C_1, C_2 અને C_3, માંથી અનુક્રમે અવયવ x, y, z સામાન્ય લેતાં, આપણને

$$\Delta = \frac{xyz}{xyz}\begin{vmatrix} (y+z)^2 & x^2 & x^2 \\ y^2 & (x+z)^2 & y^2 \\ z^2 & z^2 & (x+y)^2 \end{vmatrix}$$ મળે.

$C_2 \to C_2 - C_1$, $C_3 \to C_3 - C_1$ કરતાં, આપણને

$$\Delta = \begin{vmatrix} (y+z)^2 & x^2-(y+z)^2 & x^2-(y+z)^2 \\ y^2 & (x+z)^2-y^2 & 0 \\ z^2 & 0 & (x+y)^2-z^2 \end{vmatrix}$$ મળે.

C_2 અને C_3માંથી $(x + y + z)$ અવયવ સામાન્ય લેતાં, આપણને

$$\Delta = (x+y+z)^2\begin{vmatrix} (y+z)^2 & x-(y+z) & x-(y+z) \\ y^2 & (x+z)-y & 0 \\ z^2 & 0 & (x+y)-z \end{vmatrix}$$ મળે.

$R_1 \to R_1 - (R_2 + R_3)$ કરતાં, આપણને

$$\Delta = (x+y+z)^2\begin{vmatrix} 2yz & -2z & -2y \\ y^2 & x-y+z & 0 \\ z^2 & 0 & x+y-z \end{vmatrix}$$ મળે.

$C_2 \to (C_2 + \frac{1}{y}C_1)$ અને $C_3 \to \left(C_3 + \frac{1}{z}C_1\right)$ કરતાં, આપણને

$$\Delta = (x+y+z)^2\begin{vmatrix} 2yz & 0 & 0 \\ y^2 & x+z & \frac{y^2}{z} \\ z^2 & \frac{z^2}{y} & x+y \end{vmatrix}$$ મળે.

અંતે, R_1 દ્વારા વિસ્તરણ કરતાં,

$$\begin{aligned}\Delta &= (x+y+z)^2(2yz)\,[(x+z)(x+y)-yz] \\ &= (x+y+z)^2(2yz)\,(x^2+xy+xz) \\ &= (x+y+z)^3(2xyz)\end{aligned}$$

ઉદાહરણ 33 : $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 9 & 2 & -3 \\ 6 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ ના ગુણાકારનો ઉપયોગ સમીકરણ સંહતિ

$$\begin{aligned} x - y + 2z &= 1 \\ 2y - 3z &= 1 \\ 3x - 2y + 4z &= 2 \end{aligned}$$

નો ઉકેલ મેળવવા કરો.

ઉકેલ : $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 9 & 2 & -3 \\ 6 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} -2-9+12 & 0-2+2 & 1+3-4 \\ 0+18-18 & 0+4-3 & 0-6+6 \\ -6-18+24 & 0-4+4 & 3+6-8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

આથી, $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 9 & 2 & -3 \\ 6 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

હવે, આપેલ સમીકરણ સંહતિને શ્રેણિક સ્વરૂપમાં નીચે પ્રમાણે લખી શકાય :

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

અથવા $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 9 & 2 & -3 \\ 6 & 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2+0+2 \\ 9+2-6 \\ 6+1-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

તેથી $x = 0$, $y = 5$ અને $z = 3$.

ઉદાહરણ 34 : સાબિત કરો કે $\Delta = \begin{vmatrix} a+bx & c+dx & p+qx \\ ax+b & cx+d & px+q \\ u & v & w \end{vmatrix} = (1-x^2)\begin{vmatrix} a & c & p \\ b & d & q \\ u & v & w \end{vmatrix}$

ઉકેલ : Δ પર $R_1 \to R_1 - xR_2$ કરતાં,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a(1-x^2) & c(1-x^2) & p(1-x^2) \\ ax+b & cx+d & px+q \\ u & v & w \end{vmatrix}$$

$$= (1-x^2)\begin{vmatrix} a & c & p \\ ax+b & cx+d & px+q \\ u & v & w \end{vmatrix}$$

$R_2 \to R_2 - xR_1$ કરતાં,

$$\Delta = (1-x^2)\begin{vmatrix} a & c & p \\ b & d & q \\ u & v & w \end{vmatrix}$$

પ્રકીર્ણ સ્વાધ્યાય 4

1. સાબિત કરો કે નિશ્ચાયક $\begin{vmatrix} x & \sin\theta & \cos\theta \\ -\sin\theta & -x & 1 \\ \cos\theta & 1 & x \end{vmatrix}$ નું મૂલ્ય θ થી મુક્ત છે.

2. નિશ્ચાયકનું વિસ્તરણ કર્યા સિવાય સાબિત કરો : $\begin{vmatrix} a & a^2 & bc \\ b & b^2 & ca \\ c & c^2 & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} \cos\alpha\cos\beta & \cos\alpha\sin\beta & -\sin\alpha \\ -\sin\beta & \cos\beta & 0 \\ \sin\alpha\cos\beta & \sin\alpha\sin\beta & \cos\alpha \end{vmatrix}$ નું મૂલ્ય શોધો.

4. જો a, b અને c વાસ્તવિક સંખ્યાઓ હોય, અને

$$\Delta = \begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ c+a & a+b & b+c \\ a+b & b+c & c+a \end{vmatrix} = 0 \text{ હોય,}$$

તો સાબિત કરો કે $a + b + c = 0$ અથવા $a = b = c$.

5. શૂન્યેતર a માટે સમીકરણ $\begin{vmatrix} x+a & x & x \\ x & x+a & x \\ x & x & x+a \end{vmatrix} = 0$ ઉકેલો.

6. સાબિત કરો કે $\begin{vmatrix} a^2 & bc & ac+c^2 \\ a^2+ab & b^2 & ac \\ ab & b^2+bc & c^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2$

7. જો $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -15 & 6 & -5 \\ 5 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ અને $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ તો $(AB)^{-1}$ શોધો.

8. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ માટે ચકાસો કે (i) $[adj\ A]^{-1} = adj\ (A^{-1})$ (ii) $(A^{-1})^{-1} = A$.

9. $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$ નું મૂલ્ય શોધો.

10. $\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x+y & y \\ 1 & x & x+y \end{vmatrix}$ નું મૂલ્ય શોધો.

પ્રશ્નો 11 થી 15 માં નિશ્ચાયકના ગુણધર્મનો ઉપયોગ કરી સાબિત કરો કે,

11. $\begin{vmatrix} \alpha & \alpha^2 & \beta+\gamma \\ \beta & \beta^2 & \gamma+\alpha \\ \gamma & \gamma^2 & \alpha+\beta \end{vmatrix} = (\beta - \gamma)(\gamma - \alpha)(\alpha - \beta)(\alpha + \beta + \gamma)$

12. $\begin{vmatrix} x & x^2 & 1+px^3 \\ y & y^2 & 1+py^3 \\ z & z^2 & 1+pz^3 \end{vmatrix} = (1 + pxyz)(x - y)(y - z)(z - x)$

13. $\begin{vmatrix} 3a & -a+b & -a+c \\ -b+a & 3b & -b+c \\ -c+a & -c+b & 3c \end{vmatrix} = 3(a + b + c)(ab + bc + ca)$

14. $\begin{vmatrix} 1 & 1+p & 1+p+q \\ 2 & 3+2p & 4+3p+2q \\ 3 & 6+3p & 10+6p+3q \end{vmatrix} = 1$

15. $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & \cos(\alpha+\delta) \\ \sin\beta & \cos\beta & \cos(\beta+\delta) \\ \sin\gamma & \cos\gamma & \cos(\gamma+\delta) \end{vmatrix} = 0$

16. નીચેની સમીકરણ સંહતિનો ઉકેલ મેળવો :

$$\frac{2}{x} + \frac{3}{y} + \frac{10}{z} = 4$$

$$\frac{4}{x} - \frac{6}{y} + \frac{5}{z} = 1$$

$$\frac{6}{x} + \frac{9}{y} - \frac{20}{z} = 2$$

પ્રશ્નો 17 તથા 18 માં વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલ વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો :

17. જો a, b, c સમાંતર શ્રેણીમાં હોય, તો નિશ્ચાયક

$$\begin{vmatrix} x+2 & x+3 & x+2a \\ x+3 & x+4 & x+2b \\ x+4 & x+5 & x+2c \end{vmatrix} = \text{..........}$$

(A) 0 (B) 1 (C) x (D) $2x$

18. જો x, y, z શૂન્યેતર વાસ્તવિક સંખ્યાઓ હોય, તો $A = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix}$ નો વ્યસ્ત શ્રેણિક ....

(A) $\begin{bmatrix} x^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & y^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & z^{-1} \end{bmatrix}$

(B) $xyz \begin{bmatrix} x^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & y^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & z^{-1} \end{bmatrix}$

(C) $\frac{1}{xyz} \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix}$

(D) $\frac{1}{xyz} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

19. જો $0 \le \theta \le 2\pi$ માટે $A = \begin{bmatrix} 1 & \sin\theta & 1 \\ -\sin\theta & 1 & \sin\theta \\ -1 & -\sin\theta & 1 \end{bmatrix}$ હોય, તો

(A) $det\ (A) = 0$ (B) $det\ (A) \in (2, \infty)$

(C) $det\ (A) \in (2, 4)$ (D) $det\ (A) \in [2, 4]$

સારાંશ

- શ્રેણિક $A = [a_{11}]_{1 \times 1}$ નો નિશ્ચાયક $|a_{11}| = a_{11}$ છે.
- શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ નો નિશ્ચાયક $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ છે.
- શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$ નો નિશ્ચાયક (R_1 દ્વારા વિસ્તરણ કરતાં)

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \text{ છે.}$$

કોઈ પણ ચોરસ શ્રેણિક A માટે, |A| નીચેના ગુણધર્મોનું સમાધાન કરે છે :

- $|A'| = |A|$, જ્યાં A' એ A નો પરિવર્ત શ્રેણિક છે.
- જો આપણે નિશ્ચાયકની કોઈ પણ બે હાર (અથવા સ્તંભ)ની અદલબદલ કરીએ, તો નિશ્ચાયકનું મૂલ્ય ચિહ્નમાં બદલાય છે.
- નિશ્ચાયકની કોઈ પણ બે હાર (અથવા સ્તંભ) ના અનુરૂપ ઘટકો સમાન અથવા સમપ્રમાણમાં હોય, તો નિશ્ચાયકનું મૂલ્ય શૂન્ય થાય.
- જો આપણે નિશ્ચાયકની એક હાર અથવા એક સ્તંભના પ્રત્યેક ઘટકને અચળ k વડે ગુણીએ, તો નિશ્ચાયકનું મૂલ્ય k વડે ગુણાય છે.
- નિશ્ચાયકને k વડે ગુણવાનો અર્થ માત્ર એક હાર (અથવા એક સ્તંભ) ના ઘટકોને k વડે ગુણવા તેવો થાય છે.
- જો $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$, તો $|kA| = k^3|A|$
- જો નિશ્ચાયકની એક હાર (અથવા એક સ્તંભ) ના ઘટકોને બે અથવા વધારે ઘટકોના સરવાળા તરીકે દર્શાવી શકાય, તો આપેલા નિશ્ચાયકને બે કે વધારે નિશ્ચાયકના સરવાળા તરીકે દર્શાવી શકાય.
- જો નિશ્ચાયકની એક હાર અથવા એક સ્તંભના પ્રત્યેક ઘટકમાં અન્ય હાર અથવા અન્ય સ્તંભના અનુરૂપ ઘટકોના સમગુણિત ઉમેરવામાં આવે, તો નિશ્ચાયકનું મૂલ્ય તેનું તે જ રહે છે.
- (x_1, y_1), (x_2, y_2) અને (x_3, y_3) શિરોબિંદુવાળા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ $\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$ ના માનાંક જેટલું થાય છે.
- શ્રેણિક A ના નિશ્ચાયકના ઘટક a_{ij}નો ઉપનિશ્ચાયક એ iમી હાર અને jમા સ્તંભને દૂર કરતાં મળતો નિશ્ચાયક છે અને તેને M_{ij} વડે દર્શાવાય છે.

- a_{ij} નો સહઅવયવ $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ થી મળે છે.
- હાર (અથવા સ્તંભ)ના ઘટકોને તેમના અનુરૂપ સહઅવયવો વડે ગુણીને ઉમેરતાં શ્રેણિક A ના નિશ્ચાયકનું મૂલ્ય મળે છે. ઉદાહરણ તરીકે,

  $|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$
- જો એક હાર (અથવા સ્તંભ) ના ઘટકોને કોઈ બીજી હાર (અથવા સ્તંભ)ના અનુરૂપ સહઅવયવ વડે ગુણી, પછી તેઓનો સરવાળો કરતાં સરવાળો શૂન્ય થાય છે. ઉદાહરણ તરીકે $a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} = 0$.
- જો $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ તો $adj A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$, જ્યાં A_{ij} એ a_{ij} નો સહઅવયવ છે.
- $A(adj A) = (adj A)A = |A| I$, જ્યાં A એ n કક્ષાવાળો ચોરસ શ્રેણિક છે.
- જો ચોરસ શ્રેણિક A માટે $|A| = 0$ અથવા $|A| \neq 0$ હોય, તદનુસાર A અસામાન્ય અથવા સામાન્ય શ્રેણિક છે.
- જો B ચોરસ શ્રેણિક હોય અને $AB = BA = I$, તો B ને A નો વ્યસ્ત શ્રેણિક કહે છે. વળી $A^{-1} = B$ અથવા $B^{-1} = A$ અને આથી $(A^{-1})^{-1} = A$.
- ચોરસ શ્રેણિક A ને વ્યસ્ત શ્રેણિક હોય, તો અને તો જ A સામાન્ય છે.
- $A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj(A)$
- જો $a_1x + b_1y + c_1z = d_1$

  $a_2x + b_2y + c_2z = d_2$

  $a_3x + b_3y + c_3z = d_3$,

  તો આ સમીકરણોને $AX = B$ પ્રમાણે લખી શકાય. જ્યાં

  $$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ અને } B = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}.$$
- જો $|A| \neq 0$ તો, સમીકરણ $AX = B$ નો અનન્ય ઉકેલ $X = A^{-1}B$ થી મળે છે.
- સમીકરણોની સંહતિનો ઉકેલ અસ્તિત્વ ધરાવે છે અથવા ઉકેલ નથી તે પ્રમાણે સમીકરણ સંહતિ સુસંગત છે અથવા સુસંગત નથી.
- શ્રેણિક સમીકરણ $AX = B$ ના ચોરસ શ્રેણિક A માટે,

  (i) $|A| \neq 0$ તો ઉકેલ અનન્ય છે.

  (ii) $|A| = 0$ અને $(adj A)B \neq O$, તો ઉકેલનું અસ્તિત્વ નથી.

  (iii) $|A| = 0$ અને $(adj A)B = O$, તો સંહતિ સુસંગત નથી અથવા સુસંગત હોઈ શકે.

Historical Note

The Chinese method of representing the coefficients of the unknowns of several linear equations by using rods on a calculating board naturally led to the discovery of simple method of elimination. The arrangement of rods was precisely that of the numbers in a determinant. The Chinese, therefore, early developed the idea of subtracting columns and rows as in simplification of a determinant 'Mikami, China, pp 30, 93.

Seki Kowa, the greatest of the Japanese Mathematicians of seventeenth century in his work '***Kai Fukudai no Ho***' in C.E. 1683 showed that he had the idea of determinants and of their expansion. But he used this device only in eliminating a quantity from two equations and not directly in the solution of a set of simultaneous linear equations. '***T. Hayashi***, "***The Fakudoi and Determinants in Japanese Mathematics,***" in the proc. of the Tokyo Math. Soc., V.

Vandermonde was the first to recognise determinants as independent functions. He may be called the formal founder. ***Laplace*** (C.E. 1772), gave general method of expanding a determinant in terms of its complementary minors. In C.E. 1773 ***Lagrange*** treated determinants of the second and third orders and used them for purpose other than the solution of equations. In C.E. 1801, ***Gauss*** used determinants in his theory of numbers.

The next great contributor was ***Jacques - Philippe - Marie Binet***, (C.E. 1812) who stated the theorem relating to the product of two matrices of m columns and n rows, which for the special case of $m = n$ reduces to the multiplication theorem.

Also on the same day, ***Cauchy*** (C.E. 1812) presented one on the same subject. He used the word '***determinant***' in its present sense. He gave the proof of multiplication theorem more satisfactory than ***Binet's***.

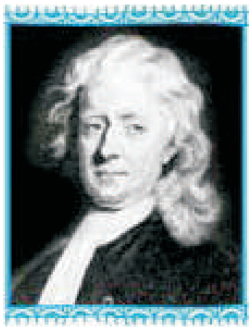
The greatest contributor to the theory was ***Carl Gustav Jacob Jacobi***, after this the word determinant received its final acceptance.

પ્રકરણ **5**

સાતત્ય અને વિકલનીયતા

❖ *The whole of science is nothing more than a refinement of everyday thinking.” — ALBERT EINSTEIN* ❖

5.1 પ્રાસ્તાવિક



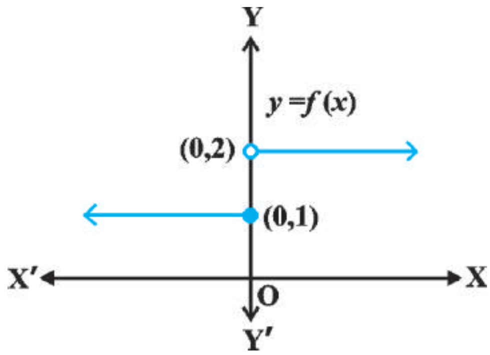
Sir Issac Newton
(C.E. 1642 - C.E. 1727)

આ પ્રકરણના અભ્યાસ માટે આપણે ધોરણ 11માં વિધેયોનો જે પરિચય કર્યો હતો. તેમને ઊંડાણથી સમજવા જરૂરી છે. આપણે બહુપદીય વિધેયો અને ત્રિકોણમિતીય વિધેયોના વિકલનનો અભ્યાસ કર્યો. આ પ્રકરણમાં આપણે ***સાતત્ય (continuity), વિકલનીયતા (differentiability)*** તથા તેમની વચ્ચેના સંબંધ એવી ખૂબ જ અગત્યની સંકલ્પનાઓનો અભ્યાસ કરીશું. વળી, આપણે ***ત્રિકોણમિતીય પ્રતિવિધેયો*** ના વિકલનનો પણ અભ્યાસ કરીશું. વધુમાં, આપણે ***ઘાતાંકીય વિધેય (exponential)*** અને ***લઘુગણકીય વિધેયો (logarithmic)*** જેવાં નવાં વિધેયો પ્રસ્તુત કરીશું. આ વિધેયો વિકલનની સક્ષમ રીત તરફ દોરે છે. ***વિકલનના કલનગણિત (differential calculus)*** દ્વારા આપણે કેટલાંક ભૌમિતિક પરિણામો સાહજિક રીતે સમજીશું. આ પ્રક્રિયામાં, આપણે આગળ વધતાં કેટલાક મૂળભૂત પ્રમેયોનો પણ અભ્યાસ કરીશું.

5.2 સાતત્ય

સાતત્યની સંકલ્પના અનુભવી શકાય તે માટે આ વિભાગની શરૂઆત બે અનૌપચારિક ઉદાહરણોથી કરીશું. વિધેય

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0 \\ 2, & x > 0 \end{cases}$$ નો વિચાર કરો.



આકૃતિ 5.1

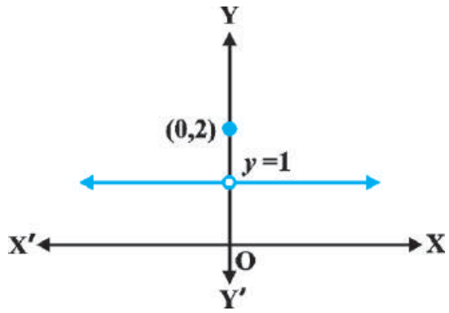
આ વિધેય ખરેખર ***વાસ્તવિક રેખા (real line)*** પરના પ્રત્યેક બિંદુ માટે વ્યાખ્યાયિત છે. આ વિધેયનો આલેખ આકૃતિ 5.1માં દર્શાવેલ છે. આલેખ પરથી જોઈ શકાય કે X-અક્ષ પરના $x = 0$ સિવાયના 0 ની નજીક પાસપાસેની સંખ્યાઓ માટે મળતાં મૂલ્યો એકબીજાની નજીક હશે. 0 ની નજીક પરંતુ ડાબી બાજુની સંખ્યાઓ જેવી કે $-0.1, -0.01, -0.001$ માટે વિધેયનું મૂલ્ય 1 છે, જ્યારે 0 થી નજીક પરંતુ જમણી બાજુની સંખ્યાઓ જેવી કે $0.1, 0.01, 0.001$ માટે વિધેયનું મૂલ્ય 2 છે. આપણે એ પણ જોઈએ કે વિધેયનું $x = 0$

આગળનું મૂલ્ય તેના ડાબી બાજુના લક્ષ જેટલું છે. ડાબી તથા જમણી બાજુના લક્ષની ભાષાનો ઉપયોગ કરતાં આપણે કહી શકીએ કે વિધેય f નું 0 માટે ડાબી બાજુનું લક્ષ 1 અને જમણી બાજુનું લક્ષ 2 છે. આથી, ડાબી તથા જમણી બાજુનાં લક્ષ સમાન નથી. આપણે એ પણ જોઈએ કે, વિધેયનું $x = 0$ આગળનું મૂલ્ય તેના ડાબી બાજુના લક્ષ જેટલું છે. આપણે નોંધીએ કે જો આ વિધેયનો આલેખ મુક્તહસ્ત રીતે દોરવાનો પ્રયત્ન કરીએ તો કાગળના સમતલમાં પેન ઉઠાવ્યા વગર તે શક્ય ના બને. ખરેખર તો આપણને ડાબી બાજુથી O તરફ આવતાં પેન ઉઠાવવી પડે. આથી આ 0 પાસે ***સતત ન*** હોય તેવા વિધેયનું ઉદાહરણ છે.

હવે, આપણે $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{જો } x \neq 0 \\ 2, & \text{જો } x = 0 \end{cases}$

દ્વારા વ્યાખ્યાયિત વિધેયનો વિચાર કરીશું.

આ વિધેય પણ વાસ્તવિક રેખાના પ્રત્યેક બિંદુએ વ્યાખ્યાયિત છે. $x = 0$ આગળ ડાબી તથા જમણી બાજુનાં લક્ષ સમાન છે અને કિંમત 1 છે. પરંતુ વિધેયનું $x = 0$ આગળ મૂલ્ય 2 છે. તે જમણી અને ડાબી બાજુનાં લક્ષ જેટલું નથી. વળી, આપણે એ પણ નોંધીએ કે, વિધેયનો આલેખ પેન ઉઠાવ્યા વગર દોરવો શક્ય નથી. આથી, આ પણ $x = 0$ આગળ સતત ના હોય તેવા વિધેયનું ઉદાહરણ છે.



આકૃતિ 5.2

સાહજિક રીતે, આપણે કહી શકીએ કે જે વિધેયનો આલેખ નિશ્ચિત બિંદુ આસપાસ કાગળના સમતલમાં પેન ઉઠાવ્યા વગર દોરી શકીએ તે વિધેયને તે નિશ્ચિત બિંદુ આગળ સતત છે તેમ કહેવાય.

આ વાત ગાણિતિક રીતે નીચે પ્રમાણે દર્શાવી શકાય :

વ્યાખ્યા 1 : ધારો કે, f એ વાસ્તવિક સંખ્યાના કોઈ ઉપગણ પર વ્યાખ્યાયિત વાસ્તવિક વિધેય છે અને c એ f ના પ્રદેશનું કોઈ બિંદુ છે.

જો $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$ હોય, તો f એ c આગળ સતત છે તેમ કહેવાય.

વ્યાપક રીતે, જો ડાબી બાજુનું લક્ષ, જમણી બાજુનું લક્ષ અને $x = c$ આગળ વિધેયના મૂલ્યનું અસ્તિત્વ હોય અને તમામ મૂલ્યો સમાન હોય, તો વિધેય $x = c$ આગળ સતત છે તેમ કહેવાય. યાદ કરો કે જો ડાબી બાજુ અને જમણી બાજુના $x = c$ આગળના લક્ષનાં મૂલ્યો સમાન હોય, તો આ સમાન મૂલ્યો વિધેયનું $x = c$ આગળનું લક્ષ કહેવાય. આમ, આપણે સાતત્યની વ્યાખ્યા નીચે પ્રમાણે પણ આપી શકીએ :

જો વિધેય $x = c$ આગળ વ્યાખ્યાયિત હોય અને જો વિધેય fનું $x = c$ આગળનું મૂલ્ય, વિધેયના x એ cને અનુલક્ષે ત્યારે મળતા લક્ષના મૂલ્ય જેટલું હોય તો વિધેય f, $x = c$ આગળ સતત છે એમ કહેવાય.

જો f એ c આગળ સતત ના હોય, તો આપણે f ને c આગળ અસતત કહીશું અને c ને વિધેય f માટેનું અસાતત્યનું બિંદુ કહીશું.

ઉદાહરણ 1 : વિધેય $f(x) = 2x + 3$ નું $x = 1$ આગળ સાતત્ય ચકાસો.

ઉકેલ : આપણે પ્રથમ નોંધીએ કે વિધેય f એ $x = 1$ આગળ વ્યાખ્યાયિત છે અને તેનું મૂલ્ય 5 છે. હવે આપણે વિધેયનું $x = 1$ આગળ લક્ષ શોધીએ. સ્પષ્ટ છે કે,

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} (2x + 3) = 2(1) + 3 = 5$$

$$\therefore \quad \lim_{x \to 1} f(x) = 5 = f(1)$$

આથી, f, $x = 1$ આગળ સતત છે.

ઉદાહરણ 2 : વિધેય $f(x) = x^2$, $x = 0$ આગળ સતત છે કે નહિ તે ચકાસો.

