દ્વિપદી પ્રમેયનો ઉપયોગ કરી, નીચેનાની કિંમત શોધો : (પ્રશ્ન 6 થી 9)

6. $(96)^3$ **7.** $(102)^5$ **8.** $(101)^4$ **9.** $(99)^5$

10. દ્વિપદી પ્રમેયનો ઉપયોગ કરી, $(1.1)^{10000}$ અથવા 1000 પૈકી કઈ સંખ્યા મોટી છે તે નક્કી કરો.

11. $(a+b)^4-(a-b)^4$ શોધો. તે પરથી $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^4-(\sqrt{3}-\sqrt{2})^4$નું મૂલ્ય શોધો.

12. $(x+1)^6+(x-1)^6$ શોધો. તે પરથી અથવા અન્ય રીતે$(\sqrt{2}+1)^6+(\sqrt{2}-1)^6$ મેળવો.

13. બતાવો કે, ધન પૂર્ણાંક n માટે $9^{n+1}-8n-9$ એ 64 વડે વિભાજ્ય છે.

14. સાબિત કરો : $\sum_{r=0}^{n} 3^r \times {}^nC_r = 4^n$

8.3 વ્યાપક અને મધ્યમ પદો

1. અવલોકન કરતાં દ્વિપદી પ્રમેયમાં $(a+b)^n$ના વિસ્તરણમાં, પ્રથમ પદ ${}^nC_0a^n$, બીજું પદ ${}^nC_1a^{n-1}b$, ત્રીજું પદ ${}^nC_2a^{n-2}b^2$ અને આ જ પ્રમાણે આગળ મળે. ક્રમિક પદોની તરાહ જોતાં $(r+1)$મું પદ ${}^nC_ra^{n-r}b^r$ છે એમ કહી શકાય. $(r+1)$મા પદને આપણે$(a+b)^n$ ના વિસ્તરણનું વ્યાપક પદ કહીએ છીએ. તેને T_{r+1} વડે દર્શાવીશું.

$$\text{આમ } T_{r+1} = {}^nC_r\, a^{n-r}b^r.$$

2. $(a+b)^n$ ના વિસ્તરણમાં મધ્યમ પદના સંદર્ભમાં,

(i) જો n યુગ્મ હોય તો વિસ્તરણમાં $(n+1)$ પદો મળે. n યુગ્મ હોવાથી $n+1$ અયુગ્મ છે. આથી $\left(\frac{n+1+1}{2}\right)$મું, એટલે કે, $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ મું પદ મધ્યમ પદ થશે.

ઉદાહરણ તરીકે, $(x+2y)^8$ ના વિસ્તરણનું મધ્યમ પદ $\left(\frac{8}{2}+1\right)$મું એટલે કે 5મું પદ

(ii) જો n અયુગ્મ હોય, તો $n+1$ યુગ્મ થશે, માટે વિસ્તરણને બે મધ્યમપદ મળશે. અર્થાત્ $\left(\frac{n+1}{2}\right)$મું અને $\left(\frac{n+1}{2}+1\right)$મું પદ. તેથી $(2x-y)^7$ ના વિસ્તરણમાં $\left(\frac{7+1}{2}\right)$ મું, એટલે કે ચોથું અને $\left(\frac{7+1}{2}+1\right)$ મું એટલે કે 5મું પદ મધ્યમ પદ છે.

3. $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{2n}$, જ્યાં $x \neq 0$ ના વિસ્તરણનું મધ્યમ પદ$\left(\frac{2n+1+1}{2}\right)$મું, એટલે કે $(n+1)$ મું પદ થશે, કારણ કે $2n$ યુગ્મ છે.

તેનું મધ્યમ પદ ${}^{2n}C_nx^n\left(\frac{1}{x}\right)^n = {}^{2n}C_n$ (અચળ) થશે.

આ પદને x થી સ્વતંત્ર પદ અથવા અચળ પદ કહે છે.

ઉદાહરણ 5 : જો $(2 + a)^{50}$ નું 17મું અને 18મું પદ સમાન હોય, તો a શોધો.

ઉકેલ: $(x + y)^n$ ના વિસ્તરણનું $(r + 1)$મું પદ $T_{r+1} = {}^nC_r x^{n-r} y^r$ છે.

આથી, 17મા પદ માટે $r + 1 = 17$ એટલે કે $r = 16$ થશે.

આથી, $T_{17} = T_{16+1} = {}^{50}C_{16}\,(2)^{50-16}\,a^{16}$

$= {}^{50}C_{16}\,2^{34}\,a^{16}$.

તે જ પ્રમાણે, $T_{18} = {}^{50}C_{17}\,2^{33}\,a^{17}$

હવે $T_{17} = T_{18}$ આપેલું છે.

તેથી $\quad {}^{50}C_{16}\,(2)^{34}\,a^{16} = {}^{50}C_{17}\,(2)^{33}\,a^{17}$

$$\therefore \frac{{}^{50}C_{16}\cdot 2^{34}}{{}^{50}C_{17}\cdot 2^{33}} = \frac{a^{17}}{a^{16}}$$

એટલે કે $\quad a = \dfrac{{}^{50}C_{16} \times 2}{{}^{50}C_{17}} = \dfrac{50!}{16!\,34!} \times \dfrac{17!\;33!}{50!} \times 2 = 1$

ઉદાહરણ 6 : સાબિત કરો કે $(1+x)^{2n}$ના વિસ્તરણનું મધ્યમ પદ $\dfrac{1.3.5...(2n-1)}{n!}\,2^n x^n$ છે, જ્યાં n ધન પૂર્ણાંક છે.

ઉકેલ : $2n$ યુગ્મ હોવાથી, $(1 + x)^{2n}$ના વિસ્તરણનું મધ્યમ પદ $\left(\dfrac{2n}{2}+1\right)$મું, એટલે કે $(n + 1)$ મું પદ થશે.

$T_{n+1} = {}^{2n}C_n (1)^{2n-n}(x)^n = {}^{2n}C_n x^n$

$$= \frac{(2n)!}{n!\;n!}x^n$$

$$= \frac{2n\,(2n-1)\;\;(2n-2)\;\;...4.3.2.1}{n!\;\;n!}x^n$$

$$= \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4...(2n-2)\,(2n-1)\,(2n)}{n!n!}x^n$$

$$= \frac{[1\cdot 3\cdot 5...(2n-1)][2\cdot 4\cdot 6...(2n)]}{n!n!}x^n$$

$$= \frac{[1\cdot 3\cdot 5...(2n-1)]2^n[1\cdot 2\cdot 3...n]}{n!n!}x^n$$

$$= \frac{[1\cdot 3\cdot 5...(2n-1)]\,n!}{n!\;\;n!}2^n\cdot x^n$$

$$= \frac{1\cdot3\cdot5...(2n-1)}{n!}\, 2^n x^n$$

ઉદાહરણ 7 : $(x + 2y)^9$ના વિસ્તરણમાં x^6y^3 નો સહગુણક શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે $(x + 2y)^9$ ના વિસ્તરણમાં $(r + 1)$ મું પદ x^6y^3 વાળું પદ છે.

હવે, $T_{r+1} = {}^9C_r x^{9-r}(2y)^r = {}^9C_r 2^r \cdot x^{9-r} \cdot y^r$.

x^6y^3માં x ની ઘાત તથા y ની ઘાતની સરખામણી T_{r+1}માં તેમની ઘાત સાથે કરતાં $r = 3$ મળે.

આમ, x^6y^3 નો સહગુણક

$${}^9C_3 2^3 = \frac{9!}{3!\,6!}\cdot 2^3 = \frac{9.8.7}{3.2}\cdot 2^3 = 672.$$

ઉદાહરણ 8 : $(x + a)^n$ ના વિસ્તરણમાં બીજું, ત્રીજું અને ચોથું પદ અનુક્રમે 240, 720 અને 1080 છે. x, a અને n શોધો.

ઉકેલ : બીજું પદ $T_2 = 240$ છે.

$T_2 = {}^nC_1 x^{n-1}.\ a$ હોવાથી,

$${}^nC_1 x^{n-1}.\ a = 240 \qquad ...(1)$$

તે જ પ્રમાણે
$${}^nC_2 x^{n-2} a^2 = 720 \qquad ...(2)$$

અને
$${}^nC_3 x^{n-3} a^3 = 1080 \qquad ...(3)$$

(2) ને (1) વડે ભાગતાં,

$$\frac{{}^nC_2 x^{n-2}a^2}{{}^nC_1 x^{n-1}a} = \frac{720}{240} \text{ એટલે કે, } \frac{(n-1)!}{(n-2)!}\cdot\frac{a}{x} = 6$$

$$\therefore \frac{a}{x} = \frac{6}{(n-1)} \qquad ...(4)$$

(3)ને (2) વડે ભાગતાં,

$$\frac{a}{x} = \frac{9}{2(n-2)} \qquad ...(5)$$

(4) અને (5) પરથી,

$$\frac{6}{n-1} = \frac{9}{2(n-2)}.\ \text{આમ, } n = 5$$

આથી (1) પરથી $5x^4a = 240$ અને (4) પરથી, $\frac{a}{x} = \frac{3}{2}$

આ સમીકરણનું a અને x માટે સમાધાન કરતાં, $x = 2$ અને $a = 3$ મળે.

ઉદાહરણ 9 : $(1 + a)^n$ ના વિસ્તરણનાં ત્રણ ક્રમિક પદોના સહગુણકોનો ગુણોત્તર 1: 7 : 42 છે. n શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે $(1 + a)^n$ ના વિસ્તરણનાં ત્રણ ક્રમિક પદો $(r - 1)$મું, rમું અને $(r + 1)$મું પદ છે.

$(r-1)$ મું પદ ${}^nC_{r-2}a^{r-2}$ છે અને તેનો સહગુણક ${}^nC_{r-2}$ છે. આ જ પ્રમાણે, r અને $(r+1)$મા પદના સહગુણકો અનુક્રમે ${}^nC_{r-1}$ અને ${}^nC_r$ છે.

સહગુણકોનો ગુણોત્તર 1 : 7 : 42 હોવાથી,

$$\frac{{}^nC_{r-2}}{{}^nC_{r-1}} = \frac{1}{7}, \text{ એટલે કે, } n - 8r + 9 = 0 \qquad \ldots (1)$$

અને
$$\frac{{}^nC_{r-1}}{{}^nC_r} = \frac{7}{42}, \text{ એટલે કે, } n - 7r + 1 = 0 \text{ મળે.} \qquad \ldots (2)$$

સમીકરણો (1) અને (2) ઉકેલતાં $n = 55$ મળશે.

સ્વાધ્યાય 8.2

સહગુણકો શોધો : (પ્રશ્ન 1 તથા 2)

1. $(x+3)^8$ માં x^5નો

2. $(a-2b)^{12}$ માં a^5b^7 નો

નીચેના વિસ્તરણનું વ્યાપક પદ લખો : (પ્રશ્ન 3 તથા 4)

3. $(x^2 - y)^6$

4. $(x^2 - yx)^{12}, x \neq 0$

5. $(x-2y)^{12}$ના વિસ્તરણનું ચોથું પદ શોધો.

6. $\left(9x - \frac{1}{3\sqrt{x}}\right)^{18}$, $x \neq 0$ ના વિસ્તરણનું 13મું પદ શોધો.

નીચેના વિસ્તરણનું મધ્યમ પદ શોધો :

7. $\left(3 - \frac{x^3}{6}\right)^7$

8. $\left(\frac{x}{3} + 9y\right)^{10}$

9. $(1+a)^{m+n}$ ના વિસ્તરણમાં a^m અને a^n ના સહગુણકો સમાન છે તેમ સાબિત કરો.

10. $(x+1)^n$ના વિસ્તરણમાં $(r-1)$મા, r મા અને $(r+1)$ મા પદોના સહગુણકોનો ગુણોત્તર 1 : 3 : 5 હોય, તો n અને r શોધો.

11. સાબિત કરો કે $(1+x)^{2n}$ના વિસ્તરણમાં x^n નો સહગુણક, $(1+x)^{2n-1}$ ના વિસ્તરણના x^n ના સહગુણક કરતાં બે ગણો છે.

12. જો $(1+x)^m$ના વિસ્તરણમાં x^2 નો સહગુણક 6 હોય, તો m નું ધન મૂલ્ય શોધો.

પ્રકીર્ણ ઉદાહરણો

ઉદાહરણ 10 : $\left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3x}\right)^6$ ના વિસ્તરણનું અચળ પદ શોધો.

ઉકેલ : $T_{r+1} = {}^6C_r\left(\frac{3}{2}x^2\right)^{6-r}\left(-\frac{1}{3x}\right)^r$

$$= {}^6C_r \left(\frac{3}{2}\right)^{6-r} \left(x^2\right)^{6-r} (-1)^r \left(\frac{1}{x}\right)^r \left(\frac{1}{3^r}\right)$$

$$= (-1)^r \ {}^6C_r \frac{(3)^{6-2r}}{(2)^{6-r}} \ x^{12-3r}$$

જો x નો ઘાતાંક શૂન્ય હોય, તો તે અચળ પદ થાય, એટલે કે, $12 - 3r = 0$. આમ, $r = 4$

આથી 5 મું પદ અચળ પદ થશે અને તે $(-1)^4 \ {}^6C_4 \frac{(3)^{6-8}}{(2)^{6-4}} = \frac{5}{12}$.

ઉદાહરણ 11 : જો $(1 + a)^n$ ના વિસ્તરણમાં a^{r-1}, a^r અને a^{r+1} ના સહગુણકો સમાંતર શ્રેણીમાં હોય, તો સાબિત કરો કે $n^2 - n(4r + 1) + 4r^2 - 2 = 0$.

ઉકેલ : આપેલ વિસ્તરણનું $(r + 1)$ મું પદ ${}^nC_r a^r$. આમ a^r એ $(r + 1)$મા પદમાં મળે છે અને તેનો સહગુણક ${}^nC_r$ છે. આથી, a^{r-1}, a^r અને a^{r+1} ના સહગુણકો અનુક્રમે ${}^nC_{r-1}$, ${}^nC_r$ અને ${}^nC_{r+1}$ છે. આ સહગુણકો સમાંતર શ્રેણીમાં હોવાથી, ${}^nC_{r-1} + {}^nC_{r+1} = 2 \cdot {}^nC_r$ થાય.

તે પરથી, $\frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!} + \frac{n!}{(r+1)!(n-r-1)!} = 2 \times \frac{n!}{r!(n-r)!}$ મળે.

એટલે કે, $$\frac{1}{(r-1)!(n-r+1)(n-r)(n-r-1)!} + \frac{1}{(r+1)(r)(r-1)!(n-r-1)!}$$

$$= 2 \times \frac{1}{r(r-1)!(n-r)(n-r-1)!}$$

$$\therefore \frac{1}{(r-1)! \ (n-r-1)!} \left[\frac{1}{(n-r)(n-r+1)} + \frac{1}{(r+1) \ (r)}\right]$$

$$= 2 \times \frac{1}{(r-1)! \ (n-r-1)![r(n-r)]}$$

$$\therefore \frac{1}{(n-r+1)(n-r)} + \frac{1}{r(r+1)} = \frac{2}{r(n-r)},$$

$$\therefore \frac{r(r+1) + (n-r)(n-r+1)}{(n-r)(n-r+1)r(r+1)} = \frac{2}{r(n-r)}$$

$$\therefore \quad r(r + 1) + (n - r)(n - r + 1) = 2(r + 1)(n - r + 1)$$

$$\therefore \quad r^2 + r + n^2 - nr + n - nr + r^2 - r = 2(nr - r^2 + r + n - r + 1)$$

$$\therefore \quad n^2 - 4nr - n + 4r^2 - 2 = 0$$

$$\therefore \quad n^2 - n(4r + 1) + 4r^2 - 2 = 0$$

ઉદાહરણ 12 : બતાવો કે $(1 + x)^{2n}$ના વિસ્તરણના મધ્યમ પદનો સહગુણક એ $(1 + x)^{2n-1}$ના વિસ્તરણનાં મધ્યમ પદોના સહગુણકોના સરવાળા જેટલો છે.

ઉકેલ : $2n$ યુગ્મ હોવાથી $(1 + x)^{2n}$ના વિસ્તરણમાં માત્ર એક જ મધ્યમ પદ છે અને તે $\left(\frac{2n}{2}+1\right)$ મું, એટલે કે $(n + 1)$ મું પદ. $(n + 1)$ મું પદ $^{2n}C_n x^n$ છે. x^n નો સહગુણક $^{2n}C_n$ છે.

તે જ પ્રમાણે, $(2n - 1)$ અયુગ્મ છે, આથી બીજા વિસ્તરણમાં બે મધ્યમ પદ મળશે.

$\left(\frac{2n-1+1}{2}\right)$ મું અને $\left(\frac{2n-1+1}{2}+1\right)$મું પદ એટલે કે nમું અને $(n + 1)$મું પદ. આ પદના સહગુણકો અનુક્રમે $^{2n-1}C_{n-1}$ અને $^{2n-1}C_n$ થશે.

હવે, $^{2n-1}C_{n-1} + {}^{2n-1}C_n = {}^{2n}C_n$ છે જ. $[{}^nC_{r-1} + {}^nC_r = {}^{n+1}C_r$ના ઉપયોગથી$]$

ઉદાહરણ 13 : દ્વિપદી પ્રમેયનો ઉપયોગ કરી $(1 + 2a)^4 (2 - a)^5$ ના ગુણાકારમાં a^4નો સહગુણક શોધો.

ઉકેલ : આપણે આપેલ ગુણાકારના દરેક અવયવનું દ્વિપદી પ્રમેયનો ઉપયોગ કરી વિસ્તરણ કરીએ.

$$(1 + 2a)^4 = {}^4C_0 + {}^4C_1 (2a) + {}^4C_2 (2a)^2 + {}^4C_3 (2a)^3 + {}^4C_4 (2a)^4$$

$$= 1 + 4 (2a) + 6(4a^2) + 4 (8a^3) + 16a^4$$

$$= 1 + 8a + 24a^2 + 32a^3 + 16a^4$$

અને $(2 - a)^5 = {}^5C_0 (2)^5 - {}^5C_1 (2)^4 (a) + {}^5C_2 (2)^3 (a)^2 - {}^5C_3 (2)^2 (a)^3 + {}^5C_4 (2) (a)^4 - {}^5C_5 (a)^5$

$$= 32 - 80a + 80a^2 - 40a^3 + 10a^4 - a^5$$

આમ $(1 + 2a)^4 (2 - a)^5$

$$= (1 + 8a + 24a^2 + 32a^3 + 16a^4) (32 - 80a + 80a^2 - 40a^3 + 10a^4 - a^5)$$

બંને કૌંસનો પૂરેપૂરો ગુણાકાર કરીશું નહિ. આપણે a^4 આવે તેવાં જ પદો લખીશું. આમ કરવા માટે આપણે નોંધીશું કે $a^r. a^{4-r} = a^4$.

જેમાંથી a^4 મળે તેવાં પદો $1 (10a^4) + (8a) (-40a^3) + (24a^2) (80a^2) + (32a^3) (-80a) + (16a^4) (32) = -438a^4$

આમ, આપેલા ગુણાકારમાં a^4નો સહગુણક -438 છે.

ઉદાહરણ 14 : $(x + a)^n$ના વિસ્તરણમાં છેલ્લેથી r મું પદ શોધો.

ઉકેલ : $(x + a)^n$ના વિસ્તરણમાં $(n + 1)$ પદો છે. પદોનું અવલોકન કરતાં અંતિમ પદથી પ્રથમ પદ એ છેલ્લું પદ થશે, એટલે કે, વિસ્તરણનું $(n + 1)$ મું પદ થશે તેમ લાગે છે અને $n + 1 = (n + 1) - (1 - 1)$. વિસ્તરણનું અંતિમ પદથી બીજું પદ એ n મું પદ થશે અને $n = (n + 1) - (2 - 1)$. અંતિમ પદથી ત્રીજું પદ એ વિસ્તરણનું $(n - 1)$મું પદ થશે અને $n - 1 = (n + 1) - (3 - 1)$ અને આ જ પ્રમાણે આગળ, આમ છેલ્લેથી r માં પદનો ક્રમ એ $(n + 1) - (r - 1) = (n - r + 2)$ થશે અને $(n - r + 2)$મું પદ $^nC_{n-r+1}\, x^{r-1}\, a^{n-r+1}$ છે.

ઉદાહરણ 15 : $\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{2\sqrt[3]{x}}\right)^{18}$ ના વિસ્તરણનું x થી સ્વતંત્ર પદ(અચળ પદ) શોધો. $x>0$

ઉકેલ : $T_{r+1} = {}^{18}C_r \left(\sqrt[3]{x}\right)^{18-r}\left(\frac{1}{2\sqrt[3]{x}}\right)^r$

$$= {}^{18}C_r\, x^{\frac{18-r}{3}} \cdot \frac{1}{2^r . x^{\frac{r}{3}}}$$

$$= {}^{18}C_r \frac{1}{2^r} . x^{\frac{18-2r}{3}}$$

આપણે x થી સ્વતંત્ર પદ એટલે કે જે પદમાં x ન હોય એવું પદ મેળવવું છે.

આથી $\frac{18-2r}{3}=0$ લઈશું. આથી $r = 9$ મળશે.

$\therefore$ જરૂરી પદ ${}^{18}C_9 \frac{1}{2^9}$

ઉદાહરણ 16 : $\left(x-\frac{3}{x^2}\right)^m$ ના વિસ્તરણમાં પ્રથમ ત્રણ પદોના સહગુણકોનો સરવાળો 559 છે. વિસ્તરણમાં x^3 હોય તેવું પદ શોધો. m એ પ્રાકૃતિક સંખ્યા છે.

ઉકેલ : $\left(x-\frac{3}{x^2}\right)^m$ ના વિસ્તરણનાં પ્રથમ ત્રણ પદોના સહગુણકો અનુક્રમે ${}^mC_0$, $(-3)\ {}^mC_1$ અને $9\ {}^mC_2$ છે.

આથી આપેલ શરત પ્રમાણે,

${}^mC_0 - 3\ {}^mC_1 + 9\ {}^mC_2 = 559$, એટલે કે $1 - 3m + \frac{9m(m-1)}{2} = 559$

તે પરથી $m = 12$ મળશે. (m એ પ્રાકૃતિક સંખ્યા છે)

હવે $T_{r+1} = {}^{12}C_r x^{12-r}\left(-\frac{3}{x^2}\right)^r = {}^{12}C_r(-3)^r \cdot x^{12-3r}$

આપણને x^3 વાળું પદ જોઈએ છે. આથી $12 - 3r = 3$ મૂકતાં, $r = 3$ મળશે.

આમ, માગેલું પદ ${}^{12}C_3(-3)^3 x^3$, એટલે કે, $-5940\ x^3$ છે.

ઉદાહરણ 17 : જો $(1 + x)^{34}$ ના વિસ્તરણના $(r - 5)$માં પદ અને $(2r - 1)$માં પદના સહગુણકો સમાન હોય, તો r શોધો.

ઉકેલ : $(1 + x)^{34}$ ના વિસ્તરણના $(r - 5)$માં પદ અને $(2r - 1)$માં પદના સહગુણકો અનુક્રમે ${}^{34}C_{r-6}$ અને ${}^{34}C_{2r-2}$ છે.

તેઓ સમાન હોવાથી ${}^{34}C_{r-6} = {}^{34}C_{2r-2}$

આથી $r - 6 = 2r - 2$ અથવા $r - 6 = 34 - (2r - 2)$ થશે.

[જો ${}^nC_r = {}^nC_p$ તો $r = p$ અથવા $r = n - p$ એ સત્યનો ઉપયોગ કરતાં]

આથી, $r = -4$ અથવા $r = 14$ મળશે. r એ પ્રાકૃતિક સંખ્યા હોવાથી $r = -4$ શક્ય નથી, આથી, $r = 14$.

પ્રકીર્ણ સ્વાધ્યાય 8

1. જો $(a+b)^n$ ના વિસ્તરણનાં પ્રથમ ત્રણ પદો અનુક્રમે 729, 7290 અને 30375 હોય, તો a, b અને n શોધો.
2. જો $(3+ax)^9$ના વિસ્તરણમાં x^2 અને x^3 ના સહગુણકો સમાન હોય, તો a શોધો.
3. દ્વિપદી પ્રમેયનો ઉપયોગ કરી, $(1+2x)^6(1-x)^7$ ના ગુણાકારમાં x^5 નો સહગુણક શોધો.
4. જો a અને b ભિન્ન પૂર્ણાંક હોય, તો સાબિત કરો કે $a^n - b^n$નો એક અવયવ $a-b$ છે, જ્યાં n એ ધન પૂર્ણાંક છે.
   [**સૂચન**: $a^n = (a-b+b)^n$ લઈ વિસ્તરણ કરો.]
5. $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^6 - \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^6$ ની કિંમત શોધો.
6. $\left(a^2+\sqrt{a^2-1}\right)^4 + \left(a^2-\sqrt{a^2-1}\right)^4$ ની કિંમત શોધો.
7. વિસ્તરણનાં પ્રથમ ત્રણ પદોનો ઉપયોગ કરી $(0.99)^5$ ની આશરે કિંમત શોધો.
8. જો $\left(\sqrt[4]{2}+\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)^n$ ના વિસ્તરણના શરૂઆતથી પાંચમા પદ અને છેલ્લેથી પાંચમા પદનો ગુણોત્તર $\sqrt{6}:1$ હોય, તો n શોધો.
9. દ્વિપદી પ્રમેયનો ઉપયોગ કરી $\left(1+\frac{x}{2}-\frac{2}{x}\right)^4, x \neq 0$ નું વિસ્તરણ કરો.
10. દ્વિપદી પ્રમેયનો ઉપયોગ કરી $(3x^2 - 2ax + 3a^2)^3$ નું વિસ્તરણ શોધો.

સારાંશ

◆ કોઈ પણ ધન પૂર્ણાંક n માટે દ્વિપદીનું વિસ્તરણ દ્વિપદી પ્રમેયથી કરી શકાય છે,
તે $(a+b)^n = {}^nC_0a^n + {}^nC_1a^{n-1}b + {}^nC_2a^{n-2}b^2 + ... + {}^nC_{n-1}a\ b^{n-1} + {}^nC_nb^n$ છે.

◆ વિસ્તરણનાં સહગુણકો નિશ્ચિત ગોઠવણીમાં ગોઠવાય, તો આ ગોઠવણને પાસ્કલનો ત્રિકોણ કહે છે.

◆ $(a+b)^n$ ના વિસ્તરણનું વ્યાપક પદ $T_{r+1} = {}^nC_ra^{n-r}b^r$ છે.

◆ $(a+b)^n$ ના વિસ્તરણમાં, જો n યુગ્મ હોય, તો મધ્યમ પદ $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ મું પદ થશે. જો n અયુગ્મ હોય, તો મધ્યમ પદો $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ મું અને $\left(\frac{n+1}{2}+1\right)$ મું થશે.

Historical Note

The ancient Indian mathematicians knew about the coefficients in the expansions of $(x+y)^n$, $0 \leq n \leq 7$. The arrangement of these coefficients was in the form of a diagram called *Meru-Prastara*, provided by Pingla in his book *Chhanda shastra* (200B.C.). This triangular arrangement is also found in the work of Chinese mathematician Chu-shi-kie in 1303. The term binomial coefficients was first introduced by the German mathematician, Michael Stipel (1486-1567) in approximately 1544. Bombelli (1572) also gave the coefficients in the expansion of $(a+b)^n$, for $n = 1,2 ...,7$ and Oughtred (1631) gave them for $n = 1, 2,..., 10$. The arithmetic triangle, popularly known as *Pascal's triangle* and similar to the *Meru-Prastara* of Pingla was constructed by the French mathematician Blaise Pascal (1623-1662) in 1665.

The present form of the binomial theorem for integral values of n appeared in *Trate du triange arithmetic*, written by Pascal and published posthumously in 1665.

— ❖ —

પ્રકરણ 9

શ્રેણી અને શ્રેઢી

❖ *Natural numbers are the product of human spirit. – DEDEKIND* ❖

9.1 પ્રાસ્તાવિક

સાહિત્યમાં અને ગણિતશાસ્ત્રમાં શ્રેણી શબ્દ એક જ અર્થમાં વાપરવામાં આવે છે. જ્યારે આપણે કહીએ છીએ કે વસ્તુનો જથ્થો શ્રેણીમાં રહેલ છે, ત્યારે સામાન્ય રીતે એવું માનીએ છીએ કે જથ્થામાં રહેલ વસ્તુઓ પ્રથમ સભ્ય, દ્વિતીય સભ્ય, તૃતીય સભ્ય સ્વરૂપે છે, વગેરે. ઉદાહરણ તરીકે, જુદા જુદા સમયે માનવ વસતી કે બૅક્ટેરિયાની સંખ્યા શ્રેણી રચે છે. બૅંકમાં જમા કરાવેલા પૈસા દ્વારા દરેક વર્ષ પછીની મળતી રકમ શ્રેણી બનાવે છે. વસ્તુના ઘસારાની કિંમત શ્રેણી બનાવે છે. શ્રેણી એ માનવ પ્રવૃત્તિનાં વિવિધ ક્ષેત્રમાં મહત્ત્વપૂર્ણ મનાય છે.

Fibonacci
(1175-1250)

નિશ્ચિત પદ્ધતિને અનુસરતા અનુક્રમને ***શ્રેણી*** કહે છે. અગાઉના ધોરણમાં આપણે ***સમાંતર શ્રેણી*** વિશે શીખી ગયાં છીએ. આ પ્રકરણમાં હવે પછી સમાંતર શ્રેણી વિશે વધુ શીખીશું તથા ***સમાંતર મધ્યક*** *(arithmetic mean)* ***સમગુણોત્તર મધ્યક*** *(geometric mean)*, સમાંતર અને સમગુણોત્તર મધ્યક વચ્ચેનો સંબંધ, **n પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો સરવાળો**, **n ક્રમિક પ્રાકૃતિક સંખ્યાના વર્ગોનો સરવાળો** અને **n ક્રમિક પ્રાકૃતિક સંખ્યાના ઘનના સરવાળા** વિશે શીખીશું.

9.2 શ્રેણીઓ

નીચેનાં ઉદાહરણો જોઈએ :

માની લઈએ કે બે પેઢી વચ્ચેનું અંતર 30 વર્ષનું છે, તો છેલ્લાં 300 વર્ષમાં કેટલા પૂર્વજો અર્થાત્ માતા-પિતા, દાદા-દાદી, વડદાદા-વડદાદી વગેરે મળે ?

અહીં, પેઢીની કુલ સંખ્યા $= \frac{300}{30} = 10$

માણસના પૂર્વજોની સંખ્યા પ્રથમ, દ્વિતીય, તૃતીય,.... દસમી પેઢીએ 2, 4, 8, 16, 32, ..., 1024 જેટલી હશે. આ સંખ્યા દ્વારા ***શ્રેણી*** બને છે તેમ આપણે કહીશું.

10 ને 3 વડે ભાગતાં ક્રમિક સોપાનથી મળતા ભાગફળ 3,3.3,3.33,3.333, ... વગેરે છે. આ ભાગફળ પણ શ્રેણી રચે છે. શ્રેણીમાં આવતી જુદી જુદી સંખ્યાને ***પદ*** કહીશું. આપણે શ્રેણીનાં પદોને $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$, વગેરે દ્વારા દર્શાવીશું, તેમાં અનુગ *(Suffix)* પદનો ક્રમાંક દર્શાવે છે. શ્રેણીમાં n મું પદ એ n મા સ્થાને રહેલી સંખ્યા છે અને તેને a_n વડે દર્શાવાય. શ્રેણીના n મા પદને ***વ્યાપક પદ*** તરીકે ઓળખાય છે.

આમ, ઉપર દર્શાવેલ વ્યક્તિના પૂર્વજોથી બનતી શ્રેણીનાં પદ :

$$a_1 = 2,\ a_2 = 4,\ a_3 = 8,\ ...,\ a_{10} = 1024 \text{ છે.}$$

આ જ રીતે ભાગફળના ઉદાહરણમાં,

$$a_1 = 3,\ a_2 = 3.3,\ a_3 = 3.33,\ ...,\ a_6 = 3.33333, \text{ વગેરે.}$$

જે શ્રેણીમાં પદોની સંખ્યા નિશ્ચિત ધન પૂર્ણાંક જેટલી હોય તેને ***સાન્ત શ્રેણી*** કહેવાય. ઉદાહરણ તરીકે, પૂર્વજોથી બનતી શ્રેણી સાન્ત છે. કેમ કે તેમાં 10 પદ (નિશ્ચિત સંખ્યા) રહેલ છે.

જે શ્રેણી સાન્ત નથી, તેને ***અનંત શ્રેણી*** કહેવાય છે. ઉદાહરણ તરીકે, ઉપર દર્શાવેલ ક્રમિક ભાગફળવાળા દાખલામાં ***અનંત શ્રેણી*** મળે છે. અનંતનો અર્થ ‘ક્યારેય અંત ના હોય’ તેવો થાય.

ઘણી વખત એવું શક્ય બને કે, શ્રેણીના અલગ અલગ પદથી શ્રેણીનું બૈજિક સૂત્ર શક્ય બને. ઉદાહરણ તરીકે, યુગ્મ પ્રાકૃતિક સંખ્યા દ્વારા બનતી શ્રેણી 2, 4, 6, ...લઈએ.

અહીં,
$$a_1 = 2 = 2 \times 1,\quad a_2 = 4 = 2 \times 2$$
$$a_3 = 6 = 2 \times 3,\quad a_4 = 8 = 2 \times 4$$
....

....
$$a_{23} = 46 = 2 \times 23,\ a_{24} = 48 = 2 \times 24 \text{ વગેરે.}$$

અલબત્ત આપણે જોઈ શકીએ કે આ શ્રેણીનું n મું પદ પ્રાકૃતિક સંખ્યા n માટે $a_n = 2n$ એમ લખી શકાય. આ જ રીતે, અયુગ્મ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ 1, 3, 5, ..., નું n મું પદ $a_n = 2n - 1$, સૂત્રથી દર્શાવી શકાય. n એ પ્રાકૃતિક સંખ્યા છે.

ઘણા કિસ્સાઓમાં આંકડાની ગોઠવણી દ્વારા કોઈ તરાહ જોઈ શકાતી નથી. ઉદાહરણ તરીકે, 1, 1, 2, 3, 5, 8,... પરંતુ આ શ્રેણી આવૃત્ત સંબંધ દ્વારા સર્જાય છે.

$$a_1 = a_2 = 1$$

$$a_3 = a_1 + a_2$$

$$a_n = a_{n-2} + a_{n-1},\ n > 2$$

આ શ્રેણીને ***ફિબોનાકી શ્રેણી*** *(Fibonacci Sequence)* કહેવાય છે.

અવિભાજ્ય સંખ્યાઓની શ્રેણી 2, 3, 5, 7,...માં આપણે n મું અવિભાજ્ય પદ મેળવવાનું સૂત્ર શોધી શકતા નથી. આવી શ્રેણીની સમજ શાબ્દિક રીતે જ આપી શકાય.

આપણે, દરેક શ્રેણીમાં તેનાં તમામ પદોનો સમાવેશ કરે તેવા કોઇ ચોક્કસ સૂત્રની અપેક્ષા રાખતા નથી.

આમ છતાં આપણે $a_1, a_2, a_3,...,a_n$... નું ક્રમમાં સર્જન કરી શકાય તેવા કોઈ સૈદ્ધાંતિક નિયમ કે સૈદ્ધાંતિક તારણની અપેક્ષા રાખીએ છીએ.

ઉપરની માહિતી પરથી કહી શકાય કે, જેનો પ્રદેશ પ્રાકૃતિક સંખ્યાનો ગણ અથવા તેનો કોઈ ઉપગણ {1, 2, 3...k} જેવો હોય તેને શ્રેણી કહેવાય. કેટલીક વખત a_n માટે વિધેયનો સંકેત $a(n)$ ઉપયોગમાં લેવાય છે.

9.3 શ્રેઢી

ધારો કે $a_1, a_2, a_3,...,a_n$... આપેલ શ્રેણી છે. તો પદાવલિ

$$a_1 + a_2 + a_3 +,...+ a_n + ...$$

ને આપેલ શ્રેણીને *સંગત શ્રેઢી* કહેવાય. જો શ્રેણી સાન્ત કે અનંત હોય તો અનુરૂપ શ્રેઢી પણ સાન્ત કે અનંત થાય. શ્રેઢીને ટૂંકમાં ગ્રીક મૂળાક્ષર $\sum$ (સિગ્મા) સંકેત દ્વારા દર્શાવવામાં આવે છે. તેનો અર્થ સરવાળો થાય છે. આમ, શ્રેઢી $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$ ને ટૂંકમાં $\sum_{k=1}^{n} a_k$ એમ લખાય.

નોંધ : જ્યારે શ્રેઢી શબ્દનો ઉપયોગ કરવામાં આવે ત્યારે તે રજૂઆત સરવાળો જ દર્શાવે છે. ઉદાહરણ તરીકે 1 + 3 + 5 + 7 એ એક ચાર પદોવાળી સાન્ત શ્રેઢી છે. જ્યારે આપણે ''શ્રેઢીનો સરવાળો'' એવો શબ્દસમૂહ વાપરીએ ત્યારે તેનાં પદોનો સરવાળો કરવો એટલે કે સરવાળાનું મૂલ્ય મેળવવું તેવો અર્થ કરીશું. આમ, આપેલ શ્રેઢીનો સરવાળો 16 છે. હવે, આપણે કેટલાંક ઉદાહરણો જોઈએ.

ઉદાહરણ 1 : નીચે વ્યાખ્યાયિત શ્રેણીઓનાં પ્રથમ ત્રણ પદો લખો.

(i) $a_n = 2n + 5$ (ii) $a_n = \frac{n-3}{4}$.

ઉકેલ : (i) અહીં $a_n = 2n + 5$

$n = 1, 2, 3,$ લેતાં,

$$a_1 = 2(1) + 5 = 7,\ a_2 = 9,\ a_3 = 11$$

આથી, માંગેલ પદો 7, 9, 11 છે.

(ii) અહીં $a_n = \frac{n-3}{4}$. આથી,

$$a_1 = \frac{1-3}{4} = -\frac{1}{2},\ a_2 = -\frac{1}{4},\ a_3 = 0$$

આમ, માંગેલ પ્રથમ ત્રણ પદ $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}$ અને 0 છે.

ઉદાહરણ 2 : શ્રેણી $a_n = (n-1)(2-n)(3+n)$ નું 20 મું પદ કયું હશે ?

ઉકેલ : $n = 20$ મૂકતાં,

$$a_{20} = (20-1)(2-20)(3+20)$$

$$= 19 \times (-18) \times (23)$$

$$= -7866$$

ઉદાહરણ 3 : શ્રેણી a_n નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત છે :

$$a_1 = 1,\ n \geq 2 \text{ માટે } a_n = a_{n-1} + 2.$$

આ શ્રેણીનાં પ્રથમ પાંચ પદ લખો અને સંબંધિત શ્રેઢી લખો :

ઉકેલ : અહીં,

$$a_1 = 1,\ a_2 = a_1 + 2 = 1 + 2 = 3,$$

$$a_3 = a_2 + 2 = 3 + 2 = 5,$$

$$a_4 = a_3 + 2 = 5 + 2 = 7,$$

$$a_5 = a_4 + 2 = 7 + 2 = 9.$$

આમ, શ્રેણીનાં પ્રથમ પાંચ પદ 1,3,5,7 અને 9 છે અને સંબંધિત શ્રેઢી $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \ldots$ છે.

