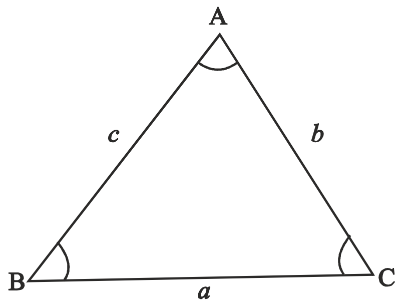
3.6 *Sine* અને *Cosine* સૂત્રોની સાબિતી અને સરળ ઉપયોગ

ધારો કે ABC એક ત્રિકોણ છે. ખૂણો A, એટલે કે બાજુઓ AB અને AC વચ્ચેનો ખૂણો 0° અને 180° વચ્ચે આવેલો છે એમ આપણે માનીશું. ખૂણાઓ B અને C આ જ પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત છે. શિરોબિંદુઓ C, A અને B ની સામેની બાજુએ આવેલી બાજુઓ AB, BC અને CA ને અનુક્રમે *c*, *a* અને *b* વડે દર્શાવીશું. (જુઓ આકૃતિ 3.15.)

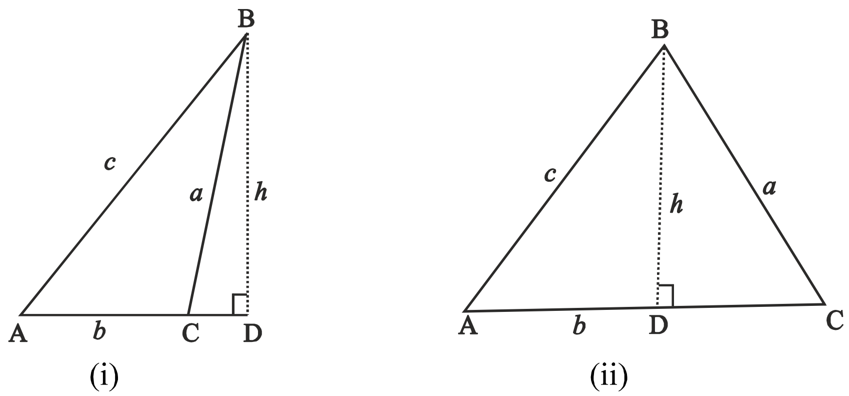


આકૃતિ 3.15

પ્રમેય 4 : (*Sine* સૂત્ર) કોઈ પણ ત્રિકોણની બાજુઓ, તેમની સામે આવેલ ખૂણાના *Sine* ના પ્રમાણમાં છે, એટલે કે ત્રિકોણ ABC માં

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

સાબિતી : ધારો કે 3.16 (i) અને (ii) માં દર્શાવેલ ત્રિકોણમાંથી કોઈ એક ત્રિકોણ ABC લો.



આકૃતિ 3.16

શિરોબિંદુ B થી બાજુ AC ને D માં મળે તેવી રીતે વેધ *h* દોર્યો છે. [(i) માં વેધ D માં મળે તે રીતે AC ને લંબાવી છે.] આકૃતિ 3.16(i) ના કાટકોણ ત્રિકોણ ABD પરથી,

$$\sin A = \frac{h}{c} \quad \text{એટલે કે} \quad h = c \sin A \qquad (1)$$

અને $$\sin (180° - C) = \frac{h}{a} \quad \text{એટલે કે} \quad h = a \sin C \qquad (2)$$

(1) અને (2) પરથી,

$$c \sin A = a \sin C, \text{ i.e., } \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c} \qquad (3)$$

તે જ પ્રમાણે

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} \qquad (4)$$

(3) અને (4) પરથી

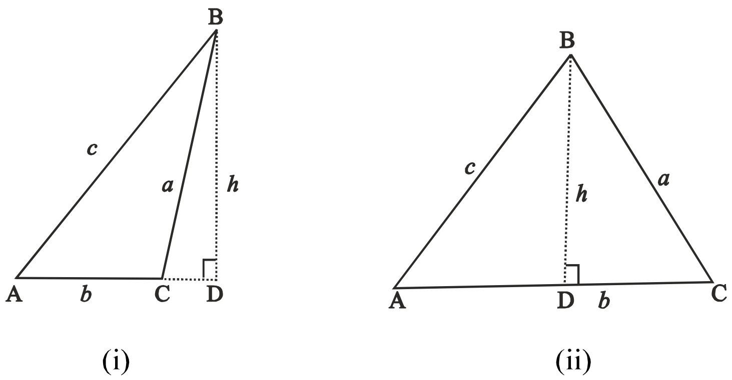
$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

આકૃતિ 3.16 (ii) ના ત્રિકોણ ABC માટે તે જ પ્રમાણે સમીકરણ (3) અને (4) મળે.

પ્રમેય 5 : (*Cosine* સૂત્ર) જો A, B અને C ત્રિકોણના ખૂણાઓ હોય અને a, b અને c એ અનુક્રમે ખૂણાઓ A, B અને C ની સામેની બાજુઓની લંબાઈ હોય, તો

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ cos A$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\ cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ cos C$$

સાબિતી : ધારો કે ત્રિકોણ ABC આકૃતિ 3.17 (i) અથવા (ii) માં આપ્યા પ્રમાણે છે.



આકૃતિ 3.17

આકૃતિ 3.17 (ii) ના સંદર્ભમાં,

$$BC^2 = BD^2 + DC^2 = BD^2 + (AC - AD)^2$$
$$= BD^2 + AD^2 + AC^2 - 2AC \cdot AD$$
$$= AB^2 + AC^2 - 2AC \cdot AB\ cos A$$

અથવા $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ cos A$

તે જ પ્રમાણે આપણે,

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\ cos B$$

અને $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ cos C$ મેળવી શકીએ.

આ સમીકરણો આકૃતિ 3.17 (i) માટે પણ મેળવી શકાય. ત્યાં, C ગુરુકોણ છે.

જ્યારે ખૂણાઓ શોધવાના હોય ત્યારે *cosine* સૂત્રનું નીચે પ્રમાણેનું અનુકૂળ સ્વરૂપ લઈ શકાય :

$$cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac}$$

$$cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

ઉદાહરણ 25 : ત્રિકોણ ABC માં સાબિત કરો કે,

$$\tan\frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}$$

$$\tan\frac{C-A}{2} = \frac{c-a}{c+a}\cot\frac{B}{2}$$

$$\tan\frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2}$$

સાબિતી : *sine* સૂત્ર,

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = k \quad \text{(ધારો)}$$

આથી, $$\frac{b-c}{b+c} = \frac{k(\sin B - \sin C)}{k(\sin B + \sin C)}$$

$$= \frac{2\cos\frac{B+C}{2}\sin\frac{B-C}{2}}{2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}}$$

$$= \cot\frac{(B+C)}{2}\tan\frac{(B-C)}{2}$$

$$= \cot\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right)\tan\left(\frac{B-C}{2}\right)$$

$$= \frac{\tan\frac{B-C}{2}}{\cot\frac{A}{2}}$$

માટે $$\tan\frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}$$

તે જ પ્રમાણે બીજાં પરિણામો સાબિત કરી શકાય. આ પરિણામો *Napier* ની સમતા તરીકે પ્રખ્યાત છે.

ઉદાહરણ 26 : કોઈપણ ત્રિકોણ ABC માટે સાબિત કરો કે,

$$a\sin(B-C) + b\sin(C-A) + c\sin(A-B) = 0$$

ઉકેલ : અહીં,

$$a\sin(B-C) = a[\sin B\cos C - \cos B\sin C] \qquad (1)$$

હવે, $$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} = k \quad \text{(ધારો કે)}$$

માટે, $\sin A = ak$, $\sin B = bk$, $\sin C = ck$

sin B અને *sin* C નું મૂલ્ય (1) માં મૂકતાં અને *cosine* સૂત્રનો ઉપયોગ કરતાં,

$$a\sin(B-C) = a\left[bk\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right) - ck\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2ac}\right)\right]$$

$$= \frac{k}{2}\left(a^2+b^2-c^2-c^2-a^2+b^2\right)$$

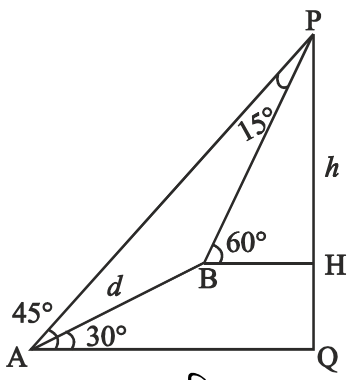
$$= k(b^2-c^2)$$

તે જ પ્રમાણે $b\sin(C-A) = k(c^2-a^2)$

અને $c\sin(A-B) = k(a^2-b^2)$

આથી ડા.બા. $= k(b^2-c^2+c^2-a^2+a^2-b^2) = 0 =$ જ.બા.

ઉદાહરણ 27: h ઊંચાઈના શિરોલંબ ટાવર PQ ની ટોચના બિંદુ P નો A બિંદુએથી ઉત્સેધકોણ 45° અને B બિંદુથી ઉત્સેધકોણ 60° છે. જ્યાં B નું A થી અંતર AB = d છે. AB એ AQ સાથે 30° નો ખૂણો બનાવે છે. સાબિત કરો કે $d = h(\sqrt{3}-1)$.



આકૃતિ 3.18

ઉકેલ : આકૃતિ 3.18 પરથી, $\angle PAQ = 45°$, $\angle BAQ = 30°$, $\angle PBH = 60°$

સ્પષ્ટ છે કે $\angle APQ = 45°, \angle BPH = 30°$ આથી, $\angle APB = 15°$

વળી, $\angle PAB = 15°$ પરથી $\angle ABP = 150°$

ત્રિકોણ APQ પરથી, $AP^2 = h^2 + h^2 = 2h^2$ (કેમ ?)

અથવા $AP = \sqrt{2}h$

Δ ABP માં *sine* સૂત્રનો ઉપયોગ કરતાં,

$$\frac{AB}{\sin 15°} = \frac{AP}{\sin 150°}$$

$$\therefore \frac{d}{\sin 15°} = \frac{\sqrt{2}h}{\sin 150°}$$

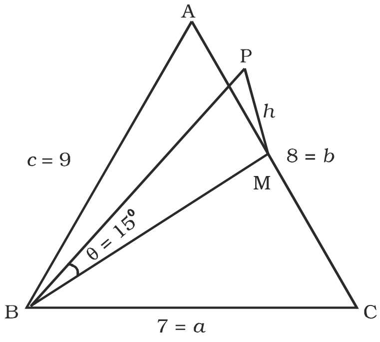
એટલે કે, $$d = \frac{\sqrt{2}h \sin 15°}{\sin 30°}$$

$$= h(\sqrt{3}-1)$$ (કેમ ?)

ઉદાહરણ 28 : ત્રિકોણીય પ્લોટ ABC ની બાજુ AC ના મધ્યબિંદુ M પર દીવાનો થાંભલો આવેલ છે. પ્લોટની બાજુઓ BC = 7 મીટર, CA = 8 મીટર અને AB = 9 મીટર છે. આ થાંભલો બિંદુ B આગળ 15° નો ખૂણો આંતરે છે. દીવાના થાંભલાની ઊંચાઈ નક્કી કરો.

ઉકેલ : આકૃતિ 3.19 પરથી AB = 9 મી = c, BC = 7 મી = a અને AC = 8 મી = b.

AC નું મધ્યબિંદુ M છે ત્યાં h (ધારો કે) ઊંચાઈનો દિવાનો થાંભલો MP આવેલો છે. ફરી, ધારો કે દીવાનો થાંભલો B બિંદુએ 15° નો ખૂણો આંતરે છે.



આકૃતિ 3.19

ΔABC માં *cosine* સૂત્રનો ઉપયોગ કરતાં,

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{49 + 64 - 81}{2 \times 7 \times 8} = \frac{2}{7} \qquad (1)$$

તે જ પ્રમાણે Δ BMC માટે *cosine* સૂત્રનો ઉપયોગ કરતાં,

$$BM^2 = BC^2 + CM^2 - 2\ BC \times CM \cos C.$$

અહીં AC નું મધ્યબિંદુ M હોવાથી $CM = \frac{1}{2} CA = 4$

માટે (1) નો ઉપયોગ કરતાં,

$$BM^2 = 49 + 16 - 2 \times 7 \times 4 \times \frac{2}{7} = 49$$

$$\therefore \quad BM = 7$$

આમ, M બિંદુએ કાટખૂણાવાળા ΔBMP પરથી,

$$\tan\theta = \frac{PM}{BM} = \frac{h}{7}$$

અથવા $\frac{h}{7} = \tan 15° = 2 - \sqrt{3}$ (કેમ ?)

અથવા $h = 7(2 - \sqrt{3})m.$

સ્વાધ્યાય 3.5

કોઈપણ ત્રિકોણ ABC માટે જો $a = 18$, $b = 24$, $c = 30$, તો નીચેનાં મૂલ્ય શોધો : (પ્રશ્ન 1 તથા 2)

1. $\cos A$, $\cos B$, $\cos C$
2. $\sin A$, $\sin B$, $\sin C$

કોઈપણ ત્રિકોણ ABC માટે સાબિત કરો, (પ્રશ્ન 3 થી 13)

3. $\dfrac{a+b}{c} = \dfrac{\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\sin\frac{C}{2}}$

4. $\dfrac{a-b}{c} = \dfrac{\sin\left(\dfrac{A-B}{2}\right)}{\cos\dfrac{C}{2}}$

5. $\sin\dfrac{B-C}{2} = \dfrac{b-c}{a}\cos\dfrac{A}{2}$

6. $a\,(b\cos C - c\cos B) = b^2 - c^2$

7. $a\,(\cos C - \cos B) = 2\,(b-c)\cos^2\dfrac{A}{2}$

8. $\dfrac{\sin(B-C)}{\sin(B+C)} = \dfrac{b^2-c^2}{a^2}$

9. $(b+c)\cos\dfrac{B+C}{2} = a\cos\dfrac{B-C}{2}$

10. $a\cos A + b\cos B + c\cos C = 2a\sin B\sin C$

11. $\dfrac{\cos A}{a} + \dfrac{\cos B}{b} + \dfrac{\cos C}{c} = \dfrac{a^2+b^2+c^2}{2abc}$

12. $(b^2-c^2)\cot A + (c^2-a^2)\cot B + (a^2-b^2)\cot C = 0$

13. $\dfrac{b^2-c^2}{a^2}\sin 2A + \dfrac{c^2-a^2}{b^2}\sin 2B + \dfrac{a^2-b^2}{c^2}\sin 2C = 0$

14. એક ટેકરી પર શિરોલંબ દિશામાં એક વૃક્ષ ઊભું છે. તે ક્ષિતિજ સાથે 15° નો ખૂણો બનાવે છે. ટેકરી પરના વૃક્ષના તળિયેથી 35 મી નીચે આવેલા મેદાનના એક બિંદુએથી જોતાં વૃક્ષની ટોચનો ઉત્સેધકોણ 60° માલૂમ પડે છે. વૃક્ષની ઊંચાઈ શોધો.

15. બે જહાજ એક સાથે બંદર છોડે છે. એક જહાજ 24 કિમી/કલાકની ઝડપે ઈશાન દિશામાં અને બીજું 32 કિમી/કલાકની ઝડપે દક્ષિણથી પૂર્વ દિશા સાથે 75° ના ખૂણે જાય છે. ત્રણ કલાક પછી બંને જહાજ વચ્ચેનું અંતર શોધો.

16. નદીની એક જ બાજુએ બે વૃક્ષ A અને B આવેલાં છે. નદીમાંના બિંદુ C થી વૃક્ષ A અને વૃક્ષ B નાં અંતર અનુક્રમે 250 મીટર અને 300 મીટર છે. જો ખૂણો C એ 45° નો હોય તો તે બે વૃક્ષ વચ્ચેનું અંતર શોધો. ($\sqrt{2} = 1.44$)

પ્રકીર્ણ ઉદાહરણો

ઉદાહરણ 29 : જો x અને y બંને બીજા ચરણમાં હોય અને $\sin x = \frac{3}{5}$, $\cos y = -\frac{12}{13}$, તો $\sin(x+y)$ નું મૂલ્ય શોધો.

ઉકેલ : આપણે જાણીએ છીએ કે,

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \qquad \dots (1)$$

હવે, $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$

∴ $\cos x = \pm\frac{4}{5}$.

વળી, x બીજા ચરણમાં હોવાથી, $\cos x$ ઋણ થશે.

આથી, $\cos x = -\frac{4}{5}$

હવે, $\sin^2 y = 1 - \cos^2 y = 1 - \frac{144}{169} = \frac{25}{169}$

તેથી, $\sin y = \pm\frac{5}{13}$.

પરંતુ y બીજા ચરણમાં હોવાથી $\sin y$ ધન હશે. આથી $\sin y = \frac{5}{13}$.

(1) માં $\sin x$, $\sin y$, $\cos x$ અને $\cos y$ નાં મૂલ્યો મૂકતાં,

$$\sin(x+y) = \frac{3}{5}\times\left(-\frac{12}{13}\right)+\left(-\frac{4}{5}\right)\times\frac{5}{13} = -\frac{36}{65}-\frac{20}{65} = -\frac{56}{65}.$$

ઉદાહરણ 30 : સાબિત કરો કે,

$$\cos 2x \cos\frac{x}{2} - \cos 3x \cos\frac{9x}{2} = \sin 5x \sin\frac{5x}{2}.$$

ઉકેલ : અહીં, ડા. બા. $= \frac{1}{2}\left[2\cos 2x \cos\frac{x}{2} - 2\cos\frac{9x}{2}\cos 3x\right]$

$$= \frac{1}{2}\left[\cos\left(2x+\frac{x}{2}\right)+\cos\left(2x-\frac{x}{2}\right)-\cos\left(\frac{9x}{2}+3x\right)-\cos\left(\frac{9x}{2}-3x\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\cos\frac{5x}{2}+\cos\frac{3x}{2}-\cos\frac{15x}{2}-\cos\frac{3x}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\cos\frac{5x}{2}-\cos\frac{15x}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[-2sin\left\{\frac{\frac{5x}{2}+\frac{15x}{2}}{2}\right\} sin\left\{\frac{\frac{5x}{2}-\frac{15x}{2}}{2}\right\}\right]$$

$$= -sin\,5x\; sin\left(-\frac{5x}{2}\right)$$

$$= sin\,5x\; sin\frac{5x}{2} = \text{જ. બા.}$$

ઉદાહરણ 31 : $tan\ \frac{\pi}{8}$ ની કિંમત શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે, $x = \frac{\pi}{8}$. આથી $2x = \frac{\pi}{4}$.

હવે, $tan\ 2x = \frac{2\,tanx}{1 - tan^2 x}$

$\therefore \quad tan\frac{\pi}{4} = \frac{2\,tan\frac{\pi}{8}}{1 - tan^2\frac{\pi}{8}}$

ધારો કે, $y = tan\ \frac{\pi}{8}$. તેથી $1 = \frac{2y}{1-y^2}$

અથવા $y^2 + 2y - 1 = 0$

આથી, $y = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}$

પરંતુ $\frac{\pi}{8}$ પ્રથમ ચરણમાં હોવાથી $y = tan\ \frac{\pi}{8}$ ધન થાય.

આથી, $tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$.

ઉદાહરણ 32 : જો $tan\ x = \frac{3}{4}, \pi < x < \frac{3\pi}{2}$, તો $sin\frac{x}{2}$, $cos\frac{x}{2}$ અને $tan\frac{x}{2}$ નાં મૂલ્ય શોધો.

ઉકેલ : $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ હોવાથી $cos\,x$ ઋણ થશે.

વળી, $\frac{\pi}{2} < \frac{x}{2} < \frac{3\pi}{4}$.

$\therefore \quad sin\ \frac{x}{2}$ ધન છે અને $cos\ \frac{x}{2}$ ઋણ થાય.

હવે, $sec^2x = 1 + tan^2x = 1+\frac{9}{16} = \frac{25}{16}$

$\therefore$ $cos^2x = \frac{16}{25}$ અથવા $cos\ x = -\frac{4}{5}$ (કેમ ?)

હવે, $2sin^2\frac{x}{2} = 1 - cos\ x = 1+\frac{4}{5} = \frac{9}{5}$.

$\therefore sin^2\frac{x}{2} = \frac{9}{10}$

અથવા $sin\frac{x}{2} = \frac{3}{\sqrt{10}}$ (કેમ ?)

વળી, $2cos^2\frac{x}{2} = 1+ cos\ x = 1-\frac{4}{5} = \frac{1}{5}$

$\therefore$ $cos^2\frac{x}{2} = \frac{1}{10}$

અથવા $cos\frac{x}{2} = -\frac{1}{\sqrt{10}}$ (કેમ ?)

આથી, $tan\frac{x}{2} = \frac{sin\frac{x}{2}}{cos\frac{x}{2}} = \frac{3}{\sqrt{10}}\times\left(\frac{-\sqrt{10}}{1}\right) = -3.$

ઉદાહરણ 33 : સાબિત કરો કે, $cos^2x + cos^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+cos^2\left(x-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{2}$

ઉકેલ : અહીં, ડા. બા. $= \frac{1+cos\ 2x}{2}+\frac{1+cos\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)}{2}+\frac{1+cos\left(2x-\frac{2\pi}{3}\right)}{2}$.

$= \frac{1}{2}\left[3+cos\ 2x+cos\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)+cos\left(2x-\frac{2\pi}{3}\right)\right]$

$= \frac{1}{2}\left[3+cos\ 2x+2cos\ 2x\ cos\frac{2\pi}{3}\right]$

$= \frac{1}{2}\left[3+cos\ 2x+2cos\ 2x\,cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)\right]$

$= \frac{1}{2}\left[3+cos\ 2x-2cos\ 2x\ cos\frac{\pi}{3}\right]$

$= \frac{1}{2}[3+cos\ 2x-cos\ 2x] = \frac{3}{2}$ = જ. બા.

પ્રકીર્ણ સ્વાધ્યાય 3

સાબિત કરો :

1. $2\cos\frac{\pi}{13}\cos\frac{9\pi}{13}+\cos\frac{3\pi}{13}+\cos\frac{5\pi}{13}=0$

2. $(\sin 3x+\sin x)\sin x+(\cos 3x-\cos x)\cos x=0$

3. $(\cos x+\cos y)^2+(\sin x-\sin y)^2=4\cos^2\frac{x+y}{2}$

4. $(\cos x-\cos y)^2+(\sin x-\sin y)^2=4\sin^2\frac{x-y}{2}$

5. $\sin x+\sin 3x+\sin 5x+\sin 7x=4\cos x\cos 2x\sin 4x$

6. $\frac{(\sin 7x+\sin 5x)+(\sin 9x+\sin 3x)}{(\cos 7x+\cos 5x)+(\cos 9x+\cos 3x)}=\tan 6x$

7. $\sin 3x+\sin 2x-\sin x=4\sin x\cos\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2}$

નીચેના પ્રત્યેક પ્રશ્ન માટે $\sin\frac{x}{2}$, $\cos\frac{x}{2}$ અને $\tan\frac{x}{2}$ ની કિંમતો શોધો.

8. $\tan x=-\frac{4}{3}$, x એ બીજા ચરણમાં છે.

9. $\cos x=-\frac{1}{3}$, x એ ત્રીજા ચરણમાં છે.

10. $\sin x=\frac{1}{4}$, x એ બીજા ચરણમાં છે.

સારાંશ

- r ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળમાં, l લંબાઈનું ચાપ કેન્દ્ર આગળ θ રેડિયન માપનો ખૂણો આંતરે તો, $l=r\theta$
- રેડિયન માપ $=\frac{\pi}{180}\times$ અંશ માપ
- અંશ માપ $=\frac{180}{\pi}\times$ રેડિયન માપ
- $\cos^2 x+\sin^2 x=1$
- $1+\tan^2 x=\sec^2 x$
- $1+\cot^2 x=\mathrm{cosec}^2 x$
- $\cos(2n\pi+x)=\cos x$
- $\sin(2n\pi+x)=\sin x$
- $\sin(-x)=-\sin x$
- $\cos(-x)=\cos x$
- $\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$
- $\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y$

- $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin x$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos x$
- $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$
- $\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -\sin x$ $\quad\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \cos x$

  $\cos(\pi - x) = -\cos x$ $\quad\sin(\pi - x) = \sin x$

  $\cos(\pi + x) = -\cos x$ $\quad\sin(\pi + x) = -\sin x$

  $\cos(2\pi - x) = \cos x$ $\quad\sin(2\pi - x) = -\sin x$

- જો x, y અને $(x \pm y)$ એ $\frac{\pi}{2}$ ના અયુગ્મ ગુણિત ના હોય, તો

  $$\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

  $$\tan(x - y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$

- જો x, y અને $(x \pm y)$ એ π ના ગુણિત ના હોય, તો

  $$\cot(x + y) = \frac{\cot x \cot y - 1}{\cot y + \cot x}$$

  $$\cot(x - y) = \frac{\cot x \cot y + 1}{\cot y - \cot x}$$

- $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$
- $\sin 2x = 2 \sin x \cos x = \frac{2\tan x}{1 + \tan^2 x}$
- $\tan 2x = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$
- $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$
- $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$
- $\tan 3x = \frac{3\tan x - \tan^3 x}{1 - 3\tan^2 x}$
- (i) $\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$

  (ii) $\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$

(iii) $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$

(iv) $\sin x - \sin y = 2\cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$

- (i) $2\cos x \cos y = \cos (x + y) + \cos (x - y)$

  (ii) $-2\sin x \sin y = \cos (x + y) - \cos (x - y)$

  (iii) $2\sin x \cos y = \sin (x + y) + \sin (x - y)$

  (iv) $2 \cos x \sin y = \sin (x + y) - \sin (x - y)$.

- $\sin = 0$ પરથી $x = n\pi$, જ્યાં $n \in \mathbf{Z}$.
- જો $\cos x = 0$ હોય, તો $x = (2n + 1) \frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$ અને પ્રતીપ પણ સત્ય છે.
- જો $\sin x = \sin y$ હોય, તો $x = n\pi + (-1)^n y$, $n \in \mathbf{Z}$ અને પ્રતીપ પણ સત્ય છે.
- જો $\cos x = \cos y$ હોય, તો $x = 2n\pi \pm y$, $n \in \mathbf{Z}$ અને પ્રતીપ પણ સત્ય છે.
- જો $\tan x = \tan y$ હોય, તો $x = n\pi + y$, $n \in \mathbf{Z}$ અને પ્રતીપ પણ સત્ય છે.

Historical Note

The study of trigonometry was first started in India. The ancient Indian Mathematicians, Aryabhatta (476), Brahmagupta (598), Bhaskara I (600) and Bhaskara II (1114) got important results. All this knowledge first went from India to middle-east and from there to Europe. The Greeks had also started the study of trigonometry but their approach was so clumsy that when the Indian approach became known, it was immediately adopted throughout the world.

In India, the predecessor of the modern trigonometric functions, known as the sine of an angle, and the introduction of the sine function represents the main contribution of the *siddhantas* (Sanskrit astronomical works) to the history of mathematics.

Bhaskara I (about 600) gave formulae to find the values of sine functions for angles more than 90°. A sixteenth century Malayalam work *Yuktibhasa* (period) contains a proof for the expansion of *sin* (A + B). Exact expression for sines or cosines of 18°, 36°, 54°, 72°, etc., are given by Bhaskara II.

The symbols $\sin^{-1} x$, $\cos^{-1} x$, etc., for arc $\sin x$, arc $\cos x$, etc., were suggested by the astronomer Sir John F.W. Hersehel (1813) The names of Thales (about 600 B.C.) is invariably associated with height and distance problems. He is credited with the determination of the height of a great pyramid in Egypt by measuring shadows of the pyramid and an auxiliary staff (or gnomon) of known height, and comparing the ratios:

$$\frac{H}{S} = \frac{h}{s} = \tan \text{(sun's altitude)}$$

Thales is also said to have calculated the distance of a ship at sea through the proportionality of sides of similar triangles. Problems on height and distance using the similarity property are also found in ancient Indian works.

પ્રકરણ 4

ગાણિતિક અનુમાનનો સિદ્ધાંત

❖ *Analysis and natural philosophy owe their most important discoveries to this fruitful means, which is called induction. Newton was indebted to it for his theorem of the binomial and the principle of universal gravity. – LAPLACE* ❖

4.1 પ્રાસ્તાવિક

ગણિતની સંકલ્પનામાં આનુમાનિક વિચારશક્તિ એ એક પાયાની ચાવી છે. નીચેનાં ત્રણ વિધાનોમાં દર્શાવેલ દલીલ એ ઉપાર્જિત, અવિધિસરનું અને આનુમાનિક વિચારશક્તિનું ઉદાહરણ છેઃ

(a) સોક્રેટિસ એ પુરુષ છે.

(b) બધા જ પુરુષો મર્ત્ય છે.

તેથી (c) સોક્રેટિસ મર્ત્ય છે.

જો વિધાન (a) અને (b) સત્ય હોય, તો (c)ની સત્યાર્થતા સ્થાપિત થાય છે. ગણિતની દૃષ્ટિએ આ દલીલ સરળ બનાવવા માટે આપણે લખીશું કે,

(i) આઠ એ બે વડે વિભાજ્ય છે.

(ii) બેથી વિભાજ્ય કોઈ પણ સંખ્યા યુગ્મ સંખ્યા છે.

માટે (iii) આઠ યુગ્મ સંખ્યા છે.

ટૂંકમાં તારણ એ સામાન્ય રીતે ગણિતમાં અનુમાન અથવા પ્રમેય કહેવાતું સાબિત કરવાનું વિધાન છે. પ્રમાણિત તારવણીનાં પગલાં મળે અને તેની સાબિતી સ્થાપિત થઈ શકે, અથવા ન પણ થઈ શકે, એટલે કે, તારવણી એ વ્યાપક વિકલ્પ પરથી વિશિષ્ટ વિકલ્પ માટે ઉપયોગી છે.

G. Peano
(1858-1932)

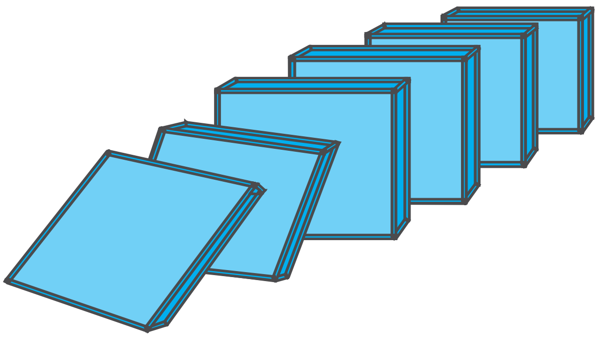
તારવણીના પ્રતિપક્ષે અનુમાનજન્ય દલીલો તમામ વિકલ્પોની ગણતરી પર આધારિત હોય છે અને આપણે દરેક વિકલ્પોના નિરીક્ષણ પરથી એક અનુમાન વિકસાવીએ છીએ. માહિતીના સંચય અને વિશ્લેષણના ઉદ્દેશ માટે ગણિતમાં તેનો વારંવાર ઉપયોગ થાય છે અને તે વૈજ્ઞાનિક દલીલ માટે ચાવીરૂપ ખ્યાલ છે.

આમ, સરળ ભાષામાં કહીએ, તો વિશિષ્ટ સત્યો અથવા વિકલ્પો પરથી વ્યાપક પરિણામની પ્રાપ્તિ એ અનુમાન શબ્દનો અર્થ છે.

બીજગણિત અથવા ગણિતની અન્ય શાખાઓનાં કેટલાંક પરિણામો; અથવા વિધાનો ધનપૂર્ણાંક n ના સ્વરૂપમાં રચવામાં આવે છે. આવાં વિધાનોની સાબિતી માટે વિશિષ્ટ તકનિક આધારિત સુનિયોજિત સિદ્ધાંત વપરાય છે અને તેને *ગાણિતિક અનુમાનનો સિદ્ધાંત* કહે છે.

4.2 વિષયાભિમુખ

ગણિતમાં આપણે પૂર્ણ અનુમાનના રૂપના ઉપયોગને ગાણિતિક અનુમાન કહીશું. ગાણિતિક અનુમાનના પાયાના સિદ્ધાંતને સમજવા માટે, ધારો કે પાતળી તક્તીઓને આકૃતિ 4.1 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે ગોઠવી છે :



આકૃતિ 4.1

જ્યારે પ્રથમ તક્તીને સૂચિત દિશામાં ધક્કો મારવામાં આવે, ત્યારે તમામ તક્તીઓ પડી જશે. બધી જ તક્તીઓ નિશ્ચિત રૂપે પડી જ જશે એમ નક્કી કરવા માટે, આપણે

(a) પ્રથમ તક્તી પડશે, અને

(b) પ્રથમ તક્તી પડવાની ઘટના બને તો તેની તરત પછીની તક્તી જરૂર પડશે, તેમ જાણવું પર્યાપ્ત છે. આ ગાણિતિક અનુમાનનો પાયાનો સિદ્ધાંત છે.

આપણે જાણીએ છીએ કે, પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો ગણ એ વાસ્તવિક સંખ્યાઓના ગણનો વિશિષ્ટ ક્રમિત ઉપગણ છે. વાસ્તવમાં **N** એ નીચેના ગુણધર્મવાળો **R** નો નાનામાં નાનો ઉપગણ છે.

ગણ S માટે $1 \in S$ અને $x \in S$ હોય તો $x + 1 \in S$ થાય તે પ્રમાણેના ગુણધર્મ ધરાવતા ગણ S ને અનુમાનિત ગણ કહીશું. **N** એ **R** નો નાનામાં નાનો અનુમાનિત ઉપગણ છે. તે પરથી ફલિત થાય છે કે **R** ના કોઈ પણ અનુમાનિત ઉપગણમાં **N** સમાવિષ્ટ હોય જ.

દ્રષ્ટાંત :

ધારો કે આપણે ધનપૂર્ણાંક સંખ્યાઓ 1, 2, 3......n ના સરવાળા માટેનું સૂત્ર શોધવું છે, એટલે કે જ્યારે $n = 3$ હોય, ત્યારે $1 + 2 + 3$ નું મૂલ્ય, $n = 4$ હોય, ત્યારે $1 + 2 + 3 + 4$ નું મૂલ્ય મેળવવાનું સૂત્ર અને આ

જ પ્રમાણે આગળ વધીએ તથા ધારો કે કોઈક રીતે આપણે સૂત્ર $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$ સત્ય છે તેમ સ્વીકારીએ છીએ. ખરેખર, આ સૂત્ર કેવી રીતે સાબિત થશે ? આમ તો, આપણે n ની યથેચ્છ ધન પૂર્ણાંક કિંમતો માટે તેની ચકાસણી કરીશું. પરંતુ આ પ્રક્રિયાથી n ની તમામ કિંમતો માટે આ સૂત્ર સાબિત થશે નહિ. આ માટે એ જરૂરી છે કે કોઈક પ્રકારની પ્રક્રિયાઓની એક એવી શ્રૃંખલા મળે કે જેની અસરથી એક વખત વિશિષ્ટ ધન પૂર્ણાંક માટે સૂત્ર સાબિત કર્યું હોય તો એ સૂત્ર તે પછીના ધન પૂર્ણાંક માટે અને પછી અનિર્ણિત સુધી સ્વયં સત્ય ઠરે. આવી પ્રક્રિયા ગાણિતિક અનુમાનની રીતથી મળશે એમ માની શકીએ.

4.3 ગાણિતિક અનુમાનનો સિદ્ધાંત

ધારો કે પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ n સંબંધી એક વિધાન $P(n)$ આપેલું છે.