ઉકેલ : આપણે પ્રથમ નોંધીએ કે વિધેય $x = 0$ આગળ વ્યાખ્યાયિત છે અને તેનું મૂલ્ય ત્યાં 0 છે. હવે, આપણે વિધેયનું $x = 0$ આગળ લક્ષ શોધીએ. સ્પષ્ટ છે કે,

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} x^2 = 0^2 = 0$$

$$\therefore \quad \lim_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$$

આથી, f એ $x = 0$ આગળ સતત છે.

ઉદાહરણ 3 : વિધેય $f(x) = |x|$ નું $x = 0$ આગળનું સાતત્ય ચર્ચો.

ઉકેલ : વ્યાખ્યા પ્રમાણે $f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$

સ્પષ્ટ છે કે, વિધેય f, $x = 0$ આગળ વ્યાખ્યાયિત છે અને $f(0) = 0$. fનું 0 આગળ ડાબી બાજુનું લક્ષ

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (-x) = 0$$

આ જ રીતે, f નું 0 આગળ જમણી બાજુનું લક્ષ

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x = 0$$

આમ, $x = 0$ આગળ ડાબી તથા જમણી બાજુનાં લક્ષનાં મૂલ્યો વિધેયના $x = 0$ આગળના મૂલ્યને સમાન છે. આથી, f એ $x = 0$ આગળ સતત છે.

ઉદાહરણ 4 : સાબિત કરો કે વિધેય f માટે,

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 3, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

હોય, તો f એ $x = 0$ આગળ સતત નથી.

ઉકેલ : વિધેય $x = 0$ આગળ વ્યાખ્યાયિત છે અને $x = 0$ આગળ તેનું મૂલ્ય 1 છે. જ્યારે $x \neq 0$ હોય ત્યારે વિધેય બહુપદી છે.

આથી, $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} (x^3 + 3) = 0^3 + 3 = 3$

આમ, fના $x = 0$ આગળના લક્ષનું મૂલ્ય $f(0)$ ને સમાન નથી. આપણે એ પણ નોંધીએ કે આ વિધેય માત્ર $x = 0$ આગળ જ અસતત છે.

ઉદાહરણ 5 : ***અચળ વિધેય (constant function)***, $f(x) = k$, કયા બિંદુ આગળ સતત છે તે ચકાસો.

ઉકેલ : આપેલ વિધેય પ્રત્યેક વાસ્તવિક સંખ્યા માટે વ્યાખ્યાયિત છે અને વ્યાખ્યા પ્રમાણે, પ્રત્યેક વાસ્તવિક સંખ્યા માટે તેનું મૂલ્ય k છે. ધારો કે c કોઈ વાસ્તવિક સંખ્યા છે.

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} k = k$$

હવે, કોઈ પણ વાસ્તવિક સંખ્યા c માટે, $f(c) = k = \lim_{x \to c} f(x)$ છે. આથી, વિધેય f પ્રત્યેક વાસ્તવિક સંખ્યા માટે સતત છે.

ઉદાહરણ 6 : સાબિત કરો કે વાસ્તવિક સંખ્યાઓ માટે વ્યાખ્યાયિત *તદેવ વિધેય (identity function)* $f(x) = x$ પ્રત્યેક વાસ્તવિક સંખ્યા માટે સતત છે.

ઉકેલ : સ્પષ્ટ છે કે વિધેય પ્રત્યેક વાસ્તવિક સંખ્યા માટે વ્યાખ્યાયિત છે અને પ્રત્યેક વાસ્તવિક સંખ્યા c માટે $f(c) = c$ છે.

વળી, $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} x = c$

આમ, $\lim_{x \to c} f(x) = c = f(c)$ અને આથી, તદેવ વિધેય પ્રત્યેક વાસ્તવિક સંખ્યા માટે સતત છે.

આપેલ બિંદુએ વિધેયના સાતત્યની વ્યાખ્યા પરથી આપણે આ વ્યાખ્યાનું વિધેયના પ્રદેશમાં સાતત્ય માટે વિસ્તૃતીકરણ કરીશું.

વ્યાખ્યા 2 : *જો વાસ્તવિક વિધેય f તેના પ્રદેશ પરના પ્રત્યેક બિંદુએ સતત હોય, તો f સતત વિધેય કહેવાય.*

આ વ્યાખ્યા થોડા વિસ્તારથી સમજવાની જરૂર છે. ધારો કે વિધેય f સંવૃત અંતરાલ $[a, b]$ પર વ્યાખ્યાયિત છે, તો f ના સાતત્ય માટે તે અંત્યબિંદુઓ a તથા b અને $[a, b]$ પરના પ્રત્યેક બિંદુએ સતત હોય તે જરૂરી છે. fના a આગળના સાતત્યનો અર્થ

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

અને fના b આગળના સાતત્યનો અર્થ

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$$

જુઓ કે $\lim_{x \to a^-} f(x)$ અને $\lim_{x \to b^+} f(x)$ અર્થહીન છે.

આ વ્યાખ્યાના પરિણામ સ્વરૂપ, જો f માત્ર એક બિંદુ આગળ વ્યાખ્યાયિત હોય, તો તે એ બિંદુએ સતત છે અર્થાત્ જો f નો પ્રદેશ એકાકી (singleton) હોય, તો f સતત વિધેય છે.

ઉદાહરણ 7 : શું વિધેય $f(x) = |x|$ સતત વિધેય છે ?

ઉકેલ : આપણે f ને નીચે પ્રમાણે લખી શકીએ :

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$

ઉદાહરણ 3 પરથી, આપણે કહી શકીએ કે f એ $x = 0$ આગળ સતત છે.

ધારો કે, c વાસ્તવિક સંખ્યા છે તથા $c < 0$. $f(c) = -c$. (કેમ ?)

વળી, $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} (-x) = -c$

$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$, હોવાથી f પ્રત્યેક ઋણ વાસ્તવિક સંખ્યા માટે સતત છે.

હવે ધારો કે c ધન વાસ્તવિક સંખ્યા છે. હવે, $f(c) = c$.

વળી, $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \lim\limits_{x \to c} x = c$ (કેમ ?)

$\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$ હોવાથી, f પ્રત્યેક ધન વાસ્તવિક સંખ્યા માટે સતત છે.

$\therefore$ આમ f એ તમામ વાસ્તવિક સંખ્યા આગળ સતત છે.

ઉદાહરણ 8 : વિધેય $f(x) = x^3 + x^2 - 1$ ના સાતત્યની ચર્ચા કરો.

ઉકેલ : સ્પષ્ટ છે કે f પ્રત્યેક વાસ્તવિક સંખ્યા c પર વ્યાખ્યાયિત છે અને તેની કિંમત $f(c) = c^3 + c^2 - 1$ છે.

વળી, આપણે જાણીએ છીએ કે,

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} (x^3 + x^2 - 1) = c^3 + c^2 - 1$$

આમ, $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$ અને આથી f પ્રત્યેક વાસ્તવિક સંખ્યા પર સતત છે.

અર્થાત્ f સતત વિધેય છે.

ઉદાહરણ 9 : શૂન્યેતર x માટે વિધેય $f(x) = \dfrac{1}{x}$ ના સાતત્યની ચર્ચા કરો.

ઉકેલ : કોઈ એક શૂન્યેતર વાસ્તવિક સંખ્યા c નિશ્ચિત કરો.

હવે, $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \lim\limits_{x \to c} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{c}$. વળી, $c \neq 0$ હોવાથી, $f(c) = \dfrac{1}{c}$

આમ, $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$ અને આથી f તેના પ્રદેશ પરના પ્રત્યેક બિંદુએ સતત છે. આથી, f સતત વિધેય છે.

હવે, આપણે *અનંતની* સંકલ્પના સમજવાનો પ્રયત્ન કરીએ. આપણે તેના માટે $f(x) = \dfrac{1}{x}$ નું $x = 0$ આગળ વિશ્લેષણ કરીશું. તેના માટે આપણે 0 ની નજીકની વાસ્તવિક સંખ્યાઓ માટે વિધેયનાં મૂલ્યો શોધવાની જાણીતી રીતનો અભ્યાસ કરીશું. આવશ્યક રીતે આપણે f નું 0 ની જમણી બાજુનું લક્ષ શોધીશું. તેનું કોષ્ટક નીચે આપેલ છે : (કોષ્ટક 5.1)

કોષ્ટક 5.1

x	1	0.3	0.2	$0.1 = 10^{-1}$	$0.01 = 10^{-2}$	$0.001 = 10^{-3}$	10^{-n}
$f(x)$	1	3.333...	5	10	$100 = 10^2$	$1000 = 10^3$	10^n

આપણે જોઈશું કે જેમ x એ 0 ને જમણી બાજુથી અનુલક્ષે તેમ વિધેય $f(x)$ નું મૂલ્ય બહુ ઝડપથી વધે છે. આ વાતને બીજી રીતે કહીએ તો, 0 ની ખૂબ જ નજીકની વાસ્તવિક સંખ્યા પસંદ કરીને f નું મૂલ્ય કોઈ પણ આપેલ સંખ્યા કરતાં બહુ મોટું બનાવી શકાય.

આને સંકેતમાં $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ એમ લખીશું.

($f(x)$ નું 0 આગળ જમણી બાજુનું લક્ષ ધન અનંત છે, તેમ વંચાય.) અહીં, આપણે સ્પષ્ટ કરીશું કે $+\infty$ એ કોઈ વાસ્તવિક સંખ્યા નથી અને આથી fના જમણી બાજુના લક્ષનું અસ્તિત્વ નથી. (વાસ્તવિક સંખ્યા તરીકે)

આ જ રીતે, fનું 0 આગળ ડાબી બાજુનું લક્ષ શોધી શકાય. નીચેનું કોષ્ટક સ્વયંસ્પષ્ટ છે :

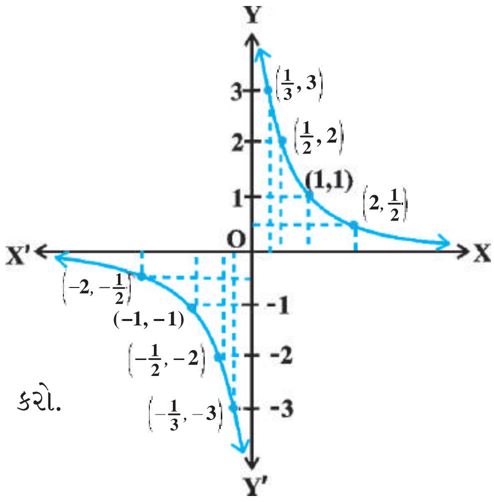
કોષ્ટક 5.2

x	-1	-0.3	-0.2	-10^{-1}	-10^{-2}	-10^{-3}	-10^{-n}
$f(x)$	-1	$-3.333...$	-5	-10	-10^2	-10^3	-10^n

કોષ્ટક 5.2 પરથી આપણે તારવી શકીએ કે, 0 ની ખૂબ જ નજીકની ઋણ વાસ્તવિક સંખ્યા પસંદ કરી $f(x)$ નું મૂલ્ય કોઈ પણ આપેલ સંખ્યા કરતાં નાનું બનાવી શકાય. સંકેતમાં,

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$$ એમ લખીશું.

(આને $f(x)$ નું 0 આગળ ડાબી બાજુનું લક્ષ ઋણ અનંત છે, તેમ વંચાય.) ફરીથી આપણે સ્પષ્ટ કરીશું કે $-\infty$ એ કોઈ વાસ્તવિક સંખ્યા નથી અને આથી fના 0 આગળ ડાબી બાજુના લક્ષનું અસ્તિત્વ નથી. (વાસ્તવિક સંખ્યા તરીકે) આકૃતિ 5.3માં આપેલ વાસ્તવિક વિધેયનો આલેખ ઉપર આપેલ તથ્યોનું ભૌમિતિક નિરૂપણ છે.



આકૃતિ 5.3

ઉદાહરણ 10 : નીચે આપેલ વ્યાખ્યાયિત વિધેય fના સાતત્યની ચર્ચા કરો.

$$f(x) = \begin{cases} x+2, & x \le 1 \\ x-2, & x > 1 \end{cases}$$

ઉકેલ : વિધેય f વાસ્તવિક રેખા પરના પ્રત્યેક બિંદુએ વ્યાખ્યાયિત છે.

વિકલ્પ 1 : જો $c < 1$ તો $f(c) = c + 2$

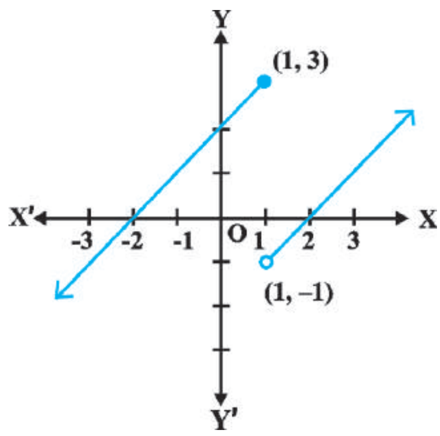
$$\therefore \quad \lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} (x + 2) = c + 2$$

આમ, f એ 1 કરતાં નાની પ્રત્યેક વાસ્તવિક સંખ્યા માટે સતત છે.

વિકલ્પ 2 : જો $c > 1$ તો $f(c) = c - 2$

$$\therefore \quad \lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} (x - 2) = c - 2 = f(c)$$

આમ, f એ 1 કરતાં મોટી પ્રત્યેક વાસ્તવિક સંખ્યા માટે સતત છે.



આકૃતિ 5.4

વિકલ્પ 3 : જો $c = 1$ તો $x = 1$ આગળ f નું ડાબી બાજુનું લક્ષ.

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (x + 2) = 1 + 2 = 3$$ છે

અને $x = 1$ આગળ f નું જમણી બાજુનું લક્ષ.

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (x - 2) = 1 - 2 = -1$$

આમ, fના બાજુના ડાબી તથા જમણી બાજુનાં લક્ષનાં મૂલ્યો સમાન નથી. આમ, f એ $x = 1$ આગળ સતત નથી. આમ, f એક માત્ર $x = 1$ આગળ અસતત છે. વિધેયનો આલેખ આકૃતિ 5.4માં આપેલ છે.

ઉદાહરણ 11 : નીચે આપેલ વિધેય f માટે જ્યાં તે અસતત હોય એવાં તમામ બિંદુઓ શોધો.

$$f(x) = \begin{cases} x+2, & x < 1 \\ 0, & x = 1 \\ x-2, & x > 1 \end{cases}$$

ઉકેલ : ઉપરના ઉદાહરણની જેમ $x = 1$ સિવાયની તમામ વાસ્તવિક સંખ્યાઓ માટે f સતત છે.

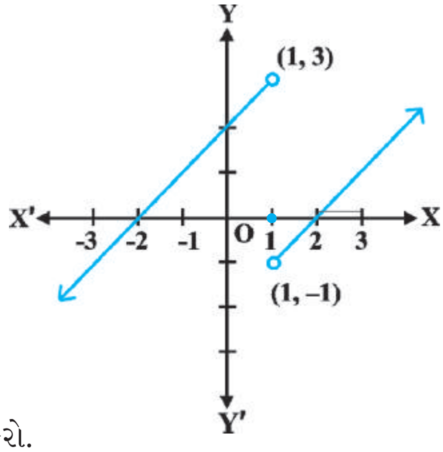
$x = 1$ આગળ f નું ડાબી બાજુનું લક્ષ

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (x + 2) = 1 + 2 = 3$$

અને $x = 1$ આગળ fનું જમણી બાજુનું લક્ષ

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (x - 2) = 1 - 2 = -1$$

આમ, $x = 1$ આગળ fના ડાબી તથા જમણી બાજુનાં લક્ષનાં મૂલ્યો અસમાન છે. આથી, f માત્ર એક જ બિંદુ $x = 1$ આગળ અસતત છે. વિધેયનો આલેખ આકૃતિ 5.5માં આપેલ છે.



આકૃતિ 5.5

ઉદાહરણ 12 : નીચે આપેલ વ્યાખ્યાયિત વિધેય f માટે સાતત્યની ચર્ચા કરો.

$$f(x) = \begin{cases} x+2, & x<0 \\ -x+2, & x>0 \end{cases}$$

ઉકેલ : જુઓ કે વિધેય f, 0 સિવાયની તમામ વાસ્તવિક કિંમતો માટે વ્યાખ્યાયિત છે.

વ્યાખ્યામાં આપેલ વિધેયનો પ્રદેશ

$D_1 \cup D_2$ જ્યાં $D_1 = \{x \in \mathbf{R} : x < 0\}$ અને

$D_2 = \{x \in \mathbf{R} : x > 0\}$

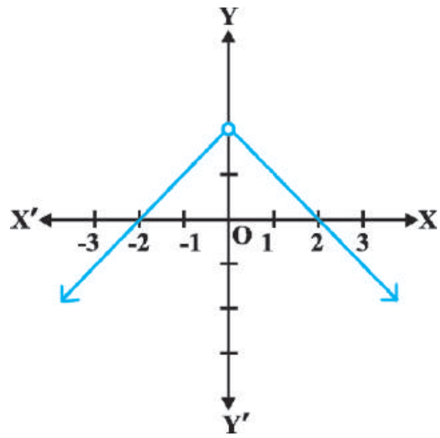
વિકલ્પ 1 : જો $c \in D_1$ તો,

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} (x + 2) = c + 2 = f(c)$$

અને આથી વિધેય f એ D_1 માં સતત છે.

વિકલ્પ 2 : જો $c \in D_2$ તો,

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} (-x + 2) = -c + 2 = f(c)$$



આકૃતિ 5.6

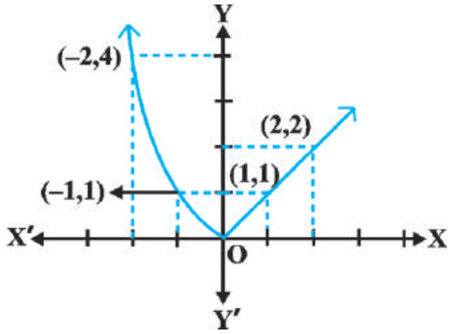
અને આથી f એ D_2માં સતત છે.

આપણે વિધેય f તેના પ્રદેશના પ્રત્યેક બિંદુએ સતત હોવાથી f સતત છે તેમ તારવીશું. વિધેયનો આલેખ આકૃતિ 5.6માં દર્શાવેલ છે. આપણે નોંધીએ કે વિધેયનો આલેખ કાગળના સમતલમાં દોરવા આપણે પેન ઉઠાવવી પડે છે, પરંતુ આવું માત્ર જ્યાં વિધેય વ્યાખ્યાયિત નથી તેવા બિંદુએ જ કરવું પડે છે.

ઉદાહરણ 13 : નીચે આપેલ વિધેય f ના સાતત્યની ચર્ચા કરો :

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ x^2, & x<0 \end{cases}$$

ઉકેલ : સ્પષ્ટ છે કે વિધેય f પ્રત્યેક વાસ્તવિક કિંમત માટે વ્યાખ્યાયિત છે. વિધેયનો આલેખ આકૃતિ 5.7માં આપેલ છે. આલેખ નિહાળતાં એવું તર્કસંગત લાગે છે કે, fનો પ્રદેશ વાસ્તવિક રેખાના ત્રણ અરિક્ત ઉપગણમાં વિભાજિત કરી શકાય.



આકૃતિ 5.7

ધારો કે, $D_1 = \{x \in \mathbf{R} : x < 0\}$,

$D_2 = \{0\}$ અને

$D_3 = \{x \in \mathbf{R} : x > 0\}$

વિકલ્પ 1 : D_1ના કોઈ પણ બિંદુએ $f(x) = x^2$ છે અને એ સરળતાથી જોઈ શકાય કે ત્યાં f સતત છે. (જુઓ ઉદાહરણ 2.)

વિકલ્પ 2 : D_3ના કોઈ પણ બિંદુએ $f(x) = x$ છે અને એ સરળતાથી જોઈ શકાય કે ત્યાં f સતત છે. (જુઓ ઉદાહરણ 6.)

વિકલ્પ 3 : આપણે $x = 0$ આગળના સાતત્યનું વિશ્લેષણ કરીએ. 0 આગળ વિધેયનું મૂલ્ય $f(0) = 0$ છે.

0 આગળ fનું ડાબી બાજુનું લક્ષ

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} x^2 = 0^2 = 0$$

0 આગળ fનું જમણી બાજુનું લક્ષ

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x = 0$$

આમ, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$ અને આથી, f એ 0 આગળ સતત છે. આથી, f તેના પ્રદેશ પરના પ્રત્યેક બિંદુએ સતત છે. આથી, f સતત વિધેય છે.

ઉદાહરણ 14 : સાબિત કરો કે પ્રત્યેક બહુપદી વિધેય સતત છે.

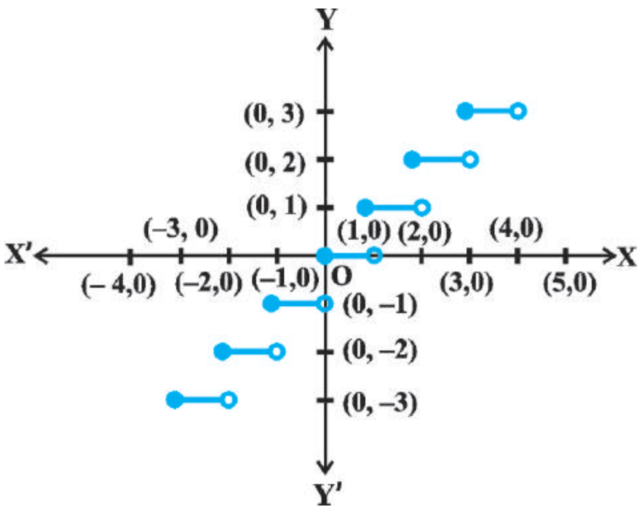
ઉકેલ : યાદ કરો કે જો n કોઈ અનૃણ પૂર્ણાંક સંખ્યા હોય, $i = 0, 1, 2, 3, ..., n$ માટે $a_i \in \mathbf{R}$ અને $a_n \neq 0$ તો $p(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$ ને બહુપદી વિધેય કહેવાય. સ્પષ્ટ છે કે આ વિધેય પ્રત્યેક વાસ્તવિક સંખ્યા માટે વ્યાખ્યાયિત છે. કોઈ નિશ્ચિત વાસ્તવિક સંખ્યા c માટે,

$$\lim_{x \to c} p(x) = p(c)$$

આથી, વ્યાખ્યા પ્રમાણે p એ c આગળ સતત છે. હવે, c કોઈ પણ વાસ્તવિક સંખ્યા હોવાથી p પ્રત્યેક વાસ્તવિક સંખ્યા માટે સતત છે. આથી, p સતત વિધેય છે.

ઉદાહરણ 15 : $f(x) = [x]$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત મહત્તમ પૂર્ણાંક વિધેયના તમામ અસાતત્યતાનાં બિંદુઓ શોધો. $[x]$ એ x થી નાનો કે તેના જેટલો મહત્તમ પૂર્ણાંક દર્શાવે છે. (બીજા શબ્દોમાં x થી અધિક નહિ તેવો અધિકતમ પૂર્ણાંક)

ઉકેલ : પ્રથમ જુઓ કે f પ્રત્યેક વાસ્તવિક સંખ્યા માટે વ્યાખ્યાયિત છે. આ વિધેયનો આલેખ આકૃતિ 5.8 માં દર્શાવેલ છે. આલેખ પરથી એવું લાગે છે કે વિધેય પ્રત્યેક પૂર્ણાંક બિંદુ આગળ અસતત છે. હવે આપણે નિશ્ચિત કરીશું કે આ વિધાન સત્ય છે.



આકૃતિ 5.8

વિકલ્પ 1 : ધારો કે c પૂર્ણાંક ના હોય તેવી વાસ્તવિક સંખ્યા છે. આલેખ પરથી એ સ્પષ્ટ છે કે c ની નજીકની તમામ વાસ્તવિક સંખ્યાઓ માટે તેનું મૂલ્ય $[c]$ છે.

અર્થાત્ $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \lim\limits_{x \to c} [x] = [c]$.

વળી, $f(c) = [c]$ અને આથી પૂર્ણાંક ના હોય તેવી તમામ વાસ્તવિક સંખ્યાઓ માટે વિધેય સતત છે.

વિકલ્પ 2 : ધારો કે c એક પૂર્ણાંક છે. તો આપણે એવી પૂરતી નાની વાસ્તવિક સંખ્યા $r > 0$ શોધી શકીએ કે જેથી $[c - r] = c - 1$, જ્યારે $[c + r] = c$ થાય.

લક્ષની ભાષામાં આનો અર્થ $\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = c - 1$, $\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = c$.

કોઈ પણ પૂર્ણાંક c માટે આ લક્ષ સમાન ના હોય. આથી, વિધેય પ્રત્યેક પૂર્ણાંક આગળ અસતત છે. ખરેખર તો $[x] = n - 1$, $n - 1 \le x < n$.

5.2.1 સતત વિધેયોનું બીજગણિત

આગળના ધોરણમાં લક્ષની સંકલ્પના સમજવા ઉપરાંત આપણે લક્ષના બીજગણિતનો પણ થોડો અભ્યાસ કર્યો. આ જ રીતે હવે આપણે સતત વિધેયના બીજગણિતનો થોડો અભ્યાસ કરીશું. કોઈ બિંદુએ વિધેયનું સાતત્ય, એ પૂર્ણરૂપે તે બિંદુએ વિધેયના લક્ષ પર આધારિત હોવાથી, એ તર્કસંગત છે કે આપણે લક્ષ જેવાં જ પરિણામોની અપેક્ષા રાખીએ.

પ્રમેય 1 : ***ધારો કે f અને g પ્રત્યેક વાસ્તવિક સંખ્યા c આગળ સતત હોય તેવાં બે વાસ્તવિક વિધેયો છે, તો***

(1) $f + g$ એ $x = c$ આગળ સતત છે.

(2) $f - g$ એ $x = c$ આગળ સતત છે.