સ્વાધ્યાય 9.1

પ્રશ્ન 1 થી 6 માં જેનું n મું પદ આપેલ છે તે શ્રેણીનાં પ્રથમ પાંચ પદ લખો :

1. $a_n = n(n+2)$ **2.** $a_n = \frac{n}{n+1}$ **3.** $a_n = 2^n$

4. $a_n = \frac{2n-3}{6}$ **5.** $a_n = (-1)^{n-1} 5^{n+1}$ **6.** $a_n = \frac{n(n^2+5)}{4}$

પ્રશ્ન 7 થી 10 માં જેનું n મું પદ આપેલ છે તે શ્રેણીનાં નિર્દેશિત પદ શોધો :

7. $a_n = 4n - 3;\ a_{17},\ a_{24}$ **8.** $a_n = \frac{n^2}{2^n};\ a_7$

9. $a_n = (-1)^{n-1}n^3;\ a_9$ **10.** $a_n = \dfrac{n(n-2)}{n+3};\ a_{20}$

પ્રશ્ન 11 થી 13 માં આપેલ શ્રેણીઓનાં પ્રથમ પાંચ પદ શોધો અને સંબંધિત શ્રેઢી મેળવો :

11. $a_1 = 3,\ n > 1$ માટે $a_n = 3a_{n-1} + 2$

12. $a_1 = -1,\ n \geq 2$ માટે $a_n = \dfrac{a_{n-1}}{n}$

13. $a_1 = a_2 = 2, n > 2$ માટે $a_n = a_{n-1} - 1$

14. ફિબોનાકી શ્રેણી,

$1 = a_1 = a_2$ અને $n > 2$ માટે $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત થાય છે.

$n = 1, 2, 3, 4, 5$ માટે $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ મેળવો.

9.4 સમાંતર શ્રેણી (A.P.)

આપણે અગાઉ અભ્યાસ કર્યો હોય તેવાં કેટલાંક સૂત્રો અને ગુણધર્મો યાદ કરીએ.

જો શ્રેણી $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ માટે $a_{n+1} = a_n + d, n \in \mathbf{N}$, હોય તો તેને ***સમાંતર શ્રેણી*** કહીશું. અત્રે a_1 ને આ સમાંતર શ્રેણીનું ***પ્રથમ પદ*** અને d ને ***સામાન્ય તફાવત*** કહીશું.

પ્રથમ પદ a હોય અને સામાન્ય તફાવત d હોય તેવી સમાંતર શ્રેણી $a, a + d, a + 2d, \ldots$ લો.

આ સમાંતર શ્રેણીનું n મું (વ્યાપક) પદ $a_n = a + (n - 1) d$ છે.

સમાંતર શ્રેણીના કેટલાક સરળ ગુણધર્મો નીચે આપેલ છે તે આપણે ચકાસીએ :

(i) જો સમાંતર શ્રેણીનાં બધાં જ પદમાં કોઈ અચળ ઉમેરવામાં આવે તો બનતી નવી શ્રેણી પણ સમાંતર શ્રેણી જ હોય.

(ii) જો સમાંતર શ્રેણીનાં બધાં જ પદમાંથી કોઈ અચળ બાદ કરવામાં તો બનતી નવી શ્રેણી પણ સમાંતર શ્રેણી જ હોય.

(iii) જો સમાંતર શ્રેણીનાં બધાં જ પદને કોઈ અચળ વડે ગુણવામાં આવે તો બનતી નવી શ્રેણી પણ સમાંતર શ્રેણી જ હોય.

(iv) જો સમાંતર શ્રેણીનાં બધાં જ પદને કોઈ શૂન્યેતર અચળથી ભાગવામાં આવે તો પણ બનતી નવી શ્રેણી પણ સમાંતર શ્રેણી જ હોય.

અહીં સમાંતર શ્રેણી માટે આપણે નીચેના સંકેતો ઉપયોગમાં લઈશું :

$a =$ પ્રથમ પદ, $l =$ છેલ્લું પદ, $d =$ સામાન્ય તફાવત,

$n =$ પદની સંખ્યા

$S_n =$ સમાંતર શ્રેણીનાં પ્રથમ n પદોનો સરવાળો

ધારો કે, $a, a + d, a + 2d, \ldots, a + (n - 1) d$ સમાંતર શ્રેણી છે. તો

$$l = a + (n - 1) d$$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

તેને આપણે, $S_n = \frac{n}{2}[a+l]$ તરીકે પણ લખી શકીએ.

નીચેનાં ઉદાહરણો સમજીએ :

ઉદાહરણ 4 : $m \neq n$ માટે કોઈક સમાંતર શ્રેણીનું m મું પદ n અને n મું પદ m હોય, તો તેનું p મું પદ શોધો.

ઉકેલ : અહીં, $a_m = a + (m-1)d = n$, ... (1)

$a_n = a + (n-1)d = m$ ... (2)

(1) અને (2) ને ઉકેલતાં,

$(m-n)d = n - m$, એટલે કે $d = -1$ અને ... (3)

$a = n + m - 1$ ... (4)

આથી, $a_p = a + (p-1)d$

$\therefore \ a_p = n + m - 1 + (p-1)(-1) = n + m - p$

આમ, p મું પદ $n + m - p$ થાય.

ઉદાહરણ 5 : અચળ P અને Q માટે સમાંતર શ્રેણીનાં પ્રથમ n પદોનો સરવાળો $nP + \frac{1}{2}n(n-1)Q$ છે. તો સામાન્ય તફાવત શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે $a_1, a_2, \ldots a_n$ આપેલ સમાંતર શ્રેણી છે.

આથી, $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n$

$= nP + \frac{1}{2}n(n-1)Q$

$\therefore \ S_1 = a_1 = P$

$S_2 = a_1 + a_2 = 2P + Q$

આથી, $a_2 = S_2 - S_1 = P + Q$

આથી, સામાન્ય તફાવત $d = a_2 - a_1 = (P + Q) - P = Q$.

ઉદાહરણ 6 : પ્રત્યેક પ્રાકૃતિક સંખ્યા n માટે બે સમાંતર શ્રેણીઓનાં પ્રથમ n પદોના સરવાળાનો ગુણોત્તર $(3n+8):(7n+15)$ હોય, તો તેમનાં 12 માં પદનો ગુણોત્તર શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે પ્રથમ અને દ્વિતીય સમાંતર શ્રેણીનાં પ્રથમ પદ અનુક્રમે a_1 અને a_2 તથા સામાન્ય તફાવત d_1 અને d_2 છે. આપેલ શરત પ્રમાણે,

$$\therefore \ \frac{\text{પ્રથમ શ્રેણીનાં પ્રથમ } n \text{ પદોનો સરવાળો}}{\text{દ્વિતીય શ્રેણીનાં પ્રથમ } n \text{ પદોનો સરવાળો}} = \frac{3n+8}{7n+15}$$

$$\therefore \ \frac{\frac{n}{2}[2a_1+(n-1)d_1]}{\frac{n}{2}[2a_2+(n-1)d_2]} = \frac{3n+8}{7n+15}$$

$$\therefore \ \frac{2a_1+(n-1)d_1}{2a_2+(n-1)d_2} = \frac{3n+8}{7n+15} \quad \ldots (1)$$

હવે, $\dfrac{\text{પ્રથમ શ્રેણીનું 12 મું પદ}}{\text{દ્વિતિય શ્રેણીનું 12 મું પદ}} = \dfrac{a_1 + 11d_1}{a_2 + 11d_2}$

$$\frac{2a_1 + 22d_1}{2a_2 + 22d_2} = \frac{3 \times 23 + 8}{7 \times 23 + 15} \qquad [(1)\text{માં } n = 23 \text{ મૂકતાં}]$$

આમ, $\dfrac{a_1 + 11d_1}{a_2 + 11d_2} = \dfrac{\text{પ્રથમ શ્રેણીનું 12 મું પદ}}{\text{દ્વિતીય શ્રેણીનું 12 મું પદ}}$

$$= \frac{7}{16}$$

આથી, માંગેલ ગુણોત્તર 7 : 16 છે.

ઉદાહરણ 7 : એક વ્યક્તિના પ્રથમ વર્ષની આવક ₹ 3,00,000 છે. તેની આવકમાં પછીનાં 19 વર્ષ સુધી પ્રતિ વર્ષ ₹ 10,000 નો વધારો થાય છે. તો તે 20 વર્ષમાં કુલ કેટલી રકમ મેળવશે ?

ઉકેલ : અહીં, આપણી પાસે સમાંતર શ્રેણી છે.

$a = 3{,}00{,}000$, $d = 10{,}000$ અને $n = 20$.

સૂત્રનો ઉપયોગ કરતાં,

$$S_{20} = \frac{20}{2}[600000 + 19 \times 10000]$$

$$= 10\ (790000) = 79{,}00{,}000$$

આમ, 20 વર્ષના અંતે તે વ્યક્તિ કુલ ₹ 79,00,000 મેળવશે.

9.4.1 સમાંતર મધ્યક

a અને b આપેલ સંખ્યાઓ છે. આપણે આ સંખ્યાઓ વચ્ચે સંખ્યા A ઉમેરી શકીએ કે જેથી a, A, b સમાંતર શ્રેણીમાં હોય, તો આવી સંખ્યા Aને આપેલ સંખ્યાઓ a અને b નો ***સમાંતર મધ્યક*** કહેવાય. આપણે નોંધીએ કે,

$$A - a = b - A, \text{ એટલે કે, } \quad A = \frac{a+b}{2}$$

આમ, બે સંખ્યાઓ a અને b ના સમાંતર મધ્યકનું અર્થઘટન એટલે કે તેની સરેરાશ $\dfrac{a+b}{2}$ છે એમ પણ કહી શકાય. દાખલા તરીકે, બે સંખ્યાઓ 4 અને 16 નો સમાંતર મધ્યક 10 છે. આમ, આપણે 4 અને 16 ની વચ્ચે 10 મૂકી, 4, 10 અને 16 ને સમાંતર શ્રેણીનાં પદ રચ્યાં. હવે આ સ્વાભાવિક પ્રશ્ન ઉદ્‌ભવશે. આપણે બે સંખ્યાઓ વચ્ચે બે કે તેથી વધુ સંખ્યાઓ ઉમેરી શકીએ કે જેથી બનતી શ્રેણી સમાંતર શ્રેણી હોય ? જુઓ કે આપેલ સંખ્યાઓ 4 અને 16 વચ્ચે 8 અને 12 ઉમેરતાં બનતી શ્રેણી 4, 8, 12, 16 પણ સમાંતર શ્રેણી છે.

વ્યાપક રીતે આપેલ બે સંખ્યાઓ a અને b વચ્ચે આપણે ઇચ્છીએ તેટલી સંખ્યાઓ ઉમેરી શકીએ જેથી બનતી શ્રેણી સમાંતર શ્રેણી હોય.

ધારો કે a અને b વચ્ચે $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ એવી n સંખ્યાઓ છે કે જેથી $a, A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n, b$ સમાંતર શ્રેણી બને. અહીં, b એ $(n + 2)$ મું પદ છે. આથી, $b = a + [(n + 2) - 1]d = a + (n + 1)\,d$.

આથી, $d = \dfrac{b-a}{n+1}$.

આમ, a અને b વચ્ચેની n સંખ્યાઓ નીચે પ્રમાણે હશે :

$$A_1 = a + d = a + \frac{b-a}{n+1}$$

$$A_2 = a + 2d = a + \frac{2(b-a)}{n+1}$$

$$A_3 = a + 3d = a + \frac{3(b-a)}{n+1}$$

....

....

$$A_n = a + nd = a + \frac{n(b-a)}{n+1}$$

ઉદાહરણ 8 : જેથી બનતી શ્રેણી સમાંતર શ્રેણી બને તે રીતે 3 અને 24 વચ્ચે 6 સંખ્યાઓ ઉમેરો.

ઉકેલ : ધારો કે આપણે 3 અને 24 વચ્ચે A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 અને A_6 એ 6 સંખ્યાઓ એ રીતે ઉમેરીએ છીએ કે જેથી, $3, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, 24$ સમાંતર શ્રેણીમાં હોય.

અહીં $a = 3, b = 24, n = 8$.

આથી, $24 = 3 + (8 - 1)\, d,$

$\therefore\ d = 3.$

આમ,

$A_1 = a + d = 3 + 3 = 6;$ $A_2 = a + 2d = 3 + 2 \times 3 = 9;$

$A_3 = a + 3d = 3 + 3 \times 3 = 12;$ $A_4 = a + 4d = 3 + 4 \times 3 = 15;$

$A_5 = a + 5d = 3 + 5 \times 3 = 18;$ $A_6 = a + 6d = 3 + 6 \times 3 = 21.$

આથી 3 અને 24 વચ્ચેની માંગેલ પ્રમાણેની 6 સંખ્યાઓ 6, 9, 12, 15, 18 અને 21 છે.

સ્વાધ્યાય 9.2

1. 1 થી 2001 સુધીના અયુગ્મ પૂર્ણાંકોનો સરવાળો શોધો.
2. 100 અને 1000 વચ્ચેની 5 ની ગુણિત પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો સરવાળો શોધો.
3. એક સમાંતર શ્રેણીનું પ્રથમ પદ 2 છે અને પ્રથમ પાંચ પદોનો સરવાળો પછીનાં પાંચ પદના સરવાળાના એક ચતુર્થાંશ ભાગનો છે, તો સાબિત કરો કે 20 મું પદ –112 છે.
4. $-6, -\frac{11}{2}, -5, \ldots$ સમાંતર શ્રેણીનાં કેટલાં પ્રથમ પદનો સરવાળો –25 થાય ?

5. એક સમાંતર શ્રેણીનું p મું પદ $\frac{1}{q}$ અને q મું પદ $\frac{1}{p}$ છે. $p \neq q$ માટે સાબિત કરો કે પ્રથમ pq પદનો સરવાળો $\frac{1}{2}(pq+1)$ થાય.

6. સમાંતર શ્રેણી 25, 22, 19, ... નાં નિશ્ચિત સંખ્યાના શરૂઆતના પદનો સરવાળો 116 હોય તો છેલ્લું પદ શોધો.

7. જે સમાંતર શ્રેણીનું k મું પદ $5k + 1$ હોય તેનાં પ્રથમ n પદનો સરવાળો શોધો.

8. અચળ p, q માટે જે સમાંતર શ્રેણીનાં પ્રથમ n પદોનો સરવાળો $(pn + qn^2)$ હોય, તેનો સામાન્ય તફાવત શોધો.

9. પ્રત્યેક પ્રાકૃતિક સંખ્યા n માટે બે સમાંતર શ્રેણીનાં પ્રથમ n પદોના સરવાળાનો ગુણોત્તર $(5n+4):(9n+6)$ છે. તેમનાં 18 માં પદનો ગુણોત્તર મેળવો.

10. સમાંતર શ્રેણીના પ્રથમ p પદોનો સરવાળો, પ્રથમ q પદોના સરવાળા જેટલો થાય છે, તો પ્રથમ $(p + q)$ પદોનો સરવાળો શોધો.

11. એક સમાંતર શ્રેણીનાં પ્રથમ p, q અને r પદોના સરવાળા અનુક્રમે a, b અને c છે. સાબિત કરો કે $\frac{a}{p}(q-r)+\frac{b}{q}(r-p)+\frac{c}{r}(p-q)=0$.

12. એક સમાંતર શ્રેણીનાં પ્રથમ m અને n પદોના સરવાળાના ગુણોત્તર $m^2 : n^2$ છે. સાબિત કરો કે m માં તથા n માં પદોનો ગુણોત્તર $(2m - 1) : (2n - 1)$ થાય.

13. એક સમાંતર શ્રેણીનાં n પદોનો સરવાળો $3n^2 + 5n$ અને m મું પદ 164 છે, તો m નું મૂલ્ય શોધો.

14. જેથી બનતી શ્રેણી સમાંતર શ્રેણી હોય તે રીતે 8 અને 26 વચ્ચે 5 સંખ્યાઓ ઉમેરો.

15. જો a અને b વચ્ચેનો સમાંતર મધ્યક $\frac{a^n+b^n}{a^{n-1}+b^{n-1}}$ હોય, તો n નું મૂલ્ય શોધો.

16. 1 અને 31 વચ્ચે m સંખ્યાઓ એવી રીતે મૂકવામાં આવે છે કે જેથી બનતી શ્રેણી સમાંતર શ્રેણી હોય અને 7 મી અને $(m - 1)$ મી સંખ્યાનો ગુણોત્તર 5 : 9 હોય, તો m નું મૂલ્ય શોધો.

17. એક વ્યક્તિ તેની લોનની ચુકવણી માટે પ્રથમ હપતામાં ₹ 100 ભરે છે. જો તે દર મહિને હપતાની રકમમાં ₹ 5 વધારે ભરે, તો તેના 30 માં હપતામાં કેટલી રકમ ચૂકવશે ?

18. એક બહુકોણમાં બે ક્રમિક અંતઃકોણોનો તફાવત 5° છે. જો સૌથી નાનો ખૂણો 120° નો હોય, તો તે બહુકોણની બાજુઓની સંખ્યા શોધો.

9.5 સમગુણોત્તર શ્રેણી

આપણે નીચેની શ્રેણીઓ વિચારીએ :

$$\text{(i) } 2, 4, 8, 16, \ldots, \quad \text{(ii) } \frac{1}{9}, \frac{-1}{27}, \frac{1}{81}, \frac{-1}{243} \ldots \quad \text{(iii) } 0.01, 0.0001, 0.000001, \ldots$$

આ બધી જ શ્રેણીઓમાં દરેક પદ કેવી રીતે વધે છે ? આપણે નોંધીએ કે પ્રથમ પદ સિવાયનું દરેક પદ કોઈક ચોક્કસ ભાતમાં આગળ વધે છે.

(i) માં આપણી પાસે $a_1 = 2, \frac{a_2}{a_1} = 2, \frac{a_3}{a_2} = 2, \frac{a_4}{a_3} = 2$ એમ ચાલ્યા કરે છે.

(ii) માં જોઈ શકાય છે કે $a_1 = \frac{1}{9}, \frac{a_2}{a_1} = \frac{-1}{3}, \frac{a_3}{a_2} = \frac{-1}{3}, \frac{a_4}{a_3} = \frac{-1}{3}$ એમ ચાલ્યા કરે છે.

આ જ રીતે (iii) માં પદ કેવી રીતે વધે છે તે કહો.

આમ, જોઈ શકાય છે કે પ્રથમ પદ સિવાયના દરેક પદનો તેની આગળના પદ સાથેનો ગુણોત્તર અચળ છે. (i) માં અચળ ગુણોત્તર 2 છે; (ii) માં $-\frac{1}{3}$ અને (iii) માં અચળ ગુણોત્તર 0.01 છે. આવી શ્રેણીને ***સમગુણોત્તર શ્રેણી*** કહેવાય અને તેને ટૂંકમાં G. P. (*Geometric Progression*) લખાય.

જો શ્રેણી $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ માં પ્રત્યેક પદ શૂન્યેતર હોય અને $k \geq 1$ માટે, $\frac{a_{k+1}}{a_k} = r$ (અચળ) હોય તો તે શ્રેણીને ***સમગુણોત્તર શ્રેણી*** કહેવાય.

$a_1 = a$ લેતાં, સમગુણોત્તર શ્રેણી $a, ar, ar^2, ar^3, \ldots$, મળે. a ને ***પ્રથમ પદ*** અને r ને સમગુણોત્તર શ્રેણીનો ***સામાન્ય ગુણોત્તર*** કહેવાય. સમગુણોત્તર શ્રેણીઓ (i), (ii) અને (iii) માટે સામાન્ય ગુણોત્તર અનુક્રમે 2, $-\frac{1}{3}$ અને 0.01 છે.

સમાંતર શ્રેણીની જેમ સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં પણ પદોની સંખ્યા ખૂબ વધારે હોય ત્યારે n મું પદ અથવા n પદોનો સરવાળો, સૂત્રના ઉપયોગ વગર મુશ્કેલ બને. આથી તે આપણે આ પછીના વિભાગમાં તારવીશું. આ સૂત્રો માટે આપણે નીચેના સંકેતો ઉપયોગમાં લઈશું :

a = પ્રથમ પદ, r = સામાન્ય ગુણોત્તર, l = છેલ્લું પદ,

n = પદની સંખ્યા,

S_n = પ્રથમ n પદોનો સરવાળો.

9.5.1 સમગુણોત્તર શ્રેણીનું વ્યાપક પદ :

પ્રથમ પદ શૂન્યેતર સંખ્યા 'a' હોય અને સામાન્ય ગુણોત્તર 'r' હોય તેવી સમગુણોત્તર શ્રેણી વિશે વિચારીએ. તેનાં કેટલાંક પદ લખીએ. દ્વિતીય પદ મેળવવા પ્રથમ પદ a ને r વડે ગુણો આથી $a_2 = ar$. આ જ રીતે ત્રીજું પદ મેળવવા a_2 ને r વડે ગુણો. આથી $a_3 = a_2 r = ar^2$ અને એ જ રીતે.

નીચે આપણે આ અને કેટલાંક બીજાં વધારે પદ લખીએ :

$$\text{પ્રથમ પદ} = a_1 = a = ar^{1-1},$$

$$\text{દ્વિતીય પદ} = a_2 = ar = ar^{2-1},$$

$$\text{તૃતીય પદ} = a_3 = ar^2 = ar^{3-1}$$

$$\text{ચોથું પદ} = a_4 = ar^3 = ar^{4-1},$$

$$\text{પાંચમું પદ} = a_5 = ar^4 = ar^{5-1}$$

શું તમને કોઈ તરાહ દેખાય છે ? 16 મું પદ શું હશે ?

$$a_{16} = ar^{16-1} = ar^{15}$$

આમ, આ તરાહ દર્શાવે છે કે સમગુણોત્તર શ્રેણીનું n મું પદ $a_n = ar^{n-1}$ થાય.

જેના પદની સંખ્યા નિશ્ચિત ધન પૂર્ણાંક જેટલી કે અનંત હોય તે સમગુણોત્તર શ્રેણીને અનુક્રમે $a, ar, ar^2, ar^3, \ldots ar^{n-1}$; $a, ar, ar^2, \ldots, ar^{n-1} \ldots$ એમ લખી શકાય.

સંગત શ્રેઢી $a + ar + ar^2 + ... + ar^{n-1}$ અથવા $a + ar + ar^2 + ... + ar^{n-1} + ...$ સાંત અથવા અનંત સમગુણોત્તર શ્રેઢી કહેવાય.

9.5.2 સમગુણોત્તર શ્રેણીનાં પ્રથમ n પદોનો સરવાળો :

ધારો કે સમગુણોત્તર શ્રેણીનું પ્રથમ પદ a અને સામાન્ય ગુણોત્તર r છે. ધારો કે S_n આ સમગુણોત્તર શ્રેણીનાં પ્રથમ n પદોનો સરવાળો દર્શાવે છે.

$$S_n = a + ar + ar^2 + ... + ar^{n-1} \quad ... (1)$$

વિકલ્પ 1 જો $r = 1$, તો $S_n = a + a + a + ... + a$ (n વખત) $= na$

વિકલ્પ 2 જો $r \neq 1$, તો (1) ને r વડે ગુણતાં,

$$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + ... + ar^n \quad ... (2)$$

(1) માંથી (2) બાદ કરતાં,

$(1 - r)\, S_n = a - ar^n = a(1 - r^n)$

આથી, $S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$ અથવા $S_n = \dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$

ઉદાહરણ 9 : સમગુણોત્તર શ્રેણી 5, 25,125,... માટે 10 મું પદ અને n મું પદ શોધો.

ઉકેલ : અહીં, $a = 5$ અને $r = 5$.

આથી, $a_{10} = 5(5)^{10-1} = 5(5)^9 = 5^{10}$

અને $a_n = ar^{n-1} = 5(5)^{n-1} = 5^n$.

ઉદાહરણ 10 : સમગુણોત્તર શ્રેણી 2,8,32, ... n પદ સુધી, માટે કયું પદ 131072 હશે ?

ઉકેલ : ધારો કે સમગુણોત્તર શ્રેણીનું n મું પદ 131072 છે.

અહીં, $a = 2$ અને $r = 4$.

આથી, $131072 = a_n = 2(4)^{n-1}$

$\therefore 65536 = 4^{n-1}$

$\therefore 4^8 = 4^{n-1}$

આથી, $n - 1 = 8$, અર્થાત્ $n = 9$.

આમ, સમગુણોત્તર શ્રેણીનું 9 મું પદ 131072 થાય.

ઉદાહરણ 11 : એક સમગુણોત્તર શ્રેણીનું ત્રીજું પદ 24 અને છઠ્ઠું પદ 192 છે તો તેનું 10 મું પદ શોધો.

ઉકેલ : અહીં, $a_3 = ar^2 = 24$ અને ... (1)

$a_6 = ar^5 = 192$ ... (2)

(2) અને (1) નો ગુણોત્તર લેતાં, $r = 2$ મળે.

(1) માં $r = 2$ મૂકતાં $a = 6$ મળે.

આમ, $a_{10} = 6\,(2)^9 = 3072$.

ઉદાહરણ 12 : સમગુણોત્તર શ્રેણી $1+\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+...$ નાં પ્રથમ n પદોનો અને પ્રથમ 5 પદોનો સરવાળો શોધો.

ઉકેલ : અહીં, $a = 1$ અને $r = \frac{2}{3}$. આથી,

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]}{1-\frac{2}{3}} = 3\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$$

તથા $$S_5 = 3\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^5\right] = 3\times\frac{211}{243} = \frac{211}{81}.$$

ઉદાહરણ 13 : સમગુણોત્તર શ્રેણી $3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, ...$ ના પ્રથમ કેટલાં પદોનો સરવાળો $\frac{3069}{512}$ થાય ?

ઉકેલ : ધારો કે જરૂરી પદોની સંખ્યા n છે.

આપેલ છે કે, $a = 3$, $r = \frac{1}{2}$ અને $S_n = \frac{3069}{512}$

વળી, $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

આથી, $$\frac{3069}{512} = \frac{3\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}} = 6\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$$

$$\therefore \quad \frac{3069}{3072} = 1-\frac{1}{2^n}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2^n} = 1-\frac{3069}{3072} = \frac{3}{3072} = \frac{1}{1024}$$

$\therefore \quad 2^n = 1024 = 2^{10}$. આથી $n = 10$

ઉદાહરણ 14 : સમગુણોત્તર શ્રેણીનાં પ્રથમ ત્રણ પદોનો સરવાળો $\frac{13}{12}$ છે અને તેમનો ગુણાકાર -1 છે તો સામાન્ય ગુણોત્તર અને તે પદો શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે સમગુણોત્તર શ્રેણીનાં પ્રથમ ત્રણ પદ $\frac{a}{r}, a, ar$ છે.

આથી, $\frac{a}{r} + ar + a = \frac{13}{12}$ ... (1)

અને $\left(\frac{a}{r}\right)(a)(ar) = -1$ ... (2)

(2) પરથી આપણને $a^3 = -1$ અર્થાત્ $a = -1$ મળે. (માત્ર વાસ્તવિક બીજ લેતાં)

(1) માં $a = -1$ મૂકતાં,

$$-\frac{1}{r} - 1 - r = \frac{13}{12} \text{ અથવા } 12r^2 + 25r + 12 = 0.$$

આ r નું દ્વિઘાત સમીકરણ છે. તેને ઉકેલતાં $r = -\frac{3}{4}$ અથવા $-\frac{4}{3}$ મળે.

$r = \frac{-3}{4}$ માટે પદો $\frac{4}{3}, -1, \frac{3}{4}$ અને $r = \frac{-4}{3}$ માટે પદો $\frac{3}{4}, -1, \frac{4}{3}$ મળે.

ઉદાહરણ 15 : 7, 77, 777, 7777, ... નાં n પદોનો સરવાળો શોધો.

ઉકેલ : આ એક સમગુણોત્તર શ્રેણી નથી, પરંતુ તેનાં પદો નીચે પ્રમાણે લખી સમગુણોત્તર શ્રેણી મેળવી શકાય :

$S_n = 7 + 77 + 777 + 7777 + \ldots n$ પદ સુધી

$$= \frac{7}{9}[9 + 99 + 999 + 9999 + \ldots \; n \text{ પદ સુધી}]$$

$$= \frac{7}{9}[(10-1) + (10^2 - 1) + (10^3 - 1) + (10^4 - 1) + \ldots \; n \text{ પદ}]$$

$$= \frac{7}{9}[(10 + 10^2 + 10^3 + \ldots \; n \text{ પદ સુધી}) - (1 + 1 + 1 + \ldots \; n \text{ પદ})]$$

$$= \frac{7}{9}\left[\frac{10(10^n - 1)}{10 - 1} - n\right] = \frac{7}{9}\left[\frac{10\,(10^n - 1)}{9} - n\right].$$

ઉદાહરણ 16 : એક માણસને 2 માતા-પિતા, 4 દાદા-દાદી, 8 વડદાદા-વડદાદી વગેરે છે તો તેની 10 મી પેઢીએ રહેલ પૂર્વજોની સંખ્યા શોધો.

ઉકેલ : અહીં, $a = 2$, $r = 2$ અને $n = 10$

સરવાળાના સૂત્રનો ઉપયોગ કરતાં,

$$S_n = \frac{a\,(r^n - 1)}{r - 1}$$

આથી, $S_{10} = 2(2^{10} - 1) = 2046$

આમ, એ માણસના 10 મી પેઢીએ રહેલ પૂર્વજોની સંખ્યા 2046 હશે.

9.5.3 સમગુણોત્તર મધ્યક :

બે ધન સંખ્યાઓ a અને b નો સમગુણોત્તર મધ્યક $\sqrt{ab}$ છે. આથી 2 અને 8 નો સમગુણોત્તર મધ્યક 4 થાય. આપણે જોઈ શકીએ કે 2, 4, 8 સમગુણોત્તર શ્રેણીનાં ક્રમિક પદ છે. આ રીતે આગળ વધીએ તો વ્યાપક રીતે બે સંખ્યાઓના સમગુણોત્તર મધ્યકની સંકલ્પના મળે છે.

જેથી બનતી શ્રેણી સમગુણોત્તર હોય એ રીતે આપેલ બે ધન સંખ્યાઓ a અને b વચ્ચે આપણી ઈચ્છાનુસાર સંખ્યાઓ ઉમેરી શકીએ.

ધારો કે એવી ધન સંખ્યાઓ $G_1, G_2, \ldots, G_n$ એ a અને b વચ્ચે છે જેથી $a, G_1, G_2, G_3, \ldots, G_n, b$ એ સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં હોય. આમ, $(n + 2)$મું પદ b હોવાથી,

$$b = ar^{n+1} \quad \text{અથવા} \quad r = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}.$$

આથી,
$$G_1 = ar = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}},$$

$$G_2 = ar^2 = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{n+1}},$$

$$G_3 = ar^3 = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{3}{n+1}},$$

$$G_n = ar^n = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{n}{n+1}}$$

ઉદાહરણ 17 : સમગુણોત્તર શ્રેણી બને તે રીતે 1 અને 256 વચ્ચે ત્રણ સંખ્યાઓ ઉમેરો.

ઉકેલ : ધારો કે $1, G_1, G_2, G_3, 256$ સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં હોય તે રીતે G_1, G_2, G_3 એ 1 અને 256 વચ્ચે છે.

આથી, $256 = r^4$ આથી, $r = \pm 4$ (માત્ર વાસ્તવિક બીજ લેતાં,)

$r = 4$ માટે $G_1 = ar = 4$, $G_2 = ar^2 = 16$, $G_3 = ar^3 = 64$

આ જ રીતે, $r = -4$, માટે સંખ્યાઓ -4, 16 અને -64 મળે.

આમ, 1 અને 256 વચ્ચે 4, 16, 64 મૂકતાં મળતી શ્રેણી સમગુણોત્તર શ્રેણી બને.

9.6 સમાંતર મધ્યક અને ગુણોત્તર મધ્યક વચ્ચેનો સંબંધ

ધારો કે A અને G બે ધન વાસ્તવિક સંખ્યાઓ અનુક્રમે a અને b ના સમાંતર અને સમગુણોત્તર મધ્યકો છે.

$$A = \frac{a+b}{2} \quad \text{અને} \quad G = \sqrt{ab}$$

આમ,

$$A - G = \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} = \frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{2} \geq 0 \quad \ldots (1)$$

(1), પરથી તારવી શકાય કે $A \geq G$.

ઉદાહરણ 18 : બે ધન સંખ્યાઓ a અને b ના સમાંતર અને સમગુણોત્તર મધ્યક અનુક્રમે 10 અને 8 હોય, તો તે સંખ્યાઓ શોધો.

ઉકેલ : આપેલ છે કે સમાંતર મધ્યક $\frac{a+b}{2} = 10$ ... (1)

અને સમગુણોત્તર મધ્યક $\sqrt{ab} = 8$ ... (2)

(1) અને (2) પરથી,

$$a + b = 20 \quad \text{... (3)}$$

$$ab = 64 \quad \text{... (4)}$$

(3) અને (4) ની કિંમતો, નિત્યસમ $(a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab$ માં મૂકતાં,

$$(a - b)^2 = 400 - 256 = 144$$

અથવા $a - b = \pm 12$ ...(5)

(3) અને (5) ને ઉકેલતાં,

$$a = 4, b = 16 \text{ અથવા } a = 16, b = 4$$

આમ, સંખ્યાઓ a અને b એ 4, 16 અથવા 16, 4 છે.

સ્વાધ્યાય 9.3

1. સમગુણોત્તર શ્રેણી $\frac{5}{2}, \frac{5}{4}, \frac{5}{8}, \ldots$ નું 20 મું પદ તથા n મું પદ શોધો.

2. એક સમગુણોત્તર શ્રેણીનું 8 મું પદ 192 છે અને સામાન્ય ગુણોત્તર 2 છે, તો તેનું 12 મું પદ શોધો.

3. સમગુણોત્તર શ્રેણીના પાંચમાં, આઠમાં અને અગિયારમાં પદ અનુક્રમે p, q અને s હોય, તો બતાવો કે $q^2 = ps$.

4. એક સમગુણોત્તર શ્રેણીનું ચોથું પદ બીજા પદના વર્ગ જેટલું છે અને પ્રથમ પદ -3 છે, તો તેનું 7 મું પદ શોધો.

5. (a) શ્રેણી $2, 2\sqrt{2}, 4, \ldots$ નું કેટલામું પદ 128 થાય ?

(b) શ્રેણી $\sqrt{3}, 3, 3\sqrt{3}, \ldots$ નું કેટલામું પદ 729 થાય ?

(c) શ્રેણી $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \ldots$ નું કેટલામું પદ $\frac{1}{19683}$ થાય ?

6. x ની કઈ કિંમત માટે $-\frac{2}{7}, x, -\frac{7}{2}$ સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં થાય ?

નીચેની સમગુણોત્તર શ્રેણીઓમાં નિર્દેશિત પદોનો સરવાળો શોધો : પ્રશ્ન નંબર 7 થી 10 :

7. 0.15, 0.015, 0.0015, ... પ્રથમ 20 પદ

8. $\sqrt{7}, \sqrt{21}, 3\sqrt{7}, \ldots$ પ્રથમ n પદ

9. $1, -a, a^2, -a^3, \ldots$ પ્રથમ n પદ (જ્યાં $a \neq -1$).

10. $x^3, x^5, x^7, \ldots$ પ્રથમ n પદ (જ્યાં $x \neq \pm 1$).

11. $\sum_{k=1}^{11} (2 + 3^k)$ ની કિંમત શોધો.

12. સમગુણોત્તર શ્રેણીનાં પ્રથમ 3 પદોનો સરવાળો $\frac{39}{10}$ છે અને તેમનો ગુણાકાર 1 છે, તો સામાન્ય ગુણોત્તર અને તે પદો શોધો.

13. સમગુણોત્તર શ્રેણી $3, 3^2, 3^3, \ldots$ નાં પ્રથમ કેટલાં પદોનો સરવાળો 120 થાય ?

14. સમગુણોત્તર શ્રેણીનાં પ્રથમ 3 પદોનો સરવાળો 16 છે અને પછીનાં ત્રણ પદોનો સરવાળો 128 છે, તો આ શ્રેણીનું પ્રથમ પદ, સામાન્ય ગુણોત્તર અને n પદોનો સરવાળો શોધો.

15. આપેલ સમગુણોત્તર શ્રેણી માટે $a = 729$ અને 7 મું પદ 64 હોય તો S_7 શોધો.

16. જેનાં પ્રથમ બે પદોનો સરવાળો – 4 હોય અને પાંચમું પદ ત્રીજા પદથી ચાર ગણુ હોય એવી સમગુણોત્તર શ્રેણી શોધો.

17. જો સમગુણોત્તર શ્રેણીનાં ચોથા, દસમાં અને સોળમાં પદ અનુક્રમે x, y અને z હોય, તો સાબિત કરો કે x, y, z સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં છે.

18. 8, 88, 888, 8888... શ્રેણીનાં પ્રથમ n પદોનો સરવાળો શોધો.

19. શ્રેણીઓ 2, 4, 8, 16, 32 અને 128, 32, 8, 2, $\frac{1}{2}$ નાં સંગત પદોના ગુણાકારનો સરવાળો શોધો.

20. શ્રેણીઓ $a, ar, ar^2, \ldots ar^{n-1}$ અને $A, AR, AR^2, \ldots AR^{n-1}$ નાં સંગત પદોના ગુણાકાર દ્વારા મળતાં પદો સમગુણોત્તર શ્રેણી બનાવે છે તેમ સાબિત કરો અને તેનો સામાન્ય ગુણોત્તર શોધો.

21. જેમાં ત્રીજું પદ, પ્રથમ પદથી 9 જેટલું વધારે હોય અને બીજું પદ ચોથા પદથી 18 જેટલું વધારે હોય તેવી સમગુણોત્તર શ્રેણીનાં પ્રથમ ચાર પદ શોધો.

22. સમગુણોત્તર શ્રેણીનાં p, q, r માં પદો અનુક્રમે a, b, c હોય તો સાબિત કરો કે,

$$a^{q-r} b^{r-p} c^{p-q} = 1.$$

23. સમગુણોત્તર શ્રેણીનું પ્રથમ પદ a અને n મું પદ b છે. જો n પદોનો ગુણાકાર P હોય, તો સાબિત કરો કે $P^2 = (ab)^n$.

24. સાબિત કરો કે સમગુણોત્તર શ્રેણીનાં પ્રથમ n પદોના સરવાળાનો $(n + 1)$ પદથી $(2n)$ માં પદ સુધીના સરવાળા સાથેનો ગુણોત્તર $\frac{1}{r^n}$ થાય.

25. જો a, b, c, d સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં હોય, તો બતાવો કે

$$(a^2 + b^2 + c^2)(b^2 + c^2 + d^2) = (ab + bc + cd)^2.$$

26. 3 અને 81 વચ્ચે બે સંખ્યાઓ ઉમેરો કે જેથી બનતી શ્રેણી સમગુણોત્તર હોય.