(i) *વિધાન $n = 1$ માટે સત્ય હોય એટલે કે $P(1)$ સત્ય હોય અને*

(ii) *જો વિધાન $n = k$ માટે સત્ય હોય (જ્યાં k કોઈ ધન પૂર્ણાંક છે), તો વિધાન $n = k + 1$ માટે પણ સત્ય હોય, એટલે કે, $P(k)$ની સત્યાર્થતા પરથી $P(k + 1)$ની સત્યાર્થતા ફલિત થાય, તો $P(n)$ એ તમામ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ n માટે સત્ય છે.*

ગુણધર્મ (i) સામાન્ય રીતે વિધાનની સત્યાર્થતા બતાવે છે. એવી પણ પરિસ્થિતિનું નિર્માણ થાય કે વિધાન તમામ $n \geq 4$ માટે સત્ય હોય. આ પરિસ્થિતિમાં, પગલું (i), $n = 4$ થી શરૂ થશે અને આપણે $n = 4$ માટે પરિણામની સત્યાર્થતા ચકાસીશું, એટલે કે $P(4)$ ની સત્યાર્થતા.

ગુણધર્મ (ii) એ શરતી ગુણધર્મ છે. આપેલ વિધાન $n = k$ માટે સત્ય છે તેમ સ્પષ્ટ થતું નથી. પરંતુ તે એટલું કહે છે કે, જો વિધાન $n = k$ માટે સત્ય હોય, તો તે $n = k + 1$ માટે પણ સત્ય છે. આથી, વિધાન આ ગુણધર્મ ધરાવે છે તેમ સાબિત કરવા માટે, માત્ર નીચેનો શરતી પ્રસ્તાવ જ સાબિત કરવો પડે.

'જો વિધાન $n = k$ માટે સત્ય હોય, તો તે $n = k + 1$ માટે પણ સત્ય છે.' કેટલીક વખત આ પગલાને અનુમાનિત પગલા તરીકે ગણાય છે. વિધાન $n = k$ માટે સત્ય છે એવી ધારણાના આ અનુમાનિત પગલાને અનુમાનિત કલ્પના કહે છે.

ઉદાહરણ તરીકે, એક સૂત્રની કલ્પના કરી હોય અને ગણિતમાં તેના વારંવાર ઉપયોગથી તે કોઈ નમૂના પ્રમાણે બંધબેસતી હોય, જેમકે,

$$1 = 1^2 = 1$$

$$4 = 2^2 = 1 + 3$$

$$9 = 3^2 = 1 + 3 + 5$$

$$16 = 4^2 = 1 + 3 + 5 + 7, \text{ વગેરે.}$$

તેના પરથી નોંધીશું કે પ્રથમ બે અયુગ્મ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો સરવાળો એ બીજી પ્રાકૃતિક સંખ્યાનો વર્ગ છે, પ્રથમ ત્રણ અયુગ્મ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો સરવાળો એ ત્રીજી પ્રાકૃતિક સંખ્યાનો વર્ગ છે. આ પ્રમાણે આગળ મળે. આ ઉપરના નિયમ પરથી $1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2n - 1) = n^2$ દેખાય છે, એટલે કે પ્રથમ n અયુગ્મ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો સરવાળો n નો વર્ગ છે.

આપણે, P(n): $1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2n - 1) = n^2$ લખી શકીએ.

પ્રત્યેક n માટે આપણે P(n) સત્ય છે તેમ સાબિત કરીશું.

સાબિતીના પ્રથમ સોપાન માટે ગાણિતિક અનુમાનના ઉપયોગ માટે P(1) સત્ય છે તેમ સાબિત કરીશું.

આ પગથિયાને પાયાનું પગથિયું કહે છે.

$1 = 1^2$ દેખીતું જ છે, એટલે કે, P(1) સત્ય છે.

બીજા પગલાને અનુમાનિત સોપાન કહીશું. અહીં, આપણે ધારીશું કે કોઈક ધન પૂર્ણાંક k માટે P(k) સત્ય છે અને P(k + 1) સત્ય સાબિત કરવાની જરૂરિયાત ઊભી થશે. P(k) સત્ય છે, માટે

$$1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2k - 1) = k^2 \quad ... (1)$$

હવે,

$$1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2k - 1) + \{2(k+1) - 1\} \quad ... (2)$$

$$= k^2 + (2k + 1) = (k + 1)^2 \quad [(1) \text{ પરથી}]$$

માટે P(k + 1) સત્ય છે અને અનુમાનિત સાબિતી હવે પૂરી થઈ.

આથી P(n) એ તમામ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ n માટે સત્ય છે.

ઉદાહરણ 1 : $n \geq 1$ માટે; સાબિત કરો કે,

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

ઉકેલ : ધારો કે આપેલ વિધાનને P(n) દ્વારા દર્શાવીએ, એટલે કે,

$$P(n): \ 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$n = 1$ લેતાં, $P(1) : 1 = \frac{1(1+1)(2\times1+1)}{6} = \frac{1\times2\times3}{6} = 1$ સત્ય છે.

ધારો કે, કોઈક ધન પૂર્ણાંક k માટે P(k) સત્ય છે, એટલે કે,

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} \quad ... (1)$$

હવે આપણે P(k + 1) પણ સત્ય છે તેમ સાબિત કરીશું. હવે આપણી પાસે,

$$(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + k^2) + (k + 1)^2$$

$$= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \quad [(1) \text{ પરથી}]$$

$$= \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6}$$

$$= \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6}$$

$$= \frac{(k+1)(k+1+1)\{2(k+1)+1\}}{6}$$

આમ P(k) સત્ય હોય ત્યારે P(k + 1) સત્ય છે.

આથી ગાણિતિક અનુમાનના સિદ્ધાંતથી, તમામ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ n માટે વિધાન P(n) સત્ય છે.

ઉદાહરણ 2 : તમામ ધન પૂર્ણાંક n માટે સાબિત કરો કે $2^n > n$

ઉકેલ : ધારો કે P(n): $2^n > n$

જો $n = 1$, તો $2^1 > 1$. આથી P(1) સત્ય છે.

$k = 2$ માટે $2^2 = 4 > 2$. ... (1)

આથી P(2) = P(1 + 1) સત્ય છે.

ધારો કે 1 થી મોટા કોઈક ધન પૂર્ણાંક k માટે P(k) સત્ય છે, એટલે કે, $2^k > k$

હવે આપણે સાબિત કરીશું કે જો P(k) સત્ય હોય, તો P(k + 1) સત્ય છે.

$k > 1$ માટે (1) ની બંને બાજુએ 2 વડે ગુણતાં,

$$2 \cdot 2^k > 2k$$

એટલે કે, $2^{k+1} > 2k = k + k > k + 1$ $(k > 1)$

આથી જો P(k) સત્ય હોય, તો P(k + 1) સત્ય છે. આથી ગાણિતિક અનુમાનના સિદ્ધાંતથી, દરેક ધન પૂર્ણાંક n માટે P(n) સત્ય છે.

ઉદાહરણ 3 : પ્રત્યેક $n \ge 1$ માટે સાબિત કરો કે,

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

ઉકેલ : આપણે P(n) : $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$ લઈશું.

આપણે નોંધીએ કે P(1) : $\frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$ સત્ય છે. આમ $n = 1$ માટે P(n) સત્ય છે.

ધારો કે પ્રાકૃતિક સંખ્યા k માટે P(k) સત્ય છે,

એટલે કે $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1}$ ....(1)

જો P(k) સત્ય હોય, તો P(k + 1) સત્ય છે, તેમ આપણે સાબિત કરીશું.

હવે, $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)}$

$$= \left[\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{k(k+1)}\right] + \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$ [(1) પરથી]

$$= \frac{k^2 + 2k + 1}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{k+1}{k+2}$$

$$= \frac{k+1}{(k+1)+1}$$

આમ જો P(k) સત્ય હોય, તો P(k + 1) સત્ય હોય. આથી ગાણિતિક અનુમાનના સિદ્ધાંત પરથી, તમામ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ n માટે P(n) સત્ય છે.

ઉદાહરણ 4 : પ્રત્યેક ધન પૂર્ણાંક n માટે સાબિત કરો કે $7^n - 3^n$ એ 4 વડે વિભાજ્ય છે.

ઉકેલ : આપણે લખીશું કે, P(n): $7^n - 3^n$ એ 4 વડે વિભાજ્ય છે.

આપણે નોંધીશું કે,

P(1): $7^1 - 3^1 = 4$ એ 4 વડે વિભાજ્ય છે. આમ $n = 1$ માટે P(n) સત્ય છે.

ધારો કે, પ્રાકૃતિક સંખ્યા k માટે P(k) સત્ય છે,

એટલે કે, P(k) : $7^k - 3^k$ એ 4 વડે વિભાજ્ય છે તે સત્ય છે.

આપણે $d \in \mathbf{N}$ માટે, $7^k - 3^k = 4d$ લખીશું.

હવે, આપણે જો P(k) સત્ય હોય, તો P(k + 1) સત્ય છે સાબિત કરીશું.

હવે, $7^{(k+1)} - 3^{(k+1)} = 7^{(k+1)} - 7 \cdot 3^k + 7 \cdot 3^k - 3^{(k+1)}$

$$= 7(7^k - 3^k) + (7-3)3^k$$

$$= 7(4d) + (7-3)3^k$$

$$= 7(4d) + 4 \cdot 3^k$$

$$= 4(7d + 3^k)$$

છેલ્લા સોપાન પરથી આપણે કહી શકીએ કે, $7^{(k+1)} - 3^{(k+1)}$ એ 4 વડે વિભાજ્ય છે.

આમ, જો P(k) સત્ય હોય, તો P(k + 1) સત્ય છે.

આથી ગાણિતિક અનુમાનના સિદ્ધાંત પ્રમાણે આપેલ વિધાન પ્રત્યેક ધન પૂર્ણાંક n માટે સત્ય છે.

ઉદાહરણ 5 : તમામ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ n માટે સાબિત કરો કે $(1 + x)^n \geq (1 + nx)$, જ્યાં $x > -1$.

ઉકેલ : ધારો કે આપેલું વિધાન P(n) છે,

એટલે કે, P(n): $(1 + x)^n \geq (1 + nx)$, $x > -1$

આપણે નોંધીશું કે $n = 1$ માટે P(n) સત્ય છે, કારણ કે $x > -1$ માટે $(1 + x)^1 \geq (1 + 1 \cdot x)$

ધારો કે P(k): $(1 + x)^k \geq (1 + kx)$, $x > -1$ સત્ય છે. ... (1)

જો P(k) સત્ય હોય, તો P(k + 1) એ $x > -1$ માટે સત્ય છે તેમ સાબિત કરીએ. ... (2)

નિત્યસમ, $(1 + x)^{k+1} = (1 + x)^k (1 + x)$ લઈએ.

$x > -1$ આપેલું હોવાથી, $(1 + x) > 0$.

માટે $(1 + x)^k \geq (1 + kx)$ નો ઉપયોગ કરતાં,

$(1 + x)^{k+1} \geq (1 + kx)(1 + x)$ મળે.

એટલે કે, $(1 + x)^{k+1} \geq (1 + x + kx + kx^2)$ ....(3)

અહીં k પ્રાકૃતિક સંખ્યા છે અને $x^2 \geq 0$. આથી $kx^2 \geq 0$.

માટે $(1 + x + kx + kx^2) \geq (1 + x + kx)$. અર્થાત્ $(1 + x)^{k+1} \geq (1 + (1 + k)x)$

આમ, વિધાન (2) સત્ય થશે. આથી ગાણિતિક અનુમાનના સિદ્ધાંતથી તમામ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ માટે P(n) સત્ય છે.

ઉદાહરણ 6 : સાબિત કરો કે,

પ્રત્યેક $n \in \mathbf{N}$ માટે $2 \cdot 7^n + 3 \cdot 5^n - 5$ એ 24 વડે વિભાજ્ય છે.

ઉકેલ : વિધાન P(n) નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત કરીએ :

P(n) : $2 \cdot 7^n + 3 \cdot 5^n - 5$ એ 24 વડે વિભાજ્ય છે.

$2 \cdot 7 + 3 \cdot 5 - 5 = 24$ એ 24 વડે વિભાજ્ય છે. આથી $n = 1$ માટે P(n) સત્ય છે.

ધારો કે P(k) સત્ય છે.

એટલે કે, $2 \cdot 7^k + 3 \cdot 5^k - 5 = 24q$, જ્યાં $q \in \mathbf{N}$ ....(1)

હવે, જો આપણે P(k) સત્ય હોય, તો P(k + 1) સત્ય છે તેમ સાબિત કરીશું.

$$2 \cdot 7^{k+1} + 3 \cdot 5^{k+1} - 5 = 2 \cdot 7^k \cdot 7^1 + 3 \cdot 5^k \cdot 5^1 - 5 \quad ......(2)$$

$$= 7\,[2 \cdot 7^k + 3 \cdot 5^k - 5 - 3 \cdot 5^k + 5] + 3 \cdot 5^k \cdot 5 - 5$$

$$= 7\,[24q - 3 \cdot 5^k + 5] + 15 \cdot 5^k - 5$$

$$= 7 \times 24q - 21 \cdot 5^k + 35 + 15 \cdot 5^k - 5$$

$$= 7 \times 24q - 6 \cdot 5^k + 30$$

$$= 7 \times 24q - 6\,(5^k - 5)$$

$$= 7 \times 24q - 6\,(4p)$$ [($5^k - 5$) એ 4 નો ગુણિત છે (શા માટે ?)]

$$= 7 \times 24q - 24p$$

$$= 24\,(7q - p)$$

$$= 24 \times r\,;\ r = 7q - p$$ પ્રાકૃતિક સંખ્યા છે. ......(3)

આથી (3) ની ડા.બા.ની અભિવ્યક્તિ 24 વડે વિભાજ્ય છે. આમ જો P(k) સત્ય હોય, તો P(k + 1) સત્ય છે.

આથી, ગાણિતિક અનુમાનના સિદ્ધાંતથી, પ્રત્યેક $n \in$ N માટે P(n) સત્ય છે.

નોંધ: $5^k - 5 = 5(5 - 1)(5^{k-2} + 5^{k-3} + ... + 1)$ $\quad k \geq 2$

$$= 5 \cdot 4(5^{k-2} + 5^{k-3} + ... + 1)$$

ઉદાહરણ 7 : સાબિત કરો કે,

$$1^2 + 2^2 + ... + n^2 > \frac{n^3}{3}, \ n \in \mathbf{N}$$

ઉકેલ : ધારો કે આપેલ વિધાન P(n) છે.

એટલે કે, P(n) : $1^2 + 2^2 + ... + n^2 > \frac{n^3}{3}, \ n \in \mathbf{N}$

$1^2 > \frac{1^3}{3}$ હોવાથી, $n = 1$ માટે P(n) સત્ય છે.

ધારો કે P(k) સત્ય છે.

એટલે કે, P(k) : $1^2 + 2^2 + ... + k^2 > \frac{k^3}{3}$ સત્ય છે. ...(1)

જો P(k) સત્ય હોય, તો P($k + 1$) સત્ય છે એમ સાબિત કરીશું.

હવે, $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + k^2 + (k + 1)^2$

$$= (1^2 + 2^2 + ... + k^2) + (k+1)^2$$

$$> \frac{k^3}{3} + (k+1)^2$$

$$= \frac{1}{3}[k^3 + 3k^2 + 6k + 3] \quad (\because (1))$$

$$= \frac{1}{3}[(k + 1)^3 + 3k + 2] > \frac{1}{3}(k + 1)^3$$

માટે, જો P(k) સત્ય હોય, તો P($k+1$) પણ સત્ય છે. આથી ગાણિતિક અનુમાનના સિદ્ધાંત પરથી પ્રત્યેક $n \in \mathbf{N}$ માટે P(n) સત્ય છે.

ઉદાહરણ 8 : પ્રત્યેક પ્રાકૃતિક સંખ્યા n માટે ગાણિતિક અનુમાનના સિદ્ધાંતથી ઘાતાંકનો નિયમ $(ab)^n = a^n b^n$ સાબિત કરો.

ઉકેલ : ધારો કે, આપેલ વિધાન P(n) છે.

એટલે કે, P(n) : $(ab)^n = a^n b^n$

$(ab)^1 = a^1 b^1$ હોવાથી, $n = 1$ માટે P(n) સત્ય છે.

ધારો કે, P(k) સત્ય છે, એટલે કે,

$(ab)^k = a^k b^k$ ....(1)

હવે આપણે જો P(k) સત્ય હોય, તો P($k + 1$) સત્ય છે તેમ સાબિત કરીશું.

હવે, $(ab)^{k+1} = (ab)^k (ab)$

$= (a^k b^k)(ab)$ [(1) પરથી]

$= (a^k \cdot a^1)(b^k \cdot b^1)$

$= a^{k+1} \cdot b^{k+1}$

માટે જો P(k) સત્ય હોય, તો P($k+1$) પણ સત્ય છે. આથી ગાણિતિક અનુમાનના સિદ્ધાંત અનુસાર પ્રત્યેક $n \in \mathbf{N}$ માટે P(n) સત્ય છે.

સ્વાધ્યાય 4.1

$n \in \mathbf{N}$ માટે ગાણિતિક અનુમાનના સિદ્ધાંતનો ઉપયોગ કરી નીચેનાં વિધાનો સાબિત કરો :

1. $1 + 3 + 3^2 + ... + 3^{n-1} = \dfrac{(3^n - 1)}{2}$.

2. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$

3. $1 + \dfrac{1}{(1+2)} + \dfrac{1}{(1+2+3)} + \dots + \dfrac{1}{(1+2+3+...n)} = \dfrac{2n}{(n+1)}$

4. $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1)(n+2) = \dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

5. $1 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3^3 + \dots + n \cdot 3^n = \dfrac{(2n-1)3^{n+1} + 3}{4}$

6. $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n \cdot (n+1) = \left[\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}\right]$

7. $1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 7 + \dots + (2n-1)(2n+1) = \dfrac{n(4n^2 + 6n - 1)}{3}$

8. $1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + ... + n \cdot 2^n = (n-1)\, 2^{n+1} + 2$

9. $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + ... + \dfrac{1}{2^n} = 1 - \dfrac{1}{2^n}$

10. $\dfrac{1}{2 \cdot 5} + \dfrac{1}{5 \cdot 8} + \dfrac{1}{8 \cdot 11} + ... + \dfrac{1}{(3n-1)(3n+2)} = \dfrac{n}{(6n+4)}$

11. $\dfrac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dfrac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dfrac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + ... + \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$

12. $a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} = \dfrac{a(r^n - 1)}{r - 1}$

13. $\left(1 + \dfrac{3}{1}\right)\left(1 + \dfrac{5}{4}\right)\left(1 + \dfrac{7}{9}\right) ... \left(1 + \dfrac{(2n+1)}{n^2}\right) = (n+1)^2$

14. $\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)...\left(1+\frac{1}{n}\right)=(n+1)$

15. $1^2+3^2+5^2+...+(2n-1)^2=\frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$

16. $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+...+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{n}{(3n+1)}$

17. $\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 9}+...+\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{n}{3(2n+3)}$

18. $1+2+3+...+n<\frac{1}{8}(2n+1)^2$

19. $n(n+1)(n+5)$ એ 3 નો ગુણિત છે.

20. $10^{2n-1}+1$ એ 11 વડે વિભાજ્ય છે.

21. $x^{2n}-y^{2n}$ એ $x+y$ વડે વિભાજ્ય છે.

22. $3^{2n+2}-8n-9$ એ 8 વડે વિભાજ્ય છે.

23. 41^n-14^n એ 27નો ગુણિત છે.

24. $(2n+7)<(n+3)^2$

સારાંશ

- ગણિતની સંકલ્પનાઓમાં આનુમાનિક વિચારશક્તિ એ એક પાયાની ચાવી છે. આનુમાનિક તારવણીના પ્રતિપક્ષે, અનુમાનજન્ય વિચારશક્તિ તમામ વિકલ્પો પર આધારિત હોય છે અને આપણે દરેક વિકલ્પોના નિરીક્ષણ પછી એક અનુમાન વિકસાવીએ છીએ. આમ, સરળ ભાષામાં કહીએ તો, વિશિષ્ટ સત્યો અથવા વિકલ્પો પરથી વ્યાપક સ્વરૂપ એ 'અનુમાન' શબ્દનો અર્થ છે.
- વિવિધ અમર્યાદિત ગાણિતિક વિધાનો સાબિત કરવા માટે ગાણિતિક અનુમાનનો સિદ્ધાંત એક ઉપયોગી સાધન છે. ધન પૂર્ણાંક સાથે સંકળાયેલ પ્રત્યેક આવા વિધાનને આપણે P(n) ધારીશું તથા $n = 1$ માટે વિધાનની સત્યાર્થતા ચકાસીશું. પછી ધન પૂર્ણાંક k માટે P(k) ની સત્યાર્થતા પરથી $n = k + 1$ માટે P($k + 1$)ની સત્યાર્થતા સ્થાપિત કરીશું.

Historical Note

Unlike other concepts and methods, proof by mathematical induction is not the invention of a particular individual at a fixed moment. It is said that the principle of mathematical induction was known by the Pythagoreans.

The French mathematician Blaise Pascal is credited with the origin of the principle of mathematical induction.

The name induction was used by the English mathematician John Wallis.

Later the principle was employed to provide a proof of the binomial theorem.

De Morgan contributed many accomplishments in the field of mathematics on many different subjects. He was the first person to define and name “mathematical induction” and developed De Morgan’s rule to determine the convergence of a mathematical series.

G. Peano undertook the task of deducing the properties of natural numbers from a set of explicitly stated assumptions, now known as Peano’s axioms.The principle of mathematical induction is a restatement of one of the Peano’s axioms.

પ્રકરણ 5

સંકર સંખ્યાઓ અને દ્વિઘાત સમીકરણો

❖*Mathematics is the Queen of Sciences and Arithmetic is the Queen of Mathematics. – GAUSS* ❖

5.1 પ્રાસ્તાવિક

આપણે અગાઉનાં ધોરણોમાં એક ચલ અને દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણોના તથા એક ચલ દ્વિઘાત સમીકરણોના ઉકેલનો અભ્યાસ કર્યો. આપણે જોયું કે સમીકરણ $x^2 + 1 = 0$ ને વાસ્તવિક ઉકેલ નથી, કારણ કે $x^2 + 1 = 0$ એટલે કે $x^2 = -1$ થાય છે અને કોઈ પણ વાસ્તવિક સંખ્યાનો વર્ગ ઋણ થાય નહિ. આથી, આપણે $x^2 = -1$ સમીકરણનો ઉકેલ મેળવી શકીએ તેવા વિસ્તૃત ગણમાં વાસ્તવિક સંખ્યાગણનો વિસ્તાર કરવો પડે. આપણે જાણીએ છીએ કે જો $D = b^2 - 4ac < 0$ હોય, તો દ્વિઘાત સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ ને વાસ્તવિક ઉકેલ નથી. ખરેખર આપણો મુખ્ય ઉદ્દેશ આવા પ્રકારનાં સમીકરણોના ઉકેલ મેળવવાનો છે.

W. R. Hamilton
(1805-1865)

5.2 સંકર સંખ્યાઓ

પ્રથમ આપણે $\sqrt{-1}$ ને સંકેતમાં i વડે દર્શાવીએ. આમ, $i^2 = -1$ થાય. આનો અર્થ એ થાય કે સમીકરણ $x^2 + 1 = 0$ નો એક ઉકેલ i થાય.

$a, b \in R$ હોય તેવી સંખ્યા $a + ib$ ને ***સંકર સંખ્યા*** *(complex number)* તરીકે વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે છે.

ઉદાહરણ તરીકે, $2 + i\,3$, $(-1) + i\sqrt{3}$, $4 + i\left(\frac{-1}{11}\right)$ એ સંકર સંખ્યાઓ છે.

સંકર સંખ્યા $z = a + ib$ માં a ને z નો ***વાસ્તવિક ભાગ*** *(real part)* કહે છે. તેને સંકેતમાં $Re\,z$ વડે દર્શાવાય છે. b ને z નો ***કાલ્પનિક ભાગ*** *(imaginary part)* કહે છે. તેને સંકેતમાં $Im\,z$ વડે દર્શાવાય છે. ઉદાહરણ તરીકે, જો $z = 2 + i5$, તો $Re\,z = 2$ અને $Im\,z = 5$.

જો બે સંકર સંખ્યાઓ $z_1 = a + ib$ અને $z_2 = c + id$ સમાન હોય, તો $a = c$ તથા $b = d$.

ઉદાહરણ 1 : જો વાસ્તવિક સંખ્યાઓ x તથા y માટે $4x + i(3x - y) = 3 + i(-6)$, તો x અને y ની કિંમત શોધો.

ઉકેલ: અહીં, $4x + i(3x - y) = 3 + i(-6)$ ... (1)

સમીકરણ (1) ના વાસ્તવિક ભાગ તથા કાલ્પનિક ભાગને સરખાવતાં,

$$4x = 3,\ 3x - y = -6$$

બંને સમીકરણોને ઉકેલતાં, $x = \frac{3}{4}$ અને $y = \frac{33}{4}$.

5.3 સંકર સંખ્યાઓનું બીજગણિત

આ વિભાગમાં આપણે સંકર સંખ્યાઓ પરની બૈજિક ક્રિયાઓની ચર્ચા કરીશું.

5.3.1 બે સંકર સંખ્યાઓનો સરવાળો

ધારો કે $z_1 = a + ib$ અને $z_2 = c + id$ બે સંકર સંખ્યાઓ છે. તેમનો સરવાળો $z_1 + z_2$ નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત થાય છે :

$z_1 + z_2 = (a + c) + i\,(b + d)$ અને આ સરવાળાનું પરિણામ પણ એક સંકર સંખ્યા છે.

ઉદાહરણ તરીકે, $(2 + i3) + (-6 + i5) = (2 - 6) + i\,(3 + 5) = -4 + i\,8$.

સંકર સંખ્યાઓનો સરવાળો નીચે પ્રમાણેના ગુણધર્મોનું પાલન કરે છે :

(i) સંવૃત્તતા: બે સંકર સંખ્યાઓનો સરવાળો સંકર સંખ્યા થશે, એટલે કે, જો z_1 અને z_2 કોઈ પણ બે સંકર સંખ્યાઓ હોય, તો $z_1 + z_2$ એ પણ સંકર સંખ્યા થશે.

(ii) ક્રમનો નિયમ: કોઈ પણ બે સંકર સંખ્યાઓ z_1 અને z_2 માટે, $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$.

(iii) જૂથનો નિયમ: કોઈ પણ ત્રણ સંકર સંખ્યાઓ z_1, z_2, z_3 માટે, $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$.

(iv) સરવાળા માટેના તટસ્થ ઘટકનું અસ્તિત્વ: *એક સંકર સંખ્યા $0 + i\,0$ (જેનો સંકેત 0 છે) એવી મળે છે કે જેની પ્રત્યેક સંકર સંખ્યા $z + 0 = z$. આ સંકર સંખ્યા 0 ને સરવાળા માટેનો તટસ્થ ઘટક અથવા 0 સંકર સંખ્યા કહે છે.*

(v) સરવાળા માટેના વ્યસ્ત ઘટકનું અસ્તિત્વ: *દરેક સંકર સંખ્યા $z = a + ib$ માટે સંકર સંખ્યા $-a + i(-b)$ ($-z$ વડે દર્શાવાય છે)ને સરવાળા માટેનો વ્યસ્ત ઘટક અથવા z નો વિરોધી ઘટક કહે છે. આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે $z + (-z) = 0$* **(સરવાળા માટેનો તટસ્થ).**

5.3.2 બે સંકર સંખ્યાઓનો તફાવત : ધારો કે z_1 અને z_2 બે સંકર સંખ્યાઓ છે. તેમનો તફાવત $z_1 - z_2$ નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત થાય છે:

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2).$$

ઉદાહરણ તરીકે, $(6 + 3i) - (2 - i) = (6 + 3i) + (-2 + i) = 4 + 4i.$

અને $(2 - i) - (6 + 3i) = (2 - i) + (-6 - 3i) = -4 - 4i.$

5.3.3 બે સંકર સંખ્યાઓનો ગુણાકાર : ધારો કે $z_1 = a + ib$ અને $z_2 = c + id$ બે સંકર સંખ્યાઓ છે. તેમનો ગુણાકાર $z_1\, z_2$ નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત થાય છે:

$$z_1\, z_2 = (ac - bd) + i(ad + bc)$$

ઉદાહરણ તરીકે, $(3 + i5)(2 + i6) = (3 \times 2 - 5 \times 6) + i(3 \times 6 + 5 \times 2) = -24 + i28.$

સંકર સંખ્યાઓનો ગુણાકાર નીચે પ્રમાણે ગુણધર્મો ધરાવે છે. તેમને આપણે સાબિતી આપ્યા વગર નોંધીશું.

(i) સંવૃત્તતા : બે સંકર સંખ્યાઓનો ગુણાકાર સંકર સંખ્યા થશે, એટલે કે, જો z_1 અને z_2 કોઈ પણ સંકર સંખ્યાઓ હોય, તો $z_1\, z_2$ એ પણ સંકર સંખ્યા થશે.

(ii) ક્રમનો નિયમ: કોઈપણ બે સંકર સંખ્યાઓ z_1 અને z_2 માટે, $z_1\, z_2 = z_2\, z_1$.

(iii) જૂથનો નિયમ: કોઈપણ ત્રણ સંકર સંખ્યાઓ z_1, z_2, z_3 માટે, $(z_1\, z_2)\, z_3 = z_1\, (z_2\, z_3)$.

(iv) ગુણાકાર માટેના તટસ્થ ઘટકનું અસ્તિત્વ : *એક સંકર સંખ્યા* $1 = 1 + i\,0$ *(જેનો સંકેત 1 છે) અસ્તિત્વ ધરાવે છે. જેથી પ્રત્યેક સંકર સંખ્યા* z *માટે,* $z \cdot 1 = z$. *આ સંકર સંખ્યા 1 ને ગુણાકાર માટેનો તટસ્થ ઘટક કહે છે.*

(v) ગુણાકાર માટેના વ્યસ્ત ઘટકનું અસ્તિત્વ: *દરેક શૂન્યેતર સંકર સંખ્યા* $z = a + ib$ *કે* $a + bi (a \neq 0, b \neq 0)$ *ને સંગત, સંકર સંખ્યા* $\dfrac{a}{a^2+b^2} + i\dfrac{-b}{a^2+b^2}$ *(જેને* $\dfrac{1}{z}$ *અથવા* z^{-1} *વડે દર્શાવાય છે) મળે, જેથી* $z \cdot \dfrac{1}{z} = 1$. *આ સંકર સંખ્યા* $\dfrac{1}{z}$ *ને* z *નો ગુણાકાર માટેનો વ્યસ્ત ઘટક કહે છે.*

(vi) વિભાજનનો નિયમ: કોઈ પણ ત્રણ સંકર સંખ્યાઓ z_1, z_2, z_3 માટે,

(a) $z_1\,(z_2 + z_3) = z_1\, z_2 + z_1\, z_3$

(b) $(z_1 + z_2)\, z_3 = z_1\, z_3 + z_2\, z_3$

5.3.4 બે સંકર સંખ્યાઓનો ભાગાકાર: ધારો કે z_2 શૂન્યેતર હોય તેવી બે સંકર સંખ્યાઓ z_1 અને z_2 છે. તેમનો ભાગાકાર $\dfrac{z_1}{z_2}$ નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત થાય છે :

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \frac{1}{z_2}$$

ઉદાહરણ તરીકે, $z_1 = 6 + 3i$ અને $z_2 = 2 - i$ માટે,

$$\frac{z_1}{z_2} = \left((6+3i) \times \frac{1}{2-i}\right) = (6+3i)\left(\frac{2}{2^2+(-1)^2} + i\frac{-(-1)}{2^2+(-1)^2}\right)$$

$$= (6+3i)\left(\frac{2+i}{5}\right) = \frac{1}{5}\left[12-3+i(6+6)\right] = \frac{1}{5}(9+12i).$$

5.3.5 i ના ઘાત

આપણે જાણીએ છીએ કે,

$$i^3 = i^2 i = (-1)\, i = -i, \qquad i^4 = \left(i^2\right)^2 = (-1)^2 = 1,$$

$$i^5 = \left(i^2\right)^2 i = (-1)^2 i = i, \quad i^6 = \left(i^2\right)^3 = (-1)^3 = -1 \text{ વગેરે}$$

વળી, $i^{-1} = \frac{1}{i} \times \frac{i}{i} = \frac{i}{-1} = -i, \quad i^{-2} = \frac{1}{i^2} = \frac{1}{-1} = -1,$

$$i^{-3} = \frac{1}{i^3} = \frac{1}{-i} \times \frac{i}{i} = \frac{i}{1} = i, \quad i^{-4} = \frac{1}{i^4} = \frac{1}{1} = 1$$

વ્યાપક રીતે, કોઈ પણ પૂર્ણાંક k માટે, $i^{4k} = 1$, $i^{4k+1} = i$, $i^{4k+2} = -1$, $i^{4k+3} = -i$.

5.3.6 ઋણ વાસ્તવિક સંખ્યાનાં વર્ગમૂળ

આપણે નોંધીએ કે $i^2 = -1$ તથા $(-i)^2 = i^2 = -1$.

આથી, -1 નાં વર્ગમૂળ i તથા $-i$ થાય. તેમ છતાં સંકેત $\sqrt{-1}$ એ ફક્ત i સૂચવશે.

હવે, આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે i અને $-i$ બંને સમીકરણ $x^2 + 1 = 0$ અથવા $x^2 = -1$ ના ઉકેલ થશે.

તે જ પ્રમાણે, $\left(\sqrt{3}\,i\right)^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 i^2 = 3\,(-1) = -3$

$$\left(-\sqrt{3}\,i\right)^2 = \left(-\sqrt{3}\right)^2 i^2 = -3$$

$\therefore$ -3 ના વર્ગમૂળ $\sqrt{3}\,i$ તથા $-\sqrt{3}\,i$ થશે.

વળી, સંકેત $\sqrt{-3}$ એ $\sqrt{3}\,i$ સૂચવશે.

એટલે કે, $\sqrt{-3} = \sqrt{3}\,i$.

વ્યાપક રીતે જો a એ કોઈ ધન વાસ્તવિક સંખ્યા હોય તો, $\sqrt{-a} = \sqrt{a}\,\sqrt{-1} = \sqrt{a}\,i$.

આપણે અગાઉથી જાણીએ છીએ કે, દરેક ધન વાસ્તવિક સંખ્યા a, b માટે $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ થાય. જો $a > 0$, $b < 0$ અથવા $a < 0$, $b > 0$ હોય ત્યારે પણ આ પરિણામનું પાલન થાય છે. જો $a < 0$, $b < 0$ હોય, તો શું થાય ?

આપણે નોંધીએ કે,

$i^2 = \sqrt{-1}\,\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)\,(-1)} = \sqrt{1} = 1$. (કોઈ પણ વાસ્તવિક સંખ્યાઓ a અને b માટે $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ છે તેમ ધારી લેતાં)

આ પરિણામ $i^2 = -1$ ની સત્યાર્થતાની વિરુધ્ધ છે.

જો સંખ્યાઓ a અને b બંને ઋણ વાસ્તવિક હોય તો, $\sqrt{a}\times\sqrt{b}\neq\sqrt{ab}$.

વળી, જો a અને b માંથી ગમે તે એક શૂન્ય હોય તો સ્પષ્ટ છે કે $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}=0$ થાય.