(3) $f \cdot g$ એ $x = c$ આગળ સતત છે.

(4) $\left(\frac{f}{g}\right)$ એ $x = c$ આગળ સતત છે. (જ્યારે $g(c) \ne 0$).

સાબિતી : આપણે $f + g$ વિધેયનું સાતત્ય $x = c$ આગળ ચકાસવું છે. સ્પષ્ટ છે કે તે $x = c$ આગળ વ્યાખ્યાયિત છે. હવે,

$$\lim_{x \to c} (f + g)(x) = \lim_{x \to c} [f(x) + g(x)] \qquad (f + g \text{ ની વ્યાખ્યા પરથી})$$

$$= \lim_{x \to c} f(x) + \lim_{x \to c} g(x) \qquad (\text{લક્ષના પ્રમેય પરથી})$$

$$= f(c) + g(c) \qquad (\text{કારણ કે } f \text{ અને } g \text{ સતત છે.})$$

$$= (f + g)(c) \qquad (f + g \text{ ની વ્યાખ્યા પરથી})$$

આથી, $f + g$, $x = c$ આગળ સતત છે. સાબિતીના બાકીના ભાગ આ જ પ્રમાણેના હોવાથી વાચકોના સ્વપ્રયત્ન માટે છોડી દેવાયેલ છે.

નોંધ : (1) ઉપરના વિકલ્પ (3) ના વિશિષ્ટ કિસ્સા તરીકે જો f અચળ વિધેય હોય અર્થાત્ કોઈ વાસ્તવિક સંખ્યા λ માટે $f(x) = \lambda$ હોય તો $(\lambda \cdot g)(x) = \lambda \cdot g(x)$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત વિધેય $(\lambda \cdot g)$ પણ સતત છે. વિશેષ રૂપે જો $\lambda = -1$ લઈએ, તો કહેવાય કે જો f સતત વિધેય હોય તો $-f$ પણ સતત વિધેય છે.

(2) વિકલ્પ (4)ના વિશિષ્ટ કિસ્સા તરીકે જો g એ સતત અને શૂન્યેતર મૂલ્યોવાળું વિધેય હોય અને $f(x) = \lambda$ હોય, તો $\frac{\lambda}{g}(x) = \frac{\lambda}{g(x)}$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત વિધેય $\frac{\lambda}{g}$ પણ સતત છે. વિશેષ રૂપે જો g શૂન્યેતર સતત વિધેય હોય, તો $\frac{1}{g}$ પણ સતત થાય.

ઉપરના પ્રમેયોનો ઉપયોગ કરીને અનેક સતત વિધેયો મેળવી શકાય. તેનાથી એ નક્કી કરવામાં પણ સહાયતા મળશે કે કોઈ વિધેય સતત છે કે નહિ. નીચેનાં ઉદાહરણો આ વાત સ્પષ્ટ કરે છે :

ઉદાહરણ 16 : સાબિત કરો કે પ્રત્યેક સંમેય વિધેય સતત છે.

ઉકેલ : યાદ કરો કે પ્રત્યેક સંમેય વિધેય f ને બહુપદી $p(x)$ અને શૂન્યેતર બહુપદી $q(x)$ માટે $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ એમ લખાય છે.

$q(x)$ શૂન્ય હોય તે સિવાયની તમામ વાસ્તવિક સંખ્યાઓનો ગણ એ f નો પ્રદેશ છે. બહુપદી વિધેયો સતત હોવાથી (ઉદાહરણ 14), f પણ પ્રમેય 1 ના વિકલ્પ (4) પ્રમાણે સતત છે.

ઉદાહરણ 17 : *sine* વિધેયનું સાતત્ય ચર્ચો.

ઉકેલ : આ જોવા માટે આપણે નીચેનાં પરિણામોનો ઉપયોગ કરીશું.

$$\lim_{x \to 0} \sin x = 0 \text{ તથા } \lim_{x \to 0} \cos x = 1$$

આપણે આ સાબિત નથી કર્યાં, પરંતુ *sin* તથા *cos* વિધેયના 0 થી નજીકના આલેખ પરથી અનુભવી શકીશું.

હવે, જુઓ કે $f(x) = \sin x$ પ્રત્યેક વાસ્તવિક સંખ્યા માટે વ્યાખ્યાયિત છે. ધારો કે c કોઈ વાસ્તવિક સંખ્યા છે. $x = c + h$ લો. આપણે જાણીએ છીએ કે $x \to c$ તો $h \to 0$. આથી,

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to c} f(x) &= \lim_{x \to c} \sin x \\
&= \lim_{h \to 0} \sin (c + h) \\
&= \lim_{h \to 0} [\sin c \cdot \cos h + \cos c \cdot \sin h] \\
&= \lim_{h \to 0} [\sin c \cdot \cos h] + \lim_{h \to 0} [\cos c \cdot \sin h] \\
&= \sin c \cdot 1 + \cos c \cdot 0 \\
&= \sin c = f(c)
\end{aligned}$$

આમ, $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$ અને આથી f સતત વિધેય છે.

નોંધ : આ જ પ્રમાણે *cosine* વિધેયના સાતત્યની સાબિતી પણ આપી શકાય.

ઉદાહરણ 18 : સાબિત કરો કે વિધેય $f(x) = \tan x$ સતત છે.

ઉકેલ : વિધેય $f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ એ જેમના માટે $\cos x \neq 0$ હોય તેવી પ્રત્યેક વાસ્તવિક સંખ્યા માટે વ્યાખ્યાયિત છે. અર્થાત્ $x \neq (2n + 1)\frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$ માટે *tan* વિધેય વ્યાખ્યાયિત છે. આપણે હમણાં જ સાબિત કર્યું કે વિધેયો *sin* અને *cos* સતત છે. આથી *tan* જ્યાં વ્યાખ્યાયિત હોય ત્યાં બે સતત વિધેયોનું ભાગફળ હોવાથી સતત છે.

સંયોજિત વિધેયો માટે સતત વિધેયની વર્તણૂક રસપ્રદ છે. યાદ કરો કે જો f અને g એ વાસ્તવિક વિધેયો હોય, તો

$$(fog)(x) = f(g(x))$$

એ જ્યારે g નો વિસ્તાર, fના પ્રદેશનો ઉપગણ હોય ત્યારે વ્યાખ્યાયિત થાય. આગળનું પ્રમેય (જેની સાબિતી આપી નથી) સંયોજિત વિધેયના સાતત્યને પરિભાષિત કરે છે.

પ્રમેય 2 : f અને g વાસ્તવિક વિધેયો છે અને fog એ c આગળ વ્યાખ્યાયિત છે. જો g એ c આગળ સતત હોય અને જો f એ $g(c)$ આગળ સતત હોય, તો fog પણ c આગળ સતત થાય.

નીચેનાં ઉદાહરણોમાં આ પ્રમેયનો ઉપયોગ જોઈએ :

ઉદાહરણ 19 : સાબિત કરો કે વિધેય $f(x) = sin\,(x^2)$ સતત વિધેય છે.

ઉકેલ : જુઓ કે વિધેય પ્રત્યેક વાસ્તવિક સંખ્યા માટે વ્યાખ્યાયિત છે. વિધેય f ને વિધેયો $g(x) = sin\,x$ અને $h(x) = x^2$ ના સંયોજિત વિધેય goh તરીકે વિચારી શકાય. હવે, g અને h સતત વિધેયો હોવાથી પ્રમેય 2 પ્રમાણે તારવી શકાય કે f પણ સતત વિધેય છે.

ઉદાહરણ 20 : સાબિત કરો કે $f(x) = |1 - x + |x||$ એ સતત વિધેય છે.

ઉકેલ : પ્રત્યેક વાસ્તવિક સંખ્યા x માટે વિધેય g અને h નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત કરો :

$g(x) = 1 - x + |x|$ અને $h(x) = |x|$

તો
$$\begin{aligned}(hog)(x) &= h(g(x))\\ &= h(1 - x + |x|)\\ &= |1 - x + |x|| = f(x)\end{aligned}$$

ઉદાહરણ 7 માં આપણે જોયું કે h સતત વિધેય છે. આથી બહુપદી વિધેય અને માનાંક વિધેયના સરવાળા સ્વરૂપનું વિધેય g પણ સતત છે. પરંતુ f બે સતત વિધેયોનું સંયોજિત વિધેય હોવાથી f પણ સતત છે.

સ્વાધ્યાય 5.1

1. સાબિત કરો કે વિધેય $f(x) = 5x - 3$, $x = 0$, $x = -3$ અને $x = 5$ આગળ સતત છે.
2. વિધેય $f(x) = 2x^2 - 1$ નું $x = 3$ આગળ સાતત્ય ચકાસો.
3. નીચે આપેલ વિધેયોનાં સાતત્ય ચકાસો :

   (a) $f(x) = x - 5$ (b) $f(x) = \dfrac{1}{x-5}$, $x \neq 5$

   (c) $f(x) = \dfrac{x^2 - 25}{x+5}$, $x \neq -5$ (d) $f(x) = |x - 5|$
4. સાબિત કરો કે ધનપૂર્ણાંક n માટે વ્યાખ્યાયિત વિધેય $f(x) = x^n$ સતત છે.
5. $f(x) = \begin{cases} x, & x \le 1 \\ 5, & x > 1 \end{cases}$

   દ્વારા વ્યાખ્યાયિત વિધેય f એ $x = 0$ આગળ સતત છે ? $x = 1$ આગળ તે સતત છે ? $x = 2$ આગળ તે સતત છે ?

જો f નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત હોય, તો જે બિંદુઓએ f અસતત હોય તેવાં બિંદુ શોધો :

6. $f(x) = \begin{cases} 2x+3, & x \le 2 \\ 2x-3, & x > 2 \end{cases}$
7. $f(x) = \begin{cases} |x|+3, & x \le -3 \\ -2x, & -3 < x < 3 \\ 6x+2, & x \ge 3 \end{cases}$
8. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$
9. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{|x|}, & x < 0 \\ -1, & x \ge 0 \end{cases}$

10. $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \geq 1 \\ x^2+1, & x < 1 \end{cases}$ **11.** $f(x) = \begin{cases} x^3-3, & x \leq 2 \\ x^2+1, & x > 2 \end{cases}$

12. $f(x) = \begin{cases} x^{10}-1, & x \leq 1 \\ x^2, & x > 1 \end{cases}$

13. $f(x) = \begin{cases} x+5, & x \leq 1 \\ x-5, & x > 1 \end{cases}$

દ્વારા વ્યાખ્યાયિત વિધેય સતત છે ?

નીચે આપેલ વ્યાખ્યાયિત વિધેયો f માટે સાતત્ય ચર્ચો :

14. $f(x) = \begin{cases} 3, & 0 \leq x \leq 1 \\ 4, & 1 < x < 3 \\ 5, & 3 \leq x \leq 10 \end{cases}$

15. $f(x) = \begin{cases} 2x, & x < 0 \\ 0, & 0 \leq x \leq 1 \\ 4x, & x > 1 \end{cases}$

16. $f(x) = \begin{cases} -2, & x \leq -1 \\ 2x, & -1 < x \leq 1 \\ 2, & x > 1 \end{cases}$

17. $f(x) = \begin{cases} ax+1, & x \leq 3 \\ bx+3, & x > 3 \end{cases}$

દ્વારા વ્યાખ્યાયિત વિધેય f એ $x = 3$ આગળ સતત હોય, તો a અને b વચ્ચેનો સંબંધ શોધો.

18. λના કયા મૂલ્ય માટે $f(x) = \begin{cases} \lambda(x^2-2x), & x \leq 0 \\ 4x+1, & x > 0 \end{cases}$

દ્વારા વ્યાખ્યાયિત વિધેય $x = 0$ આગળ સતત છે ? $x = 1$ આગળ સાતત્ય માટે શું કહી શકાય ?

19. સાબિત કરો કે વિધેય $g(x) = x - [x]$ પ્રત્યેક પૂર્ણાંક માટે અસતત છે. અહીં $[x]$ એ x જેટલો કે તેથી નાનો હોય તેવો મહત્તમ પૂર્ણાંક દર્શાવે છે.

20. $f(x) = x^2 - \sin x + 5$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત વિધેય $x = \pi$ આગળ સતત છે ?

21. નીચેનાં વિધેયોનું સાતત્ય ચર્ચો :

(a) $f(x) = \sin x + \cos x$ (b) $f(x) = \sin x - \cos x$

(c) $f(x) = \sin x \cdot \cos x$

22. *cosine, cosecant, secant* અને *cotangent* વિધેયોનાં સાતત્ય ચર્ચો.

23. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x < 0 \\ x+1, & x \geq 0 \end{cases}$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત વિધેયો જ્યાં f અસતત હોય એવાં તમામ બિંદુઓ શોધો.

24. $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0 \quad , & x = 0 \end{cases}$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત વિધેય સતત વિધેય છે ?

25. $f(x) = \begin{cases} \sin x - \cos x, & x \neq 0 \\ -1 \quad , & x = 0 \end{cases}$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત વિધેયનું સાતત્ય ચકાસો.

પ્રશ્નો 26થી 29 માં દર્શાવેલ બિંદુએ વિધેય f સતત હોય તો k નું મૂલ્ય શોધો :

26. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{k \cos x}{\pi - 2x}, & x \neq \dfrac{\pi}{2} \\ 3 \quad , & x = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$, $x = \dfrac{\pi}{2}$ આગળ.

27. $f(x) = \begin{cases} kx^2, & x \leq 2 \\ 3 \quad , & x > 2 \end{cases}$, $x = 2$ આગળ.

28. $f(x) = \begin{cases} kx + 1, & x \leq \pi \\ \cos x, & x > \pi \end{cases}$, $x = \pi$ આગળ.

29. $f(x) = \begin{cases} kx + 1, & x \leq 5 \\ 3x - 5, & x > 5 \end{cases}$, $x = 5$ આગળ.

30. a અને b નાં એવાં મૂલ્યો શોધો કે જેથી

$$f(x) = \begin{cases} 5 \quad , & x \leq 2 \\ ax + b, & 2 < x < 10 \\ 21 \quad , & x \geq 10 \end{cases}$$

દ્વારા વ્યાખ્યાયિત વિધેય સતત હોય.

31. સાબિત કરો કે વિધેય $f(x) = \cos(x^2)$ સતત વિધેય છે.

32. સાબિત કરો કે વિધેય $f(x) = |\cos x|$ સતત વિધેય છે.

33. $\sin |x|$ વિધેયના સાતત્યનું પરીક્ષણ કરો.

34. $f(x) = |x| - |x + 1|$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત વિધેય જ્યાં અસતત હોય એવાં તમામ બિંદુઓ શોધો.

5.3 વિકલનીયતા

આગળના ધોરણમાં શીખી ગયેલ નીચેનું તથ્ય યાદ કરો. આપણે વાસ્તવિક વિધેયના વિકલિતને નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત કરેલ છે :

ધારો કે f વાસ્તવિક વિધેય છે અને c તેના પ્રદેશનું કોઈ બિંદુ છે. જો દર્શાવેલ લક્ષનું અસ્તિત્વ હોય, તો f નું c આગળ વિકલિત $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(c+h) - f(c)}{h}$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત કરાય. f નું c આગળનું વિકલિત $f'(c)$ અથવા $\dfrac{d}{dx}(f(x))\big|_{x=a}$ દ્વારા દર્શાવાય.

જો આ લક્ષનું અસ્તિત્વ હોય તો, $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

દ્વારા વ્યાખ્યાયિત વિધેયને fનું વિકલિત કહેવાય. સંકેતમાં fના વિકલિતને $f'(x)$ અથવા $\dfrac{d}{dx}[f(x)]$ અથવા જો $y = f(x)$ તો $\dfrac{dy}{dx}$ અથવા y' દ્વારા દર્શાવાય છે. વિધેયનું વિકલિત શોધવાની પ્રક્રિયાને ***વિકલન (differentiation)*** કહેવાય. આપણે $f(x)$ નો x ને સાપેક્ષ ***વિકલિત (derivative)*** દર્શાવવા માટે સંકેત $f'(x)$ નો ઉપયોગ કરીશું.

નીચેના નિયમો વિકલનના બીજગણિતના ભાગરૂપે પ્રમાણિત કર્યા છે :

(1) $(u \pm v)' = u' \pm v'$

(2) $(uv)' = u'v + uv'$ (લિબનિટ્ઝનો કે ગુણાકારના વિકલિતનો નિયમ)

(3) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$, $v \neq 0$ (ભાગાકારના વિકલિતનો નિયમ)

નીચેનું કોષ્ટક કેટલાક પ્રચલિત વિધેયોના વિકલિત દર્શાવે છે :

કોષ્ટક 5.3

$f(x)$	x^n	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$
$f'(x)$	nx^{n-1}	$\cos x$	$-\sin x$	$\sec^2 x$

આપણે જ્યારે વિકલિત વ્યાખ્યાયિત કરીએ, ત્યારે એક ચેતવણી મૂકીએ છીએ કે 'જો લક્ષનું અસ્તિત્વ હોય'. હવે સ્વાભાવિકપણે એ પ્રશ્ન થાય કે આવું ના હોય તો શું થાય ? આ પ્રશ્ન યથોચિત છે અને તેનો જવાબ પણ. જો $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(c+h)-f(c)}{h}$ નું અસ્તિત્વ ના હોય, તો આપણે કહીશું કે f એ c આગળ વિકલનીય નથી. બીજા શબ્દોમાં કહીએ તો, વિધેય fના પ્રદેશના કોઈ બિંદુ c આગળ વિકલનીય હોય તો $\lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{f(c+h)-f(c)}{h}$ અને $\lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{f(c+h)-f(c)}{h}$ સાન્ત અને સમાન હોય. જો વિધેય f એ $[a, b]$ પરનાં તમામ બિંદુએ વિકલનીય હોય, તો તે $[a, b]$ પર વિકલનીય છે તેમ કહેવાય. જેમ સાતત્યમાં વિચારેલ તેમ અંત્યબિંદુઓ a અને b આગળ આપણે જમણી બાજુ અને ડાબી બાજુના લક્ષ જ લઈશું. તે ખરેખર તો અનુક્રમે a અને b આગળના ડાબી બાજુ અને જમણી બાજુના વિકલિત જ છે. આ જ રીતે, જો વિધેય (a, b) પરના પ્રત્યેક બિંદુએ વિકલનીય હોય, તો તે (a, b) માં વિકલનીય છે તેમ કહેવાય.

પ્રમેય 3 : જો વિધેય f એ બિંદુ c આગળ વિકલનીય હોય, તો તે બિંદુ c આગળ સતત પણ છે.

સાબિતી : વિધેય f એ c આગળ વિકલનીય હોવાથી,

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = f'(c)$$

વળી, $x \neq c$ માટે $f(x) - f(c) = \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c} \cdot (x-c)$

$$\therefore \quad \lim_{x \to c} [f(x) - f(c)] = \lim_{x \to c} \left[\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \cdot (x-c)\right]$$

$$\therefore \quad \lim_{x \to c} f(x) - \lim_{x \to c} f(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \cdot \lim_{x \to c} (x - c)$$

$$= f'(c) \cdot 0 = 0$$

$$\therefore \quad \lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

આથી, f એ $x = c$ આગળ સતત છે.

ઉપપ્રમેય 1 : *પ્રત્યેક વિકલનીય વિધેય સતત છે.*

આપણે નોંધીએ કે *ઉપરના વિધાનનું પ્રતીપ (converse) સત્ય નથી.*

આપણે જોઈ ગયાં છીએ કે વિધેય $f(x) = |x|$ સતત છે. નીચેનું ડાબી બાજુનું લક્ષ વિચારો.

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-h}{h} = -1$$

અને જમણી બાજુનું લક્ષ

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h}{h} = 1$$

0 આગળના ડાબી તથા જમણી બાજુના લક્ષ સમાન ન હોવાથી $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(0+h) - f(0)}{h}$ નું અસ્તિત્વ નથી અને આથી, f એ 0 આગળ વિકલનીય નથી. f એ 0 ને સમાવતા પ્રદેશ પર વિકલનીય વિધેય નથી.

5.3.1 સંયોજિત વિધેયનું વિકલિત

સંયોજિત વિધેયના વિકલનનો અભ્યાસ કરવા આપણે એક ઉદાહરણથી શરૂઆત કરીએ. ધારો કે આપણે $f(x) = (2x + 1)^3$ નું વિકલન કરવું છે.

એક રસ્તો $(2x + 1)^3$ નું દ્વિપદી પ્રમેયના ઉપયોગથી વિસ્તરણ કરી નીચે દર્શાવ્યા પ્રમાણે બહુપદીય વિધેય તરીકે તેનું વિકલન કરવાનો છે.

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx}(2x + 1)^3$$

$$= \frac{d}{dx}(8x^3 + 12x^2 + 6x + 1)$$

$$= 24x^2 + 24x + 6$$

$$= 6(2x + 1)^2$$

હવે, જુઓ કે $g(x) = 2x + 1$ અને $h(x) = x^3$ માટે $f(x) = (hog)(x)$

$t = g(x) = 2x + 1$ લો. આથી, $f(x) = h(t) = t^3$

આમ, $\dfrac{df}{dx} = 6(2x + 1)^2 = 3(2x + 1)^2 \cdot 2 = 3t^2 \cdot 2$

$$= \frac{dh}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

આ બીજી રીતનો ફાયદો એ છે કે $(2x + 1)^{100}$ જેવા વિધેયના વિકલિત શોધવાની ગણતરી સરળ બનાવે છે. આપણે આ અવલોકનને પ્રમેય સ્વરૂપે નીચે પ્રમાણે દર્શાવી શકીએ. આપણે તેને સાંકળનો નિયમ કહીશું.

પ્રમેય 4 : *(સાંકળનો નિયમ) : ધારો કે વાસ્તવિક ચલનું વાસ્તવિક વિધેય f એ બે વાસ્તવિક ચલના વાસ્તવિક વિધેયો u તથા v નું સંયોજિત વિધેય છે. અર્થાત્ $f = vou$. ધારો કે $t = u(x)$ અને $\frac{dt}{dx}$ તથા $\frac{dv}{dt}$ બંનેનાં અસ્તિત્વ હોય, તો $\frac{df}{dx} = \frac{dv}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$.*

આપણે આ પ્રમેયની સાબિતી આપીશું નહિ. સાંકળના નિયમને નીચે પ્રમાણે વિસ્તૃત કરી શકાય. ધારો કે વાસ્તવિક ચલનું વિધેય f, ત્રણ વિધેયો u, v અને w નું સંયોજિત વિધેય છે અર્થાત્

$f = (wou)\ ov$. જો $t = v(x)$ અને $s = u(t)$, તો

$$\frac{df}{dx} = \frac{d(wou)}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dw}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$ (જ્યારે વિધાનમાં આપેલ પ્રત્યેક વિકલિતનું અસ્તિત્વ હોય.)

વાચક વધારે વિધેયોના સંયોજિત વિધેય માટે સાંકળના નિયમનો ઉપયોગ કરી શકે.

ઉદાહરણ 21 : $f(x) = \sin x^2$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત વિધેયનું વિકલિત શોધો.

ઉકેલ : જુઓ કે આપેલ વિધેય બે વિધેયોનું સંયોજિત વિધેય છે. જો $t = u(x) = x^2$ અને $v(t) = \sin t$ તો

$$f(x) = (vou)(x) = v(u(x)) = v(x^2) = \sin x^2$$

$t = u(x) = x^2$ મૂકો. જુઓ કે $\frac{dv}{dt} = \cos t$ અને $\frac{dt}{dx} = 2x$ નાં અસ્તિત્વ છે.

આથી, સાંકળ નિયમ મુજબ,

$$\frac{df}{dx} = \frac{dv}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \cos t \cdot 2x$$

સામાન્ય રીતે અંતિમ પરિણામને x ના પદમાં મૂકીશું.

આથી, $\frac{df}{dx} = \cos t \cdot 2x = 2x \cdot \cos x^2$.

બીજી રીત : આપણે નીચે પ્રમાણે સીધી પ્રક્રિયા કરી શકીએ :

$$y = \sin x^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\sin x^2).$$

$$= \cos x^2 \frac{d}{dx}(x^2)$$

$$= 2x \cos x^2$$

ઉદાહરણ 22 : $\tan(2x + 3)$ નું વિકલિત શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે $f(x) = \tan(2x + 3)$, $u(x) = 2x + 3$ અને $v(t) = \tan t$

આથી, $(vou)(x) = v(u(x)) = v(2x + 3) = \tan(2x + 3) = f(x)$

આમ, f બે વિધેયોનું સંયોજિત વિધેય છે.

$t = u(x) = 2x + 3$ છે. આથી, $\dfrac{dv}{dt} = sec^2\, t$ અને $\dfrac{dt}{dx} = 2$ અસ્તિત્વ ધરાવે છે.

આથી, સાંકળના નિયમ મુજબ,

$$\frac{df}{dx} = \frac{dv}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = 2\, sec^2 (2x + 3)$$

ઉદાહરણ 23 : $sin\,(cos\, x^2)$ નું x ને સાપેક્ષ વિકલિત શોધો.