27. જો a અને b નો સમગુણોત્તર મધ્યક $\frac{a^{n+1} + b^{n+1}}{a^n + b^n}$ હોય, તો n નું મૂલ્ય શોધો.

28. બે સંખ્યાઓનો સરવાળો તેમના સમગુણોત્તર મધ્યક કરતાં છ ગણો હોય, તો બતાવો કે સંખ્યાઓનો ગુણોત્તર $\left(3+2\sqrt{2}\right):\left(3-2\sqrt{2}\right)$ થાય.

29. બે ધન સંખ્યાઓના સમાંતર અને સમગુણોત્તર મધ્યકો અનુક્રમે A અને G હોય, તો સાબિત કરો કે તે સંખ્યાઓ $A \pm \sqrt{(A+G)(A-G)}$ છે.

30. બૅક્ટેરિયાના ઉછેરમાં તેની સંખ્યા દર કલાકે બમણી થાય છે. જો શરૂઆતમાં બૅક્ટેરિયાની સંખ્યા 30 હોય, તો 2 કલાક, 4 કલાક, અને n માં કલાકે બૅક્ટેરિયાની સંખ્યા શોધો.

31. બૅંકમાં ₹ 500, 10% ના વાર્ષિક ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજે મૂકીએ, તો 10 વર્ષને અંતે કેટલી રકમ મળે ?

32. જો દ્વિઘાત સમીકરણનાં બીજોના સમાંતર અને સમગુણોત્તર મધ્યક અનુક્રમે 8 અને 5 હોય, તો તે દ્વિઘાત સમીકરણ મેળવો.

9.7 વિશિષ્ટ શ્રેણીઓનાં n પદોના સરવાળા

આપણે કેટલીક વિશિષ્ટ શ્રેણીઓનાં પ્રથમ n પદોના સરવાળા શોધીશું, જેમ કે ;

(i) $1 + 2 + 3 + \ldots + n$ (પ્રથમ n પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો સરવાળો)

(ii) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$ (પ્રથમ n પ્રાકૃતિક સંખ્યાના વર્ગોનો સરવાળો)

(iii) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$ (પ્રથમ n પ્રાકૃતિક સંખ્યાના ઘનનો સરવાળો)

આપણે તેને એક પછી એક વિચારીએ.

(i) $S_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$, તેથી $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$ (વિભાગ 9.4 જુઓ.)

(ii) અહીં, $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$

આપણે નિત્યસમ, $k^3 - (k-1)^3 = 3k^2 - 3k + 1$ લઈએ.

$k = 1, 2 \ldots, n$ ક્રમાનુસાર મૂકતાં,

$$1^3 - 0^3 = 3(1)^2 - 3(1) + 1$$

$$2^3 - 1^3 = 3(2)^2 - 3(2) + 1$$

$$3^3 - 2^3 = 3(3)^2 - 3(3) + 1$$

....

....

....

$$n^3 - (n-1)^3 = 3(n)^2 - 3(n) + 1$$

બંને બાજુનાં પદોનો સરવાળો કરતાં,

$$n^3 - 0^3 = 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) - 3(1 + 2 + 3 + \ldots + n) + n$$

$$\therefore \quad n^3 = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 - 3\sum_{k=1}^{n} k + n$$

(i) પરથી કહી શકાય કે $\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

આથી, $S_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{3}\left[n^3 + \frac{3n(n+1)}{2} - n\right]$

$$= \frac{1}{6}(2n^3+3n^2+n)$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(iii) અહીં, $S_n = 1^3 + 2^3 + ...+n^3$

આપણે નિત્યસમ $(k + 1)^4 - k^4 = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$ લઈએ.

$k = 1, 2, 3\ldots n$, લેતાં,

$$2^4 - 1^4 = 4(1)^3 + 6(1)^2 + 4(1) + 1$$

$$3^4 - 2^4 = 4(2)^3 + 6(2)^2 + 4(2) + 1$$

$$4^4 - 3^4 = 4(3)^3 + 6(3)^2 + 4(3) + 1$$

....

....

....

$$(n - 1)^4 - (n - 2)^4 = 4(n - 2)^3 + 6(n - 2)^2 + 4(n - 2) + 1$$

$$n^4 - (n - 1)^4 = 4(n - 1)^3 + 6(n - 1)^2 + 4(n - 1) + 1$$

$$(n + 1)^4 - n^4 = 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1$$

બંને બાજુનાં પદોનો સરવાળો કરતાં,

$$(n + 1)^4 - 1^4 = 4(1^3 + 2^3 + 3^3 +...+ n^3) + 6(1^2 + 2^2 + 3^2 + ...+ n^2) + 4(1 + 2 + 3 +...+ n) + n$$

$$= 4\sum_{k=1}^{n} k^3 + 6\sum_{k=1}^{n} k^2 + 4\sum_{k=1}^{n} k + n \qquad \ldots (1)$$

(i) અને (ii) પરથી આપણે જાણીએ છીએ કે,

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \text{ અને } \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

આ કિંમતો (1) માં મૂકતાં,

$$4\sum_{k=1}^{n} k^3 = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n - \frac{6n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{4n(n+1)}{2} - n$$

$$\therefore \quad 4S_n = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n - n(2n^2 + 3n + 1) - 2n(n + 1) - n$$

$$= n^4 + 2n^3 + n^2$$

$$= n^2(n + 1)^2$$

આથી, $$S_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{[n(n+1)]^2}{4}$$

ઉદાહરણ 19 : $5 + 11 + 19 + 29 + 41 \ldots$ નાં પ્રથમ n પદોનો સરવાળો શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે, $S_n = 5 + 11 + 19 + 29 + \ldots + a_{n-1} + a_n$

અથવા $S_n = 5 + 11 + 19 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$

$S_n = 5 + 11 + 19 + \ldots + a_{n-1} + a_n$

$S_n = \quad 5 + 11 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$

બાદબાકી કરતાં, $0 = 5 + [6 + 8 + 10 + 12 + \ldots (n-1)$ પદો$] - a_n$ મળે.

$$\therefore \quad a_n = 5 + \frac{(n-1)[12+(n-2)\times 2]}{2}$$

$$= 5 + (n-1)(n+4) = n^2 + 3n + 1$$

આથી, $$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (k^2 + 3k + 1)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{1}^{n} k + n$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{3n(n+1)}{2} + n$$

$$= \frac{n(n+2)(n+4)}{3}.$$

નોંધ : અત્રે આપણે $\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$ નો ઉપયોગ કર્યો છે.

ઉદાહરણ 20 : જે શ્રેણીનું n મું પદ $n\,(n+3)$ હોય તેનાં પ્રથમ n પદોનો સરવાળો શોધો.

ઉકેલ : આપેલ છે કે $a_n = n\,(n+3) \quad = n^2 + 3n$

આથી, n પદોનો સરવાળો,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k$$

$$= \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6} + \frac{3n\,(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)(n+5)}{3}.$$

સ્વાધ્યાય 9.4

પ્રશ્ન 1 થી 7 માં આપેલ શ્રેઢીનાં પ્રથમ n પદોનો સરવાળો શોધો :

1. $1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + 4 \times 5 + ...$

2. $1 \times 2 \times 3 + 2 \times 3 \times 4 + 3 \times 4 \times 5 + ...$

3. $3 \times 1^2 + 5 \times 2^2 + 7 \times 3^2 + ...$

4. $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + ...$

5. $5^2 + 6^2 + 7^2 + ... + 20^2$

6. $3 \times 8 + 6 \times 11 + 9 \times 14 + ...$

7. $1^2 + (1^2 + 2^2) + (1^2 + 2^2 + 3^2) + ...$

પ્રશ્ન નંબર 8 થી 10 માં જે શ્રેઢીનું n મું પદ આપેલ હોય, તેનાં પ્રથમ n પદોનો સરવાળો શોધો :

8. $n\,(n+1)\,(n+4)$.

9. $n^2 + 2^n$

10. $(2n - 1)^2$

9.8 અનંત સમગુણોત્તર શ્રેણી અને તેનો સરવાળો

$a, ar, ar^2, ar^3, ...$ પ્રકારની સમગુણોત્તર શ્રેણીને અનંત સમગુણોત્તર શ્રેણી કહે છે. હવે અનંત સમગુણોત્તર શ્રેણીના સરવાળાનું સૂત્ર શોધવા આપણે એક ઉદાહરણથી શરૂઆત કરીશું.

સમગુણોત્તર શ્રેણી, $1, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}, ...$ લો.

અહીં, $a = 1,\ r = \frac{2}{3}$.

આથી, $$S_n = \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \frac{2}{3}} = 3\left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$$

n ની કિંમત મોટી અને વધુ મોટી લઈને આપણે $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ ની વર્તણૂંકનો અભ્યાસ કરીએ.

n	1	5	10	20
$\left(\frac{2}{3}\right)^n$	0.6667	0.1316872428	0.01734152992	0.00030072866

આપણે અનુભવીશું કે જેમ n ની કિંમતો મોટી અને મોટી થતી જાય છે તેમ $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ ની કિંમત શૂન્યની નજીક અને નજીક જાય છે. ગાણિતિક રીતે આપણે કહીશું કે n ની કિંમત ખૂબ જ મોટી હોય ત્યારે $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ નું મૂલ્ય ખૂબ જ નાનું થતું જાય છે. બીજા શબ્દોમાં કહીએ તો, જેમ $n \to \infty$, તેમ $\left(\frac{2}{3}\right)^n \to 0$. એટલા માટે આપણને, અનંત પદોનો સરવાળો $S_\infty = 3$ મળે છે.

હવે, જો સમગુણોત્તર શ્રેણી $a, ar, ar^2, ...$,ના સામાન્ય ગુણોત્તર r નું નિરપેક્ષ મૂલ્ય 1 કરતાં ઓછું હોય તો,

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{(1-r)} = \frac{a}{1-r} - \frac{ar^n}{1-r}$$

આ વિકલ્પમાં, $|r| < 1$ હોવાથી જેમ, $n \to \infty$, તેમ $r^n \to 0$

માટે $$S_n \to \frac{a}{1-r}$$

સમગુણોત્તર શ્રેણીનાં અનંત પદોનો સરવાળાને S_∞ અથવા S વડે દર્શાવાય છે.

આમ, આપણે $S = \frac{a}{1-r}$ મેળવીએ છીએ.

ઉદાહરણ તરીકે,

(i) $$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$$

(ii) $$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \ldots = \frac{1}{1-\left(\frac{-1}{2}\right)} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

સ્વાધ્યાય 9.5

નીચેની દરેક સમગુણોત્તર શ્રેણીનાં અનંત પદોનો સરવાળો શોધો : (પ્રશ્ન 1 થી 4)

1. $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \ldots$

2. 6, 1.2, 0.24, ...

3. $5, \frac{20}{7}, \frac{80}{49}, \ldots$

4. $\frac{-3}{4}, \frac{3}{16}, \frac{-3}{64}, \ldots$

5. સાબિત કરો કે : $3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{4}} \times 3^{\frac{1}{8}} \ldots = 3$

6. $|a| < 1$ તથા $|b| < 1$ માટે $x = 1 + a + a^2 + ...$ અને $y = 1 + b + b^2 + ...$, સાબિત કરો કે

$$1 + ab + a^2b^2 + \ldots = \frac{xy}{x+y-1}$$

પ્રકીર્ણ ઉદાહરણો

ઉદાહરણ 21 : જો કોઈ સમાંતર શ્રેણીનાં p, q, r અને s માં પદો સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં હોય, તો બતાવો કે $(p - q)$, $(q - r)$ અને $(r - s)$ એ સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં છે.

ઉકેલ : અહીં,

$$a_p = a + (p-1)d \quad \ldots (1)$$

$$a_q = a + (q-1)d \quad \ldots (2)$$

$$a_r = a + (r-1)d \quad \ldots (3)$$

$$a_s = a + (s-1)d \quad \ldots (4)$$

આપેલ છે કે, a_p, a_q, a_r અને a_s સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં છે.

આથી, $$\frac{a_q}{a_p} = \frac{a_r}{a_q} = \frac{a_q - a_r}{a_p - a_q} = \frac{q-r}{p-q}$$ (કેમ ?) ... (5)

આ જ રીતે, $$\frac{a_r}{a_q} = \frac{a_s}{a_r} = \frac{a_r - a_s}{a_q - a_r} = \frac{r-s}{q-r}$$ (કેમ ?) ... (6)

આમ, (5) અને (6) પરથી,

$\frac{q-r}{p-q} = \frac{r-s}{q-r}$, અર્થાત્, $p - q$, $q - r$ અને $r - s$ સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં છે.

ઉદાહરણ 22 : જો a, b, c સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં હોય અને $a^{\frac{1}{x}} = b^{\frac{1}{y}} = c^{\frac{1}{z}}$ તો સાબિત કરો કે x, y, z સમાંતર શ્રેણીમાં છે.

ઉકેલ : ધારો કે $a^{\frac{1}{x}} = b^{\frac{1}{y}} = c^{\frac{1}{z}} = k$

આથી, $a = k^x$, $b = k^y$ અને $c = k^z$. ... (1)

a, b, c સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં હોવાથી, $b^2 = ac$ ... (2)

(1) અને (2) પરથી, $k^{2y} = k^{x+z}$

$\therefore 2y = x + z$.

આથી x, y અને z એ સમાંતર શ્રેણીમાં છે.

ઉદાહરણ 23 : જો a, b, c, d અને p ભિન્ન વાસ્તવિક સંખ્યાઓ હોય અને $(a^2 + b^2 + c^2)p^2 - 2(ab + bc + cd)p + (b^2 + c^2 + d^2) \le 0$, તો બતાવો કે a, b, c અને d સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં છે.

ઉકેલ : આપેલ છે કે,

$$(a^2 + b^2 + c^2)p^2 - 2(ab + bc + cd)p + (b^2 + c^2 + d^2) \le 0$$ ... (1)

પરંતુ ડા.બા. $= (a^2p^2 - 2abp + b^2) + (b^2p^2 - 2bcp + c^2) + (c^2p^2 - 2cdp + d^2)$,

આથી, $(ap - b)^2 + (bp - c)^2 + (cp - d)^2 \le 0$ ... (2)

પરંતુ વાસ્તવિક સંખ્યાના વર્ગોનો સરવાળો અનૃણ હોય. આથી (1) અને (2) પરથી,

$$(ap - b)^2 + (bp - c)^2 + (cp - d)^2 = 0$$

અર્થાત્ $ap - b = 0$, $bp - c = 0$, $cp - d = 0$

$$\therefore \quad \frac{b}{a} = \frac{c}{b} = \frac{d}{c} = p$$

આથી, a, b, c અને d સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં છે.

ઉદાહરણ 24 : જો p, q, r સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં હોય અને સમીકરણો $px^2 + 2qx + r = 0$ અને $dx^2 + 2ex + f = 0$ નું એક બીજ સમાન હોય, તો સાબિત કરો કે $\frac{d}{p}, \frac{e}{q}, \frac{f}{r}$ એ સમાંતર શ્રેણીમાં છે.

ઉકેલ : સમીકરણ $px^2 + 2qx + r = 0$ નાં બીજ

$$x = \frac{-2q \pm \sqrt{4q^2 - 4rp}}{2p}$$

p, q, r સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં હોવાથી $q^2 = pr$.

આમ, $x = \frac{-q}{p}$. પરંતુ $\frac{-q}{p}$ એ $dx^2 + 2ex + f = 0$ નું પણ બીજ છે. (કેમ ?)

$$d\left(\frac{-q}{p}\right)^2 + 2e\left(\frac{-q}{p}\right) + f = 0,$$

$$\therefore \quad dq^2 - 2eqp + fp^2 = 0 \qquad \text{... (1)}$$

(1) ને pq^2 વડે ભાગતાં અને $q^2 = pr$ નો ઉપયોગ કરતાં,

$$\frac{d}{p} - \frac{2e}{q} + \frac{fp}{pr} = 0,$$

$$\therefore \quad \frac{2e}{q} = \frac{d}{p} + \frac{f}{r}$$

આથી, $\frac{d}{p}, \frac{e}{q}, \frac{f}{r}$ સમાંતર શ્રેણીમાં છે.

પ્રકીર્ણ સ્વાધ્યાય 9

1. સાબિત કરો કે સમાંતર શ્રેણીમાં $(m + n)$ માં તથા $(m - n)$ માં પદોનો સરવાળો m માં પદ કરતાં બમણો થાય છે.
2. જો સમાંતર શ્રેણીમાં આવેલી ત્રણ સંખ્યાઓનો સરવાળો 24 અને તેમનો ગુણાકાર 440 હોય તો આ સંખ્યાઓ શોધો.
3. જો સમાંતર શ્રેણીમાં આવેલાં પ્રથમ n, $2n$, $3n$ પદોનાં સરવાળા અનુક્રમે S_1, S_2 અને S_3 હોય, તો બતાવો કે $S_3 = 3(S_2 - S_1)$.
4. 200 અને 400 વચ્ચેની 7 વડે વિભાજ્ય સંખ્યાઓનો સરવાળો શોધો.
5. 1 થી 100 વચ્ચેની 2 અથવા 5 વડે વિભાજ્ય સંખ્યાઓનો સરવાળો શોધો.
6. જેને 4 વડે ભાગતાં શેષ 1 વધે તેવી બે આંકડાની સંખ્યાઓનો સરવાળો શોધો.
7. જો વિધેય $f(x + y) = f(x)\, f(y)$ $(\forall x, y \in \mathbf{N})$ એવી રીતે વ્યાખ્યાયિત હોય કે જેથી, $f(1) = 3$ અને $\sum_{x=1}^{n} f(x) = 120$, તો n નું મૂલ્ય શોધો.
8. સમગુણોત્તર શ્રેણીનાં કેટલાંક પદોનો સરવાળો 315 છે. તેનું પ્રથમ પદ અને સામાન્ય ગુણોત્તર અનુક્રમે 5 અને 2 છે. તેનું છેલ્લું પદ અને પદોની સંખ્યા શોધો.

9. સમગુણોત્તર શ્રેણીનું પ્રથમ પદ 1 છે. તેના ત્રીજા અને પાંચમાં પદોનો સરવાળો 90 છે. આ સમગુણોત્તર શ્રેણીનો સામાન્ય ગુણોત્તર શોધો.

10. સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં આવેલી ત્રણ સંખ્યાઓનો સરવાળો 56 છે. જો આ સંખ્યાઓમાંથી અનુક્રમે 1, 7 અને 21 બાદ કરવામાં આવે, તો આપણને સમાંતર શ્રેણી મળે છે. આ સંખ્યાઓ શોધો.

11. એક સમગુણોત્તર શ્રેણીનાં પદોની સંખ્યા યુગ્મ છે. જો બધાં જ પદોનો સરવાળો, અયુગ્મ સ્થાને રહેલ પદોના સરવાળા કરતાં 5 ગણો હોય, તો સામાન્ય ગુણોત્તર શોધો.

12. સમાંતર શ્રેણીનાં પ્રથમ ચાર પદોનો સરવાળો 56 છે. તેનાં છેલ્લાં ચાર પદોનો સરવાળો 112 છે. તેનું પ્રથમ પદ 11 છે, તો પદોની સંખ્યા શોધો.

13. જો $\dfrac{a+bx}{a-bx}=\dfrac{b+cx}{b-cx}=\dfrac{c+dx}{c-dx}(x\neq 0)$, તો સાબિત કરો કે a, b, c અને d સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં છે.

14. જો સમગુણોત્તર શ્રેણીનાં પ્રથમ n પદોનો સરવાળો S, ગુણાકાર P અને પ્રથમ n પદોનાં વ્યસ્ત પદોનો સરવાળો R હોય, તો સાબિત કરો કે $P^2R^n = S^n$.

15. જો સમાંતર શ્રેણીનાં p, q અને r માં પદો અનુક્રમે a, b, c હોય તો બતાવો કે,

$$(q-r)a+(r-p)b+(p-q)c=0$$

16. જો $a\left(\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right), b\left(\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a}\right), c\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)$ સમાંતર શ્રેણીમાં હોય તો સાબિત કરો કે a, b, c સમાંતર શ્રેણીમાં છે.

17. જો a, b, c, d સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં હોય, તો સાબિત કરો કે $(a^n + b^n), (b^n + c^n), (c^n + d^n)$ સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં છે.

18. જો a, b, c, d સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં હોય અને જો a અને b, $x^2-3x+p=0$ નાં બીજ હોય અને c, d, $x^2-12x+q=0$ નાં બીજ હોય તો સાબિત કરો કે $(q+p):(q-p)=17:15$.

19. બે સંખ્યાઓ a અને b ના સમાંતર અને સમગુણોત્તર મધ્યકોનો ગુણોત્તર $m : n$ છે. બતાવો કે,

$$a:b=\left(m+\sqrt{m^2-n^2}\right):\left(m-\sqrt{m^2-n^2}\right).$$

20. જો a, b, c સમાંતર શ્રેણીમાં; b, c, d એ સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં અને $\dfrac{1}{c},\dfrac{1}{d},\dfrac{1}{e}$ એ સમાંતર શ્રેણીમાં હોય તો સાબિત કરો કે, a, c, e સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં છે.

21. નીચેની શ્રેણીનાં પ્રથમ n પદોનો સરવાળો શોધો :

(i) $5 + 55 + 555 + \ldots$ (ii) $0.6 + 0.66 + 0.666 + \ldots$

22. શ્રેઢી $2 \times 4 + 4 \times 6 + 6 \times 8 + \ldots$ (n પદો)નું 20 મું પદ શોધો.

23. શ્રેઢી $3 + 7 + 13 + 21 + 31 + \ldots$ નાં પ્રથમ n પદોનો સરવાળો શોધો.

24. જો S_1, S_2, S_3 અનુક્રમે પ્રથમ n પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ સરવાળો, તેમના વર્ગોનો સરવાળો અને તેમના ઘનનો સરવાળો દર્શાવે, તો સાબિત કરો કે, $9S_2^2 = S_3(1 + 8S_1)$.

25. નીચેની શ્રેણીનાં પ્રથમ n પદોનો સરવાળો શોધો.

$$\frac{1^3}{1}+\frac{1^3+2^3}{1+3}+\frac{1^3+2^3+3^3}{1+3+5}+...$$

26. સાબિત કરો કે $\dfrac{1\times 2^2+2\times 3^2+...+n\times(n+1)^2}{1^2\times 2+2^2\times 3+...+n^2\times(n+1)}=\dfrac{3n+5}{3n+1}$.

27. એક ખેડૂત પુનઃવેચાણનું ટ્રેક્ટર ₹ 12,000 માં ખરીદે છે. તે ₹ 6000 રોકડા ચૂકવે છે અને બાકીની રકમ ₹ 500 ના વાર્ષિક હપતામાં અને 12 % વ્યાજે ચૂકવે છે, તો તેણે ટ્રેક્ટરની શું કિંમત ચૂકવી હશે ?

28. શમશાદ અલી એક સ્કૂટર ₹ 22,000 માં ખરીદે છે. તે ₹ 4000 રોકડા ચૂકવે છે અને બાકીની રકમ ₹ 1000 ના વાર્ષિક હપતાથી અને 10 % વ્યાજે ચૂકવે છે, તો તેણે સ્કૂટરની શું કિંમત ચૂકવી હશે ?

29. એક માણસ તેના ચાર મિત્રોને પત્ર લખે છે. તે દરેકને સૂચના આપે છે કે આ પત્ર તેમના અન્ય ચાર મિત્રોને મોકલે અને તેમને પણ આ જ પ્રમાણેની સાંકળ આગળ વધારવાની છે. માની લઈએ કે આ સાંકળ તૂટતી નથી અને દરેક પત્ર મોકલવાનો ખર્ચ 50 પૈસા આવે છે, તો 8 મી વખત પત્ર મોકલવાનો ખર્ચ શોધો.

30. એક માણસ વાર્ષિક 5% ના સાદા વ્યાજે બૅંકમાં ₹ 10,000 જમા કરાવે છે, તો તેણે જમા કરાવેલ રકમથી 15માં વર્ષમાં જમા રકમ અને 20 વર્ષ પછીની કુલ રકમ શોધો.

31. એક વેપારી ગણતરી કરે છે કે એક મશીન તેને ₹ 15,625 માં મળે છે અને દર વર્ષે તેનો ઘસારો 20 % છે, તો પાંચ વર્ષ પછી આ મશીનની અંદાજિત કિંમત કેટલી હશે ?

32. એક કામ અમુક દિવસમાં પૂરું કરવા 150 માણસો રોકાયેલા હતા. બીજા દિવસે 4 માણસ કામ છોડી દે છે, ત્રીજા દિવસે બીજા 4 માણસો કામ છોડી દે છે અને આમ ચાલ્યા કરે છે. આવું થવાથી કામ પૂરું થવામાં 8 દિવસ વધુ લાગે છે તો કામ કેટલા દિવસમાં પૂરું થાય તે શોધો.

સારાંશ

- શ્રેણીનો અર્થ કોઈક નિયમને અનુસરતાં નિશ્ચિત ક્રમમાં ગોઠવાતી સંખ્યાઓ. વળી, આપણે શ્રેણીને એક વિધેય તરીકે લઈશું. તેનો પ્રદેશ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો ગણ અથવા $\{1, 2, 3, ...k\}$ પ્રકારનો ઉપગણ હોય. જે શ્રેણીમાં પદોની સંખ્યા નિશ્ચિત ધન પૂર્ણાંક જેટલી હોય તેને સાન્ત શ્રેણી કહેવાય. પદોની સંખ્યા સાન્ત ના હોય તેવી શ્રેણી અનંત શ્રેણી કહેવાય.
- ધારો કે $a_1, a_2, a_3, ...$ શ્રેણી છે, તો તેના સરવાળા $a_1 + a_2 + a_3 + ...$ ને શ્રેઢી કહેવાય.

  જે શ્રેઢીમાં પદની સંખ્યા નિશ્ચિત ધન પૂર્ણાંક જેટલી હોય તેને સાન્ત શ્રેઢી કહેવાય.
- જ્યાં, પદો એક નિશ્ચિત અચળ જેટલાં વધે અથવા ઘટે એ સમાંતર શ્રેણી (A.P.) કહેવાય છે. આ અચળને સમાંતર શ્રેણીનો સામાન્ય તફાવત કહે છે. સામાન્ય રીતે, સમાંતર શ્રેણીનું પ્રથમ પદ a, સામાન્ય તફાવત d અને છેલ્લું પદ l દ્વારા દર્શાવાય છે. સમાંતર શ્રેણીનું વ્યાપક પદ અથવા n મું પદ $a_n = a + (n - 1)d$ છે. સમાંતર શ્રેણીનાં પ્રથમ n પદોનો સરવાળો S_n છે. તે $S_n=\frac{n}{2}\left[2a+(n-1)d\right]=\frac{n}{2}(a+l)$ દ્વારા મેળવાય.
- બે સંખ્યાઓ a અને b નો સમાંતર મધ્યક $\frac{a+b}{2}$ છે. અર્થાત્, a, A, b સમાંતર શ્રેણીમાં છે.

- જો આપેલ શ્રેણીમાં કોઈપણ પદનો તેની આગળના શૂન્યેતર પદ સાથેનો ગુણોત્તર સમાન હોય તો તે શ્રેણી સમગુણોત્તર શ્રેણી કહેવાય. આ અચળ કિંમતને સામાન્ય ગુણોત્તર કહેવાય. સામાન્ય રીતે સમગુણોત્તર શ્રેણીનું પ્રથમ પદ a અને સામાન્ય ગુણોત્તર r વડે દર્શાવાય. સમગુણોત્તર શ્રેણીનું વ્યાપક પદ અથવા n મું પદ $a_n = ar^{n-1}$ છે.

  સમગુણોત્તર શ્રેણીનાં પ્રથમ n પદોનો સરવાળો,

  જો $r \neq 1$ હોય એ માટે $S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$ અથવા $\frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$

- બે ધન સંખ્યાઓ a અને b નો સમગુણોત્તર મધ્યક $\sqrt{ab}$ છે. અર્થાત્ a, G, b સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં છે.

Historical Note

Evidence is found that Babylonians, some 4000 years ago, knew of arithmetic and geometric sequences. According to Boethius (510), arithmetic and geometric sequences were known to early Greek writers. Among the Indian mathematician, Aryabhatta (476) was the first to give the formula for the sum of squares and cubes of natural numbers in his famous work *Aryabhatiyam*, written around 499. He also gave the formula for finding the sum to n terms of an arithmetic sequence starting with p^{th} term. Noted Indian mathematicians Brahmgupta (598), Mahavira (850) and Bhaskara (1114-1185) also considered the sum of squares and cubes. Another specific type of sequence having important applications in mathematics, called *Fibonacci sequence*, was discovered by Italian mathematician Leonardo Fibonacci (1170-1250). Seventeenth century witnessed the classification of series into specific forms. In 1671 James Gregory used the term infinite series in connection with infinite sequence. It was only through the rigorous development of algebraic and set theoretic tools that the concepts related to sequence and series could be formulated suitably.

પ્રકરણ 10

રેખાઓ

❖ ***Geometry, as a logical system, is a means and even the most powerful means to make children feel the strength of the human spirit that is of their own spirit. – H. FREUDENTHAL*** ❖

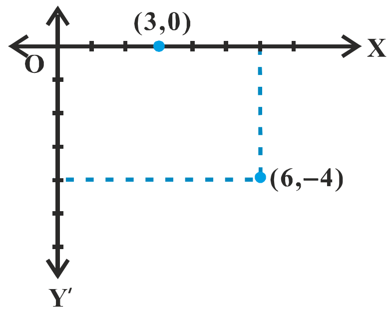
10.1 પ્રાસ્તાવિક

આપણે આગળના વર્ગોમાં દ્વિ-પરિમાણ યામભૂમિતિથી પરિચિત થયાં છીએ. મુખ્યત્વે તે બીજગણિત અને ભૂમિતિનો સમન્વય છે. બીજગણિતના ઉપયોગથી ભૂમિતિનો વ્યવસ્થિત અભ્યાસ પ્રતિષ્ઠિત તત્ત્વચિંતક અને ગણિતશાસ્ત્રી ***René Descartes*** એ પોતાના ઈ.સ.1637 માં પ્રકાશિત પુસ્તક *'La Géométry'*માં સૌપ્રથમ વખત કર્યો હતો. આ પુસ્તકમાં વક્રના સમીકરણની સંકલ્પના રજૂ થઈ અને આ રીતે ભૂમિતિના અભ્યાસમાં વિશ્લેષણ-પદ્ધતિ દાખલ થઈ. વિશ્લેષણ અને ભૂમિતિના સમન્વયથી વિશ્લેષણાત્મક ભૂમિતિ બને છે. આગળના વર્ગોમાં આપણે યામાક્ષો, યામ-સમતલ, યામ-સમતલમાં બિંદુનું નિરૂપણ, બે બિંદુઓ વચ્ચેનું અંતર, વિભાજન-સૂત્ર વગેરેનો અભ્યાસ કર્યો તે યામ-ભૂમિતિનો અભ્યાસ છે. આ બધી યામ-ભૂમિતિની પાયાની સંકલ્પનાઓ છે.

René Descartés
(1596 -1650)

ચાલો હવે આપણે આગળના વર્ગોમાં અભ્યાસ કરેલ યામ-ભૂમિતિનું ટૂંકમાં પુનરાવર્તન કરીએ. આકૃતિ 10.1 એ બિંદુઓ (6, – 4) અને (3, 0) નું XY-સમતલમાં નિરૂપણ દર્શાવે છે.

અહીં આપણે નોંધીએ કે બિંદુ (6, – 4) એ x-અક્ષની ધન દિશામાં y-અક્ષથી 6 એકમ અંતરે અને y-અક્ષની ઋણ દિશામાં x-અક્ષથી 4 એકમ અંતરે છે. તે જ રીતે (3, 0) એ x-અક્ષની ધન દિશામાં y-અક્ષથી 3 એકમ અંતરે અને x-અક્ષથી શૂન્ય અંતરે છે.



આકૃતિ 10.1

આ ઉપરાંત આપણે નીચે દર્શાવેલ કેટલાંક અગત્યનાં સૂત્રો પણ શીખી ગયાં :

I. બિંદુઓ P (x_1, y_1) અને Q (x_2, y_2) વચ્ચેનું અંતર

$$PQ=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

ઉદાહરણ તરીકે, (6, – 4) અને (3, 0) વચ્ચેનું અંતર

$$\sqrt{(3-6)^2+(0+4)^2}=\sqrt{9+16}=5 \text{ એકમ.}$$

II. બિંદુઓ (x_1, y_1) અને (x_2, y_2)ને જોડતા રેખાખંડનું $m : n$ ગુણોત્તરમાં અંત:વિભાજન કરતા બિંદુના યામ

$$\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \frac{my_2+ny_1}{m+n}\right).$$

ઉદાહરણ તરીકે, A(1, –3) અને B (–3, 9) બિંદુઓને જોડતા રેખાખંડનું 1: 3 ગુણોત્તરમાં અંત:વિભાજન કરતાં બિંદુના યામ

$$x=\frac{1\cdot(-3)+3\cdot 1}{1+3}=0 \text{ અને } y=\frac{1\cdot 9+3\cdot(-3)}{1+3}=0.$$

III. વિશિષ્ટ કિસ્સા તરીકે જો $m = n$ હોય, તો બિંદુઓ (x_1, y_1) અને (x_2, y_2) ને જોડતા રેખાખંડના મધ્યબિંદુના યામ $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ મળે.

IV. (x_1, y_1), (x_2, y_2) અને (x_3, y_3) શિરોબિંદુઓવાળા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ,

$$\frac{1}{2}\left| x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\right|$$

ઉદાહરણ તરીકે, (4, 4), (3, – 2) અને (– 3, 16) શિરોબિંદુઓવાળા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ,

$$\frac{1}{2}\left|4(-2-16)+3(16-4)+(-3)(4+2)\right|=\frac{|-54|}{2}=27.$$

નોંધ : જો ત્રિકોણ ABC નું ક્ષેત્રફળ શૂન્ય થાય, તો ત્રણ બિંદુઓ A, B, C એક જ રેખા પર હોય. આમ તે સમરેખ થાય.

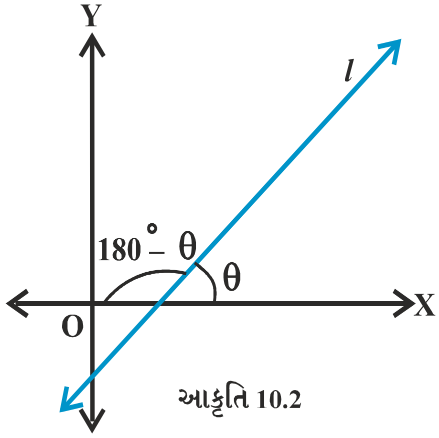
આ પ્રકરણમાં આપણે યામ-ભૂમિતિનો વધુ અભ્યાસ કરીશું. તેમાં યામ-ભૂમિતિની સૌથી સરળ આકૃતિ રેખાના ગુણધર્મોનો અભ્યાસ કરીશું. રેખા સાદામાં સાદી આકૃતિ હોવા છતાં ભૂમિતિમાં તેની સંકલ્પના ઘણી મહત્ત્વની છે. તેના રોજિંદા અનુભવો તો ઘણા રસપ્રદ અને ઉપયોગી રીતે દશ્યમાન થતા હોય છે. આપણે રેખાને બૈજિક રીતે દર્શાવવા પર અને તેના ઢાળ પર ધ્યાન કેન્દ્રિત કરીશું.

10.2 રેખાનો ઢાળ

યામ સમતલમાં કોઈપણ રેખા x-અક્ષ સાથે એકબીજાના પૂરકકોણ હોય તેવા બે ખૂણા બનાવે.

યામ-સમતલમાં આપેલી એક રેખા x-અક્ષની ધન દિશા સાથે ઘડિયાળના કાંટાની વિરુદ્ધ દિશામાં જે ખૂણો બનાવે તેનું માપ θ હોય, તો તેને રેખા l નો ઝોક કહે છે. સ્પષ્ટ છે કે $0° \le \theta \le 180°$ (આકૃતિ 10.2).

આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે, જો રેખા x-અક્ષને સમાંતર કે તેની સાથે સંપાતી હોય તો તેનો ઝોક 0° છે અને જો તે શિરોલંબ રેખા હોય (y-અક્ષને સમાંતર કે સંપાતી)નો તેનો ઝોક 90° છે.



આકૃતિ 10.2

વ્યાખ્યા 1 : *જો θ એ રેખા l નો ઝોક હોય તો tan θ ને રેખા l નો **ઢાળ** કહે છે.*

જો રેખાનો ઝોક 90° હોય તો તેનો ઢાળ વ્યાખ્યાયિત ન બને. રેખાના ઢાળને સંકેતમાં m વડે દર્શાવાય છે.

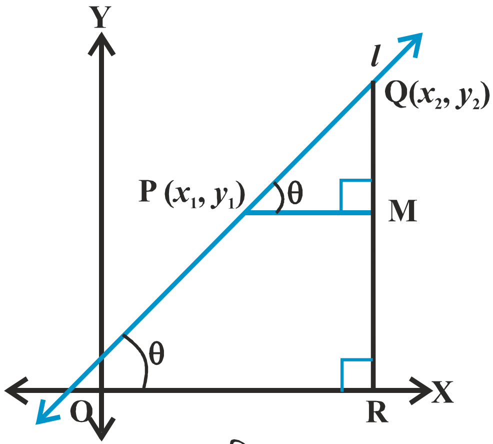
આમ, $m = \tan\theta, \theta \ne 90°$

સ્પષ્ટ છે કે x-અક્ષનો ઢાળ શૂન્ય છે અને y-અક્ષનો ઢાળ અવ્યાખ્યાયિત છે.

10.2.1 જો રેખા પર કોઈ પણ બે બિંદુઓ આપ્યાં હોય, તો તે રેખાનો ઢાળ.

આપણે જાણીએ છીએ કે બે બિંદુઓ એક રેખા સુનિશ્ચિત કરે છે. તેથી આપણે રેખાના ઢાળને તેની પર આવેલાં બે બિંદુને જોડતા રેખાખંડના ઢાળનો ઉપયોગ કરી મેળવીશું.

ધારો કે $P(x_1, y_1)$ અને $Q(x_2, y_2)$ શિરોલંબ ન હોય તેવી રેખા l પરનાં બે બિંદુઓ છે. તેનો ઝોક θ છે. સ્પષ્ટ છે કે $x_1 \ne x_2$, નહિ તો રેખા x-અક્ષને લંબ થશે અને તેનો ઢાળ વ્યાખ્યાયિત નથી. રેખા l નો ઝોક લઘુકોણ કે ગુરુકોણ હોઈ શકે. આપણે બંને વિકલ્પોનો વિચાર કરીશું.



આકૃતિ 10.3 (i)

આકૃતિ 10.3 (i) અને (ii) માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે x-અક્ષને લંબ QR અને RQ ને લંબ PM દોરો.

વિકલ્પ 1 જ્યારે θ લઘુકોણ હોય :

આકૃતિ 10.3 (i) માં $\angle MPQ = \theta$.

$\therefore$ રેખા l નો ઢાળ $= m = \tan\theta$. ... (1)

પરંતુ ΔMPQ માં, $\tan\theta = \dfrac{MQ}{MP} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. ... (2)

સમીકરણ (1) અને (2) પરથી,

$m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ મળશે.