5.3.7 નિત્યસમો

આપણે નીચેનું નિત્યસમ સાબિત કરીશું.

કોઈપણ સંકર સંખ્યા z_1 અને z_2 માટે, $(z_1+z_2)^2 = z_1^2+z_2^2+2z_1z_2$.

સાબિતી : અહીં, $(z_1 + z_2)^2 = (z_1 + z_2)(z_1 + z_2)$

$= (z_1 + z_2) z_1 + (z_1 + z_2) z_2$ (વિભાજનનો નિયમ)

$= z_1^2 + z_2z_1 + z_1z_2 + z_2^2$ (વિભાજનનો નિયમ)

$= z_1^2 + z_1z_2 + z_1z_2 + z_2^2$ (ગુણાકાર માટે ક્રમનો નિયમ)

$= z_1^2 + 2z_1z_2 + z_2^2$.

તે જ રીતે આપણે નીચે પ્રમાણેના નિત્યસમ સાબિત કરી શકીએ :

(i) $(z_1-z_2)^2 = z_1^2 - 2z_1z_2 + z_2^2$

(ii) $(z_1+z_2)^3 = z_1^3 + 3z_1^2z_2 + 3z_1z_2^2 + z_2^3$

(iii) $(z_1-z_2)^3 = z_1^3 - 3z_1^2z_2 + 3z_1z_2^2 - z_2^3$

(iv) $z_1^2 - z_2^2 = (z_1+z_2)(z_1-z_2)$

ખરેખર, જે વાસ્તવિક સંખ્યાઓ માટે સત્ય હોય તેવા ઘણાબધા નિત્યસમો સંકર સંખ્યાઓ માટે પણ સાબિત કરી શકાય.

ઉદાહરણ 2 : નીચેની સંકર સંખ્યાઓને $a + bi$ સ્વરૂપમાં દર્શાવો.

(i) $(-5i)\left(\frac{1}{8}i\right)$ (ii) $(-i)(2i)\left(-\frac{1}{8}i\right)^3$

ઉકેલ : (i) $(-5i)\left(\frac{1}{8}i\right) = \frac{-5}{8}i^2 = \frac{-5}{8}(-1) = \frac{5}{8} = \frac{5}{8}+i0$

(ii) $(-i)(2i)\left(-\frac{1}{8}i\right)^3 = 2\times\frac{1}{8\times8\times8}\times i^5 = \frac{1}{256}\left(i^2\right)^2 i = \frac{1}{256}i$.

ઉદાહરણ 3 : $(5 - 3i)^3$ ને $a + ib$ સ્વરૂપમાં દર્શાવો.

ઉકેલ : અહીં, $(5 - 3i)^3 = 5^3 - 3 \times 5^2 \times (3i) + 3 \times 5\,(3i)^2 - (3i)^3$

$= 125 - 225i - 135 + 27i = -10 - 198i$.

ઉદાહરણ 4 : $\left(-\sqrt{3}+\sqrt{-2}\right)\left(2\sqrt{3}-i\right)$ ને $a + ib$ સ્વરૂપમાં દર્શાવો.

ઉકેલ : અહીં, $\left(-\sqrt{3}+\sqrt{-2}\right)\left(2\sqrt{3}-i\right) = \left(-\sqrt{3}+\sqrt{2}\,i\right)\left(2\sqrt{3}-i\right)$

$$= -6+\sqrt{3}i+2\sqrt{6}i-\sqrt{2}\,i^2 = \left(-6+\sqrt{2}\right)+\sqrt{3}\left(1+2\sqrt{2}\right)i$$

5.4 સંકર સંખ્યાનો માનાંક તથા અનુબદ્ધ સંકર સંખ્યા

ધારો કે $z = a + ib$ એ સંકર સંખ્યા છે. અનૃણ વાસ્તવિક સંખ્યા $\sqrt{a^2+b^2}$ ને z ના ***માનાંક*** *(modulus)* તરીકે વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે છે. તેને સંકેતમાં $|z|$ વડે દર્શાવવામાં આવે છે. આમ, $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$. સંકર સંખ્યા $a - ib$ એ z ની ***અનુબદ્ધ સંકર સંખ્યા*** *(conjugate)* છે. તેને સંકેતમાં $\bar{z}$ વડે દર્શાવવામાં આવે છે. આમ, $\bar{z} = a - ib$.

ઉદાહરણ તરીકે, $|3+i| = \sqrt{3^2+1^2} = \sqrt{10}$, $\quad |2-5i| = \sqrt{2^2+(-5)^2} = \sqrt{29}$,

અને $\quad \overline{3+i} = 3-i$, $\overline{2-5i} = 2+5i$, $\overline{-3i-5} = 3i-5$.

આપણે જોઈ શકીએ કે શૂન્યેતર સંકર સંખ્યા z નો ગુણાકાર માટેનો વ્યસ્ત

$$z^{-1} = \frac{1}{a+ib} = \frac{a}{a^2+b^2} + i\frac{-b}{a^2+b^2} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

$$\therefore\ z\,\bar{z} = |z|^2$$

વધુમાં નીચેનાં પરિણામો સહેલાઈથી તારવી શકાય.

કોઈ પણ બે સંકર સંખ્યાઓ z_1 અને z_2 માટે,

(i) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$ $\qquad$ (ii) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ $\quad (|z_2| \neq 0)$

(iii) $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1\,\bar{z}_2$ $\qquad$ (iv) $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$ (v) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$ $\quad (z_2 \neq 0)$.

ઉદાહરણ 5 : $2 - 3i$ નો ગુણાકાર માટેનો વ્યસ્ત શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે $\quad z = 2 - 3i$

તેથી $\quad \bar{z} = 2 + 3i$ અને $|z|^2 = 2^2 + (-3)^2 = 13$

$\therefore\ 2-3i$ નો ગુણાકાર માટેનો વ્યસ્ત

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{2+3i}{13} = \frac{2}{13} + \frac{3}{13}i.$$

ઉપર પ્રમાણેની ગણતરી નીચેની રીતે પણ પુનઃ મેળવી શકાય :

$$z^{-1} = \frac{1}{2-3i} = \frac{2+3i}{(2-3i)(2+3i)}$$

$$= \frac{2+3i}{2^2-(3i)^2} = \frac{2+3i}{13} = \frac{2}{13} + \frac{3}{13}i.$$

ઉદાહરણ 6 : નીચેની સંકર સંખ્યાઓને $a + ib$ સ્વરૂપમાં દર્શાવો :

(i) $\dfrac{5+\sqrt{2}i}{1-\sqrt{2}i}$ (ii) i^{-35}

ઉકેલ : (i) અહીં, $\dfrac{5+\sqrt{2}i}{1-\sqrt{2}i} = \dfrac{5+\sqrt{2}i}{1-\sqrt{2}i} \times \dfrac{1+\sqrt{2}i}{1+\sqrt{2}i}$

$$= \frac{5+5\sqrt{2}i+\sqrt{2}i-2}{1-\left(\sqrt{2}i\right)^2}$$

$$= \frac{3+6\sqrt{2}i}{1+2}$$

$$= \frac{3(1+2\sqrt{2}i)}{3}$$

$$= 1+2\sqrt{2}i$$

(ii) $i^{-35} = \dfrac{1}{i^{35}} = \dfrac{1}{\left(i^2\right)^{17} i} = \dfrac{1}{-i} \times \dfrac{i}{i} = \dfrac{i}{-i^2} = i$

સ્વાધ્યાય 5.1

નીચે આપેલ પ્રશ્ન 1 થી 10 માં દરેક સંકર સંખ્યાને $a + ib$ સ્વરૂપમાં દર્શાવો.

1. $(5i)\left(-\dfrac{3}{5}i\right)$ **2.** $i^9 + i^{19}$ **3.** i^{-39}

4. $3(7 + i7) + i(7 + i7)$ **5.** $(1 - i) - (-1 + i6)$

6. $\left(\dfrac{1}{5}+i\dfrac{2}{5}\right)-\left(4+i\dfrac{5}{2}\right)$ **7.** $\left[\left(\dfrac{1}{3}+i\dfrac{7}{3}\right)+\left(4+i\dfrac{1}{3}\right)\right]-\left(-\dfrac{4}{3}+i\right)$

8. $(1 - i)^4$ **9.** $\left(\dfrac{1}{3}+3i\right)^3$ **10.** $\left(-2-\dfrac{1}{3}i\right)^3$

આપેલ પ્રશ્ન 11 થી 13 માં દરેક સંકર સંખ્યાનો ગુણાકાર માટેનો વ્યસ્ત શોધો.

11. $4 - 3i$ **12.** $\sqrt{5}+3i$ **13.** $-i$

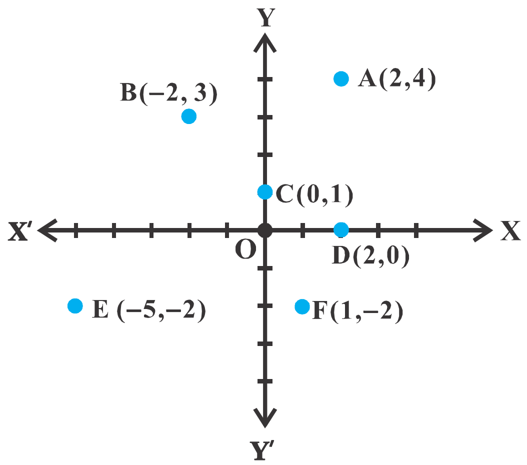
14. નીચેની પદાવલિને $a + ib$ સ્વરૂપમાં દર્શાવો :

$$\frac{\left(3+i\sqrt{5}\right)\left(3-i\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\,i\right)-\left(\sqrt{3}-i\sqrt{2}\right)}$$

5.5 આર્ગન્ડ આકૃતિ અને ધ્રુવીય સ્વરૂપ

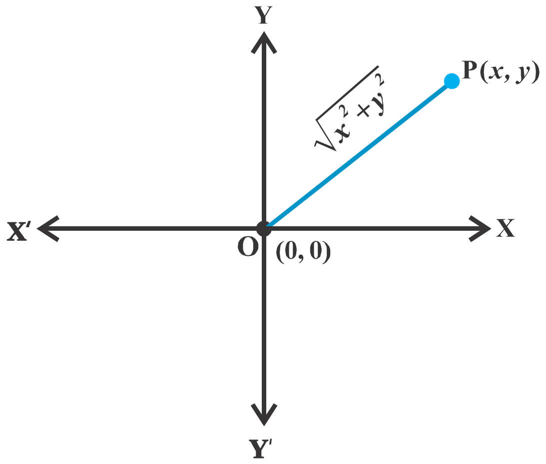
x-અક્ષ અને y-અક્ષ તરીકે ઓળખાતી પરસ્પર કાટખૂણે છેદતી રેખાઓના સંદર્ભમાં આપણે જાણીએ છીએ કે વાસ્તવિક સંખ્યાઓની દરેક ક્રમયુક્ત જોડ (x, y) ને સંગત XY–સમતલમાં અનન્ય બિંદુ મેળવી શકીએ અને તેનું પ્રતીપ પણ સત્ય છે. સંકર સંખ્યા $x + iy$ ને સંગત ક્રમયુક્ત જોડ (x, y) ને XY–સમતલના અનન્ય બિંદુ $P(x, y)$ તરીકે ભૌમિતિક રીતે દર્શાવી શકાય તેમજ XY–સમતલના બિંદુ $P(x, y)$ ને સંગત અનન્ય સંકર સંખ્યા $x + iy$ મળે.

સંકર સંખ્યાઓ જેવી કે $2 + 4i$, $-2 + 3i$, $0 + 1i$, $2 + 0i$, $-5 -2i$ અને $1-2i$ ને સંગત ક્રમયુક્ત જોડ અનુક્રમે $(2, 4)$, $(-2, 3)$, $(0, 1)$, $(2, 0)$, $(-5, -2)$, અને $(1, -2)$ ને ભૌમિતિક રીતે સંગત બિંદુઓ અનુક્રમે A, B, C, D, E, અને F આકૃતિ 5.1 માં દર્શાવેલ છે.



આકૃતિ 5.1

જે યામ-સમતલના પ્રત્યેક બિંદુને અનન્ય સંકર સંખ્યા સાથે સંગત કરી શકાય તેને ***સંકર સમતલ*** *(complex plane)* અથવા ***આર્ગન્ડ સમતલ*** *(Argand plane)* કહેવાય છે.



આકૃતિ 5.2

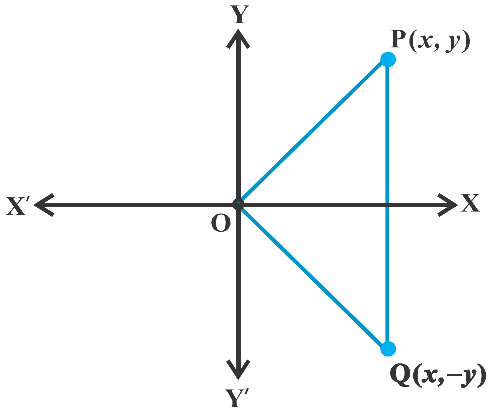
સ્પષ્ટ છે કે આર્ગન્ડ સમતલમાં સંકર સંખ્યા $x + iy$ નો માનાંક $|x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}$ એ ઊગમબિંદુ O $(0, 0)$ થી $P(x, y)$ વચ્ચેનું અંતર છે (આકૃતિ 5.2).

x-અક્ષ પરનાં બિંદુઓને સંગત સંકર સંખ્યા $a + i\,0$ સ્વરૂપમાં હોય છે અને y-અક્ષ પરનાં બિંદુઓને સંગત સંકર સંખ્યા

$0 + ib$ સ્વરૂપમાં હોય છે. આર્ગન્ડ સમતલમાં x- અક્ષ અને y-અક્ષને અનુક્રમે ***વાસ્તવિક અક્ષ*** *(real axis)* તથા ***કાલ્પનિક અક્ષ*** *(imaginary axis)* કહેવાય છે.

સંકર સંખ્યા $z = x + iy$ અને તેની અનુબદ્ધ સંકર સંખ્યા $\bar{z} = x - iy$ ને આર્ગન્ડ સમતલમાં અનુક્રમે બિંદુઓ P (x, y) અને Q $(x, -y)$ વડે દર્શાવાય છે.

ભૌમિતિક રીતે બિંદુ $(x, -y)$ ને બિંદુ (x, y) નું વાસ્તવિક અક્ષને સાપેક્ષ ***આરસી પ્રતિબિંબ*** *(mirror image)* કહેવાય છે. (આકૃતિ 5.3)

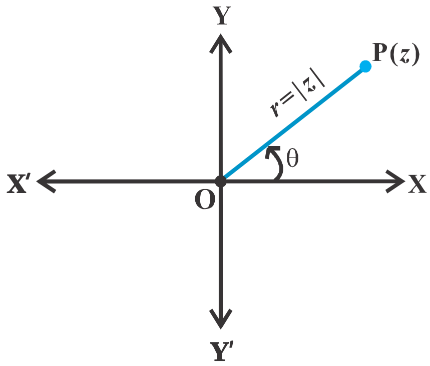


આકૃતિ 5.3

5.5.1 સંકર સંખ્યાઓનું ધ્રુવીય સ્વરૂપ

ધારો કે સંકર સંખ્યા $z = x + iy$ ને બિંદુ P વડે દર્શાવેલ છે. ધારો કે દિશાયુક્ત રેખાખંડ OP ની લંબાઈ r છે અને OP એ x-અક્ષની ધન દિશા સાથે θ માપનો ખૂણો બનાવે છે (આકૃતિ 5.4).

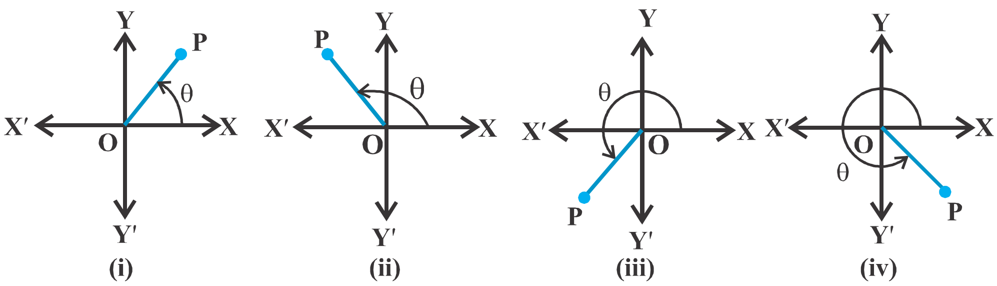
આપણે નોંધીએ કે બિંદુ P એ વાસ્તવિક સંખ્યાઓની ક્રમયુક્ત જોડ (r, θ) દ્વારા અનન્ય રીતે મેળવી શકાય. (r, θ) ને બિંદુ P ના ધ્રુવીય યામ કહે છે. આપણે ઊગમબિંદુને ***ધ્રુવ*** *(pole)* અને x-અક્ષની ધન દિશાને ***આધારરેખા*** અથવા ***મૂળરેખા*** *(initial line)* કહીશું.



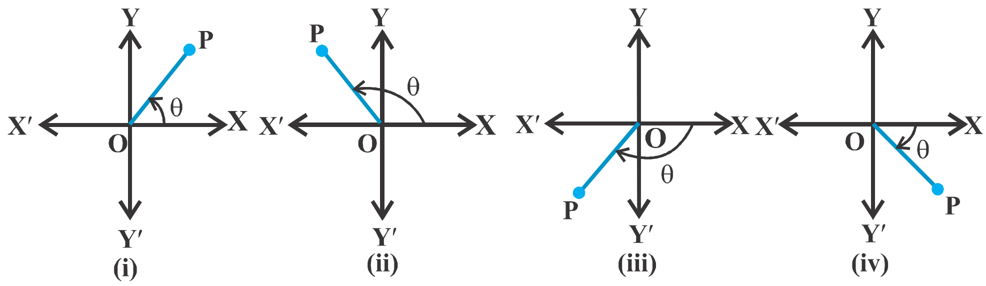
આકૃતિ 5.4

અહીં, $x = r \cos \theta$, $y = r \sin\theta$

$\therefore$ $z = r(\cos \theta + i \sin\theta)$. આને સંકર સંખ્યાનું ***ધ્રુવીય સ્વરૂપ*** *(polar form)* કહેવાય છે. $r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$ એ z નો માનાંક છે અને θ એ z નો ***કોણાંક*** *(argument* અથવા *amplitude)* છે, તેને સંકેતમાં $\arg z$ વડે દર્શાવાય છે.



આકૃતિ 5.5 $(0 \le \theta < 2\pi)$



આકૃતિ 5.6 $(-\pi < \theta \le \pi)$

કોઈપણ સંખ્યા $z \ne 0$ ને સંગત θ ની અનન્ય કિંમત $0 \le \theta < 2\pi$ માં મળે છે. તેમ છતાં 2π લંબાઈનો કોઈ બીજો અંતરાલ $-\pi < \theta \le \pi$ જેવો પણ લઈ શકાય. આપણે θ ની કિંમત $-\pi < \theta \le \pi$ માં લઈશું. તેને z નો ***મુખ્ય કોણાંક*** (*principal argument*) કહેવાય છે. જો અન્યથા દર્શાવેલ ન હોય તો તેને સંકેતમાં *arg z* વડે દર્શાવીશું.

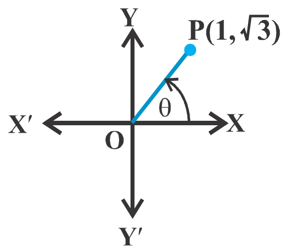
(આકૃતિ 5.5. અને 5.6.)

ઉદાહરણ 7 : સંકર સંખ્યા $z = 1 + i\sqrt{3}$ ને ધ્રુવીય સ્વરૂપમાં દર્શાવો.

ઉકેલ : ધારો કે $1 = r\cos\theta$, $\sqrt{3} = r\sin\theta$

વર્ગ કરીને સરવાળો કરતાં,

$r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = 4$ એટલે કે, $r = \sqrt{4} = 2$ (પરંપરાગત રીતે, $r > 0$)



આકૃતિ 5.7

$$\therefore \quad \cos\theta = \frac{1}{2},\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore \quad \theta = \frac{\pi}{3}$$

$\therefore$ માંગેલ ધ્રુવીય સ્વરૂપ $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

સંકર સંખ્યા $z = 1 + i\sqrt{3}$ ને આકૃતિ 5.7 માં દર્શાવેલ છે.

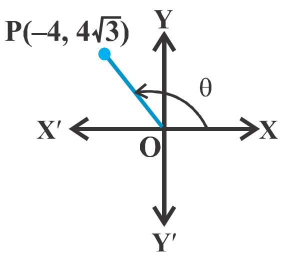
ઉદાહરણ 8 : સંકર સંખ્યા $\frac{-16}{1+i\sqrt{3}}$ ને ધ્રુવીય સ્વરૂપમાં ફેરવો.

ઉકેલ : આપેલ સંકર સંખ્યા $\frac{-16}{1+i\sqrt{3}} = \frac{-16}{1+i\sqrt{3}} \times \frac{1-i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$

$$= \frac{-16(1-i\sqrt{3})}{1-(i\sqrt{3})^2}$$

$$= \frac{-16(1-i\sqrt{3})}{1+3}$$

$= -4(1-i\sqrt{3}) = -4 + i4\sqrt{3}$ (આકૃતિ 5.8.)



આકૃતિ 5.8

ધારો કે $-4 = r\cos\theta$, $4\sqrt{3} = r\sin\theta$

વર્ગ કરીને સરવાળો કરતાં $16 + 48 = r^2\left(cos^2\theta + sin^2\theta\right)$

$\therefore \quad r^2 = 64$, એટલે કે, $r = 8$.

તેથી $$cos\ \theta = -\frac{1}{2},\ sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\theta = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

આમ, માંગેલ ધ્રુવીય સ્વરૂપ $8\left(cos\frac{2\pi}{3} + i\ sin\frac{2\pi}{3}\right)$

સ્વાધ્યાય 5.2

પ્રશ્ન 1 થી 2 માં આવેલ દરેક સંકર સંખ્યાનો માનાંક અને કોણાંક શોધો.

1. $z = -1 - i\sqrt{3}$ **2.** $z = -\sqrt{3} + i$

પ્રશ્ન 3 થી 8 માં આવેલ દરેક સંકર સંખ્યાને ધ્રુવીય સ્વરૂપમાં ફેરવો.

3. $1 - i$ **4.** $-1 + i$ **5.** $-1 - i$

6. -3 **7.** $\sqrt{3} + i$ **8.** i

5.6 દ્વિઘાત સમીકરણો

આપણે દ્વિઘાત સમીકરણો વિશે પરિચિત છીએ અને જ્યારે વિવેચક અનૃણ હોય એટલે કે $D \geq 0$ હોય ત્યારે વાસ્તવિક સંખ્યા ગણ પર તેમના ઉકેલ પણ શોધ્યા.

હવે આપણે નીચે પ્રમાણેના દ્વિઘાત સમીકરણનો વિચાર કરીએ :

a, b, c વાસ્તવિક સહગુણકો છે અને $a \neq 0$ છે અને $ax^2 + bx + c = 0$ છે.

વળી, ધારો કે $b^2 - 4ac < 0$.

હવે આપણે સંકર સંખ્યાગણ પર ઋણ વાસ્તવિક સંખ્યાનું વર્ગમૂળ શોધી શકીએ છીએ. માટે ઉપર પ્રમાણેના સમીકરણનો ઉકેલ સંકર સંખ્યાગણ પર મળે છે.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{4ac - b^2}\, i}{2a}$$

નોંધ આ સમયે કેટલાકને જાણવાનો રસ હશે કે કોઈ પણ સમીકરણને કેટલાં બીજ મળે ? આ સંદર્ભે નીચેનો પ્રમેય જે ***બીજગણિતના મૂળભૂત પ્રમેય*** (*Fundamental theorem of Algebra*) તરીકે જાણીતો છે તેને (સાબિતી આપ્યા વગર) નોંધીશું.

"બહુપદીય સમીકરણને ઓછામાં ઓછું એક બીજ મળે."

આ પ્રમેયના પરિણામે ખૂબ જ ઉપયોગી એવું નીચે પ્રમાણેનું પરિણામ મળે છે :

"n ઘાતવાળા બહુપદીય સમીકરણને n બીજ મળે છે."

ઉદાહરણ 9 : ઉકેલો: $x^2 + 2 = 0$

ઉકેલ : અહીં, $x^2 + 2 = 0$

અથવા $x^2 = -2$ એટલે કે, $x = \pm\sqrt{-2} = \pm\sqrt{2}\, i.$

ઉદાહરણ 10: ઉકેલો : $x^2 + x + 1 = 0$

ઉકેલ : અહીં, $b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = 1 - 4 = -3$

$\therefore x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2 \times 1} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ એ માંગેલ ઉકેલો થશે.

ઉદાહરણ 11 : ઉકેલો: $\sqrt{5}x^2 + x + \sqrt{5} = 0$

ઉકેલ : અહીં, આપેલ સમીકરણનો વિવેચક

$1^2 - 4 \times \sqrt{5} \times \sqrt{5} = 1 - 20 = -19$

માંગેલ ઉકેલો $\dfrac{-1 \pm \sqrt{-19}}{2\sqrt{5}} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{19}i}{2\sqrt{5}}$ થશે.

સ્વાધ્યાય 5.3

નીચેનાં સમીકરણો ઉકેલો :

1. $x^2 + 3 = 0$
2. $2x^2 + x + 1 = 0$
3. $x^2 + 3x + 9 = 0$
4. $-x^2 + x - 2 = 0$
5. $x^2 + 3x + 5 = 0$
6. $x^2 - x + 2 = 0$
7. $\sqrt{2}x^2 + x + \sqrt{2} = 0$
8. $\sqrt{3}x^2 - \sqrt{2}x + 3\sqrt{3} = 0$
9. $x^2 + x + \dfrac{1}{\sqrt{2}} = 0$
10. $x^2 + \dfrac{x}{\sqrt{2}} + 1 = 0$

5.7 સંકર સંખ્યાનું વર્ગમૂળ

આગળના વિભાગમાં આપણે સંકર બીજને આવરી લેતા દ્વિઘાત સમીકરણના ઉકેલની ચર્ચા કરી. અહીં આપણે પ્રમાણિત સ્વરૂપમાં દર્શાવેલ સંકર સંખ્યાનું વર્ગમૂળ શોધવાની વિશિષ્ટ પ્રક્રિયા વર્ણવીશું. આપણે તેને ઉદાહરણ દ્વારા સ્પષ્ટ કરીશું.

ઉદાહરણ 12 : $-7 - 24i$ નું વર્ગમૂળ શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે $x + iy = \sqrt{-7 - 24i}$

$\therefore \quad (x + iy)^2 = -7 - 24i$

અથવા $\quad x^2 - y^2 + 2xyi = -7 - 24i$

વાસ્તવિક ભાગ અને કાલ્પનિક ભાગ સરખાવતાં,

$x^2 - y^2 = -7$ ...(1)

$2xy = -24$

નિત્યસમ $(x^2 + y^2)^2 = (x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2$ નો ઉપયોગ કરતાં,

$(x^2 + y^2)^2 = 49 + 576$

$(x^2 + y^2)^2 = 625$

આમ, $x^2 + y^2 = 25$ ...(2)

(1) અને (2) પરથી, $x^2 = 9$ અને $y^2 = 16$

અથવા $x = \pm 3$ અને $y = \pm 4$

ગુણાકાર xy ઋણ હોવાથી,

$x = 3, y = -4$ અથવા, $x = -3, y = 4$

આમ, $-7 - 24i$ નાં વર્ગમૂળ $3 - 4i$ અને $-3 + 4i$.

સ્વાધ્યાય 5.4

વર્ગમૂળ શોધો :

1. $-15 - 8i$ **2.** $-8 - 6i$ **3.** $1 - i$ **4.** $-i$

5. i **6.** $1 + i$

પ્રકીર્ણ ઉદાહરણો

ઉદાહરણ 13 : અનુબદ્ધ સંકર સંખ્યા શોધો : $\frac{(3-2i)(2+3i)}{(1+2i)(2-i)}$.

ઉકેલ : અહીં, $\frac{(3-2i)(2+3i)}{(1+2i)(2-i)}$

$= \frac{6+9i-4i+6}{2-i+4i+2}$

$= \frac{12+5i}{4+3i} \times \frac{4-3i}{4-3i}$

$= \frac{48-36i+20i+15}{16+9}$

$$= \frac{63-16i}{25}$$

$$= \frac{63}{25} - \frac{16}{25}i$$

$\therefore \frac{(3-2i)(2+3i)}{(1+2i)(2-i)}$ ની અનુબદ્ધ સંકર સંખ્યા $\frac{63}{25} + \frac{16}{25}i$ છે.

ઉદાહરણ 14 : નીચેની સંકર સંખ્યાઓના માનાંક અને કોણાંક શોધો :

(i) $\frac{1+i}{1-i}$ (ii) $\frac{1}{1+i}$

ઉકેલ : (i) અહીં, $\frac{1+i}{1-i} = \frac{1+i}{1-i} \times \frac{1+i}{1+i} = \frac{1-1+2i}{1+1} = i = 0 + i$

હવે, $0 = r\cos\theta$, $1 = r\sin\theta$

વર્ગ કરીને સરવાળો કરતાં, $r^2 = 1$ એટલે કે $r = 1$

$$\cos\theta = 0, \quad \sin\theta = 1$$

$$\therefore \quad \theta = \frac{\pi}{2}$$

માટે, $\frac{1+i}{1-i}$ નો માનાંક 1 અને કોણાંક $\frac{\pi}{2}$ છે.

(ii) અહીં, $\frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-i}{1+1} = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}$

ધારો કે, $\frac{1}{2} = r\cos\theta$, $-\frac{1}{2} = r\sin\theta$

ઉપર (i) પ્રમાણેની પ્રક્રિયા કરતાં, $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}}$

$$\therefore \theta = \frac{-\pi}{4}$$

આમ, $\frac{1}{1+i}$ નો માનાંક $\frac{1}{\sqrt{2}}$ અને કોણાંક $\frac{-\pi}{4}$ છે.

ઉદાહરણ 15 : જો $x + iy = \frac{a+ib}{a-ib}$, તો સાબિત કરો કે $x^2 + y^2 = 1$.

ઉકેલ : અહીં, $x + iy = \frac{(a+ib)(a+ib)}{(a-ib)(a+ib)} = \frac{a^2-b^2+2abi}{a^2+b^2} = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} + \frac{2ab}{a^2+b^2}i$

$$\therefore x - iy = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} - \frac{2ab}{a^2+b^2}i$$

$$\therefore x^2 + y^2 = (x + iy)(x - iy) = \frac{(a^2-b^2)^2}{(a^2+b^2)^2} + \frac{4a^2b^2}{(a^2+b^2)^2} = \frac{(a^2+b^2)^2}{(a^2+b^2)^2} = 1$$

ઉદાહરણ 16 : જો $\frac{3+2i\ sin\theta}{1-2i\ sin\theta}$ શુદ્ધ વાસ્તવિક સંખ્યા હોય, તો વાસ્તવિક θ શોધો.

ઉકેલ : અહીં,

$$\frac{3+2i\,sin\theta}{1-2i\,sin\theta} = \frac{(3+2i\,sin\theta)(1+2i\,sin\theta)}{(1-2i\,sin\theta)(1+2i\,sin\theta)}$$

$$= \frac{3+6i\,sin\theta+2i\,sin\theta-4\,sin^2\theta}{1+4\,sin^2\theta} = \frac{3-4sin^2\theta}{1+4sin^2\theta} + \frac{8i\ sin\theta}{1+4sin^2\theta}$$

આપેલ છે કે આ સંકર સંખ્યા વાસ્તવિક છે.

$$\therefore \frac{8sin\theta}{1+4sin^2\theta} = 0, \text{ એટલે કે } sin\theta = 0$$

તેથી, $\theta = n\pi,\ n \in \mathbf{Z}$.

ઉદાહરણ 17 : સંકર સંખ્યા $z = \dfrac{i-1}{cos\frac{\pi}{3} + i\,sin\frac{\pi}{3}}$ ને ધ્રુવીય સ્વરૂપમાં ફેરવો.

ઉકેલ : અહીં, $z = \dfrac{i-1}{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}$

$$= \frac{2(i-1)}{1+\sqrt{3}i} \times \frac{1-\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}$$

$$= \frac{2\left(i+\sqrt{3}-1+\sqrt{3}i\right)}{1+3}$$

$$= \frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{\sqrt{3}+1}{2}\,i$$

હવે, $\frac{\sqrt{3}-1}{2} = r\ cos\ \theta,\ \frac{\sqrt{3}+1}{2} = r\ sin\ \theta$ લો.

વર્ગ કરીને સરવાળો કરતાં,

$$r^2 = \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)^2 = \frac{2\left(\left(\sqrt{3}\right)^2+1\right)}{4} = \frac{2\times4}{4} = 2$$

તેથી $r = \sqrt{2}$ માટે, $cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}},\quad sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

માટે, $\theta = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{12}$ (શા માટે ?)

આમ, ધ્રુવીય સ્વરૂપ $\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$ થશે.

પ્રકીર્ણ સ્વાધ્યાય 5

1. કિંમત શોધો : $\left[i^{18} + \left(\frac{1}{i}\right)^{25}\right]^3$

2. કોઈ પણ બે સંકર સંખ્યાઓ z_1 અને z_2 માટે સાબિત કરો કે,

$Re\,(z_1 z_2) = Re\,z_1\, Re\,z_2 - Im z_1\, Im z_2$

3. $\left(\frac{1}{1-4i} - \frac{2}{1+i}\right)\left(\frac{3-4i}{5+i}\right)$ ને પ્રમાણિત સ્વરૂપમાં મૂકો.

4. જો $x - iy = \sqrt{\frac{a-ib}{c-id}}$ હોય, તો સાબિત કરો કે $\left(x^2+y^2\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}$.

5. નીચેની સંખ્યાઓને ધ્રુવીય સ્વરૂપમાં ફેરવો :

(i) $\frac{1+7i}{(2-i)^2}$ (ii) $\frac{1+3i}{1-2i}$

પ્રશ્ન 6 થી 9 ના પ્રત્યેક સમીકરણને ઉકેલો :

6. $3x^2 - 4x + \frac{20}{3} = 0$

7. $x^2 - 2x + \frac{3}{2} = 0$

8. $27x^2 - 10x + 1 = 0$

9. $21x^2 - 28x + 10 = 0$

10. જો $z_1 = 2 - i$, $z_2 = 1 + i$, તો $\left|\frac{z_1+z_2+1}{z_1-z_2+1}\right|$ શોધો.

11. જો $a + ib = \frac{(x+i)^2}{2x^2+1}$, તો $a^2 + b^2 = \frac{(x^2+1)^2}{(2x^2+1)^2}$ સાબિત કરો.

12. ધારો કે, $z_1 = 2 - i$, $z_2 = -2 + i$.

(i) $Re\left(\frac{z_1 z_2}{\bar{z}_1}\right)$ (ii) $Im\left(\frac{1}{z_1\bar{z}_1}\right)$ શોધો.

13. સંકર સંખ્યા $\frac{1+2i}{1-3i}$ નો માનાંક તથા કોણાંક શોધો.

14. જો $(x - iy)(3 + 5i)$ એ $-6 - 24i$ ની અનુબદ્ધ સંકર સંખ્યા હોય, તો વાસ્તવિક સંખ્યાઓ x અને y શોધો.

15. $\frac{1+i}{1-i} - \frac{1-i}{1+i}$ નો માનાંક શોધો.