ઉકેલ : વિધેય $f(x) = sin\,(cos\, x^2)$ એ x નાં વિધેયો u, v અને w નું સંયોજન છે. $f(x) = (wovou)(x)$ જ્યાં, $u(x) = x^2$, $v(t) = cos\, t$ અને $w(s) = sin\, s$. હવે, $t = u(x) = x^2$ અને $s = v(t) = cos\, t$ લો. જુઓ કે પ્રત્યેક વાસ્તવિક x માટે $\dfrac{dw}{ds} = cos\, s$, $\dfrac{ds}{dt} = -sin\, t$ અને $\dfrac{dt}{dx} = 2x$ નાં અસ્તિત્વ છે. આથી, સાંકળના વ્યાપક નિયમ મુજબ

$$\frac{df}{dx} = \frac{dw}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = (cos\, s) \cdot (-sin\, t) \cdot (2x)$$

$$= -2x \cdot sin\, x^2 \cdot cos\,(cos\, x^2)$$

બીજી રીત : આપણે નીચે પ્રમાણે વિચારી શકીએ :

$$y = sin\,(cos\, x^2)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(sin\,(cos\, x^2)) = cos\,(cos\, x^2)\frac{d}{dx}(cos\, x^2)$$

$$= cos\,(cos\, x^2)(-sin\, x^2)\frac{d}{dx}(x^2)$$

$$= -sin\, x^2\, cos\,(cos\, x^2)\,(2x)$$

$$= -2x\, sin\, x^2\, cos\,(cos\, x^2)$$

સ્વાધ્યાય 5.2

પ્રશ્ન 1થી 8 માં આપેલ વિધેયોના x ને સાપેક્ષ વિકલિત શોધો :

1. $sin\,(x^2 + 5)$
2. $cos\,(sin\, x)$
3. $sin\,(ax + b)$
4. $sec\,(tan\,(\sqrt{x}))$
5. $\dfrac{sin\,(ax+b)}{cos\,(cx+d)}$
6. $cos\, x^3\, sin^2\,(x^5)$
7. $2\sqrt{cot\,(x^2)}$
8. $cos\,(\sqrt{x})$
9. સાબિત કરો કે $f(x) = |x - 1|$, $x \in \mathbf{R}$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત વિધેય $x = 1$ આગળ વિકલનીય નથી.
10. સાબિત કરો કે મહત્તમ પૂર્ણાંક વિધેય,

$$f(x) = [x],\ 0 < x < 3$$

$x = 1$ અને $x = 2$ આગળ વિકલનીય નથી.

5.3.2 ગૂઢ વિધેયનાં વિકલિતો

અત્યાર સુધી આપણે $y = f(x)$ સ્વરૂપનાં જુદાં-જુદાં વિધેયોનાં વિકલન કરતાં હતાં. પરંતુ એ જરૂરી નથી કે વિધેયો હંમેશાં આ પ્રકારનાં જ હોય. ઉદાહરણ તરીકે આપેલાં x અને y વચ્ચેના સંબંધમાંથી એકનો વિચાર કરો.

$$x - y - \pi = 0$$
$$x + sin\ xy - y = 0$$

પ્રથમ કિસ્સામાં, આપણે y માટે ઉકેલી અને આપેલ સંબંધ $y = x - \pi$ એમ લખી શકીએ. બીજા કિસ્સામાં y માટે ઉકેલ મેળવવાનું શક્ય જણાતું નથી.

જો x અને y નો સંબંધ એવી રીતે વ્યક્ત થયેલ હોય કે તેને y માટે ઉકેલી $y = f(x)$ એમ લખી શકીએ, તો આપણે કહીશું કે y ને x ના સ્પષ્ટ (explicit) વિધેય સ્વરૂપે દર્શાવેલ છે. જો આ શક્ય ના બને તો આપણે કહીશું કે y અને x નો સંબંધ અસ્પષ્ટ કે ગૂઢ (implicit) છે. આ ઉપવિભાગમાં આપણે આવાં ગૂઢ વિધેયોના વિકલિત મેળવવા વિશે શીખીશું.

ઉદાહરણ 24 : $x - y - \pi = 0$ માટે $\frac{dy}{dx}$ શોધો.

ઉકેલ : એક રસ્તો y માટે ઉકેલી,

$y = x - \pi$ એમ લખવાનો છે.

અહીં $\frac{dy}{dx} = 1$.

બીજી રીત : આપેલ સમીકરણનું x ને સાપેક્ષ વિકલન કરતાં,

$$\frac{d}{dx}(x - y) = \frac{d\pi}{dx}$$

યાદ કરો કે, $\frac{d\pi}{dx}$ નો અર્થ અચળ વિધેય π નું x ને સાપેક્ષ વિકલન એવો થાય.

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}(x) - \frac{d}{dx}(y) = 0$$

આમ, $\frac{dy}{dx} = \frac{dx}{dx} = 1$.

ઉદાહરણ 25 : $y + sin\ y = cos\ x$ માટે $\frac{dy}{dx}$ શોધો.

ઉકેલ : આપેલ સમીકરણનું x ને સાપેક્ષ વિકલિત કરીશું. અર્થાત્

$$\frac{dy}{dx} + \frac{d}{dx}(sin\ y) = \frac{d}{dx}(cos\ x)$$

સાંકળ નિયમ પ્રમાણે

$$\frac{dy}{dx} + cos\ y \cdot \frac{dy}{dx} = -sin\ x$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{sin\ x}{1 + cos y}$$

અહીં, $y \neq (2n + 1)\pi$

5.3.3 ત્રિકોણમિતીય પ્રતિવિધેયોનું વિકલિત

આપણે નોંધીએ કે ત્રિકોણમિતીય પ્રતિવિધેયો સતત વિધેય છે, પરંતુ આપણે તે સાબિત કરીશું નહિ. હવે આપણે આવા વિધેયના વિકલન માટે સાંકળ નિયમનો ઉપયોગ કરીશું.

ઉદાહરણ 26 : $f(x) = sin^{-1} x$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત વિધેય f નું વિકલિત અસ્તિત્વ ધરાવે છે તેમ માનીને તે શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે $y = sin^{-1} x$. આથી, $x = sin\ y$

બંને બાજુ x ને સાપેક્ષ વિકલન કરતાં,

$$1 = cos\ y \frac{dy}{dx}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{cos\ y} = \frac{1}{cos\,(sin^{-1} x)}$$

જુઓ કે જો $cos\ y \neq 0$ અર્થાત્ $sin^{-1} x \neq \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$

અર્થાત્ $x \neq -1, 1$ અર્થાત્ $x \in (-1, 1)$ હોય તો જ આ શક્ય છે.

આ પરિણામને નીચે પ્રમાણે વધુ સારા અને સરળ રૂપમાં મૂકીએ. યાદ કરો કે $x \in (-1, 1)$ માટે $sin\,(sin^{-1} x) = x$ અને આથી,

$$cos^2 y = 1 - sin^2 y = 1 - (sin\,(sin^{-1}x))^2 = 1 - x^2$$

વળી, પ્રત્યેક $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ માટે $cos\ y$ ધન છે.

અને આથી, $cos\ y = \sqrt{1 - x^2}$

આમ, $x \in (-1, 1)$ માટે,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{cos\ y} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

ઉદાહરણ 27 : $f(x) = tan^{-1} x$ ના વિકલિતનું અસ્તિત્વ સ્વીકારો અને તે શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે $y = tan^{-1} x$. આથી, $x = tan\ y$

બંને બાજુ x ને સાપેક્ષ વિકલન કરતાં,

$$1 = sec^2 y \frac{dy}{dx}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{sec^2 y} = \frac{1}{1 + tan^2 y} = \frac{1}{1 + (tan\,(tan^{-1} x))^2} = \frac{1}{1 + x^2}$$

આપણે બાકીના ત્રિકોણમિતીય વિધેયોના વિકલિત શોધવાનું સ્વાધ્યાય તરીકે છોડીશું. નીચેના કોષ્ટકમાં બાકીના ત્રિકોણમિતીય પ્રતિવિધેયોના વિકલિત દર્શાવેલ છે :

કોષ્ટક 5.4

$f(x)$	$cos^{-1} x$	$cot^{-1} x$	$sec^{-1} x$	$cosec^{-1} x$
$f'(x)$	$\frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$	$\frac{-1}{1 + x^2}$	$\frac{1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2 - 1}}$	$\frac{-1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2 - 1}}$
f'નો પ્રદેશ	$(-1, 1)$	**R**	$(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$	$(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

સ્વાધ્યાય 5.3

$\dfrac{dy}{dx}$ શોધો : (પ્રશ્ન 1 થી 8 માં સ્વીકારી લો કે y એ x ના વિધેય તરીકે યોગ્ય પ્રદેશમાં વ્યાખ્યાયિત છે.)

1. $2x + 3y = \sin x$

2. $2x + 3y = \sin y$

3. $ax + by^2 = \cos y$

4. $xy + y^2 = \tan x + y$

5. $x^2 + xy + y^2 = 100$

6. $x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 = 81$

7. $\sin^2 y + \cos xy = k$

8. $\sin^2 x + \cos^2 y = 1$

9. $y = \sin^{-1}\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$

10. $y = \tan^{-1}\left(\dfrac{3x-x^3}{1-3x^2}\right), \ -\dfrac{1}{\sqrt{3}} < x < \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

11. $y = \cos^{-1}\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right), \ 0 < x < 1$

12. $y = \sin^{-1}\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right), \ 0 < x < 1$

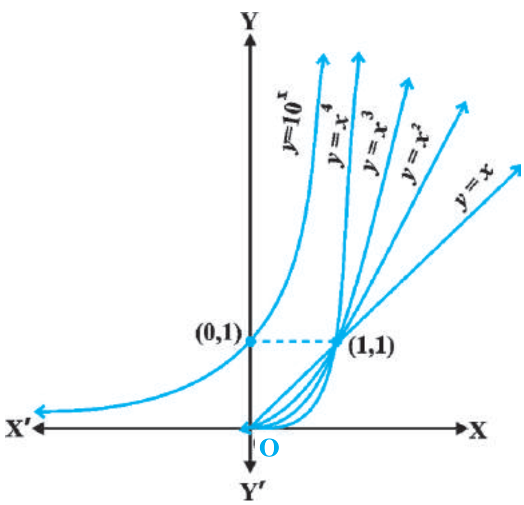
13. $y = \cos^{-1}\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right), \ -1 < x < 1$

14. $y = \sin^{-1}(2x\sqrt{1-x^2}), \ -\dfrac{1}{\sqrt{2}} < x < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

15. $y = \sec^{-1}\left(\dfrac{1}{2x^2-1}\right), \ 0 < x < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

5.4 ઘાતાંકીય અને લઘુગણકીય વિધેયો

અત્યાર સુધી આપણે બહુપદી વિધેય, સંમેય વિધેય અને ત્રિકોણમિતીય વિધેય જેવા વિવિધ વિધેયોના વિકલિત વિશે શીખ્યાં. આ વિભાગમાં આપણે નવા પ્રકારનાં વિધેયો, ઘાતાંકીય વિધેયો અને લઘુગણકીય વિધેયો વિશે શીખીશું. વિશેષ રૂપે અહીં એ જણાવવું જરૂરી છે કે, આ વિભાગના ઘણાં વિધાન પ્રેરક છે અને તેમની સાબિતી આ પુસ્તકની મર્યાદા બહારની છે.



આકૃતિ 5.9

આકૃતિ 5.9 માં $y = f_1(x) = x$, $y = f_2(x) = x^2$, $y = f_3(x) = x^3$ અને $y = f_4(x) = x^4$ ના આલેખ આપેલ છે. જુઓ કે જેમ x ની ઘાત વધે છે તેમ વક્રનું સીધું ચઢાણ વધે છે. ચઢાણવાળા વક્ર માટે વૃદ્ધિ-દર ઝડપી હોય છે. આનો

અર્થ એમ થાય કે $x\,(x > 1)$ના મૂલ્યમાં નિશ્ચિત વધારાને સંગત $y = f_n(x)$નું મૂલ્ય $n = 1, 2, 3, 4$ ને અનુરૂપ વધતું જાય છે. એ કલ્પના કરી શકાય કે $f_n(x) = x^n$ ના સંદર્ભમાં પ્રત્યેક ધન પૂર્ણાંક માટે આ વિધાન સત્ય છે. આવશ્યક રીતે, આનો અર્થ એ થાય કે $y = f_n(x)$ નો આલેખ nની વધતી કિંમતો માટે y-અક્ષ તરફ વધારે ઢળતો જાય છે. ઉદાહરણ તરીકે $f_{10}(x) = x^{10}$ અને $f_{15}(x) = x^{15}$ લો. x નું મૂલ્ય 1 થી 2 સુધી વધે તેમ f_{10} નું મૂલ્ય 1થી 2^{10} જ્યારે f_{15}નું મૂલ્ય 1થી 2^{15} જેટલું વધે છે. આમ, x ના સમાન વધારા માટે f_{15}ની વૃદ્ધિ f_{10} કરતાં વધારે છે.

ઉપરની ચર્ચાનો નિષ્કર્ષ એ છે કે, બહુપદી વિધેયોની વૃદ્ધિ ચલની ઘાત પર આધારિત છે. અર્થાત્ ઘાત વધતાં વૃદ્ધિ પણ વધે છે. આ પછીનો સ્વાભાવિક પ્રશ્ન એ છે કે શું બહુપદી વિધેયથી પણ ઝડપથી વધતું કોઈ વિધેય છે ? આનો જવાબ હકારમાં છે અને આવા વિધેયનું ઉદાહરણ $y = f(x) = 10^x$ છે.

આપણે વિધાન કરી શકીએ કે આ વિધેય કોઈ પણ વિધેય $f_n(x) = x^n$, n ધન પૂર્ણાંક, કરતાં વધારે ઝડપથી વૃદ્ધિ પામે છે. ઉદાહરણ તરીકે, આપણે સાબિત કરી શકીએ કે 10^x એ $f_{100}(x) = x^{100}$ કરતાં વધુ ઝડપથી વધે છે. x ની મોટી કિંમતો જેમ કે $x = 10^3$ માટે નોંધો કે $f_{100}(10^3) = (10^3)^{100} = 10^{300}$ જ્યારે $f(10^3) = 10^{1000}$. સ્પષ્ટ છે કે $f(x)$ નું મૂલ્ય $f_{100}(x)$ ના મૂલ્ય કરતાં ઘણું જ વધારે છે. એ સાબિત કરવું મુશ્કેલ નથી કે પ્રત્યેક $x > 10^3$ માટે $f(x) > f_{100}(x)$. પરંતુ તેની સાબિતી આપણે આપીશું નહિ. આ જ રીતે x ની મોટી કિંમતો પસંદ કરી એ ચકાસી શકાય કે $f(x)$, $f_n(x)$ (n ધન પૂર્ણાંક) કરતાં વધુ ઝડપથી વૃદ્ધિ પામે છે.

વ્યાખ્યા 3 : ઘાતાંકીય વિધેય એટલે જેનો આધાર $b > 1$ હોય તેવું વિધેય $y = f(x) = b^x$.

$y = 10^x$ નો આલેખ આકૃતિ 5.9 માં આપેલ છે.

વાચકને સલાહ છે કે b નાં નિશ્ચિત મૂલ્યો જેવાં કે 2, 3 અને 4 માટે આ આલેખ દોરે. ઘાતાંકીય વિધેયની કેટલીક વિશેષતાઓ નીચે પ્રમાણે છે :

(1) ઘાતાંકીય વિધેયનો પ્રદેશ વાસ્તવિક સંખ્યાઓનો ગણ $\mathbf{R}$ છે.

(2) ઘાતાંકીય વિધેયનો વિસ્તાર તમામ ધન વાસ્તવિક સંખ્યાઓનો ગણ છે.

(3) બિંદુ (0, 1) હંમેશાં ઘાતાંકીય વિધેયના આલેખ પર હોય છે. (આ એ તથ્યનું પુનઃકથન છે કે પ્રત્યેક વાસ્તવિક $b > 1$ માટે $b^0 = 1$)

(4) ઘાતાંકીય વિધેય હંમેશાં વધતું વિધેય હોય છે. અર્થાત્ આપણે જેમ ડાબીથી જમણી તરફ જઈએ તેમ આલેખ ઉપર તરફ આગળ વધે છે.

(5) x ના ખૂબ જ નાના મૂલ્ય માટે ઘાતાંકીય વિધેયનો આલેખ 0 ની ખૂબ જ નજીક હોય છે. બીજા શબ્દોમાં, બીજા ચરણમાં આલેખ x-અક્ષને અનુલક્ષે છે (પરંતુ તેને ક્યારેય મળશે નહિ).

10 આધારવાળા ઘાતાંકીય વિધેયને સામાન્ય ઘાતાંકીય વિધેય (common exponential function) કહેવાય. પરિશિષ્ટ A.1.4, ધોરણ 11માં આપણે જોયું કે શ્રેઢી $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots$નું મૂલ્ય 2 અને 3 વચ્ચે હોય છે અને તેને e વડે દર્શાવાય છે. આ જ e ને આધાર તરીકે લઈને આપણે એક ખૂબ જ અગત્યનું ઘાતાંકીય વિધેય $y = e^x$ મેળવીશું.

તેને પ્રાકૃતિક ઘાતાંકીય વિધેય (natural exponential function) કહેવાય.

એ જાણવું રસપ્રદ રહેશે કે ઘાતાંકીય વિધેયનું પ્રતિવિધેય શક્ય છે અને તેનું સુંદર અર્થઘટન થાય છે. આ અર્થઘટન હવે પછીની વ્યાખ્યા માટે પ્રેરિત કરે છે.

વ્યાખ્યા 4 : ધારો કે $b > 1$ વાસ્તવિક સંખ્યા છે. જો $b^x = a$ તો b આધારવાળા a ના લઘુગણકનું મૂલ્ય x છે.

b આધારવાળા a ના લઘુગણકને $\log_b a$ એમ દર્શાવીશું. આથી, જો $b^x = a$ તો $\log_b a = x$.

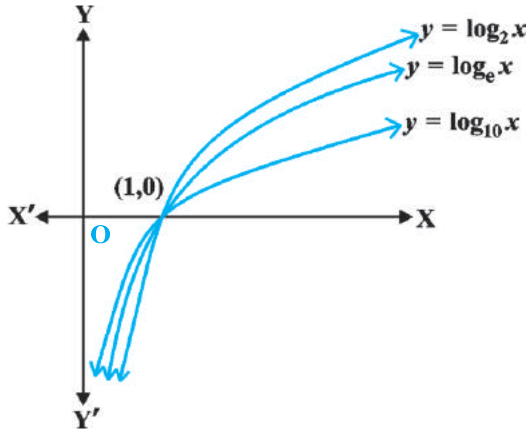
ચાલો આ સમજવા કેટલાંક સ્પષ્ટ ઉદાહરણો પર નજર નાખીએ. આપણે જાણીએ છીએ કે $2^3 = 8$. લઘુગણકની પરિભાષામાં આપણે $\log_2 8 = 3$ એમ લખી શકીએ. આ જ રીતે $10^4 = 10000$ અને $\log_{10} 10000 = 4$ એ સમાન વિધાન છે. વળી, $625 = 5^4 = 25^2$ અને $\log_5 625 = 4$ અથવા $\log_{25} 625 = 2$ પણ સમાન વિધાન છે.

થોડા વધારે પરિપક્વ દૃષ્ટિકોણથી વિચારતાં, આધાર $b > 1$ લઈને આપણે લઘુગણકને તમામ ધન વાસ્તવિક સંખ્યાઓથી વાસ્તવિક સંખ્યાઓ પરના વિધેય તરીકે જોઈ શકીએ. આ વિધેયને લઘુગણકીય વિધેય (logarithamic function) કહેવાય અને તે

$$\log_b : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$$

જો $b^y = x$ તો $x \to \log_b x = y$ એમ વ્યાખ્યાયિત કરાય.

આગળ જોયું તેમ જો આધાર $b = 10$ હોય તો તેને સામાન્ય લઘુગણક (common logarithm) અને $b = e$ તો તેને પ્રાકૃતિક લઘુગણક (natural logarithm) કહીશું. ઘણી વખત પ્રાકૃતિક લઘુગણકને ln સંકેતથી દર્શાવાય છે. આ પ્રકરણમાં આપણે e આધારવાળા લઘુગણકને $\log x$ વડે દર્શાવીશું. અર્થાત્ $ln\, x$ ને $\log x$ એમ લખીશું. આકૃતિ 5.10 માં 2, e અને 10 આધારવાળા લઘુગણકીય વિધેયોના આલેખ દર્શાવેલ છે.



આકૃતિ 5.10

આધાર $b > 1$ વાળા લઘુગણકીય વિધેય દર્શાવતાં કેટલાંક વિધેયોનાં અવલોકનો નીચે દર્શાવેલ છે :

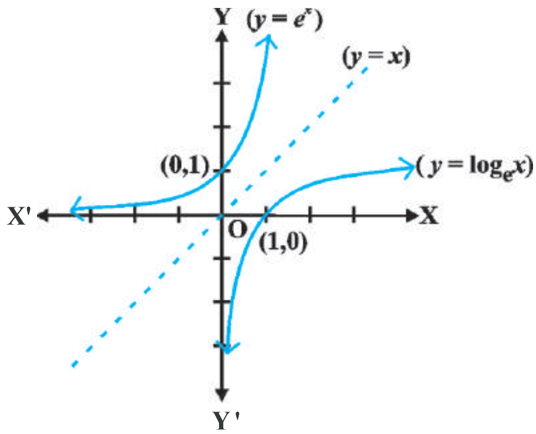
(1) આપણે ઋણ તથા શૂન્ય સંખ્યાઓ માટે લઘુગણકની અર્થપૂર્ણ વ્યાખ્યા ના આપી શકીએ. આથી, લઘુગણકીય વિધેયનો પ્રદેશ $\mathbf{R}^+$ છે.

(2) લઘુગણકીય વિધેયનો વિસ્તાર વાસ્તવિક સંખ્યાઓનો ગણ છે.

(3) બિંદુ (1, 0) હંમેશાં લઘુગણકીય વિધેયના આલેખ પર હોય.

(4) લઘુગણકીય વિધેય સતત વધતું વિધેય છે. અર્થાત્ આપણે જેમ ડાબીથી જમણી તરફ જઈએ એમ આલેખ ઉપર તરફ વધે છે.

(5) x ની શૂન્યની નજીકની પરંતુ ધન કિંમત માટે $\log x$ નું મૂલ્ય આપેલ કોઈ પણ વાસ્તવિક સંખ્યા કરતાં નાનું બનાવી શકાય. બીજા શબ્દોમાં ચોથા ચરણમાં આલેખ ઋણ y-અક્ષને અનુલક્ષે છે. (પરંતુ તેને ક્યારેય મળશે નહિ.)



આકૃતિ 5.11

(6) આકૃતિ 5.11માં $y = e^x$ અને $y = \log x$ ના આલેખ આપેલ છે. એ જાણવું રસપ્રદ છે કે બંને વક્રો રેખા $y = x$ ના અરીસામાં મળતાં એકબીજાનાં પ્રતિબિંબો છે.

લઘુગણકીય વિધેયના કેટલાક ગુણધર્મો નીચે સાબિત કરેલ છે :

(1) આધાર પરિવર્તનના પ્રમાણિત નિયમ દ્વારા $\log_a p$ ને $\log_b p$ ના પદમાં ફેરવી શકાય. ધારો કે $\log_a p = \alpha$, $\log_b p = \beta$ અને $\log_b a = \gamma$.

આથી, $a^\alpha = p$, $b^\beta = p$ અને $b^\gamma = a$.

ત્રીજા સમીકરણનું મૂલ્ય પ્રથમ સમીકરણમાં મૂકતાં,

$$(b^\gamma)^\alpha = b^{\gamma\alpha} = p$$

તેનો ઉપયોગ બીજા સમીકરણમાં કરતાં,

આપણને $b^\beta = p = b^{\gamma\alpha}$ મળે. $(b > 1)$

આથી, $\beta = \alpha\gamma$ અથવા $\alpha = \dfrac{\beta}{\gamma}$

$$\therefore \quad \boldsymbol{\log_a p = \frac{\log_b p}{\log_b a}}$$

(2) લઘુગણકીય વિધેયનો બીજો રસપ્રદ ગુણધર્મ તેની ગુણાકાર પર થતી અસર છે.

ધારો કે $\log_b pq = \alpha$. આથી, $b^\alpha = pq$.

જો $\log_b p = \beta$ અને $\log_b q = \gamma$ તો $b^\beta = p$ અને $b^\gamma = q$.

આથી $b^\alpha = pq = b^\beta \cdot b^\gamma = b^{\beta + \gamma}$ મળે. $(b > 1)$

$\therefore \quad \alpha = \beta + \gamma$

અર્થાત્ $\boldsymbol{\log_b pq = \log_b p + \log_b q}$

આનું એક વિશેષ રસપ્રદ અને મહત્ત્વપૂર્ણ પરિણામ, જ્યારે $p = q$ લઈએ ત્યારે મળે છે. આ વિકલ્પમાં ઉપરના પરિણામને નીચે પ્રમાણે લખી શકાય :

$$\log_b p^2 = \log_b p + \log_b p = 2\log_b p$$

આનું સરળ વ્યાપક પરિણામ, (સ્વઅભ્યાસ માટે છોડીશું !)

$\boldsymbol{\log_b p^n = n \log_b p}$ ***(n કોઈ ધન પૂર્ણાંક છે.) એમ થાય છે.***

ખરેખર તો આ પરિણામ કોઈ પણ વાસ્તવિક સંખ્યા માટે સત્ય છે, પરંતુ આપણે તે સાબિત કરવાનો પ્રયત્ન નહિ કરીએ. આ જ રીતે વાચક ચકાસી શકશે કે,

$$\boldsymbol{\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y}$$

ઉદાહરણ 28 : પ્રત્યેક વાસ્તવિક સંખ્યા x માટે $x = e^{\log x}$ સત્ય છે ?

ઉકેલ : પ્રથમ જુઓ કે લઘુગણકીય વિધેયનો પ્રદેશ ધન વાસ્તવિક સંખ્યાઓનો ગણ છે. આથી ઉપરનું સમીકરણ ઋણ વાસ્તવિક સંખ્યાઓ કે 0 માટે સત્ય નથી. હવે, ધારો કે $y = e^{\log x}$. જો $y > 0$ તો બંને તરફ લઘુગણક લેતાં, $\log y = \log (e^{\log x}) = \log x \cdot \log e = \log x$ મળે. આથી, $y = x$. આમ, માત્ર ધન વાસ્તવિક સંખ્યાઓ x માટે જ $x = e^{\log x}$ સત્ય છે.