વિકલ્પ II જ્યારે θ ગુરુકોણ હોય :

આકૃતિ 10.3 (ii) માં

$\angle MPQ = 180° - \theta$

$\therefore \theta = 180° - \angle MPQ$

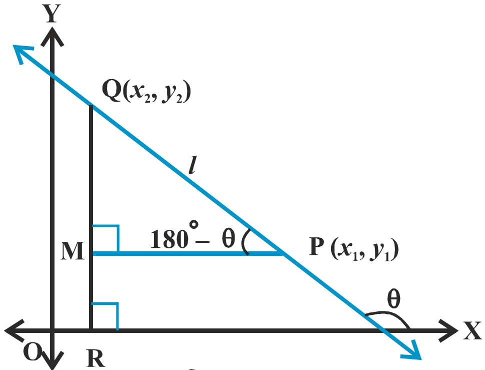
હવે, રેખા l નો ઢાળ

$$m = \tan\theta$$

$$= \tan(180° - \angle MPQ)$$

$$= -\tan \angle MPQ$$

$$= -\frac{MQ}{MP} = -\frac{y_2 - y_1}{x_1 - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$



આકૃતિ 10.3 (ii)

આમ, બંને વિકલ્પમાં જોઈ શકાય છે કે બિંદુઓ A (x_1, y_1) અને B (x_2, y_2)માંથી પસાર થતી રેખાનો ઢાળ

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

10.2.2 બે રેખાઓ પરસ્પર સમાંતર કે લંબ હોય તે માટેની ઢાળના સંદર્ભમાં શરત

ધારો કે યામ-સમતલમાં શિરોલંબ ન હોય તેવી બે રેખાઓ l_1 અને l_2 છે. રેખાઓ l_1 અને l_2 ના ઢાળ અનુક્રમે m_1 અને m_2 છે. ધારો કે તેમના ઝોક અનુક્રમે α અને β છે.

હવે, જો રેખા l_1 એ રેખા l_2 ને સમાંતર હોય, તો તેમના ઝોક સમાન થશે (આકૃતિ 10.4.)

આમ, $\alpha = \beta$. તેથી $\tan\alpha = \tan\beta$.

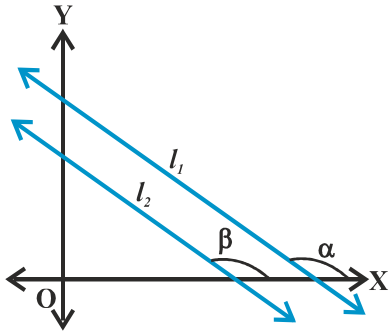
$\therefore m_1 = m_2$ એટલે કે તેમના ઢાળ સમાન છે.

એથી, ઊલટું, ધારો કે બે રેખાઓ l_1 અને l_2 ના ઢાળ સરખા છે. એટલે કે $m_1 = m_2$

$\therefore \tan\alpha = \tan\beta$

$\tan$ વિધેયના ગુણધર્મ પ્રમાણે $\alpha = \beta$ (α તથા β એ $0°$ થી $180°$ વચ્ચે).

$\therefore$ રેખાઓ સમાંતર થાય.



આકૃતિ 10.4

આમ, શિરોલંબ ના હોય તેવી બે રેખાઓ સમાંતર હોવાની આવશ્યક અને પર્યાપ્ત શરત એ છે કે તેમના ઢાળ સમાન થાય.

હવે જો રેખાઓ l_1 અને l_2 પરસ્પર લંબ હોય (આકૃતિ 10.5), તો $\beta = \alpha + 90°$.

$$\therefore \tan\beta = \tan(\alpha + 90°) = -\cot\alpha = -\frac{1}{\tan\alpha}$$

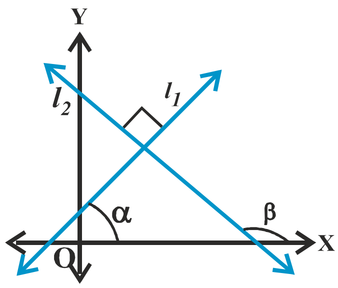
એટલે કે $m_2 = -\frac{1}{m_1}$ અથવા $m_1\ m_2 = -1$

આથી, ઊલટું જો $m_1\ m_2 = -1$, તો $\tan\alpha \tan\beta = -1$.

$\therefore \tan\alpha = -\cot\beta = \tan(\beta + 90°)$ અથવા $\tan(\beta - 90°)$

$\therefore \alpha$ અને β નો તફાવત $90°$ છે.

આથી, રેખાઓ l_1 અને l_2 પરસ્પર લંબ છે.



આકૃતિ 10.5

આમ, શિરોલંબ ન હોય તેવી બે રેખાઓ પરસ્પર લંબ હોવાની આવશ્યક અને પર્યાપ્ત શરત એ છે કે તેમના ઢાળ

એકબીજાના ઋણ વ્યસ્ત હોય.

આમ, $m_2 = -\dfrac{1}{m_1}$ અથવા, $m_1\, m_2 = -1$.

હવે, નીચેનાં ઉદાહરણોને સમજીએ.

ઉદાહરણ 1 : રેખાઓના ઢાળ શોધો.

(a) (3, – 2) અને (–1, 4) માંથી પસાર થતી,

(b) (3, – 2) અને (7, – 2) માંથી પસાર થતી,

(c) (3, – 2) અને (3, 4) માંથી પસાર થતી,

(d) x-અક્ષની ધન દિશા સામે 60°નો ખૂણો બનાવતી.

ઉકેલ : (a) (3, – 2) અને (– 1, 4) માંથી પસાર થતી રેખાનો ઢાળ

$$m = \frac{4-(-2)}{-1-3} = \frac{6}{-4} = -\frac{3}{2}.$$

(b) (3, – 2) અને (7, – 2) માંથી પસાર થતી રેખાનો ઢાળ

$$m = \frac{-2-(-2)}{7-3} = \frac{0}{4} = 0.$$

(c) (3, – 2) અને (3, 4) માંથી પસાર થતી રેખાનો ઢાળ $m = \dfrac{4-(-2)}{3-3} = \dfrac{6}{0}$ વ્યાખ્યાયિત નથી.

(d) અહીં, રેખાનો ઝોક $\alpha = 60°$.

તેથી, રેખાનો ઢાળ $m = \tan 60° = \sqrt{3}$.

10.2.3 બે રેખાઓ વચ્ચેનો ખૂણો

જ્યારે એક સમતલમાં આવેલી એક કરતાં વધુ રેખાઓનો વિચાર કરીએ ત્યારે તે પરસ્પર સમાંતર હોય અથવા પરસ્પર છેદતી રેખાઓ હોઈ શકે. અહીં, આપણે બે રેખાઓ વચ્ચેના ખૂણાનો તેમના ઢાળ સંદર્ભે વિચાર કરીશું.

ધારો કે L_1 અને L_2 શિરોલંબ રેખાઓ નથી. તેમના ઢાળ અનુક્રમે m_1 અને m_2 છે.

ધારો કે રેખાઓ પરસ્પર લંબ નથી. આથી $m_1 m_2 \neq -1$. જો તે પરસ્પર લંબ હોય તો તેમની વચ્ચેનો ખૂણો 90°નો હોય. હવે, જો L_1 અને L_2 ના ઝોક અનુક્રમે α_1 અને α_2 હોય, તો

$$m_1 = \tan \alpha_1 \text{ અને } m_2 = \tan \alpha_2.$$

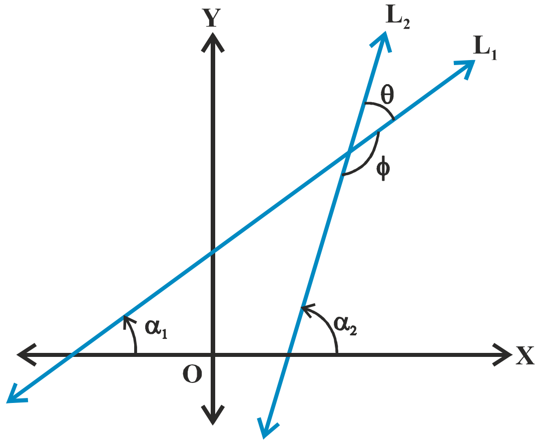
આપણે જાણીએ છીએ કે જ્યારે બે રેખાઓ એકબીજીને છેદે ત્યારે છેદબિંદુ આગળ એકરૂપ અભિકોણની બે જોડ રચાય છે. તેમાં બે પાસપાસેના ખૂણાનાં માપનો સરવાળો 180° છે. ધારો કે રેખાઓ L_1 અને L_2માં છેદબિંદુ આગળ બનતા પાસપાસેના ખૂણાઓ θ અને ϕ છે. (આકૃતિ 10.6).

$$\theta = \alpha_2 - \alpha_1 \text{ અને } \alpha_1, \alpha_2 \neq 90°.$$

$$\therefore \tan\theta = \tan(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\tan\alpha_2 - \tan\alpha_1}{1+\tan\alpha_1 \tan\alpha_2} = \frac{m_2 - m_1}{1+m_1 m_2} \qquad (\text{કારણ કે } 1 + m_1 m_2 \neq 0)$$

અને $\phi = 180° - \theta$

આથી $tan\ \phi = tan\ (180° - \theta) = -\ tan\ \theta = -\dfrac{m_2 - m_1}{1 + m_1m_2}$, કારણ કે $1 + m_1m_2 \neq 0$



આકૃતિ 10.6

હવે, બે વિકલ્પોનું નિર્માણ થાય છે.

વિકલ્પ I જો $\dfrac{m_2 - m_1}{1 + m_1m_2}$ ધન હોય, તો $tan\ \theta$ ધન અને $tan\ \phi$ ઋણ થશે. તેનો અર્થ એ કે θ લઘુકોણ અને ϕ ગુરુકોણ હશે.

વિકલ્પ II જો $\dfrac{m_2 - m_1}{1 + m_1m_2}$ ઋણ હોય, તો $tan\ \theta$ ઋણ અને $tan\ \phi$ ધન થશે, તેનો અર્થ θ ગુરુકોણ અને ϕ લઘુકોણ હશે.

આમ, બે રેખાઓ L_1 અને L_2 ના ઢાળ અનુક્રમે m_1 અને m_2 હોય અને તેમની વચ્ચેના લઘુકોણનું માપ θ હોય તો,

$$tan\ \theta = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1m_2}\right|, \qquad (\text{કારણ કે } 1 + m_1m_2 \neq 0) \ldots(1)$$

ગુરુકોણ ϕ નું માપ $\phi = 180^0 - \theta$ નો ઉપયોગ કરી મેળવી શકાય.

ઉદાહરણ 2 : બે રેખાઓ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ $\dfrac{\pi}{4}$ હોય અને તે પૈકીની એક રેખાનો ઢાળ $\dfrac{1}{2}$ હોય, તો બીજી રેખાનો ઢાળ શોધો.

ઉકેલ : બે રેખાઓ વચ્ચેના લઘુકોણનું માપ θ હોય અને તેમના ઢાળ m_1 અને m_2 હોય, તો

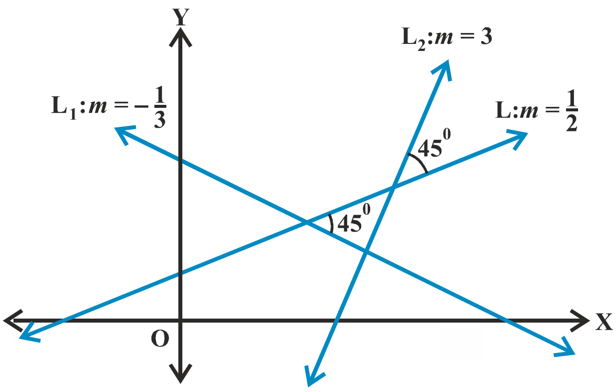
$$tan\ \theta = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1m_2}\right| \qquad \ldots (1)$$

હવે, $m_1 = \dfrac{1}{2}$, $m_2 = m$ અને $\theta = \dfrac{\pi}{4}$.

હવે, આ કિંમતોને (1) માં મૂકતાં,

$$tan\ \frac{\pi}{4} = \left|\frac{m - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}m}\right| \quad \text{એટલે કે} \quad 1 = \left|\frac{m - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}m}\right|$$

આ પરથી, $\dfrac{m - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}\ m} = 1$ અથવા $\dfrac{m - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}\ m} = -1.$



આકૃતિ 10.7

$\therefore \ m = 3$ અથવા $m = -\frac{1}{3}$.

આમ, બીજી રેખાનો ઢાળ 3 અથવા $-\frac{1}{3}$ થશે. આકૃતિ 10.7 બે જવાબનું કારણ દર્શાવે છે.

ઉદાહરણ 3 : (–2, 6) અને (4, 8) બિંદુઓમાંથી પસાર થતી રેખા અને (8, 12) અને (x, 24) બિંદુઓમાંથી પસાર થતી રેખા પરસ્પર લંબ હોય, તો x ની કિંમત શોધો.

ઉકેલ : (– 2, 6) અને (4, 8) માંથી પસાર થતી રેખાનો ઢાળ

$$m_1 = \frac{8-6}{4-(-2)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

(8, 12) અને (x, 24) માંથી પસાર થતી રેખાનો ઢાળ

$$m_2 = \frac{24-12}{x-8} = \frac{12}{x-8}$$

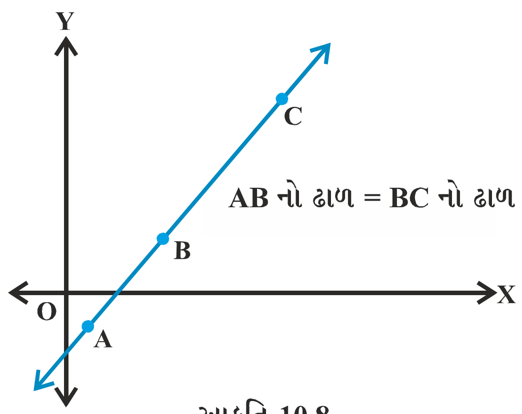
આ બે રેખાઓ પરસ્પર લંબ છે.

$\therefore \ m_1 \, m_2 = -1$

$\therefore \ \frac{1}{3} \times \frac{12}{x-8} = -1$ એટલે કે $x = 4$.

10.2.4 ત્રણ બિંદુઓની સમરેખતા

આપણે જાણીએ છીએ કે બે સમાંતર રેખાઓના ઢાળ સમાન હોય છે. હવે જો સમાન ઢાળવાળી બે રેખાઓ એક જ બિંદુમાંથી પસાર થતી હોય તો અવશ્ય જ તે રેખાઓ સંપાતી હોય. આથી સમતલ XYમાં આપેલ ત્રણ બિંદુઓ A, B અને C માટે જો રેખા AB નો ઢાળ = રેખા BC નો ઢાળ થાય તો અને તો જ આ બિંદુઓ સમરેખ થાય.



આકૃતિ 10.8

ઉદાહરણ 4 : જો P (h, k), Q (x_1, y_1) અને R (x_2, y_2) ત્રણ સમરેખ બિંદુઓ હોય, તો સાબિત કરો કે

$$(h - x_1)(y_2 - y_1) = (k - y_1)(x_2 - x_1).$$

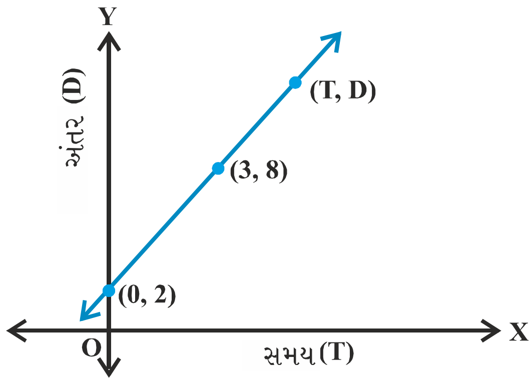
ઉકેલ : અહીં, P, Q અને R સમરેખ બિંદુઓ છે. તેથી,

PQ નો ઢાળ = QR નો ઢાળ, આથી $\frac{y_1 - k}{x_1 - h} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

અથવા $\frac{k - y_1}{h - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$,

અથવા $(h - x_1)(y_2 - y_1) = (k - y_1)(x_2 - x_1)$.

ઉદાહરણ 5 : આકૃતિ 10.9 માં રેખીય ગતિનો સમય અને અંતરનો આલેખ આપેલ છે. સમય અને અંતરનાં બે સ્થાન, જ્યારે T = 0 ત્યારે D = 2 અને જ્યારે T = 3 ત્યારે D = 8 આપેલ છે. તો ઢાળનો ઉપયોગ કરી ગતિનો નિયમ મેળવો. એટલે કે અંતર એ સમય પર કઈ રીતે આધારિત છે તે બતાવો.



આકૃતિ 10.9

ઉકેલ : ધારો કે (T, D) એ રેખા પરનું કોઈ બિંદુ છે. T સમયે અંતર D છે. આમ, બિંદુઓ (0, 2), (3, 8) અને (T, D) સમરેખ થશે.

$$\frac{8-2}{3-0} = \frac{D-8}{T-3} \quad \text{અથવા} \quad 6(T-3) = 3(D-8)$$

અથવા $D = 2(T + 1)$, માંગેલ સંબંધ છે.

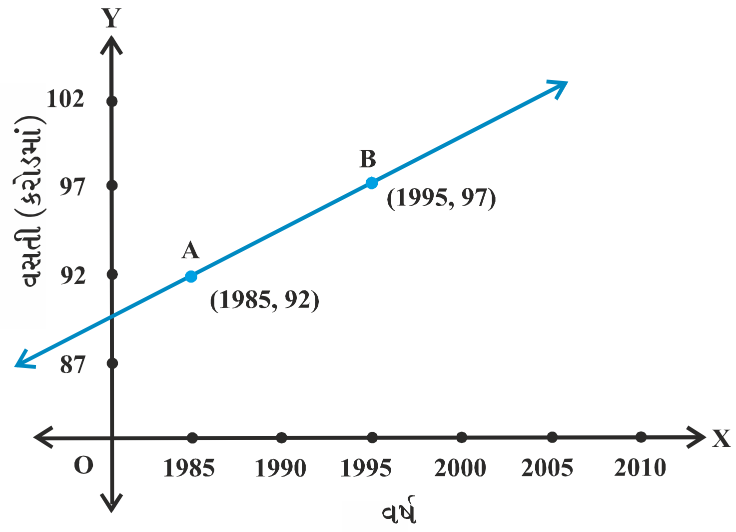
સ્વાધ્યાય 10.1

1. યામ-સમતલમાં (– 4, 5), (0, 7), (5, – 5) અને (– 4, –2) શિરોબિંદુઓવાળો ચતુષ્કોણ દોરો અને તેનું ક્ષેત્રફળ શોધો.
2. એક સમબાજુ ત્રિકોણનો પાયો y-અક્ષ પર એવી રીતે આવેલો છે કે તેનું મધ્યબિંદુ ઊગમબિંદુ છે. આ સમબાજુ ત્રિકોણની બાજુ $2a$ હોય, તો તેનાં શિરોબિંદુઓ શોધો.
3. જ્યારે (i) PQ, y-અક્ષને સમાંતર હોય (ii) PQ, x-અક્ષને સમાંતર હોય ત્યારે બિંદુઓ P (x_1, y_1) અને Q (x_2, y_2) વચ્ચેનું અંતર શોધો.
4. (7, 6) અને (3, 4) થી સમાન અંતરે હોય એવું x-અક્ષ પરનું બિંદુ શોધો.
5. P (0, – 4) અને B (8, 0) ને જોડતાં રેખાખંડના મધ્યબિંદુ અને ઊગમબિંદુમાંથી પસાર થતી રેખાનો ઢાળ શોધો.
6. પાયથાગોરસના પ્રમેયનો ઉપયોગ કર્યા વગર બતાવો કે (4, 4), (3, 5) અને (–1, –1) કાટકોણ ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓ છે.
7. એક રેખા y-અક્ષની ધન દિશા સાથે ઘડિયાળના કાંટાથી વિરુધ્ધ દિશામાં 30° નો ખૂણો બનાવે, તો તે રેખાનો ઢાળ શોધો.
8. જો બિંદુઓ $(x, -1)$, (2, 1) અને (4, 5) સમરેખ હોય, તો x ની કિંમત શોધો.
9. અંતર સૂત્રનો ઉપયોગ કર્યા વગર બતાવો કે (– 2, – 1), (4, 0), (3, 3) અને (–3, 2) સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનાં શિરોબિંદુઓ છે.
10. (3,–1) અને (4,–2) ને જોડતી રેખા અને x-અક્ષ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ શોધો.
11. જો બે રેખાઓ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ α હોય અને $\tan\alpha = \frac{1}{3}$ હોય અને બે રેખાઓ પૈકીની એક રેખાનો ઢાળ બીજી રેખાના ઢાળ કરતાં બે ગણો હોય તો તે બે રેખાઓના ઢાળ શોધો.

12. એક રેખા (x_1, y_1) અને (h, k)માંથી પસાર થાય છે. જો આ રેખાનો ઢાળ m હોય તો, સાબિત કરો કે $k - y_1 = m\,(h - x_1)$.

13. જો ત્રણ બિંદુઓ $(h, 0)$, (a, b) અને $(0, k)$ એક રેખા પર આપેલાં હોય, તો સાબિત કરો કે $\frac{a}{h} + \frac{b}{k} = 1$.

14. વસતી અને સંગત વર્ષનો એક આલેખ નીચે (આકૃતિ 10.10)માં આપેલ છે. રેખા AB નો ઢાળ શોધો અને તેનો ઉપયોગ કરી વર્ષ 2010માં વસતી કેટલી હશે તે શોધો.



આકૃતિ 10.10

10.3 રેખાના સમીકરણનાં વિવિધ સ્વરૂપ

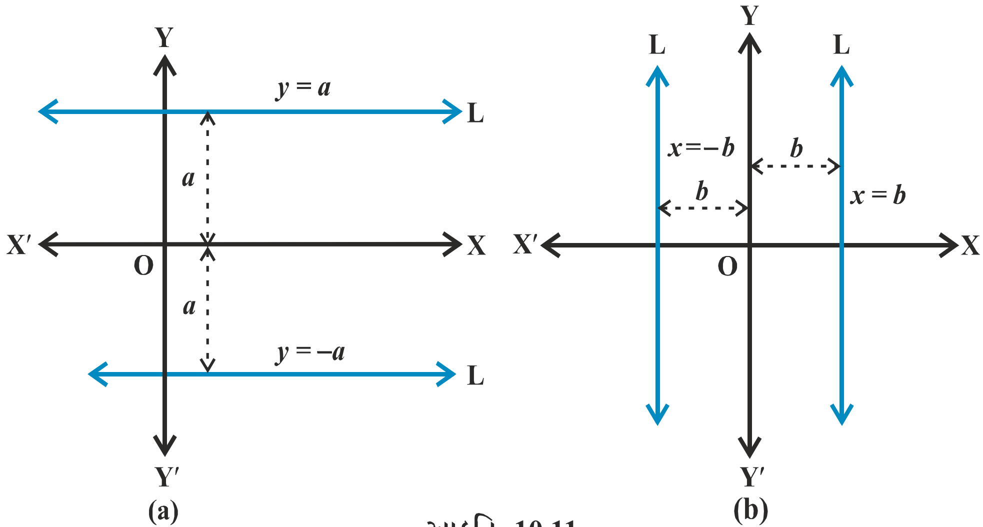
આપણે જાણીએ છીએ કે સમતલમાં આવેલી દરેક રેખા પર અસંખ્ય બિંદુઓ હોય છે. રેખા અને બિંદુ વચ્ચેનો સંબંધ આપણને નીચેની સમસ્યાનો ઉકેલ મેળવવામાં મદદરૂપ થશે.

આપણે એવું કઈ રીતે કહી શકીએ કે આપેલ બિંદુ એ આપેલ રેખા પર છે ? આ પ્રશ્નનો ઉત્તર એ હોઈ શકે કે આપણને બિંદુનો રેખા પર હોવા અંગેનો નિશ્ચિત સંબંધ જ્ઞાત હોય તો કહી શકાય. ધારો કે $P(x, y)$ એ XY-સમતલમાં આવેલું એક બિંદુ છે અને L એ કોઈ આપેલી રેખા છે. હવે L ના સમીકરણ માટે આપણે એક એવું વિધાન કે શરતની રચના કરીએ કે જે બિંદુ P, રેખા L પર હોય તો જ સત્ય થાય, નહિ તો અસત્ય થાય. ખરેખર આ વિધાન ચલ x અને y માં એક બૈજિક સમીકરણ છે.

હવે, આપણે રેખાના સમીકરણનાં વિવિધ સ્વરૂપોની ચર્ચા કરીશું.

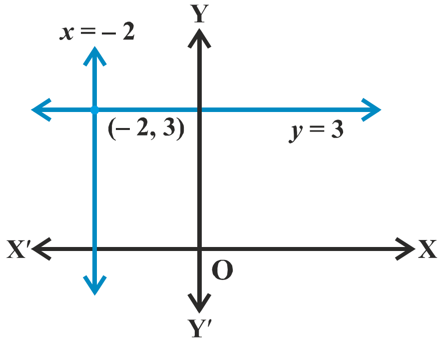
10.3.1 સમક્ષિતિજ અને શિરોલંબ રેખાઓ

જો સમક્ષિતિજ રેખા L એ x-અક્ષથી a એકમ અંતરે આવેલી હોય તો તેના પરનાં તમામ બિંદુઓનો y -યામ a અથવા $-a$ છે. [આકૃતિ 10.11 (a)]. તેથી રેખા L નું સમીકરણ $y = a$ અથવા $y = -a$. ચિહ્ન ધન કે ઋણ હશે તે રેખાની સ્થિતિ ઉપર એટલે કે તે x-અક્ષની ઉપર છે કે નીચે તે પર નિર્ભર કરે છે. તે જ પ્રમાણે શિરોલંબ રેખા L એ y-અક્ષથી b એકમ અંતરે આવેલ હોય તો તેનું સમીકરણ $x = b$ અથવા $x = -b$ થાય. [આકૃતિ 10.11(b)].



આકૃતિ 10.11

ઉદાહરણ 6 : (– 2, 3)માંથી પસાર થતી અને અક્ષોને સમાંતર રેખાઓનાં સમીકરણ મેળવો.

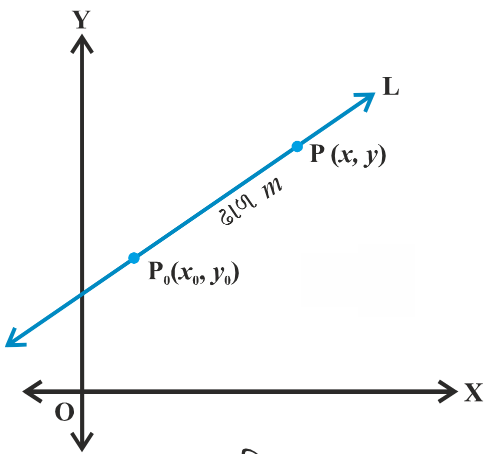


આકૃતિ 10.12

ઉકેલ : આકૃતિ 10.12 માં રેખાઓની સ્થિતિ બતાવેલ છે. x-અક્ષને સમાંતર રેખા પરનાં તમામ બિંદુઓનો y-યામ 3 છે. આમ, x-અક્ષને સમાંતર અને (– 2, 3)માંથી પસાર થતી રેખાનું સમીકરણ $y = 3$ છે. તે જ રીતે y-અક્ષને સમાંતર અને (– 2, 3) માંથી પસાર થતી રેખાનું સમીકરણ $x = -2$ છે.

10.3.2 બિંદુ-ઢાળ સ્વરૂપ *(Point-slope form)*

ધારો કે $P_0 (x_0, y_0)$ એ શિરોલંબ ન હોય તેવી રેખા L પરનું એક બિંદુ છે. તે રેખાનો ઢાળ m છે. ધારો કે $P (x, y)$ એ રેખા પરનું કોઈપણ બિંદુ છે (આકૃતિ 10.13). આથી ઢાળની વ્યાખ્યા પ્રમાણે રેખા L નો ઢાળ,



આકૃતિ 10.13

$$m = \frac{y-y_0}{x-x_0}, \text{ એટલે કે}$$

$$y - y_0 = m(x - x_0) \qquad ...(1)$$

વળી, બિંદુ $P_0 (x_0, y_0)$ પણ રેખાના પ્રત્યેક બિંદુ (x, y) ની સાથે સમીકરણ (1)નું સમાધાન કરે છે અને સમતલનું અન્ય કોઈ બિંદુ (1) નું સમાધાન કરતું નથી. તેથી સમીકરણ (1) વાસ્તવમાં આપેલી રેખા L નું સમીકરણ છે.

આમ, જો $P(x, y)$ એ $y - y_0 = m (x - x_0)$ નું સમાધાન કરે તો ને તો જ બિંદુ (x, y) એ નિશ્ચિત બિંદુ (x_0, y_0) માંથી પસાર થતી અને m ઢાળવાળી રેખા પર હોય.

ઉદાહરણ 7 : બિંદુ (– 2, 3) માંથી પસાર થતી અને જેનો ઢાળ – 4 હોય તેવી રેખાનું સમીકરણ શોધો.

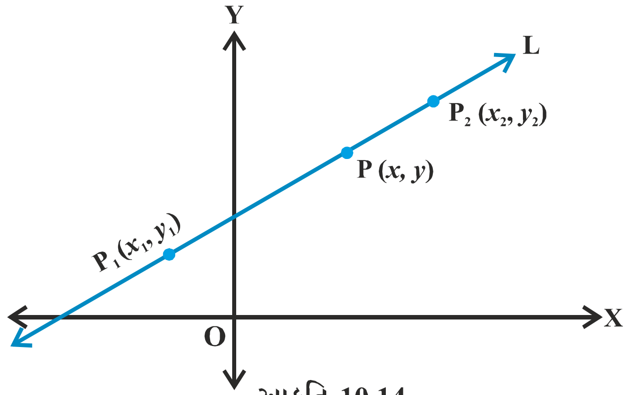
ઉકેલ : અહીં, $m = -4$ અને આપેલ બિંદુ $(x_0, y_0) = (-2, 3)$.

આમ, બિંદુ-ઢાળ સ્વરૂપથી ઉપરના રેખાના સમીકરણ (1) પરથી માંગેલ રેખાનું સમીકરણ

$y - 3 = -4(x + 2)$ અથવા $4x + y + 5 = 0$, માંગેલ રેખાનું સમીકરણ છે.

10.3.3 બે બિંદુ-સ્વરૂપ *(Two Point form)*

ધારો કે રેખા L એ બિંદુઓ $P_1(x_1, y_1)$ અને $P_2(x_2, y_2)$ માંથી પસાર થાય છે. ધારો કે P (x, y) એ રેખા L પરનું કોઈ પણ બિંદુ છે (આકૃતિ 10.14).



આકૃતિ 10.14

ત્રણે બિંદુઓ P_1, P_2 અને P સમરેખ છે. તેથી,

P_1Pનો ઢાળ = P_1P_2નો ઢાળ

$$\therefore \quad \frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad \text{અથવા} \quad y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1). \qquad \dots (2)$$

વળી (x_1, y_1) પણ સમીકરણ (2) નું સમાધાન કરે છે. સમતલનું કોઈપણ બિંદુ સમીકરણ (2) નું સમાધાન કરે તો તે રેખા L પર હોય.

આમ, (x_1, y_1) અને (x_2, y_2) બિંદુઓમાંથી પસાર થતી રેખાનું સમીકરણ

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

ઉદાહરણ 8 : બિંદુઓ (1, –1) અને (3, 5) માંથી પસાર થતી રેખાનું સમીકરણ મેળવો.

ઉકેલ : અહીં $x_1 = 1$, $y_1 = -1$, $x_2 = 3$ અને $y_2 = 5$

રેખાના ઉપરના બે બિંદુ સ્વરૂપના સમીકરણ (2) પરથી,

$$y - (-1) = \frac{5 - (-1)}{3 - 1}(x - 1)$$

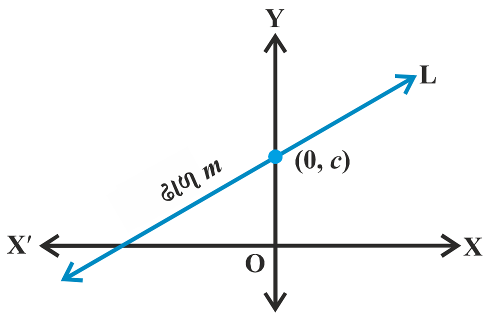
$\therefore \; -3x + y + 4 = 0$ માંગેલ સમીકરણ છે.

10.3.4 ઢાળ-અંતઃખંડ સ્વરૂપ *(Slope-intercept Form)*

કોઈ વખત આપણને રેખાની માહિતી ઢાળ અને તેના કોઈ એક અક્ષ પરના અંતઃખંડ દ્વારા આપેલી હોય, તો આ સ્વરૂપમાં આપેલી રેખાનું સમીકરણ આપણે શોધીએ.

વિકલ્પ I : ધારો કે રેખા L નો ઢાળ m છે અને તે y-અક્ષને $(0, c)$ માં છેદે છે (આકૃતિ 10.15). c ને રેખા Lનો y-અંતઃખંડ કહે છે.

આમ, રેખા Lનો ઢાળ m છે અને તે $(0, c)$ માંથી પસાર થાય છે. તેથી રેખા L નું



આકૃતિ 10.15

ઢાળબિંદુ સ્વરૂપનું સમીકરણ

$$y - c = m(x - 0) \text{ અથવા } y = mx + c \quad ...(3)$$

બિંદુ (x, y) એ $y = mx + c$ નું સમાધાન કરે તો તે જેનો y-અંતઃખંડ c હોય અને ઢાળ m હોય તેવી રેખા પર હોય. આપણે નોંધીશું કે c નું મૂલ્ય ધન કે ઋણ હોય તે પ્રમાણે y-અંતઃખંડ અનુક્રમે y-અક્ષની ધન કે ઋણ બાજુ સાથે બને તે પરથી નક્કી થાય છે.

વિકલ્પ II ધારો કે રેખા L નો ઢાળ m અને x-અંતઃખંડ d છે, તો રેખા L નું સમીકરણ,

$y = m(x - d)$ થાય. ...(4)

વિદ્યાર્થીઓ વિકલ્પ (I)માં દર્શાવેલ રીતનો ઉપયોગ કરી સ્વપ્રયત્ને આ સમીકરણ મેળવી શકે છે.

ઉદાહરણ 9 : θ ઝોક વાળી રેખા માટે $\tan\theta = \frac{1}{2}$ હોય તથા જેનો (i) y - અંતઃખંડ $= -\frac{3}{2}$ (ii) x - અંતઃખંડ $= 4$ હોય તેવી રેખાઓનાં સમીકરણ મેળવો.

ઉકેલ : (i) અહીં રેખાનો ઢાળ $m = \tan\theta = \frac{1}{2}$ છે અને y - અંતઃખંડ $c = -\frac{3}{2}$ છે.

તેથી, રેખાના ઢાળ-અંતઃખંડ સ્વરૂપના સમીકરણ (3) પરથી રેખાનું સમીકરણ

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \text{ અથવા } 2y - x + 3 = 0$$

આ માંગેલ સમીકરણ છે.

(ii) અહીં, $m = \tan\theta = \frac{1}{2}$ અને $d = 4$ આપેલ છે.

તેથી, રેખાના ઢાળ-અંતઃખંડ સ્વરૂપ સમીકરણ (4) પરથી રેખાનું સમીકરણ

$$y = \frac{1}{2}(x - 4) \text{ અથવા } 2y - x + 4 = 0 \text{ મળે.}$$

આ માંગેલ સમીકરણ છે.

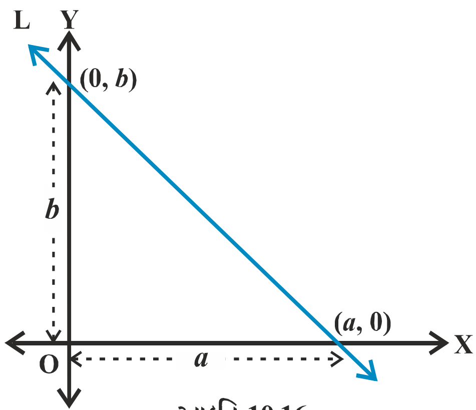
10.3.5 રેખાનું અંતઃખંડ સ્વરૂપ *(Intercept Form of the Equation of a Line)*

ધારો કે રેખા L એ x-અક્ષ પર a અને y-અક્ષ પર b અંતઃખંડ કાપે છે. $(a \neq 0,\ b \neq 0)$

$\therefore$ રેખા L એ બિંદુ $(a, 0)$ અને $(0, b)$માંથી પસાર થાય છે. (આકૃતિ 10.16). રેખાના બે બિંદુ સ્વરૂપ સમીકરણ પરથી,

$$y - 0 = \frac{b - 0}{0 - a}(x - a) \text{ અથવા } ay = -bx + ab,$$

અથવા $$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$



આકૃતિ 10.16

અક્ષો પર a અને b અંતઃખંડો કાપતી રેખાનું સમીકરણ

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \text{ છે.} \quad ... (5)$$

ઉદાહરણ 10 : x-અક્ષ અને y-અક્ષ પર અનુક્રમે -3 અને 2 અંતઃખંડો બનાવતી રેખાનું સમીકરણ મેળવો.

ઉકેલ : અહીં, $a = -3$ અને $b = 2$.

ઉપરના અંતઃખંડ સ્વરૂપ સમીકરણ (5) પરથી,

$$\frac{x}{-3}+\frac{y}{2}=1 \quad \text{અથવા} \quad 2x-3y+6=0.$$

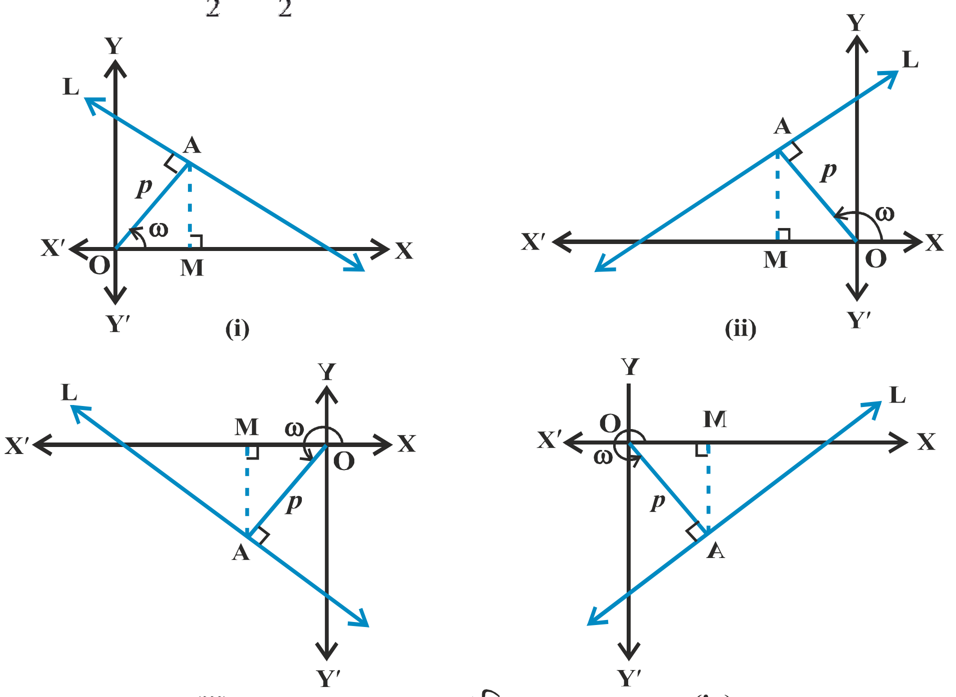
10.3.6 અભિલંબ સ્વરૂપ *(Normal Form)*

શિરોલંબ ન હોય તેવી રેખા માટે નીચેની માહિતી પ્રાપ્ત છે :

(i) ઊગમબિંદુમાંથી રેખા પર દોરેલા લંબની લંબાઈ.

