1. **$n \in N$ માટે ગાણિતિક અનુમાનના સિદ્ધાંતનો ઉપયોગ કરી વિધાન સાબિત કરો :**

$$1 + 3 + 3^2 + \dots\dots\dots + 3^{n-1} = \frac{3^n - 1}{2}.$$

➥ $P(n) : 1 + 3 + 3^2 + \dots\dots\dots + 3^{n-1} = \frac{3^n - 1}{2}, \ n \in N$

(i) $n = 1$ માટે, ડા.બા. $= 1$

$$\text{જ.બા.} = \frac{3^1 - 1}{2} = \frac{3 - 1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$\therefore$ ડા.બા. = જ.બા.

$\therefore$ P(1) સત્ય છે.

(ii) ધારો કે, $P(k)$, $k \in N$ સત્ય છે.

$\therefore P(k) = 1 + 3 + 3^2 + \dots\dots + 3^{k-1} = \frac{3^k - 1}{2}$ ..(1)

(iii) $n = k + 1$ માટે,

ડા.બા. $= 1 + 3 + 3^2 + \dots\dots + 3^{k-1} + 3^k$

$= \frac{3^k - 1}{2} + 3^k$ ((1) પરથી)

$= \frac{3^k - 1 + 2 \cdot 3^k}{2}$

$= \frac{3 \cdot 3^k - 1}{2}$

$= \frac{3^{k+1} - 1}{2}$

= જ.બા.

$\therefore P(k + 1)$ સત્ય છે.

$\therefore P(k)$ સત્ય છે. $\Rightarrow P(k + 1)$ સત્ય છે.

$\therefore$ ગાણિતીય અનુમાનનાં સિદ્ધાંત પરથી પ્રત્યેક $n \in N$ માટે $P(n)$ સત્ય છે.

2. **$n \in N$ માટે ગાણિતિક અનુમાનના સિદ્ધાંતનો ઉપયોગ કરી વિધાન સાબિત કરો :**

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots\dots\dots + n^3 = \left(\frac{n(n + 1)}{2}\right)^2$$

➥ $P(n) : 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots\dots\dots + n^3 = \left(\frac{n(n + 1)}{2}\right)^2, \ n \in N$

(i) $n = 1$ માટે,

ડા.બા. $= 1^3 = 1$, જ.બા. $= \left(\frac{1(1 + 1)}{2}\right)^2$

$= 1$

$\therefore$ ડા.બા. = જ.બા.

$\therefore$ P(1) સત્ય છે.

(ii) ધારો કે, $P(k)$, $k \in N$ સત્ય છે.

$$\therefore P(k) = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + k^3 = \left(\frac{k \cdot (k+1)}{2}\right)^2 \quad .....(1)$$

(iii) $n = k + 1$ માટે,

ડા.બા. $= 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + k^3 + (k+1)^3$

$$= \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 + (k+1)^3 \quad (\because \text{ (1) પરથી})$$

$$= (k+1)^2 \left[\frac{k^2}{4} + (k+1)\right]$$

$$= (k+1)^2 \left[\frac{k^2 + 4k + 4}{4}\right]$$

$$= \frac{(k+1)^2 (k+2)^2}{4}$$

$$= \left[\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right]^2$$

= જ.બા.

$\therefore P(k+1)$ સત્ય છે.

$\therefore P(k)$ સત્ય છે. $\Rightarrow P(k+1)$ સત્ય છે.

$\therefore$ ગાણિતીય અનુમાનનાં સિદ્ધાંત પરથી પ્રત્યેક $n \in N$ માટે $P(n)$ સત્ય છે.

3. **$n \in N$ માટે ગાણિતિક અનુમાનના સિદ્ધાંતનો ઉપયોગ કરી વિધાન સાબિત કરો :**
$1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + ... + n \cdot 2^n = (n-1)\, 2^{n+1} + 2$

➡ $P(n) : 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + ... + n \cdot 2^n = (n-1)\, 2^{n+1} + 2,\ n \in N$

(i) $n = 1$ માટે,

ડા.બા. $= 1 \cdot 2$	જ.બા. $= (1-1)\, 2^{1+1} + 2$
$= 2$	$= 0 + 2$
	$= 2$

$\therefore$ ડા.બા. = જ.બા.