વિકલનના કલન ગણિતમાં પ્રાકૃતિક ઘાતાંકીય વિધેયનો મહત્ત્વનો ગુણધર્મ એ છે કે, તે વિકલનની પ્રક્રિયા દ્વારા બદલાતું નથી. આ ગુણધર્મ નીચેના પ્રમેયમાં દર્શાવેલ છે :

પ્રમેય 5 : (1) ***e^x નો x ને સાપેક્ષ વિકલિત e^x છે અર્થાત્*** $\dfrac{d}{dx}(e^x) = e^x$

(2) ***$\log x$ નો x ને સાપેક્ષ વિકલિત $\dfrac{1}{x}$ છે અર્થાત્*** $\dfrac{d}{dx}(\log x) = \dfrac{1}{x}$

(1) **ઘાતાંકીય વિધેય $f(x) = e^x$ નો વિકલિત :** જો $f(x) = e^x$, તો

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x}$$

$$= e^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

$$= e^x \cdot 1 = e^x \qquad \left(\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1\right)$$

આમ, $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$

(2) લઘુગણકીય વિધેય $f(x) = \log_e x$ નો વિકલિત.
જો $f(x) = \log_e x$, તો

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_e(x+\Delta x) - \log_e x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_e\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{x} \frac{\log_e\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}}$$

$$= \frac{1}{x} \qquad \left(\lim_{h \to 0} \frac{\log_e(1+h)}{h} = 1\right)$$

આમ, $\frac{d}{dx}\log_e x = \frac{1}{x}$

ઉદાહરણ 29 : નીચે આપેલ વિધેયોના x ને સાપેક્ષ વિકલિત મેળવો :

(i) e^{-x} (ii) $\sin(\log x)$, $x > 0$ (iii) $\cos^{-1}(e^x)$ (iv) $e^{\cos x}$

ઉકેલ : (1) ધારો કે $y = e^{-x}$.

સાંકળ નિયમનો ઉપયોગ કરતાં, $\frac{dy}{dx} = e^{-x} \cdot \frac{d}{dx}(-x) = -e^{-x}$

(2) ધારો કે $y = \sin(\log x)$.

સાંકળ નિયમનો ઉપયોગ કરતાં, $\frac{dy}{dx} = \cos(\log x) \cdot \frac{d}{dx}(\log x) = \frac{\cos(\log x)}{x}$

(3) ધારો કે $y = \cos^{-1}(e^x)$.

સાંકળ નિયમનો ઉપયોગ કરતાં, $\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1-(e^x)^2}} \cdot \frac{d}{dx}(e^x) = -\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$

(4) ધારો કે $y = e^{\cos x}$.

સાંકળ નિયમનો ઉપયોગ કરતાં, $\frac{dy}{dx} = e^{\cos x}(-\sin x) = -(\sin x)\, e^{\cos x}$

સ્વાધ્યાય 5.4

નીચેનાં વિધેયોના x ને સાપેક્ષ વિકલિત મેળવો :

1. $\dfrac{e^x}{\sin x}$

2. $e^{\sin^{-1} x}$

3. e^{x^3}

4. $\sin(\tan^{-1} e^{-x})$

5. $\log(\cos e^x)$

6. $e^x + e^{x^2} + \dots + e^{x^5}$

7. $\sqrt{e^{\sqrt{x}}}$, $x > 0$

8. $\log(\log x)$, $x > 1$

9. $\dfrac{\cos x}{\log x}$, $x > 0$, $x \neq 1$

10. $\cos(\log x + e^x)$, $x > 0$

5.5 લઘુગણકીય વિકલન

આ વિભાગમાં આપણે જેનું સ્વરૂપ $y = f(x) = [u(x)]^{v(x)}$ હોય તેવા ખાસ પ્રકારનાં વિધેયોના વિકલિત મેળવતાં શીખીશું.

બંને તરફ e આધારવાળો લઘુગણક લેતાં,

$$\log y = v(x) \log [u(x)]$$

સાંકળ નિયમનો ઉપયોગ કરી વિકલન કરતાં,

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = v(x) \cdot \frac{1}{u(x)} \cdot u'(x) + v'(x) \cdot \log [u(x)]$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = y\left[\frac{v(x)}{u(x)} \cdot u'(x) + v'(x) \cdot \log [u(x)]\right]$$

આ રીતનો ઉપયોગ કરતી વખતે અગત્યનો મુદ્દો એ છે કે, $u(x)$ હંમેશાં ધન હોય તે જરૂરી છે. અન્યથા તેનો લઘુગણક વ્યાખ્યાયિત થશે નહિ. વિકલનની આ પ્રક્રિયાને લઘુગણકીય વિકલન કહીશું અને તે નીચેનાં ઉદાહરણો દ્વારા સ્પષ્ટ કરેલ છે :

ઉદાહરણ 30 : $\sqrt{\dfrac{(x-3)(x^2+4)}{3x^2+4x+5}}$ નું x ને સાપેક્ષ વિકલન કરો.

ઉકેલ : ધારો કે $y = \sqrt{\dfrac{(x-3)(x^2+4)}{3x^2+4x+5}}$

બંને બાજુ log લેતાં,

$$\log y = \frac{1}{2}[\log(x-3) + \log(x^2+4) - \log(3x^2+4x+5)]$$

હવે, બંને બાજુ x ને સાપેક્ષ વિકલન કરતાં,

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(x-3)} + \frac{2x}{x^2+4} - \frac{6x+4}{3x^2+4x+5}\right]$$

અથવા $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2}\left[\frac{1}{(x-3)} + \frac{2x}{x^2+4} - \frac{6x+4}{3x^2+4x+5}\right]$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(x-3)(x^2+4)}{3x^2+4x+5}}\left[\frac{1}{(x-3)} + \frac{2x}{x^2+4} - \frac{6x+4}{3x^2+4x+5}\right]$$

ઉદાહરણ 31 : a ધન અચળ વાસ્તવિક સંખ્યા હોય, તો a^x નું x ને સાપેક્ષ વિકલન કરો.

ઉકેલ : ધારો કે $y = a^x$. આથી,

$$\log y = x \log a$$

બંને બાજુ x ને સાપેક્ષ વિકલન કરતાં,

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \log a$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = y \log a$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \log a}$$

બીજી રીત : $\frac{d}{dx}(a^x) = \frac{d}{dx}(e^{x \log a}) = e^{x \log a}\frac{d}{dx}(x \log a)$

$$= e^{x \log a} \cdot \log a = a^x \log a$$

ઉદાહરણ 32 : $x^{\sin x}$, $x > 0$ નું x ને સાપેક્ષ વિકલન કરો.

ઉકેલ : ધારો કે, $y = x^{\sin x}$

બંને બાજુ log લેતાં,

$$\log y = \sin x \log x$$

$$\therefore \quad \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \sin x \frac{d}{dx}(\log x) + \log x \frac{d}{dx}(\sin x)$$

$$\therefore \quad \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = (\sin x)\frac{1}{x} + \log x \cdot \cos x$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = y\left[\frac{\sin x}{x} + \cos x \cdot \log x\right]$$

$$= x^{\sin x}\left[\frac{\sin x}{x} + \cos x \cdot \log x\right]$$

$$= x^{\sin x - 1} \cdot \sin x + x^{\sin x} \cdot \cos x \cdot \log x$$

ઉદાહરણ 33 : જો $y^x + x^y + x^x = a^b$ હોય, તો $\frac{dy}{dx}$ શોધો.

ઉકેલ : આપેલ છે કે, $y^x + x^y + x^x = a^b$

$u = y^x$, $v = x^y$ અને $w = x^x$ લેતાં,

$u + v + w = a^b$

$$\therefore \quad \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} + \frac{dw}{dx} = 0 \qquad ...(1)$$

હવે, $u = y^x$ ની બંને બાજુ log લેતાં,

$\log u = x \log y$

બંને બાજુ x ને સાપેક્ષ વિકલન કરતાં,

$$\frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx} = x \frac{d}{dx} (\log y) + \log y \frac{d}{dx} (x)$$

$$= x \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} + \log y \cdot 1$$

$$\therefore \quad \frac{du}{dx} = u \left[\frac{x}{y}\frac{dy}{dx} + \log y\right]$$

$$= y^x \left[\frac{x}{y}\frac{dy}{dx} + \log y\right] \qquad ...(2)$$

હવે, $v = x^y$ ની બંને બાજુ log લેતાં,

$$\log v = y \log x$$

બંને બાજુ x ને સાપેક્ષ વિકલન કરતાં,

$$\frac{1}{v} \cdot \frac{dv}{dx} = y \frac{d}{dx} (\log x) + \log x \frac{dy}{dx}$$

$$= y \cdot \frac{1}{x} + \log x \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$\therefore \quad \frac{dv}{dx} = v \left[\frac{y}{x} + \log x \cdot \frac{dy}{dx}\right]$$

$$= x^y \left[\frac{y}{x} + \log x \cdot \frac{dy}{dx}\right] \qquad ...(3)$$

ફરી, $w = x^x$

બંને બાજુ log લેતાં, $\log w = x \log x$

બંને બાજુ x ને સાપેક્ષ વિકલન કરતાં,

$$\frac{1}{w} \cdot \frac{dw}{dx} = x \frac{d}{dx} (\log x) + \log x \frac{d}{dx} (x)$$

$$= x \cdot \frac{1}{x} + \log x \cdot 1$$

$$\therefore \quad \frac{dw}{dx} = w\,(1 + \log x)$$
$$= x^x\,(1 + \log x) \qquad ...(4)$$

(1), (2), (3), (4) પરથી,

$$y^x\left[\frac{x}{y}\frac{dy}{dx} + \log y\right] + x^y\left[\frac{y}{x} + \log x \cdot \frac{dy}{dx}\right] + x^x\,(1 + \log x) = 0$$

$$\therefore \quad (x \cdot y^{x-1} + x^y \cdot \log x)\,\frac{dy}{dx} = -x^x\,(1 + \log x) - y \cdot x^{y-1} - y^x \log y$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = -\left(\frac{[y^x \log y + y \,.\, x^{y-1} + x^x(1 + \log x)]}{x \cdot y^{x-1} + x^y \cdot \log x}\right)$$

સ્વાધ્યાય 5.5

પ્રશ્નો 1 થી 11 માં આપેલ વિધેયોના x ને સાપેક્ષ વિકલિત મેળવો :

1. $\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x$
2. $\sqrt{\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)(x-5)}}$
3. $(\log x)^{\cos x}$
4. $x^x - 2^{\sin x}$
5. $(x + 3)^2 \cdot (x + 4)^3 \cdot (x + 5)^4$
6. $\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^x + x^{\left(1 + \frac{1}{x}\right)}$
7. $(\log x)^x + x^{\log x}$
8. $(\sin x)^x + \sin^{-1}\sqrt{x}$
9. $x^{\sin x} + (\sin x)^{\cos x}$
10. $x^{x \cos x} + \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$
11. $(x \cos x)^x + (x \sin x)^{\frac{1}{x}}$

પ્રશ્નો 12 થી 15 માં આપેલ વિધેયો માટે $\dfrac{dy}{dx}$ શોધો :

12. $x^y + y^x = 1$
13. $y^x = x^y$
14. $(\cos x)^y = (\cos y)^x$
15. $xy = e^{(x - y)}$
16. $f(x) = (1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4)(1 + x^8)$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત વિધેયનું વિકલિત શોધો. તે પરથી $f'(1)$ શોધો.
17. $(x^2 - 5x + 8)(x^3 + 7x + 9)$ નું વિકલિત ત્રણ રીતે મેળવો :

    (1) ગુણાકારના નિયમથી

    (2) વિસ્તરણ કરી બહુપદીય વિધેયથી

    (3) લઘુગણકીય વિકલનથી

    શું ત્રણેય જવાબ સમાન છે ?

18. જો u, v, w એ x ના વિધેય હોય તો બે રીતે, પ્રથમ પુનરાવર્તિત વિકલનના ગુણાકારના નિયમ અને બીજી લઘુગણકીય વિકલન દ્વારા બતાવો કે,

$$\frac{d}{dx}(u \cdot v \cdot w) = \frac{du}{dx} v \cdot w + u \cdot \frac{dv}{dx} \cdot w + u \cdot v \cdot \frac{dw}{dx}$$

5.6 પ્રચલ વિધેયનું વિકલિત

ઘણી વખત બે ચલ વચ્ચેનો સંબંધ ના તો સ્પષ્ટ હોય છે અને ના તો અસ્પષ્ટ, પરંતુ આપેલ બે ચલ વચ્ચે કોઈ ત્રીજો ચલ અલગ-અલગ સાંકળ સ્વરૂપે રહીને પ્રથમ બે ચલ વચ્ચે સંબંધ પ્રસ્થાપિત કરે છે. આ પરિસ્થિતિમાં આપણે કહી શકીએ કે, તેમની વચ્ચેનો સંબંધ ત્રીજા ચલ દ્વારા વ્યક્ત થાય છે. ત્રીજા ચલને **પ્રચલ (*parameter*)** કહેવાય. વધારે સ્પષ્ટ રીતે બે ચલ x અને y માટે જો $x = f(t)$, $y = g(t)$ એમ આપેલ હોય તો તે t ચલવાળા પ્રચલ સમીકરણ કહેવાય.

આ સ્વરૂપના વિધેયનું વિકલિત મેળવવા, સાંકળના નિયમ પ્રમાણે,

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

અથવા $$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \qquad \left(\text{જ્યાં } \frac{dx}{dt} \neq 0\right)$$

આમ, $$\frac{dy}{dx} = \frac{g'(t)}{f'(t)} \quad \left(\text{કારણ કે } \frac{dy}{dt} = g'(t) \text{ અને } \frac{dx}{dt} = f'(t)\right) \qquad (\text{જ્યાં } f'(t) \neq 0)$$

ઉદાહરણ 34 : જો $x = a \cos \theta$, $y = a \sin \theta$ હોય, તો $\frac{dy}{dx}$ શોધો.

ઉકેલ : આપેલ છે કે, $x = a \cos \theta$, $y = a \sin \theta$

$$\frac{dx}{d\theta} = -a \sin \theta, \quad \frac{dy}{d\theta} = a \cos \theta$$

આથી, $$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{a \cos \theta}{-a \sin \theta} = -\cot \theta$$

ઉદાહરણ 35 : જો $x = at^2$, $y = 2at$ હોય, તો $\frac{dy}{dx}$ શોધો.

ઉકેલ : આપેલ છે કે, $x = at^2$, $y = 2at$

$$\therefore \frac{dx}{dt} = 2at \text{ અને } \frac{dy}{dt} = 2a$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2a}{2at} = \frac{1}{t}$$

ઉદાહરણ 36 : જો $x = a(\theta + \sin \theta)$, $y = a(1 - \cos \theta)$ હોય, તો $\frac{dy}{dx}$ શોધો.

ઉકેલ : અહીં, $\frac{dx}{d\theta} = a(1 + \cos \theta)$, $\frac{dy}{d\theta} = a(\sin \theta)$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{a\sin\theta}{a(1+\cos\theta)} = \tan\frac{\theta}{2}$$

નોંધ : અહીં, આપણે એ નોંધીએ કે $\frac{dy}{dx}$ ને મુખ્ય ચલ x અને y ને સીધા સાંકળ્યા સિવાય પ્રચલ સ્વરૂપમાં જ વ્યક્ત કરેલ છે.

ઉદાહરણ 37 : જો $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ હોય, તો $\frac{dy}{dx}$ શોધો.

ઉકેલ : જો $x = a\cos^3\theta$, $y = a\sin^3\theta$ હોય, તો

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = (a\cos^3\theta)^{\frac{2}{3}} + (a\sin^3\theta)^{\frac{2}{3}}$$

$$= a^{\frac{2}{3}}(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = a^{\frac{2}{3}}$$

આથી, $x = a\cos^3\theta$, $y = a\sin^3\theta$ એ વક્ર $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ નાં પ્રચલ સમીકરણ છે.

હવે, $\frac{dx}{d\theta} = -3a\cos^2\theta\sin\theta$ અને $\frac{dy}{d\theta} = 3a\sin^2\theta\cos\theta$

આથી, $$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{3a\sin^2\theta\cdot\cos\theta}{-3a\cos^2\theta\cdot\sin\theta} = -\tan\theta \qquad (\sin\theta \neq 0, \cos\theta \neq 0)$$

$$= -\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$$

અન્ય રીત : $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$

$$\therefore \quad \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x^{-\frac{1}{3}}}{y^{-\frac{1}{3}}} = -\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$$

સ્વાધ્યાય 5.6

જો પ્રશ્ન 1 થી 10 માં x અને y પ્રચલ સમીકરણ સ્વરૂપે આપેલ હોય, તો પ્રચલનો લોપ કર્યા વગર $\frac{dy}{dx}$ શોધો.

1. $x = 2at^2$, $y = at^4$

2. $x = a\cos\theta$, $y = b\cos\theta$

3. $x = \sin t$, $y = \cos 2t$

4. $x = 4t$, $y = \frac{4}{t}$

5. $x = \cos\theta - \cos 2\theta$, $y = \sin\theta - \sin 2\theta$

6. $x = a(\theta - \sin\theta),\ y = a(1 + \cos\theta)$

7. $x = \dfrac{\sin^3 t}{\sqrt{\cos 2t}},\ y = \dfrac{\cos^3 t}{\sqrt{\cos 2t}}$

8. $x = a\left(\cos t + \log \tan\dfrac{t}{2}\right),\quad y = a \sin t$

9. $x = a \sec\theta,\ y = b \tan\theta$

10. $x = a(\cos\theta + \theta\sin\theta),\quad y = a(\sin\theta - \theta\cos\theta)$

11. જો $x = \sqrt{a^{\sin^{-1}t}},\ y = \sqrt{a^{\cos^{-1}t}}$ હોય, તો સાબિત કરો કે, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-y}{x}$.

5.7 દ્વિતીય કક્ષાનો વિકલિત

જો $y = f(x)$ હોય, તો $\dfrac{dy}{dx} = f'(x)$ ...(1)

જો $f'(x)$ વિકલનીય વિધેય હોય, તો આપણે (1) નું x વિશે ફરી વિકલન કરી શકીએ. આથી, ડાબી બાજુ $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$ બને. તેને y નો x ને સાપેક્ષ દ્વિતીય વિકલિત કહેવાય અને $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ વડે દર્શાવાય. $f(x)$ નો દ્વિતીય વિકલિત $f''(x)$ દ્વારા પણ દર્શાવાય. જો $y = f(x)$ તો તેને D^2y અથવા y'' અથવા y_2 દ્વારા પણ દર્શાવાય. આપણે નોંધીએ કે વધુ ઉચ્ચ કક્ષાના વિકલિત પણ આ જ રીતે વ્યાખ્યાયિત કરી શકાય.

ઉદાહરણ 38 : જો $y = x^3 + \tan x$ તો $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ શોધો.

ઉકેલ : આપેલ છે કે $y = x^3 + \tan x$. આથી,

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + \sec^2 x$$

$$\therefore \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(3x^2 + \sec^2 x)$$

$$= 6x + 2\sec x \cdot \sec x \cdot \tan x$$

$$= 6x + 2\sec^2 x \cdot \tan x$$

ઉદાહરણ 39 : જો $y = A\sin x + B\cos x$, તો સાબિત કરો કે $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = 0$.

ઉકેલ : અહીં, $\dfrac{dy}{dx} = A\cos x - B\sin x$

અને $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d}{dx}(A\cos x - B\sin x)$

$$= -A\sin x - B\cos x = -y$$

આથી, $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = 0$.

ઉદાહરણ 40 : જો $y = 3e^{2x} + 2e^{3x}$ હોય, તો સાબિત કરો કે $\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = 0$

ઉકેલ : આપેલ છે કે $y = 3e^{2x} + 2e^{3x}$.

આથી, $\frac{dy}{dx} = 6e^{2x} + 6e^{3x} = 6(e^{2x} + e^{3x})$

$\therefore \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 12e^{2x} + 18e^{3x} = 6(2e^{2x} + 3e^{3x})$

આથી, $\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = 6(2e^{2x} + 3e^{3x}) - 30(e^{2x} + e^{3x}) + 6(3e^{2x} + 2e^{3x}) = 0$

ઉદાહરણ 41 : જો $y = sin^{-1}x$ હોય, તો સાબિત કરો કે $(1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} = 0$.

ઉકેલ : $y = sin^{-1}x$ હોવાથી,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\therefore \quad \sqrt{1-x^2} \cdot \frac{dy}{dx} = 1$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}\left(\sqrt{1-x^2} \cdot \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

$$\therefore \quad \sqrt{1-x^2} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} \cdot \frac{d}{dx}(\sqrt{1-x^2}) = 0$$

$$\therefore \quad \sqrt{1-x^2} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} \cdot \frac{2x}{2\sqrt{1-x^2}} = 0$$

$$\therefore \quad (1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} = 0$$

બીજી રીત : $y = sin^{-1}x$ આપેલ હોવાથી,

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ અર્થાત્ $(1 - x^2)\, y_1^2 = 1$

આથી, $(1 - x^2) \cdot 2y_1y_2 + y_1^2(0 - 2x) = 0$

$\therefore \quad (1 - x^2)y_2 - xy_1 = 0$

સ્વાધ્યાય 5.7

પ્રશ્ન 1થી 10 માં આપેલ વિધેયો માટે દ્વિતીય વિકલિત મેળવો :

1. $x^2 + 3x + 2$

2. x^{20}

3. $x \cdot cos\, x$

4. $\log x$

5. $x^3 \log x$

6. $e^x sin\, 5x$

7. $e^{6x} cos\, 3x$

8. $tan^{-1} x$

9. $\log(\log x)$ **10.** $sin(\log x)$

11. જો $y = 5\cos x - 3\sin x$ હોય, તો સાબિત કરો કે $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = 0$.

12. જો $y = \cos^{-1} x$ હોય, તો $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ માત્ર y ના પદ સ્વરૂપે મેળવો.

13. જો $y = 3\cos(\log x) + 4\sin(\log x)$ હોય, તો સાબિત કરો કે $x^2y_2 + xy_1 + y = 0$.

14. જો $y = Ae^{mx} + Be^{nx}$ હોય, તો સાબિત કરો કે $\dfrac{d^2y}{dx^2} - (m+n)\dfrac{dy}{dx} + mny = 0$.

15. જો $y = 500\,e^{7x} + 600\,e^{-7x}$ હોય, તો સાબિત કરો કે $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 49y$.

16. જો $e^y(x+1) = 1$ હોય, તો સાબિત કરો કે $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2$.

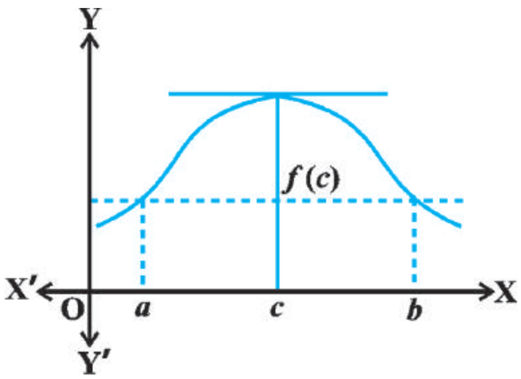
17. જો $y = (\tan^{-1} x)^2$ હોય, તો સાબિત કરો કે $(x^2+1)^2 y_2 + 2x(x^2+1)y_1 = 2$.

5.8 મધ્યકમાન પ્રમેય

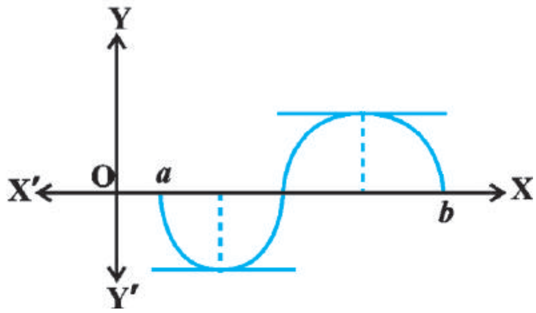
આ વિભાગમાં આપણે સાબિત કર્યા વગર કલનશાસ્ત્રના બે મૂળભૂત પ્રમેયોનાં વિધાન આપીશું. આપણે તેમનાં ભૌમિતિક અર્થઘટન પણ કરીશું.

પ્રમેય 6 : રોલનું પ્રમેય : ***જો $f : [a, b] \to R$ એ $[a, b]$ પર સતત અને (a, b) પર વિકલનીય હોય તથા વાસ્તવિક સંખ્યાઓ a અને b માટે $f(a) = f(b)$ હોય, તો કોઈક $c \in (a, b)$ માટે $f'(c) = 0$.***

આકૃતિ 5.12 અને 5.13 માં રોલના પ્રમેયની શરતોનું સમાધાન કરે તેવાં કેટલાંક વિશિષ્ટ વિકલનીય વિધેયોના આલેખ આપેલ છે.



આકૃતિ 5.12

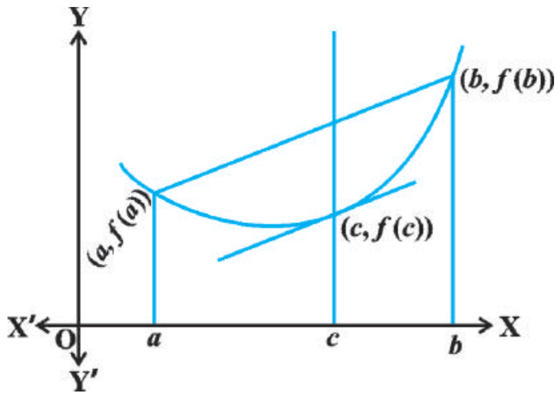


આકૃતિ 5.13

a અને b વચ્ચેનાં બિંદુઓએ વક્રના સ્પર્શકના ઢાળનું અવલોકન કરો. પ્રત્યેક આલેખમાં ઓછામાં ઓછા એક બિંદુએ તે શૂન્ય બને છે. રોલના પ્રમેયમાં ખરેખર તો આ જ વિધાનનું સમર્થન કરેલ છે. આલેખ પરના કોઈ પણ બિંદુએ વક્ર $y = f(x)$ ના સ્પર્શકનો ઢાળ એ ખરેખર તો $y = f(x)$ નો તે બિંદુએ વિકલિત જ છે.