(ii) લંબ દ્વારા x-અક્ષની ધન દિશામાં બનાવેલા ખૂણાનું માપ.

ધારો કે રેખા L પર ઊગમબિંદુમાંથી દોરેલા લંબની લંબાઈ OA = p અને OA x-અક્ષની ધન દિશા સાથે $\angle XOA = \omega$ માપનો ખૂણો બનાવે છે. રેખા L ના યામ-સમતલમાં બધા જ શક્ય સ્થાન આકૃતિ 10.17માં દર્શાવ્યા છે. હવે, આપણો ઉદ્દેશ રેખા L નો ઢાળ અને તેના પર એક બિંદુ શોધવાનો છે. હવે દરેક સ્થિતિમાં x-અક્ષ પર લંબ AM દોરો. ધારો કે $\omega \neq 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$



આકૃતિ 10.17

પ્રત્યેક સ્થિતિમાં OM = $p \cos \omega$ અને AM = $p \sin \omega$. આમ બિંદુ A ના યામ $(p \cos \omega, p \sin \omega)$ થશે.

અહીં, રેખા L એ OA ને લંબ છે.

$$\therefore \text{ રેખા Lનો ઢાળ} = -\frac{1}{\text{OA નો ઢાળ}} = -\frac{1}{\tan \omega} = -\frac{\cos \omega}{\sin \omega}.$$

આમ, રેખા L નો ઢાળ $-\frac{\cos \omega}{\sin \omega}$ અને એ બિંદુ $A(p \cos \omega, p \sin \omega)$ માંથી પસાર થાય છે. આથી બિંદુ ઢાળ સ્વરૂપ પરથી રેખા L નું સમીકરણ

$$y - p \sin \omega = -\frac{\cos \omega}{\sin \omega}(x - p \cos \omega) \quad \text{એટલે કે} \quad x \cos \omega + y \sin \omega = p(\sin^2\omega + \cos^2\omega)$$

$\therefore x \cos \omega + y \sin \omega = p.$

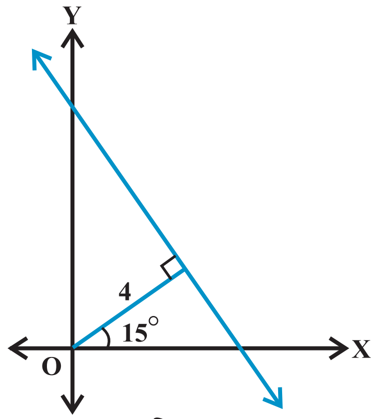
આમ, ઊગમબિંદુમાંથી રેખા પર દોરેલા લંબની લંબાઈ p હોય અને લંબ એ x-અક્ષની ધન દિશા સાથે ω માપનો ખૂણો બનાવે તો રેખાનું સમીકરણ

$$x \cos \omega + y \sin \omega = p \qquad \dots (6)$$

આ સમીકરણને રેખાનું અભિલંબ સ્વરૂપે સમીકરણ કહે છે.

નોંધ : $x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ હોય તો રેખાનાં સમીકરણ અનુક્રમે $x = p, y = p, x = -p, y = -p$ થાય તે આકૃતિ દોરીને જોઈ શકાય.

ઉદાહરણ 11 : ઊગમબિંદુમાંથી રેખા પર દોરેલા લંબનું માપ 4 હોય તથા લંબરેખાખંડ x-અક્ષની ધન દિશા સાથે 15° માપનો ખૂણો બનાવે તો રેખાનું સમીકરણ શોધો.



આકૃતિ 10.18

ઉકેલ : અહીં, $p = 4$ અને $\omega = 15^\circ$ આપેલ છે. (આકૃતિ 10.18)

હવે, $\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ અને $\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ (કેમ ?)

હવે, રેખાના અભિલંબ સ્વરૂપ (6) પરથી, રેખાનું સમીકરણ

$x \cos 15^\circ + y \sin 15^\circ = 4$ અથવા $\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}x + \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}y = 4$ અથવા

$(\sqrt{3}+1)x + (\sqrt{3}-1)y = 8\sqrt{2}$ માંગેલ સમીકરણ છે.

ઉદાહરણ 12 : ફેરનહિટ તાપમાન F અને નિરપેક્ષ તાપમાન K એક સુરેખ સમીકરણને સંતોષે છે. જ્યારે F = 32 ત્યારે K = 273 અને જ્યારે F = 212 ત્યારે K = 373 આપેલ છે. તો K ને F ના સ્વરૂપમાં દર્શાવો તથા જ્યારે K = 0 હોય ત્યારે F ની કિંમત શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે F એ x-અક્ષ પર અને K એ y-અક્ષ પર દર્શાવેલ છે. આપણી પાસે બે બિંદુઓ (32, 273) અને (212, 373) એ XY-સમતલમાં છે. તો બિંદુ (F, K) બે બિંદુ સ્વરૂપ સમીકરણનું સમાધાન કરશે.

$$K - 273 = \frac{373-273}{212-32}(F-32)$$

$$\therefore K - 273 = \frac{100}{180}(F-32)$$

$$\therefore K = \frac{5}{9}(F-32) + 273 \qquad \dots (1)$$

આ માંગેલ સંબંધ છે.

હવે, સમીકરણમાં K = 0 લેતાં,

$0 = \frac{5}{9}(F-32) + 273$ અથવા $F - 32 = -\frac{273 \times 9}{5} = -491.4$ અથવા $F = -459.4$.

બીજી રીત : આપણે જાણીએ છીએ કે રેખાના સમીકરણનું સરળતમ સ્વરૂપ $y = mx + c$ છે. ફરી ધારો કે F, x-અક્ષ

પર અને K, y-અક્ષ પર દર્શાવેલ છે. તો સમીકરણ નીચે દર્શાવેલ સ્વરૂપમાં મળશે :

$$K = mF + c \quad \ldots (1)$$

હવે, (32, 273) અને (212, 373) સમીકરણ (1) નું સમાધાન કરશે. તેથી,

$$273 = 32m + c \quad \ldots (2)$$

અને $$373 = 212m + c \quad \ldots (3)$$

સમીકરણો (2) અને (3), ઉકેલતાં,

$$m = \frac{5}{9} \text{ અને } c = \frac{2297}{9} \text{ મળશે.}$$

(1) માં m અને c ની કિંમતો મૂકતાં,

$$K = \frac{5}{9}F + \frac{2297}{9} \quad \ldots (4)$$

માંગેલ સંબંધ છે. (4) માં K = 0 લેતાં, F = – 459.4 મળશે.

નોંધ આપણે જાણીએ છીએ કે સમીકરણ $y = mx + c$ માં અચળો m અને c આવેલા છે. આ બે અચળો શોધવા આ રેખાના સમીકરણ દ્વારા જેનું સમાધાન થતું હોય તેવી બે શરતોની જરૂર પડે. ઉપરનાં બધાં જ ઉદાહરણોમાં રેખાનું સમીકરણ શોધવા બે શરતો આપેલી છે.

સ્વાધ્યાય 10.2

પ્રશ્નો 1 થી 8 માં આપેલી શરતોનું સમાધાન કરે તેવી રેખાનું સમીકરણ મેળવો :

1. x-અક્ષ અને y-અક્ષનાં સમીકરણો મેળવો.
2. (– 4, 3) બિંદુમાંથી પસાર થતી અને જેનો ઢાળ $\frac{1}{2}$ હોય.
3. (0, 0) માંથી પસાર થતી અને m ઢાળવાળી.
4. $\left(2, 2\sqrt{3}\right)$ માંથી પસાર થતી અને જેનો x-અક્ષ સાથે ઝોક $75°$ હોય.
5. x-અક્ષને ઊગમબિંદુથી 3 એકમના અંતરે ડાબી બાજુએ છેદતી અને જેનો ઢાળ –2 હોય.
6. y-અક્ષને ઊગમબિંદુની ઉપર 2 એકમ અંતરે છેદતી અને x-અક્ષની ધન દિશા સાથે $30°$ના માપનો ખૂણો બનાવતી.
7. (–1, 1) અને (2, – 4) બિંદુઓમાંથી પસાર થતી.
8. ઊગમબિંદુમાંથી રેખા પર દોરેલા લંબનું માપ 5 હોય તથા લંબરેખાખંડ x-અક્ષની ધન દિશા સાથે $30°$ માપનો ખૂણો બનાવે.
9. Δ PQR નાં શિરોબિંદુઓ P (2, 1), Q (–2, 3) અને R (4, 5) હોય, તો શિરોબિંદુ R માંથી દોરેલ મધ્યગાનું સમીકરણ મેળવો.
10. (2, 5) અને (–3, 6) બિંદુઓમાંથી પસાર થતી રેખાને લંબ અને (–3, 5) બિંદુમાંથી પસાર થતી રેખાનું સમીકરણ મેળવો.

11. (1, 0) અને (2, 3) ને જોડતા રેખાખંડને લંબ અને તેનું 1: n ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરતી રેખાનું સમીકરણ શોધો.

12. (2, 3) બિંદુમાંથી પસાર થતી અને યામાક્ષો પર સમાન અંતઃખંડો કાપતી રેખાનું સમીકરણ શોધો.

13. જેના અક્ષો પરના અંતઃખંડોનો સરવાળો 9 હોય અને જે બિંદુ (2, 2)માંથી પસાર થતી હોય તેવી રેખાનું સમીકરણ શોધો.

14. (0, 2) માંથી પસાર થતી અને x-અક્ષની ધન દિશા સાથે $\frac{2\pi}{3}$ માપનો ખૂણો બનાવતી રેખાનું સમીકરણ મેળવો તથા તે રેખાને સમાંતર હોય અને y-અક્ષને ઊગમબિંદુથી નીચે 2 એકમ અંતરે છેદતી હોય તેવી રેખાનું સમીકરણ પણ મેળવો.

15. ઊગમબિંદુમાંથી રેખા પર દોરેલા લંબનો લંબપાદ (–2, 9) હોય, તો તે રેખાનું સમીકરણ મેળવો.

16. તાંબાના તારની લંબાઈ L (સેમીમાં) અને તેના સેલ્સિયસ તાપમાન C વચ્ચે સુરેખ સંબંધ છે. એક પ્રયોગમાં જ્યારે L = 124.942 હોય ત્યારે C = 20 અને જ્યારે L= 125.134 હોય ત્યારે C = 110, છે. તો L અને C વચ્ચેનો સુરેખ સંબંધ મેળવો.

17. એક દૂધના વેચાણકેન્દ્રનો માલિક પ્રત્યેક અઠવાડિયે 980 લિટર દૂધ ₹ 14 પ્રતિ લિટર અને 1220 લિટર દૂધ ₹ 16 પ્રતિ લિટર વેચે છે. હવે દૂધની વેચાણકિંમત અને માંગ વચ્ચે સુરેખ સંબંધ છે તેમ માની લઈએ તો તે પ્રત્યેક અઠવાડિયે ₹ 17 પ્રતિ લિટરના ભાવે કેટલા લિટર દૂધ વેચી શકે ?

18. અક્ષો વચ્ચે બનતા રેખાખંડનું મધ્યબિંદુ P (a, b) હોય, તો તે રેખાનું સમીકરણ $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2$ છે તેમ બતાવો.

19. બિંદુ R(h, k), જે રેખાના અક્ષો વચ્ચે બનતા રેખાખંડનું બિંદુ 1 : 2 ના ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે તે રેખાનું સમીકરણ શોધો.

20. રેખાના સમીકરણની સંકલ્પનાનો ઉપયોગ કરી સાબિત કરો કે (3, 0), (– 2, – 2) અને (8, 2) સમરેખ છે.

10.4 રેખાનું વ્યાપક સમીકરણ (*General Equation of a Line*)

આગળના વર્ગોમાં આપણે બે ચલવાળા એકઘાતી સમીકરણ $Ax + By + C = 0$ નો અભ્યાસ કર્યો છે. જ્યાં A, B અને C એવા વાસ્તવિક અચળ છે કે જેથી A અને B એકીસાથે શૂન્ય ન થાય તેવા સમીકરણ $Ax + By + C = 0$ નો આલેખ હંમેશાં રેખા દર્શાવે છે. તેથી જ્યારે A અને B એક સાથે શૂન્ય ન હોય ત્યારે $Ax + By + C = 0$ પ્રકારના કોઈ પણ સમીકરણને વ્યાપક સુરેખ સમીકરણ કે રેખાનું વ્યાપક સમીકરણ કહે છે.

10.4.1 $Ax + By + C = 0$ નાં વિવિધ સ્વરૂપ

રેખાના વ્યાપક સમીકરણને નીચે દર્શાવેલી પ્રક્રિયાઓ દ્વારા વિવિધ સ્વરૂપમાં ફેરવી શકાય છે :

(a) ઢાળ-અંતઃખંડ સ્વરૂપ : જો $B \neq 0$, હોય તો $Ax + By + C = 0$ ને નીચે પ્રમાણે લખી શકાય.

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B} \quad \text{અથવા} \quad y=mx+c \qquad \text{... (1)}$$

અહીં, $m=-\frac{A}{B}$ અને $c=-\frac{C}{B}$.

આપણે જાણીએ છીએ કે સમીકરણ (1) રેખાનું ઢાળ-અંતઃખંડ સ્વરૂપનું સમીકરણ છે. તેમાં ઢાળ $-\frac{A}{B}$ અને y-અંતઃખંડ $-\frac{C}{B}$ છે.

જો B = 0, તો $x = -\dfrac{C}{A}$. આ શિરોલંબ રેખા છે અને તેને ઢાળ નથી અને x - અંતઃખંડ $-\dfrac{C}{A}$ છે.

(b) અંતઃખંડ સ્વરૂપ : જો $A \neq 0, B \neq 0$ અને $C \neq 0$, હોય તો $Ax + By + C = 0$ ને નીચે પ્રમાણે લખી શકાય :

$$\frac{x}{-\frac{C}{A}} + \frac{y}{-\frac{C}{B}} = 1 \quad \text{અથવા} \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad \dots (2)$$

અહીં, $a = -\dfrac{C}{A}$ અને $b = -\dfrac{C}{B}$.

આપણે જાણીએ છીએ કે સમીકરણ (2) રેખાનું અંતઃખંડ સ્વરૂપનું રેખાનું સમીકરણ છે.

અહીં, x-અંતઃખંડ $= -\dfrac{C}{A}$ અને y-અંતઃખંડ $= -\dfrac{C}{B}$.

હવે, જો C = 0, હોય તો $Ax + By + C = 0$ ને નીચે પ્રમાણે લખી શકાય :

$Ax + By = 0$. આ ઊગમબિંદુમાંથી પસાર થતી રેખા દર્શાવે છે. તેના અક્ષો પરના અંતઃખંડો શૂન્ય છે.

જો $B=0$ તો $A \neq 0$. $Ax + C = 0$ એ $C \neq 0$ માટે શિરોલંબ રેખા દર્શાવે છે તથા તેનો $x-$અંતઃખંડ $-\dfrac{C}{A}$. જો $C=0$ તો તે ઊગમબિંદુમાંથી પસાર થાય છે.

જો $A=0$ તો $B \neq 0$, $By + C = 0$ સમક્ષિતિજ રેખા છે.

$C \neq 0$ માટે તેનો $y-$અંતઃખંડ $-\dfrac{C}{B}$ છે તથા $C=0$ હોય, તો તે ઊગમબિંદુમાંથી પસાર થાય છે.

(c) અભિલંબ સ્વરૂપ :

ધારો કે $Ax + By + C = 0$ અથવા $Ax + By = -C$ દ્વારા દર્શાવાતી રેખાનું લંબ સ્વરૂપ $x \cos \omega + y \sin \omega = p$ છે.

આમ, બંને એક જ રેખાનાં સમીકરણો છે અને તે સમાન છે.

$$\therefore \frac{A}{\cos \omega} = \frac{B}{\sin \omega} = -\frac{C}{p}$$

$$\therefore \cos \omega = -\frac{Ap}{C} \text{ અને } \sin \omega = -\frac{Bp}{C}$$

હવે, $\sin^2\omega + \cos^2\omega = \left(-\dfrac{Ap}{C}\right)^2 + \left(-\dfrac{Bp}{C}\right)^2 = 1$

અથવા $p^2 = \dfrac{C^2}{A^2+B^2}$ અથવા $p = \pm\dfrac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}$

$$\therefore \cos\omega = \mp\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} \text{ અને } \sin\omega = \mp\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

આમ, સમીકરણ $Ax + By + C = 0$ નું લંબ સ્વરૂપ,

$$x \cos \omega + y \sin \omega = p$$

અહીં, $\cos \omega = \mp\dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$, $\sin \omega = \mp\dfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$ અને $p = \pm\dfrac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

p ની કિંમત ધન રહે તે રીતે ચિહ્નની પસંદગી કરવી.

ઉદાહરણ 13 : જો રેખાનું સમીકરણ $3x - 4y + 10 = 0$ હોય તો તેનો (i) ઢાળ અને (ii) x-અંતઃખંડ અને y-અંતઃખંડ શોધો.

ઉકેલ : (i)અહીં આપેલ સમીકરણ $3x - 4y + 10 = 0$ ને

$$y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{2} \qquad \text{... (1)}$$

સ્વરૂપમાં લખી શકાય. હવે સમીકરણ (1) ને $y = mx + c$, સાથે સરખાવતાં ઢાળ $m = \frac{3}{4}$ મળે.

(ii) સમીકરણ $3x - 4y + 10 = 0$ ને

$$3x - 4y = -10 \quad \text{અથવા} \quad \frac{x}{-\frac{10}{3}} + \frac{y}{\frac{5}{2}} = 1 \qquad \text{... (2)}$$

સ્વરૂપે લખી શકાય. હવે સમીકરણ (2) ને $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ સાથે સરખાવતાં x-અંતઃખંડ $a = -\frac{10}{3}$ અને y-અંતઃખંડ $b = \frac{5}{2}$ મળે.

ઉદાહરણ 14 : રેખા $\sqrt{3}x + y - 8 = 0$ સમીકરણનું અભિલંબ સ્વરૂપમાં રૂપાંતર કરો. તે પરથી p અને ω ની કિંમત શોધો.

ઉકેલ : આપેલ રેખાનું સમીકરણ છે,

$$\sqrt{3}x + y - 8 = 0 \qquad \text{... (1)}$$

(1) ને $\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (1)^2} = 2$ વડે ભાગતાં, આપણને

$$\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y = 4 \quad \text{અથવા} \quad x\cos 30° + y\sin 30° = 4 \ \text{મળે.} \qquad \text{... (2)}$$

સમીકરણ (2) ને $x\cos\omega + y\sin\omega = p$ સાથે સરખાવતાં $p = 4$ અને $\omega = 30°$ મળે.

ઉદાહરણ 15 : રેખાઓ $y - \sqrt{3}x - 5 = 0$ અને $\sqrt{3}y - x + 6 = 0$ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ શોધો.

ઉકેલ : $y - \sqrt{3}x - 5 = 0$ અથવા $y = \sqrt{3}x + 5$ ... (1)

અને $\sqrt{3}y - x + 6 = 0$ અથવા $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x - 2\sqrt{3}$ ... (2)

આપેલી રેખાઓ છે.

રેખા (1) નો ઢાળ $m_1 = \sqrt{3}$ અને રેખા (2) નો ઢાળ $m_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

જો બે રેખાઓ વચ્ચેના લઘુકોણનું માપ θ હોય, તો

$$\tan\theta = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}\right| \qquad \text{... (3)}$$

m_1 અને m_2 ની કિંમતો (3) માં મૂકતાં,

$$\tan\theta = \left|\frac{\frac{1}{\sqrt{3}} - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3} \times \frac{1}{\sqrt{3}}}\right| = \left|\frac{1-3}{2\sqrt{3}}\right| = \frac{1}{\sqrt{3}} \ \text{મળે.}$$

તેથી, $\theta = 30°$.

આમ, બે રેખાઓ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ $30°$ અથવા $180° - 30° = 150°$.

ઉદાહરણ 16 : સાબિત કરો કે $b_1, b_2 \neq 0$ માટે રેખાઓ $a_1x+b_1y+c_1=0$ અને $a_2x+b_2y+c_2=0$ દ્વારા દર્શાવેલ હોય અને (i) રેખાઓ સમાંતર હોય તો $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}$ અને (ii) રેખાઓ પરસ્પર લંબ હોય તો $a_1a_2+b_1b_2=0$.

ઉકેલ : આપેલી રેખાઓ,

$$y=-\frac{a_1}{b_1}x-\frac{c_1}{b_1} \quad \ldots (1)$$

અને

$$y=-\frac{a_2}{b_2}x-\frac{c_2}{b_2} \quad \ldots (2)$$

રેખાઓ (1) અને (2) ના ઢાળ અનુક્રમે $m_1=-\frac{a_1}{b_1}$ અને $m_2=-\frac{a_2}{b_2}$ છે. હવે

(i) રેખાઓ સમાંતર હોય તો $m_1=m_2$,

$$\therefore -\frac{a_1}{b_1}=-\frac{a_2}{b_2} \text{ અથવા } \frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}.$$

(ii) રેખાઓ પરસ્પર લંબ હોય તો $m_1 \cdot m_2=-1$

$$\therefore \frac{a_1}{b_1}\cdot\frac{a_2}{b_2}=-1 \text{ અથવા } a_1a_2+b_1b_2=0$$

ઉદાહરણ 17 : રેખા $x-2y+3=0$ ને લંબ અને $(1,-2)$ બિંદુમાંથી પસાર થતી રેખાનું સમીકરણ શોધો.

ઉકેલ : $x-2y+3=0$ આપેલ રેખા છે. તેને નીચે પ્રમાણે લખી શકાય :

$$y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2} \quad \ldots(1)$$

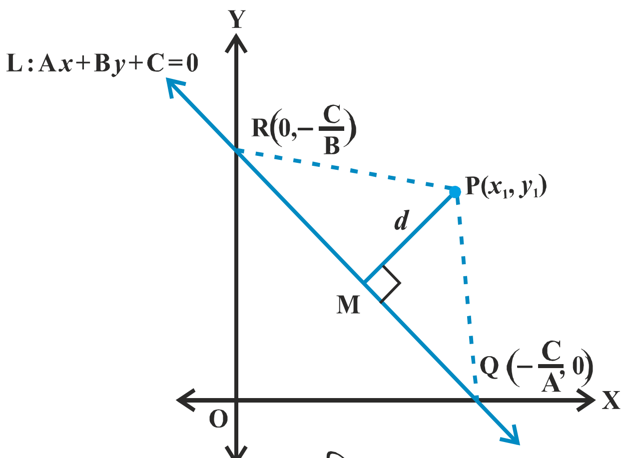
રેખા (1) નો ઢાળ $m_1=\frac{1}{2}$ છે. તેથી રેખા (1) ને લંબરેખાનો ઢાળ $m_2=-\frac{1}{m_1}=-2$ થાય.

જેનો ઢાળ -2 હોય અને જે $(1,-2)$ માંથી પસાર થતી હોય તેવી રેખાનું સમીકરણ

$$y-(-2)=-2(x-1) \text{ એટલે કે } y=-2x \text{ માંગેલ સમીકરણ છે.}$$

10.5 બિંદુથી રેખાનું લંબઅંતર

બિંદુથી રેખાનું અંતર એટલે બિંદુમાંથી રેખા પર દોરેલા લંબની લંબાઈ. ધારો કે L : $Ax+By+C=0$ એક રેખા છે. તેનું બિંદુ P (x_1, y_1) થી અંતર d છે. બિંદુ P માંથી રેખા L પર લંબ રેખાખંડ PM દોરો. (આકૃતિ 10.19)



આકૃતિ 10.19

રેખા x -અક્ષ અને y -અક્ષ ને અનુક્રમે Q અને R માં છેદે છે. તે બિંદુઓના યામ $Q\left(-\frac{C}{A}, 0\right)$ અને $R\left(0, -\frac{C}{B}\right)$ થશે. હવે ત્રિકોણ PQR નું ક્ષેત્રફળ બે રીતે મેળવી શકાય :

ΔPQR નું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2} PM \cdot QR$, તેથી $PM = \frac{2 \ (\Delta PQR \text{નું ક્ષેત્રફળ})}{QR}$ ... (1)

તથા ΔPQRનું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2}\left| x_1 \left(0 + \frac{C}{B}\right) + \left(-\frac{C}{A}\right)\left(-\frac{C}{B} - y_1\right) + 0(y_1 - 0)\right|$

$$= \frac{1}{2}\left| x_1 \frac{C}{B} + y_1 \frac{C}{A} + \frac{C^2}{AB}\right|$$

$\therefore 2(\Delta PQR \text{નું ક્ષેત્રફળ}) = \left|\frac{C}{AB}\right| \cdot |Ax_1 + By_1 + C|$, અને

$$QR = \sqrt{\left(0 + \frac{C}{A}\right)^2 + \left(\frac{C}{B} - 0\right)^2} = \left|\frac{C}{AB}\right| \sqrt{A^2 + B^2}$$

ΔPQRનું ક્ષેત્રફળ અને QRની કિંમત (1) માં મૂકતાં,

$$PM = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

અથવા $d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

આમ, રેખા $Ax + By + C = 0$ નું બિંદુ (x_1, y_1) થી લંબઅંતર

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

10.5.1 બે સમાંતર રેખાઓ વચ્ચેનું લંબઅંતર

આપણે જાણીએ છીએ કે બે સમાંતર રેખાઓના ઢાળ સમાન હોય છે. તેથી બે સમાંતર રેખાઓ આ પ્રકારે લખી શકાય છે.

$y = mx + c_1$ ... (1)

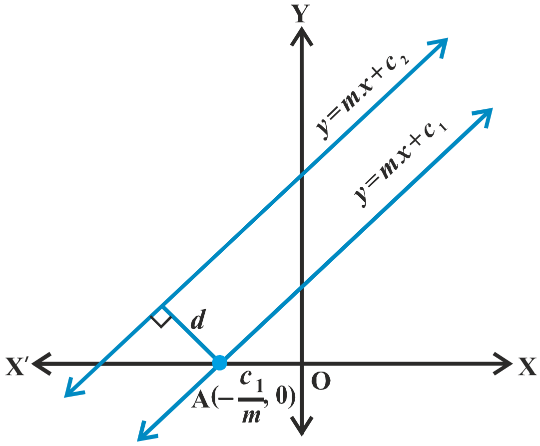
અને $y = mx + c_2$ ... (2)

રેખા (1) x-અક્ષને બિંદુ $A\left(-\frac{c_1}{m}, \ 0\right)$ માં છેદે છે. આકૃતિ 10.20 માં બે રેખાઓ વચ્ચેનું અંતર એટલે બિંદુ A માંથી રેખા (2) પર દોરેલા લંબની લંબાઈ. આમ, રેખા (1) અને (2) વચ્ચેનું લંબઅંતર

$$\frac{\left|(-m)\left(-\frac{c_1}{m}\right) + (-c_2)\right|}{\sqrt{1 + m^2}} \quad \text{અથવા} \quad d = \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{1 + m^2}} \text{ છે.}$$

આમ, બે સમાંતર રેખાઓ $y = mx + c_1$ અને $y = mx + c_2$ વચ્ચેનું અંતર

$$d = \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{1 + m^2}}.$$



આકૃતિ 10.20

હવે જો રેખાઓ વ્યાપક સ્વરૂપમાં અર્થાત્ $Ax + By + C_1 = 0$ અને $Ax + By + C_2 = 0$ તરીકે આપેલ હોય, તો ઉપર દર્શાવેલ સૂત્ર $d = \dfrac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ રૂપ લે છે.

વિદ્યાર્થીઓ સ્વપ્રયત્ને આ મેળવી શકે છે.

નોંધ : રેખાઓ શિરોલંબ હોય તો ?

ઉદાહરણ 18 : બિંદુ $(3, -5)$ થી રેખા $3x - 4y - 26 = 0$ નું લંબઅંતર શોધો.

ઉકેલ : $3x - 4y - 26 = 0$ આપેલ રેખા છે. ... (1)

(1) ને રેખાના વ્યાપક સમીકરણ $Ax + By + C = 0$ સાથે સરખાવતાં,

$A = 3, B = -4$ અને $C = -26$ મળે.

આપેલ બિંદુ $(x_1, y_1) = (3, -5)$ છે. આમ, આપેલ બિંદુથી રેખાનું અંતર

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|3 \cdot 3 + (-4)(-5) - 26|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{3}{5}.$$

ઉદાહરણ 19 : સમાંતર રેખાઓ $3x - 4y + 7 = 0$ અને $3x - 4y + 5 = 0$ વચ્ચેનું અંતર મેળવો.

ઉકેલ : અહીં $A = 3, B = -4, C_1 = 7$ અને $C_2 = 5$. તેથી માંગેલ અંતર

$$d = \frac{|7 - 5|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{2}{5}.$$

સ્વાધ્યાય 10.3

1. નીચે આપેલ સમીકરણોને ઢાળ- અંતઃખંડ સ્વરૂપમાં દર્શાવો અને તેમના ઢાળ અને y - અંતઃખંડ શોધો.

(i) $x + 7y = 0$ (ii) $6x + 3y - 5 = 0$ (iii) $y = 0$

2. નીચે આપેલ સમીકરણોને અંતઃખંડ સ્વરૂપમાં દર્શાવો અને તેમના દ્વારા અક્ષો પર કપાતા અંતઃખંડો શોધો.

(i) $3x + 2y - 12 = 0$ (ii) $4x - 3y = 6$ (iii) $3y + 2 = 0$

3. નીચે આપેલાં સમીકરણોને અભિલંબ સ્વરૂપમાં દર્શાવો અને ઊગમબિંદુમાંથી દોરેલા લંબની લંબાઈ અને લંબ દ્વારા x-અક્ષની ધન દિશા સાથે બનતા ખૂણાનું માપ શોધો :

(i) $x - \sqrt{3}y + 8 = 0$ (ii) $y - 2 = 0$ (iii) $x - y = 4$

4. બિંદુ $(-1, 1)$ નું રેખા $12(x + 6) = 5(y - 2)$ થી અંતર શોધો.

5. x-અક્ષ પરનું કયું બિંદુ $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$ રેખાથી 4 એકમ અંતરે આવેલ છે ?

6. નીચેની સમાંતર રેખાઓ વચ્ચેનું અંતર શોધો :

(i) $15x + 8y - 34 = 0$ અને $15x + 8y + 31 = 0$ (ii) $l(x + y) + p = 0$ અને $l(x + y) - r = 0$

7. બિંદુ $(-2, 3)$માંથી પસાર થતી અને $3x - 4y + 2 = 0$ ને સમાંતર રેખાનું સમીકરણ શોધો.

8. રેખા $x - 7y + 5 = 0$ ને લંબ અને જેનો x-અંતઃખંડ 3 હોય તેવી રેખાનું સમીકરણ શોધો.

9. રેખાઓ $\sqrt{3}x+y=1$ અને $x+\sqrt{3}y=1$ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ શોધો.

10. બિંદુઓ $(h, 3)$ અને $(4, 1)$ માંથી પસાર થતી રેખા અને રેખા $7x-9y-19=0$ એકબીજાને કાટખૂણે છેદે, તો h શોધો.

11. સાબિત કરો કે બિંદુ (x_1, y_1) માંથી પસાર થતી અને $Ax + By + C = 0$ ને સમાંતર રેખાનું સમીકરણ $A(x-x_1) + B(y-y_1) = 0$ છે.

12. બે રેખાઓ $(2, 3)$ બિંદુમાંથી પસાર થતી હોય અને તેમની વચ્ચેના ખૂણાનું માપ 60° હોય તથા તે પૈકીની એક રેખાનો ઢાળ 2 હોય, તો બીજી રેખાનું સમીકરણ શોધો.

13. જેનાં અંત્યબિંદુઓ $(3, 4)$ અને $(-1, 2)$ હોય તેવા રેખાખંડના લંબદ્વિભાજકનું સમીકરણ શોધો.

14. બિંદુ $(-1, 3)$માંથી રેખા $3x-4y-16=0$ પર દોરેલા લંબનો લંબપાદ શોધો.

15. ઊગમબિંદુમાંથી રેખા $y = mx + c$ પર દોરેલા લંબનો લંબપાદ $(-1, 2)$ હોય, તો m અને c શોધો.

16. રેખાઓ $x\cos\theta - y\sin\theta = k\cos 2\theta$ અને $x\sec\theta + y\,\mathrm{cosec}\,\theta = k$ નાં ઊગમબિંદુથી લંબઅંતર અનુક્રમે p અને q હોય, તો સાબિત કરો કે $p^2 + 4q^2 = k^2$.

17. $A(2, 3)$, $B(4, -1)$ અને $C(1, 2)$ એ ΔABCનાં શિરોબિંદુઓ છે. ΔABCના શિરોબિંદુ Aમાંથી દોરેલા વેધની લંબાઈ અને તેનું સમીકરણ શોધો.

18. જે રેખાના અક્ષો પરના અંત:ખંડો a અને b હોય તેવી રેખા પર ઊગમબિંદુમાંથી દોરેલા લંબની લંબાઈ p હોય, તો સાબિત કરો કે $\frac{1}{p^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$.

10.6 બે રેખાઓના છેદબિંદુમાંથી પસાર થતી રેખા-સંહતિનું સમીકરણ

બે છેદતી રેખાઓ l_1 અને l_2

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \qquad (1)$$

અને $$A_2x + B_2y + C_2 = 0 \qquad (2)$$ આપેલ છે.

સમીકરણ (1) અને (2) પરથી આપણે એક સમીકરણ,

$$A_1x + B_1y + C_1 + k\left(A_2x + B_2y + C_2\right) = 0 \qquad (3)$$ મેળવીએ.

અહીં k સ્વૈર અચળ છે અને તેને પ્રચલ કહીશું. k ની કોઈ પણ કિંમત માટે સમીકરણ (3) એ x અને y માં એક ઘાતવાળું સમીકરણ મળશે. તેથી તે એક રેખા-સંહતિ રજૂ કરે છે. આ સમીકરણ આપેલ બે રેખાઓના છેદબિંદુમાંથી પસાર થતી રેખાસંહતિ દર્શાવે છે તેમ આપણે સ્વીકારી લઈશું. વળી બે રેખાઓના છેદબિંદુમાંથી પસાર થતી કોઈપણ રેખા આ સંહતિનો સભ્ય છે જ તે પણ સ્વીકારી લઈશું. k ની કોઈક કિંમત પરથી આ સંહતિનો ચોક્કસ સભ્ય મળે છે. k ની આ કિંમત બીજી શરતો પરથી મેળવી શકાય છે.

ઉદાહરણ 20 : રેખાઓ $x-7y+5=0$ અને $3x+y-7=0$ ના છેદબિંદુમાંથી પસાર થતી અને y-અક્ષને સમાંતર રેખાનું સમીકરણ શોધો.

ઉકેલ : આપેલી રેખાઓના છેદબિંદુમાંથી પસાર થતી કોઈ પણ રેખાનું સમીકરણ

$x-7y+5+k\ (3x+y-7)=0$

એટલે કે $(1+3k)\ x+(k-7)\ y+5-7k=0$ (1)

જો આ રેખા y-અક્ષને સમાંતર હોય, તો y નો સહગુણક શૂન્ય થશે. એટલે કે,

$k-7=0$ આથી, $k=7$.

સમીકરણ (1) માં k નું મૂલ્ય મૂકતાં,

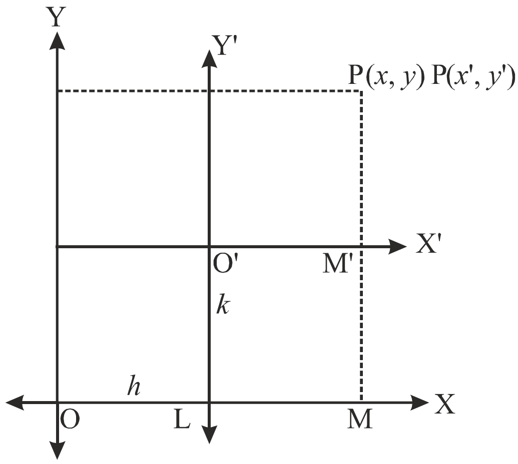
$22x-44=0$, એટલે કે $x-2=0$ માંગેલું સમીકરણ મળે છે.

સ્વાધ્યાય 10.4

1. રેખાઓ $3x+4y=7$ અને $x-y+2=0$ ના છેદબિંદુમાંથી પસાર થતી અને 5 ઢાળવાળી રેખાનું સમીકરણ મેળવો.
2. રેખા $5x+4y-20=0$ ને સમાંતર અને રેખાઓ $x+2y-3=0$ અને $4x-y+7=0$ ના છેદબિંદુમાંથી પસાર થતી રેખાનું સમીકરણ મેળવો.
3. રેખાઓ $2x+3y-4=0$ અને $x-5y=7$ ના છેદબિંદુમાંથી પસાર થતી તથા જેનો x-અંતઃખંડ -4 હોય તેવી રેખાનું સમીકરણ શોધો.
4. રેખાઓ $5x-3y=1$ અને $2x+3y-23=0$ ના છેદબિંદુમાંથી પસાર થતી તથા $5x-3y-1=0$ ને લંબરેખાનું સમીકરણ મેળવો.

10.7 ઊગમબિંદુનું સ્થાનાંતર

પ્રચલિત યામાક્ષ-પદ્ધતિના સંદર્ભમાં બિંદુઓના ગણને અનુરૂપ સમીકરણને કોઈ જ ભૌમિતિક ગુણધર્મ બદલાય નહિ તે રીતે બીજી કોઈ યામ-પદ્ધતિના બિંદુઓનો ગણ લઈ સરળ બનાવી શકાય. ઊગમબિંદુનું નવા બિંદુએ સ્થાનાંતર કરી મૂળ અક્ષોને સમાંતર નવા અક્ષોમાં તેમને પરિવર્તિત કરવા તે એક આવું પરિવર્તન છે. આ પદ્ધતિના પરિવર્તનને ***અક્ષોનું સ્થાનાંતર*** (*translation of axes*) કહે છે.



આકૃતિ 10.21

અક્ષોના સ્થાનાંતરથી સમતલના દરેક બિંદુના યામ બદલાય છે. બિંદુઓના જૂના અને નવા યામ વચ્ચેનો સંબંધ જાણીને આપણે વિશ્લેષણાત્મક પ્રશ્નોના સંબંધ વિશેની પદ્ધતિના સંદર્ભમાં અભ્યાસ કરી શકીએ.