16. જો $(x + iy)^3 = u + iv$ હોય, તો બતાવો કે $\frac{u}{x} + \frac{v}{y} = 4(x^2 - y^2)$.

17. જો α અને β એ ભિન્ન સંકર સંખ્યાઓ હોય તથા $|\beta| = 1$, તો $\left|\frac{\beta - \alpha}{1 - \overline{\alpha}\beta}\right|$ ની કિંમત શોધો.

18. સમીકરણ $|1 - i|^x = 2^x$ ના શૂન્યેતર પૂર્ણાંક ઉકેલોની સંખ્યા શોધો.

19. જો $(a + ib)(c + id)(e + if)(g + ih) = A + iB$, હોય તો, બતાવો કે

$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)(e^2 + f^2)(g^2 + h^2) = A^2 + B^2$.

20. $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^m = 1$ થાય તેવી m ની ન્યૂનતમ પૂર્ણાંક કિંમત શોધો.

સારાંશ

◆ જ્યાં a અને b વાસ્તવિક સંખ્યાઓ છે તેવી $a + ib$ પ્રકારની સંખ્યાને સંકર સંખ્યા કહેવાય છે. a ને સંકર સંખ્યાનો વાસ્તવિક ભાગ તથા b ને તેનો કાલ્પનિક ભાગ કહેવાય છે.

◆ ધારો કે $z_1 = a + ib$ અને $z_2 = c + id$, તો

(i) $z_1 + z_2 = (a + c) + i(b + d)$

(ii) $z_1 z_2 = (ac - bd) + i(ad + bc)$

◆ દરેક શૂન્યેતર સંકર સંખ્યા $a + ib$ $(a \neq 0, b \neq 0)$ ને સંગત સંકર સંખ્યા $\frac{a}{a^2+b^2} + i\frac{-b}{a^2+b^2}$,અસ્તિત્વ ધરાવે છે કે, જેથી $(a + ib)\left(\frac{a}{a^2+b^2} + i\frac{-b}{a^2+b^2}\right) = 1 + i0 = 1$. તેને $z = a + ib$ નો વ્યસ્ત કહે છે તથા તેને સંકેત $\frac{1}{z}$ અથવા z^{-1} થી દર્શાવાય છે.

◆ કોઈ પણ પૂર્ણાંક k માટે, $i^{4k} = 1$, $i^{4k+1} = i$, $i^{4k+2} = -1$, $i^{4k+3} = -i$

◆ સંકર સંખ્યા $z = a + ib$ ની અનુબદ્ધ સંકર સંખ્યા (કે જેને $\overline{z}$ વડે દર્શાવાય છે) $\overline{z} = a - ib$.

◆ સંકર સંખ્યા $z = x + iy$ નું ધ્રુવીય સ્વરૂપ $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ છે, જ્યાં $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ (z નો માનાંક) અને $\cos\theta = \frac{x}{r}$, $\sin\theta = \frac{y}{r}$ (θ એ z નો કોણાંક). જો θ ની કિંમત અંતરાલ $-\pi < \theta \leq \pi$ માં હોય તો તેને z નો મુખ્ય કોણાંક કહે છે.

- n ઘાતવાળા બહુપદીય સમીકરણને n બીજ મળે છે.
- જો $b^2 - 4ac < 0$ હોય તો દ્વિઘાત સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$, $a, b, c \in R$, $a \neq 0$ નાં બીજ

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{4ac - b^2}\, i}{2a} \text{ છે.}$$

Historical Note

The fact that square root of a negative number does not exist in the real number system was recognised by the Greeks. But the credit goes to the Indian mathematician *Mahavira* (850) who first stated this difficulty clearly. "He mentions in his work '*Ganitasara Sangraha*' as in the nature of things a negative (quantity) is not a square (quantity)', it has, therefore, no square root". *Bhaskara*, another Indian mathematician, also writes in his work *Bijaganita*, written in 1150. "There is no square root of a negative quantity, for it is not a square." *Cardan* (1545) considered the problem of solving

$$x + y = 10,\ xy = 40.$$

He obtained $x = 5 + \sqrt{-15}$ and $y = 5 - \sqrt{-15}$ as the solution of it, which was discarded by him by saying that these numbers are 'useless'. *Albert Girard* (about 1625) accepted square root of negative numbers and said that this will enable us to get as many roots as the degree of the polynomial equation. *Euler* was the first to introduce the symbol i for $\sqrt{-1}$ and *W.R. Hamilton* (about 1830) regarded the complex number $a + ib$ as an ordered pair of real numbers (a, b) thus giving it a purely mathematical definition and avoiding use of the so called '*imaginary numbers*'.

પ્રકરણ 6

સુરેખ અસમતાઓ

❖*Mathematics is the art of saying many things in many different ways. – MAXWELL*❖

6.1 પ્રાસ્તાવિક

આગળનાં ધોરણોમાં આપણે એક ચલ સુરેખ સમીકરણો તથા બે ચલની સુરેખ સમીકરણ સંહતિનો ઉકેલ મેળવ્યો છે. વળી આપણે કેટલાંક વિધાનો દ્વારા વર્ણવેલા કૂટપ્રશ્નોને પણ આવાં સમીકરણોમાં પરિવર્તિત કર્યાં હતાં અને તેમના ઉકેલ મેળવ્યા હતા. હવે પછી સ્વભાવિક રીતે પ્રશ્ન ઉદ્ભવે કે વ્યવહારમાં હંમેશાં પ્રત્યેક કૂટપ્રશ્નનું પરિવર્તન સમીકરણમાં થાય તે જરૂરી છે ? ઉદાહરણ તરીકે, તમારા વર્ગમાં બધા જ વિદ્યાર્થીઓની ઊંચાઈ 160 સેમીથી ઓછી છે. તમારા વર્ગમાં વધુમાં વધુ 60 ટેબલ કે ખુરશીઓ કે બંને સમાઈ શકે છે. અહીં આપણને એવાં વિધાનો મળે છે કે જેમાં '$<$' (થી ઓછું), '$>$' (થી વધુ), '$\le$' (થી ઓછું કે બરાબર) અને $\ge$ (થી વધુ કે બરાબર) જેવા સંકેતો પણ ઉદ્ભવી શકે છે. આવી અભિવ્યક્તિને ***સુરેખ અસમતા*** *(Linear Inequalities)* કહે છે.

આ પ્રકરણમાં આપણે એક ચલમાં તથા બે ચલમાં સુરેખ અસમતાઓનો અભ્યાસ કરીશું. ગણિત, વિજ્ઞાન, આંકડાશાસ્ત્રમાં, મહત્તમ, ન્યૂનતમના પ્રશ્નો (ઇષ્ટ કિંમતના પ્રશ્નો) (*optimisation problems*), અર્થશાસ્ત્ર, મનોવિજ્ઞાન વગેરેનો અભ્યાસ કરવામાં અસમતાઓ ઉપયોગી છે.

6.2 અસમતાઓ

હવે આપણે કેટલીક પરિસ્થિતિઓ વિચારીએ :

(i) રવિ ₹ 200 લઈને ચોખા ખરીદવા બજારમાં જાય છે. ચોખા એક કિલોના પૅકેટમાં ઉપલબ્ધ છે. 1 કિલો ચોખાના પૅકેટની કિંમત ₹ 30 છે. હવે જો x એ રવિએ ખરીદેલા ચોખાનાં પૅકેટોની સંખ્યા દર્શાવે તો, તેણે ખર્ચ કરેલી કુલ રકમ ₹ $30x$ થાય.

અહીં તેને ચોખાનાં પૅકેટો જ ખરીદવાના હોવાથી તે પૂરા ₹ 200 નો ખર્ચ નહિ કરી શકે. (કેમ?)

આથી, $30x < 200$ ... (1)

અહીં સ્પષ્ટ છે કે પરિણામ (I) સમીકરણ નથી, કારણ કે તેમાં સમતાનો સંકેત નથી.

(ii) રેશ્મા પાસે ₹ 120 છે. તેમાંથી તે કેટલાંક રજિસ્ટર અને પેન ખરીદવા માંગે છે. પ્રત્યેક રજિસ્ટરની કિંમત ₹ 40 અને પ્રત્યેક પેનની કિંમત ₹ 20 છે. આ પરિસ્થિતિમાં રેશ્માએ ખરીદેલ રજિસ્ટરની સંખ્યા x અને પેનની સંખ્યા y હોય તો તેના દ્વારા ખર્ચ થયેલ કુલ રકમ ₹ $(40x + 20y)$ થાય.

અને તેથી $40x + 20y \leq 120$ ... (2)

આ પરિસ્થિતિમાં ખર્ચ થયેલી કુલ રકમ ₹ 120 હોઈ શકે છે. તો અહીં, આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે વિધાન (2) બે ભાગમાં છે.

$40x + 20y < 120$ ... (3)

અને $40x + 20y = 120$ ... (4)

વિધાન (3) એ સમીકરણ નથી તે એક અસમતા છે, જ્યારે વિધાન (4) સમીકરણ છે.

વ્યાખ્યા 1 : *બે વાસ્તવિક સંખ્યાઓ કે બૈજિક પદાવલી વચ્ચે '<', '>', '≤' અને '≥' જેવા સંબંધો અસમતા રચે છે.*

ઉપરનાં વિધાનો (1), (2) અને (3) અસમતાઓ છે. $3 < 5$; $7 > 5$ એ સંખ્યાત્મક અસમતાનાં ઉદાહરણો છે. $x < 5$; $y > 2$; $x \geq 3$, $y \leq 4$ એ શાબ્દિક અસમતાનાં ઉદાહરણો છે.

$3 < 5 < 7$ (વાંચો : 5 એ 3 થી મોટો છે અને 7 થી નાનો છે), $3 \leq x < 5$ (વાંચો : x એ 3 ને સમાન અથવા 3 થી મોટો છે અને 5 થી નાનો છે), $2 < y \leq 4$ એ દ્વિ-અસમતાનાં ઉદાહરણો છે.

અસમતાઓનાં કેટલાંક ઉદાહરણો નીચે મુજબ છે :

$ax + b < 0$ ... (5)

$ax + b > 0$ ... (6)

$ax + b \leq 0$ ... (7)

$ax + b \geq 0$ ... (8)

$ax + by < c$ ... (9)

$ax + by > c$ ... (10)

$ax + by \leq c$ ... (11)

$ax + by \geq c$ ... (12)

$ax^2 + bx + c \leq 0$ ... (13)

$ax^2 + bx + c > 0$ ... (14)

અસમતાઓ (5), (6), (9), (10) અને (14) એ ***ચુસ્ત અસમતાઓ*** (*strict inequalities*) છે. જ્યારે (7), (8), (11), (12), અને (13) ને ***મિશ્ર અસમતા*** (*slack inequalities*) કહે છે. અસમતાઓ (5) થી (8) એ એક ચલ x ની સુરેખ અસમતા છે. (જ્યાં $a \neq 0$) અસમતાઓ (9) થી (12) એ શૂન્યેતર a તથા b માટે બે ચલ x અને y માં સુરેખ અસમતાઓ છે.

અસમતાઓ (13) અને (14) એ સુરેખ અસમતાઓ નથી. (હકીકતમાં તો $a \neq 0$ માટે આ એક ચલની દ્વિઘાત અસમતા છે.)

આ પ્રકરણમાં આપણે ફક્ત એક ચલ અને બે ચલની સુરેખ અસમતાનો જ અભ્યાસ કરીશું.

6.3 એક ચલમાં સુરેખ અસમતાનો બૈજિક ઉકેલ અને તેનું આલેખ પર નિરૂપણ :

વિભાગ 6.2 ના વિધાન(1) માં આપણી પાસે અસમતા $30x < 200$ હતી. અહીં x એ ચોખાનાં પૅકેટની સંખ્યા દર્શાવે છે. અહીં સ્પષ્ટ છે કે x એ ઋણ પૂર્ણાંક કે અપૂર્ણાંક સંખ્યા હોઈ શકે નહિ. આ અસમતામાં ડાબી બાજુ $30x$ અને જમણી બાજુ 200 છે. તેથી

જો $x = 0$, તો, ડાબી બાજુ $= 30\ (0) = 0 < 200$ (જમણી બાજુ) સત્ય છે.

જો $x = 1$, તો, ડાબી બાજુ $= 30\ (1) = 30 < 200$ (જમણી બાજુ) સત્ય છે.

જો $x = 2$, તો, ડાબી બાજુ $= 30\ (2) = 60 < 200$, સત્ય છે.

જો $x = 3$, તો, ડાબી બાજુ $= 30\ (3) = 90 < 200$, સત્ય છે.

જો $x = 4$, તો, ડાબી બાજુ $= 30\ (4) = 120 < 200$, સત્ય છે.

જો $x = 5$, તો, ડાબી બાજુ $= 30\ (5) = 150 < 200$, સત્ય છે.

જો $x = 6$, તો, ડાબી બાજુ $= 30\ (6) = 180 < 200$, સત્ય છે.

જો $x = 7$, તો, ડાબી બાજુ $= 30\ (7) = 210 < 200$, મિથ્યા છે.

ઉપરની પરિસ્થિતિમાં આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે x ની જે કિંમતો માટે અસમતા સત્યવિધાન દર્શાવે તેવી કિંમતો 0,1,2,3,4,5,6 છે. x ની જે કિંમતો માટે અસમતા સત્યવિધાન દર્શાવે તેવી કિંમતોને અસમતાનો *ઉકેલ* કહે છે. આવા તમામ ઉકેલોથી બનતા ગણ $\{0,1,2,3,4,5,6\}$ ને અસમતાનો *ઉકેલ ગણ* કહે છે.

આમ, ચલની જે કિંમતો માટે આપેલ એક ચલ અસમતા સત્ય વિધાન દર્શાવે તે કિંમતોને અસમતાનો ઉકેલ કહે છે.

આપણે ઉપરની અસમતાનો ઉકેલ પ્રયત્ન દ્વારા ક્ષતિ-નિવારણ પદ્ધતિથી મેળવ્યો. આ બહુ કાર્યક્ષમ પદ્ધતિ નથી. દેખીતી રીતે આ પદ્ધતિ ખૂબ સમય માગી લે તેવી અને ક્યારેક બિનઅસરકારક છે. આપણને અસમતાના ઉકેલ માટે વધુ સારી રીતે અને વ્યવસ્થિત રીતે ઉકેલ મળે તેવી પદ્ધતિની જરૂર છે. આ પહેલાં આપણે સંખ્યાત્મક અસમતાના કેટલાક વધુ ગુણધર્મો જોઈશું અને અસમતાનો ઉકેલ મેળવતી વખતે તેમનો નિયમ તરીકે ઉપયોગ કરીશું.

સુરેખ સમીકરણોનો ઉકેલ મેળવતી વખતે તમે નીચેના નિયમોને યાદ રાખજો :

નિયમ : 1 સમીકરણની બંને બાજુએ સમાન સંખ્યા ઉમેરી (કે તેમાંથી બાદ) કરી શકાય છે.

નિયમ : 2 સમીકરણની બંને બાજુને સમાન શૂન્યેતર સંખ્યા વડે ગુણી (કે ભાગી) શકાય છે.

અસમતાઓનો ઉકેલ મેળવતી વખતે પણ આપણે ફરી આ જ નિયમોનો ઉપયોગ કરીશું, પણ આપણે નિયમ 2 માં

થોડો સુધારો કરીશું, અસમતાની બંને બાજુએ સમાન ઋણ સંખ્યા વડે ગુણતાં (કે ભાગતાં) અસમતાની નિશાની ઊલટાઈ જાય છે. (જેમ કે, '<' ને બદલે '>', ≤' ને બદલે '≥' વગેરે) આ નીચેની હકીકત પરથી સ્પષ્ટ છે :

$3 > 2$ પરંતુ $-3 < -2$,

$-8 < -7$ પરંતુ $(-8)(-2) > (-7)(-2)$, એટલે કે, $16 > 14$.

આમ, અસમતાના ઉકેલ માટેના નિયમો નીચે પ્રમાણે છે :

નિયમ 1 : અસમતાની બંને બાજુએ સમાન સંખ્યા ઉમેરતા કે તેમાંથી બાદ કરતાં તેની નિશાની બદલાતી નથી.

નિયમ 2 : અસમતાની બંને બાજુએ સમાન ધન સંખ્યા વડે ગુણતા કે ભાગતાં અસમતાની નિશાની બદલાતી નથી, પણ અસમતાની બંને બાજુએ સમાન ઋણ સંખ્યા વડે ગુણતાં કે ભાગતાં અસમતાની નિશાની *ઊલટાઈ* જાય છે.

ચાલો હવે, આપણે કેટલાંક ઉદાહરણોનો વિચાર કરીએ.

ઉદાહરણ 1 : (i) પ્રાકૃતિક સંખ્યા x (ii) પૂર્ણાંક સંખ્યા x માટે $30x < 200$ ઉકેલો.

ઉકેલ : અહીં $30x < 200$ આપેલ છે.

અથવા $\frac{30x}{30} < \frac{200}{30}$ (નિયમ-2)

તેથી, $x < \frac{20}{3}$

(i) x પ્રાકૃતિક સંખ્યા હોય તો નીચેની કિંમતો માટે અસમતા સત્યવિધાન દર્શાવે છે.

પ્રાકૃતિક સંખ્યા 1, 2, 3, 4, 5, 6.

અસમતાનો ઉકેલ ગણ : {1, 2, 3, 4, 5, 6} છે.

(ii) x પૂર્ણાંક સંખ્યા હોય તો આપેલ અસમતાનો ઉકેલ...,–3, –2,–1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 છે.

અસમતાનો ઉકેલ ગણ {..., – 3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6} છે.

ઉદાહરણ 2 : (i) પૂર્ણાંક સંખ્યા x (ii) વાસ્તવિક સંખ્યા x માટે $5x - 3 < 3x + 1$ ઉકેલો.

ઉકેલ : અહીં, $5x - 3 < 3x + 1$

$5x - 3 + 3 < 3x + 1 + 3$ (નિયમ 1)

$5x < 3x + 4$

$5x - 3x < 3x + 4 - 3x$ (નિયમ 1)

$2x < 4$

$x < 2$ (નિયમ 2)

(i) x પૂર્ણાંક સંખ્યા હોય તો આપેલ અસમતાનો ઉકેલ ..., – 4, – 3, – 2, – 1, 0, 1 છે.

(ii) જ્યારે x વાસ્તવિક સંખ્યા હોય ત્યારે આપેલ અસમતાનો ઉકેલ $x < 2$, એટલે, 2 થી ઓછી હોય એવી તમામ વાસ્તવિક સંખ્યાઓ છે. તેથી આ અસમતાનો ઉકેલ ગણ $x \in (-\infty, 2)$ છે.

આપણે અસમતાઓનો ઉકેલ પ્રાકૃતિક સંખ્યા ગણ, પૂર્ણાંક સંખ્યાગણ અને વાસ્તવિક સંખ્યાગણમાં મેળવ્યો. હવેથી જ્યાં પણ નિર્દેશિત કરવામાં આવ્યું ન હોય, ત્યાં આ પ્રકરણમાં આપણે અસમતાનો ઉકેલ વાસ્તવિક સંખ્યાગણમાં મેળવીશું.

ઉદાહરણ 3 : $4x + 3 < 6x + 7$ ઉકેલો.

ઉકેલ : અહીં, $4x + 3 < 6x + 7$

અથવા $4x - 6x < 6x + 4 - 6x$

અથવા $-2x < 4$ અથવા $x > -2$

આથી, આપેલ અસમતાનો ઉકેલ -2 થી મોટી પ્રત્યેક વાસ્તવિક સંખ્યાનો ગણ છે.

ઉકેલ ગણ $(-2, \infty)$ છે.

ઉદાહરણ 4 : $\frac{5-2x}{3} \le \frac{x}{6} - 5$ ઉકેલો.

ઉકેલ : $\frac{5-2x}{3} \le \frac{x}{6} - 5$

અથવા $2(5-2x) \le x - 30.$

અથવા $10 - 4x \le x - 30$

અથવા $-5x \le -40$, એટલે કે, $x \ge 8$

આથી, આપેલ અસમાનતાનો ઉકેલ 8 થી મોટી કે 8 ને સમાન પ્રત્યેક વાસ્તવિક સંખ્યા x છે. ઉકેલ ગણ $[8, \infty)$ છે.

ઉદાહરણ 5 : અસમતા $7x + 3 < 5x + 9$ નો ઉકેલ શોધી તેનો આલેખ સંખ્યારેખા પર દર્શાવો.

ઉકેલ : $7x + 3 < 5x + 9$

અથવા $2x < 6$

અથવા $x < 3$

આપેલ અસમતાનો સંખ્યારેખા પર આકૃતિ 6.1 પ્રમાણે દર્શાવાય.

આકૃતિ 6.1

ઉદાહરણ 6 : અસમતા $\frac{3x-4}{2} \ge \frac{x+1}{4} - 1$ નો ઉકેલ શોધો અને તેને સંખ્યારેખા પર દર્શાવો.

ઉકેલ :

$$\frac{3x-4}{2} \ge \frac{x+1}{4} - 1$$

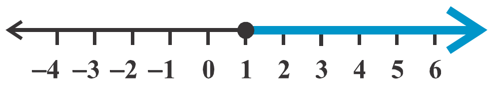
અથવા $$\frac{3x-4}{2} \ge \frac{x-3}{4}$$

$\therefore \quad 2\,(3x - 4) \geq (x - 3)$

$\therefore \quad 6x - 8 \geq x - 3$

$\therefore \quad 5x \geq 5$ અથવા $x \geq 1$

ઉકેલ સંખ્યારેખા પર આકૃતિ 6.2 માં દર્શાવેલ છે.



આકૃતિ 6.2

ઉદાહરણ 7 : એક વિદ્યાર્થી ધોરણ 11ની પ્રથમ અને બીજા સત્રની પરીક્ષામાં અનુક્રમે 62 અને 48 ગુણ મેળવે છે. હવે તેણે વાર્ષિક પરીક્ષામાં કેટલા ન્યૂનતમ ગુણ મેળવવા જોઈએ કે જેથી તેના સરેરાશ ગુણ ઓછામાં ઓછા 60 થાય ?

ઉકેલ : ધારો કે વિદ્યાર્થી વાર્ષિક પરીક્ષામાં x ગુણ પ્રાપ્ત કરે છે, તો

$\dfrac{62+48+x}{3} \geq 60$ થવું જોઇએ.

અથવા $110 + x \geq 180$ થવું જોઇએ.

અથવા $x \geq 70$ થવું જોઇએ.

આથી, વિદ્યાર્થીએ સરેરાશ ન્યૂનતમ ગુણ 60 કરવા માટે વાર્ષિક પરીક્ષામાં ન્યૂનતમ 70 ગુણ લાવવા પડે.

ઉદાહરણ 8 : બે પૈકીનો પ્રત્યેક 10 થી મોટો હોય અને જેમનો સરવાળો 40 થી ઓછો હોય તેવા ક્રમિક અયુગ્મ પૂર્ણાંકોની જોડ મેળવો.

ઉકેલ : ધારો કે, બે ક્રમિક અયુગ્મ પૂર્ણાંકોમાં નાનો અયુગ્મ પૂર્ણાંક x છે. તો બીજો અયુગ્મ પૂર્ણાંક $x + 2$ થશે. હવે પ્રશ્ન અનુસાર

$x > 10$ ... (1)

અને $x + (x + 2) < 40$ ... (2)

(2) પરથી, આપણને $2x + 2 < 40$ મળે.

$x < 19$ ... (3)

પરિણામો (1) અને (3), પરથી

$10 < x < 19$

x અયુગ્મ પૂર્ણાંક હોવાથી x એ 11, 13, 15 અને 17 હોઈ શકે.

તેથી, શક્ય ક્રમયુક્ત યુગ્મ (11, 13), (13, 15), (15, 17), (17, 19) બને.

સ્વાધ્યાય 6.1

1. (i) પ્રાકૃતિક સંખ્યા x (ii) પૂર્ણાંક સંખ્યા x માટે $24x < 100$ ઉકેલો.
2. (i) પ્રાકૃતિક સંખ્યા x (ii) પૂર્ણાંક સંખ્યા x માટે $-12x > 30$ ઉકેલો.

3. (i) પૂર્ણાંક સંખ્યા x (ii) વાસ્તવિક સંખ્યા x માટે $5x - 3 < 7$ ઉકેલો.

4. (i) પૂર્ણાંક સંખ્યા x (ii) વાસ્તવિક સંખ્યા x માટે $3x + 8 > 2$ ઉકેલો.

નીચેની 5 થી 16 ક્રમની અસમતાઓનો વાસ્તવિક સંખ્યા x માટે ઉકેલ મેળવો.

5. $4x + 3 < 5x + 7$

6. $3x - 7 > 5x - 1$

7. $3(x - 1) \leq 2(x - 3)$

8. $3(2 - x) \geq 2(1 - x)$

9. $x + \frac{x}{2} + \frac{x}{3} < 11$

10. $\frac{x}{3} > \frac{x}{2} + 1$

11. $\frac{3(x-2)}{5} \leq \frac{5(2-x)}{3}$

12. $\frac{1}{2}\left(\frac{3x}{5} + 4\right) \geq \frac{1}{3}(x - 6)$

13. $2(2x + 3) - 10 < 6(x - 2)$

14. $37 - (3x + 5) \geq 9x - 8(x - 3)$

15. $\frac{x}{4} < \frac{(5x-2)}{3} - \frac{(7x-3)}{5}$

16. $\frac{(2x-1)}{3} \geq \frac{(3x-2)}{4} - \frac{(2-x)}{5}$

નીચેની 17 થી 20 ક્રમની અસમતાઓનો ઉકેલ મેળવો અને તેમને સંખ્યારેખા પર દર્શાવો.

17. $3x - 2 < 2x + 1$

18. $5x - 3 \geq 3x - 5$

19. $3(1 - x) < 2(x + 4)$

20. $\frac{x}{2} \geq \frac{(5x-2)}{3} - \frac{(7x-3)}{5}$

21. રવિએ પહેલી બે એકમ કસોટીમાં 70 અને 75 ગુણ મેળવેલ છે. હવે તેણે ત્રીજા કસોટીમાં કેટલા ન્યૂનતમ ગુણ મેળવવા જોઈએ કે જેથી તેના સરેરાશ ગુણ ઓછામાં ઓછા 60 થાય?

22. કોઈ એક અભ્યાસક્રમમાં ગ્રેડ 'A' મેળવવા માટે પાંચ પરીક્ષાની સરેરાશ 90 કે તેથી વધુ ગુણ હોવા જોઈએ. (દરેકના 100 ગુણ હોય તેવી પરીક્ષા). જો સુનીતાના પ્રથમ ચાર પરીક્ષાના ગુણ 87, 92, 94 અને 95 હોય, તો તેને તે અભ્યાસક્રમમાં 'A' ગ્રેડ મળે એ માટે તેણે પાંચમી પરીક્ષામાં ન્યૂનતમ કેટલા ગુણ મેળવવા જોઈએ?

23. બે પૈકી પ્રત્યેક 10 થી નાનો હોય અને જેમનો સરવાળો 11 થી વધુ હોય તેવા ક્રમિક અયુગ્મ ધન પૂર્ણાંકોની જોડ મેળવો.

24. બે પૈકી પ્રત્યેક 5 થી મોટો હોય અને જેમનો સરવાળો 23 થી ઓછો હોય તેવી ક્રમિક યુગ્મ ધન પૂર્ણાંકોની જોડ મેળવો.

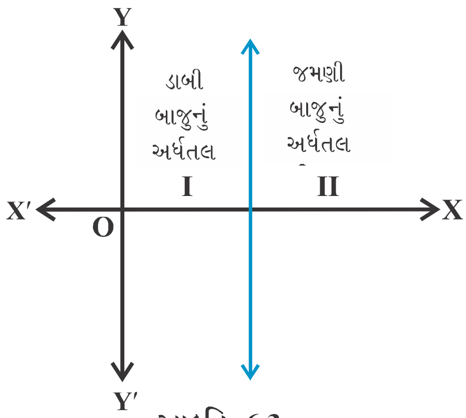
25. ત્રિકોણની સૌથી મોટી બાજુની લંબાઈ તેની સૌથી નાની બાજુની લંબાઈ કરતા ત્રણ ગણી છે. આ સિવાયની ત્રીજી બાજુ સૌથી મોટી બાજુથી 2 સેમી નાની છે. ત્રિકોણની પરિમિતિ ઓછામાં ઓછી 61સેમી હોય તો સૌથી નાની બાજુની ન્યૂનતમ લંબાઈ શોધો.

26. એક વ્યક્તિ 91 સેમી લાંબા એક પાટિયાના ત્રણ ટુકડા કરવા માગે છે. બીજા ટુકડાની લંબાઈ સૌથી નાના ટુકડાની લંબાઈ કરતા 3 સેમી વધુ છે અને ત્રીજા ટુકડાની લંબાઇ સૌથી નાના ટુકડાની લંબાઈથી બમણી છે. જો ત્રીજા ટુકડાની લંબાઈ બીજા ટુકડાની લંબાઈથી ઓછામાં ઓછી 5 સેમી વધુ હોય, તો સૌથી નાના ટુકડાની શક્ય લંબાઈ શોધો.

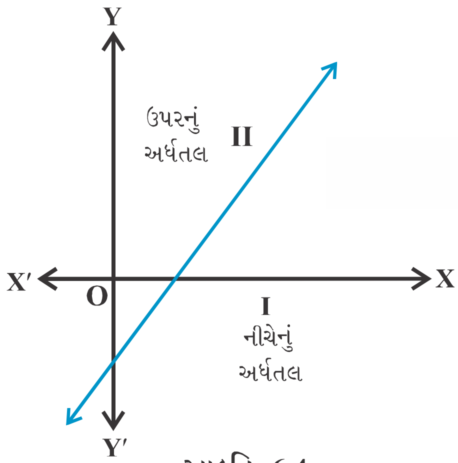
[**સૂચન** : જો સૌથી નાના ટૂકડાની લંબાઈ x હોય તો $(x + 3)$ અને $2x$ અનુક્રમે બીજા અને ત્રીજા ટૂકડાની લંબાઈ છે. આ રીતે $x + (x + 3) + 2x \leq 91$ અને $2x \geq (x + 3) + 5$].

6.4 બે ચલમાં સુરેખ અસમતાનો આલેખ પરથી ઉકેલ

અગાઉના વિભાગમાં આપણે એક ચલ અસમતાનો આલેખ જોયો. તે દૃશ્યમાન રજૂઆત છે અને અસમતાના ઉકેલને રજૂ કરવાની એક અનુકૂળ રીત છે. હવે, આપણે બે ચલમાં સુરેખ અસમતાના આલેખ વિશે ચર્ચા કરીશું.



આકૃતિ 6.3



આકૃતિ 6.4

આપણે જાણીએ છીએ કે કાર્તેઝિય યામ પદ્ધતિમાં રેખા દ્વારા યામ-સમતલનું બે ભાગમાં વિભાજન છે. પ્રત્યેક ભાગને *અર્ધતલ* કહે છે. શિરોલંબ રેખા દ્વારા યામ-સમતલનું ડાબું અર્ધતલ અને જમણું અર્ધતલ એમ બે અર્ધતલોમાં વિભાજન થાય છે અને શિરોલંબ ન હોય તેની રેખા દ્વારા યામ-સમતલનું ઉપરના અને નીચેના અર્ધતલોમાં વિભાજન થાય છે. (આકૃતિ 6.3. અને 6.4.)

હવે યામ-સમતલમાં આવેલ કોઈપણ બિંદુ કાં તો રેખા પર હશે અથવા અર્ધતલ I અથવા II માં હશે. હવે, આપણે ચકાસીશું કે સમતલમાં આપેલ બિંદુને અસમતા $ax + by < c$ અથવા $ax + by > c$ સાથે કોઈ સંબંધ છે કે નહિ.

હવે ધારો કે $ax + by = c, \quad a \neq 0, \quad b \neq 0$ એક રેખા છે. ... (1)

હવે અહીં કોઈપણ બિંદુ (x, y) માટે, ત્રણ શક્યતાઓ છે.

(i) $ax + by = c$ (ii) $ax + by > c$ (iii) $ax + by < c$.

અહીં સ્પષ્ટ છે કે વિકલ્પ (i)માં જે બિંદુઓ (x, y) વિકલ્પ (i) નું સમાધાન કરે તે પ્રત્યેક બિંદુ તે રેખા પરનું બિંદુ છે અને આનું પ્રતીપ પણ સત્ય છે.

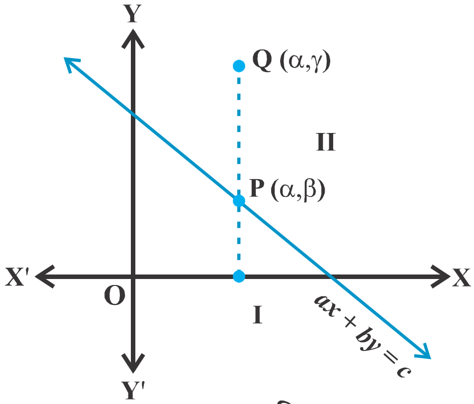
હવે વિકલ્પ (ii) નો વિચાર કરીએ. સૌપ્રથમ ધારો કે $b > 0$ છે.

ધારો કે રેખા $ax + by = c$, $b > 0$ પર $P(\alpha,\beta)$ કોઈ પણ બિંદુ છે.

$\therefore a\alpha + b\beta = c$

હવે, અર્ધતલ II માં કોઈ બિંદુ $Q(\alpha , \gamma)$ લો. (આકૃતિ 6.5).

આકૃતિ પરથી દેખીતું જ છે કે,



આકૃતિ 6.5

$\gamma > \beta$ (કેમ ?)

અથવા $b\gamma > b\beta$ અથવા $a\alpha + b\gamma > a\alpha + b\beta$ (કેમ ?)

અથવા $a\alpha + b\gamma > c$

આમ, $Q(\alpha, \gamma)$ અસમતા $ax + by > c$ નું સમાધાન કરે છે.

આમ, $ax + by = c$ ના ઉપરના અર્ધતલ II માં આવેલું પ્રત્યેક બિંદુ $ax + by > c$ નું સમાધાન કરશે.

આથી ઊલટું, ધારો કે $P(\alpha, \beta)$ એ રેખા $ax + by = c$ પરનું કોઈ પણ બિંદુ છે અને $Q(\alpha, \gamma)$ બિંદુ $ax + by > c$ નું સમાધાન કરે છે.

તો $a\alpha + b\gamma > c$

$\therefore\ a\alpha + b\gamma > a\alpha + b\beta$ (કેમ ?)

$\therefore\ \gamma > \beta$ $(\because\ b > 0)$

આમ, બિંદુ $Q(\alpha, \gamma)$ અર્ધતલ II માં આવેલ છે.

આમ અર્ધતલ II ના પ્રત્યેક બિંદુ માટે $ax + by > c$, અને આથી ઊલટું $ax + by > c$ નું સમાધાન કરતું પ્રત્યેક બિંદુ અર્ધતલ II માં આવેલ છે.

$b < 0$, માટે પણ ઉપર જેવી જ ચર્ચા થઈ શકે અને સાબિત કરી શકાય કે પ્રત્યેક બિંદુ કે જે $ax + by > c$ નું સમાધાન કરે તે અર્ધતલ I માં આવેલ છે અને આથી ઊલટું પણ સત્ય છે.

આમ આ પરથી તારણ નીકળે છે કે $ax + by > c$ નું સમાધાન કરે તેવું પ્રત્યેક બિંદુ $b > 0$ કે $b < 0$ અનુસાર અર્ધતલ II કે I માંથી કોઈ એક અર્ધતલમાં હોય છે અને ઊલટું પણ સત્ય છે.