પ્રમેય 7 : મધ્યકમાન પ્રમેય : ***જો $f : [a, b] \to R$ એ $[a, b]$ પર સતત અને (a, b) પર વિકલનીય હોય, તો કોઈક $c \in (a, b)$ માટે $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.***

જુઓ કે મધ્યકમાન પ્રમેય એ રોલના પ્રમેયનું વિસ્તૃત રૂપ છે. ચાલો, હવે આપણે મધ્યકમાન પ્રમેયનું ભૌમિતિક અર્થઘટન સમજીએ. વિધેય $y = f(x)$ નો આલેખ આકૃતિ 5.14 માં આપેલ છે. આપણે પહેલા જ $f'(c)$ નો અર્થ વક્ર $y = f(x)$ ના $(c, f(c))$ આગળના સ્પર્શકના ઢાળ તરીકે કરી ચૂક્યા છીએ. બીજા શબ્દોમાં મધ્યકમાન પ્રમેય પ્રમાણે એવી વાસ્તવિક સંખ્યા $c \in (a, b)$ મળે કે જેથી વક્ર $y = f(x)$ નો $(c, f(c))$ આગળનો સ્પર્શક $(a, f(a))$ અને $(b, f(b))$ ને જોડતી છેદિકાને સમાંતર થાય.



આકૃતિ 5.14

ઉદાહરણ 42 : $a = -2$ અને $b = 2$ હોય, તો વિધેય $y = x^2 + 2$ માટે રોલનું પ્રમેય ચકાસો.

ઉકેલ : વિધેય $y = x^2 + 2$, $[-2, 2]$ પર સતત અને $(-2, 2)$ માં વિકલનીય છે. વળી, $f(-2) = f(2) = 6$ અને આથી $f(x)$ ના -2 અને 2 આગળનાં મૂલ્યો સમાન છે. રોલના પ્રમેય પ્રમાણે $f'(c) = 0$ થાય તેવો $c \in (-2, 2)$ મળે. $f'(x) = 2x$ હોવાથી $f'(c) = 0$ પરથી આપણને $c = 0$ મળે. આમ, $c = 0$ માટે, $f'(c) = 0$ અને $c = 0 \in (-2, 2)$.

ઉદાહરણ 43 : $[2, 4]$ પર વ્યાખ્યાયિત વિધેય $f(x) = x^2$ માટે $[2, 4]$ પર મધ્યકમાન પ્રમેય ચકાસો.

ઉકેલ : વિધેય $f(x) = x^2$, $[2, 4]$ માં સતત અને $(2, 4)$માં વિકલનીય છે તથા $(2, 4)$ પર $f'(x) = 2x$ વ્યાખ્યાયિત છે.

હવે, $f(2) = 4$ અને $f(4) = 16$

આથી, $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = \dfrac{16 - 4}{4 - 2} = 6$

મધ્યકમાન પ્રમેય પ્રમાણે $f'(c) = 6$ થાય એવી વાસ્તવિક સંખ્યા $c \in (2, 4)$ મળવી જોઈએ. પરંતુ $f'(x) = 2x$. આથી, $c = 3$. આમ, $c = 3 \in (2, 4)$ આગળ $f'(c) = 6$.

સ્વાધ્યાય 5.8

1. $x \in [-4, 2]$ માં વિધેય $f(x) = x^2 + 2x - 8$ માટે રોલનું પ્રમેય ચકાસો.
2. ચકાસો કે નીચેનાં વિધેયો પર રોલનું પ્રમેય લગાડી શકાય કે નહિ ? આ ઉદાહરણો પરથી તમે રોલના પ્રમેયના પ્રતીપ વિશે શું કહી શકશો ?
   (i) $f(x) = [x]$, $x \in [5, 9]$
   (ii) $f(x) = [x]$, $x \in [-2, 2]$
   (iii) $f(x) = x^2 - 1$, $x \in [1, 2]$
3. જો $f : [-5, 5] \to \mathbf{R}$ વિકલનીય વિધેય હોય અને $f'(x)$ ક્યાં ય શૂન્ય ના બને તો સાબિત કરો કે $f(-5) \neq f(5)$.

4. $a = 1$ અને $b = 4$ લઈ વિધેય $f(x) = x^2 - 4x - 3$ માટે $[a, b]$ પર મધ્યકમાન પ્રમેય ચકાસો.

5. $a = 1$ અને $b = 3$ લઈ વિધેય $f(x) = x^3 - 5x^2 - 3x$ માટે $[a, b]$ પર મધ્યકમાન પ્રમેય ચકાસો. $f'(c) = 0$ થાય તેવા તમામ $c \in (1, 3)$ શોધો.

6. ઉપર પ્રશ્ન 2 માં આપેલ ત્રણ વિધેયો માટે મધ્યકમાન પ્રમેય ચકાસો.

પ્રકીર્ણ ઉદાહરણો

ઉદાહરણ 44 : નીચેનાં વિધેયોના x વિશે વિકલિત મેળવો :

(i) $\sqrt{3x+2} + \dfrac{1}{\sqrt{2x^2+4}}$ (ii) $e^{sec^2x} + 3cos^{-1}x$ (iii) $\log_7 (\log x)$

ઉકેલ : (i) $y = \sqrt{3x+2} + \dfrac{1}{\sqrt{2x^2+4}} = (3x + 2)^{\frac{1}{2}} + (2x^2 + 4)^{-\frac{1}{2}}$

આપણે નોંધીએ કે આ વિધેય તમામ વાસ્તવિક સંખ્યાઓ $x \geq \frac{-2}{3}$ માટે વ્યાખ્યાયિત છે.

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(3x + 2)^{\frac{1}{2}-1} \cdot \frac{d}{dx}(3x + 2) + \left(\frac{-1}{2}\right)(2x^2 + 4)^{-\frac{1}{2}-1} \cdot \frac{d}{dx}(2x^2 + 4)$$

$$= \frac{1}{2}(3x + 2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (3) - \left(\frac{1}{2}\right)(2x^2 + 4)^{-\frac{3}{2}} \cdot 4x$$

$$= \frac{3}{2\sqrt{3x+2}} - \frac{2x}{(2x^2+4)^{\frac{3}{2}}}$$

તમામ વાસ્તવિક સંખ્યાઓ $x > \frac{-2}{3}$ માટે આ વિકલિત વ્યાખ્યાયિત છે.

(ii) $y = e^{sec^2x} + 3cos^{-1}x$

આપેલ y, $[-1, 1]$ માંની તમામ વાસ્તવિક સંખ્યાઓ માટે વ્યાખ્યાયિત છે.

$$\therefore \frac{dy}{dx} = e^{sec^2x} \cdot \frac{d}{dx}(sec^2x) + 3\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

$$= e^{sec^2x} \cdot 2sec\,x \frac{d}{dx}(sec\,x) + 3\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

$$= 2\ sec\ x\ (sec\ x \cdot tan\ x)\ e^{sec^2x} + 3\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

$$= 2\ sec^2x \cdot tan\ x\ e^{sec^2x} - 3\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

જુઓ કે આપેલ વિધેયનું વિકલિત $(-1, 1)$ માટે જ સત્ય છે, કારણ કે $cos^{-1}x$ નું વિકલિત $(-1, 1)$ માટે જ યથાર્થ છે.

(iii) $y = \log_7 (\log x) = \dfrac{\log (\log x)}{\log 7}$ **(આધાર પરિવર્તનના નિયમથી)**

$x > 1$ હોય તેવી તમામ વાસ્તવિક સંખ્યાઓ માટે આ વિધેય વ્યાખ્યાયિત છે.

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\log 7} \frac{d}{dx} (\log (\log x))$$

$$= \frac{1}{\log 7} \frac{1}{\log x} \cdot \frac{d}{dx} (\log x)$$

$$= \frac{1}{x \log 7 \log x}$$

ઉદાહરણ 45 : નીચેનાં વિધેયોનું x ને સાપેક્ષ વિકલન કરો :

(i) $cos^{-1} (sin\ x)$ (ii) $tan^{-1} \left(\dfrac{sin\ x}{1 + cos\ x}\right)$ (iii) $sin^{-1} \left(\dfrac{2^{x+1}}{1 + 4^x}\right)$

ઉકેલ : (i) ધારો કે $f(x) = cos^{-1} (sin\ x)$. જુઓ કે આપેલ વિધેય પ્રત્યેક વાસ્તવિક સંખ્યા માટે વ્યાખ્યાયિત છે. આપણે આ વિધેયને

$$f(x) = cos^{-1} (sin\ x)$$

$= cos^{-1} \left[cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)\right]$ એમ લખી શકીએ. $\left(\dfrac{-\pi}{2} \le x \le \dfrac{\pi}{2}\right)$

$$\therefore \quad f(x) = \frac{\pi}{2} - x$$

આથી, $f'(x) = -1$

નોંધ : જો $\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{3\pi}{2}$, તો $f'(x) = 1$ થશે.

(ii) ધારો કે, $f(x) = tan^{-1} \left(\dfrac{sin\ x}{1 + cos\ x}\right)$. જુઓ કે આપેલ વિધેય જ્યાં $cos\ x \ne -1$ હોય તેવી પ્રત્યેક વાસ્તવિક સંખ્યા માટે વ્યાખ્યાયિત છે. અર્થાત્ x એ π નો અયુગ્મ ગુણિત ના હોવો જોઈએ. આપણે આ વિધેયનું પુનર્ગઠન કરીએ.

$$f(x) = tan^{-1} \left(\frac{sin\ x}{1 + cos\ x}\right)$$

$$= tan^{-1} \left[\frac{2\, sin\left(\frac{x}{2}\right) cos\left(\frac{x}{2}\right)}{2 cos^2 \frac{x}{2}}\right]$$

$$= tan^{-1} \left[tan\left(\frac{x}{2}\right)\right] = \frac{x}{2} \qquad -\pi < x < \pi$$

જુઓ કે $cos\dfrac{x}{2}$ શૂન્યેતર હોવાથી અંશ અને છેદમાંથી તે દૂર કરી શકાય. આમ, $f'(x) = \dfrac{1}{2}$

(iii) $f(x) = sin^{-1}\left(\frac{2^{x+1}}{1+4^x}\right)$ વિધેયનો પ્રદેશ નક્કી કરવા આપણે $-1 \le \frac{2^{x+1}}{1+4^x} \le 1$ હોય એવા તમામ x શોધવા જોઈએ.

હવે, $\frac{2^{x+1}}{1+4^x}$ હંમેશાં ધન હોવાથી, આપણે એવા x શોધવા જોઈએ કે જેથી, $\frac{2^{x+1}}{1+4^x} \le 1$. અર્થાત્ પ્રત્યેક x માટે $2^{x+1} \le 1 + 4^x$. આપણે આ લખી શકીએ કારણ કે, $2 \le \frac{1}{2^x} + 2^x$ પ્રત્યેક વાસ્તવિક x માટે સત્ય છે.

આથી, વિધેય પ્રત્યેક વાસ્તવિક સંખ્યા માટે વ્યાખ્યાયિત છે.

$2^x = tan\,\theta$ લઈ આ વિધેયને ફરી લખતાં,

$$\begin{aligned} f(x) &= sin^{-1}\left(\frac{2^{x+1}}{1+4^x}\right) \\ &= sin^{-1}\left(\frac{2^x \cdot 2}{1+(2^x)^2}\right) \\ &= sin^{-1}\left(\frac{2\,tan\,\theta}{1+tan^2\theta}\right) \\ &= sin^{-1}(sin\,2\theta) \\ &= 2\theta = 2\,tan^{-1}(2^x) \end{aligned}$$

આથી, $$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \cdot \frac{1}{1+(2^x)^2} \cdot \frac{d}{dx}(2^x) \\ &= \frac{2}{1+4^x} \cdot (2^x) \log 2 \\ &= \frac{2^{x+1}\log 2}{1+4^x} \end{aligned}$$

ઉદાહરણ 46 : જો $f(x) = (sin\,x)^{sin\,x}$ હોય, તો $0 < x < \pi$ માટે $\frac{dy}{dx}$ શોધો.

ઉકેલ : વિધેય $y = (sin\,x)^{sin\,x}$ એ $x \in (0, \pi)$ હોય તેવી પ્રત્યેક વાસ્તવિક સંખ્યા માટે વ્યાખ્યાયિત છે.

બંને તરફ log લેતાં,

$$\log y = \log (sin\,x)^{sin\,x} = sin\,x \log (sin\,x)$$

આથી, $$\begin{aligned} \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(sin\,x \log (sin\,x)) \\ &= cos\,x \log sin\,x + sin\,x \frac{1}{sin\,x}\frac{d}{dx}(sin\,x) \\ &= cos\,x \log sin\,x + cos\,x \\ &= (1 + \log sin\,x)\, cos\,x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \quad \frac{dy}{dx} &= y\,[(1 + \log sin\,x)\, cos\,x] \\ &= (1 + \log sin\,x)(sin\,x)^{sin\,x} cos\,x \end{aligned}$$

ઉદાહરણ 47 : જો ધન વાસ્તવિક અચળ a માટે, $y = a^{t+\frac{1}{t}}$ અને $x = \left(t + \frac{1}{t}\right)^a$ હોય, તો $\frac{dy}{dx}$ શોધો.

ઉકેલ : જુઓ કે પ્રત્યેક વાસ્તવિક $t > 0$ માટે y અને x બંને વ્યાખ્યાયિત છે. સ્પષ્ટ છે કે

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\left(a^{t+\frac{1}{t}}\right) = a^{t+\frac{1}{t}} \frac{d}{dt}\left(t+\frac{1}{t}\right) \cdot \log a$$

$$= a^{t+\frac{1}{t}}\left(1-\frac{1}{t^2}\right) \cdot \log a$$

આ જ રીતે, $\frac{dx}{dt} = a\left(t+\frac{1}{t}\right)^{a-1} \cdot \frac{d}{dt}\left(t+\frac{1}{t}\right)$

$$= a\left(t+\frac{1}{t}\right)^{a-1} \cdot \left(1-\frac{1}{t^2}\right)$$

જો $t \neq \pm 1$ તો અને તો જ $\frac{dx}{dt} \neq 0$. આમ, $t \neq 1$ માટે, ($t > 0$ હોવાથી)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{a^{t+\frac{1}{t}}\left(1-\frac{1}{t^2}\right)\log a}{a\left(t+\frac{1}{t}\right)^{a-1} \cdot \left(1-\frac{1}{t^2}\right)}$$

$$= \frac{a^{t+\frac{1}{t}}\log a}{a\left(t+\frac{1}{t}\right)^{a-1}}$$

$$= \frac{a^{t+\frac{1}{t}-1}\log a}{\left(t+\frac{1}{t}\right)^{a-1}} \qquad (t > 0,\ t \neq 1)$$

નોંધ : એક વિધેય $u = f(x)$ નો બીજા વિધેય $v = g(x)$ ને સાપેક્ષ વિકલિત, સંકેત $\frac{du}{dv}$ દ્વારા દર્શાવવામાં આવે છે અને તે $\frac{\frac{du}{dx}}{\frac{dv}{dx}}$ છે, જ્યાં, $\frac{dv}{dx} \neq 0$.

ઉદાહરણ 48 : sin^2x નો $e^{cos\,x}$ ને સાપેક્ષ વિકલિત શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે $u(x) = sin^2x$ અને $v(x) = e^{cos\,x}$

આપણે $\frac{du}{dv} = \frac{\frac{du}{dx}}{\frac{dv}{dx}}$ શોધવું છે.

સ્પષ્ટ છે કે, $\frac{du}{dx} = 2\,sin\,x \cdot cos\,x$ અને

$$\frac{dv}{dx} = e^{cos\,x}(-sin\,x) = -(sin\,x)\,e^{cos\,x}$$

આમ, $\frac{du}{dv} = \frac{2sin\,x\,.\,cos\,x}{-sin\,x \cdot e^{cos\,x}} = -\frac{2cos\,x}{e^{cos\,x}}$

પ્રકીર્ણ સ્વાધ્યાય 5

પ્રશ્ન 1 થી 11 માં આપેલ વિધેયોના x વિશે વિકલિત મેળવો :

1. $(3x^2 - 9x + 5)^9$

2. $sin^3 x + cos^6 x$

3. $(5x)^{3cos\ 2x}$

4. $0 \le x \le 1$ માટે $sin^{-1}(x\sqrt{x})$

5. $-2 < x < 2$ માટે, $\dfrac{cos^{-1}\frac{x}{2}}{\sqrt{2x+7}}$

6. $0 < x < \frac{\pi}{2}$ માટે, $cot^{-1}\left[\dfrac{\sqrt{1+sin\ x}+\sqrt{1-sin\ x}}{\sqrt{1+sin\ x}-\sqrt{1-sin\ x}}\right]$

7. $(\log x)^{\log x}$, $x > 1$

8. કોઈ અચળ a, b માટે $cos\ (a\ cos\ x + b\ sin\ x)$

9. $\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$ માટે $(sin\ x - cos\ x)^{(sin\ x\ -\ cos\ x)}$

10. કોઈ નિશ્ચિત $a > 0$ અને $x > 0$ માટે $x^x + x^a + a^x + a^a$

11. $x > 3$ માટે $x^{x^2-3} + (x-3)^{x^2}$

12. $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ માટે $y = 12\ (1 - cos\ t)$, $x = 10(t - sin\ t)$, તો $\dfrac{dy}{dx}$ શોધો.

13. જો $0 \le x \le 1$ હોય, તો $y = sin^{-1}x + sin^{-1}\sqrt{1-x^2}$ માટે $\dfrac{dy}{dx}$ શોધો.

14. જો $-1 < x < 1$ માટે $x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x} = 0$ હોય, તો સાબિત કરો કે $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-1}{(1+x)^2}$.

15. જો કોઈક $c > 0$ માટે $(x-a)^2 + (y-b)^2 = c^2$ હોય, તો સાબિત કરો કે $\dfrac{\left[1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\dfrac{d^2y}{dx^2}}$

a અને b પર આધારિત ના હોય તેવો અચળ છે.

16. જો $cos\ y = x\ cos\ (a + y)$ અને $cos\ a \ne \pm 1$ હોય, તો

સાબિત કરો કે $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{cos^2\ (a+y)}{sin\ a}$.

17. જો $x = a\ (cos\ t + t\ sin\ t)$ અને $y = a(sin\ t - t\ cos\ t)$, તો $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ મેળવો.

18. જો $f(x) = |x|^3$, તો સાબિત કરો કે $f''(x)$ પ્રત્યેક વાસ્તવિક x માટે અસ્તિત્વ ધરાવે છે અને તે શોધો.

19. ગાણિતિક અનુમાનના સિદ્ધાંત પરથી સાબિત કરો કે, $\dfrac{d}{dx}(x^n) = n\ x^{n-1}$. (જ્યાં, n ધન પૂર્ણાંક છે.)

20. સૂત્ર $sin\ (A + B) = sin\ A \cdot cos\ B + cos\ A\ sin\ B$ અને વિકલનનો ઉપયોગ કરી cos ના સરવાળા માટેનું સૂત્ર મેળવો.

21. શું બધે જ સતત હોય પરંતુ બરાબર બે બિંદુએ જ વિકલનીય ના હોય એવું વિધેય મળી શકે ? તમારો જવાબ ચકાસો.

22. જો $y = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) \\ l & m & n \\ a & b & c \end{vmatrix}$ હોય, તો સાબિત કરો કે $\frac{dy}{dx} = \begin{vmatrix} f'(x) & g'(x) & h'(x) \\ l & m & n \\ a & b & c \end{vmatrix}$

23. જો $-1 \le x \le 1$ માટે $y = e^{a\cos^{-1}x}$ હોય, તો સાબિત કરો કે $(1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} - a^2y = 0$.

સારાંશ

- વાસ્તવિક ચલનું વિધેય તેના પ્રદેશ પરના કોઈ બિંદુએ **સતત** હોય તે માટે તે બિંદુએ વિધેયના લક્ષનું મૂલ્ય વિધેયના તે બિંદુ આગળના મૂલ્ય જેટલું થાય. જો વિધેય સમગ્ર પ્રદેશ પર સતત હોય તો તે સતત વિધેય કહેવાય.
- બે સતત વિધેયોના સરવાળા, બાદબાકી, ગુણાકાર અને ભાગાકાર પણ સતત હોય, અર્થાત્ જો f અને g સતત વિધેયો હોય, તો

  $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$ સતત છે.

  $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ સતત છે.

  $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ (જ્યાં $g(x) \neq 0$) સતત છે.
- પ્રત્યેક વિકલનીય વિધેય સતત છે, પરંતુ પ્રતીપ સત્ય નથી.
- સાંકળનો નિયમ એ સંયોજિત વિધેયના વિકલિત માટેનો નિયમ છે. જો $f = vou$, $t = u(x)$ અને $\frac{dt}{dx}$ તથા $\frac{dv}{dt}$ બંનેનું અસ્તિત્વ હોય, તો

$$\frac{df}{dx} = \frac{dv}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

- નીચે કેટલાક પ્રમાણિત વિકલિત (તેમના યોગ્ય પ્રદેશમાં વ્યાખ્યાયિત) આપેલ છે :

$$\frac{d}{dx}(\sin^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}(\cos^{-1}x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{d}{dx}(\cot^{-1}x) = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{d}{dx}(\sec^{-1}x) = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$$

$$\frac{d}{dx}(cosec^{-1}x) = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$$

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

$$\frac{d}{dx}(\log x) = \frac{1}{x}$$

- લઘુગણકીય વિકલન એ $f(x) = [u(x)]^{v(x)}$ પ્રકારના વિધેયનું વિકલન કરવા માટે એક બહુ ઉપયોગી રીત છે. આ રીતનો ઉપયોગ કરવા માટે $u(x)$ ધન હોય તે જરૂરી છે.
- **રોલનું પ્રમેય :** જો $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$, $[a, b]$ પર સતત અને (a, b) માં વિકલનીય હોય તથા $f(a) = f(b)$, તો કોઈક $c \in (a, b)$ માટે $f'(c) = 0$.
- **મધ્યકમાન પ્રમેય :** જો $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$, $[a, b]$ પર સતત અને (a, b) માં વિકલનીય હોય, તો કોઈક $c \in (a, b)$ માટે $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

— ❖ —

પ્રકરણ 6

વિકલિતના ઉપયોગો

❖ *With the Calculus as a key, Mathematics can be successfully applied to the explanation of the course of Nature." — WHITEHEAD* ❖

6.1 પ્રાસ્તાવિક

પ્રકરણ 5 માં આપણે સંયોજિત વિધેય, ત્રિકોણમિતીય પ્રતિવિધેય, ગૂઢ વિધેય, ઘાતાંકીય વિધેય અને લઘુગણકીય વિધેયોના વિકલિતો શોધવાની કેટલીક રીતો શીખ્યાં. આ પ્રકરણમાં, આપણે ઈજનેરીવિદ્યા, વિજ્ઞાન, સામાજિક વિજ્ઞાન જેવી ભિન્ન વિદ્યાશાખાઓ ઉપરાંત અન્ય ક્ષેત્રોમાં વિકલિતના ઉપયોગ વિશે અભ્યાસ કરીશું. ઉદાહરણ તરીકે વિકલિત (i) કોઈ ચલ રાશિમાં થતા ફેરફારનો દર નક્કી કરવા (ii) વક્રના કોઈ બિંદુ આગળના સ્પર્શક તથા અભિલંબનાં સમીકરણો શોધવા (iii) વિધેયના આલેખ પરથી આપણને વિધેય કયાં બિંદુઓ આગળ (સ્થાનીય) મહત્તમ કે ન્યૂનતમ મૂલ્ય ધારણ કરશે તે નક્કી કરવામાં માર્ગદર્શન આપે છે. આપણે વિકલિતો નિર્ણાયક બિંદુઓનાં સ્થાન નક્કી કરવામાં કેવી રીતે ઉપયોગી છે તે શીખીશું. વળી, વિધેય કયા અંતરાલમાં વધે છે અથવા ઘટે છે તે અંતરાલો શોધવા માટે આપણે વિકલિતનો ઉપયોગ કરીશું. અંતમાં આપણે કોઈ ચોક્કસ રાશિનાં આસન્ન મૂલ્યો શોધવા માટે પણ વિકલિતનો ઉપયોગ કરીશું.

6.2 રાશિમાં થતા ફેરફારનો દર

અંતર s માં સમય t ની સાપેક્ષે થતા ફેરફારનો દર વિકલિત $\frac{ds}{dt}$ વેગ દર્શાવે છે. આ જ પ્રકારે, જ્યારે કોઈ એક રાશિ y માં અન્ય રાશિ x ની સાપેક્ષે ફેરફાર થાય ત્યારે વિધેય $y = f(x)$ માટે, $\frac{dy}{dx}$ (અથવા $f'(x)$) એ y માં x ની સાપેક્ષે થતા ફેરફારનો દર દર્શાવે છે અને $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0}$ (અથવા $f'(x_0)$) એ $x = x_0$ આગળ y માં x ની સાપેક્ષે થતા ફેરફારનો દર સૂચવે છે.

વળી, જો કોઈ બે ચલ x તથા y માં અન્ય ચલ t ની સાપેક્ષે ફેરફાર થતો હોય એટલે કે, જો $x = f(t)$ તથા $y = g(t)$ આપેલ હોય અને $\frac{dx}{dt} \neq 0$ હોય, તો સાંકળ નિયમ દ્વારા $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$ મેળવી શકાય.

આથી, y માં x ની સાપેક્ષે થતા ફેરફારના દરની ગણતરી y તથા x બંનેમાં t ની સાપેક્ષે થતા ફેરફારના દરનો ઉપયોગ કરી શોધી શકાય.

ચાલો, આપણે કેટલાંક ઉદાહરણો સમજીએ.

ઉદાહરણ 1 : 5 સેમી ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળના ક્ષેત્રફળમાં તેની ત્રિજ્યાને સાપેક્ષ થતા ફેરફારનો દર શોધો.

ઉકેલ : r ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળનું ક્ષેત્રફળ $A = \pi r^2$ દ્વારા મેળવી શકાય.