પરિવર્તિત અક્ષોને લીધે સમતલના બિંદુના યામ કેવી રીતે બદલાય છે તે જાણવા માટે આપણે અક્ષો OX અને OY ના સંદર્ભમાં એક બિંદુ P (x, y) લઈએ. ધારો કે OX અને OY ને સમાંતર નવા અક્ષો અનુક્રમે O′X′ અને O′Y′ છે. O′ એ નવું ઊગમબિંદુ છે. જૂના અક્ષોના સંદર્ભમાં O′ ના યામ (h, k) છે, એટલે કે $OL=h$ અને $LO'=k$. વળી, $OM=x$ અને $MP=y$ (જુઓ આકૃતિ 10.21.)

ધારો કે નવા અક્ષો O' X' અને O' Y' ના સંદર્ભમાં બિંદુ P ના x-યામ(કોટિ)(*abscissa*) અને y-યામ(ભુજ) (*ordinates*) અનુક્રમે આકૃતિ 10.21 માં O' M' $= x'$ અને M'P $= y'$ છે.

OM = OL + LM, એટલે કે, $x = h + x'$

અને MP = MM' + M' P, એટલે કે, $y = k + y'$

આથી, $x = x' + h, y = y' + k$

આ સૂત્રો જૂના અને નવા યામ વચ્ચેનો સંબંધ આપે છે.

ઉદાહરણ 21 : જો ઊગમબિંદુનું (1, 2) બિંદુએ સ્થાનાંતર કરવામાં આવે, તો બિંદુ (3, –4) ના નવા યામ શોધો.

ઉકેલ : નવા ઊગમબિંદુના યામ $h = 1, k = 2$, અને આપેલા બિંદુના મૂળ યામ $x = 3, y = -4$.

જૂના યામ (x, y) અને નવા યામ (x', y') વચ્ચેનો પરિવર્તન સંબંધ,

$x = x' + h$ એટલે કે, $x' = x - h$

અને $y = y' + k$ એટલે કે, $y' = y - k$

આપેલ કિંમતો મૂકતાં,

$x' = 3 - 1 = 2$ અને $y' = -4 - 2 = -6$

આથી નવી પદ્ધતિમાં બિંદુ (3, –4) ના યામ (2, –6) થાય.

ઉદાહરણ 22 : ઊગમબિંદુનું (3, –1) બિંદુએ સ્થાનાંતર કરી તે પ્રમાણે અક્ષોનું સ્થાનાંતર કરતાં રેખા $2x - 3y + 5 = 0$ નું પરિવર્તિત સમીકરણ શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે P ના યામ (x, y) બદલાઈને નવા અક્ષોમાં (x', y') થાય છે. ઊગમબિંદુના જૂના યામ $h = 3$ અને $k = -1$ છે. આથી, આપણે પરિવર્તન સૂત્રો $x = x' + 3$ અને $y = y' - 1$ લખીશું. રેખાના આપેલા સમીકરણમાં આ મૂલ્યો મૂકતાં,

$$2(x' + 3) - 3(y' - 1) + 5 = 0$$

અથવા $2x' - 3y' + 14 = 0$ મળે.

આથી, નવી પદ્ધતિમાં રેખાનું સમીકરણ $2x - 3y + 14 = 0$ થશે.

સ્વાધ્યાય 10.5

1. જો ઊગમબિંદુનું (–3, –2) પર સ્થાનાંતર કરવામાં આવે, તો અક્ષોના સ્થાનાંતરના કારણે નીચે આપેલાં બિંદુઓના નવા યામ શોધો :

   (i) (1, 1) (ii) (0, 1) (iii) (5, 0) (iv) (–1, –2) (v) (3, –5)

2. ઊગમબિંદુનું સ્થાનાંતર (1, 1) બિંદુએ કરતાં નીચેના સમીકરણનું પરિવર્તિત સ્વરૂપ શું થશે તે શોધો :

   (i) $x^2 + xy - 3y^2 - y + 2 = 0$ (ii) $xy - y^2 - x + y = 0$

   (iii) $xy - x - y + 1 = 0$

પ્રકીર્ણ ઉદાહરણો

ઉદાહરણ 23 : જો રેખાઓ $2x+y-3=0$, $5x+ky-3=0$ અને $3x-y-2=0$ સંગામી હોય, તો k ની કિંમત શોધો.

ઉકેલ : ત્રણ રેખાઓ અનન્ય બિંદુમાં છેદે, તો તેમને સંગામી રેખાઓ કહે છે. એટલે કે બે રેખાઓનું છેદબિંદુ ત્રીજી રેખા પર હોવું જોઈએ. અહીં, આપેલી રેખાઓ

$$2x + y - 3 = 0 \quad \dots (1)$$

$$5x + ky - 3 = 0 \quad \dots (2)$$

$$3x - y - 2 = 0 \quad \dots (3)$$

સમીકરણ (1) અને (3) ને ચોકડી ગુણાકારની રીતે ઉકેલતાં

$$\frac{x}{-2-3}=\frac{y}{-9+4}=\frac{1}{-2-3} \text{ અથવા } x=1,\ y=1$$

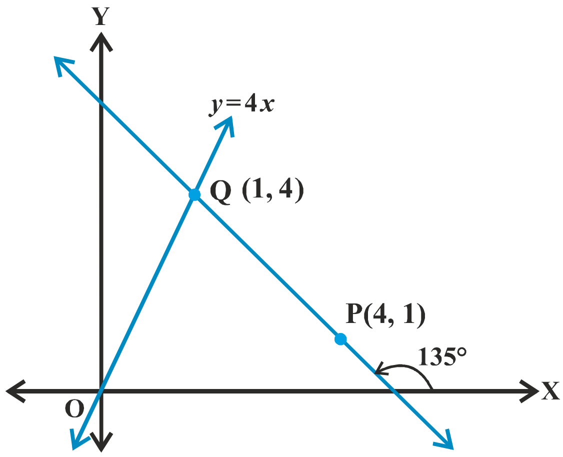
આમ, બે રેખાઓનું છેદબિંદુ (1, 1) છે. અહીં ત્રણ રેખાઓ સંગામી હોવાથી બિંદુ (1, 1) એ સમીકરણ (2)નું સમાધાન કરશે. તેથી $5\cdot1 + k\cdot1 - 3 = 0$ એટલે કે $k = -2$.

ઉદાહરણ 24 : x-અક્ષની ધન દિશા સાથે 135°ના માપનો ખૂણો બનાવતી રેખાને સાપેક્ષે બિંદુ P (4, 1) નું રેખા $4x - y = 0$ થી અંતર શોધો.

ઉકેલ : $4x - y = 0$ આપેલ રેખા છે. ... (1)

રેખા (1) નું બિંદુ P (4, 1) થી અંતર બીજી રેખાને સાપેક્ષ શોધવા પ્રથમ આપણે બે રેખાનું છેદબિંદુ શોધવું પડશે. તે માટે આપણે પહેલાં બીજી રેખાનું સમીકરણ શોધવું પડશે. (આકૃતિ 10.22) બીજી રેખાનો ઢાળ $tan\ 135° = -1$. હવે -1 ઢાળવાળી અને P (4, 1) માંથી પસાર થતી રેખાનું સમીકરણ

$$y - 1 = -1\ (x - 4) \text{ એટલે કે } x + y - 5 = 0 \quad \dots (2)$$



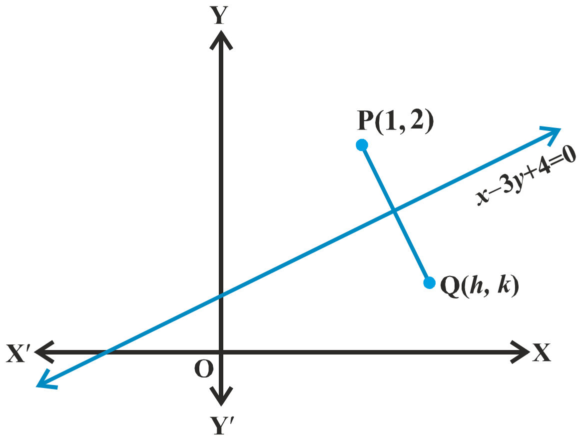
આકૃતિ 10.22

સમીકરણ (1) અને (2) ને ઉકેલતાં, $x = 1$ અને $y = 4$ મળે. આમ, બે રેખાઓનું છેદબિંદુ Q (1, 4) થશે. હવે, રેખા (1)નું બિંદુ P (4, 1)થી રેખા (2)ને સાપેક્ષ અંતર = બિંદુઓ P (4, 1) અને Q (1, 4) વચ્ચેનું અંતર

$$=\sqrt{(1-4)^2+(4-1)^2}=3\sqrt{2} \text{ એકમ}$$

ઉદાહરણ 25 : આપણે એવી કલ્પના કરીએ કે એક રેખા એક સાદા અરીસાની જેમ કામ કરતી હોય, તો બિંદુ (1, 2) નું રેખા $x-3y+4=0$ ને સાપેક્ષ પ્રતિબિંબ શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે $x - 3y + 4 = 0$ ને સાપેક્ષ બિંદુ P (1, 2) નું પ્રતિબિંબ Q (h, k) છે. માટે રેખા $x - 3y + 4 = 0$ એ રેખાખંડ PQ નો લંબદ્વિભાજક છે. (આકૃતિ 10.23)



આકૃતિ 10.23

આમ, રેખા PQ નો ઢાળ = $\dfrac{-1}{\text{રેખા } x-3y+4=0 \text{ નો ઢાળ}}$,

$$\frac{k-2}{h-1} = \frac{-1}{\frac{1}{3}} \quad \text{અથવા} \quad 3h+k=5 \qquad \dots (2)$$

અને PQ નું મધ્યબિંદુ $\left(\dfrac{h+1}{2}, \dfrac{k+2}{2}\right)$ રેખા (1) પર છે. તેથી,

$$\frac{h+1}{2} - 3\left(\frac{k+2}{2}\right) + 4 = 0 \quad \text{એટલે કે,} \quad h-3k=-3 \qquad \dots (3)$$

(2) અને (3) ને ઉકેલતાં, $h = \dfrac{6}{5}$ અને $k = \dfrac{7}{5}$.

આમ, બિંદુ (1, 2) નું રેખા (1) ને સાપેક્ષ પ્રતિબિંબ $\left(\dfrac{6}{5}, \dfrac{7}{5}\right)$ છે.

ઉદાહરણ 26 : સાબિત કરો કે રેખાઓ $y = m_1x + c_1, y = m_2x + c_2$ અને $x = 0$ વડે રચાતા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ

$\dfrac{(c_1-c_2)^2}{2|m_1-m_2|}$ છે.

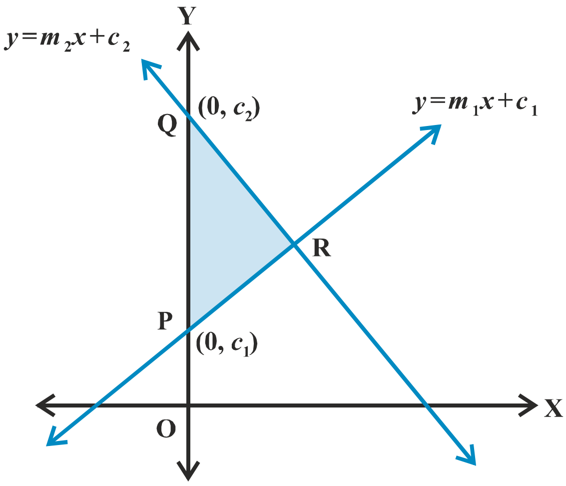
ઉકેલ : આપેલ રેખાઓ

$$y = m_1x + c_1 \qquad \dots (1)$$

$$y = m_2x + c_2 \qquad \dots (2)$$

$$x = 0 \qquad \dots (3)$$

આપણે જાણીએ છીએ કે રેખા $y = mx + c$ એ રેખા $x = 0$ (y-અક્ષ) ને $(0, c)$ બિંદુમાં મળે છે. આમ, રેખાઓ (1) અને (3) દ્વારા બનતા ત્રિકોણનાં બે શિરોબિંદુઓ P $(0, c_1)$ અને Q $(0, c_2)$ છે. (આકૃતિ 10.24) ત્રીજું શિરોબિંદુ સમીકરણ (1) અને (2) ઉકેલવાથી મળશે.



આકૃતિ 10.24

સમીકરણ (1) અને (2) ને ઉકેલતાં,

$$x = \frac{(c_2 - c_1)}{(m_1 - m_2)} \quad \text{અને} \quad y = \frac{(m_1c_2 - m_2c_1)}{(m_1 - m_2)}$$

આથી ત્રિકોણનું ત્રીજું શિરોબિંદુ

$$R\left(\frac{(c_2 - c_1)}{(m_1 - m_2)}, \frac{(m_1c_2 - m_2c_1)}{(m_1 - m_2)}\right).$$

હવે, ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ

$$= \frac{1}{2}\left| 0 \left(\frac{m_1c_2 - m_2c_1}{m_1 - m_2} - c_2\right) + \frac{c_2 - c_1}{m_1 - m_2}(c_2 - c_1) + 0\left(c_1 - \frac{m_1c_2 - m_2c_1}{m_1 - m_2}\right)\right| = \frac{(c_2 - c_1)^2}{2|m_1 - m_2|}$$

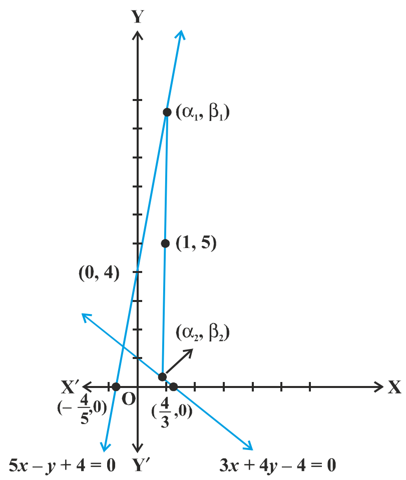
ઉદાહરણ 27 : જે રેખા દ્વારા રેખાઓ $5x - y + 4 = 0$ તથા $3x + 4y - 4 = 0$ ની વચ્ચે બનતા રેખાખંડનું મધ્યબિંદુ $(1, 5)$ હોય, તે રેખાનું સમીકરણ મેળવો.

ઉકેલ : આપેલ રેખાઓ

$$5x - y + 4 = 0 \quad \text{... (1)}$$

$$3x + 4y - 4 = 0 \text{ છે.} \quad \text{... (2)}$$

ધારો કે માંગેલી રેખા, રેખાઓ (1) અને (2) ને બિંદુઓ અનુક્રમે (α_1, β_1) અને (α_2, β_2) માં છેદે છે. (આકૃતિ 10.25). તેથી



આકૃતિ 10.25

$$5\alpha_1 - \beta_1 + 4 = 0 \quad \text{અને}$$

$$3\alpha_2 + 4\beta_2 - 4 = 0$$

અથવા $$\beta_1 = 5\alpha_1 + 4 \quad \text{અને} \quad \beta_2 = \frac{4 - 3\alpha_2}{4}.$$

અહીં આપેલ છે કે માંગેલ રેખાના (α_1, β_1) અને (α_2, β_2) ની વચ્ચેના રેખાખંડનું મધ્યબિંદુ $(1, 5)$ છે. આથી,

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} = 1 \quad \text{અને} \quad \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} = 5,$$

અથવા $$\alpha_1 + \alpha_2 = 2 \quad \text{અને} \quad \frac{5\alpha_1 + 4 + \frac{4 - 3\alpha_2}{4}}{2} = 5,$$

અથવા $\alpha_1 + \alpha_2 = 2$ અને $20\alpha_1 - 3\alpha_2 = 20$ ... (3)

α_1 અને α_2 માટે (3)નાં સમીકરણો ઉકેલતાં,

$\alpha_1 = \frac{26}{23}$ અને $\alpha_2 = \frac{20}{23}$ મળશે.

આથી, $\beta_1 = 5 \cdot \frac{26}{23} + 4 = \frac{222}{23}$.

(1, 5) અને (α_1, β_1) માંથી પસાર થતી રેખા એ માંગેલી રેખાનું સમીકરણ છે.

$$y - 5 = \frac{\beta_1 - 5}{\alpha_1 - 1}(x - 1) \text{ અથવા } y - 5 = \frac{\frac{222}{23} - 5}{\frac{26}{23} - 1}(x - 1)$$

અથવા $107x - 3y - 92 = 0$ માંગેલ રેખા છે.

ઉદાહરણ 28 : રેખાઓ $3x - 2y = 5$ અને $3x + 2y = 5$ થી સમાન અંતરે આવેલ તમામ બિંદુઓનો પથ એક રેખા છે તેમ બતાવો.

ઉકેલ : $3x - 2y = 5$ … (1)

અને $3x + 2y = 5$ … (2)

આપેલ રેખાઓ છે. ધારો કે (h, k) રેખાઓ (1) અને (2) થી સમાન અંતરે આવેલ બિંદુ છે.

$$\therefore \frac{|3h - 2k - 5|}{\sqrt{9 + 4}} = \frac{|3h + 2k - 5|}{\sqrt{9 + 4}} \text{ અથવા } |3h - 2k - 5| = |3h + 2k - 5|,$$

તેથી $3h - 2k - 5 = 3h + 2k - 5$ અથવા $-(3h - 2k - 5) = 3h + 2k - 5$.

આ બે સંબંધોને સરળરૂપ આપતાં $k = 0$ અને $h = \frac{5}{3}$ મળશે. આમ, બિંદુ (h, k) એ સમીકરણો $y = 0$ અથવા $x = \frac{5}{3}$ ને સંતોષે છે.

આ સમીકરણો રેખા દર્શાવે છે. આમ, (1) અને (2) થી સમાન અંતરે આવેલાં બિંદુઓનો પથ રેખા છે.

પ્રકીર્ણ સ્વાધ્યાય 10

1. k ની કઈ કિંમત માટે રેખા $(k-3)x - (4 - k^2)y + k^2 - 7k + 6 = 0$

(a) x-અક્ષને સમાંતર થાય.

(b) y-અક્ષને સમાંતર થાય.

(c) ઊગમબિંદુમાંથી પસાર થાય.

2. રેખા $\sqrt{3}x + y + 2 = 0$ નું અભિલંબ સ્વરૂપ $x \cos \theta + y \sin \theta = p$ હોય, તો θ અને p ની કિંમત શોધો.

3. જેના અક્ષો પર રચાતાં અંતઃખંડોનો સરવાળો અને ગુણાકાર અનુક્રમે 1 અને – 6 હોય તેવી રેખાનું સમીકરણ શોધો.

4. y-અક્ષ પરનું કયું બિંદુ $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$ રેખાથી 4 એકમ અંતરે આવેલ છે ?

5. બિંદુઓ $(\cos \theta, \sin \theta)$ અને $(\cos \phi, \sin \phi)$ માંથી પસાર થતી રેખા પર ઊગમબિંદુમાંથી દોરેલા લંબનું લંબઅંતર શોધો.

6. રેખાઓ $x - 7y + 5 = 0$ અને $3x + y = 0$ ના છેદબિંદુમાંથી પસાર થતી અને y-અક્ષને સમાંતર રેખાનું સમીકરણ મેળવો.

7. રેખા $\frac{x}{4}+\frac{y}{6}=1$ અને y-અક્ષના છેદબિંદુએ આપેલ રેખાને લંબ તેવી રેખાનું સમીકરણ મેળવો.

8. રેખાઓ $y - x = 0$, $x + y = 0$ અને $x - k = 0$ થી બનતા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

9. જો રેખાઓ $3x + y - 2 = 0$, $px + 2y - 3 = 0$ અને $2x - y - 3 = 0$ એક બિંદુમાંથી પસાર થતી હોય તો p શોધો.

10. જો રેખાઓ $y = m_1x + c_1$, $y = m_2x + c_2$ અને $y = m_3x + c_3$ સંગામી હોય તો સાબિત કરો કે,
$m_1(c_2 - c_3) + m_2(c_3 - c_1) + m_3(c_1 - c_2) = 0$.

11. બિંદુ (3, 2)માંથી પસાર થતી અને રેખા $x - 2y = 3$ સાથે 45° નો ખૂણો બનાવતી રેખાનાં સમીકરણો મેળવો.

12. રેખાઓ $4x + 7y - 3 = 0$ અને $2x - 3y + 1 = 0$ નાં છેદબિંદુમાંથી પસાર થતી અને અક્ષો પર સમાન અંતઃખંડ બનાવતી રેખાનું સમીકરણ શોધો.

13. ઊગમબિંદુમાંથી પસાર થતી અને $y = mx + c$ સાથે θ માપનો ખૂણો બનાવતી રેખાનું સમીકરણ $\frac{y}{x} = \frac{m \pm \tan\theta}{1 \mp m \tan\theta}$ છે.

14. (–1, 1) અને (5, 7) ને જોડતી રેખાનું આપેલ રેખા $x + y = 4$ કયા ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરશે ?

15. બિંદુ (1, 2)નું રેખા $4x + 7y + 5 = 0$ થી રેખા $2x - y = 0$ ની દિશામાં અંતર શોધો.

16. બિંદુ (–1, 2)માંથી પસાર થતી રેખાની દિશા શોધો કે જેથી તેનું રેખા $x + y = 4$ સાથેનું છેદબિંદુ (–1, 2)થી 3 એકમ અંતર હોય.

17. કાટકોણ ત્રિકોણના કર્ણનાં અંત્યબિંદુઓ (1, 3) અને (– 4, 1) હોય, તો કાટકોણ બનાવતી બાજુઓને સમાવતી રેખાનાં સમીકરણો મેળવો.

18. બિંદુ (3, 8) નું રેખા $x + 3y = 7$ ને સાપેક્ષ પ્રતિબિંબ મેળવો. અહીં રેખાનો સાદા અરીસા તરીકે વિચાર કરો.

19. જો રેખાઓ $y = 3x + 1$ અને $2y = x + 3$, રેખા $y = mx + 4$ સાથે સમાન માપનો ખૂણો બનાવતી હોય, તો m નું મૂલ્ય શોધો.

20. જો એક ચલ બિંદુ P (x, y) ના રેખાઓ $x + y - 5 = 0$ અને $3x - 2y + 7 = 0$ થી લંબઅંતરોનો સરવાળો હંમેશાં 10 રહે તો સાબિત કરો કે બિંદુ P નો પથ એક રેખા છે.

21. સમાંતર રેખાઓ $9x + 6y - 7 = 0$ અને $3x + 2y + 6 = 0$ થી સમાન અંતરે આવેલી રેખાનું સમીકરણ મેળવો.

22. બિંદુ (1, 2) માંથી પસાર થતું પ્રકાશનું એક કિરણ બિંદુ A થી x-અક્ષ પર પરિવર્તિત થાય છે અને પરિવર્તિત કિરણ બિંદુ (5, 3) માંથી પસાર થાય છે, તો બિંદુ A ના યામ શોધો.

23. સાબિત કરો કે બિંદુઓ $\left(\sqrt{a^2-b^2}, 0\right)$ અને $\left(-\sqrt{a^2-b^2}, 0\right)$થી રેખા $\frac{x}{a}\cos\theta+\frac{y}{b}\sin\theta=1$ નાં લંબઅંતરોનો ગુણાકાર b^2 છે.

24. એક વ્યક્તિ સમીકરણો $2x - 3y + 4 = 0$ અને $3x + 4y - 5 = 0$ દ્વારા દર્શાવતા સીધા રસ્તાઓના સંગમબિંદુ પર ઊભો છે અને તે સમીકરણ $6x - 7y + 8 = 0$ દ્વારા દર્શાવતા સીધા રસ્તા પર ન્યૂનતમ સમયમાં પહોંચવા માંગે છે, તો તે જે માર્ગને અનુસરે તેનું સમીકરણ મેળવો.

સારાંશ

- (x_1, y_1) અને (x_2, y_2) બિંદુઓમાંથી પસાર થતી શિરોલંબ ન હોય તેવી રેખાનો ઢાળ $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$, $x_1 \neq x_2$.
- જો રેખા x-અક્ષની ધન દિશા સાથે α માપનો ખૂણો બનાવે તો તેનો ઢાળ $m = \tan \alpha$, $\alpha \neq 90°$.
- સમક્ષિતિજ રેખાનો ઢાળ શૂન્ય છે અને શિરોલંબ રેખાનો ઢાળ અવ્યાખ્યાયિત નથી.
- રેખાઓ L_1 અને L_2ના ઢાળ અનુક્રમે m_1 અને m_2 હોય અને તેમની વચ્ચેના લઘુકોણનું માપ θ હોય, તો

  $\tan \theta = \left| \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} \right|, 1 + m_1 m_2 \neq 0$.
- જો બે રેખાઓના ઢાળ સમાન હોય તો અને તો જ તે રેખાઓ પરસ્પર સમાંતર હોય.
- જો બે રેખાઓના ઢાળનો ગુણાકાર -1 હોય તો અને તો જ તે રેખાઓ પરસ્પર લંબ હોય.
- બિંદુઓ A, B અને C સમરેખ હોય તો અને તો જ ABનો ઢાળ = BC નો ઢાળ.
- x-અક્ષથી a એકમ અંતરે આવેલી સમક્ષિતિજ રેખાનાં સમીકરણ $y = a$ અથવા $y = -a$ છે.
- y-અક્ષથી b એકમ અંતરે આવેલી શિરોલંબ રેખાનાં સમીકરણ $x = b$ અથવા $x = -b$ છે.
- બિંદુ (x, y) એ m ઢાળવાળી અને (x_o, y_o) બિંદુમાંથી પસાર થતી રેખા પર હોય, તો $y - y_o = m(x - x_o)$.
- (x_1, y_1) અને (x_2, y_2) બિંદુમાંથી પસાર થતી રેખાનું સમીકરણ $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$ છે.
- m ઢાળવાળી અને જેનો y-અંતઃખંડ c હોય તેવી રેખા પર બિંદુ (x, y) હોય, તો અને તો જ $y = mx + c$.
- m ઢાળવાળી અને જેનો x-અંતઃખંડ d હોય તેવી રેખાનું સમીકરણ $y = m(x - d)$.
- x-અક્ષ પર a અને y-અક્ષ પર b અંતઃખંડ કાપતી રેખાનું સમીકરણ $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ છે.
- ઊગમબિંદુમાંથી રેખા પર દોરેલા લંબની લંબાઈ p હોય અને લંબ એ x-અક્ષની ધન દિશા સાથે ω માપનો ખૂણો બનાવે તે અભિલંબ સ્વરૂપમાં રેખાનું સમીકરણ $x\cos\omega + y\sin\omega = p$.
- બિંદુ A અને B જ્યારે એક સાથે શૂન્ય ન હોય ત્યારે $Ax + By + C = 0$ પ્રકારના કોઈ પણ સમીકરણને વ્યાપક સુરેખ સમીકરણ કે રેખાનું વ્યાપક સમીકરણ કહે છે.
- બિંદુ (x_1, y_1) થી રેખા $Ax + By + C = 0$ નું લંબઅંતર $d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.
- સમાંતર રેખાઓ $Ax + By + C_1 = 0$ અને $Ax + By + C_2 = 0$ વચ્ચેનું લંબઅંતર $d = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

પ્રકરણ 11

શાંકવો

❖*Let the relation of knowledge to real life be very visible to your pupils and let them understand how by knowledge the world could be transformed. – BERTRAND RUSSELL* ❖

11.1 પ્રાસ્તાવિક

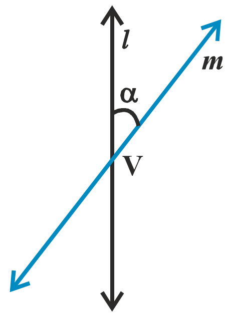
આગળના પ્રકરણ 10 માં આપણે રેખાનાં સમીકરણોનાં વિવિધ સ્વરૂપો વિશે અભ્યાસ કર્યો. આ પ્રકરણમાં આપણે કેટલાક વિશેષ વક્રો જેવા કે વર્તુળ, ઉપવલય, પરવલય, અતિવલયનો અભ્યાસ કરીશું. પરવલય અને અતિવલય નામ એપોલોનિયસે આપ્યાં હતાં. આ વક્રો લંબ દ્વિશંકુના સમતલ સાથેના છેદ તરીકે મેળવાતા હોવાથી તે શંકુ પરિચ્છેદ કે શાંકવો તરીકે ઓળખાય છે. આ વક્રોનો ગ્રહોની ગતિ, ટેલિસ્કોપ અને ડિશ એન્ટેનાની રચના, ફ્લેશ લાઇટમાં પરાવર્તક અને વાહનોમાં હેડલાઇટ વગેરે ઘણાં ક્ષેત્રોમાં બહોળો ઉપયોગ થાય છે. હવે આપણે આ પ્રકરણમાં આગળ જોઈશું કે કેવી રીતે લંબ દ્વિશંકુના સમતલ સાથેના છેદથી જુદા જુદા વક્રો મળે છે.

Apollonius
(262 B.C. -190 B.C.)

11.2 શંકુનો પરિચ્છેદ

ધારો કે એક નિશ્ચિત શિરોલંબ રેખા l છે અને m એ કોઈ અન્ય રેખા છે. તે l ને નિશ્ચિત બિંદુ V માં છેદે છે અને તેમની વચ્ચેના ખૂણાનું માપ α છે. (આકૃતિ11.1.)

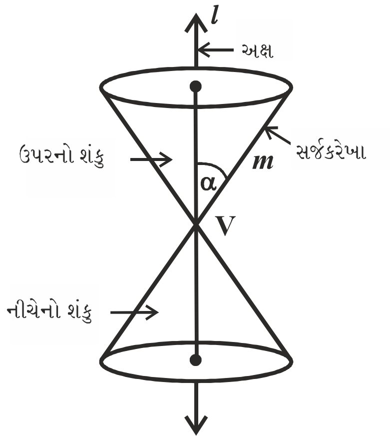
ધારો કે રેખા m ને ખૂણો α અચળ રહે તે રીતે l આસપાસ પરિભ્રમણ આપવામાં આવે છે. આ રીતે સર્જાતી સપાટીને દ્વિફલકી લંબવૃત્તીય પોલો શંકુ કહેવાય છે અને આપણે તેનો સંદર્ભ શંકુ તરીકે લઈશું. આથી,આવા શંકુનો વ્યાપ બંને દિશામાં અનંત હોય છે. (આકૃતિ11.2.)



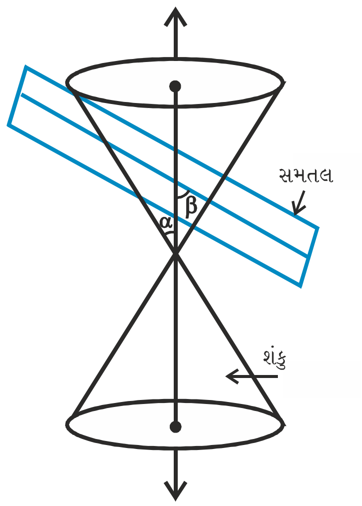
આકૃતિ 11. 1

બિંદુ V ને શંકુનું ***શિરોબિંદુ*** *(vertex)* કહે છે. રેખા l ને શંકુનો ***અક્ષ*** (*axis*) કહે છે અને રેખા m ને તેની કોઈ પણ સ્થિતિમાં શંકુની ***સર્જક રેખા*** (*generator*) કહે છે. શિરોબિંદુ શંકુને બે ભાગમાં વિભાજીત કરે અને તે પ્રત્યેક ભાગને ***ફલક*** (*nappes*) કહે છે.

હવે આપણે શંકુનો કોઈ સમતલ સાથે છેદ લઈએ તો, આવા છેદને શંકુનો ***પરિચ્છેદ*** (*section*) કહે છે. આમ, લંબશંકુના સમતલ સાથેના છેદથી મળતા વક્રોને ***શાંકવો*** (*conics*) કહે છે.



આકૃતિ 11. 2



આકૃતિ 11. 3

જ્યારે શંકુનો સમતલ સાથે છેદ લઈએ ત્યારે, સમતલે શંકુના અક્ષ સાથે બનાવેલ ખૂણાના આધારે આપણને જુદા જુદા શાંકવો મળશે. ધારો કે, સમતલ શંકુના શિરોલંબ અક્ષ સાથે β માપનો ખૂણો રચે છે. (આકૃતિ 11.3.)

આમ શંકુનો સમતલ સાથેનો છેદ કાં તો શિરોબિંદુ બને અથવા શંકુના શિરોબિંદુથી ઉપરના અથવા નીચેના ફલકમાં મળે:

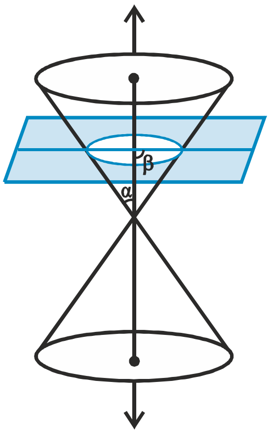
11.2.1 *વર્તુળ, ઉપવલય, પરવલય અને અતિવલય (Circle, Ellipse, Parabola and Hyperbola)*

જ્યારે સમતલ શંકુના ફલકને (શિરોબિંદુ સિવાય) છેદે છે, ત્યારે નીચેની સ્થિતિઓ થશે:

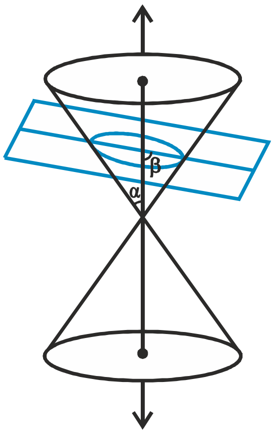
(a) જ્યારે $\beta = 90^\circ$, ત્યારે તેમનો છેદ વર્તુળ થશે. (આકૃતિ 11.4.)

(b) જ્યારે $\alpha < \beta < 90^\circ$, ત્યારે તેમનો છેદ ઉપવલય થશે. (આકૃતિ 11.5.)

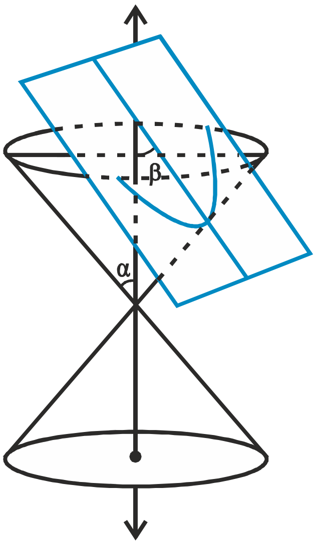
(c) જ્યારે $\beta = \alpha$; ત્યારે તેમનો છેદ પરવલય થશે. (આકૃતિ 11.6.)



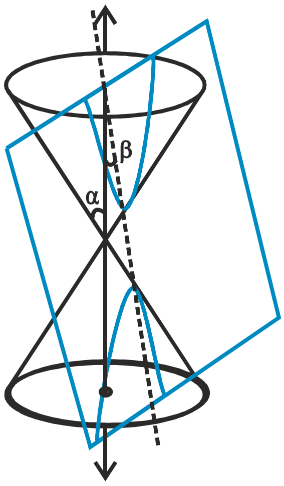
આકૃતિ 11.4



આકૃતિ 11.5



આકૃતિ 11.6



આકૃતિ 11.7

ઉપરની ત્રણે સ્થિતિઓમાં સમતલ શંકુના એક ફલકને પૂર્ણ રીતે આરપાર કાપે છે.

(d) જ્યારે $0 \le \beta < \alpha$ ત્યારે સમતલ શંકુના બંને ફલકને છેદે છે અને તેમનો છેદ અતિવલય છે. (આકૃતિ 11.7)

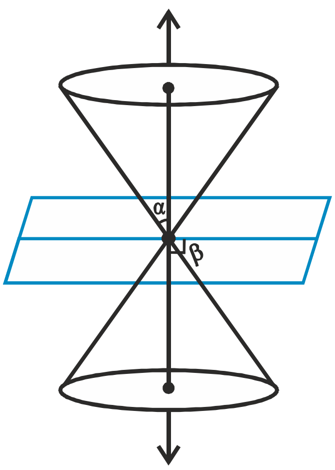
11.2.2 *વિસર્જિત શંકુ પરિચ્છેદ (Degenerated conic section)*

જ્યારે સમતલ શંકુને શિરોબિંદુએ છેદે ત્યારે નીચેની સ્થિતિઓ થશે:

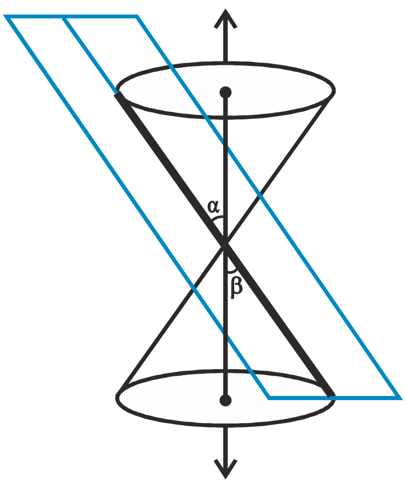
(a) જ્યારે $\alpha < \beta \le 90^\circ$, ત્યારે તેમનો છેદ એ બિંદુ થશે. (આકૃતિ11.8.)

(b) જ્યારે $\beta = \alpha$, ત્યારે સમતલ શંકુની સર્જકરેખાને સમાવશે અને તેમનો છેદ એ રેખા થશે. (આકૃતિ 11.9.) તે પરવલયનું વિસર્જિત રૂપ છે.

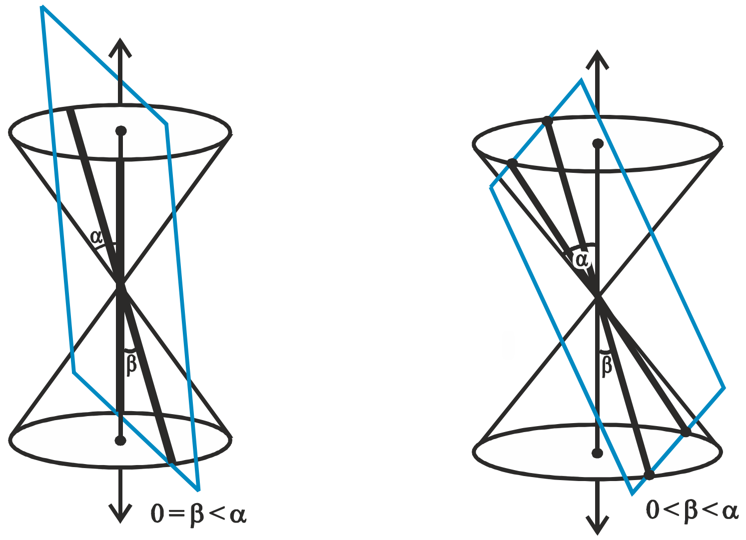
(c) જ્યારે $0 \le \beta < \alpha$, ત્યારે તેમનો છેદ પરસ્પર છેદતી રેખાઓ થશે. (આકૃતિ11.10.) તે અતિવલયનું વિસર્જિત રૂપ છે.



આકૃતિ 11.8



આકૃતિ 11.9



આકૃતિ 11.10

હવે, આપણે આગળના વિભાગોમાં ભૌતિક ગુણધર્મોને આધારે બધા જ શાંકવોનાં પ્રમાણિત સમીકરણો મેળવીશું.

