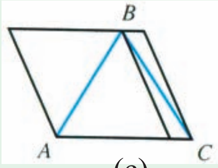
(d) పటంలో బహుభుజికి ఎన్ని భుజాలు ఉన్నాయి? ఇది చతురస్రమేనా?

(e) పటాన్ని క్రిందివైపుగా చూడండి. నాలుగు స్తంబాలు పైకి వస్తున్నట్లు కనిపించాయా? మరి చిన్న స్తంబాలు కూడా ఉన్నాయా? చెప్పండి.

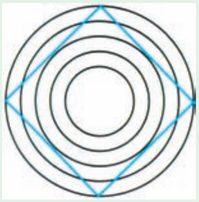

(a)

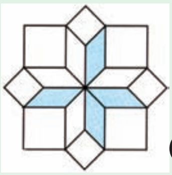


(b)



(c)


(d)


(e)

SCERT TELANGANA