આથી, વર્તુળના ક્ષેત્રફળમાં તેની ત્રિજ્યાને સાપેક્ષ થતા ફેરફારનો દર $\frac{dA}{dr} = \frac{d}{dr}(\pi r^2) = 2\pi r$ દ્વારા મળે.

જ્યારે, $r = 5$ સેમી હોય ત્યારે $\frac{dA}{dr} = 10\pi$.

આથી, વર્તુળના ક્ષેત્રફળમાં તેની ત્રિજ્યાને સાપેક્ષ 10π સેમી^{2}/સેમીના દરે ફેરફાર થાય છે.

ઉદાહરણ 2 : એક સમઘનનું કદ 9 સેમી^{3}/સે ના દરથી વધે છે. જ્યારે ઘનની ધારની લંબાઈ 10 સેમી હોય ત્યારે તેના પૃષ્ઠફળના વધવાનો દર શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે સમઘનની ધારની લંબાઈ x, તેનું ઘનફળ V અને પૃષ્ઠફળ S છે. અહીં $V = x^3$ તથા $S = 6x^2$ છે. x એ સમય t નું વિધેય છે.

હવે, $\frac{dV}{dt} = 9$ સેમી^{3}/સે આપેલ છે.

આથી, $9 = \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}(x^3) = \frac{d}{dx}(x^3) \cdot \frac{dx}{dt}$ (સાંકળ નિયમ પરથી)

$$\therefore \quad 9 = 3x^2 \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$\therefore \quad \frac{dx}{dt} = \frac{3}{x^2} \qquad ...(1)$$

હવે, $\frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt}(6x^2) = \frac{d}{dx}(6x^2) \cdot \frac{dx}{dt}$ (સાંકળ નિયમ પરથી)

$$= 12x \cdot \left(\frac{3}{x^2}\right) \qquad ((1) \text{ પરથી})$$

$$= \frac{36}{x}$$

આથી, જ્યારે $x = 10$ સેમી હોય, ત્યારે, $\frac{dS}{dt} = \frac{36}{10} = 3.6$ સેમી^{2}/સે

ઉદાહરણ 3 : શાંત સરોવરમાં એક પથ્થર નાખવામાં આવે છે અને પાણીમાં વર્તુળાકાર વમળો સર્જાય છે. આ વર્તુળાકાર વમળોની ત્રિજ્યા 4 સેમી/સે ની ઝડપે વધે છે. જ્યારે વર્તુળાકાર વમળની ત્રિજ્યા 10 સેમી હોય ત્યારે આ વર્તુળાકાર વમળોનું ક્ષેત્રફળ કેટલી ઝડપે વધે છે ?

ઉકેલ : r ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળનું ક્ષેત્રફળ $A = \pi r^2$ છે. આથી, વર્તુળના ક્ષેત્રફળ A માં સમય t ની સાપેક્ષે થતા ફેરફારનો દર

$$\frac{dA}{dt} = \frac{d}{dt}(\pi r^2) = \frac{d}{dr}(\pi r^2) \cdot \frac{dr}{dt} \qquad (\text{સાંકળ નિયમ પરથી})$$

$$= 2\pi r \cdot \frac{dr}{dt}$$

વળી, $\frac{dr}{dt} = 4$ સેમી/સે આપેલ છે.

$\therefore$ જ્યારે $r = 10$ સેમી હોય, ત્યારે

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi(10)(4) = 80\pi \text{ સેમી}^2/\text{સે}$$

આથી, જ્યારે $r = 10$ સેમી હોય, ત્યારે વર્તુળાકાર વમળોનું ક્ષેત્રફળ 80π સેમી^{2}/સે ની ઝડપે વધે છે.

નોંધ : **જો $\frac{dy}{dx} > 0$ હોય તો અને તો જ આપણે કહીએ છીએ કે, જેમ x વધે છે તેમ y વધે છે તથા $\frac{dy}{dx} < 0$ હોય તો ને તો જ આપણે કહીએ છીએ કે જેમ x વધે છે તેમ y ઘટે છે.**

ઉદાહરણ 4 : એક લંબચોરસની લંબાઈ x, 3 સેમી/મિનિટના દરે ઘટે છે તથા તેની પહોળાઈ y, 2 સેમી/મિનિટના દરથી વધે છે. જ્યારે $x = 10$ સેમી અને $y = 6$ સેમી હોય, ત્યારે (a) લંબચોરસની પરિમિતિ અને (b) લંબચોરસના ક્ષેત્રફળમાં થતા ફેરફારનો દર શોધો.

ઉકેલ : લંબચોરસની લંબાઈ x, સમય t ની સાપેક્ષે ઘટે છે અને પહોળાઈ y, સમય t ની સાપેક્ષે વધે છે.

આથી, $\frac{dx}{dt} = -3$ સેમી/મિનિટ અને $\frac{dy}{dt} = 2$ સેમી/મિનિટ

(a) લંબચોરસની પરિમિતિ $P = 2(x + y)$

$$\therefore \quad \frac{dP}{dt} = 2\left(\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt}\right)$$

$$= 2(-3 + 2)$$

$$= -2 \text{ સેમી/મિનિટ}$$

(b) લંબચોરસનું ક્ષેત્રફળ $A = x \cdot y$

$$\therefore \quad \frac{dA}{dt} = x\frac{dy}{dt} + y\frac{dx}{dt}$$

$$= 10(2) + 6(-3) \qquad \textbf{(}x = 10 \textbf{ સેમી અને } y = 6 \textbf{ સેમી)}$$

$$= 2 \text{ સેમી}^2/\text{મિનિટ}$$

ઉદાહરણ 5 : એક વસ્તુના x એકમના ઉત્પાદનનો કુલ ખર્ચ (રૂપિયામાં) $C(x) = 0.005\, x^3 - 0.02\, x^2 + 30\, x + 5000$ દ્વારા મળે છે. જ્યારે 3 એકમનું ઉત્પાદન કરવામાં આવે ત્યારે સીમાંત ખર્ચ શોધો. સીમાંત ખર્ચ એટલે ઉત્પાદનના કોઈ પણ સ્તરે ઉત્પાદિત એકમની સંખ્યાને સાપેક્ષ કુલ ખર્ચમાં થતા ફેરફારનો દર.

ઉકેલ : સીમાંત ખર્ચ એટલે ઉત્પાદનના કોઈ પણ સ્તરે ઉત્પાદિત એકમની સંખ્યાને સાપેક્ષ કુલ ખર્ચમાં થતા ફેરફારનો દર.

$\therefore$ સીમાંત ખર્ચ (MC - ***Marginal Cost***) $= \frac{dC}{dx} = 0.005\,(3x^2) - 0.02\,(2x) + 30$

જ્યારે $x = 3$ હોય ત્યારે, $MC = 0.015\,(3^2) - 0.04\,(3) + 30$

$$= 0.135 - 0.12 + 30$$

$$= 30.015$$

આથી, માંગેલ સીમાંત ખર્ચ ₹ 30.02 (આસન્ન મૂલ્ય) છે.

ઉદાહરણ 6 : એક વસ્તુના x એકમના વેચાણમાંથી થતી રૂપિયામાં કુલ આવક $R(x) = 3x^2 + 36x + 5$ દ્વારા મળે છે. જ્યારે $x = 5$ હોય ત્યારે સીમાંત આવક શોધો. સીમાંત આવક એટલે વેચાયેલા કુલ એકમોને સાપેક્ષ કુલ આવકમાં થતા ફેરફારનો દર છે.

ઉકેલ : સીમાંત આવક એ વેચાયેલા કુલ એકમોને સાપેક્ષ થતી કુલ આવકના ફેરફારનો દર દર્શાવે છે.

$\therefore$ સીમાંત આવક (MR - ***Marginal Revenue***) $= \dfrac{dR}{dx} = 6x + 36$

જ્યારે $x = 5$ હોય ત્યારે, MR $= 6(5) + 36 = 66$

આથી, માંગેલ સીમાંત આવક ₹ 66 છે.

સ્વાધ્યાય 6.1

1. જ્યારે (a) $r = 3$ સેમી તથા (b) $r = 4$ સેમી હોય ત્યારે વર્તુળના ક્ષેત્રફળમાં તેની ત્રિજ્યા r ને સાપેક્ષ થતા ફેરફારનો દર શોધો.

2. એક સમઘનનું કદ 8 સેમી^{3}/સેના દરથી વધે છે. જ્યારે સમઘનની ધારની લંબાઈ 12 સેમી હોય ત્યારે તેનું પૃષ્ઠફળ કેટલી ઝડપથી વધે ?

3. એક વર્તુળની ત્રિજ્યા એકધારી 3 સેમી/સે ના દરથી વધે છે. જ્યારે વર્તુળની ત્રિજ્યા 10 સેમી હોય ત્યારે વર્તુળના ક્ષેત્રફળમાં થતા વધારાનો દર શોધો.

4. એક સમઘનની ધાર 3 સેમી/સે ના દરથી વધે છે. જ્યારે સમઘનની ધારની લંબાઈ 10 સેમી હોય ત્યારે તે સમઘનનું ઘનફળ કેટલી ઝડપથી વધે ?

5. શાંત સરોવરમાં એક પથ્થર નાંખવામાં આવે છે અને પાણીમાં વર્તુળાકાર વમળો સર્જાય છે. વર્તુળાકાર વમળોની ત્રિજ્યા 5 સેમી/સે ની ઝડપે વધે છે. જ્યારે વર્તુળાકાર વમળની ત્રિજ્યા 8 સેમી હોય, ત્યારે આ વર્તુળાકાર વમળોનું ક્ષેત્રફળ કેટલી ઝડપે વધે છે ?

6. એક વર્તુળની ત્રિજ્યા 0.7 સેમી/સે ના દરે વધે છે, તો વર્તુળના પરિઘના વધવાનો દર કેટલો હશે ?

7. એક લંબચોરસની લંબાઈ x, 5 સેમી/મિનિટના દરે ઘટે છે અને તેની પહોળાઈ 4 સેમી/મિનિટના દરે વધે છે. જ્યારે $x = 8$ સેમી અને $y = 6$ સેમી હોય, ત્યારે (a) લંબચોરસની પરિમિતિ અને (b) લંબચોરસના ક્ષેત્રફળમાં થતા ફેરફારનો દર શોધો.

8. એક ગોળાકાર ફુગ્ગામાં તેનું કદ 900 સેમી^{3}/સે ના દરે વધે એવી રીતે હવા ભરવામાં આવે છે. જ્યારે ફુગ્ગાની ત્રિજ્યા 15 સેમી હોય ત્યારે ત્રિજ્યાના વધવાનો દર શોધો. ફુગ્ગો ગોળાકાર જ રહે છે.

9. એક ગોળાકાર ફુગ્ગાની ત્રિજ્યા ચલિત થાય છે અને તે ફુગ્ગો ગોળાકાર જ રહે છે. જ્યારે તેની ત્રિજ્યા 10 સેમી હોય ત્યારે તેના ઘનફળમાં ત્રિજ્યાને સાપેક્ષ થતા વધારાનો દર શોધો.

10. એક 5 મીટર લાંબી નિસરણી દીવાલે ટેકવી છે. સીડીનો નીચેનો છેડો જમીન પર 2 સેમી/સે ના દરે દીવાલથી દૂર લઈ જવામાં આવે છે. જ્યારે સીડીનો નીચેનો છેડો દીવાલથી 4 મીટર દૂર હોય, ત્યારે દીવાલ પર નિસરણીની ઊંચાઈ કેટલી ઝડપથી ઘટે છે ?

11. એક પદાર્થ, વક્ર $6y = x^3 + 2$ પર ગતિ કરે છે. વક્ર પરનાં જે બિંદુઓએ તેમના y-યામમાં તેમના x-યામ કરતાં 8 ગણી ઝડપે ફેરફાર થાય, તે બિંદુઓ શોધો.

12. હવાના પરપોટાની ત્રિજ્યા $\frac{1}{2}$ સેમી/સે ના દરથી વધે છે, જ્યારે પરપોટાની ત્રિજ્યા 1 સેમી હોય ત્યારે તેના કદમાં થતા વધારાનો દર કેટલો હોય ?

13. એક ગોળાકાર ફુગ્ગાનો વ્યાસ $\frac{3}{2}(2x + 1)$ છે, તો આ ફુગ્ગાના ઘનફળમાં x ને સાપેક્ષ થતા ફેરફારનો દર શોધો. ફુગ્ગો ગોળાકાર જ રહે છે.

14. એક પાઈપ દ્વારા 12 સેમી^{3}/સે ના દરથી રેતી નાખવામાં આવે છે. આ રેતી દ્વારા જમીન પર શંકુ બને છે. તેની ઊંચાઈ હંમેશાં તેના પાયાની ત્રિજ્યા કરતાં $\frac{1}{6}$ ગણી રહે છે. જ્યારે ઊંચાઈ 4 સેમી હોય ત્યારે રેતીના આ શંકુની ઊંચાઈના વધવાનો દર શોધો.

15. એક વસ્તુના x એકમના ઉત્પાદનનો કુલ ખર્ચ (રૂપિયામાં) $C(x) = 0.007x^3 - 0.003x^2 + 15x + 4000$ દ્વારા મળે છે. જ્યારે 17 એકમનું ઉત્પાદન થયેલ હોય ત્યારે સીમાંત ખર્ચ શોધો.

16. એક વસ્તુના x એકમના વેચાણથી મળતી કુલ આવક (રૂપિયામાં) $R(x) = 13x^2 + 26x + 15$ દ્વારા મળે છે. જ્યારે $x = 7$ હોય ત્યારે સીમાંત આવક શોધો.

પ્રશ્નો 17 તથા 18 માં વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલ વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો :

17. જ્યારે ત્રિજ્યા 6 સેમી હોય ત્યારે વર્તુળના ક્ષેત્રફળમાં તેની ત્રિજ્યાને સાપેક્ષ થતા ફેરફારનો દર .... હોય.

(A) 10π (B) 12π (C) 8π (D) 11π

18. એક વસ્તુના x એકમના વેચાણથી મળતી કુલ આવક (રૂપિયામાં) $R(x) = 3x^2 + 36x + 5$ દ્વારા મળે છે. જ્યારે $x = 15$ હોય ત્યારે થતી સીમાંત આવક ₹ .... હોય.

(A) 116 (B) 96 (C) 90 (D) 126

6.3 વધતાં તથા ઘટતાં વિધેયો

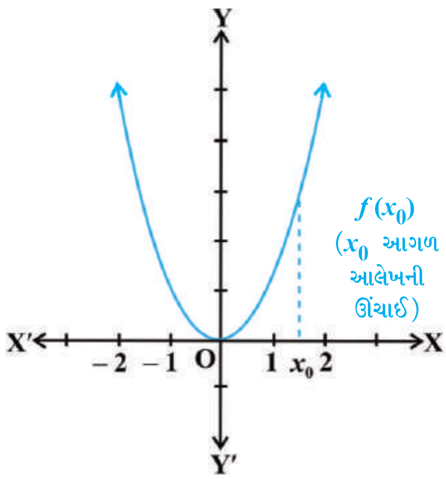
આ વિભાગમાં, વિધેય વધે છે કે ઘટે છે અથવા બેમાંથી કંઈ પણ નથી બનતું તે નક્કી કરવા માટે આપણે વિકલિતનો ઉપયોગ કરીશું.

વિધેય $f(x) = x^2$, $x \in R$ નો આલેખ આકૃતિ 6.1માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે પરવલયાકાર છે.

ઊગમબિંદુની ડાબી તરફની કિંમતો

x	$f(x) = x^2$
-2	4
$-\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$
-1	1
$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
0	0

જેમ આપણે ડાબી બાજુથી જમણી બાજુ તરફ જઈશું, તેમ આલેખની ઊંચાઈ ઘટશે.



આકૃતિ 6.1

ઊગમબિંદુની જમણી તરફની કિંમતો

x	$f(x) = x^2$
0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
1	1
$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$
2	4

જેમ આપણે ડાબી બાજુથી જમણી બાજુ તરફ જઈશું, તેમ આલેખની ઊંચાઈ વધશે.

સૌપ્રથમ આપણે ઊગમબિંદુની જમણી તરફના આલેખનો વિચાર કરીશું. (આકૃતિ 6.1 જુઓ.) અહીં જોઈ શકાય છે કે, આલેખ પર જેમ આપણે ડાબી તરફથી જમણી તરફ જઈએ છીએ તેમ આલેખની ઊંચાઈમાં (ધન રહીને સંખ્યાત્મક રીતે) સતત વધારો થાય છે. આ કારણથી, ધન વાસ્તવિક સંખ્યાઓ ($x > 0$) માટે, વિધેય વધે છે તેમ કહી શકાય.

હવે, આપણે ઊગમબિંદુની ડાબી તરફના આલેખનો વિચાર કરીશું (આકૃતિ 6.1 જુઓ.) અને જોઈશું કે, આલેખ પર જેમ આપણે ડાબી તરફથી જમણી તરફ જઈશું તેમ આલેખની ઊંચાઈમાં (ધન રહીને સંખ્યાત્મક રીતે) સતત ઘટાડો થાય છે. આથી, ઋણ વાસ્તવિક સંખ્યાઓ ($x < 0$) માટે, વિધેય ઘટે છે તેમ કહી શકાય.

હવે, આપણે વિધેય કયા અંતરાલમાં વધે છે અથવા કયા અંતરાલમાં ઘટે છે તેની વિશ્લેષણાત્મક વ્યાખ્યા નીચે પ્રમાણે આપીશું :

વ્યાખ્યા 1 : ધારો કે $I = (a, b)$ એ વાસ્તવિક વિધેય f ના પ્રદેશનો ઉપગણ છે.

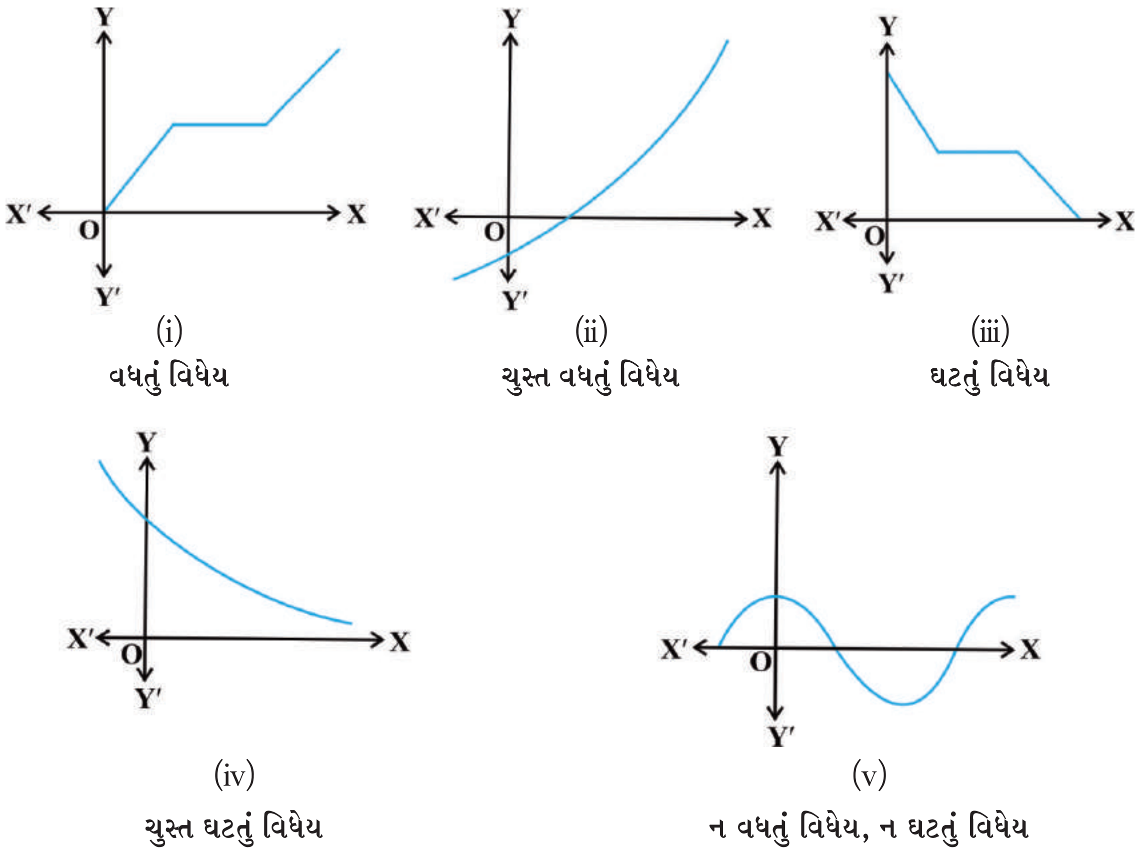
(i) ***જો $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$; $\forall x_1, x_2 \in I = (a, b)$, તો f એ (a, b) પર વધતું વિધેય છે તેમ કહેવાય.***

(ii) ***જો $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$; $\forall x_1, x_2 \in I = (a, b)$, તો f એ (a, b) પર ચુસ્ત વધતું વિધેય છે તેમ કહેવાય.***

(iii) ***જો $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$; $\forall x_1, x_2 \in I = (a, b)$, તો f એ (a, b) પર ઘટતું વિધેય છે તેમ કહેવાય.***

(iv) ***જો $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$; $\forall x_1, x_2 \in I = (a, b)$, તો f એ (a, b) પર ચુસ્ત ઘટતું વિધેય છે તેમ કહેવાય.***

આ પ્રકારનાં વિધેયોની આલેખાત્મક રજૂઆત માટે આકૃતિ 6.2 જુઓ.



આકૃતિ 6.2

હવે આપણે વિધેય કોઈક બિંદુ આગળ ક્યારે વધે છે અથવા ઘટે છે તેની વ્યાખ્યા આપીશું.

વ્યાખ્યા 2 : ધારો કે x_0 એ વાસ્તવિક વિધેય f ના પ્રદેશનો ઘટક છે. જો x_0 ને સમાવતો કોઈક અંતરાલ I મળે કે જેથી, f એ I માં વધે, ચુસ્ત રીતે વધે, ઘટે કે ચુસ્ત રીતે ઘટે તો, તદનુસાર f એ x_0 આગળ વધે છે, ચુસ્ત રીતે વધે છે, ઘટે છે કે ચુસ્ત રીતે ઘટે છે તેમ કહેવાય.

ચાલો, આપણે આ વ્યાખ્યાને વધતા વિધેય માટે સ્પષ્ટ કરીએ.

કોઈ $h > 0$ માટે f ના પ્રદેશનો ઉપગણ હોય તેવો કોઈ વિવૃત અંતરાલ $I = (x_0 - h, x_0 + h)$ અસ્તિત્વ ધરાવે કે જેથી $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$ થાય, તો વિધેય f એ x_0 આગળ વધતું વિધેય છે તેમ કહેવાય.

ઉદાહરણ 7 : સાબિત કરો કે, $f(x) = 7x - 3$ એ R પર ચુસ્ત વધતું વિધેય છે.

ઉકેલ : ધારો કે $x_1, x_2 \in R$; $f(x) = 7x - 3$ માટે,

$$
\begin{aligned}
x_1 < x_2 &\Rightarrow 7x_1 < 7x_2 \\
&\Rightarrow 7x_1 - 3 < 7x_2 - 3 \\
&\Rightarrow f(x_1) < f(x_2)
\end{aligned}
$$

આથી, વ્યાખ્યા 1 પરથી કહી શકાય કે, વિધેય f એ R પર ચુસ્ત રીતે વધે છે.

નોંધ : જો f એ R ના કોઈ પણ અંતરાલમાં વધતું વિધેય હોય, તો તે R પર વધતું વિધેય છે. તે જ રીતે ઘટતાં વિધેય, ચુસ્ત રીતે વધતાં વિધેય કે ચુસ્ત રીતે ઘટતાં વિધેય માટે કહી શકાય.

હવે, આપણે વધતાં અને ઘટતાં વિધેયો માટે પ્રથમ વિકલિત કસોટી આપીશું. આ કસોટીની સાબિતી માટે મધ્યકમાન પ્રમેય જરૂરી છે. આપણે પ્રકરણ 5 માં તેનો અભ્યાસ કર્યો છે.

પ્રમેય 1 : ધારો કે વિધેય f એ સંવૃત અંતરાલ $[a, b]$ પર સતત અને વિવૃત અંતરાલ (a, b) પર વિકલનીય છે.

(a) પ્રત્યેક $x \in (a, b)$ માટે, જો $f'(x) > 0$ હોય, તો f એ $[a, b]$ પર ચુસ્ત વધતું વિધેય છે.

(b) પ્રત્યેક $x \in (a, b)$ માટે, જો $f'(x) < 0$ હોય, તો f એ $[a, b]$ માં ચુસ્ત ઘટતું વિધેય છે.

(c) પ્રત્યેક $x \in (a, b)$ માટે, જો $f'(x) = 0$ હોય, તો f એ $[a, b]$ માં અચળ વિધેય છે.

સાબિતી : ધારો કે, $x_1 < x_2$ થાય તેવા $x_1, x_2 \in [a, b]$ છે.

આથી, મધ્યકમાન પ્રમેય (પ્રકરણ 5, પ્રમેય 8) પરથી, $c \in (x_1, x_2)$ એવો મળે કે જેથી,

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$$

એટલે કે, $f(x_2) - f(x_1) > 0$ **($f'(c) > 0$ આપેલ છે.)**

એટલે કે, $f(x_2) > f(x_1)$

આથી, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$; $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$

આથી, f એ $[a, b]$ માં ચુસ્ત વધતું વિધેય છે.

વિકલ્પો (b) તથા (c) ની સાબિતી તે જ રીતે આપી શકાય. તે વાચક માટે, સ્વાધ્યાય તરીકે છોડેલ છે.