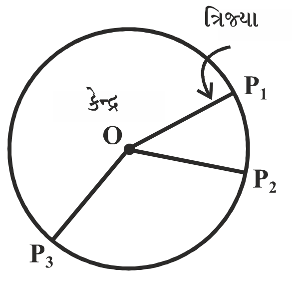
11.3 વર્તુળ

વ્યાખ્યા 1 : *સમતલના ચોક્કસ બિંદુથી સમાન અંતરે આવેલાં તમામ બિંદુઓના ગણને વર્તુળ કહેવાય છે.*

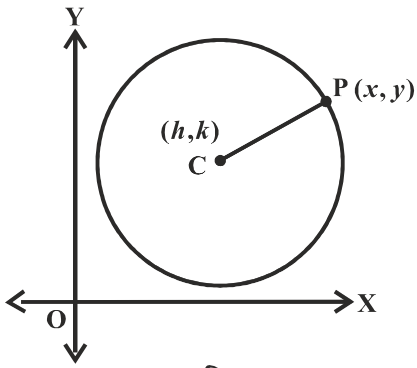
ચોક્કસ બિંદુને તે વર્તુળનું ***કેન્દ્ર*** *(centre)* અને કેન્દ્રથી વર્તુળ પર આવેલા કોઈપણ બિંદુના અંતરને ***વર્તુળની ત્રિજ્યા*** *(radius)* કહેવાય છે. (આકૃતિ 11.11)

હવે જો વર્તુળનું કેન્દ્ર ઊગમબિંદુ હોય, તો આપણને વર્તુળનું સમીકરણ સરળતમ સ્વરૂપમાં મળે. કેન્દ્ર અને ત્રિજ્યા આપેલ હોય તેવા વર્તુળનું સમીકરણ નીચે પ્રમાણે મેળવીએ. (આકૃતિ 11.12.)

ધારો કે બિંદુ C (h, k) વર્તુળનું કેન્દ્ર અને r ત્રિજ્યા છે. P(x, y) વર્તુળ પરનું કોઈપણ બિંદુ છે. (આકૃતિ 11.12)



આકૃતિ 11.11



આકૃતિ 11.12

હવે, વ્યાખ્યા પ્રમાણે CP = r. અંતરસૂત્ર પ્રમાણે,

$$\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2}=r$$

તેથી $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

આથી ઉલટું પણ સત્ય છે.

આ (h,k) કેન્દ્ર અને r ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળનું સમીકરણ છે.

ઉદાહરણ 1 : કેન્દ્ર (0, 0) અને r ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળનું સમીકરણ મેળવો.

ઉકેલ : અહીં $h = k = 0$ લેતાં વર્તુળનું સમીકરણ $x^2 + y^2 = r^2$ મળે છે.

ઉદાહરણ 2 : કેન્દ્ર (–3, 2) અને 4 ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળનું સમીકરણ શોધો.

ઉકેલ : અહીં $h = -3$, $k = 2$ અને $r = 4$. તેથી માંગેલ વર્તુળનું સમીકરણ

$$(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 16$$

ઉદાહરણ 3 : વર્તુળ $x^2 + y^2 + 8x + 10y - 8 = 0$ નું કેન્દ્ર અને ત્રિજ્યા શોધો.

ઉકેલ : અહીં આપેલ સમીકરણ

$$(x^2 + 8x) + (y^2 + 10y) = 8 \text{ છે.}$$

હવે, પૂર્ણવર્ગ તરીકે દર્શાવવા પદોનું પુનર્ગઠન કરતાં,

$$(x^2 + 8x + 16) + (y^2 + 10y + 25) = 8 + 16 + 25$$

$$\therefore (x + 4)^2 + (y + 5)^2 = 49$$

$$\therefore (x - (-4))^2 + (y - (-5))^2 = 7^2$$

આથી, આપેલ વર્તુળનું કેન્દ્ર (– 4, –5) અને ત્રિજ્યા 7 થશે.

ઉદાહરણ 4 : જેનું કેન્દ્ર રેખા $x + y = 2$ ઉપર હોય અને જે (2, – 2) અને (3, 4) માંથી પસાર થતું હોય તેવા વર્તુળનું સમીકરણ શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ માંગેલ વર્તુળનું સમીકરણ છે.

હવે, વર્તુળ (2, – 2) અને (3,4) માંથી પસાર થાય છે.

તો, $(2 - h)^2 + (-2 - k)^2 = r^2$ ... (1)

અને $(3 - h)^2 + (4 - k)^2 = r^2$ ... (2)

વળી, વર્તુળનું કેન્દ્ર રેખા $x + y = 2$ ઉપર આવેલું છે.

$h + k = 2$ ... (3)

સમીકરણો (1), (2) અને (3) ને ઉકેલતાં, $h = 0.7$, $k = 1.3$ **અને** $r^2 = 12.58$

તેથી, માંગેલ સમીકરણ $(x - 0.7)^2 + (y - 1.3)^2 = 12.58$.

સ્વાધ્યાય 11.1

નીચેના પ્રશ્નો 1 થી 5 પૈકી પ્રત્યેકમાં વર્તુળનું સમીકરણ મેળવો:

1. કેન્દ્ર (0,2) અને 2 ત્રિજ્યાવાળા

2. કેન્દ્ર (–2,3) અને 4 ત્રિજ્યાવાળા

3. કેન્દ્ર $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ અને $\frac{1}{12}$ ત્રિજ્યાવાળા

4. કેન્દ્ર (1,1) અને $\sqrt{2}$ ત્રિજ્યાવાળા

5. કેન્દ્ર $(-a, -b)$ અને $\sqrt{a^2 - b^2}$ ત્રિજ્યાવાળા

નીચેના પ્રશ્નો 6 થી 9 પૈકી પ્રત્યેકમાં વર્તુળનું કેન્દ્ર અને ત્રિજ્યા શોધો:

6. $(x + 5)^2 + (y - 3)^2 = 36$ **7.** $x^2 + y^2 - 4x - 8y - 45 = 0$

8. $x^2 + y^2 - 8x + 10y - 12 = 0$ **9.** $2x^2 + 2y^2 - x = 0$

10. જેનું કેન્દ્ર રેખા $4x + y = 16$ ઉપર હોય તથા જે (4,1) અને (6,5) માંથી પસાર થતું હોય તેવા વર્તુળનું સમીકરણ મેળવો.

11. જેનું કેન્દ્ર રેખા $x - 3y - 11 = 0$ ઉપર હોય તથા જે (2,3) અને (–1,1) માંથી પસાર થતું હોય તેવા વર્તુળનું સમીકરણ મેળવો.

12. જેનું કેન્દ્ર x-અક્ષ પર હોય અને જે (2,3) માંથી પસાર થતું હોય અને જેની ત્રિજ્યા 5 હોય એવા વર્તુળનું સમીકરણ શોધો.

13. ઊગમબિંદુમાંથી પસાર થતાં અને અક્ષો પર અંતઃખંડ a અને b બનાવતા વર્તુળનું સમીકરણ મેળવો.

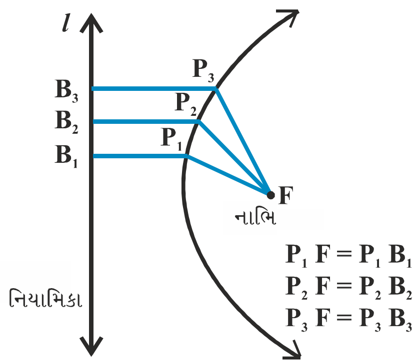
14. કેન્દ્ર (2, 2) વાળા અને બિંદુ (4, 5)માંથી પસાર થતા વર્તુળનું સમીકરણ મેળવો.

15. બિંદુ (–2.5, 3.5) એ વર્તુળ $x^2 + y^2 = 25$ ની અંદર, બહાર કે ઉપર છે તે નક્કી કરો.

11.4 પરવલય

વ્યાખ્યા 2 : *કોઈ નિશ્ચિત રેખા અને નિશ્ચિત બિંદુથી (રેખા પર ન હોય તેવા) સમાન અંતરે આવેલાં સમતલનાં તમામ બિંદુઓના ગણને* ***પરવલય*** *(parabola) કહે છે.*

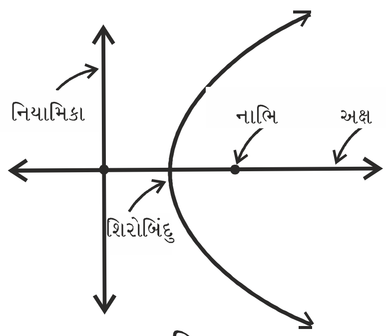
નિશ્ચિત રેખા l ને પરવલયની ***નિયામિકા*** *(directrix)* અને નિશ્ચિત બિંદુ F ને પરવલયનું ***નાભિ*** *(Focus)* કહે છે (આકૃતિ 11.13). (અહીં 'Para' નો અર્થ **માટે** (For) અને 'bola' નો અર્થ ***ફેંકવું*** *(throwing)* એવો થાય છે. એટલે કે દડાને હવામાં ફેંકવામાં આવે ત્યારે તેનો ગતિમાર્ગ).



આકૃતિ 11.13

> **નોંધ** જો નિશ્ચિત બિંદુ એ નિશ્ચિત રેખા પર હોય તો, કોઈ નિશ્ચિત રેખા અને નિશ્ચિત બિંદુથી સમાન અંતરે આવેલાં સમતલનાં તમામ બિંદુઓનો ગણ નિશ્ચિત બિંદુમાંથી પસાર થતી રેખા થશે અને તે નિશ્ચિત રેખાને લંબ હશે. આ રેખા પરવલયનું વિસર્જિત રૂપ છે

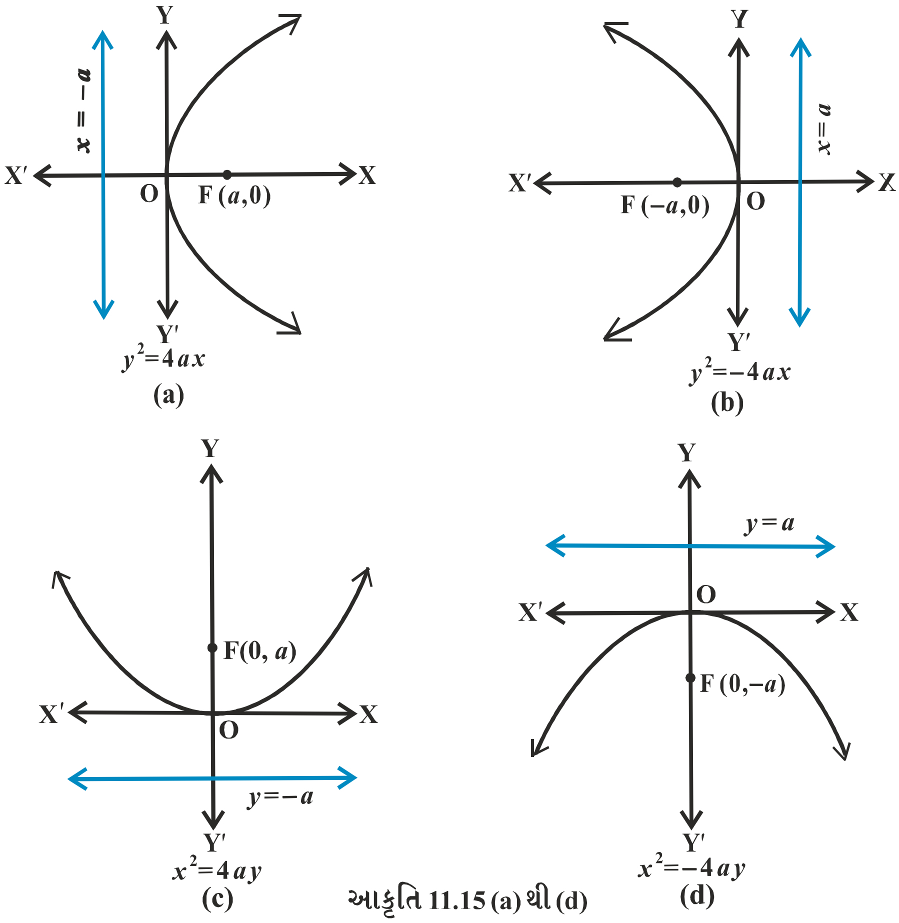
નાભિમાંથી પસાર થતી અને નિયામિકાને ***લંબ રેખાને પરવલયનો અક્ષ*** કહેવાય છે. પરવલય અને તેના અક્ષનું છેદબિંદુ પરવલયનું ***શિરોબિંદુ*** *(vertex)* કહેવાય છે. (આકૃતિ 11.14)



આકૃતિ 11.14

11.4.1 પરવલયનું પ્રમાણિત સમીકરણ

જો પરવલયનું શિરોબિંદુ ઊગમબિંદુ હોય અને તે x-અક્ષ કે y-અક્ષ પ્રત્યે સંમિત હોય તો આપણને પરવલયનું સરળતમ સમીકરણ મળે છે. પરવલયોની આવી ચાર શક્ય સ્થાન આકૃતિઓ આકૃતિ 11.15 (a) થી (d)માં દર્શાવેલ છે.



આકૃતિ 11.15 (a) થી (d)

હવે, આપણે આકૃતિ 11.15 (a) માં દર્શાવેલ પરવલયનું સમીકરણ નીચે દર્શાવેલી રીતે મેળવીશું:

અહીં નાભિ $(a, 0)$ $a > 0$; અને નિયામિકા $x = -a$ છે.

ધારો કે F નાભિ અને l નિયામિકા છે. નિયામિકા પર લંબ FM દોરો અને FM ના મધ્યબિંદુને O લો. OM ને X સુધી લંબાવો. પરવલયની વ્યાખ્યા પ્રમાણે મધ્યબિંદુ O પરવલય પર થશે અને તેને પરવલયનું શિરોબિંદુ કહેવાય છે. O ને ઊગમબિંદુ તરીકે લઈ OX ને x-અક્ષ અને તેને લંબરેખા OY ને y-અક્ષ તરીકે લઈએ. નાભિથી નિયામિકા સુધીનું અંતર $2a$ લેતાં, નાભિના યામ $(a, 0)$ અને નિયામિકાનું સમીકરણ $x + a = 0$ થશે. આ માહિતી આકૃતિ 11.16 માં દર્શાવેલ છે.

ધારો કે, $P(x, y)$ પરવલય પરનું કોઈ બિંદુ છે. તેથી PF = PB થાય. PB એ રેખા l પર લંબ છે. B ના યામ $(-a, y)$ થશે. અંતરસૂત્ર પ્રમાણે,

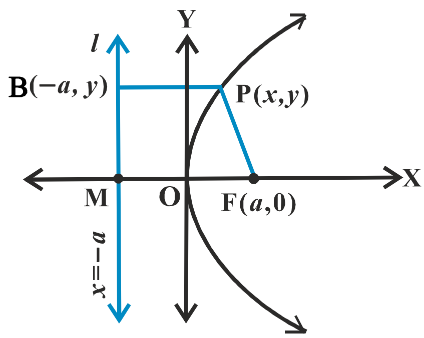
$$PF = \sqrt{(x-a)^2 + y^2} \text{ અને } PB = \sqrt{(x+a)^2}$$

હવે આપણે જાણીએ છીએ કે PF = PB

$$\therefore \sqrt{(x-a)^2 + y^2} = \sqrt{(x+a)^2}$$

$$\therefore (x-a)^2 + y^2 = (x+a)^2$$

અથવા $x^2 - 2ax + a^2 + y^2 = x^2 + 2ax + a^2$



આકૃતિ 11.16

અથવા $y^2 = 4ax$ $(a > 0)$ ...(2)

આમ, પરવલય પરનું કોઈપણ બિંદુ $y^2 = 4ax$ નું સમાધાન કરે.

આથી ઊલટું, ધારો કે P(x, y) સમીકરણ (2) નું સમાધાન કરે છે.

$$\text{PF} = \sqrt{(x-a)^2 + y^2} = \sqrt{(x-a)^2 + 4ax} = \sqrt{(x+a)^2} = \text{PB} \quad ...(3)$$

એટલે કે બિંદુ P(x,y) પરવલય પર હોય.

આમ, સમીકરણ (2) અને (3) પરથી સાબિત થાય છે કે જે પરવલયનું શિરોબિંદુ ઊગમબિંદુ હોય, નાભિ $(a,0)$ હોય અને નિયામિકાનું સમીકરણ $x = -a$ હોય તે પરવલયનું સમીકરણ $y^2 = 4ax$ છે.

ચર્ચા : સમીકરણ (2) માં $a > 0$ હોવાથી, x નું મૂલ્ય કોઈ પણ ધન સંખ્યા કે શૂન્ય હોઈ શકે, પરંતુ ઋણ ન હોઈ શકે. આ પરિસ્થિતિમાં પરવલયનો વ્યાપ પ્રથમ અને ચતુર્થ ચરણમાં અનંત સુધી લંબાવી શકાય. પરવલયનો અક્ષ ધન x-અક્ષ થાય.

આ જ પ્રમાણે આપણે અન્ય પરવલયોનાં સમીકરણો મેળવી શકીએ.

આકૃતિ 11.15 (b) માં $y^2 = -4ax$,

આકૃતિ 11.15 (c) માં $x^2 = 4ay$,

આકૃતિ 11.15 (d) માં $x^2 = -4ay$,

આ ચારેય સમીકરણોને પરવલયનાં પ્રમાણિત સમીકરણો કહે છે.

નોંધ પરવલયના પ્રમાણિત સમીકરણમાં, પરવલયનું નાભિ કોઈ એક અક્ષ પર હોય છે, શિરોબિંદુ ઊગમબિંદુ હોય છે અને નિયામિકા બીજા અક્ષને સમાંતર હોય છે. અહીં, એવા પરવલય કે જેમાં નાભિ કોઈપણ બિંદુ હોય અને નિયામિકા કોઈ પણ રેખા હોય તેમનો અભ્યાસ આ પુસ્તકના વિષયવસ્તુની બહાર છે.

આકૃતિ 11.15 માં દર્શાવેલ પરવલયના પ્રમાણિત સમીકરણ ઉપરથી નીચેનાં તારણો મેળવી શકાય:

1. પરવલય, તેના અક્ષ પ્રત્યે સંમિત હોય છે. જો સમીકરણમાં y^2 વાળું પદ હોય તો, તે x-અક્ષ પ્રત્યે સંમિત હોય છે અને જો સમીકરણમાં x^2 વાળું પદ હોય તો તે y-અક્ષ પ્રત્યે સંમિત હોય છે.

2. જો પરવલયનો અક્ષ x-અક્ષ પ્રત્યે સંમિત હોય, તો

(a) જો x નો સહગુણક ધન હોય, તો પરવલય જમણી બાજુ ખુલ્લો વક્ર છે.

(b) જો x નો સહગુણક ઋણ હોય, તો પરવલય ડાબી બાજુ ખુલ્લો વક્ર છે.

3. જો પરવલયનો અક્ષ, y-અક્ષ પ્રત્યે સંમિત હોય, તો

(c) જો y નો સહગુણક ધન હોય, તો પરવલય ઉપરની બાજુ ખુલ્લો વક્ર છે.

(d) જો y નો સહગુણક ઋણ હોય, તો પરવલય નીચેની બાજુ ખુલ્લો વક્ર છે.

11.4.2 પરવલયનો નાભિલંબ :

વ્યાખ્યા 3 : *પરવલયના નાભિમાંથી પસાર થતો અને પરવલયના અક્ષને લંબ હોય તથા જેનાં અંત્યબિંદુઓ પરવલય પર હોય તેવા રેખાખંડને પરવલયનો **નાભિલંબ** કહે છે.* (આકૃતિ 11.17.)

પરવલય $y^2 = 4ax$ ના નાભિલંબની લંબાઇ શોધવી છે. (આકૃતિ 11.18)

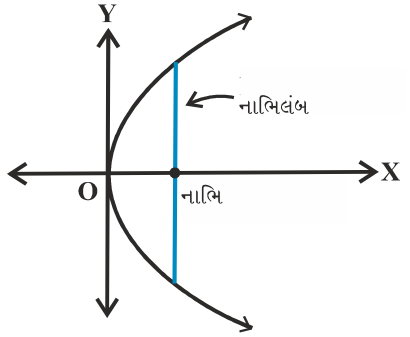
પરવલયની વ્યાખ્યા પ્રમાણે, AF = AC.

પરંતુ AC = FM = $2a$

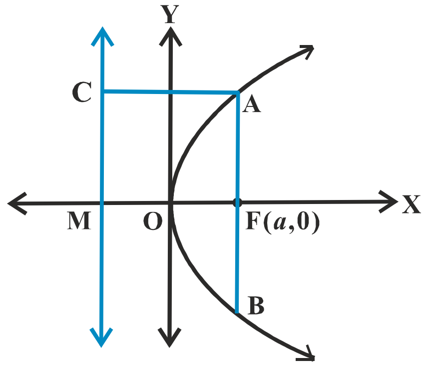
તેથી AF = $2a$.

અને પરવલય x-અક્ષ પ્રત્યે સંમિત હોવાથી AF = FB અને તેથી

AB = નાભિલંબની લંબાઈ = $4a$.



આકૃતિ 11.17



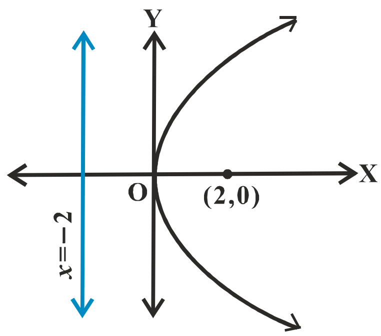
આકૃતિ 11.18

ઉદાહરણ 5 : પરવલય $y^2 = 8x$ ના નાભિના યામ, અક્ષ, નિયામિકાનું સમીકરણ અને નાભિલંબની લંબાઈ શોધો.

ઉકેલ : આપેલ સમીકરણમાં y^2 વાળું પદ હોવાથી આ પરવલય x-અક્ષ પ્રત્યે સંમિત થશે.

વળી, સમીકરણમાં x નો સહગુણક ધન હોવાથી પરવલય જમણી બાજુ ખૂલશે. આપેલ સમીકરણને $y^2 = 4ax$, સાથે સરખાવતાં $a = 2$ મળે. તેનો અક્ષ x-અક્ષ છે.

આથી પરવલયના નાભિના યામ (2, 0) થશે. નિયામિકાનું સમીકરણ $x = -2$ થશે. (આકૃતિ 11.19)



આકૃતિ 11.19

નાભિલંબની લંબાઈ $4a = 4 \times 2 = 8$.

ઉદાહરણ 6 : જેનું નાભિ (2, 0) હોય તથા નિયામિકા $x = -2$ હોય તેવા પરવલયનું સમીકરણ મેળવો.

ઉકેલ : નાભિ (2,0) x-અક્ષ પર આવેલ છે. તેથી પરવલયનો અક્ષ એ x-અક્ષ છે. આથી, પરવલયનું પ્રમાણિત સમીકરણ $y^2 = 4ax$ અથવા $y^2 = -4ax$ થશે. અહીં, નિયામિકાનું સમીકરણ $x = -2$ અને નાભિ (2,0) હોવાથી, પરવલય $a = 2$ માટે $y^2 = 4ax$ પ્રકારનો થશે અને આથી માંગેલ પરવલયનું સમીકરણ $y^2 = 4(2)x = 8x$.

ઉદાહરણ 7 : જેનું શિરોબિંદુ ઊગમબિંદુ (0, 0) હોય અને નાભિના યામ (0, 2) હોય તેવા પરવલયનું સમીકરણ મેળવો.

ઉકેલ : અહીં, શિરોબિંદુ (0, 0) છે અને નાભિના યામ (0, 2) છે. નાભિ y-અક્ષ પર છે. તેથી y-અક્ષ એ પરવલયનો અક્ષ થશે. આથી નાભિ ધન y-અક્ષ પર હોવાથી પરવલયનું સમીકરણ $x^2 = 4ay$ સ્વરૂપનું હોય. આમ, માંગેલ સમીકરણ

$$x^2 = 4(2)y, \text{ એટલે કે, } x^2 = 8y \text{ છે.}$$

ઉદાહરણ 8 : y-અક્ષ પ્રત્યે સંમિત અને શિરોબિંદુ ઊગમબિંદુ હોય તેવા અને બિંદુ (2,–3) માંથી પસાર થતા પરવલયનું સમીકરણ મેળવો.

ઉકેલ : પરવલય y-અક્ષ પ્રત્યે સંમિત છે તેમજ શિરોબિંદુ ઊગમબિંદુ છે. આથી આપેલ પરવલયનું સમીકરણ $x^2 = 4ay$ અથવા $x^2 = -4ay$ થાય. અહીં ચિહ્ન પરવલય ઉપર કે નીચે ખૂલશે તેના પર આધાર રાખે છે. પરંતુ પરવલય ચોથા ચરણમાં આવેલ બિંદુ (2,–3)માંથી પસાર થાય છે. તેથી પરવલય નીચેની તરફ ખૂલશે. આમ, પરવલયનું સમીકરણ $x^2 = -4ay$ પ્રકારનું હોય.

વળી, પરવલય (2,–3) માંથી પસાર થાય છે.

$$\text{તેથી } 2^2 = -4a(-3), \text{ એટલે કે, } a = \frac{1}{3}$$

આથી પરવલયનું સમીકરણ

$$x^2 = -4\left(\frac{1}{3}\right)y, \text{ એટલે કે, } 3x^2 = -4y$$

સ્વાધ્યાય 11.2

નીચેના પ્રશ્ન-ક્રમાંક 1 થી 6 માટે નાભિના યામ, પરવલયના અક્ષનું સમીકરણ, નિયામિકાનું સમીકરણ અને નાભિલંબની લંબાઈ શોધો:

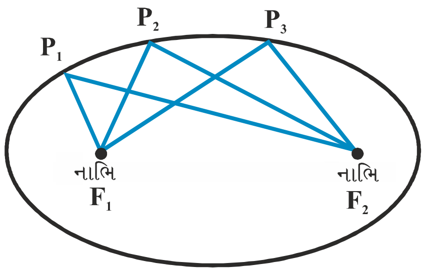
1. $y^2 = 12x$
2. $x^2 = 6y$
3. $y^2 = -8x$
4. $x^2 = -16y$
5. $y^2 = 10x$
6. $x^2 = -9y$

નીચેના પ્રશ્ન-ક્રમાંક 7 થી 12 માં આપેલી શરતો પ્રમાણે પરવલયનું સમીકરણ મેળવો.

7. નાભિ (6, 0); નિયામિકા $x = -6$
8. નાભિ (0, –3); નિયામિકા $y = 3$
9. શિરોબિંદુ (0, 0); નાભિ (3, 0)
10. શિરોબિંદુ (0, 0); નાભિ (–2, 0)
11. શિરોબિંદુ (0, 0), (2, 3)માંથી પસાર થતા અને x-અક્ષ જેનો અક્ષ હોય.
12. શિરોબિંદુ (0, 0), (5, 2)માંથી પસાર થતા અને y-અક્ષ પ્રત્યે સંમિત.

11.5 ઉપવલય

વ્યાખ્યા 4 : *ઉપવલય એટલે જેનાં સમતલમાંના કોઈ બે નિશ્ચિત બિંદુઓથી અંતરનો સરવાળો અચળ હોય એવાં બિંદુઓનો ગણ છે. આ બે નિશ્ચિત બિંદુઓને* ***ઉપવલયનાં નાભિઓ*** *કહે છે. (આકૃતિ 11.20.)*



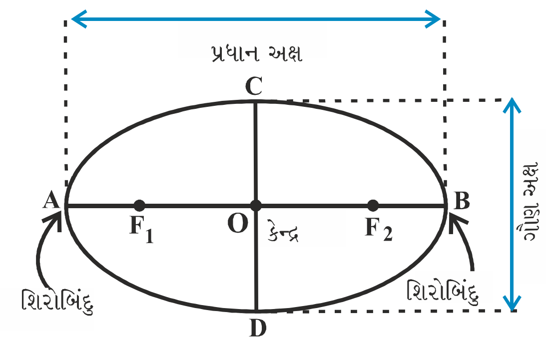
$P_1F_1 + P_1F_2 = P_2F_1 + P_2F_2 = P_3F_1 + P_3F_2$

આકૃતિ 11.20

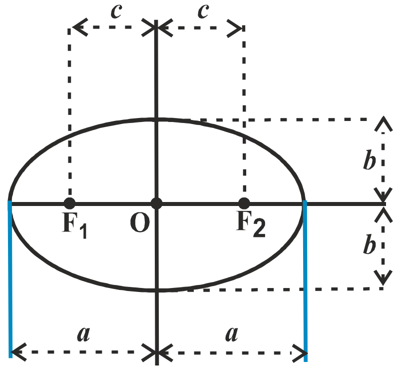
> **નોંધ :** ઉપવલય પરના કોઈપણ બિંદુનો સમતલનાં બે નિશ્ચિત બિંદુઓથી અંતરનો સરવાળો અચળ હોય છે અને તે બે નિશ્ચિત બિંદુઓ વચ્ચેના અંતર કરતા વધુ હોય તે જરૂરી છે.

નાભિઓને જોડતા રેખાખંડના મધ્યબિંદુને ઉપવલયનું ***કેન્દ્ર*** *(centre)* કહે છે. ઉપવલયનાં **નાભિઓમાંથી** પસાર થતા રેખાખંડને ઉપવલયનો ***પ્રધાન અક્ષ*** *(major axis)* અને કેન્દ્રમાંથી પસાર થતો અને પ્રધાન અક્ષને લંબરેખાખંડને ઉપવલયનો

ગૌણ અક્ષ *(minor axis)* કહે છે. પ્રધાન અક્ષનાં અંત્યબિંદુઓને ઉપવલયનાં **શિરોબિંદુઓ** *(vertices)* કહે છે. (આકૃતિ 11.21)



આકૃતિ 11.21



આકૃતિ 11.22

આપણે પ્રધાન અક્ષની લંબાઈ $2a$, ગૌણ અક્ષની લંબાઈ $2b$ અને બે નાભિઓ વચ્ચેના અંતરને $2c$ લઈશું. તેથી અર્ધ પ્રધાન અક્ષની લંબાઈ a થશે અને અર્ધ ગૌણ અક્ષની લંબાઈ b થશે. (આકૃતિ 11.22)

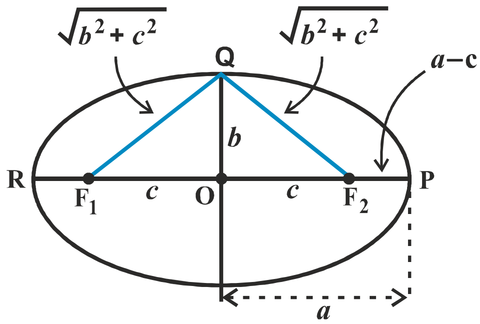
11.5.1 ઉપવલયના અર્ધ પ્રધાન અક્ષ, અર્ધ ગૌણ અક્ષ તથા કેન્દ્રથી નાભિ સુધીના અંતર વચ્ચેનો સંબંધ. (આકૃતિ 11.23.)

પ્રધાન અક્ષનું એક અંત્યબિંદુ P લો.

બિંદુ P ના નાભિઓથી અંતરનો સરવાળો

$F_1P + F_2P = F_1O + OP + F_2P \qquad (F_1P = F_1O + OP)$

$= c + a + a - c = 2a$



આકૃતિ 11.23

ગૌણ અક્ષનું એક અંત્યબિંદુ Q લો.

બિંદુ Q માટે નાભિઓથી અંતરનો સરવાળો

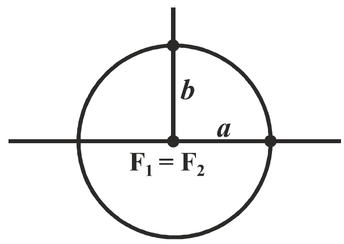
$$F_1Q + F_2Q = \sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{b^2 + c^2} = 2\sqrt{b^2 + c^2}$$

બિંદુઓ P અને Q બંને ઉપવલય પર આવેલાં હોવાથી, ઉપવલયની વ્યાખ્યા અનુસાર,

$$2\sqrt{b^2 + c^2} = 2a, \text{ એટલે, } \quad a = \sqrt{b^2 + c^2}$$

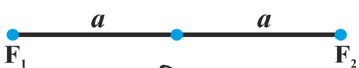
અથવા $\qquad a^2 = b^2 + c^2, \qquad$ એટલે, $\qquad c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

11.5.2 : ઉપવલયના એક વિશિષ્ટ પ્રકાર અનુસાર ઉપર મેળવેલા સમીકરણ $c^2 = a^2 - b^2$માં જો આપણે a ના મૂલ્યને અચળ રાખી અને c નાં મૂલ્યને 0 થી a, સુધી બદલીએ તો ઉપવલયના આકાર બદલાશે.



આકૃતિ 11.24

વિકલ્પ (i) : જો $c = 0$, લઈએ તો, બંને નાભિઓ કેન્દ્રમાં મળી જાય અને $a^2 = b^2$, એટલે, $a = b$ અને ઉપવલય વર્તુળ બની જશે (આકૃતિ 11.24). આમ વર્તુળ એ ઉપવલયનો એક વિશિષ્ટ પ્રકાર છે. તેનું અનુચ્છેદ 11.3 માં વર્ણન કરેલ છે.



આકૃતિ 11.25

વિકલ્પ (ii) : જો $c = a$ તો $b = 0$ થાય અને ઉપવલય બે નાભિઓને જોડતો રેખાખંડ F_1F_2 બની જશે. (આકૃતિ 11.25)

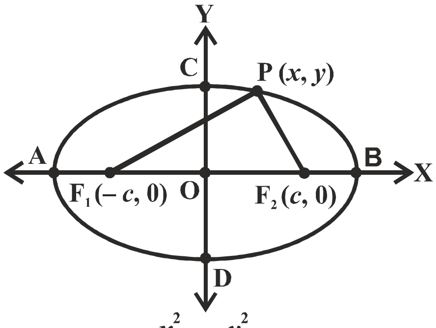
11.5.3 *ઉત્કેન્દ્રતા (Eccentricity)*

વ્યાખ્યા 5 : *ઉપવલયના કેન્દ્રનું એક નાભિથી અંતર અને કેન્દ્રથી એક શિરોબિંદુના અંતરના ગુણોત્તરને ઉપવલયની **ઉત્કેન્દ્રતા** કહે છે. ઉત્કેન્દ્રતાને e દ્વારા દર્શાવાય છે. આમ,* $e = \frac{c}{a}$. $a^2 = b^2 + c^2$ હોવાથી $c < a$ તથા તેથી $0 < e < 1$

કેન્દ્રથી નાભિનું અંતર c છે. તેથી ઉત્કેન્દ્રતાના સંદર્ભમાં કેન્દ્રથી નાભિનું અંતર ae થશે.

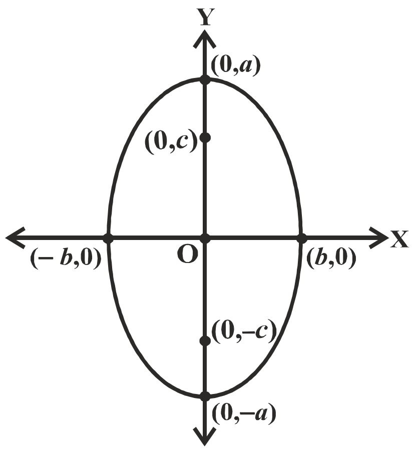
11.5.4 ઉપવલયનું પ્રમાણિત સમીકરણ

જો ઉપવલયનું કેન્દ્ર ઊગમબિંદુ હોય અને તેનાં નાભિઓ x-અક્ષ પર કે y-અક્ષ પર હોય ત્યારે ઉપવલયનું સમીકરણ સરળતમ સ્વરૂપમાં મળે છે. આવી બે શક્ય ગોઠવણી આકૃતિ 11.26 માં દર્શાવેલ છે.



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

(a)



$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

(b)

આકૃતિ 11.26

હવે, આપણે આકૃતિ 11.26 (a) માં દર્શાવેલ જેનાં નાભિઓ x-અક્ષ પર હોય તેવા ઉપવલયનું પ્રમાણિત સમીકરણ મેળવીશું.

ધારો કે F_1 અને F_2 બે નાભિઓ છે અને રેખાખંડ F_1F_2 નું મધ્યબિંદુ O છે. ધારો કે O ઊગમબિંદુ અને O થી F_2 તરફ x-અક્ષની ધન દિશા અને Oથી F_1 તરફ x-અક્ષની ઋણ દિશા છે. ધારો કે O માંથી પસાર થતી અને x-અક્ષને લંબ રેખા y-અક્ષ છે. ધારો કે F_1 ના યામ $(-c, 0)$ અને તેથી F_2 $(c, 0)$ મળે. (આકૃતિ 11.27).

ધારો કે $P(x, y)$ એ ઉપવલય પર આવેલું એવું બિંદુ છે. તેથી P નાં બંને નાભિઓથી અંતરનો સરવાળો $2a$ થાય.

આમ, $PF_1 + PF_2 = 2a$. ... (1)

અંતર સૂત્રનો ઉપયોગ કરતાં,

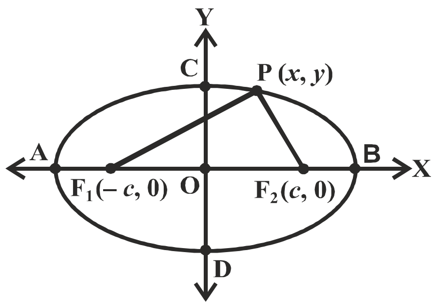
$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

આથી, $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$

બંને બાજુએ વર્ગ કરતાં,

$(x + c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$ મળે.

સાદું રૂપ આપતાં, $\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a - \frac{c}{a}x$



આકૃતિ 11.27

બંને બાજુ વર્ગ કરી, સાદું રૂપ આપતાં,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

$$\therefore \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (\text{જ્યાં } c^2 = a^2 - b^2)$$

આમ, ઉપવલય પરનું કોઈપણ બિંદુ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ નું સમાધાન કરશે.} \qquad \ldots (2)$$

આથી, ઊલટું $0 < c < a$ માટે P (x, y) સમીકરણ (2) નું સમાધાન કરતું હોય, તો

$$y^2 = b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$$

$$\therefore \text{PF}_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$= \sqrt{(x+c)^2 + b^2\left(\frac{a^2 - x^2}{a^2}\right)}$$

$$= \sqrt{(x+c)^2 + (a^2 - c^2)\left(\frac{a^2 - x^2}{a^2}\right)} \qquad (b^2 = a^2 - c^2)$$

$$= \sqrt{\left(a + \frac{cx}{a}\right)^2} = a + \frac{c}{a}x \qquad (|x| \le a \text{ તથા } 0 < c < a \text{ હોવાથી})$$

તે જ રીતે, $\quad \text{PF}_2 = a - \frac{c}{a}x \qquad (|x| \le a \text{ તથા } 0 < c < a \text{ હોવાથી})$

તેથી $\quad \text{PF}_1 + \text{PF}_2 = a + \frac{c}{a}x + a - \frac{c}{a}x = 2a \qquad \ldots (3)$

આથી, જો ઉપવલયનું કોઈપણ બિંદુ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ને સંતોષે તો તે ભૌમિતિક ગુણધર્મને પણ સંતોષે છે અને તેથી P(x, y) ઉપવલય પર છે.