અસમતા $ax + by > c$ નો આલેખ બેમાંથી એક અર્ધતલ થશે. (તેને *ઉકેલ પ્રદેશ* કહેવાય) અને તેને સમતલમાં રંગીન પ્રદેશ તરીકે દર્શાવાય છે.

નોંધ : (1) જેમાં અસમતાનો સંપૂર્ણ ઉકેલ સમાયેલો હોય તેવા પ્રદેશને ***અસમતાનો ઉકેલ પ્રદેશ*** કહે છે.

(2) કોઈ અસમતાનો ઉકેલ પ્રદેશ ઓળખવા માટે તે રેખાના કોઈપણ એક અર્ધતલનું બિંદુ (a, b) લો. (જે રેખા પર ન હોય) અને તે બિંદુ તે અસમતાનું સમાધાન કરે છે કે નહિ તે ચકાસો. હવે જો તે બિંદુ અસમતાનું સમાધાન કરે તો તે બિંદુ જે અર્ધતલમાં છે તે અર્ધતલ ઉકેલ પ્રદેશ છે અને તે અર્ધતલ રંગીન કરો. નહિ તો તે બિંદુને ન સમાવતો અર્ધતલ અસમતાનો ઉકેલ પ્રદેશ થાય. સુવિધા માટે બિંદુ (0, 0) ને પ્રાથમિકતા આપવામાં આવે છે.

(3) જો અસમતા $ax + by \geq c$ અથવા $ax + by \leq c$ પ્રકારની હોય, તો ઉકેલમાં રેખા $ax + by = c$ નાં બિંદુઓનો પણ સમાવેશ થાય છે અને તે દર્શાવવા માટે આપણે ઘાટી રેખા દોરીએ છીએ.

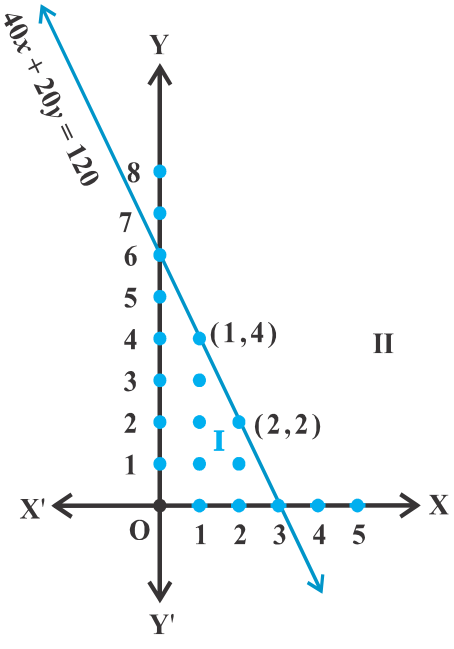
(4) જો અસમતા $ax + by > c$ અથવા $ax + by < c$, પ્રકારની હોય, તો ઉકેલમાં રેખા $ax + by = c$ નાં બિંદુઓનો સમાવેશ થતો નથી અને આ દર્શાવવા માટે આપણે તૂટક રેખા દોરીએ છીએ.

વિભાગ 6.2 માં આપણે બે ચલો x અને y માં નીચેની સુરેખ અસમતા મેળવી હતી.

$$40x + 20y \le 120 \quad \text{... (1)}$$

આપણે રેશમા દ્વારા રજિસ્ટર અને પેનને ખરીદવા સંબંધી કૂટપ્રશ્નને ગાણિતિક સ્વરૂપમાં પરિવર્તિત કરી આ અસમતા પ્રાપ્ત કરી હતી.

હવે આ અસમતાનો ઉકેલ માત્ર પૂર્ણ સંખ્યા જ હોય તે બાબત ધ્યાનમાં રાખી મેળવીશું, કારણ કે વસ્તુઓની સંખ્યા અપૂર્ણાંક કે ઋણ ન હોઈ શકે આ કિસ્સામાં આપણે x અને y ની કિંમતો વિધાન (1) સત્ય બને તે રીતે મેળવીશું. વાસ્તવમાં આવી ક્રમયુક્ત જોડનો ગણ એ અસમતા (1)નો *ઉકેલ ગણ* છે.



આકૃતિ 6.6

હવે, $x = 0$ લઈ શરૂઆત કરીએ તો સમીકરણ (1)ની ડાબી બાજુ,

$$40x + 20y = 40\,(0) + 20y = 20y.$$

$\therefore\ 20y \le 120$ અથવા $y \le 6$ ... (2)

$x = 0$, માટે y ને સંગત માત્ર 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 મળે. તો આ સ્થિતિમાં (1) ના ઉકેલો (0, 0), (0, 1), (0,2), (0,3), (0,4), (0, 5) અને (0, 6) છે.

તે જ રીતે, જ્યારે $x = 1, 2$ અને 3 હોય તો (1) ના

ઉકેલો (1, 0), (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 0), (2, 1), (2, 2), (3, 0) છે. તે આકૃતિ 6.6 માં દર્શાવ્યા છે.

હવે આપણે x અને y ના પ્રદેશને પૂર્ણ સંખ્યાઓથી વિસ્તારી વાસ્તવિક સંખ્યાઓ કરીએ અને જોઈએ કે આ સ્થિતિમાં અસમતા (1) ના ઉકેલ શું થશે.

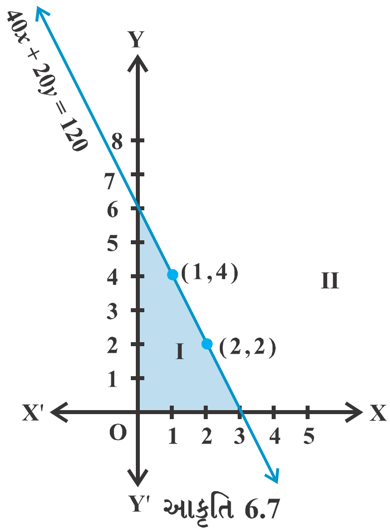
તમે જોશો કે ઉકેલ મેળવવાની આલેખની રીત આ પરિસ્થિતિમાં વધુ સુવિધાજનક છે. આ હેતુ માટે આપણે (1) ને સંગત સમીકરણ

$$40x + 20y = 120 \quad \text{... (3)}$$

લઈશું અને તેનો આલેખ દોરીશું.

આ આલેખ એક રેખા છે. તે યામ-સમતલનું અર્ધતલ I અને અર્ધતલ II માં વિભાજન કરે છે.

અસમતા I નો આલેખ દોરવા માટે આપણે અર્ધતલ I માં એક બિંદુ (0, 0), લઈએ અને ચકાસીએ કે x અને y ની કિંમતો અસમતાનું સમાધાન કરે છે કે નહિ.



આકૃતિ 6.7

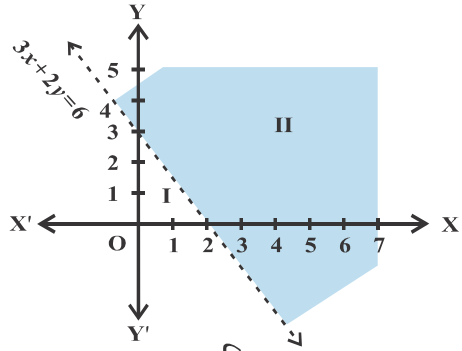
આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે $x = 0$, $y = 0$ અસમતાનું સમાધાન કરે છે. આ પરથી આપણે કહી શકીએ કે અસમતાનો આલેખ અર્ધતલ I છે.(આકૃતિ 6.7) વળી, રેખા પરનું પ્રત્યેક બિંદુ પણ અસમતા (1) નું સમાધાન કરે છે. આથી રેખા પણ આલેખનો એક ભાગ છે.

આમ, આપેલ અસમતાનો આલેખ રેખા સહિત અર્ધતલ I છે. અહીં સ્પષ્ટ છે કે અર્ધતલ II આલેખનો ભાગ નથી. આમ, અસમતા (I)નો *ઉકેલ* આ આલેખનાં તમામ બિંદુઓ છે. (રેખાના સમાવેશ સહિત અર્ધતલ I)

હવે, આપણે કેટલાંક ઉદાહરણોની મદદથી બે ચલની સુરેખ અસમતાનો ઉકેલ મેળવવાની ઉપર દર્શાવેલ રીત સમજીએ.

ઉદાહરણ 9 : $3x + 2y > 6$ નો ઉકેલ આલેખ દ્વારા દર્શાવો.

ઉકેલ : $3x + 2y = 6$નો આલેખ તૂટક રેખા દ્વારા આકૃતિ 6.8 માં દર્શાવેલ છે. આ રેખા xy સમતલને બે અર્ધતલો I અને II માં વિભાજિત કરે છે. હવે આપણે એક બિંદુ (જે રેખા પર નથી) (0, 0) પસંદ કરીએ. તે અર્ધતલ I માં આવેલ છે (આકૃતિ 6.8). હવે આપણે ચકાસીએ કે આ બિંદુ અસમતાનું સમાધાન કરે છે કે નહિ. (0, 0) એ ઉકેલ નથી કારણ કે



આકૃતિ 6.8

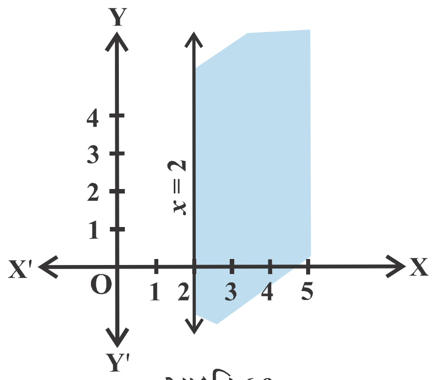
$$3\,(0) + 2\,(0) > 6$$

અથવા $0 > 6$, સત્ય નથી. આથી, અર્ધતલ I આપેલ અસમતાનો ઉકેલ નથી. સ્પષ્ટ છે કે રેખા પર આપેલ કોઈ પણ બિંદુ ચુસ્ત અસમતાનું સમાધાન કરતું નથી. બીજા શબ્દોમાં કહીએ તો રંગીન અર્ધતલ II ઉકેલ પ્રદેશ દર્શાવે છે. તેમાં રેખા પરનાં બિંદુઓનો સમાવેશ થતો નથી.

ઉદાહરણ 10 : દ્વિ-પરિમાણીય યામ-સમતલમાં $3x - 6 \geq 0$ નો ઉકેલ આલેખ દ્વારા દર્શાવો.

ઉકેલ : $3x - 6 = 0$ નો આલેખ આકૃતિ 6.9 માં દર્શાવેલ છે.

હવે આપણે એક બિંદુ (0, 0)ને પસંદ કરી તેને અસમતામાં મૂકતાં, આપણને $3\,(0) - 6 \geq 0$ અથવા $-6 \geq 0$ મળશે, જે સત્ય નથી. આથી ઉકેલ પ્રદેશ રેખા $x = 2$ ના (0, 0)ને ન સમાવતો રેખાની જમણી બાજુનો રંગીન પ્રદેશ છે. આલેખ રેખાને સમાવે છે.



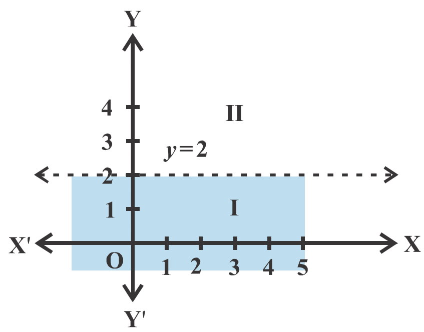
આકૃતિ 6.9

ઉદાહરણ 11 : $y < 2$ નો ઉકેલ આલેખ દ્વારા મેળવો.

ઉકેલ: રેખા $y = 2$ નો આલેખ આકૃતિ 6.10 માં દર્શાવેલ છે.

આપણે રેખાની નીચેના અર્ધતલ I માં એક બિંદુ (0, 0) પસંદ કરીએ. $y = 0$ને આપેલ અસમતામાં મૂકતાં, આપણને $1 \times 0 < 2$ અથવા $0 < 2$ મળે, જે સત્ય છે.

આથી, ઉકેલ પ્રદેશ રેખા $y = 2$ ની નીચેનો રંગીન પ્રદેશ છે, આમ રેખાની નીચેનું પ્રત્યેક બિંદુ (રેખા પરનાં બિંદુઓનો સમાવેશ થતો નથી.) આપેલ અસમતાનો ઉકેલ પ્રદેશ દર્શાવે છે.



આકૃતિ 6.10

સ્વાધ્યાય 6.2

નીચેની અસમતાઓનો ઉકેલ ગણ આલેખ પર દ્વિ-પરિમાણીય યામ-સમતલમાં મેળવો :

1. $x + y < 5$
2. $2x + y \geq 6$
3. $3x + 4y \leq 12$
4. $y + 8 \geq 2x$
5. $x - y \leq 2$
6. $2x - 3y > 6$
7. $-3x + 2y \geq -6$
8. $3y - 5x < 30$
9. $y < -2$
10. $x > -3.$

6.5 બે ચલમાં સુરેખ અસમતાઓની સંહતિનો ઉકેલ

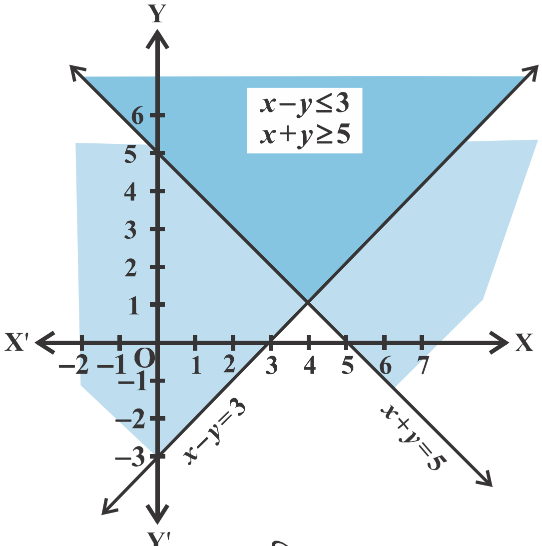
આગળના વિભાગમાં આપણે આલેખ દ્વારા બે ચલ રાશિઓની સુરેખ અસમતાઓનો ઉકેલ મેળવવાની રીત શીખી ગયા છીએ. હવે આપણે કેટલાંક ઉદાહરણો દ્વારા આલેખ દ્વારા બે ચલમાં સુરેખ અસમતાઓની સંહતિનો ઉકેલ કેવી રીતે મેળવવો તે સમજીએ.

ઉદાહરણ 12 : નીચેની સુરેખ અસમતાઓની સંહતિનો ઉકેલ આલેખ દ્વારા મેળવો.

$x + y \geq 5$ ... (1)

$x - y \leq 3$ ... (2)

ઉકેલ : સુરેખ સમીકરણ $x + y = 5$ નો આલેખ આકૃતિ 6.11 માં દર્શાવેલ છે. આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે અસમતાનો ઉકેલ, રેખા $x + y = 5$ની ઉપરનું અર્ધતલ છે. આ પ્રદેશને રંગીન કરીએ. તેમાં રેખા પરનાં બિંદુઓનો પણ સમાવેશ થાય છે. હવે આ જ અક્ષો માટે $x - y = 3$ નો આલેખ દોરીએ. તે આકૃતિ 6.11 માં દર્શાવેલ છે. હવે અસમતા (2)નો ઉકેલ રેખા $x - y = 3$ ની ઉપરનો રંગીન પ્રદેશ છે. તેમાં રેખા પરનાં બિંદુઓનો પણ સમાવેશ થાય છે.



આકૃતિ 6.11

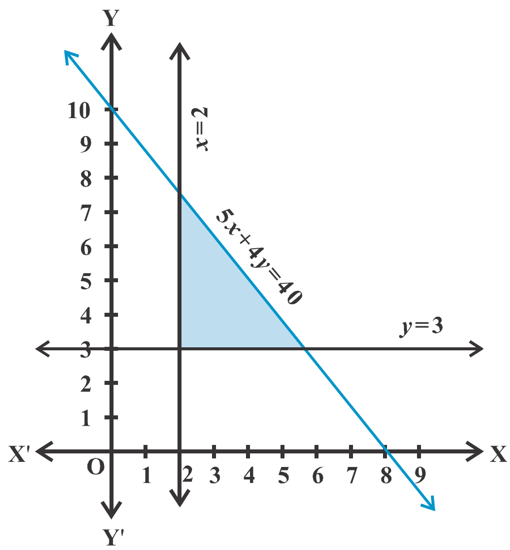
અહીં સ્પષ્ટ છે કે બંને અસમતાઓના ઉકેલના રંગીન પ્રદેશથી બનતો હોય તેવા સામાન્ય રંગીન પ્રદેશને આપેલ અસમતા સંહતિનો ઉકેલ પ્રદેશ કહે છે.

ઉદાહરણ 13 : નીચેની સુરેખ અસમતાઓની સંહતિનો ઉકેલ આલેખ દ્વારા મેળવો.

$5x + 4y \leq 40$ ... (1)

$x \geq 2$ ... (2)

$y \geq 3$ ... (3)



આકૃતિ 6.12

ઉકેલ : સૌપ્રથમ સમીકરણો $5x + 4y = 40$, $x = 2$ અને $y = 3$ દ્વારા દર્શાવતી રેખાઓના આલેખ દોરીએ. હવે આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે અસમતા (1)નો ઉકેલ પ્રદેશ રેખા $5x + 4y = 40$ ની નીચેનો

રંગીન ભાગ છે. અસમતા (2)નો ઉકેલ રેખા $x = 2$ ની જમણી બાજુનો રંગીન પ્રદેશ અને અસમતા (3) નો ઉકેલ રેખા $y = 3$ ની ઉપરનો રંગીન ભાગ છે. આમ, આ રેખાઓ પરનાં બિંદુઓ અને રંગીન ભાગ આપણી અસમતાઓનો ઉકેલ દર્શાવે છે. (આકૃતિ 6.12)

ઘણીબધી વ્યવહારિક પરિસ્થિતિમાં આવતી અસમતાઓમાંના ચલ x અને y ની કિંમતો અનૃણ હોય છે. ઉદાહરણ તરીકે ઉત્પાદિત એકમો, ખરીદવામાં આવેલી વસ્તુઓ, કામના કલાકો વગેરે. દેખીતી રીતે આવા કિસ્સાઓમાં $x \geq 0, y \geq 0$ હોય છે અને તેથી તેમનો ઉકેલ પ્રથમ ચરણમાં જ મળે છે.

ઉદાહરણ 14 : નીચેની અસમતા સંહતિનો ઉકેલ મેળવો.

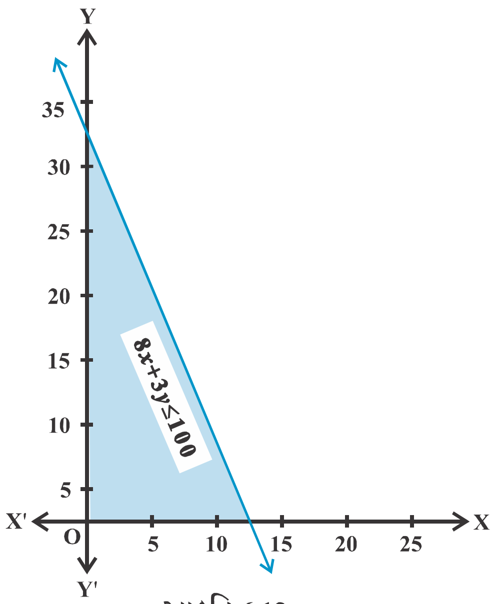
$8x + 3y \leq 100$ ... (1)

$x \geq 0$ ... (2)

$y \geq 0$ ... (3)

ઉકેલ : આપણે રેખા $8x + 3y = 100$ નો આલેખ દોરીએ. અસમતા $8x + 3y \leq 100$ નો ઉકેલ રેખાની નીચેનો રંગીન ભાગ છે, જેમાં, રેખા $8x + 3y = 100$ પરનાં બિંદુઓનો પણ સમાવેશ થાય છે. (આકૃતિ 6.13).

વળી, $x \geq 0, y \geq 0$, છે. તેથી, રંગીન પ્રદેશનું પ્રથમ ચરણમાં આવેલ પ્રત્યેક બિંદુ તથા રેખા અને અક્ષો પરનાં તમામ બિંદુઓ આપેલ અસમતા સંહતિનો ઉકેલ દર્શાવે છે.



આકૃતિ 6.13

ઉદાહરણ 15 : નીચેની અસમતા સંહતિનો ઉકેલ આલેખ દ્વારા મેળવો.

$x + 2y \leq 8$ ... (1)

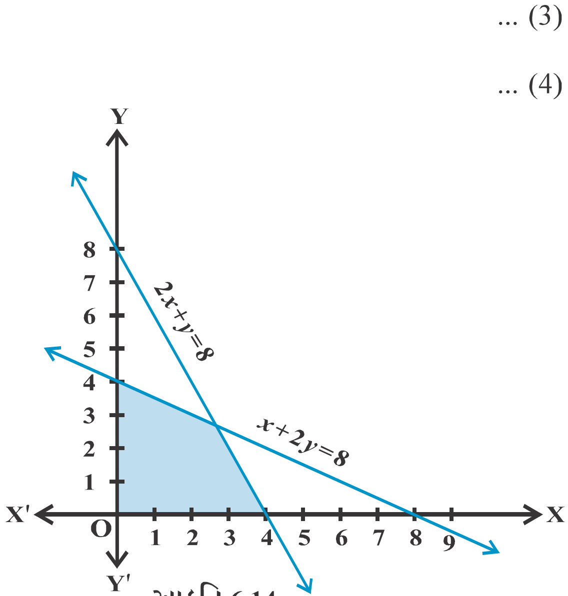
$2x + y \leq 8$ ... (2)

$x \geq 0$ ... (3)

$y \geq 0$ ... (4)

ઉકેલ : આપણે રેખાઓ $x + 2y = 8$ અને $2x + y = 8$ નો આલેખ દોરીએ. અસમતાઓ (1) અને (2)એ રેખાઓની નીચેનો રંગીન ભાગ દર્શાવે છે. તેમાં રેખાઓ પરનાં બિંદુઓનો પણ સમાવેશ થાય છે.

વળી, $x \geq 0$ અને $y \geq 0$ છે. તેથી પ્રથમ ચરણમાં અને અક્ષો ઉપર રંગીન પ્રદેશમાં આવેલ પ્રત્યેક બિંદુ અસમતા સંહતિનો ઉકેલ દર્શાવશે. (આકૃતિ 6.14).



આકૃતિ 6.14

સ્વાધ્યાય 6.3

નીચેની અસમતા સંહતિનો ઉકેલ પ્રદેશ આલેખ પરથી મેળવો :

1. $x \geq 3, y \geq 2$

2. $3x + 2y \leq 12,\ x \geq 1, y \geq 2$

3. $2x + y \geq 6, 3x + 4y \leq 12$

4. $x + y \geq 4,\ 2x - y > 0$

5. $2x - y > 1, x - 2y < -1$

6. $x + y \leq 6,\ x + y \geq 4$

7. $2x + y \geq 8,\ x + 2y \geq 10$

8. $x + y \leq 9,\ y > x,\ x \geq 0$

9. $5x + 4y \leq 20,\ \ x \geq 1, y \geq 2$

10. $3x + 4y \leq 60, x + 3y \leq 30, x \geq 0,\ y \geq 0$

11. $2x + y \geq 4,\ x + y \leq 3,\ 2x - 3y \leq 6$

12. $x - 2y \leq 3, 3x + 4y \geq 12,\ x \geq 0, y \geq 1$

13. $4x + 3y \leq 60, y \geq 2x,\ x \geq 3,\ \ x, y \geq 0$

14. $3x + 2y \leq 150, x + 4y \leq 80,\ x \leq 15,\ y \geq 0, x \geq 0$

15. $x + 2y \leq 10, x + y \geq 1, x - y \leq 0, x \geq 0, y \geq 0$

પ્રકીર્ણ ઉદાહરણો

ઉદાહરણ 16 : ઉકેલો : $-8 \leq 5x - 3 < 7$

ઉકેલ : અહીં, આપણી પાસે બે અસમતાઓ $-8 \leq 5x - 3$ અને $5x - 3 < 7$, છે. તેમને આપણે એક સાથે ઉકેલવી છે.

$$-8 \leq 5x - 3 < 7$$

અથવા $-5 \leq 5x < 10$

અથવા $-1 \leq x < 2$

ઉદાહરણ 17 : $-5 \leq \dfrac{5-3x}{2} \leq 8.$

ઉકેલ : $-5 \leq \dfrac{5-3x}{2} \leq 8$

$\therefore$ $-10 \leq 5 - 3x \leq 16$ અથવા $-15 \leq -3x \leq 11$

$\therefore$ $5 \geq x \geq -\dfrac{11}{3}$

આને $\dfrac{-11}{3} \leq x \leq 5$ રીતે પણ લખી શકાય.

ઉદાહરણ 18 : નીચેની અસમતાઓની સંહતિનો ઉકેલ મેળવો અને ઉકેલને સંખ્યારેખા પર દર્શાવો.

$3x - 7 < 5 + x$ ... (1)

$11 - 5x \le 1$ ... (2)

ઉકેલ : અસમતા (1) પરથી

$3x - 7 < 5 + x$

અથવા $x < 6$ મળે. ...(3)

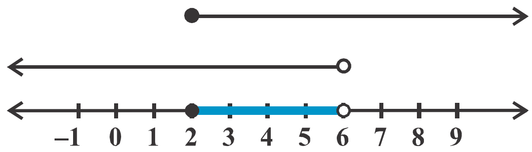
અસમતા (2) પરથી

$11 - 5x \le 1$

અથવા $-5x \le -10$

અથવા $x \ge 2$ મળે. ... (4)

હવે સંખ્યારેખા પર અસમતા (3) અને (4) ના આલેખ દોરીએ. આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે x ની જે કિંમતો બંને અસમતાઓમાં સમાન છે, તેને ઘટ્ટ રેખા દ્વારા આકૃતિ 6.15 માં દર્શાવેલ છે.



આકૃતિ 6.15

આમ, સંહતિનો ઉકેલ 2 અથવા 2 થી મોટી અને 6 થી નાની એવી તમામ વાસ્તવિક સંખ્યાઓ x નો ગણ છે.

આમ, $2 \le x < 6$.

ઉદાહરણ 19 : એક પ્રયોગમાં હાઇડ્રોક્લોરિક ઍસિડના દ્રાવણનું ઉષ્ણતામાન 30° અને 35° સેલ્સિયસ વચ્ચે રાખવાનું છે. જો સેલ્સિયસ તથા ફેરનહીટ વચ્ચે રૂપાંતર સૂત્ર $C = \frac{5}{9}(F - 32)$ હોય, તો ફેરનહીટમાં ઉષ્ણતામાનનો વિસ્તાર શું છે ? C અને F અનુક્રમે ઉષ્ણતામાન ડિગ્રી સેલ્સિયસ અને ડિગ્રી ફેરનહીટ દર્શાવે છે.

ઉકેલ : અહીં, $30 < C < 35$ આપેલ છે.

જ્યાં $C = \frac{5}{9}(F - 32)$, મૂકતાં

$30 < \frac{5}{9}(F - 32) < 35$,

અથવા $\frac{9}{5} \times (30) < (F - 32) < \frac{9}{5} \times (35)$

અથવા $54 < (F - 32) < 63$

અથવા $86 < F < 95$.

∴ દ્રાવણનું ઉષ્ણતામાન 86° F અને 95° F ની વચ્ચે રાખવું જોઈએ.

ઉદાહરણ 20 : એક નિર્માતા પાસે 600 લિટર 12% ઍસિડનું દ્રાવણ છે, તો તેમાં કેટલાં લિટર 30% ઍસિડનું દ્રાવણ ઉમેરવાથી પરિણામી મિશ્રણમાં ઍસિડનું પ્રમાણ 15% થી વધારે પણ 18%થી ઓછું થાય ?

ઉકેલ : ધારો કે x લિટર 30% ઍસિડનું દ્રાવણ ઉમેરવામાં આવે છે.

આથી કુલ મિશ્રણ $(x + 600)$ લિટર

આથી $\quad$ 30 % x + 600 ના 12 % > (x + 600) ના 15 %

અને $\quad$ 30 % x + 600 ના 12 % < (x + 600) ના 18 %

અથવા $\quad \frac{30x}{100} + \frac{12}{100}(600) > \frac{15}{100}(x + 600)$

અને $\quad \frac{30x}{100} + \frac{12}{100}(600) < \frac{18}{100}(x + 600)$

અથવા $\quad 30x + 7200 > 15x + 9000$

અને $\quad 30x + 7200 < 18x + 10800$

અથવા $\quad 15x > 1800$ અને $12x < 3600$

અથવા $\quad x > 120$ અને $x < 300$,

આથી, $\quad 120 < x < 300$

આમ, 120 લિટરથી વધુ અને 300 લિટરથી ઓછું 30 % ઍસિડનું દ્રાવણ ઉમેરવું જોઈએ.

પ્રકીર્ણ સ્વાધ્યાય 6

નીચેની અસમતાઓનો ઉકેલ શોધો : (1 થી 6)

1. $2 \le 3x - 4 \le 5$
2. $6 \le -3(2x - 4) < 12$
3. $-3 \le 4 - \frac{7x}{2} \le 18$
4. $-15 < \frac{3(x-2)}{5} \le 0$
5. $-12 < 4 - \frac{3x}{-5} \le 2$
6. $7 \le \frac{(3x+11)}{2} \le 11$

નીચેની અસમતાઓનો ઉકેલ મેળવો અને તેને સંખ્યારેખા પર દર્શાવો (7 થી 10)

7. $5x + 1 > -24, \quad 5x - 1 < 24$
8. $2(x - 1) < x + 5, \quad 3(x + 2) > 2 - x$
9. $3x - 7 > 2(x - 6), \quad 6 - x > 11 - 2x$
10. $5(2x - 7) - 3(2x + 3) \le 0, \quad 2x + 19 \le 6x + 47$

11. એક દ્રાવણનું તાપમાન 68° F અને 77° F વચ્ચે રાખવાનું છે. સેલ્સિયસ તથા ફેરનહીટ વચ્ચે રૂપાંતર સૂત્ર $F = \frac{9}{5}C + 32$ છે. સેલ્સિયસમાં તાપમાનનો વિસ્તાર શું છે ?

12. 8 % બોરિક ઍસિડના દ્રાવણને મંદ કરવા તેમાં 2 % બોરીક ઍસિડનું દ્રાવણ ઉમેરવામાં આવે છે. પરિણામે બોરિક એસિડનું મિશ્રણ 4 % થી વધુ અને 6 % થી ઓછું મળે છે. તો આપણી પાસે 640 લિટર 8 % નું દ્રાવણ હોય, તો તેમાં કેટલાં લિટર 2 % ટકા સાંદ્રતા ધરાવતું દ્રાવણ ઉમેરવું પડે ?

13. 45 % એસિડનું 1125 લિટર દ્રાવણ છે, તો પરિણામી મિશ્રણમાં 25% થી વધારે પણ 30 % થી ઓછું ઍસિડ થાય તે માટે દ્રાવણમાં કેટલું પાણી ઉમેરવું જોઈએ ?

14. વ્યક્તિનો IQ દર્શાવતું સૂત્ર નીચે પ્રમાણે છે :

$$IQ = \frac{MA}{CA} \times 100$$

અહીં MA વ્યક્તિની માનસિક ઉંમર અને CA તેની સમયાનુક્રમિક ઉંમર છે. જો $80 \le IQ \le 140$ હોય, તો 12 વર્ષની ઉંમરના બાળકોના સમૂહની માનસિક ઉંમરનો વિસ્તાર શોધો.

સારાંશ

- બે વાસ્તવિક સંખ્યાઓ કે બૈજિક પદાવલીઓ વચ્ચે $<, >, \le$ અથવા $\ge$ મૂકતાં બનતા સંબંધને અસમતા કહે છે.
- એક અસમતાની બંને બાજુએ સમાન સંખ્યા ઉમેરી કે તેમાંથી બાદ કરી શકાય છે.
- અસમતાની બંને બાજુએ સમાન ધન સંખ્યા વડે ગુણી (કે ભાગી) શકાય છે. પણ જ્યારે અસમતાની બંને બાજુએ સમાન ઋણ સંખ્યા વડે ગુણતાં (કે ભાગતાં) અસમતાની નિશાની ઊલટાઈ જાય છે.
- ચલ x ની જે કિંમતો માટે અસમતા સત્યવિધાન દર્શાવે તે કિંમતોને અસમતાનો ઉકેલ કહે છે.
- $x < a$ (અથવા $x > a$) ને સંખ્યારેખા પર દર્શાવવા આપણે સંખ્યા a પર એક નાનું વર્તુળ કરી તેની ડાબી (કે જમણી) બાજુની રેખાને ઘાટી કરીશું.
- $x \le a$ (અથવા $x \ge a$) ને સંખ્યારેખા પર દર્શાવવા આપણે સંખ્યા a પર એક ઘટ્ટ વર્તુળ કરી તેની ડાબી (કે જમણી) બાજુની રેખાને ઘાટી કરીશું.
- જો અસમતામાં $\le$ અથવા $\ge$ સંકેત આવે તો અસમતાના ઉકેલમાં રેખા પરના બિંદુઓનો પણ સમાવેશ થાય છે. જે ભાગમાં આવેલા સ્વૈરબિંદુથી અસમતાનું સમાધાન થાય તેવી સમતા દ્વારા દર્શાવતી ***ઘટ્ટ*** રેખાના ડાબી(નીચે) અથવા જમણી(ઉપર) બાજુનો ભાગ અસમતાનો ઉકેલ છે.
- જો અસમતા $<$ અથવા $>$ સંકેત આવે તો અસમતાના ઉકેલમાં રેખા પરના બિંદુઓનો પણ સમાવેશ થતો નથી. જે ભાગમાં આવેલા સ્વૈરબિંદુથી અસમતાનું સમાધાન થાય તેવી સમતા દ્વારા દર્શાવતી ***તૂટક*** રેખાના ડાબી(નીચે) અથવા જમણી(ઉપર) બાજુનો ભાગ અસમતાનો ઉકેલ છે.
- અસમતાઓની સંહતિનો ઉકેલ પ્રદેશ એટલે તે સંહતિમાં આપેલ પ્રત્યેક અસમતાનું સમાધાન એકસાથે કરતો હોય એવો પ્રદેશ.