નોંધ : (i) અહીં વધુ એક વ્યાપક પ્રમેય દર્શાવે છે કે, જો કોઈ વિવૃત અંતરાલ (a, b) ના પ્રત્યેક x માટે $f'(x) > 0$ હોય તથા વિધેય f સંવૃત અંતરાલ $[a, b]$ માં સતત હોય, તો f એ ચુસ્ત વધતું વિધેય છે. આ જ રીતે જો કોઈ વિવૃત અંતરાલ (a, b) ના પ્રત્યેક x માટે $f'(x) < 0$ તથા વિધેય $[a, b]$ માં સતત હોય, તો f એ ચુસ્ત ઘટતું વિધેય છે.

(ii) અંતરાલ I માં જો વિધેય ચુસ્ત વધતું કે ચુસ્ત ઘટતું હોય, તો તે અંતરાલ I માં વધતું કે ઘટતું વિધેય હોય. તેમ છતાં તેનું પ્રતીપ સત્ય હોય, તે જરૂરી નથી.

ઉદાહરણ 8 : સાબિત કરો કે, $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x$, $x \in R$ એ R પર ચુસ્ત વધતું વિધેય છે.

ઉકેલ : અહીં, R ના પ્રત્યેક અંતરાલમાં,

$$
\begin{aligned}
f'(x) = 3x^2 - 6x + 4 &= 3(x^2 - 2x + 1) + 1 \\
&= 3(x - 1)^2 + 1 > 0
\end{aligned}
$$

આથી, વિધેય f એ R પર ચુસ્ત રીતે વધે છે.

ઉદાહરણ 9 : સાબિત કરો કે $f(x) = cos\, x$ એ

(a) $(0, \pi)$ માં ચુસ્ત ઘટતું વિધેય છે.

(b) $(\pi, 2\pi)$ માં ચુસ્ત વધતું વિધેય છે.

(c) $(0, 2\pi)$ માં વધતું વિધેય પણ નથી કે ઘટતું વિધેય પણ નથી.

ઉકેલ : અહીં $f'(x) = -sin\, x$

(a) પ્રત્યેક $x \in (0, \pi)$ માટે, $sin\, x > 0$

$\therefore \quad f'(x) < 0$

આથી, f એ $(0, \pi)$ માં ચુસ્ત ઘટતું વિધેય છે.

(b) પ્રત્યેક $x \in (\pi, 2\pi)$ માટે, $sin\, x < 0$

$\therefore \quad f'(x) > 0$

આથી, f એ $(\pi, 2\pi)$ માં ચુસ્ત વધતું વિધેય છે.

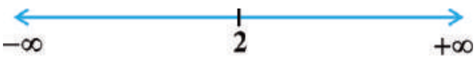
(c) વિકલ્પો (a) તથા (b) પરથી સ્પષ્ટ છે કે, f એ $(0, 2\pi)$ માં વધતું વિધેય નથી કે ઘટતું વિધેય પણ નથી.

નોંધ : વિધેય f એ અંત્યબિંદુઓ 0, π અને 2π આગળ સતત છે. આથી, પ્રમેય 1 પરથી, f એ $[\pi, 2\pi]$માં વધતું વિધેય છે અને $[0, \pi]$માં ઘટતું વિધેય છે.

ઉદાહરણ 10 : વિધેય $f(x) = x^2 - 4x + 6$ એ કયા અંતરાલમાં (a) ચુસ્ત રીતે વધે (b) ચુસ્ત રીતે ઘટે છે તે શોધો.

ઉકેલ : અહીં $f(x) = x^2 - 4x + 6$

$\therefore \quad f'(x) = 2x - 4$



આકૃતિ 6.3

આથી, $f'(x) = 0$ લેતાં, $x = 2$ મળે. આથી, $x = 2$ એ વાસ્તવિક સંખ્યારેખાને બે ભિન્ન અંતરાલો $(-\infty, 2)$ અને $(2, \infty)$ માં વિભાજિત કરે. (આકૃતિ 6.3 જુઓ.) અંતરાલ $(-\infty, 2)$ માં, $f'(x) = 2x - 4 < 0$.

આથી, આ અંતરાલમાં વિધેય f ચુસ્ત રીતે ઘટે છે. વળી, અંતરાલ $(2, \infty)$ માં, $f'(x) > 0$ હોવાથી વિધેય f ચુસ્ત રીતે વધે છે.

નોંધ : વિધેય f એ $x = 2$ આગળ સતત છે. $x = 2$ એ બે અંતરાલોને જોડે છે. આથી, પ્રમેય 1 પરથી આપણે તારવી શકીએ કે, આપેલ વિધેય f એ $(-\infty, 2]$ માં ઘટે છે અને $[2, \infty)$માં વધે છે.

ઉદાહરણ 11 : જે અંતરાલોમાં વિધેય $f(x) = 4x^3 - 6x^2 - 72x + 30$ (a) ચુસ્ત રીતે વધે (b) ચુસ્ત રીતે ઘટે છે, તે અંતરાલો શોધો.

ઉકેલ : અહીં $f(x) = 4x^3 - 6x^2 - 72x + 30$

$$\begin{aligned} \therefore \quad f'(x) &= 12x^2 - 12x - 72 \\ &= 12(x^2 - x - 6) \\ &= 12(x - 3)(x + 2) \end{aligned}$$

આકૃતિ 6.4

આથી, $f'(x) = 0$ લેતાં, $x = -2, 3$ મળે.

$x = -2$ અને $x = 3$ વાસ્તવિક સંખ્યારેખાને ત્રણ ભિન્ન અંતરાલો, $(-\infty, -2)$, $(-2, 3)$ તથા $(3, \infty)$ માં વિભાજિત કરે છે. અંતરાલો $(-\infty, -2)$ અને $(3, \infty)$ માં, $f'(x) > 0$ છે, જ્યારે અંતરાલ $(-2, 3)$ માં $f'(x) < 0$ છે. આથી, f એ અંતરાલો $(-\infty, -2)$ અને $(3, \infty)$ માં ચુસ્ત વધતું વિધેય છે. જ્યારે, અંતરાલ $(-2, 3)$ માં f ચુસ્ત ઘટતું વિધેય છે. તેમ છતાં પણ, f એ R માં વધતું કે ઘટતું વિધેય નથી.

અંતરાલ	$f'(x)$ ની નિશાની	વિધેય f નો પ્રકાર
$(-\infty, -2)$	$(-)(-) > 0$	f ચુસ્ત રીતે વધે છે.
$(-2, 3)$	$(-)(+) < 0$	f ચુસ્ત રીતે ઘટે છે.
$(3, \infty)$	$(+)(+) > 0$	f ચુસ્ત રીતે વધે છે.

ઉદાહરણ 12 : જે અંતરાલોમાં વિધેય $f(x) = \sin 3x$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ (a) વધે (b) ઘટે તે અંતરાલો શોધો.

ઉકેલ : અહીં $f(x) = \sin 3x$

$$\therefore \quad f'(x) = 3 \cos 3x$$

આથી, $f'(x) = 0$ લેતાં, $\cos 3x = 0$ મળે.

આથી, $3x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ $\qquad \left(x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow 3x \in \left[0, \frac{3\pi}{2}\right]\right)$

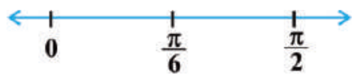
આથી, $x = \frac{\pi}{6}$ અને $\frac{\pi}{2}$ મળે.

હવે, $x = \frac{\pi}{6}$ એ અંતરાલ $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ને બે ભિન્ન અંતરાલો $\left[0, \frac{\pi}{6}\right)$ અને $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$ માં વિભાજિત કરે.

હવે, $\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{6}\right)$

$$0 < x < \frac{\pi}{6} \Rightarrow 0 < 3x < \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \cos 3x > 0 \text{ એટલે કે } f'(x) > 0$$



આકૃતિ 6.5

તથા $\forall x \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$,

$$\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{2} < 3x < \frac{3\pi}{2}$$

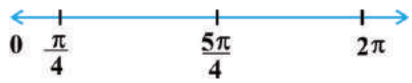
$$\Rightarrow \cos 3x < 0 \text{ એટલે કે } f'(x) < 0$$

આથી, f એ $\left(0, \frac{\pi}{6}\right)$ માં ચુસ્ત વધતું વિધેય છે અને $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$ માં ચુસ્ત ઘટતું વિધેય છે.

વળી, આપેલ વિધેય $x = 0$ અને $x = \frac{\pi}{6}$ આગળ સતત હોવાથી, પ્રમેય 1 પરથી, f એ $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ પર વધતું તથા $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$ પર ઘટતું વિધેય છે.

ઉદાહરણ 13 : વિધેય $f(x) = sin\ x + cos\ x$, $0 \leq x \leq 2\pi$ કયા અંતરાલમાં ચુસ્ત વધે છે અને કયા અંતરાલમાં ચુસ્ત ઘટે છે તે નક્કી કરો.

ઉકેલ : અહીં $f(x) = sin\ x + cos\ x$



આકૃતિ 6.6

$\therefore \quad f'(x) = cos\ x - sin\ x$

હવે, $f'(x) = 0$ લેતાં, $sin\ x = cos\ x$ મળે.

$\therefore \quad x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$ $\qquad (0 \leq x \leq 2\pi)$

$x = \frac{\pi}{4}$ અને $x = \frac{5\pi}{4}$ એ અંતરાલ $[0, 2\pi]$ ને ત્રણ ભિન્ન અંતરાલો $\left[0, \frac{\pi}{4}\right)$, $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$ અને $\left(\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right]$ માં વિભાજિત કરે.

જો $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right]$ હોય, તો $f'(x) > 0$

$\therefore$ f એ અંતરાલો $\left[0, \frac{\pi}{4}\right)$ અને $\left(\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right]$ માં ચુસ્ત વધતું વિધેય છે.

વળી, જો $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$, તો $f'(x) < 0$

એટલે કે, f એ અંતરાલ $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$ માં ચુસ્ત ઘટતું વિધેય છે.

અંતરાલ	$f'(x)$ ની નિશાની	વિધેય f નો ગુણધર્મ
$\left[0, \frac{\pi}{4}\right)$	> 0	f ચુસ્ત વધતું વિધેય છે.
$\left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$	< 0	f ચુસ્ત ઘટતું વિધેય છે.
$\left(\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right]$	> 0	f ચુસ્ત વધતું વિધેય છે.

સ્વાધ્યાય 6.2

1. સાબિત કરો કે $f(x) = 3x + 17$ એ R પર ચુસ્ત વધતું વિધેય છે.
2. સાબિત કરો કે $f(x) = e^{2x}$, R પર ચુસ્ત વધતું વિધેય છે.
3. સાબિત કરો કે $f(x) = sin\ x$
   (a) $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ માં ચુસ્ત વધતું વિધેય છે.
   (b) $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ માં ચુસ્ત ઘટતું વિધેય છે.
   (c) $(0, \pi)$ માં વધતું કે ઘટતું વિધેય નથી.
4. વિધેય $f(x) = 2x^2 - 3x$ કયા અંતરાલમાં
   (a) ચુસ્ત રીતે વધે (b) ચુસ્ત રીતે ઘટે તે શોધો.
5. વિધેય $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 7$ કયા અંતરાલમાં
   (a) ચુસ્ત રીતે વધે (b) ચુસ્ત રીતે ઘટે તે નક્કી કરો.

6. નીચેનાં વિધેયો કયા અંતરાલમાં ચુસ્ત રીતે વધે છે અથવા ચુસ્ત રીતે ઘટે છે તે નક્કી કરો :

(a) $x^2 + 2x - 5$ (b) $10 - 6x - 2x^2$ (c) $-2x^3 - 9x^2 - 12x + 1$

(d) $6 - 9x - x^2$ (e) $(x + 1)^3 (x - 3)^3$

7. સાબિત કરો કે x પરનું વિધેય $y = \log(1 + x) - \frac{2x}{2+x}$, $x > -1$ એ તેના પ્રદેશ પર વધતું વિધેય છે.

8. $y = x(x - 2)^2$ એ x ની જે કિંમતો માટે વધતું વિધેય હોય તે કિંમતો શોધો.

9. સાબિત કરો કે $y = \frac{4\sin\theta}{(2+\cos\theta)} - \theta$ એ $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ માં વધતું વિધેય છે.

10. સાબિત કરો કે લઘુગણકીય વિધેય અંતરાલ $(0, \infty)$ પર ચુસ્ત વધતું વિધેય છે.

11. સાબિત કરો કે $f(x) = x^2 - x + 1$, અંતરાલ $(-1, 1)$ પર ચુસ્ત વધતું કે ઘટતું વિધેય નથી.

પ્રશ્નો 12 તથા 13 માં વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલ વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો :

12. નીચે આપેલાં વિધેયોમાંથી કયું વિધેય અંતરાલ $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ પર ચુસ્ત ઘટતું વિધેય છે ?

(A) $\cos x$ (B) $\cos 2x$ (C) $\cos 3x$ (D) $\tan x$

13. વિધેય $f(x) = x^{100} + \sin x - 1$ એ નીચે આપેલા અંતરાલો પૈકી કયા અંતરાલમાં ચુસ્ત રીતે ઘટે છે ?

(A) $(0, 1)$ (B) $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ (C) $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ (D) આપેલ પૈકી એક પણ નહિ.

14. 'a' ની નાનામાં નાની કઈ કિંમત માટે વિધેય $f(x) = x^2 + ax + 1$ એ અંતરાલ $[1, 2]$ પર ચુસ્ત રીતે વધે છે ?

15. જો I કોઈ વિવૃત્ત અંતરાલ હોય અને $I \cap [-1, 1] = \phi$ હોય, તો સાબિત કરો કે $f(x) = x + \frac{1}{x}$ એ I પર ચુસ્ત વધતું વિધેય છે.

16. સાબિત કરો કે વિધેય $f(x) = \log \sin x$ એ $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ પર ચુસ્ત વધતું વિધેય છે તથા $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ પર ચુસ્ત ઘટતું વિધેય છે.

17. સાબિત કરો કે વિધેય $f(x) = \log|\cos x|$ એ $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ પર ચુસ્ત ઘટતું વિધેય છે તથા $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ પર ચુસ્ત વધતું વિધેય છે.

18. સાબિત કરો કે $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 100$ એ R પર વધતું વિધેય છે.

પ્રશ્ન 19 માં વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલ વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો :

19. નીચે આપેલા અંતરાલો પૈકી કયા અંતરાલમાં $y = x^2 e^{-x}$ વધતું વિધેય છે ?

(A) $(-\infty, \infty)$ (B) $(-2, 0)$ (C) $(2, \infty)$ (D) $(0, 2)$

6.4 સ્પર્શક અને અભિલંબ

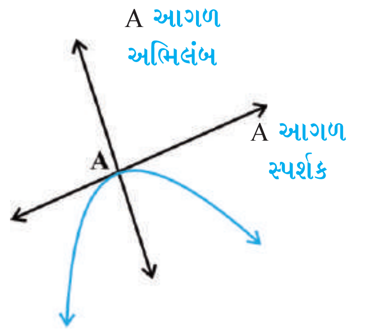
આ વિભાગમાં, આપણે કોઈ વક્રને કોઈ બિંદુ આગળ સ્પર્શક તથા અભિલંબનાં સમીકરણ શોધવા માટે વિકલનની ક્રિયાનો ઉપયોગ કરીશું.

(x_0, y_0) બિંદુમાંથી પસાર થતી અને નિશ્ચિત ઢાળ m વાળી રેખાનું સમીકરણ $(y - y_0) = m(x - x_0)$ દ્વારા મળે.

નોંધીએ કે $y = f(x)$ ને (x_0, y_0) બિંદુ આગળના સ્પર્શકનો ઢાળ $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_0, y_0)}$ $(= f'(x_0))$થી દર્શાવાય. આથી, $y = f(x)$ ના (x_0, y_0) બિંદુ આગળના સ્પર્શકનું સમીકરણ $(y - y_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ દ્વારા મળે.

વળી, અભિલંબ એ સ્પર્શકને લંબ છે. આથી, જો $f'(x_0) \neq 0$ હોય, તો વક્ર $y = f(x)$ ના (x_0, y_0) બિંદુ આગળના અભિલંબનો ઢાળ $\frac{-1}{f'(x_0)}$ મળે. આથી, વક્ર $y = f(x)$ ના (x_0, y_0) બિંદુ આગળના અભિલંબનું સમીકરણ $(y - y_0) = \frac{-1}{f'(x_0)}(x - x_0)$ દ્વારા મળે.

એટલે કે, $(y - y_0)\, f'(x_0) + (x - x_0) = 0$



આકૃતિ 6.7

નોંધ : જો વક્ર $y = f(x)$ નો સ્પર્શક X-અક્ષની ધન દિશા સાથે θ માપનો ખૂણો બનાવે, તો $\frac{dy}{dx}$ = સ્પર્શકનો ઢાળ = $\tan\theta$.

વિશિષ્ટ કિસ્સાઓ :

(i) જો સ્પર્શકનો ઢાળ શૂન્ય હોય, તો $\tan\theta = 0$. આથી, $\theta = 0$. એનો અર્થ એ થયો કે, સ્પર્શક X-અક્ષને સમાંતર છે અથવા X-અક્ષ સાથે સંપાતી છે. આ કિસ્સામાં, (x_0, y_0) બિંદુ આગળના સ્પર્શકનું સમીકરણ $y = y_0$ મળે.

(ii) જો $\theta \to \frac{\pi}{2}$ હોય, તો $\tan\theta \to \infty$. એટલે કે, સ્પર્શક એ X-અક્ષને લંબરેખા છે; એનો અર્થ એ થયો કે તે Y-અક્ષને સમાંતર છે અથવા Y-અક્ષ સાથે સંપાતી છે. આ કિસ્સામાં, (x_0, y_0) બિંદુ આગળના સ્પર્શકનું સમીકરણ $x = x_0$ મળે. **(શા માટે ?)**

ઉદાહરણ 14 : $x = 2$ આગળ વક્ર $y = x^3 - x$ ના સ્પર્શકનો ઢાળ મેળવો.

ઉકેલ : $x = 2$ આગળ સ્પર્શકનો ઢાળ $= \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=2} = (3x^2 - 1)_{x=2} = 11$ મળે.

ઉદાહરણ 15 : વક્ર $y = \sqrt{4x-3} - 1$ ને $\frac{2}{3}$ ઢાળવાળા સ્પર્શકનું સ્પર્શબિંદુ મેળવો.

ઉકેલ : આપેલ વક્રને (x, y) બિંદુ આગળના સ્પર્શકનો ઢાળ $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(4x - 3)^{-\frac{1}{2}} \cdot 4 = \frac{2}{\sqrt{4x-3}}$

આપેલ ઢાળ $\frac{2}{3}$ છે.

$$\therefore \quad \frac{2}{3} = \frac{2}{\sqrt{4x-3}}$$

અથવા $4x - 3 = 9$

અથવા $x = 3$

હવે, $y = \sqrt{4x-3} - 1$ માં, $x = 3$ લેતાં, $y = \sqrt{4(3)-3} - 1 = 2$

આથી, માંગેલ સ્પર્શબિંદુ $(3, 2)$ છે.

ઉદાહરણ 16 : વક્ર $y + \frac{2}{x-3} = 0$ ને 2 ઢાળવાળા તમામ સ્પર્શકોનાં સમીકરણ શોધો.

ઉકેલ : વક્રને (x, y) બિંદુ આગળના સ્પર્શકનો ઢાળ $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{(x-3)^2}$

પરંતુ આપેલ ઢાળ 2 હોવાથી, $2 = \frac{2}{(x-3)^2}$

અથવા $(x - 3)^2 = 1$

અથવા $x - 3 = \pm 1$

અથવા $x = 2, 4$

હવે, $x = 2$ લેતાં, $y = 2$ તથા $x = 4$ લેતાં, $y = -2$ મળે.

આથી, આપેલ વક્રને (2, 2) તથા (4, –2) સ્પર્શબિંદુવાળા, 2 ઢાળવાળા, બે સ્પર્શકો મળે.

(2, 2) બિંદુ આગળના સ્પર્શકનું સમીકરણ

$(y - 2) = 2(x - 2)$

$\therefore \quad y - 2x + 2 = 0$ મળે.

તથા (4, –2) બિંદુ આગળના સ્પર્શકનું સમીકરણ

$y - (-2) = 2(x - 4)$

$\therefore \quad y - 2x + 10 = 0$ મળે.

ઉદાહરણ 17 : વક્ર $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1$ પરનાં જે બિંદુઓ આગળના સ્પર્શકો

(i) X-અક્ષને સમાંતર હોય (ii) Y-અક્ષને સમાંતર હોય તે બિંદુઓ શોધો.

ઉકેલ : $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1$ નું x ને સાપેક્ષ વિકલન કરતાં,

$$\frac{x}{2} + \frac{2y}{25}\frac{dy}{dx} = 0$$

અથવા $\frac{dy}{dx} = \frac{-25}{4} \cdot \frac{x}{y}$

(i) હવે, જો સ્પર્શક X-અક્ષને સમાંતર હોય, તો તેનો ઢાળ 0 થાય.

આથી, $\frac{-25}{4} \cdot \frac{x}{y} = 0$. જો $x = 0$ હોય તો અને તો જ આ શક્ય બને.

આથી, $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1$ માં $x = 0$ લેતાં, $y^2 = 25$ એટલે કે, $y = \pm 5$ મળે.

આથી, બિંદુઓ (0, 5) અને (0, –5) આગળના સ્પર્શકો X-અક્ષને સમાંતર છે.

(ii) જો અભિલંબનો ઢાળ શૂન્ય હોય, તો સ્પર્શક Y-અક્ષને સમાંતર હોય. આથી, $\frac{4y}{25x} = 0$ એટલે કે $y = 0$.

આથી, $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1$ માં $y = 0$ લેતાં, $x = \pm 2$ મળે.

આથી, બિંદુઓ (2, 0) અને (–2, 0) આગળના સ્પર્શકો Y-અક્ષને સમાંતર છે.

ઉદાહરણ 18 : વક્ર $y = \frac{x-7}{(x-2)(x-3)}$ એ X-અક્ષને જે બિંદુએ છેદે તે બિંદુ આગળના સ્પર્શકનું સમીકરણ શોધો.

ઉકેલ : X-અક્ષ પર $y = 0$ હોવાથી, વક્રના સમીકરણમાં $y = 0$ લેતાં, $x = 7$ મળે. આથી, વક્ર X-અક્ષને (7, 0) બિંદુએ છેદે છે. હવે, આપેલ વક્રના સમીકરણનું x પ્રત્યે વિકલન કરતાં,

$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - y(2x-5)}{(x-2)(x-3)}$ મળે. **(કેવી રીતે ?)**

અથવા $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(7,0)} = \frac{1-0}{(5)(4)} = \frac{1}{20}$

આથી, (7, 0) બિંદુ આગળના સ્પર્શકનો ઢાળ $\frac{1}{20}$ છે.

આથી, (7, 0) બિંદુ આગળના સ્પર્શકનું સમીકરણ $(y - 0) = \frac{1}{20}(x - 7)$

$\therefore \quad 20y - x + 7 = 0$

ઉદાહરણ 19 : વક્ર $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 2$ના બિંદુ (1, 1) આગળના સ્પર્શક તથા અભિલંબનાં સમીકરણો મેળવો.

ઉકેલ : $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 2$નું x પ્રત્યે વિકલન કરતાં,

$$\frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}} + \frac{2}{3}y^{\frac{-1}{3}} \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \text{ મળે.}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = -\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$$

આથી, (1, 1) બિંદુ આગળના સ્પર્શકનો ઢાળ $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(1,\ 1)} = -1$

આથી, (1, 1) બિંદુ આગળના સ્પર્શકનું સમીકરણ

$y - 1 = -1\,(x - 1)$ એટલે કે, $y + x - 2 = 0$ છે.

વળી, (1, 1) બિંદુ આગળના અભિલંબનો ઢાળ $= \dfrac{-1}{\text{(1, 1) બિંદુ આગળના સ્પર્શકનો ઢાળ}} = 1$

આથી, (1, 1) બિંદુ આગળના અભિલંબનું સમીકરણ $(y - 1) = 1\,(x - 1)$ એટલે કે, $y - x = 0$ મળે.

ઉદાહરણ 20 : $x = a\,sin^3\,t,\ y = b\,cos^3\,t$ પ્રચલ સમીકરણવાળા વક્રના $t = \frac{\pi}{2}$ બિંદુ આગળના સ્પર્શકનું સમીકરણ શોધો.

ઉકેલ : $x = a\,sin^3\,t,\ y = b\,cos^3\,t$ ...(i)

x તથા y ના t પ્રત્યે વિકલન કરતાં,

$$\frac{dx}{dt} = 3a\,sin^2t\,cos\,t \text{ તથા } \frac{dy}{dt} = -3b\,cos^2t\,sin\,t \text{ મળે.}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-3b\,cos^2t\,sin\,t}{3a\,sin^2t\,cos\,t} = \frac{-b\,cos\,t}{a\,sin\,t}$$

આથી, $t = \frac{\pi}{2}$ આગળ, સ્પર્શકનો ઢાળ $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{t = \frac{\pi}{2}} = \dfrac{-b\,cos\frac{\pi}{2}}{a\,sin\frac{\pi}{2}} = 0$

વળી, જ્યારે $t = \frac{\pi}{2}$ હોય ત્યારે $x = a$ અને $y = 0$ મળે.

આથી, વક્રને $t = \frac{\pi}{2}$ આગળના સ્પર્શકનું સમીકરણ એટલે કે,

બિંદુ $(a, 0)$ આગળના સ્પર્શકનું સમીકરણ $(y - 0) = 0\,(x - a)$ એટલે કે, $y = 0$ મળે.

નોંધ : ખરેખર પરિણામ સાચું છે, પરંતુ વધુ યોગ્ય ગણતરી નીચે પ્રમાણે થાય :

$$x = a\,sin^3\,t,\quad y = b\,cos^3\,t \text{ પરથી } \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$$

$$\therefore \quad \frac{2}{3}\left(\frac{x}{a}\right)^{-\frac{1}{3}}\frac{1}{a} + \frac{2}{3}\left(\frac{y}{b}\right)^{-\frac{1}{3}}\frac{1}{b}\frac{dy}{dx} = 0$$