આમ, આપણે (2) અને (3) પરથી સાબિત કર્યું કે જે ઉપવલયનું કેન્દ્ર ઊગમબિંદુ હોય અને પ્રધાન અક્ષ x-અક્ષ પર હોય તેવા ઉપવલયનું પ્રમાણિત સમીકરણ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ છે.

ચર્ચા : ઉપર મેળવેલ ઉપવલયના સમીકરણ પરથી એ તારણ મળે છે કે ઉપવલય પરના કોઈ પણ બિંદુ P (x, y) માટે,

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2} \le 1, \text{ એટલે, } x^2 \le a^2, \text{ તેથી } -a \le x \le a.$$

આથી ઉપવલય રેખાઓ $x = -a$ અને $x = a$ ની વચ્ચે આવેલ છે અને તે રેખાઓને સ્પર્શે પણ છે. તે જ રીતે ઉપવલય રેખાઓ $y = -b$ અને $y = b$ ની વચ્ચે છે અને તે રેખાઓને સ્પર્શે છે.

આ જ રીતે, આપણે આકૃતિ 11.26 (b) માં દર્શાવેલ ઉપવલયનું સમીકરણ $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ પણ મેળવી શકીએ.

આ બે સમીકરણોને ઉપવલયનાં પ્રમાણિત સમીકરણો કહે છે.

નોંધ ઉપવલયના પ્રમાણિત સમીકરણમાં ઉપવલયનું કેન્દ્ર ઊગમબિંદુ અને પ્રધાન અક્ષ અને ગૌણ અક્ષ યામાક્ષો પર છે. અહીં, જેનું કેન્દ્ર ઊગમબિંદુ સિવાયનું કોઈ બિંદુ હોય અને કેન્દ્રમાંથી પસાર થતી રેખાઓ પ્રધાન અક્ષ અને ગૌણ અક્ષ હોય અને ગૌણ અક્ષ પ્રધાન અક્ષને લંબ હોય એવા ઉપવલયનો અભ્યાસ તે આ પુસ્તકના વિષયવસ્તુની બહાર છે.

આકૃતિ 11.26 માં દર્શાવેલ ઉપવલયના પ્રમાણિત સમીકરણના અવલોકન પરથી આપણને નીચે દર્શાવેલ કેટલાંક તારણો મળશે:

1. ઉપવલય બંને અક્ષો પ્રત્યે સંમિત છે, કારણ કે જો કોઈ બિંદુ (x, y) ઉપવલય પર હોય, તો બિંદુઓ $(-x, y)$, $(x, -y)$ અને $(-x, -y)$ પણ ઉપવલય પર છે.

2. ઉપવલયનાં નાભિઓ હંમેશાં પ્રધાન અક્ષ પર હોય છે. અક્ષ પરનાં અંતઃખંડો પરથી પ્રધાન અક્ષ નક્કી થઈ શકે છે. એટલે કે જો x^2 ના સહગુણકમાં છેદની સંખ્યા મોટી હોય, તો પ્રધાન અક્ષ x-અક્ષ પર છે અને જો y^2 ના સહગુણકમાં છેદની સંખ્યા મોટી હોય તો પ્રધાન અક્ષ y-અક્ષ પર છે.

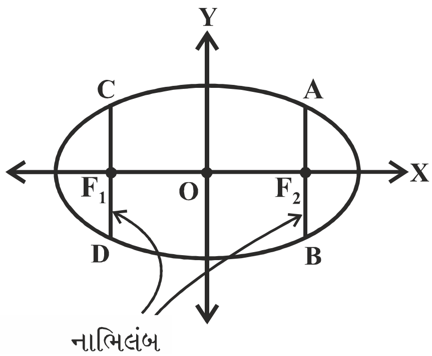
11.5.5 નાભિલંબ

વ્યાખ્યા 6 : *ઉપવલયના કોઈપણ નાભિમાંથી પસાર થતા જેનાં અંત્યબિંદુઓ ઉપવલય પર હોય તેવા પ્રધાન અક્ષને લંબ રેખાખંડને ઉપવલયનો* ***નાભિલંબ*** *કહે છે.* (આકૃતિ 11.28.)

ઉપવલય $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ના નાભિલંબની લંબાઈ શોધીએ.

ધારો કે AF_2 ની લંબાઈ l છે.

તો A ના યામ (c, l), એટલે કે (ae, l) થશે.



આકૃતિ 11.28

બિંદુ A ઉપવલય $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ પર હોવાથી,

$$\frac{(ae)^2}{a^2}+\frac{l^2}{b^2}=1 \text{ મળે.}$$

$$\therefore l^2 = b^2(1-e^2)$$

પરંતુ $$e^2=\frac{c^2}{a^2}=\frac{a^2-b^2}{a^2}=1-\frac{b^2}{a^2}$$

$$\therefore l^2=\frac{b^4}{a^2}, \text{ એટલે કે, } l=\frac{b^2}{a}$$

હવે, ઉપવલય y-અક્ષ પ્રત્યે સંમિત છે. (ખરેખર તો તે બંને અક્ષો પ્રત્યે સંમિત છે.)

તેથી, $AF_2 = F_2B$ અને તેથી નાભિલંબની લંબાઈ $\frac{2b^2}{a}$ થશે.

ઉદાહરણ 9 : ઉપવલય $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ માટે નાભિના યામ, શિરોબિંદુઓ, પ્રધાન અક્ષની લંબાઈ, ગૌણ અક્ષની લંબાઈ, ઉત્કેન્દ્રતા અને નાભિલંબની લંબાઈ મેળવો.

ઉકેલ : અહીં, $\frac{x^2}{25}$ માં છેદ એ $\frac{y^2}{9}$ માં છેદ કરતાં મોટો હોવાથી પ્રધાન અક્ષ x-અક્ષ ઉપર છે. હવે, આપેલ સમીકરણને $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ સાથે સરખાવતાં, $a = 5$ અને $b = 3$ મળશે.

$$\text{વળી, } c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{25-9}=4$$

તેથી, નાભિના યામ$(-4,0)$ અને $(4,0)$ થશે. શિરોબિંદુઓ$(-5, 0)$ અને $(5, 0)$ થશે. પ્રધાન અક્ષની લંબાઈ 10 એકમ અને ગૌણ અક્ષની લંબાઈ $2b$ એટલે 6 એકમ થશે, ઉત્કેન્દ્રતા $\frac{4}{5}$ થશે અને નાભિલંબની લંબાઈ $\frac{2b^2}{a}=\frac{18}{5}$.

ઉદાહરણ 10 : ઉપવલય $9x^2 + 4y^2 = 36$ માટે નાભિના યામ, શિરોબિંદુઓ, પ્રધાન અક્ષની લંબાઈ, ગૌણ અક્ષની લંબાઈ અને ઉત્કેન્દ્રતા શોધો.

ઉકેલ : આપેલ ઉપવલયના સમીકરણને પ્રમાણિત સમીકરણના રૂપમાં લખતાં,

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$$

અહીં, $\frac{y^2}{9}$ માં છેદ $\frac{x^2}{4}$ માં છેદ કરતાં મોટો હોવાથી પ્રધાન અક્ષ y-અક્ષ ઉપર છે. આપેલ સમીકરણને

$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$, સાથે સરખાવતાં $b = 2$ અને $a = 3$.

વળી, $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{9-4}=\sqrt{5}$

અને $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{3}$

આથી, નાભિઓ $(0, \sqrt{5})$ અને $(0, -\sqrt{5})$ થશે, શિરોબિંદુઓ $(0, 3)$ અને $(0, -3)$ થશે, પ્રધાન અક્ષની લંબાઈ 6 એકમ, ગૌણ અક્ષની લંબાઈ 4 એકમ અને ઉપવલયની ઉત્કેન્દ્રતા $\frac{\sqrt{5}}{3}$ થશે.

ઉદાહરણ 11 : જેનાં નાભિઓ $(\pm 5, 0)$ હોય અને શિરોબિંદુઓ $(\pm 13, 0)$ હોય તેવા ઉપવલયનું સમીકરણ મેળવો.

ઉકેલ : અહીં, શિરોબિંદુઓ x-અક્ષ પર હોવાથી ઉપવલયનું સમીકરણ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ થશે. અહીં અર્ધ પ્રધાન અક્ષની લંબાઈ a થશે.

અહીં $a = 13$, $c = 5$ આપેલ છે.

તેથી, $c^2 = a^2 - b^2$ સંબંધ પરથી, $25 = 169 - b^2$ મળશે.

$$\therefore\ b = 12$$

આમ, માંગેલ ઉપવલયનું સમીકરણ $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{144}=1$.

ઉદાહરણ 12 : જેના પ્રધાન અક્ષની લંબાઈ 20 હોય અને નાભિઓ $(0, \pm 5)$ હોય તેવા ઉપવલયનું સમીકરણ મેળવો.

ઉકેલ : અહીં, નાભિઓ y-અક્ષ પર હોવાથી પ્રધાન અક્ષ y-અક્ષ ઉપર છે. આથી, ઉપવલયનું સમીકરણ $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ થશે.

$$a = \text{ અર્ધ પ્રધાન અક્ષની લંબાઈ } = \frac{20}{2} = 10$$

અને $c^2 = a^2 - b^2$ સંબંધ પરથી, $5^2 = 10^2 - b^2$ મળે.

$$\therefore\ b^2 = 75$$

આમ, માંગેલ ઉપવલયનું સમીકરણ $\frac{x^2}{75}+\frac{y^2}{100}=1$

ઉદાહરણ 13 : બિંદુઓ (4, 3) અને (– 1, 4) માંથી પસાર થતા હોય તથા જેનો પ્રધાન અક્ષ x-અક્ષ હોય તેવા ઉપવલયનું સમીકરણ મેળવો.

ઉકેલ : ઉપવલયનું પ્રમાણિત સમીકરણ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ છે. અહીં, બિંદુઓ (4, 3) અને (–1, 4) ઉપવલય પર આવેલા છે.

તેથી, $$\frac{16}{a^2}+\frac{9}{b^2}=1 \qquad \text{... (1)}$$

અને $$\frac{1}{a^2}+\frac{16}{b^2}=1 \qquad \text{....(2)}$$

સમીકરણ (1) અને (2) ઉકેલતાં, $a^2 = \frac{247}{7}$ અને $b^2 = \frac{247}{15}$ મળે.

તેથી માંગેલ ઉપવલયનું સમીકરણ,

$$\frac{x^2}{\frac{247}{7}}+\frac{y^2}{\frac{247}{15}}=1, \text{ એટલે } 7x^2 + 15y^2 = 247.$$

નોંધ : બિંદુઓના યામ પરથી પ્રધાન અક્ષ નક્કી થઇ જાય છે, તે આપવાની જરૂર નથી. જો પ્રધાન અક્ષ y-અક્ષ છે તેમ કહ્યું હોય તો $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ પરથી $b^2=\frac{247}{7}$ મળે, જે ખોટું પરિણામ છે.

સ્વાધ્યાય 11.3

પ્રશ્ન 1 થી 9 માં આપેલ ઉપવલય માટે નાભિના યામ, શિરોબિંદુઓ તથા પ્રધાન અક્ષ તથા ગૌણ અક્ષની લંબાઈ, ઉત્કેન્દ્રતા અને નાભિલંબની લંબાઈ શોધો:

1. $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$ **2.** $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{25}=1$ **3.** $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$

4. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{100}=1$ **5.** $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{36}=1$ **6.** $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{400}=1$

7. $36x^2 + 4y^2 = 144$ **8.** $16x^2 + y^2 = 16$ **9.** $4x^2 + 9y^2 = 36$

નીચેના પ્રશ્ન 10 થી 20 માં આપેલ શરતોનું સમાધાન કરતા **પ્રત્યેક** ઉપવલયનું સમીકરણ શોધોઃ

10. શિરોબિંદુઓ $(\pm 5, 0)$, નાભિઓ $(\pm 4, 0)$

11. શિરોબિંદુઓ $(0, \pm 13)$, નાભિઓ $(0, \pm 5)$

12. શિરોબિંદુઓ $(\pm 6, 0)$, નાભિઓ $(\pm 4, 0)$

13. પ્રધાન અક્ષનાં અંત્યબિંદુઓ $(\pm 3, 0)$, ગૌણ અક્ષનાં અંત્યબિંદુઓ $(0, \pm 2)$

14. પ્રધાન અક્ષનાં અંત્યબિંદુઓ $(0, \pm \sqrt{5})$, ગૌણ અક્ષનાં અંત્યબિંદુઓ $(\pm 1, 0)$

15. પ્રધાન અક્ષની લંબાઈ 26, નાભિઓ $(\pm 5, 0)$

16. ગૌણ અક્ષની લંબાઈ 16, નાભિઓ $(0, \pm 6)$.

17. નાભિઓ $(\pm 3, 0)$, $a = 4$

18. $b = 3$, $c = 4$, કેન્દ્ર ઊગમબિંદુ તથા નાભિઓ x-અક્ષ પર હોય.

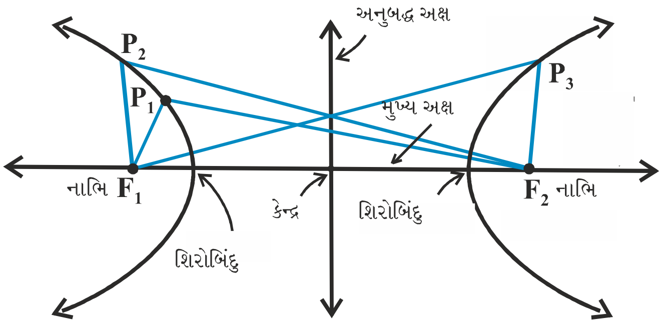
19. કેન્દ્ર ઊગમબિંદુ, પ્રધાન અક્ષ y-અક્ષ પર હોય અને બિંદુઓ (3, 2) અને (1, 6) માંથી પસાર થાય.

20. પ્રધાન અક્ષ x-અક્ષ પર હોય અને બિંદુઓ (4, 3) અને (6, 2) માંથી પસાર થાય.

11.6 અતિવલય

વ્યાખ્યા 7 : *અતિવલય એટલે સમતલમાં જેનાં બે નિશ્ચિત બિંદુથી અંતરનો નિરપેક્ષ તફાવત અચળ હોય એવાં તમામ બિંદુઓનો ગણ.*

વ્યાખ્યામાં વપરાયેલ તફાવત પદનો અર્થ દૂરના બિંદુથી અંતર - નજીકના બિંદુથી અંતર. આ બે નિશ્ચિત બિંદુઓને ***અતિવલયનાં નાભિઓ*** કહે છે. નાભિઓને જોડતા રેખાખંડના મધ્યબિંદુને ***અતિવલયનું કેન્દ્ર*** કહેવાય. નાભિઓમાંથી પસાર થતી રેખાને મુખ્ય અક્ષ અને કેન્દ્રમાંથી પસાર થતી મુખ્ય અક્ષને લંબરેખાને ***અનુબદ્ધ અક્ષ*** કહેવાય. અતિવલય મુખ્ય અક્ષને જે બિંદુઓમાં છેદે તેને ***અતિવલયનાં શિરોબિંદુ*** કહેવાય. (જુઓ આકૃતિ 11.29)



$$P_1F_2 - P_1F_1 = P_2F_2 - P_2F_1 = P_3F_1 - P_3F_2$$

આકૃતિ 11.29

આપણે બે નાભિઓ વચ્ચેના અંતરને $2c$ વડે, બે શિરોબિંદુઓને વચ્ચેનાં અંતરને (મુખ્ય અક્ષની લંબાઈ) $2a$ વડે અને b ને $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ વડે વ્યાખ્યાયિત કરીએ. વળી, $2b$ અનુબદ્ધ અક્ષની લંબાઈ છે.(આકૃતિ 11.30.)

અચળ $P_1F_2 - P_1F_1$ શોધવા :

આકૃતિ 11.30 માં બિંદુ P ને અનુક્રમે A અને B આગળ લેતાં,

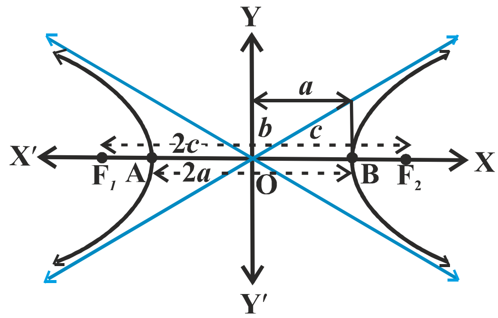
આપણને અતિવલયની વ્યાખ્યા પરથી,

$BF_1 - BF_2 = AF_2 - AF_1$ મળે. (અતિવલયની વ્યાખ્યા પરથી)

$BA + AF_1 - BF_2 = AB + BF_2 - AF_1$

અર્થાત્, $AF_1 = BF_2$

આથી, $BF_1 - BF_2 = BA + AF_1 - BF_2 = BA = 2a$



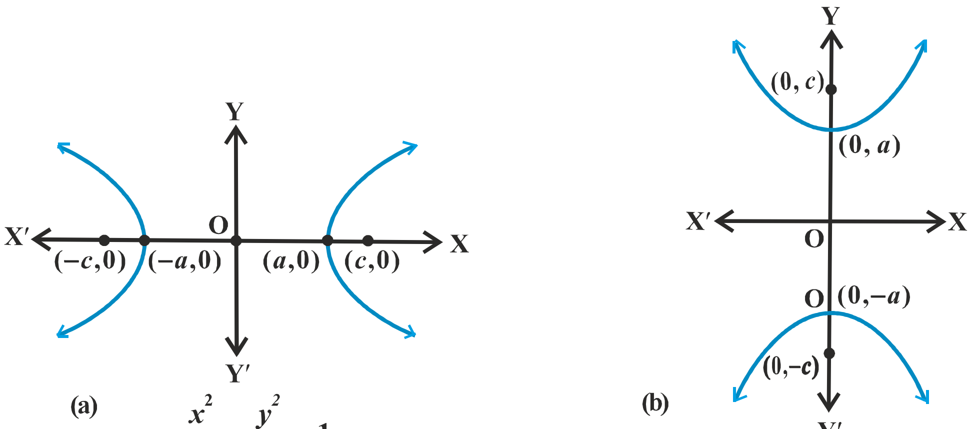
આકૃતિ 11.30

11.6.1 ઉત્કેન્દ્રતા

વ્યાખ્યા 8 : *ઉપવલયની જેમ જ ગુણોત્તર* $e = \frac{c}{a}$ *ને* ***અતિવલયની ઉત્કેન્દ્રતા*** *કહે છે.* $c \geq a$ *હોવાથી, અતિવલયની ઉત્કેન્દ્રતા 1 થી નાની ના થાય. ઉત્કેન્દ્રતાના સંદર્ભમાં, નાભિઓનું કેન્દ્રથી અંતર* ae *જેટલું હોય.*

11.6.2 અતિવલયનુ પ્રમાણિત સમીકરણ:

અતિવલયનું સૌથી સરળ સમીકરણ જ્યારે કેન્દ્ર ઊગમબિંદુ અને નાભિઓ x-અક્ષ અથવા y-અક્ષ પર હોય ત્યારે મળે. બે શક્ય આકૃતિઓ આકૃતિ 11.31 માં દર્શાવેલ છે.



$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

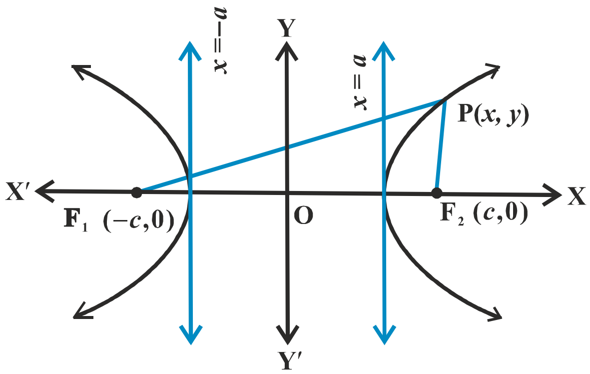
આકૃતિ 11.31

આપણે આકૃતિ 11.31(a) કે જેમાં નાભિઓ x-અક્ષ પર છે, તેવા અતિવલયનું સમીકરણ મેળવીશું.

ધારો કે નાભિઓ F_1 અને F_2 છે તથા F_1F_2ને જોડતા રેખાખંડનું મધ્યબિંદુ O છે તથા ઊગમબિંદુ O અને F_2માંથી પસાર થતી રેખા x-અક્ષની ધનદિશા O અને F_1 માંથી પસાર થતી રેખા, x-અક્ષની ઋણ દિશા છે. O માંથી પસાર થતી x-અક્ષને લંબરેખા y-અક્ષ છે. ધારો કે F_1 ના યામ $(-c,0)$ અને F_2ના યામ $(c,0)$ છે. (આકૃતિ 11.32.)

ધારો કે $P(x, y)$ અતિવલય પરનું કોઈ પણ બિંદુ છે, કે જેથી P થી નાભિનાં દૂરના અને નજીકના અંતરનો તફાવત $2a$ જેટલો થાય.

આથી, આપેલ છે કે $PF_1 - PF_2 = 2a$.



આકૃતિ 11.32

અંતર સૂત્રનો ઉપયોગ કરતાં,

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

અર્થાત્ $$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

બંને બાજુ વર્ગ કરતાં,

$$(x + c)^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x - c)^2 + y^2$$

સાદુંરૂપ આપતાં, આપણને

$$\frac{cx}{a} - a = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$ મળે.

ફરીથી વર્ગ કરી સાદું રૂપ આપતાં,

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{c^2-a^2}=1 \text{ મળે.}$$

અર્થાત્ $$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (c^2-a^2=b^2)$$

આથી, અતિવલય પરનું કોઈપણ બિંદુ $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ નું સમાધાન કરે છે.

આથી, ઊલટું, ધારો કે $0 < a < c$ માટે $P(x, y)$ ઉપરના સમીકરણનું સમાધાન કરે છે.

આથી, $$y^2 = b^2\left(\frac{x^2-a^2}{a^2}\right)$$

$$\therefore \quad PF_1 = \sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

$$= \sqrt{(x+c)^2+b^2\left(\frac{x^2-a^2}{a^2}\right)} = \left|a+\frac{c}{a}x\right| = a+\frac{c}{a}x \quad \text{કારણ કે } x > a,\ 0 < a < c$$

આ જ રીતે, $$PF_2 = \left|a-\frac{c}{a}x\right|$$

અતિવલયમાં $c > a$; અને P એ $x = a$, રેખાની જમણી બાજુ પર હોવાથી $x > a$. આથી $\frac{c}{a}x > a$.

$\therefore a-\frac{c}{a}x$ ઋણ બને. આમ $PF_2 = \frac{c}{a}x - a$.

આથી, $$PF_1 - PF_2 = a + \frac{c}{a}x - \frac{cx}{a} + a = 2a$$

વળી, નોંધો કે, જો P એ રેખા $x = -a$ ની ડાબી બાજુ પર હોય તો,

$$PF_1 = -\left(a+\frac{c}{a}x\right),\quad PF_2 = a-\frac{c}{a}x.$$

આ વિકલ્પમાં $PF_2 - PF_1 = 2a$. આથી $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ નું સમાધાન કરતું કોઈપણ બિંદુ અતિવલય પર હોય.

આમ, આપણે સાબિત કર્યું કે જેનું કેન્દ્ર (0, 0) અને જેનો મુખ્ય અક્ષ x-અક્ષ પર હોય તેવા અતિવલયનું સમીકરણ $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ થાય.

નોંધ: જે અતિવલયમાં $a = b$ હોય, તે અતિવલયને ***લંબાતિવલય*** કહેવાય.

ચર્ચા: અતિવલયના મેળવેલ સમીકરણ પરથી કહી શકાય કે, અતિવલય પરના પ્રત્યેક બિંદુ (x, y) માટે, $\frac{x^2}{a^2}=1+\frac{y^2}{b^2} \ge 1$.

$$\therefore \left|\frac{x}{a}\right| \ge 1,$$

$\therefore x \le -a$ અથવા $x \ge a$.

આથી, વક્રનો કોઈ ભાગ રેખાઓ $x = +a$ અને $x = -a$ વચ્ચે નથી. (અર્થાત્ અનુબદ્ધ અક્ષ પર કોઈ વાસ્તવિક અંતઃખંડ નથી.)

આ જ રીતે, આપણે આકૃતિ 11.31 (b) પરથી $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ મેળવી શકીએ.

આ બંને સમીકરણો અતિવલયનાં પ્રમાણિત સમીકરણો કહેવાય.

નોંધ અતિવલયોનાં પ્રમાણિત સમીકરણોમાં ઊગમબિંદુ કેન્દ્ર અને મુખ્ય અક્ષ તથા અનુબદ્ધ અક્ષ, યામાક્ષો પર હોય છે. જો કે કોઈપણ બે પરસ્પર લંબરેખાઓ મુખ્ય અક્ષ અને અનુબદ્ધ અક્ષો હોય તેવા પણ અતિવલયો શક્ય છે. તેનો અભ્યાસ ઉચ્ચ ધોરણોમાં કરીશું.

અતિવલયનાં પ્રમાણિત સમીકરણો (આકૃતિ 11.29) પરથી, આપણને નીચેનાં અવલોકનો મળે છે:

1. અતિવલય એ યામાક્ષો પ્રત્યે સંમિત છે, કારણ કે જો બિંદુ (x, y) અતિવલય પર હોય તો, બિંદુઓ $(-x, y)$, $(x, -y)$ અને $(-x, -y)$ પણ અતિવલય પર હોય છે.
2. નાભિઓ હંમેશાં મુખ્ય અક્ષ પર હોય. છેદનાં ધન પદોથી મુખ્ય અક્ષ વિશે જાણી શકાય છે.

   ઉદાહરણ તરીકે, $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ માં મુખ્ય અક્ષ x-અક્ષ પર હોય અને તેની લંબાઈ 6 છે, જ્યારે $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{16} = 1$ માં મુખ્ય અક્ષ y-અક્ષ પર હોય અને તેની લંબાઈ 10 છે. x^2નો સહગુણક ધન હોય કે y^2નો સહગુણક ધન હોય તે અનુસાર x-અક્ષ મુખ્ય અક્ષ અથવા y-અક્ષ મુખ્ય અક્ષ છે.

11.6.3 નાભિલંબ

વ્યાખ્યા 9 : *નાભિમાંથી પસાર થતો મુખ્ય અક્ષને લંબ અને જેનાં અંત્યબિંદુઓ અતિવલય પર હોય તેવો રેખાખંડ નાભિલંબ છે,*

ઉપવલયની જેમ એ બતાવવું સરળ છે કે નાભિલંબની લંબાઈ $\frac{2b^2}{a}$ *છે.*

ઉદાહરણ 14 : નીચેનાં અતિવલયો માટે નાભિઓ, શિરોબિંદુઓ, ઉત્કેન્દ્રતા અને નાભિલંબની લંબાઈ મેળવો.

(i) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ (ii) $y^2 - 16x^2 = 16$

ઉકેલ : (i) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ ને પ્રમાણિત સમીકરણ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ સાથે સરખાવતાં,

$a = 3$, $b = 4$ અને $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$

આથી, નાભિઓના યામ $(\pm 5, 0)$ અને શિરોબિંદુઓ $(\pm 3, 0)$ છે.

વળી, ઉત્કેન્દ્રતા $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{3}$. નાભિલંબની લંબાઈ $= \frac{2b^2}{a} = \frac{32}{3}$

(ii) સમીકરણને 16 વડે ભાગતાં, આપણને $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{1} = 1$ મળે.

તેને પ્રમાણિત સમીકરણ $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ સાથે સરખાવતાં,

આપણને, $a = 4$, $b = 1$ અને $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{16 + 1} = \sqrt{17}$.

આથી, નાભિઓના યામ $(0, \pm \sqrt{17})$ અને શિરોબિંદુઓ $(0, \pm 4)$ છે.

વળી, ઉત્કેન્દ્રતા $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{17}}{4}$. નાભિલંબની લંબાઈ $= \frac{2b^2}{a} = \frac{1}{2}$.

ઉદાહરણ 15 : જેનાં નાભિઓ $(0, \pm 3)$ અને શિરોબિંદુઓ $(0, \pm \frac{\sqrt{11}}{2})$ હોય તેવા અતિવલયનું સમીકરણ મેળવો.

ઉકેલ : નાભિઓ y-અક્ષ પર હોવાથી, અતિવલયનું સમીકરણ $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ થાય.

શિરોબિંદુઓ $\left(0, \pm \frac{\sqrt{11}}{2}\right)$ હોવાથી, $a = \frac{\sqrt{11}}{2}$

વળી, નાભિઓ $(0, \pm 3)$ હોવાથી $c = 3$ અને $b^2 = c^2 - a^2 = \frac{25}{4}$.

આથી, અતિવલયનું સમીકરણ

$$\frac{y^2}{\left(\frac{11}{4}\right)} - \frac{x^2}{\left(\frac{25}{4}\right)} = 1, \text{ અર્થાત્, } 100\, y^2 - 44\, x^2 = 275.$$

ઉદાહરણ 16 : જેનાં નાભિઓ $(0, \pm 12)$ અને નાભિલંબની લંબાઈ 36 હોય તેવા અતિવલયનું સમીકરણ મેળવો.

ઉકેલ : નાભિઓ $(0, \pm 12)$ હોવાથી $c = 12$ મળે.

નાભિલંબની લંબાઈ $= \frac{2b^2}{a} = 36$ પરથી $b^2 = 18a$

આથી, $c^2 = a^2 + b^2$ પરથી,

$$144 = a^2 + 18a$$

$$\therefore a^2 + 18a - 144 = 0,$$

$$\therefore a = -24, 6.$$

પરંતુ a ઋણ ના હોઈ શકે. આથી આપણે $a = 6$ લઈશું અને આથી $b^2 = 108$.

આથી, અતિવલયનું જરૂરી સમીકરણ $\frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{108} = 1$, અર્થાત્, $3y^2 - x^2 = 108$

સ્વાધ્યાય 11.4

પ્રશ્ન 1 થી 6 માં આપેલ અતિવલયો માટે નાભિઓ અને શિરોબિંદુઓના યામ, ઉત્કેન્દ્રતા અને નાભિલંબની લંબાઈ મેળવો:

1. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ **2.** $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{27} = 1$ **3.** $9y^2 - 4x^2 = 36$

4. $16x^2 - 9y^2 = 576$ **5.** $5y^2 - 9x^2 = 36$ **6.** $49y^2 - 16x^2 = 784$

પ્રશ્ન 7 થી 15 માં આપેલ શરતોનું પાલન કરતાં અતિવલયોનાં સમીકરણ મેળવો:

7. શિરોબિંદુઓ $(\pm 2, 0)$, નાભિઓ $(\pm 3, 0)$

8. શિરોબિંદુઓ $(0, \pm 5)$, નાભિઓ $(0, \pm 8)$

9. શિરોબિંદુઓ $(0, \pm 3)$, નાભિઓ $(0, \pm 5)$

10. નાભિઓ $(\pm 5, 0)$, મુખ્ય અક્ષની લંબાઈ 8

11. નાભિઓ $(0, \pm 13)$, અનુબદ્ધ અક્ષની લંબાઈ 24

12. નાભિઓ $(\pm 3\sqrt{5}, 0)$, નાભિલંબની લંબાઈ 8

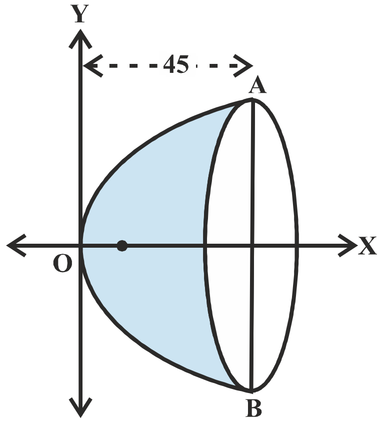
13. નાભિઓ $(\pm 4, 0)$, નાભિલંબની લંબાઈ 12

14. શિરોબિંદુઓ $(\pm 7,0)$, $e = \frac{4}{3}$

15. નાભિઓ $(0, \pm \sqrt{10})$, (2,3) માંથી પસાર થતાં

પ્રકીર્ણ ઉદાહરણો

ઉદાહરણ 17 : આકૃતિ 11.33 માં દર્શાવ્યા મુજબ પરવલયાકાર પરાવર્તકની નાભિ શિરોબિંદુથી 5 સેમી દૂર છે. જો તેની ઊંડાઇ 45 સેમી હોય તો અંતર AB શોધો. (આકૃતિ 11.33.)



આકૃતિ 11.33

ઉકેલ : શિરોબિંદુથી નાભિનું અંતર 5 સેમી હોવાથી, $a = 5$. જો ઊગમબિંદુ શિરોબિંદુ લઈએ અને પરાવર્તકને x-અક્ષની ધન દિશા પર લઈએ તો પરવલયાકાર ભાગનું સમીકરણ

$$y^2 = 4\,(5)\,x = 20\,x \text{ થાય.}$$

નોંધો કે $\qquad x = 45$

આથી, $\qquad y^2 = 900$

$\therefore\ y = \pm 30$

આથી, $AB = 2y = 2 \times 30 = 60$ સેમી

ઉદાહરણ 18 : પુલના અંત્ય ભાગે આવેલ આધારસ્તંભો વચ્ચેનું અંતર 12 મીટર છે. પુલના મધ્ય ભાગમાં વજન કેન્દ્રિત થવાથી, 3 સેમી જેટલા નીચે તરફ વળી ગયેલ પુલનો આકાર પરવલયનો છે, તો પુલ કેન્દ્રથી કેટલા અંતરે 1 સેમી જેટલો વળેલ હશે?

ઉકેલ : ધારો કે શિરોબિંદુ એ સૌથી નીચેનું બિંદુ અને અક્ષ શિરોલંબ રેખા છે. ધારો કે યામાક્ષો આકૃતિ 11.34 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણેના છે.

પરવલયનું સમીકરણ $x^2 = 4ay$ પ્રકારનું હશે. તે $\left(6, \frac{3}{100}\right)$, માંથી પસાર થાય છે.

આથી, $(6)^2 = 4a\left(\frac{3}{100}\right)$,

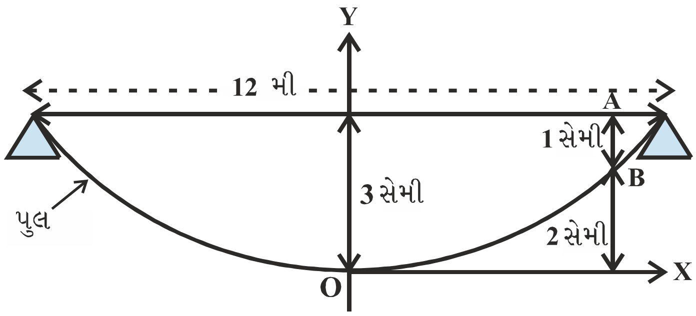
અર્થાત્, $a = \frac{36 \times 100}{12} = 300$ મી

ધારો કે પુલનો વળેલ ભાગ AB એ $\frac{1}{100}$ મી નો છે.

B ના યામ $\left(x, \frac{2}{100}\right)$ છે.

$\therefore\ x^2 = 4 \times 300 \times \frac{2}{100} = 24$

અર્થાત્ $\quad x = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$ મી

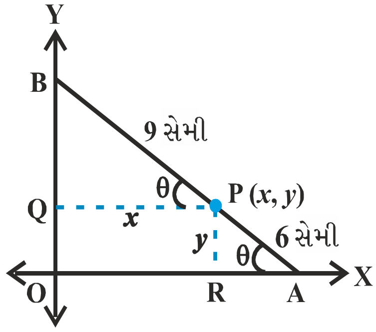


આકૃતિ 11.34

ઉદાહરણ 19 : 15 સેમી લંબાઈનો સળિયો AB યામાક્ષો પર એ રીતે મૂકેલ છે કે અંત્યબિંદુ A x-અક્ષ પર અને B y-અક્ષ પર રહે. સળિયા પર $P(x, y)$ બિંદુ એ રીતે લીધેલ છે કે AP = 6 સેમી હોય. સાબિત કરો કે P નો બિંદુગણ ઉપવલય છે.

ઉકેલ : ધારો કે આકૃતિ 11.35માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે સળિયો AB, OX સાથે θ ખૂણો બનાવે છે અને બિંદુ P (x, y) તેના પર એવું છે કે જેથી AP = 6 સેમી થાય.

AB = 15 સેમી હોવાથી, PB = 9 સેમી. Pમાંથી લંબ PQ અને PR અનુક્રમે y-અક્ષ અને x-અક્ષ પર દોરો.



આકૃતિ 11.35

Δ PBQ પરથી, $\cos\theta = \frac{x}{9}$

અને Δ PRA પરથી, $\sin\theta = \frac{y}{6}$

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ હોવાથી,

$$\left(\frac{x}{9}\right)^2 + \left(\frac{y}{6}\right)^2 = 1$$

$$\therefore \frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{36} = 1$$

આથી, P નો બિંદુગણ ઉપવલય છે.

પ્રકીર્ણ સ્વાધ્યાય 11

1. એક પરવલયાકાર પરાવર્તકનો વ્યાસ 20 સેમીનો છે અને ઊંડાઈ 5 સેમી છે. તેના નાભિના યામ શોધો.
2. એક કમાન પરવલયાકાર છે. તેનો અક્ષ શિરોલંબ છે. કમાન 10 મી ઊંચી અને પાયામાં 5 મી પહોળી છે. તે પરવલયના શિરોબિંદુથી 2 મી દૂર કેટલી પહોળી હશે?
3. તાર પર લટકતો એક સમાન ભારવાળો ઝૂલતો પુલ પરવલયાકારનો છે. શિરોલંબ તારથી પુલને ટકાવેલ સમક્ષિતિજ રસ્તો 100 મી લાંબો છે. સૌથી મોટો તાર 30 મી અને સૌથી નાનો તાર 6 મી નો છે. પુલના કેન્દ્રથી 18 મી દૂર આપેલ આધાર આપતા તારની લંબાઈ શોધો.
4. એક કમાન અર્ધઉપવલયાકારની છે તે 8મી પહોળી અને કેન્દ્ર આગળ 2 મી ઊંચી છે, તો તેના એક છેડેથી 1.5 મી અંતરે આવેલા બિંદુ આગળ કમાનની ઊંચાઈ શોધો.
5. 12 મી લંબાઈનો સળિયો એવી રીતે ખસે છે કે જેથી તેનાં અંત્યબિંદુઓ યામાક્ષો પર રહે. x-અક્ષ પરના અંત્યબિંદુથી 3 મી દૂર આવેલ સળિયા પરના બિંદુ P નો બિંદુગણ શોધો.
6. પરવલય $x^2 = 12y$ ના શિરોબિંદુ અને નાભિલંબના અંત્યબિંદુથી બનતા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ શોધો.
7. એક માણસ રમતના મેદાનમાં અંકિત કેડી પર એવી રીતે દોડે છે કે જેથી બે ધજાના દંડાના અંતરનો સરવાળો અચળ 10 મી રહે છે. જો બંને ધજાના દંડા વચ્ચેનું અંતર 8 મી હોય, તો માણસના ગતિમાર્ગનું સમીકરણ શોધો.
8. એક સમબાજુ ત્રિકોણ પરવલય $y^2 = 4ax$ માં અંતર્ગત છે, તેનું એક શિરોબિંદુ પરવલયનું શીર્ષ છે. તો ત્રિકોણની બાજુઓનાં માપ શોધો.