પ્રકરણ 7

ક્રમચય અને સંચય

❖*Every body of discovery is mathematical in form because there is no other guidance we can have – DARWIN*❖

7.1 પ્રાસ્તાવિક

ધારો કે તમારી પાસે સંખ્યાત્મક તાળાવાળી એક પેટી છે. આ તાળાને ચાર ચક્રો લાગેલાં છે અને દરેક ચક્ર 0 થી 9 પૈકીના દસ અંકો વડે નિર્દેશિત છે. જ્યારે આ ચક્રો પુનરાવર્તન સિવાય અમુક ચોક્કસ 4 અંકોની ખાસ શ્રેણીમાં ગોઠવણી થાય ત્યારે તાળું ખૂલે છે. કોઈક કારણે તમે આ ચોક્કસ અંકોની શ્રેણી ભૂલી ગયા છો. તમને ફક્ત પ્રથમ અંક 7 છે તેટલું યાદ છે. તાળું ખોલવા બાકીના 3 અંકોની કેટલી શ્રેણી તમારે ચકાસવી પડશે ? આ પ્રશ્નનો જવાબ આપવા માટે તમે કદાચ તરત જ બાકીના 9 અંકોમાંથી 3 અંકો સાથે લઈ તમામ શક્ય ગોઠવણી તત્કાળ શરૂ કરી દેશો. પરંતુ આ રીત કંટાળાજનક હશે. કારણ કે આવી શક્ય શ્રેણીઓની સંખ્યા ઘણી મોટી હોઈ શકે. આ પ્રકરણમાં આપણે ગણતરીની કેટલીક પાયાની યુક્તિઓનો અભ્યાસ કરીશું. તેનાથી આપણે આ પ્રશ્નનો જવાબ 3 અંકોની ગોઠવણીની ખરેખર યાદી બનાવ્યા વગર આપી શકીએ. ખરું જોતાં આ યુક્તિઓ વસ્તુઓની ગોઠવણી અને પસંદગી જુદા જુદા કેટલા પ્રકારે કરી શકાય તે વાસ્તવમાં યાદી બનાવ્યા વગર નક્કી કરવામાં મદદરૂપ થાય છે. પ્રથમ પગલા તરીકે આપણે આ બધી યુક્તિઓનો અભ્યાસ કરવા માટે એક ખૂબ જ મૂળભૂત સિદ્ધાંતને ચકાસીશું.

Jacob Bernoulli
(1654-1705)

7.2 ગણતરીનો મૂળભૂત સિદ્ધાંત

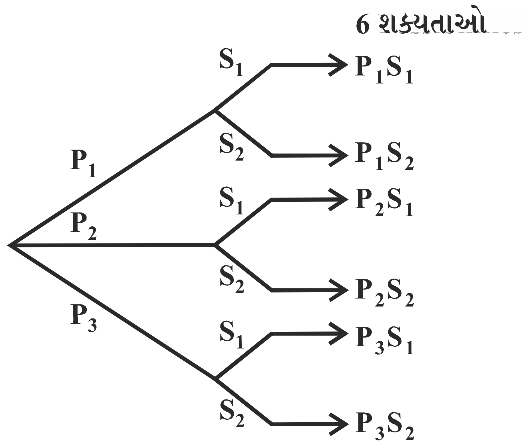
ચાલો આપણે અત્રે આપેલા પ્રશ્નનો વિચાર કરીએ. મોહન પાસે જુદી-જુદી ભાતના 3 પાટલૂન અને જુદી-જુદી ભાતના 2 ખમીસ છે. તે પાટલૂન અને ખમીસની કેટલી ભિન્ન જોડીઓ બનાવીને પોશાક પહેરી શકે ? પાટલૂનની પસંદગી 3 પ્રકારે કરી શકાય,કારણ કે 3 પાટલૂન આપેલ છે. તે જ પ્રમાણે ખમીસની પસંદગી 2 પ્રકારે કરી શકાય. દરેક પાટલૂનની પસંદગી પછી ખમીસ 2 પ્રકારે પસંદ કરી શકાય. માટે પાટલૂન અને ખમીસની $3 \times 2 = 6$ જોડ થશે.

ચાલો આપણે ત્રણ પાટલૂનને P_1, P_2, P_3 અને બે ખમીસને S_1, S_2 નામ આપીએ. આકૃતિ 7.1 માં શક્યતાઓ દર્શાવેલ છે.

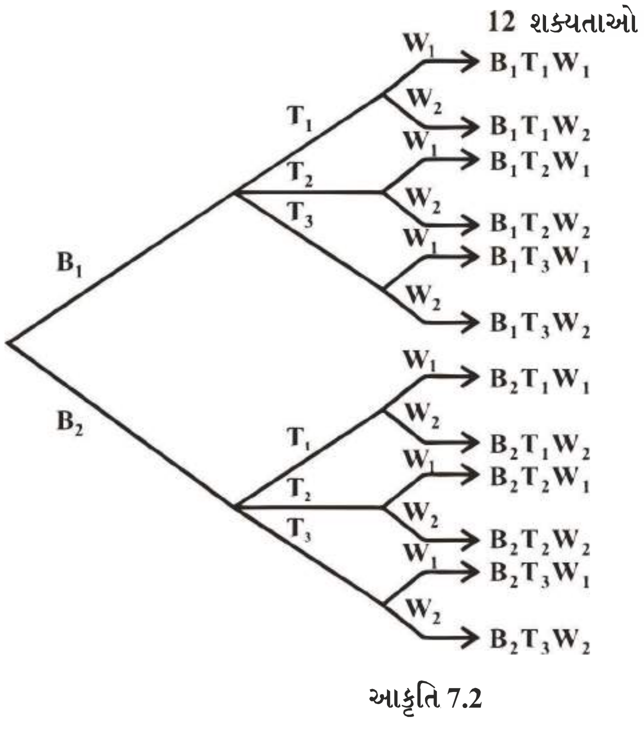
ચાલો આપણે આવા જ પ્રકારના બીજા પ્રશ્નનો વિચાર કરીએ.

શબનમ પાસે 2 દફતર, 3 નાસ્તાના ડબ્બા અને 2 પાણીની બોટલ (દરેક વસ્તુ જુદી-જુદી ભાતની) છે. આ પ્રત્યેક પૈકી એક-એક તે કેટલા પ્રકારે શાળાએ લઈ જઈ શકે?

દફતર 2 પ્રકારે પસંદ કરી શકાય. દફતર પસંદ કર્યા પછી નાસ્તાનો ડબો 3 પ્રકારે પસંદ કરી શકાય. આમ, દફતર અને નાસ્તાના ડબ્બાની $2 \times 3 = 6$ જોડીઓ થશે. આ દરેક જોડી માટે પાણીની બોટલ 2 જુદા જુદા પ્રકારે પસંદ કરી શકાય છે. આમ, શબનમ $6 \times 2 = 12$ જુદા જુદા પ્રકારે આ બધી વસ્તુઓ શાળાએ લઈ જઈ શકે. જો આપણે 2 દફતરને B_1, B_2, ત્રણ નાસ્તાના ડબાને T_1, T_2, T_3 અને બે પાણીની બોટલને W_1, W_2, એવું નામ આપીએ તો આકૃતિ 7.2 માં આ બધી શક્યતાઓને દર્શાવી શકાય.



આકૃતિ 7.1



આકૃતિ 7.2

ખરેખર, જેને *ગણતરીનો મૂળભૂત સિદ્ધાંત* કે *ગુણાકારનો સિદ્ધાંત* તરીકે ઓળખાય છે, તેના વડે આ પ્રકારના પ્રશ્નોનો ઉકેલ મેળવવામાં આવે છે. તે દર્શાવે છે કે

"જો એક ઘટના m ભિન્ન પ્રકારે ઉદ્‌ભવે તથા તેને આનુષંગિક બીજી ઘટના n ભિન્ન પ્રકારે ઉદ્‌ભવે તો બંને ઘટનાઓ એક સાથે ઉદ્‌ભવે તેના પ્રકારોની કુલ સંખ્યા $m \times n$ છે."

ઉપરના સિદ્ધાંતને મર્યાદિત સંખ્યાની ઘટનાઓ માટે વિસ્તૃત કરી શકાય. ઉદાહરણ તરીકે 3 ઘટનાઓ માટેનો સિદ્ધાંત નીચે પ્રમાણે છે :

"જો એક ઘટના m ભિન્ન પ્રકારે ઉદ્‌ભવે, તેને આનુષંગિક બીજી ઘટના n ભિન્ન પ્રકારે ઉદ્‌ભવે તથા આ બંનેને અનુરૂપ આનુષંગિક ત્રીજી ઘટના p ભિન્ન પ્રકારે ઉદ્‌ભવે તો ત્રણેય ઘટનાઓ એક સાથે ઉદ્‌ભવે તેવા પ્રકારોની કુલ સંખ્યા $m \times n \times p$ છે."

પ્રથમ પ્રશ્નમાં પાટલૂન અને ખમીસ પહેરવાના માંગેલ પ્રકારો એ નીચે પ્રમાણેની ભિન્ન ઘટનાઓ એક પછી એક ઉદ્‌ભવે એ હતી :

(i) પાટલૂન પસંદ કરવાની ઘટના

(ii) ખમીસ પસંદ કરવાની ઘટના

બીજા પ્રશ્નમાં માંગેલ પ્રકારો એ આ પ્રમાણેની ભિન્ન ઘટનાઓ એક પછી એક ઉદ્‌ભવે એ હતી.

(i) દફતર પસંદ કરવાની ઘટના

(ii) નાસ્તાનો ડબો પસંદ કરવાની ઘટના

(iii) પાણીની બોટલ પસંદ કરવાની ઘટના

અહીં બંને વિકલ્પમાં દરેક પ્રશ્નમાં આપેલ ઘટનાઓ વિવિધ ક્રમમાં ઉદ્‌ભવે છે. પરંતુ આપણે ગમે તે એક શક્ય ક્રમ પસંદ કરવો જોઈએ અને આ ક્રમમાં ભિન્ન ઘટનાઓ કેટલા પ્રકારે ઉદ્‌ભવે તેની ગણતરી કરી શકાય.

ઉદાહરણ 1 : ROSE શબ્દના મૂળાક્ષરોનો ઉપયોગ કરી 4 મૂળાક્ષરોવાળા અર્થસભર અથવા અર્થરહિત, કેટલા શબ્દો બને તે શોધો. મૂળાક્ષરોનું પુનરાવર્તન કરવાની અનુમતિ નથી.

ઉકેલ : 4 મૂળાક્ષરો વડે ચાર ખાલી સ્થાનો □ □ □ □ જેટલા પ્રકારે ભરી શકાય તેટલા શબ્દો બને. આપણે ધ્યાન રાખીશું કે પુનરાવર્તન કરવાનું નથી. 4 મૂળાક્ષરો R, O, S, E માંથી ગમે તે એક મૂળાક્ષર દ્વારા પ્રથમ સ્થાન 4 ભિન્ન પ્રકારે ભરી શકાય. ત્યાર પછી દ્વિતીય સ્થાન બાકી રહેલ 3 મૂળાક્ષરોમાંથી ગમે તે એક દ્વારા 3 ભિન્ન પ્રકારે ભરી શકાય. ત્યાર પછી તૃતીય સ્થાન બાકી રહેલ 2 મૂળાક્ષરોમાંથી ગમે તે એક દ્વારા 2 ભિન્ન પ્રકારે ભરી શકાય. ત્યાર પછી ચતુર્થ સ્થાન 1 પ્રકારે ભરી શકાય. આમ, ગુણાકારના સિદ્ધાંત દ્વારા 4 સ્થાનોને $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ પ્રકારે ભરી શકાય. તેથી માંગેલ શબ્દોની સંખ્યા 24 છે.

નોંધ જો મૂળાક્ષરોના પુનરાવર્તનની મંજૂરી હોય તો કેટલા શબ્દો બનાવી શકાય ? સરળતાથી સમજી શકાય છે કે 4 ખાલી સ્થાન એક પછી એક ભરવાની રીતોની સંખ્યા $4 \times 4 \times 4 \times 4 = 256$ થશે.

ઉદાહરણ 2 : ભિન્ન રંગના 4 ધ્વજ આપેલા છે. જો એકની નીચે બીજો ધ્વજ રાખીને એક સંકેત મેળવી શકાય તો આવા કેટલા ભિન્ન સંકેતો બનાવી શકાય ?

ઉકેલ : ભિન્ન રંગના 4 ધ્વજમાંથી એક પછી એક ધ્વજ વડે 2 ખાલી સ્થાનો જેટલા પ્રકારે ભરી શકાય તેટલા સંકેતો મળી શકે. ઉપરનું ખાલી સ્થાન 4 ભિન્ન ધ્વજ વડે 4 ભિન્ન પ્રકારે ભરી શકાય. ત્યાર પછી નીચેનું ખાલી સ્થાન બાકી રહેલા 3 ધ્વજમાંથી ગમે તે એક ધ્વજ વડે 3 ભિન્ન પ્રકારે ભરી શકાય. આમ, ગુણાકારના સિદ્ધાંતથી માંગેલ સંકેતોની સંખ્યા $4 \times 3 = 12$ છે.

ઉદાહરણ 3 : 1, 2, 3, 4, 5 અંકોનો ઉપયોગ કરીને 2 અંકોની કેટલી યુગ્મ સંખ્યાઓ બનાવી શકાય ? (અંકોનું પુનરાવર્તન કરી શકાય.)

ઉકેલ : આપેલ પાંચ અંકોના ઉપયોગથી એક પછી એક અંક વડે 2 ખાલી સ્થાનો જેટલા પ્રકારે ભરી શકાય તેટલી 2 અંકોની સંખ્યા મળે. અહીં આ પ્રશ્નમાં આપણે એકમનું સ્થાન પૂરવાથી શરૂઆત કરીશું, કારણ કે આ સ્થાન માટે ફક્ત અંકો 2 અને 4 જ વિકલ્પ તરીકે પ્રાપ્ય છે. તે સ્થાન 2 પ્રકારે ભરી શકાય. ત્યાર પછી દશકનું સ્થાન આપેલ 5 અંકોમાંથી 5 ભિન્ન પ્રકારે ભરી શકાય, કારણ કે અંકોનું પુનરાવર્તન કરી શકાય છે. આમ, ગુણાકારના સિદ્ધાંતથી માંગેલ બે અંકોની યુગ્મ સંખ્યાઓ 2×5 એટલે કે 10 થશે.

ઉદાહરણ 4 : એક હારમાં ઊભા કરેલા શિરોલંબ ધ્વજસ્તંભ પર ભિન્ન રંગના પાંચ ધ્વજ દ્વારા કેટલા સંકેત બનાવી શકાય ? દરેક સંકેતમાં ભિન્ન રંગના બે અથવા બેથી વધુ ધ્વજ (એકની નીચે બીજો) હોઈ શકે.

ઉકેલ : કોઈ પણ સંકેત 2 ધ્વજ, 3 ધ્વજ, 4 ધ્વજ કે 5 ધ્વજનો હોઈ શકે. હવે આપણે 2 ધ્વજ, 3 ધ્વજ, 4 ધ્વજ કે 5 ધ્વજ ધરાવતા શક્ય તમામ સંકેતોની અલગથી ગણતરી કરીશું અને પછી દરેકનો સરવાળો કરીશું.

આપેલ 5 ધ્વજમાંથી એક પછી એક 2 ખાલી સ્થાનો જેટલા પ્રકારે ભરી શકાય તેટલા બે ધ્વજ ધરાવતા સંકેતો મળે. ગુણાકારના સિદ્ધાંત વડે તે $5 \times 4 = 20$ પ્રકારે મળે.

તે જ રીતે 5 ધ્વજ વડે 3 ખાલી સ્થાનો જેટલા પ્રકારે ભરી શકાય તેટલા 3 ધ્વજ ધરાવતા સંકેતો મળે. તે $5 \times 4 \times 3 = 60$ પ્રકારે મળે.

એ જ રીતે આગળ વધતાં આપણે શોધી શકીએ કે,

4 ધ્વજ ધરાવતા સંકેતોની સંખ્યા $5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$

અને 5 ધ્વજ ધરાવતા સંકેતોની સંખ્યા $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

માંગેલ સંકેતોની સંખ્યા $20 + 60 + 120 + 120 = 320$.

સ્વાધ્યાય 7.1

1. નીચેની શરતો અનુસાર 1, 2, 3, 4 અને 5 અંકોનો ઉપયોગ કરી 3 અંકોની કેટલી સંખ્યા બનાવી શકાય?

   (i) અંકોનું પુનરાવર્તન કરવાની અનુમતિ છે.

   (ii) અંકોનું પુનરાવર્તન કરવાની અનુમતિ નથી.

2. જો અંકોનું પુનરાવર્તન કરી શકાય તો 1, 2, 3, 4, 5, 6 અંકો વડે 3 અંકોની કેટલી યુગ્મ સંખ્યાઓ બને ?

3. પુનરાવર્તન સિવાય અંગ્રેજી મૂળાક્ષરોના પ્રથમ 10 અક્ષરોના ઉપયોગથી 4 અક્ષરોવાળા કેટલા સંકેત બનાવી શકાય ?

4. 0 થી 9 અંકોનો ઉપયોગ કરીને 5 અંકોવાળા કેટલા ટેલિફોન નંબર બનાવી શકાય ? દરેક નંબરની શરૂઆત સંખ્યા 67 થી થાય છે તથા અંકોનું પુનરાવર્તન થતું નથી.

5. એક સિક્કો ત્રણ વખત ઉછાળવામાં આવે છે અને પરિણામ નોંધવામાં આવે છે. કેટલાં શક્ય પરિણામો હશે ?

6. ભિન્ન રંગોના 5 ધ્વજ આપેલ છે. એકની નીચે બીજો એવા 2 ધ્વજથી બનતા કેટલા સંકેત બનાવી શકાય ?

7.3 ક્રમચયો

અગાઉના વિભાગના ઉદાહરણ 1 માં આપણે ખરેખર શક્ય ભિન્ન ગોઠવણીઓની ગણતરી કરતા હતા. જેમકે ROSE, REOS, ..., વગેરે. અહીં, આ યાદીમાં દરેક ગોઠવણી બીજી ગોઠવણી કરતાં જુદી પડે છે. બીજા શબ્દોમાં કહીએ તો, અક્ષરોનો ક્રમ અગત્યનો છે. દરેક ગોઠવણીને ભિન્ન અક્ષરોને એક સાથે લેવાથી બનતો ક્રમચય કહે છે. હવે, જો આપણે NUMBER શબ્દના અક્ષરોથી પુનરાર્વતન કર્યા સિવાય ત્રણ અક્ષરોવાળા અર્થસભર કે અર્થરહિત શબ્દો નક્કી કરવા હોય, તો NUM,NMU, MUN, NUB, ..., વગેરે ગોઠવણીની ગણતરી આપણે કરવી પડે. અહીં, આપણે 6 ભિન્ન અક્ષરોમાંથી 3 અક્ષરો એક સાથે આવે તેવા ક્રમચયોની ગણતરી કરીએ છીએ.

માંગેલ શબ્દોની સંખ્યા $= 6 \times 5 \times 4 = 120$ (ગુણાકારના સિદ્ધાંતના ઉપયોગથી)

જો અક્ષરોના પુનરાવર્તનની અનુમતિ હોય તો માંગેલ શબ્દોની સંખ્યા $6 \times 6 \times 6 = 216$ થશે.

વ્યાખ્યા 1 : *આપેલ વસ્તુઓમાંથી અમુક અથવા બધી જ વસ્તુઓની ચોક્કસ ગોઠવણી એ ક્રમચય છે.*

નીચેના પેટા વિભાગમાં આપણે પ્રશ્નોના જવાબ ઝડપથી આપી શકીએ તે માટેનાં જરૂરી સૂત્રો મેળવીશું.

7.3.1 જ્યારે ભિન્ન વસ્તુ આપેલી હોય ત્યારે ક્રમચયો

પ્રમેય 1 : *n ભિન્ન વસ્તુઓમાંથી આપેલી r વસ્તુઓ, $0 < r \le n$ એક સાથે લેવાથી (વસ્તુઓનું પુનરાવર્તન નથી.) મળતાં ક્રમચયોની સંખ્યા $n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)$ થાય તથા તેને સંકેતમાં ${}^nP_r$ થી દર્શાવાય છે.*

સાબિતી : n ભિન્ન વસ્તુઓમાંથી r ખાલી સ્થાનો □ □ □ ... □ જેટલા પ્રકારે ભરી શકાય તેટલી ક્રમચયોની

← r ખાલી સ્થાનો →

સંખ્યા થશે. પ્રથમ સ્થાન n પ્રકારે ભરી શકાય, ત્યાર પછી દ્વિતીય સ્થાન $(n-1)$ પ્રકારે ભરી શકાય, ત્યારે પછી તૃતીય સ્થાન $(n-2)$ પ્રકારે ભરી શકાય ..., ત્યાર પછી r મું સ્થાન $(n-(r-1))$ પ્રકારે ભરી શકાય. આમ, r ખાલી સ્થાનો એક પછી એક ભરવાના પ્રકારની કુલ સંખ્યા

$n(n-1)(n-2)\ldots(n-(r-1))$ અથવા $n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)$ થાય.

પદાવલિ ${}^nP_r$ ની આ અભિવ્યક્તિ કષ્ટદાયક છે, માટે આપણે પદાવલિની લંબાઈ ઘટાડવામાં મદદરૂપ થઈ શકે એવા સંકેતની જરૂર છે. આ માટે સંકેત $n!$ (ક્રમગુણિત n અથવા n ક્રમગુણિત વંચાય છે) આપણી મદદે આવે છે. આગળની સમજૂતીમાં આપણે $n!$ ખરેખર શું છે તે સમજીશું.

7.3.2 ક્રમગુણિતનો સંકેત :

સંકેત n ! એ પ્રથમ n પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો ગુણાકાર દર્શાવે છે, એટલે કે

ગુણાકાર $1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times (n-1) \times n$ ને સંકેત $n!$. વડે દર્શાવાય છે. આપણે આ સંકેતને '*n factorial*' તરીકે વાંચીશું.

આમ, $1 \times 2 \times 3 \times 4 \ldots \times (n-1) \times n = n\,!$

$$1 = 1\,!$$

$$1 \times 2 = 2\,!$$

$$1 \times 2 \times 3 = 3\,!$$

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 = 4\,!$$

આ જ રીતે આગળ વધી શકાય.

આપણે $5\,! = 5 \times 4\,! = 5 \times 4 \times 3\,! = 5 \times 4 \times 3 \times 2\,! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1!$ લખી શકીએ.

સ્પષ્ટ રીતે કોઈ પણ પ્રાકૃતિક સંખ્યા n માટે

$$n\,! = n\,(n-1)\,!$$

$$= n\,(n-1)\,(n-2)\,! \qquad [(n > 2) \text{ હોય તો}]$$

$$= n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,! \qquad [(n > 3) \text{ હોય તો}]$$

આ જ રીતે આગળ વધી શકાય.

આપણે $0\,! = 1$ વ્યાખ્યાયિત કરીએ છીએ.

ઉદાહરણ 5 : કિંમત શોધો (i) $5\,!$ (ii) $7\,!$ (iii) $7\,! - 5!$

ઉકેલ : (i) $5\,! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$

(ii) $7\,! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 = 5040$

(iii) $7\,! - 5! = 5040 - 120 = 4920$

ઉદાહરણ 6 : કિંમત શોધો : (i) $\dfrac{7!}{5!}$ (ii) $\dfrac{12!}{(10!)\,(2!)}$

ઉકેલ : (i) અહીં, $\dfrac{7!}{5!} = \dfrac{7 \times 6 \times 5!}{5!} = 7 \times 6 = 42$

(ii) $\dfrac{12!}{(10!)\,(2!)} = \dfrac{12 \times 11 \times (10!)}{(10!) \times (2)} = 6 \times 11 = 66$

ઉદાહરણ 7 : $n = 5$ અને $r = 2$ માટે $\frac{n!}{r!(n-r)!}$ ની કિંમત શોધો.

ઉકેલ : આપણે $\frac{5!}{2!(5-2)!}$ ની કિંમત શોધવી છે. $(n = 5, r = 2)$

અહીં, $\frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5!}{2! \times 3!} = \frac{4 \times 5}{2} = 10$

ઉદાહરણ 8 : જો $\frac{1}{8!} + \frac{1}{9!} = \frac{x}{10!}$ હોય, તો x ની કિંમત શોધો.

ઉકેલ : અહીં, $\frac{1}{8!} + \frac{1}{9 \times 8!} = \frac{x}{10 \times 9 \times 8!}$

$\therefore 1 + \frac{1}{9} = \frac{x}{10 \times 9}$ અથવા $\frac{10}{9} = \frac{x}{10 \times 9}$

$\therefore x = 100$

સ્વાધ્યાય 7.2

1. કિંમત શોધો :

(i) 8! (ii) 4! – 3!

2. 3! + 4! = 7! થશે કે નહિ તે નક્કી કરો.

3. કિંમત શોધો $\frac{8!}{6! \times 2!}$.

4. જો $\frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} = \frac{x}{8!}$ હોય, તો x ની કિંમત શોધો.

5. જ્યારે (i) $n = 6, r = 2$ (ii) $n = 9, r = 5$ હોય ત્યારે $\frac{n!}{(n-r)!}$ ની કિંમત શોધો.

7.3.3 ^nP_r ના સૂત્રની પ્રાપ્તિ :

$$^nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}, \quad 0 \le r \le n, \quad n \ne 0$$

ચાલો આપણે અગાઉના વિભાગમાં આ પ્રમાણેનું જે સૂત્ર નક્કી કર્યું હતું તે જોઈએ.

$$^nP_r = n(n-1)(n-2) \ldots (n-r+1)$$

અંશ અને છેદનો $(n-r)(n-r-1) \ldots 3 \times 2 \times 1$, વડે ગુણાકાર કરતાં,

$$^nP_r = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)(n-r)(n-r-1)\ldots 3\times 2\times 1}{(n-r)(n-r-1)\ldots 3\times 2\times 1} = \frac{n!}{(n-r)!},$$

આમ, $$^nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}, \text{ જ્યાં } 0 < r \le n$$

અગાઉ કરતાં ^nP_r માટેની આ અભિવ્યક્તિ વધુ અનુકૂળ છે. વિશેષમાં જ્યારે $r = n$ હોય ત્યારે $^nP_n = \frac{n!}{0!} = n!$

ક્રમચયોની ગણતરી કરવી એ અમૂક અથવા બધી જ વસ્તુઓને કેટલા પ્રકારે એકી સાથે ગોઠવી શકાય તે છે. કોઈ પણ વસ્તુની ગોઠવણી ન કરવી એ બધી જ વસ્તુઓને જેમ છે એમ રહેવા દેવી એ છે અને આપણે જાણીએ છીએ કે, તે માત્ર એક પ્રકારે જ કરી શકાય છે. આમ,

$$^nP_0 = 1 = \frac{n!}{n!} = \frac{n!}{(n-0)!} \qquad \dots (1)$$

આમ, સૂત્ર (1) એ $r = 0$ માટે પણ ઉપયુક્ત છે.

તેથી, $$^nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}, \quad 0 \le r \le n, \; n \ne 0$$

પ્રમેય 2 : *n ભિન્ન વસ્તુઓમાંથી r વસ્તુઓ પુનરાવર્તન સહિત એકી સાથે લેવામાં આવે, તો મળતા ક્રમચયોની સંખ્યા n^r થશે.*

આની સાબિતી પ્રમેય 1 પ્રમાણે છે અને તેને વાંચક પર છોડી દેવામાં આવે છે.

અહીં, આપણે આગળના વિભાગના અમુક પ્રશ્નો ^nP_r ના સૂત્રની મદદથી ઉકેલીશું કે જેથી તેની ઉપયોગિતા જોઈ શકાય.

ઉદાહરણ 1 માં માંગેલ શબ્દોની સંખ્યા $= {}^4P_4 = 4! = 24$. અહીં, પુનરાવર્તનની અનુમતિ નથી. જો પુનરાવર્તનની અનુમતિ હોય, તો માંગેલ શબ્દોની સંખ્યા $4^4 = 256$.

NUMBER શબ્દના મૂળાક્ષરોનો ઉપયોગ કરી બનતા ત્રણ અક્ષરોવાળા શબ્દોની સંખ્યા $= {}^6P_3 = \frac{6!}{3!} = 4 \times 5 \times 6 = 120$.

અહીં, આ પ્રશ્નમાં પણ પુનરાવર્તનની અનુમતિ નથી. જો પુનરાવર્તનની અનુમતિ હોય, તો માંગેલ શબ્દોની સંખ્યા $6^3 = 216$ થશે.

જો આપણે ધારી લઈએ કે કોઈ એક વ્યક્તિ બે પદ ધરાવતા ન હોય તો 12 વ્યક્તિઓમાંથી એક અધ્યક્ષ અને ઉપાધ્યક્ષને $^{12}P_2 = \frac{12!}{10!} = 11 \times 12 = 132$ પ્રકારે પસંદ કરી શકાય.

7.3.4 જ્યારે બધી વસ્તુઓ ભિન્ન ન હોય ત્યારે ક્રમચયોની સંખ્યા :

ધારો કે આપણે ROOT શબ્દના મૂળાક્ષરોની પુનઃગોઠવણી કેટલા પ્રકારે કરી શકાય તે શોધવું છે. આપેલ પ્રશ્નમાં શબ્દના બધા મૂળાક્ષરો ભિન્ન નથી. અહીં O બે વખત આવે છે અને તે સમાન છે. ચાલો હંગામી રીતે બે O ને આપણે ભિન્ન માનીએ અને O_1 અને O_2 વડે દર્શાવીએ. આ કિસ્સામાં બધા જ મૂળાક્ષરોને એક સાથે લેતાં 4 મૂળાક્ષરોથી બનતા ક્રમચયોની સંખ્યા 4! થશે. આ પૈકી એક ક્રમચય RO_1O_2T નો વિચાર કરીએ. જો આપણે O_1 અને O_2 ને ભિન્ન ન માનીએ તો આ ક્રમચયને અનુરૂપ 2 ! ક્રમચયો RO_1O_2T અને RO_2O_1T એ સમાન ક્રમચયો થશે. એટલે કે O_1 અને O_2 બંને સ્થાન પર O હોય.

$$\therefore \text{ માંગેલ ક્રમચયોની સંખ્યા } = \frac{4!}{2!} = 3 \times 4 = 12$$

જ્યારે O_1, O_2 ભિન્ન હોય ત્યારે ક્રમચયો		જ્યારે O_1, O_2 એ O તરીકે હોય ત્યારે ક્રમચયો
RO_1O_2T RO_2O_1T	$\longrightarrow$	R O O T
TO_1O_2R TO_2O_1R	$\longrightarrow$	T O O R
RO_1TO_2 RO_2TO_1	$\longrightarrow$	R O T O
TO_1RO_2 TO_2RO_1	$\longrightarrow$	T O R O
RTO_1O_2 RTO_2O_1	$\longrightarrow$	R T O O
TRO_1O_2 TRO_2O_1	$\longrightarrow$	T R O O
O_1O_2RT O_2O_1TR	$\longrightarrow$	O O R T
O_1RO_2T O_2RO_1T	$\longrightarrow$	O R O T
O_1TO_2R O_2TO_1R	$\longrightarrow$	O T O R
O_1RTO_2 O_2RTO_1	$\longrightarrow$	O R T O
O_1TRO_2 O_2TRO_1	$\longrightarrow$	O T R O
O_1O_2TR O_2O_1TR	$\longrightarrow$	O O T R

ચાલો આપણે INSTITUTE શબ્દના મૂળાક્ષરોની પુનઃગોઠવણી કેટલા પ્રકારે કરી શકાય તે શોધીએ. અહીં, 9 મૂળાક્ષરો છે તેમાં I બે વખત અને T ત્રણ વખત આવે છે.

હંગામી રીતે આપણે આ મૂળાક્ષરોને ભિન્ન છે તેમ માનીએ અને તેમને I_1, I_2, T_1, T_2, T_3 વડે દર્શાવીએ. 9 ભિન્ન મૂળાક્ષરોને એકી સાથે લેતા મળતા ક્રમચયોની સંખ્યા 9! થાય. આ પૈકી એક ક્રમચય I_1 NT_1 SI_2 T_2 U E T_3 નો વિચાર કરીએ. અહીં, જો I_1, I_2 ને સમાન ન ગણીએ અને T_1, T_2, T_3 ને સમાન ન ગણીએ તો I_1, I_2 ની 2! પ્રકારે ગોઠવણી થઇ શકે તથા T_1, T_2, T_3 ને 3! પ્રકારે ગોઠવી શકાય. માટે પસંદ કરેલા ક્રમચય $I_1NT_1SI_2T_2UET_3$ ને સાપેક્ષ 2! × 3! ક્રમચયો સમાન થશે. આથી કુલ ભિન્ન ક્રમચયોની સંખ્યા $\frac{9!}{2!\,3!}$ થશે.

નીચે પ્રમાણેના પ્રમેયો આપણે સાબિતી આપ્યા વગર સ્વીકારીશું :

પ્રમેય 3 : આપેલ n વસ્તુઓમાંથી p સમસ્વરૂપ વસ્તુઓ હોય અને બાકીની ભિન્ન હોય, તો ક્રમચયોની સંખ્યા $= \dfrac{n!}{p!}$.

ખરેખર, વ્યાપક સ્વરૂપમાં આ પ્રમેય નીચે મુજબ છે :

પ્રમેય 4 : જો આપેલી n વસ્તુઓમાંથી p_1 એક પ્રકારની સમસ્વરૂપ વસ્તુઓ છે, p_2 બીજા પ્રકારની સમસ્વરૂપ વસ્તુઓ છે ..., p_k એ k માં પ્રકારની સમસ્વરૂપ વસ્તુઓ છે અને બાકીની વસ્તુઓ ભિન્ન છે (જો હોય તો). તો મળતા ક્રમચયોની સંખ્યા $\dfrac{n!}{p_1!\, p_2! \ldots p_k!}$.

ઉદાહરણ 9 : ALLAHABAD શબ્દનાં મૂળાક્ષરોથી બનતા ક્રમચયોની સંખ્યા શોધો.

ઉકેલ : અહીં, 9 મૂળાક્ષરો છે, તેમાંથી A 4 વખત આવે છે L 2 વખત આવે છે અને બાકીના મૂળાક્ષર ભિન્ન છે.

માંગેલ ગોઠવણીની સંખ્યા $= \dfrac{9!}{4!2!} = \dfrac{5\times6\times7\times8\times9}{2} = 7560$

ઉદાહરણ 10 : 1 થી 9 અંકોનો ઉપયોગ કરી પુનરાવર્તન સિવાય 4 અંકોવાળી કેટલી સંખ્યાઓ બનાવી શકાય ?

ઉકેલ : અહીં, અંકોનો ક્રમ મહત્ત્વનો છે, જેમકે 1234 અને 1324 એ ભિન્ન સંખ્યાઓ થશે. માટે 9 ભિન્ન અંકોમાંથી 4 અંકો લઈને જેટલા ક્રમચયો મળે તેટલી 4 અંકોથી બનતી સંખ્યાઓ થશે.

$\therefore$ માંગેલ 4 અંકોની સંખ્યાઓ $= {}^9P_4 = \dfrac{9!}{(9-4)!} = \dfrac{9!}{5!} = 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 3024$

ઉદાહરણ 11 : પુનરાવર્તન વગર અંકો 0, 1, 2, 3, 4, 5 નો ઉપયોગ કરીને 100 થી 1000 ની વચ્ચે આવેલી કેટલી સંખ્યાઓ મળે?

ઉકેલ : 100 થી 1000 વચ્ચે આવેલ દરેક સંખ્યાઓ 3 અંકોવાળી હોય છે. પ્રથમ આપણે 6 અંકોમાંથી 3 અંકો એક સાથે લેવાથી મળતા ક્રમચયોની સંખ્યાની ગણતરી કરીશું. તે ${}^6P_3$ થશે. પરંતુ આ ક્રમચયોમાં એવી સંખ્યાઓનો પણ સમાવેશ થશે જેના શતકના સ્થાને 0 હોય. જેમકે 092, 042, ... વગેરે. તે ખરેખર 2 અંકોવાળી સંખ્યા થાય અને તેથી આવી સંખ્યાઓને ${}^6P_3$ સંખ્યાઓમાંથી બાદ કરવી જોઈએ. આવી સંખ્યાઓ મેળવવા માટે આપણે શતકના સ્થાને 0 સ્થિત કરી દઈએ અને બાકીના 5 અંકોમાંથી 2 અંકો એક સાથે લઈ પુનઃગોઠવણી કરીએ. આવી સંખ્યાઓની સંખ્યા ${}^5P_2$.

$$\therefore \text{ માંગેલ સંખ્યાઓ } = {}^6P_3 - {}^5P_2$$

$$= \frac{6!}{3!} - \frac{5!}{2!}$$

$$= 4 \times 5 \times 6 - 4 \times 5$$

$$= 100$$

ઉદાહરણ 12 : નીચેનામાં n ની કિંમત શોધો :

(i) ${}^nP_5 = 42\ {}^nP_3,\ n > 4$ (ii) $\dfrac{{}^nP_4}{{}^{n-1}P_4} = \dfrac{5}{3},\ n > 4$

ઉકેલ : (i) અહીં, $^nP_5 = 42\ ^nP_3$

અથવા $n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) = 42\,n(n-1)(n-2)$

$n > 4$ હોવાથી $n(n-1)(n-2) \neq 0$

માટે, બંને બાજુ $n(n-1)(n-2)$ વડે ભાગતાં,

$(n-3)(n-4) = 42$

$\therefore\ n^2 - 7n - 30 = 0$

$\therefore\ n^2 - 10n + 3n - 30 = 0$

$\therefore\ (n-10)(n+3) = 0$

$\therefore\ n - 10 = 0$ અથવા $n + 3 = 0$

$\therefore\ n = 10$ અથવા $n = -3$

n ની કિંમત ઋણ ન હોઈ શકે. આથી $n = 10$.

(ii) અહીં, $\dfrac{^nP_4}{^{n-1}P_4} = \dfrac{5}{3}$

$3n(n-1)(n-2)(n-3) = 5(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$

$\therefore 3n = 5(n-4)$ $[(n-1)(n-2)(n-3) \neq 0,\ n > 4]$

$\therefore n = 10$

ઉદાહરણ 13 : જો $5\ ^4P_r = 6\ ^5P_{r-1}$ હોય તો r શોધો.

ઉકેલ : અહીં, $5\ ^4P_r = 6\ ^5P_{r-1}$

$$\therefore\quad 5\times\frac{4!}{(4-r)!} = 6\times\frac{5!}{(5-r+1)!}$$

$$\therefore\quad \frac{5!}{(4-r)!} = \frac{6\times 5!}{(5-r+1)(5-r)(5-r-1)!}$$

$\therefore\ (6-r)(5-r) = 6$

$\therefore\ r^2 - 11r + 24 = 0$

$\therefore\ r^2 - 8r - 3r + 24 = 0$

$\therefore\ (r-8)(r-3) = 0$

$\therefore\ r = 8$ અથવા $r = 3$, પરંતુ $r = 8$ શક્ય નથી. $(r \leq 4)$

$\therefore\ r = 3.$

ઉદાહરણ 14 : જો (i) બધા જ સ્વર એક સાથે આવે (ii) બધા જ સ્વર એક સાથે ન આવે, તો DAUGHTER શબ્દના અક્ષરો વડે 8 અક્ષરોની ગોઠવણી કેટલા ભિન્ન પ્રકારે થઈ શકે ?

ઉકેલ : (i) DAUGHTER શબ્દમાં 8 મૂળાક્ષરો છે, જ્યાં A, U અને E એમ 3 સ્વરો છે. બધા જ સ્વર એક સાથે લેવા માટે આપણે AUE ને એક જ વસ્તુ છે તેમ ધારી લઈશું. આ એક વસ્તુ તથા બાકી રહેતા 5 બીજા અક્ષરો (વસ્તુઓ) ને 6 વસ્તુઓ છે તેમ ગણીશું. પછી આપણે 6 વસ્તુઓમાંથી બધી જ વસ્તુઓ એક સાથે લેવાથી મળતા પ્રત્યેક ક્રમચયને અનુરૂપ આપણને

A, U, E એક સાથે લેવાથી મળતા ક્રમચયોની સંખ્યા 3! થાય.

આથી, ગુણાકારના સિદ્ધાંતના ઉપયોગથી માંગેલ ક્રમચયોની સંખ્યા $= 6\,! \times 3\,! = 4320$.

(ii) આપણે જો બધા જ સ્વર એક સાથે ન આવે એવા ક્રમચયની ગણતરી કરવાની હોય તો પ્રથમ આપણે 8 અક્ષરોને એક સાથે લેવાથી મળતી શક્ય ગોઠવણીના પ્રકાર શોધવા પડે. તે 8! પ્રકારે થઈ શકે. પછી આપણે જ્યાં સ્વર હમેશાં એક સાથે આવે એવા ક્રમચયોની સંખ્યાની બાદબાકી કરવી જોઈએ.

આમ, માંગેલ સંખ્યા $8\,! - 6\,! \times 3\,! = 6\,!\,(7\times8 - 6)$

$= 2 \times 6\,!\,(28 - 3)$

$= 50 \times 6\,! = 50 \times 720 = 36{,}000$

ઉદાહરણ 15 : 4 લાલ, 3 પીળી અને 2 લીલી ગોળાકાર તકતીઓને કેટલા પ્રકારે હારમાં ગોઠવી શકાય ? (સરખા રંગની તકતી સ્પષ્ટપણે જુદી પાડી શકાતી નથી.)

ઉકેલ : ગોળાકાર તકતીઓની કુલ સંખ્યા 4 + 3 + 2 = 9. આ 9 તકતીમાંથી 4 એક પ્રકારની છે (લાલ), 3 બીજા પ્રકારની છે (પીળી) અને 2 ત્રીજા પ્રકારની છે (લીલી)

માંગેલ ગોઠવણીના પ્રકારની સંખ્યા $= \dfrac{9!}{4!\,3!\,2!} = 1260$

ઉદાહરણ 16 : INDEPENDENCE શબ્દના મૂળાક્ષરોની કેટલા પ્રકારે ગોઠવણી કરી શકાય ? આ ગોઠવણીઓમાંથી કેટલા શબ્દો

(i) P થી શરૂ થાય છે ?

(ii) બધા સ્વરો એક સાથે આવે ?

(iii) બધા સ્વરો એક સાથે ન આવે ?

(iv) I થી શરૂ થાય અને P માં અંત પામે ?

ઉકેલ : આપેલ શબ્દમાં કુલ 12 મૂળાક્ષરો છે. તેમાં N એ 3 વખત આવે છે. E એ 4 વખત આવે છે અને D એ 2 વખત આવે છે તથા બાકીના મૂળાક્ષરો ભિન્ન છે.

$\therefore$ માંગેલ ગોઠવણીની સંખ્યા $= \dfrac{12!}{3!\,4!\,2!} = 1663200$

(i) મૂળાક્ષર P ને ડાબી બાજુના પ્રથમ સ્થાને નિયત કરીએ. હવે આપણે બાકી રહેતા 11 અક્ષરોની ગોઠવણીની ગણતરી કરીએ.

$\therefore$ P થી શરૂ થતા માંગેલ શબ્દોની સંખ્યા $= \dfrac{11!}{3!\,2!\,4!} = 138600$

(ii) આપેલ શબ્દમાં 5 સ્વર છે. તેમાં 4 E તથા 1 I છે. તેઓ એક સાથે આવતા હોવાથી હંગામી ધોરણે આપણે $\boxed{\text{EEEEI}}$ ને એક વસ્તુ તરીકે ગણીએ. આ એક વસ્તુ અને બાકી રહેતી 7 વસ્તુઓ (અક્ષરો) મળીને 8 વસ્તુઓ થશે. ત્રણ N અને બે D ની ગોઠવણી સાથે આ 8 વસ્તુઓની ગોઠવણી $\dfrac{8!}{3!\,2!}$ પ્રકારે કરી શકાય. દરેક ગોઠવણીને અનુરૂપ 5 સ્વરો E, E, E, E અને I ની ગોઠવણી $\dfrac{5!}{4!}$ પ્રકારે કરી શકાય.

આથી, ગુણાકારના સિદ્ધાંતનો ઉપયોગ કરીને માંગેલ ગોઠવણીના પ્રકાર $= \dfrac{8!}{3!\,2!} \times \dfrac{5!}{4!} = 16800$

(iii) માંગેલ ગોઠવણીની સંખ્યા = ગોઠવણીની કુલ સંખ્યા (કોઈ શરત વગર) – બધા સ્વરો સાથે આવે તેવી ગોઠવણીની સંખ્યા

$$= 1663200 - 16800 = 1646400$$

(iv) મૂળાક્ષરો I અને P બંનેને અંતિમ સ્થાનમાં સ્થિત કરીએ (I ને ડાબી બાજુ તથા P ને જમણી બાજુ) આપણી પાસે બાકી 10 અક્ષરો રહે છે.

$\therefore$ માંગેલ ગોઠવણીના પ્રકાર $= \dfrac{10!}{3!\,2!\,4!} = 12600$

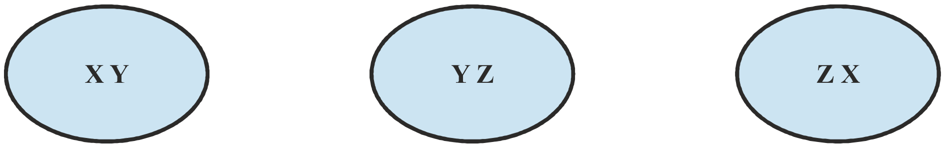
સ્વાધ્યાય 7.3

1. 1 થી 9 અંકોનો ઉપયોગ કરીને 3 અંકોની કેટલી સંખ્યાઓ બનાવી શકાય ? (અંકોના પુનરાવર્તન સિવાય)
2. અંકોના પુનરાવર્તન સિવાય 4 અંકોની કેટલી સંખ્યાઓ બને ?
3. 1, 2, 3, 4, 6, 7 અંકોનો ઉપયોગ કરીને 3 અંકોની કેટલી યુગ્મ સંખ્યાઓ બને ? (અંકોના પુનરાવર્તન સિવાય)
4. 1, 2, 3, 4, 5 અંકોનો ઉપયોગ કરીને 4 અંકોની કેટલી સંખ્યાઓ બને ? આમાંથી કેટલી સંખ્યાઓ યુગ્મ હોય ? (અંકોના પુનરાવર્તન સિવાય)
5. 8 વ્યક્તિઓની એક સમિતિમાંથી અધ્યક્ષ અને ઉપાધ્યક્ષ કેટલા પ્રકારે પસંદ કરી શકાય ? આપણે ધારી લઈશું કે કોઈ પણ વ્યક્તિ એક કરતાં વધુ પદ સંભાળતી ન હોય.
6. જો ${}^{n-1}P_3 : {}^{n}P_4 = 1 : 9$ તો n શોધો.
7. જો (i) ${}^{5}P_r = 2\,{}^{6}P_{r-1}$ (ii) ${}^{5}P_r = {}^{6}P_{r-1}$ તો r શોધો.
8. EQUATION શબ્દના દરેક મૂળાક્ષરનો ફક્ત એક વખત ઉપયોગ કરી અર્થસભર કે અર્થરહિત કેટલા શબ્દો બનાવી શકાય ?
9. MONDAY શબ્દના મૂળાક્ષરોનો ઉપયોગ કરી પુનરાવર્તન સિવાય અર્થસભર કે અર્થરહિત કેટલા શબ્દો નીચેના વિકલ્પો અનુસાર બનાવી શકાય ?
   (i) કોઈ પણ 4 મૂળાક્ષરો એક સાથે લેતાં
   (ii) બધા જ મૂળાક્ષરો એક સાથે લેતાં
   (iii) પ્રથમ મૂળાક્ષર સ્વર હોય તે રીતે બધા જ મૂળાક્ષરોનો ઉપયોગ કરતા
10. MISSISSIPPI શબ્દના કેટલા ભિન્ન ક્રમચયોમાં ચાર I સાથે ન આવે ?
11. PERMUTATIONS શબ્દના મૂળાક્ષરોની ગોઠવણી કેટલા પ્રકારે નીચેના વિકલ્પોમાં કરી શકાય ?
    (i) શબ્દો P થી શરૂ થાય અને S માં અંત પામે.
    (ii) બધા સ્વરો સાથે હોય.
    (iii) P અને S ની વચ્ચે હંમેશાં 4 મૂળાક્ષરો હોય.

7.4 સંચય

ધારો કે X, Y, Z એ લોન ટેનિસ રમતના 3 ખેલાડીઓનું એક જૂથ છે, 2 ખેલાડીઓ ધરાવતી એક ટુકડી બનાવવી છે. આવું આપણે કેટલા પ્રકારે કરી શકીશું ? શું X અને Y દ્વારા બનતી ટુકડીએ Y અને X દ્વારા બનતી ટુકડીથી ભિન્ન છે ? અહીં, ક્રમનું

મહત્ત્વ નથી. ખરેખર, ફક્ત ત્રણ પ્રકારે આવી ટુકડી XY, YZ અને ZX (આકૃતિ7.3) બને. અહીં દરેક પસંદગીને 3 ભિન્ન વસ્તુઓમાંથી 2 વસ્તુઓ એક સાથે પસંદ કરવાનો ***સંચય*** કહે છે.



આકૃતિ 7.3

સંચયમાં ક્રમનું મહત્ત્વ નથી.

હવે આપણે કેટલાંક વધુ ઉદાહરણ જોઈએ.

12 વ્યક્તિઓ એક ઓરડામાં મળે છે અને દરેક વ્યકિત બાકીની તમામ વ્યક્તિઓ સાથે હસ્તધૂનન કરે છે. કુલ કેટલી વખત હસ્તધૂનન થયા હોય તે આપણે કેવી રીતે નક્કી કરીશું ? વ્યક્તિ X એ વ્યક્તિ Y અને વ્યક્તિ Y એ વ્યક્તિ X સાથે હાથ મિલાવે તે ભિન્ન હસ્તધૂનન ગણી શકાય નહિ. અહીં ક્રમ મહત્ત્વનો નથી. 12 ભિન્ન વસ્તુઓમાંથી એક સાથે 2 વસ્તુઓ પસંદ કરવાથી જેટલા સંચયો મળે તેટલા હસ્તધૂનન થયા હશે.

એક વર્તુળ ઉપર સાત બિંદુઓ આવેલા છે. કોઈ પણ બે બિંદુને જોડવાથી કેટલી જીવાઓ દોરી શકાય? 7 ભિન્ન વસ્તુઓમાંથી એક સાથે 2 વસ્તુઓ પસંદ કરવાથી જેટલા સંચયો મળે તેટલી જીવા મળે.

હવે આપણે n ભિન્ન વસ્તુઓ પૈકી r વસ્તુઓ એક સાથે પસંદ કરવાથી મળતા સંચયોનું સૂત્ર મેળવીશું. તેને ${}^{n}C_{r}$ વડે દર્શાવાય છે.

ધારો કે આપણી પાસે 4 ભિન્ન વસ્તુઓ A, B, C અને D છે. જો આપણે 2 ભિન્ન વસ્તુઓ એકસાથે પસંદ કરવાના સંચયો મેળવવા હોય, તો AB, AC, AD, BC, BD, CD થશે. અહીં, AB અને BA એ સમાન સંચયો થશે કારણ કે ક્રમના ફેરફારથી સંચય બદલાતો નથી. આ કારણે આપણે BA, CA, DA, CB, DB અને DC નો આ યાદીમાં સમાવેશ કર્યો નથી. 4 ભિન્ન વસ્તુઓમાંથી 2 વસ્તુઓ એક સમયે લેતાં 6 સંચયો મળશે એટલે કે ${}^{4}C_{2} = 6$.

આ યાદીના દરેક સંચયને અનુરૂપ આપણે 2! ક્રમચય મળે કારણ કે દરેક સંચયની 2 વસ્તુઓની 2! પ્રકારે પુનઃગોઠવણી કરી શકાય. તેથી ક્રમચયોની સંખ્યા $= {}^{4}C_{2} \times 2!$.

બીજી રીતે કહીએ તો, 4 ભિન્ન વસ્તુઓમાંથી 2 વસ્તુઓ એક સાથે લઈએ તો, મળતા ક્રમચયોની સંખ્યા $= {}^{4}P_{2}$

$${}^{4}P_{2} = {}^{4}C_{2} \times 2! \quad \text{એટલે કે} \quad \frac{4!}{(4-2)!\,2!} = {}^{4}C_{2}$$

હવે, ધારો કે આપણી પાસે 5 ભિન્ન વસ્તુઓ A, B, C, D, E છે. જો આપણે 3 વસ્તુઓ એકીસાથે પસંદ કરવાના સંચયો મેળવવા હોય, તો ABC, ABD, ABE, BCD, BCE, CDE, ACE, ACD, ADE, BDE થશે. આ ${}^{5}C_{3}$ સંચયોના દરેકને અનુરૂપ 3! ક્રમચયો મળે કારણ કે દરેક સંચયમાં રહેલ ત્રણ વસ્તુઓની પુનઃગોઠવણી 3 ! પ્રકારે કરી શકાય.

ક્રમચયોની કુલ સંખ્યા ${}^{5}C_{3} \times 3!$

$$\therefore\ {}^{5}P_{3} = {}^{5}C_{3} \times 3! \quad \text{એટલે કે} \quad \frac{5!}{(5-3)!\,3!} = {}^{5}C_{3}$$

આ ઉદાહરણો દ્વારા આપણને ક્રમચય અને સંચય વચ્ચેનો સંબંધ દર્શાવતો પૃષ્ઠ 148 પ્રમાણેનો પ્રમેય મળે છે :

પ્રમેય 5 : ${}^nP_r = {}^nC_r \times r!\,,\qquad 0 < r \le n.$

સાબિતી : ${}^nC_r$ સંચયો પૈકી દરેક સંચયને અનુરૂપ આપણને $r!$ ક્રમચયો મળે, કારણ કે દરેક સંચયની r વસ્તુઓની $r\,!$ પ્રકારે પુનઃગોઠવણી કરી શકાય.

આથી, n ભિન્ન વસ્તુઓ પૈકી એક સાથે r વસ્તુઓ લેતાં મળતાં કુલ ક્રમચયોની સંખ્યા ${}^nC_r \times r!$ થશે. બીજી રીતે વિચારતાં તે ${}^nP_r$ પણ થાય.

$$\therefore\ {}^nP_r = {}^nC_r \times r!,\qquad 0 < r \le n\,.$$

નોંધ 1. ઉપર મુજબ $\dfrac{n!}{(n-r)!} = {}^nC_r \times r!$, એટલે કે ${}^nC_r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$.

વિશેષ રીતે, જો $r = n$ તો ${}^nC_n = \dfrac{n!}{n!\ 0!} = 1$.

2. આપણે અહીં, ${}^nC_0 = 1$ વ્યાખ્યાયિત કરીએ છીએ. આપેલ n વસ્તુઓમાંથી એક પણ વસ્તુની પસંદગી નહિ તે સંચયોની સંખ્યા 1 છે તેમ ગણીશું. આ સંચયોની ગણતરી કરવી એ અમુક અથવા બધી વસ્તુઓને એક સાથે પસંદગી કરવાના પ્રકારની ગણતરી કરવી એ છે. કોઈપણ વસ્તુને પસંદ ન કરવી એ તમામ વસ્તુને નાપસંદ કરવા સમાન છે અને આપણે જાણીએ છીએ કે તે આપણે ફક્ત એક જ પ્રકારે કરી શકીએ. આ રીતે આપણે ${}^nC_0 = 1$ વ્યાખ્યાયિત કરીએ છીએ.

3. $\dfrac{n!}{0!(n-0)!} = 1 = {}^nC_0$ હોવાથી સૂત્ર ${}^nC_r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ એ સૂત્ર $r = 0$ માટે પણ લાગુ પાડી શકાય.

$${}^nC_r = \frac{n!}{r!\,(n-r)!},\qquad 0 \le r \le n,\qquad n \ne 0$$

4. ${}^nC_{n-r} = \dfrac{n!}{(n-r)!(n-(n-r))!} = \dfrac{n!}{(n-r)!r!} = {}^nC_r,$

એટલે કે n વસ્તુઓમાંથી r વસ્તુઓને પસંદ કરવી એ $(n-r)$ વસ્તુઓને નાપસંદ કરવા બરાબર છે.

5. ${}^nC_a = {}^nC_b \Rightarrow a = b$ અથવા $a = n - b$, એટલે કે, $n = a + b$

પ્રમેય 6 : ${}^nC_r + {}^nC_{r-1} = {}^{n+1}C_r$

સાબિતી :
$${}^nC_r + {}^nC_{r-1} = \frac{n!}{r!(n-r)!} + \frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!}$$

$$= \frac{n!}{r\times(r-1)!(n-r)!} + \frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)\,(n-r)!}$$

$$= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}\left[\frac{1}{r} + \frac{1}{n-r+1}\right]$$

$$= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \times \frac{n-r+1+r}{r(n-r+1)} = \frac{(n+1)!}{r!(n+1-r)!} = {}^{n+1}C_r$$

ઉદાહરણ 17 : જો ${}^nC_9 = {}^nC_8$ તો ${}^nC_{17}$ શોધો.

ઉકેલ : અહીં, ${}^nC_9 = {}^nC_8$

$$\frac{n!}{9!(n-9)!} = \frac{n!}{(n-8)!\,8!}$$

$\therefore \quad \frac{1}{9} = \frac{1}{n-8}$ એટલે કે, $n - 8 = 9$. આથી, $n = 17$

$\therefore \quad {}^nC_{17} = {}^{17}C_{17} = 1$

ઉદાહરણ 18 : બે પુરુષ અને ત્રણ સ્ત્રીઓના એક જૂથમાંથી 3 વ્યક્તિઓની એક સમિતિ બનાવવી છે. આવું કેટલા પ્રકારે કરી શકાય ? આમાંથી કેટલી સમિતિઓમાં 1 પુરુષ અને 2 સ્ત્રીઓ હશે ?

ઉકેલ : અહીં, ક્રમના ફેરફારથી કોઈ ફરક પડતો નથી. માટે આપણે સંચયોની ગણતરી કરવી પડશે. 5 ભિન્ન વ્યક્તિઓ પૈકી એક સાથે 3 વ્યક્તિઓ પસંદ કરવાથી જેટલા સંચયો મળે તેટલી સમિતિઓ બનશે.

આથી, માંગેલ પ્રકારની સંખ્યા = ${}^5C_3 = \frac{5!}{3!\,2!} = \frac{4\times5}{2} = 10$.

હવે, 2 પુરુષમાંથી 1 પુરુષ ${}^2C_1$ પ્રકારે તથા 3 સ્ત્રીમાંથી 2 સ્ત્રી ${}^3C_2$ પ્રકારે પસંદ કરી શકાય.

આથી માંગેલ સમિતિની સંખ્યા = ${}^2C_1 \times {}^3C_2 = \frac{2!}{1!\,1!} \times \frac{3!}{2!\,1!} = 6$.

ઉદાહરણ 19 : 52 પત્તાંઓમાંથી 4 પત્તાં કેટલા પ્રકારે પસંદ કરી શકાય ? આમાંથી કેટલા પ્રકારની પસંદગીમાં,

(i) ચાર પત્તાં એક જ ભાતનાં હોય ?

(ii) ચાર પત્તાં ચાર જુદી જુદી ભાતનાં હોય ?

(iii) ચિત્રવાળાં પત્તાં હોય ?

(iv) બે લાલ રંગનાં અને બે કાળા રંગનાં હોય ?

(v) પત્તાં સમાન રંગોવાળાં હોય ?

ઉકેલ : 52 ભિન્ન વસ્તુઓમાંથી એક સમયે 4 વસ્તુઓ પસંદ કરવાના જેટલા સંચય મળે તેટલા જ સંચય 52 પત્તાંઓમાંથી 4 પત્તાં પસંદ કરવાનાં મળે.

$\therefore$ માંગેલ પ્રકારની સંખ્યા = ${}^{52}C_4 = \frac{52!}{4!\,48!} = \frac{49\times50\times51\times52}{2\times3\times4} = 270725$

(i) દરેક ભાતમાં 13 પત્તાં હોય છે અને ચાર ભાત હોય છે: ચોકટ, ફુલ્લી, કાળી, લાલ. માટે ચોકટનાં 4 પત્તાં ${}^{13}C_4$ પ્રકારે પસંદ થશે, તે જ રીતે 4 ફુલ્લીનાં પત્તાં ${}^{13}C_4$ પ્રકારે પસંદ થશે, 4 કાળીનાં પત્તાં ${}^{13}C_4$ પ્રકારે પસંદ થશે ને 4 લાલના પત્તાં ${}^{13}C_4$ પ્રકારે પસંદ થશે.

આમ, માંગેલ કુલ પ્રકારની સંખ્યા = ${}^{13}C_4 + {}^{13}C_4 + {}^{13}C_4 + {}^{13}C_4$.

$$= 4\times\frac{13!}{4!\,9!} = 2860$$

(ii) દરેક ભાતમાં 13 પત્તાં હોય છે.

ચોકટનાં 13 પત્તાંમાંથી 1 પત્તું $^{13}C_1$ પ્રકારે પસંદ કરી શકાય. લાલનાં 13 પત્તાંમાંથી 1 પત્તું $^{13}C_1$ પ્રકારે પસંદ કરી શકાય. ફુલ્લીનાં 13 પત્તાંમાંથી 1 પત્તું $^{13}C_1$ પ્રકારે પસંદ કરી શકાય. કાળીનાં 13 પત્તાંમાંથી 1 પત્તું $^{13}C_1$ પ્રકારે પસંદ કરી શકાય.

$$\text{કુલ સંખ્યા} = {}^{13}C_1 \times {}^{13}C_1 \times {}^{13}C_1 \times {}^{13}C_1 = 13^4$$

(iii) અહીં, 12 ચિત્રોવાળાં પત્તાં છે અને આ 12 પત્તાંમાંથી 4 પત્તાં પસંદ કરવાનાં છે. આ $^{12}C_4$ પ્રકારે કરી શકાય.

$$\therefore \text{ માંગેલ પ્રકારની સંખ્યા} = \frac{12!}{4!\ 8!} = 495$$

(iv) અહીં, 26 પત્તાં લાલ રંગનાં તથા 26 પત્તાં કાળા રંગનાં હોય છે.

$$\therefore \text{ માંગેલ પ્રકારની સંખ્યા} = {}^{26}C_2 \times {}^{26}C_2$$

$$= \left(\frac{26!}{2!\ 24!}\right)^2 = (325)^2 = 105625$$

(v) 26 લાલ રંગનાં પત્તાંમાંથી 4 લાલ રંગનાં પત્તાંની પસંદગી $^{26}C_4$ પ્રકારે કરી શકાય. 26 કાળા રંગનાં પત્તાંમાંથી 4 કાળા રંગનાં પત્તાંની પસંદગી $^{26}C_4$ પ્રકારે કરી શકાય.

$$\therefore \text{ માંગેલ પ્રકારની સંખ્યા} = {}^{26}C_4 + {}^{26}C_4$$

$$= 2 \times \frac{26!}{4!\ 22!} = 29900$$

સ્વાધ્યાય 7.4

1. જો $^nC_8 = {}^nC_2$ હોય, તો $^nC_2$ શોધો.

2. n ની કિંમત શોધો :

(i) $^{2n}C_3 : {}^nC_3 = 12 : 1$ (ii) $^{2n}C_3 : {}^nC_3 = 11 : 1$

3. વર્તુળ પરનાં 21 બિંદુમાંથી કેટલી જીવા દોરી શકાય ?

4. 5 કુમાર અને 4 કુમારીમાંથી 3 કુમારો અને 3 કુમારીઓની કેટલી ટુકડી બનાવી શકાય ?

5. 6 લાલ દડા, 5 સફેદ દડા અને 5 વાદળી દડામાંથી દરેક રંગના 3 દડા એમ 9 દડાની પસંદગી કેટલા પ્રકારે કરી શકાય ?

6. 52 પત્તાંમાંથી 5 પત્તાંની પસંદગીમાં બરાબર એક જ એક્કો આવે તે કેટલા પ્રકારે બને ?

7. ક્રિકેટની રમતના 17 ખેલાડીઓ આવેલા છે. તે પૈકી 5 ખેલાડીઓ બોલીંગ કરી શકે છે. દરેક ટુકડીમાં 4 બોલર હોય એવી 11 ખેલાડીઓની ક્રિકેટની કેટલી ટુકડી બનાવી શકાય ?

8. એક થેલીમાં 5 કાળા અને 6 લાલ દડા છે. 2 કાળા તથા 3 લાલ દડાની પસંદગી કેટલા પ્રકારે થઇ શકે ?

9. જો વિદ્યાર્થીએ 2 ચોક્કસ વિષયો પસંદ કરવાના ફરજિયાત હોય, તો વિદ્યાર્થી ઉપલબ્ધ 9 વિષયોમાંથી 5 વિષયો કેટલા પ્રકારે પસંદ કરી શકે.

પ્રકીર્ણ ઉદાહરણો

ઉદાહરણ 20 : INVOLUTE શબ્દનો ઉપયોગ કરીને 3 સ્વરો અને 2 વ્યંજનો ધરાવતા અર્થસભર કે અર્થરહિત કેટલા શબ્દો બનાવી શકાય ?

ઉકેલ : INVOLUTE શબ્દમાં 4 સ્વરો I, O, E, U અને 4 વ્યંજનો N, V, L અને T આવેલા છે.

4 સ્વરોમાંથી 3 સ્વરો પસંદ કરવાના પ્રકારની સંખ્યા $= {}^4C_3 = 4$

4 વ્યંજનોમાંથી 2 વ્યંજનો પસંદ કરવાના પ્રકારની સંખ્યા $= {}^4C_2 = 6$

3 સ્વરો અને 2 વ્યંજનોના સંચયોની સંખ્યા $4 \times 6 = 24$

હવે, આ દરેક 24 સંચયોના 5 મૂળાક્ષરોને 5 ! પ્રકારે ગોઠવી શકાય છે.

માંગેલ ભિન્ન શબ્દોની સંખ્યા $= 24 \times 5\,! = 2880$

ઉદાહરણ 21 : એક જૂથમાં 4 કુમારીઓ અને 7 કુમારો છે. જેમાં (i) કોઈ કુમારી ન હોય (ii) ઓછામાં ઓછો એક કુમાર અને એક કુમારી આવેલ હોય (iii) ઓછામાં ઓછી 3 કુમારી આવેલ હોય એવી 5 સભ્યોની કેટલી ટુકડીઓ બનાવી શકાય.

ઉકેલ : (i) ટુકડીમાં કોઈ કુમારી ન હોય તો બધા કુમારો પસંદ થાય. 7 કુમારોમાંથી 5 કુમારોની પસંદગી ${}^7C_5$ પ્રકારે થાય.

$$\therefore \text{ માંગેલ સંખ્યાના પ્રકાર } = {}^7C_5 = \frac{7!}{5!\ 2!} = \frac{6\times7}{2} = 21$$

(ii) દરેક ટુકડીમાં ઓછામાં ઓછો એક કુમાર અને એક કુમારી આવેલ હોય, તો ટુકડી નીચે પ્રમાણે બનાવી શકાય.

(a) એક કુમાર અને ચાર કુમારીઓ

(b) બે કુમારો અને ત્રણ કુમારીઓ

(c) ત્રણ કુમારો અને બે કુમારીઓ

(d) ચાર કુમારો અને એક કુમારી

એક કુમાર અને ચાર કુમારીઓ ${}^7C_1 \times {}^4C_4$ પ્રકારે પસંદ કરી શકાય.

બે કુમારો અને ત્રણ કુમારીઓ ${}^7C_2 \times {}^4C_3$ પ્રકારે પસંદ કરી શકાય.

ત્રણ કુમારો અને બે કુમારીઓ ${}^7C_3 \times {}^4C_2$ પ્રકારે પસંદ કરી શકાય.

ચાર કુમારો અને એક કુમારી ${}^7C_4 \times {}^4C_1$ પ્રકારે પસંદ કરી શકાય.

$$\therefore \text{ માંગેલ પ્રકારની સંખ્યા } = {}^7C_1 \times {}^4C_4 + {}^7C_2 \times {}^4C_3 + {}^7C_3 \times {}^4C_2 + {}^7C_4 \times {}^4C_1$$

$$= 7 + 84 + 210 + 140 = 441$$

(iii) દરેક ટુકડીમાં ઓછામાં ઓછી 3 કુમારીઓ હોવાથી ટુકડી આ પ્રમાણે પસંદ કરી શકાય.

(a) 3 કુમારીઓ અને 2 કુમારો અથવા (b) 4 કુમારીઓ અને 1 કુમાર.

અહીં, આપણે નોંધીએ કે ટુકડીમાં 5 કુમારીઓ ન હોય કારણ કે જૂથમાં ફક્ત 4 કુમારીઓ જ આપેલ છે.

3 કુમારીઓ અને 2 કુમારો $^4C_3 \times {^7C_2}$ પ્રકારે પસંદ કરી શકાય.

4 કુમારીઓ અને 1 કુમાર $^4C_4 \times {^7C_1}$ પ્રકારે પસંદ કરી શકાય.

$\therefore$ માંગેલ પ્રકારની કુલ સંખ્યા $= {^4C_3} \times {^7C_2} + {^4C_4} \times {^7C_1} = 84 + 7 = 91$

ઉદાહરણ 22 : AGAIN શબ્દના બધા મૂળાક્ષરોનો ઉપયોગ કરીને અર્થસભર કે અર્થરહિત કેટલા શબ્દો બનાવી શકાય તે શોધો. જો આ શબ્દોને શબ્દકોષ પ્રમાણે લખ્યા હોય, તો 50 મા સ્થાને કયો શબ્દ આવે ?

ઉકેલ : AGAIN શબ્દમાં 5 મૂળાક્ષરો છે અને A એ બે વખત આવે છે.

$$\text{માંગેલ શબ્દોની સંખ્યા} = \frac{5!}{2!} = 60$$

A થી શરૂ થતા શબ્દો મેળવવા માટે આપણે A ને ડાબી બાજુના પ્રથમ સ્થાને મૂકી બાકી રહેતા 4 મૂળાક્ષરોને એક સાથે લઈને પુનઃ ગોઠવણી કરીએ. જેટલા ક્રમચયો 4 ભિન્ન વસ્તુઓને એક સાથે લેવાથી મળે છે તેટલા જ શબ્દો 4 મૂળાક્ષરોને એક સાથે લેવાથી મળે. આથી, A થી શરૂ થતા શબ્દોની સંખ્યા $= 4! = 24$ થશે. ત્યાર બાદ G થી શરૂ થતાં શબ્દોની સંખ્યા $= \frac{4!}{2!} = 12$ બને, કારણ કે G ને શબ્દની ડાબી બાજુના પ્રથમ સ્થાન પર સ્થિત કર્યા પછી આપણી પાસે મૂળાક્ષરો A, A, I અને N બાકી રહે છે. તે જ રીતે I થી શરૂ થતા શબ્દની સંખ્યા 12 થશે. અત્યાર સુધીમાં પ્રાપ્ત શબ્દોની સંખ્યા$= 24 + 12 + 12 = 48$.

49 મા સ્થાન પરનો શબ્દ NAAGI થશે.

50મા સ્થાન પરનો શબ્દ NAAIG થશે.

ઉદાહરણ 23 : 1, 2, 0, 2, 4, 2, 4 અંકોનો ઉપયોગ કરીને 1000000 થી મોટી કેટલી સંખ્યાઓ બનાવી શકાય ?

ઉકેલ : 1000000 એ 7 અંકની સંખ્યા છે અને ઉપયોગમાં લેવાતા અંકોની સંખ્યા 7 અંકની જ હશે. વળી, સંખ્યાઓ 1000000 થી મોટી હોવાથી તેમની શરૂઆતના અંકો 1, 2 અથવા 4 થશે.

જો અંક 1 ને ડાબી બાજુના પ્રથમ સ્થાનમાં નિશ્ચિત કરીએ તો બાકી રહેતા અંકો 0, 2, 2, 2, 4, 4 ની પુનઃગોઠવણી કરવી પડે. અહી, અંક 2 ત્રણ વખત આવે છે અને 4 એ બે વખત આવે છે.

$$\text{1 થી શરૂ થતી સંખ્યાઓની સંખ્યા} = \frac{6!}{3!\,2!} = \frac{4\times5\times6}{2} = 60$$

$$\text{તે જ રીતે 2 થી શરૂ થતી સંખ્યાઓની સંખ્યા} = \frac{6!}{2!\,2!} = \frac{3\times4\times5\times6}{2} = 180$$

$$\text{અને 4 થી શરૂ થતી સંખ્યાઓની સંખ્યા} = \frac{6!}{3!} = 4\times5\times6 = 120$$

માંગેલ સંખ્યાઓની સંખ્યા $= 60 + 180 + 120 = 360$

બીજી રીત

7 અંકોની ગોઠવણી દ્વારા મળતી કુલ સંખ્યાઓ $\frac{7!}{3!\ 2!} = 420$

જે સંખ્યાઓની ડાબી બાજુના પ્રથમ સ્થાન પર 0 હોય તેવી સંખ્યાઓનો સમાવેશ પણ આમાં થાય છે.

આવી ગોઠવણી દ્વારા મળતી સંખ્યાઓ $\frac{6!}{3!\ 2!}$ (ડાબી બાજુના પ્રથમ સ્થાન પર 0 નિશ્ચિત કરતાં) = 60.

માંગેલ સંખ્યાઓની સંખ્યા = 420 – 60 = 360

નોંધ આપણી યાદીમાં એક અથવા એક કરતાં વધુ અંકો સંખ્યામાં જેટલી વખત આવે તેટલી વખત ઉપયોગમાં લઈ શકાય. ઉદાહરણ તરીકે ઉપરના ઉદાહરણમાં 1 અને 0 ફક્ત એક વખત ઉપયોગમાં લઈ શકાય જ્યારે 2 અને 4 એ અનુક્રમે 3 વખત અને 2 વખત ઉપયોગમાં લઈ શકાય.

ઉદાહરણ 24 : કોઈ બે કુમારો સાથે ન હોય, તો 5 કુમારીઓ અને 3 કુમારોને હારમાં કેટલા પ્રકારે બેસાડી શકાય ?

ઉકેલ : પ્રથમ આપણે 5 કુમારીઓને ગોઠવીએ. તે કાર્ય 5 ! પ્રકારે કરી શકાય છે. ત્રણ કુમારોને એ પ્રત્યેક ગોઠવણી સંગત ચોકડીની નિશાનીવાળી જગ્યાએ બેસાડી શકાય.

$$\times G \times G \times G \times G \times G \times$$

અહીં, 6 ચોકડીની નિશાની છે એમાં ત્રણ કુમારોને $^6P_3$ પ્રકારે બેસાડી શકાય.

ગુણાકારના નિયમથી કુલ ગોઠવણીના પ્રકારની સંખ્યા $= 5! \times {^6P_3}$

$$= 5! \times \frac{6!}{3!}$$

$$= 4 \times 5 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6$$

$$= 14400$$

પ્રકીર્ણ સ્વાધ્યાય 7

1. DAUGHTER શબ્દના મૂળાક્ષરોનો ઉપયોગ કરીને 2 સ્વરો અને 3 વ્યંજનો દ્વારા અર્થસભર કે અર્થરહિત કેટલા શબ્દો બનાવી શકાય ?
2. EQUATION શબ્દના બધા મૂળાક્ષરોનો એક સમયે ઉપયોગ કરીને સ્વરો અને વ્યંજનો એક જ સાથે આવે તે રીતે અર્થસભર કે અર્થરહિત કેટલા શબ્દો બનાવી શકાય ?
3. 9 કુમારો અને 4 કુમારીઓમાંથી 7 સભ્યોની સમિતિ બનાવવી છે. જેમાં (i) બરાબર 3 કુમારીઓ હોય (ii) ઓછામાં ઓછી 3 કુમારીઓ હોય (iii) વધુમાં વધુ 3 કુમારીઓ હોય એવી કેટલી સમિતિની રચના થઇ શકે ?
4. EXAMINATION શબ્દના તમામ ભિન્ન ક્રમચયોને જો શબ્દકોષ પ્રમાણે ગોઠવી યાદી બનાવવામાં આવે તો પ્રથમ શબ્દ E થી શરૂ થાય તે શબ્દ પહેલા કેટલા શબ્દો હશે ?
5. અંકો 0, 1, 3, 5, 7 અને 9 ના ઉપયોગથી પુનરાવર્તન વગર 6 અંકોની 10 વડે વિભાજ્ય હોય તેવી કેટલી સંખ્યાઓ બને ?
6. અંગ્રેજી વર્ણમાળામાં 5 સ્વરો અને 21 વ્યંજનો છે. મૂળાક્ષરોમાંથી 2 ભિન્ન સ્વરો અને 2 ભિન્ન વ્યંજનો દ્વારા કેટલા શબ્દો બનાવી શકાય ?
7. એક પરીક્ષામાં 12 પ્રશ્નો ધરાવતું પ્રશ્નપત્ર બે ભાગમાં વહેંચાયેલું છે. ભાગ I માં 5 પ્રશ્નો અને ભાગ II માં 7 પ્રશ્નો

આવેલા છે. દરેક ભાગમાંથી ઓછામાં ઓછા 3 પ્રશ્નો પસંદ કરીને વિદ્યાર્થીએ કુલ 8 પ્રશ્નોના જવાબનો પ્રયત્ન કરવો જરૂરી છે. વિદ્યાર્થી કુલ કેટલા પ્રકારે પ્રશ્નો પસંદ કરી શકશે ?

8. 52 પત્તાંમાંથી 5 પત્તાંની પસંદગીમાં બરાબર એક બાદશાહ આવે તે કેટલા પ્રકારે નક્કી કરી શકાય ?

9. 5 પુરુષો અને 4 સ્ત્રીઓને હારમાં એવી રીતે ગોઠવવાં છે કે સ્ત્રીઓ યુગ્મ સ્થાન પર હોય. આવી કેટલી ગોઠવણી શક્ય બને ?

10. 25 વિદ્યાર્થીઓના વર્ગમાં 10 વિદ્યાર્થીઓને પર્યટન પર લઈ જવા માટે પસંદ કરવાના છે. ત્રણ વિદ્યાર્થીઓએ એવું નક્કી કર્યું કે કાં તો એ ત્રણેય પર્યટન પર જશે અથવા ત્રણેયમાંથી કોઈ નહિ જાય. પર્યટન પર લઈ જવા માટે વિદ્યાર્થીઓને કેટલા પ્રકારે પસંદ કરી શકાય ?

11. તમામ S સાથે આવે તે રીતે ASSASSINATION શબ્દના મૂળાક્ષરોની ગોઠવણી કેટલા પ્રકારે કરી શકાય ?

સારાંશ

- ગણતરીનો મૂળભૂત સિદ્ધાંત : જો કોઈ ઘટના m ભિન્ન પ્રકારે ઉદ્‌ભવે તથા તેને આનુષંગિક બીજી ઘટના n ભિન્ન પ્રકારે ઉદ્‌ભવે તો બંને ઘટનાઓ આપેલ ક્રમમાં ઉદ્‌ભવે તે પ્રકારોની સંખ્યા $m \times n$ છે.
- n ભિન્ન વસ્તુઓમાંથી r વસ્તુઓને એક સાથે પુનરાવર્તન વગર લેવાથી મળતા ક્રમચયોની સંખ્યાને ${}^nP_r$ વડે દર્શાવવામાં આવે છે અને ${}^nP_r = \dfrac{n!}{(n-r)!}$, જ્યાં $0 \le r \le n, \quad n \ne 0$
- $n! = 1 \times 2 \times 3 \times ... \times n$
- $n! = n \times (n-1)!$
- n ભિન્ન વસ્તુઓમાંથી r વસ્તુઓને એક સાથે પુનરાવર્તન સહિત લેવાથી મળતા ક્રમચયોની સંખ્યાને n^r વડે દર્શાવવામાં આવે છે.
- જો આપેલી n વસ્તુઓમાંથી p_1 એક પ્રકારની સમસ્વરૂપ વસ્તુઓ છે, p_2 બીજા પ્રકારની સમસ્વરૂપ વસ્તુઓ છે, ... p_k એ k પ્રકારની સમસ્વરૂપ વસ્તુઓ છે અને બાકીની વસ્તુઓ ભિન્ન છે(જો હોય, તો) તો મળતા ક્રમચયોની સંખ્યા$=\dfrac{n!}{p_1!\, p_2! ... p_k!}$
- n ભિન્ન વસ્તુઓમાંથી r વસ્તુઓને એક સાથે લેવાથી મળતા સંચયોની સંખ્યાને ${}^nC_r$ વડે દર્શાવવામાં આવે છે અને ${}^nC_r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$, $0 \le r \le n$ છે, $n \ne 0$

Historical Note

The concepts of permutations and combinations can be traced back to the advent of Jainism in India and perhaps even earlier. The credit, however, goes to the Jains who treated its subject matter as a self-contained topic in mathematics, under the name *Vikalpa*.

Among the Jains, *Mahavira*, (around 850) is perhaps the world's first mathematician credited with providing the general formulae for permutations and combinations.

In the 6th century B.C., *Sushruta*, in his medicinal work, *Sushruta Samhita*, asserts that 63 combinations can be made out of 6 different tastes, taken one at a time, two at a time, etc. *Pingala*, a

Sanskrit scholar around third century B.C., gives the method of determining the number of combinations of a given number of letters, taken one at a time, two at a time, etc. in his work *Chhanda Sutra*. *Bhaskaracharya* (born 1114) treated the subject matter of permutations and combinations under the name *Anka Pasha* in his famous work *Lilavati.* In addition to the general formulae for ${}^nC_r$ and ${}^nP_r$ already provided by *Mahavira, Bhaskaracharya* gives several important theorems and results concerning the subject.

Outside India, the subject matter of permutations and combinations had its humble beginnings in China in the famous book I–King (Book of changes). It is difficult to give the approximate time of this work, since in 213 B.C., the emperor had ordered all books and manuscripts in the country to be burnt which fortunately was not completely carried out. Greeks and later Latin writers also did some scattered work on the theory of permutations and combinations.

Some Arabic and Hebrew writers used the concepts of permutations and combinations in studying astronomy. *Rabbi ben Ezra,* for instance, determined the number of combinations of known planets taken two at a time, three at a time and so on. This was around 1140. It appears that *Rabbi ben Ezra* did not know the formula for ${}^nC_r$. However, he was aware that ${}^nC_r = {}^nC_{n-r}$ for specific values n and r. In 1321, *Levi Ben Gerson*, another Hebrew writer came up with the formulae for ${}^nP_r$, ${}^nP_n$ *and the general formula for* ${}^nC_r$.

The first book which gives a complete treatment of the subject matter of permutations and combinations is *Ars Conjectandi* written by a Swiss, *Jacob Bernoulli* (1654 – 1705), posthumously published in 1713. This book contains essentially the theory of permutations and combinations as is known today.

પ્રકરણ 8

દ્વિપદી પ્રમેય

❖ *Mathematics is a most exact science and its conclusions are capable of absolute proofs. – C. P. STEINMETZ* ❖

8.1 પ્રાસ્તાવિક

આગળના વર્ગોમાં, આપણે $a + b$ અને $a - b$ જેવી દ્વિપદીઓના વર્ગ અને ઘન કેવી રીતે શોધવા તે વિશે અભ્યાસ કર્યો. આપણે તેનો ઉપયોગ કરીને $(98)^2 = (100 - 2)^2$, $(999)^3 = (1000 - 1)^3$ વગેરે જેવી સંખ્યાઓની સંખ્યાત્મક કિંમતોનું મૂલ્યાંકન કરી શક્યા. જોકે, $(98)^5$, $(101)^6$ વગેરે જેવી ઊંચી ઘાતવાળી સંખ્યાઓની ગણતરી પુનરાવર્તિત ગુણાકાર કરી મેળવવી મુશ્કેલ છે. આ મુશ્કેલીનું નિવારણ દ્વિપદી પ્રમેય તરીકે ઓળખાતા પ્રમેયથી થઈ ગયું છે. જો n એ પૂર્ણાંક અથવા સંમેય સંખ્યા હોય તો તે $(a + b)^n$નું વિસ્તરણ કરવાનો સરળ માર્ગ આપે છે. આ પ્રકરણમાં, આપણે માત્ર ધન પૂર્ણાંક ઘાતાંક માટે જ દ્વિપદી પ્રમેયનો ઉપયોગ કરીશું.

Blaise Pascal
(1623-1662)

8.2 ધન પૂર્ણાંક ઘાતાંકો માટેનું દ્વિપદી પ્રમેય

પૃષ્ઠ 157 ઉપર આગળ આવી ગયેલા કેટલાક નિત્યસમો ઉપર આપણે એક નજર નાખીએ.

$(a+b)^0 = 1 \qquad a+b \neq 0$

$(a+b)^1 = a + b$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a+b)^4 = (a+b)^3\,(a+b) = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

આ વિસ્તરણોમાં, આપણે અવલોકન કરીએ કે,

(i) વિસ્તરણનાં પદોની કુલ સંખ્યા $(a+b)$ના ઘાતાંક કરતા એક વધારે છે. ઉદાહરણ તરીકે $(a+b)^2$માં ઘાતાંક 2 હોવાથી પદોની સંખ્યા 3 છે.

(ii) ક્રમાનુસાર પદોમાં પ્રથમ સંખ્યા 'a' નો ઘાતાંક ક્રમિક રીતે 1 ઘટે છે જ્યારે બીજી સંખ્યા 'b' નો ઘાતાંક ક્રમિક રીતે 1 વધે છે.

(iii) વિસ્તરણના દરેક પદમાં a અને b ના ઘાતાંકનો સરવાળો સમાન થાય છે અને તે $a + b$ ના ઘાતાંકને સમાન છે.

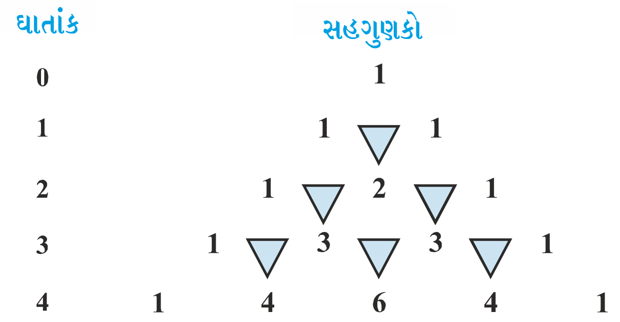
હવે આપણે આ વિસ્તરણના સહગુણકોને નીચે પ્રમાણે ગોઠવીએ (આકૃતિ 8.1) :

ઘાતાંક	સહગુણકો
0	1
1	1 1
2	1 2 1
3	1 3 3 1
4	1 4 6 4 1

આકૃતિ 8.1

ઉપરના ટેબલમાં આપણે એવી તરાહનું નિરીક્ષણ કરી શકીશું કે જે પછીની હાર લખવામાં આપણને મદદરૂપ થાય? હા, આપણે લખી શકીએ. એ જોવા મળે છે કે એક ઘાતાંકવાળી હારના બંને 1 નો સરવાળો, બે ઘાતાંકવાળી હાર માટે 2 આપે છે. બે ઘાતાંકવાળી હારના 1, 2 અને 2, 1 નો સરવાળો ત્રણ ઘાતાંકવાળી હાર માટે 3 અને 3 આપે છે અને આ પ્રમાણે આગળ વધીશું. દરેક હારની પ્રારંભમાં અને અંતમાં 1 ની હાજરી તો છે જ. આ ક્રિયાને આપણે ઇચ્છિત ઘાતાંક સુધી આગળ લઈ જઈ શકીએ.

આકૃતિ 8.2 માં આપેલી તરાહને આગળ વધારીને બીજી કેટલીક હાર લખીએ.



આકૃતિ 8.2

પાસ્કલનો ત્રિકોણ

આકૃતિ 8.2 માં આપેલ ઢાંચો ત્રિકોણ સ્વરૂપમાં છે તેમ જોઈ શકાય છે. ત્યાં નીચેની તરફ આગળ વધતી બે તિર્યક

બાજુઓ પર અને ટોચનાં શિરોબિંદુઓ 1 છે. સંખ્યાઓની આ ગોઠવણીને ફ્રેન્ચ ગણિતશાસ્ત્રી *Blaise Pascal* ના નામ પરથી ***Pascal નો ત્રિકોણ*** કહે છે. તેને ગણિતશાસ્ત્રી *પિંગલા "મેરુ પ્રસ્ત્ર (Meru Prastara)"* તરીકે ઓળખાવે છે.

ઉચ્ચ કક્ષાવાળી ઘાતનું દ્વિપદી વિસ્તરણ પણ પાસ્કલના ત્રિકોણના ઉપયોગથી શક્ય છે. ચાલો, આપણે $(2x + 3y)^5$ નું પાસ્કલના ત્રિકોણના ઉપયોગથી વિસ્તરણ કરીએ. 5 ઘાતાંક માટેની હાર

1 5 10 10 5 1 થશે.

આ હાર અને આપણાં અવલોકનો (i), (ii) અને (iii) ના ઉપયોગથી,

$$(2x + 3y)^5 = (2x)^5 + 5(2x)^4 (3y) + 10(2x)^3 (3y)^2 + 10 (2x)^2 (3y)^3 + 5(2x) (3y)^4 + (3y)^5$$

$$= 32x^5 + 240x^4y + 720x^3y^2 + 1080x^2y^3 + 810xy^4 + 243y^5.$$

હવે, જો આપણે $(2x + 3y)^{12}$ નું વિસ્તરણ શોધવું હોય, તો પ્રથમ 12 ઘાતવાળી હારની જરૂર પડશે. આ માટે 12 ઘાતાંક સુધીની પાસ્કલના ત્રિકોણની બધી જ હાર લખવી પડશે. આ થોડી લાંબી પ્રક્રિયા છે. આપણે હજુ વધારે મોટી ઘાતનો સમાવેશ કરીને વિસ્તરણ કરવા માટે નિરીક્ષણ કર્યા પ્રમાણે આ પ્રક્રિયા વધારે મુશ્કેલ બનશે.

હવે, પાસ્કલના ત્રિકોણની બધી જ હાર લખ્યા સિવાય કોઈપણ દ્વિપદીના ઘાતનું વિસ્તરણ કરવા માટે મદદરૂપ થાય અને જે આપણને જરૂરી ઘાતવાળી હારના પહેલાની બધી જ હાર લખ્યા સિવાય મળે તેવો નિયમ શોધવાનો પ્રયત્ન કરીએ. પાસ્કલના ત્રિકોણની સંખ્યાઓ ફરીથી લખવા માટે, આપણે આગળ શીખી ગયેલ સંચયની સંકલ્પનાનો ઉપયોગ કરીશું. આપણે જાણીએ છીએ કે $^nC_r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$, $0 \le r \le n$ અને n એ અનૃણ પૂર્ણાંક છે. વળી $^nC_0 = 1 = {^nC_n}$

પાસ્કલના ત્રિકોણને પુનઃ નીચે પ્રમાણે લખીશું (આકૃતિ 8.3) :

ઘાતાંક	સહગુણકો
0	1
1	$^1C_0$ (=1) $^1C_1$ (=1)
2	$^2C_0$ (=1) $^2C_1$ (=2) $^2C_2$ (=1)
3	$^3C_0$ (=1) $^3C_1$ (=3) $^3C_2$ (=3) $^3C_3$ (=1)
4	$^4C_0$ (=1) $^4C_1$ (=4) $^4C_2$ (=6) $^4C_3$ (=4) $^4C_4$ (=1)
5	$^5C_0$ (=1) $^5C_1$ (=5) $^5C_2$ (=10) $^5C_3$ (=10) $^5C_4$ (=5) $^5C_5$ (=1)

આકૃતિ 8.3 પાસ્કલનો ત્રિકોણ

આપણે આ તરાહનું નિરીક્ષણ કરી પાસ્કલના ત્રિકોણની આગળની હારો લખ્યા સિવાય કોઈ પણ ઘાતાંક માટેની હાર લખી શકીશું. ઉદાહરણ તરીકે,

ઘાતાંક 7 માટેની હાર

$$^7C_0 \quad ^7C_1 \quad ^7C_2 \quad ^7C_3 \quad ^7C_4 \quad ^7C_5 \quad ^7C_6 \quad ^7C_7 \quad \text{છે.}$$

આમ, આ હાર અને અવલોકનનો (i), (ii) અને (iii) પરથી આપણને,

$(a+b)^7 = {}^7C_0 a^7 + {}^7C_1 a^6 b + {}^7C_2 a^5 b^2 + {}^7C_3 a^4 b^3 + {}^7C_4 a^3 b^4 + {}^7C_5 a^2 b^5 + {}^7C_6 ab^6 + {}^7C_7 b^7$ મળે.

આ અવલોકનોનો ઉપયોગ કરીને કોઈ પણ ધન પૂર્ણાંક ઘાતાંક n માટે દ્વિપદી વિસ્તરણ કલ્પી શકાય.

હવે આપણે કોઈપણ ધન પૂર્ણાંક ઘાતાંક માટે દ્વિપદીનું વિસ્તરણ કરવાની સ્થિતિમાં છીએ.

8.2.1 કોઈ પણ ધન પૂર્ણાંક *n* માટે દ્વિપદી પ્રમેય

$$(a+b)^n = {}^nC_0 a^n + {}^nC_1 a^{n-1}b + {}^nC_2 a^{n-2}b^2 + ... + {}^nC_{n-1} a\, b^{n-1} + {}^nC_n b^n$$

સાબિતી : આપણે ગાણિતિક અનુમાનના સિદ્ધાંતથી સાબિતી આપીશું.

ધારો કે આપેલું વિધાન

$P(n) : (a+b)^n = {}^nC_0 a^n + {}^nC_1 a^{n-1}b + {}^nC_2 a^{n-2}b^2 + ... + {}^nC_{n-1} ab^{n-1} + {}^nC_n b^n$ છે.

$n = 1$ માટે,

$P(1) : (a+b)^1 = {}^1C_0 a^1 + {}^1C_1 b^1 = a + b$ મળશે.

આમ, P (1) સત્ય છે.

ધારો કે કોઈક ધન પૂર્ણાંક k માટે P (k) સત્ય છે, એટલે કે,

$$(a+b)^k = {}^kC_0 a^k + {}^kC_1 a^{k-1}b + {}^kC_2 a^{k-2}b^2 + ... + {}^kC_{k-1} ab^{k-1} + {}^kC_k b^k \qquad ..... (1)$$

આપણે P(k + 1) પણ સત્ય છે તેમ સાબિત કરીશું, એટલે કે,

$(a+b)^{k+1} = {}^{k+1}C_0 a^{k+1} + {}^{k+1}C_1 a^k b + {}^{k+1}C_2 a^{k-1}b^2 + ... + {}^{k+1}C_k ab^k + {}^{k+1}C_{k+1} b^{k+1}$ સાબિત કરીશું.

હવે, $(a+b)^{k+1} = (a+b)(a+b)^k$

$= (a+b)({}^kC_0 a^k + {}^kC_1 a^{k-1}b + {}^kC_2 a^{k-2}b^2 + ... + {}^kC_{k-1} ab^{k-1} + {}^kC_k b^k)$ [(1) પરથી]

$= {}^kC_0 a^{k+1} + {}^kC_1 a^k b + {}^kC_2 a^{k-1}b^2 + ... + {}^kC_{k-1} a^2 b^{k-1} + {}^kC_k ab^k$

$+ {}^kC_0 a^k b + {}^kC_1 a^{k-1}b^2 + {}^kC_2 a^{k-2}b^3 + ... + {}^kC_{k-1} ab^k + {}^kC_k b^{k+1}$ [ગુણાકાર કરતાં]

$= {}^kC_0 a^{k+1} + ({}^kC_1 + {}^kC_0) a^k b + ({}^kC_2 + {}^kC_1) a^{k-1} b^2 + ...$

$+ ({}^kC_k + {}^kC_{k-1}) ab^k + {}^kC_k b^{k+1}$ [સમાન પદોનું જૂથ]

$= {}^{k+1}C_0 a^{k+1} + {}^{k+1}C_1 a^k b + {}^{k+1}C_2 a^{k-1} b^2 + ... + {}^{k+1}C_k ab^k + {}^{k+1}C_{k+1} b^{k+1}$

(${}^kC_0 = {}^{k+1}C_0 = 1$, ${}^kC_r + {}^kC_{r-1} = {}^{k+1}C_r$ અને ${}^kC_k = 1 = {}^{k+1}C_{k+1}$ ના ઉપયોગથી)

આમ, જો P(k) સત્ય હોય, તો P (k + 1) પણ સત્ય છે.

આથી ગાણિતિક અનુમાનના સિદ્ધાંતથી, પ્રત્યેક ધન પૂર્ણાંક n માટે P(n) સત્ય છે.

આપણે $(x + 2)^6$ ના વિસ્તરણ વડે આ પ્રમેય સમજીએ.

$$(x + 2)^6 = {}^6C_0x^6 + {}^6C_1x^5\cdot 2 + {}^6C_2x^4 2^2 + {}^6C_3x^3\cdot 2^3 + {}^6C_4x^2\cdot 2^4 + {}^6C_5x\cdot 2^5 + {}^6C_6\cdot 2^6$$

$$= x^6 + 12x^5 + 60x^4 + 160x^3 + 240x^2 + 192x + 64$$

આમ, $(x + 2)^6 = x^6 + 12x^5 + 60x^4 + 160x^3 + 240x^2 + 192x + 64$

અવલોકનો :

1. સંકેત $\sum_{k=0}^{n} {}^nC_k\, a^{n-k}b^k$ એ

${}^nC_0a^nb^0 + {}^nC_1a^{n-1}b^1 + ... + {}^nC_ra^{n-r}b^r + ... + {}^nC_na^{n-n}b^n$ માટે વપરાય છે, જ્યાં $b^0 = 1 = a^{n-n}$

આથી આ પ્રમેયને નીચે પ્રમાણે લખી શકાય :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} {}^nC_k\, a^{n-k}b^k$$

2. દ્વિપદી પ્રમેયમાં આવતા સહગુણકો ${}^nC_r$ દ્વિપદી સહગુણકો તરીકે જાણીતા છે.

3. $(a+b)^n$ના વિસ્તરણમાં $(n+1)$ પદો છે, એટલે કે ઘાતાંક કરતાં એક પદ વધારે છે.

4. વિસ્તરણમાં ક્રમાનુસાર આવતાં પદોમાં a નો ઘાતાંક એક જેટલો ઘટે છે. પ્રથમ પદમાં n, બીજા પદમાં $(n–1)$ અને આ જ પ્રમાણે આગળ જતાં અંતે છેલ્લા પદમાં શૂન્ય થાય છે. સાથે સાથે b નો ઘાતાંક એક જેટલો વધે છે, શરૂઆતના પ્રથમ પદમાં શૂન્ય, બીજામાં 1 અને આ જ પ્રમાણે આગળ વધતાં છેલ્લા પદમાં ઘાતાંકનો n થી અંત થાય છે.

5. $(a+b)^n$ના વિસ્તરણમાં પ્રથમ પદમાં a અને b ના ઘાતાંકનો સરવાળો $n + 0 = n$ છે, બીજા પદમાં આ સરવાળો $(n – 1) + 1 = n$ અને આ જ પ્રમાણે આગળ વધતાં અંતિમ પદમાં તે સરવાળો $0 + n = n$ છે. આમ, વિસ્તરણના દરેક પદમાં a અને b ના ઘાતાંકનો સરવાળો n છે.

8.2.2 $(a + b)^n$ ના વિસ્તરણના કેટલાક વિશિષ્ટ વિકલ્પો :

(i) $a = x$ અને $b = – y$ લેતાં, આપણને

$$(x – y)^n = [x + (–y)]^n$$

$$= {}^nC_0x^n + {}^nC_1x^{n-1}(–y) + {}^nC_2x^{n-2}(–y)^2 + {}^nC_3x^{n-3}(–y)^3 + ... + {}^nC_n(–y)^n$$

$$= {}^nC_0x^n – {}^nC_1x^{n-1}y + {}^nC_2x^{n-2}y^2 – {}^nC_3x^{n-3}y^3 + ... + (–1)^n\ {}^nC_ny^n$$ મળે.

આમ, $(x–y)^n = {}^nC_0x^n – {}^nC_1x^{n-1}y + {}^nC_2x^{n-2}y^2 – {}^nC_3x^{n-3}y^3 + ... + (–1)^n\ {}^nC_ny^n$

આ પરિણામનો ઉપયોગ કરતાં,

$$(x-2y)^5 = {}^5C_0x^5 - {}^5C_1x^4(2y) + {}^5C_2x^3(2y)^2 - {}^5C_3x^2(2y)^3 + {}^5C_4x(2y)^4 - {}^5C_5(2y)^5$$

$$= x^5 - 10x^4y + 40x^3y^2 - 80x^2y^3 + 80xy^4 - 32y^5.$$

(ii) $a = 1$ અને $b = x$ લેતાં,

$$(1+x)^n = {}^nC_0(1)^n + {}^nC_1(1)^{n-1}x + {}^nC_2(1)^{n-2}x^2 + \dots + {}^nC_nx^n$$

$$= {}^nC_0 + {}^nC_1x + {}^nC_2x^2 + {}^nC_3x^3 + \dots + {}^nC_nx^n$$

આમ, $(1+x)^n = {}^nC_0 + {}^nC_1x + {}^nC_2x^2 + {}^nC_3x^3 + \dots + {}^nC_nx^n$

વિશિષ્ટ રૂપે, $x = 1$ લેતાં,

$$2^n = {}^nC_0 + {}^nC_1 + {}^nC_2 + \dots + {}^nC_n.$$

(iii) $a = 1$ અને $b = -x$ લેતાં,

$$(1-x)^n = {}^nC_0 - {}^nC_1x + {}^nC_2x^2 - \dots + (-1)^n\,{}^nC_nx^n$$

વિશિષ્ટ રૂપે, $x = 1$ લેતાં,

$$0 = {}^nC_0 - {}^nC_1 + {}^nC_2 - \dots + (-1)^n\,{}^nC_n$$

ઉદાહરણ 1 : $\left(x^2 + \frac{3}{x}\right)^4$, $x \neq 0$ નું વિસ્તરણ કરો.

ઉકેલ : દ્વિપદી પ્રમેયનો ઉપયોગ કરતાં, આપણને

$$\left(x^2+\frac{3}{x}\right)^4 = {}^4C_0(x^2)^4 + {}^4C_1(x^2)^3\left(\frac{3}{x}\right) + {}^4C_2(x^2)^2\left(\frac{3}{x}\right)^2 + {}^4C_3(x^2)\left(\frac{3}{x}\right)^3 + {}^4C_4\left(\frac{3}{x}\right)^4$$

$$= x^8 + 4\cdot x^6\cdot\frac{3}{x} + 6\cdot x^4\cdot\frac{9}{x^2} + 4\cdot x^2\cdot\frac{27}{x^3} + \frac{81}{x^4}$$

$$= x^8 + 12x^5 + 54x^2 + \frac{108}{x} + \frac{81}{x^4}.$$

ઉદાહરણ 2 : $(98)^5$ ની ગણતરી કરો.

ઉકેલ : જે બે સંખ્યાઓના ઘાતની ગણતરી સરળ હોય, તેવી બે સંખ્યાઓના સરવાળા અથવા તફાવત સ્વરૂપે 98 ને લઈને દ્વિપદી પ્રમેયનો ઉપયોગ કરીએ.

$98 = 100 - 2$ લઈશું.

આથી, $(98)^5 = (100-2)^5$

$$= {}^5C_0(100)^5 - {}^5C_1(100)^4\,2 + {}^5C_2(100)^3 2^2 - {}^5C_3(100)^2(2)^3 + {}^5C_4(100)(2)^4 - {}^5C_5(2)^5$$

$= 10000000000 - 5 \times 100000000 \times 2 + 10 \times 1000000 \times 4 - 10 \times 10000 \times 8 + 5 \times 100 \times 16 - 32$

$= 10040008000 - 1000800032 = 9039207968.$

ઉદાહરણ 3 : $(1.01)^{1000000}$ અથવા 10,000 માંથી કોણ વધારે છે?

ઉકેલ : 1.01 ના બે ભાગ કરી દ્વિપદી પ્રમેયનો ઉપયોગ કરી શરૂઆતનાં કેટલાંક પદો લખીશું.

$(1.01)^{1000000} = (1 + 0.01)^{1000000}$

$= {}^{1000000}C_0 + {}^{1000000}C_1(0.01) +$ અન્ય ધન પદો

$= 1 + 1000000 \times 0.01 +$ અન્ય ધન પદો

$= 1 + 10000 +$ અન્ય ધન પદો

> 10000

આથી $(1.01)^{1000000} > 10000$

ઉદાહરણ 4 : દ્વિપદી પ્રમેયનો ઉપયોગ કરી, સાબિત કરો કે $6^n - 5n$ ને 25 વડે ભાગતાં શેષ હંમેશાં 1 રહે છે. $n \in N$

ઉકેલ : જો પૂર્ણાંક a અને શૂન્યેતર પૂર્ણાંક b માટે પૂર્ણાંકો q તથા r મળે, જેથી $a = bq + r$ જ્યાં, $0 \le r < |b|$ તો q ને ભાગફળ તથા r ને શેષ કહે છે. આમ, $6^n - 5n$ ને 25 વડે ભાગતાં શેષ 1 રહે તેમ બતાવવા માટે, આપણે સાબિત કરીશું કે $6^n - 5n = 25k + 1$, જ્યાં k કોઈક અનૃણ પૂર્ણાંક છે.

$n = 1$ માટે $6^n - 5n = 6 - 5 = 1 = (25) \cdot 0 + 1$. આથી $n = 1$ માટે પરિણામ સત્ય છે.

હવે, $n \ge 2$ લઈએ.

હવે, $(1 + a)^n = {}^nC_0 + {}^nC_1 a + {}^nC_2 a^2 + ... + {}^nC_n a^n$ માં $a = 5$ લેતાં,

$(1 + 5)^n = {}^nC_0 + {}^nC_1 5 + {}^nC_2 5^2 + ... + {}^nC_n 5^n$

એટલે કે, $6^n = 1 + 5n + 5^2 \cdot {}^nC_2 + 5^3 \cdot {}^nC_3 + ... + 5^n$

એટલે કે, $6^n - 5n = 1 + 5^2 ({}^nC_2 + {}^nC_3 5 + ... + 5^{n-2})$ $(n \ge 2)$

અથવા $6^n - 5n = 1 + 25 ({}^nC_2 + 5 \cdot {}^nC_3 + ... + 5^{n-2})$

અથવા $6^n - 5n = 25k + 1$ જ્યાં $k = {}^nC_2 + 5 \cdot {}^nC_3 + ... + 5^{n-2}$.

આ દર્શાવે છે કે જો $6^n - 5n$ ને 25 વડે ભાગીએ તો શેષ 1 રહે છે.

સ્વાધ્યાય 8.1

પ્રશ્ન 1 થી 5 ની અભિવ્યક્તિઓનું વિસ્તરણ કરો.

1. $(1-2x)^5$
2. $\left(\frac{2}{x} - \frac{x}{2}\right)^5$
3. $(2x - 3)^6$
4. $\left(\frac{x}{3} + \frac{1}{x}\right)^5$
5. $\left(x + \frac{1}{x}\right)^6$