$\therefore P(1)$ સત્ય છે.

(ii) ધારો કે, $P(k)$, $k \in N$ માટે સત્ય છે.

$\therefore P(k) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + ... + k \cdot 2^k = (k-1)\, 2^{k+1} + 2 \quad .....(1)$

(iii) $n = k + 1$ માટે,

ડા.બા. $= 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + ... + k\, 2^k + (k+1)\, 2^{k+1}$

$= (k-1)\, 2^{k+1} + 2 + (k+1)\, 2^{k+1}$ ($\because$ (1) પરથી)

$= 2^{k+1} (k - 1 + k + 1) + 2$

$= 2^{k+1} \cdot 2k + 2$

$= k\, 2^{(k+1)+1} + 2$

$= ((k+1) - 1)\, 2^{(k+1)+1} + 2$

= જ.બા.

$\therefore P(k+1)$ સત્ય છે.

$\therefore P(k)$ સત્ય છે. $\Rightarrow P(k+1)$ સત્ય છે.

$\therefore$ ગાણિતીય અનુમાનનાં સિદ્ધાંત પરથી પ્રત્યેક $n \in N$ માટે $P(n)$ સત્ય છે.

4. **$n \in N$ માટે ગાણિતિક અનુમાનના સિદ્ધાંતનો ઉપયોગ કરી વિધાન સાબિત કરો :**

$$1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 7 + \ldots\ldots + (2n-1)(2n+1) = \frac{n(4n^2 + 6n - 1)}{3}$$

➥ $P(n) : 1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 7 + \ldots\ldots + (2n-1)(2n+1) = \frac{n(4n^2 + 6n - 1)}{3}, \ n \in N$

(i) $n = 1$ માટે,

ડા.બા. $= 1 \cdot 3$
$= 3$

જ.બા. $= \frac{1[4(1)^2 + 6(1) - 1]}{3}$
$= \frac{4 + 6 - 1}{3}$
$= \frac{9}{3}$
$= 3$

$\therefore$ ડા.બા. = જ.બા.

$\therefore$ P(1) સત્ય છે.

(ii) ધારો કે, $P(k)$, $k \in N$ માટે સત્ય છે.

$\therefore P(k) = 1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 7 + \ldots\ldots + (2k-1)(2k+1) = \frac{k(4k^2 + 6k - 1)}{3}$ .....(1)

(iii) $n = k + 1$ માટે,

ડા.બા. $= 1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 7 + \ldots\ldots\ldots + (2k-1)(2k+1) + (2(k+1)-1)(2(k+1)+1)$

$$= \frac{k(4k^2 + 6k - 1)}{3} + (2k+1)(2k+3)$$

$$= \frac{k(4k^2 + 6k - 1) + 3(2k+1)(2k+3)}{3}$$

$$= \frac{k(4k^2 + 6k - 1) + 3(4k^2 + 8k + 3)}{3}$$

$$= \frac{4k^3 + 6k^2 - k + 12k^2 + 24k + 9}{3}$$

$$= \frac{4k^3 + 18k^2 + 23k + 9}{3}$$

➥ $P(n) : 1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 7 + \ldots\ldots + (2n-1)(2n+1) = \frac{n(4n^2 + 6n - 1)}{3}, \ n \in N$

(i) $n = 1$ માટે,

ડા.બા. $= 1 \cdot 3$
$= 3$

જ.બા. $= \frac{1[4(1)^2 + 6(1) - 1]}{3}$
$= \frac{4 + 6 - 1}{3}$
$= \frac{9}{3}$
$= 3$

$\therefore$ ડા.બા. = જ.બા.

$\therefore$ P(1) સત્ય છે.

(ii) ધારો કે, $P(k)$, $k \in N$ માટે સત્ય છે.

$\therefore P(k) = 1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 7 + \ldots\ldots + (2k-1)(2k+1) = \frac{k(4k^2 + 6k - 1)}{3}$ .....(1)

(iii) $n = k + 1$ માટે,

ડા.બા. $= 1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 7 + \dots\dots\dots + (2k-1)(2k+1) + (2(k+1)-1)(2(k+1)+1)$

$$= \frac{k(4k^2 + 6k - 1)}{3} + (2k+1)(2k+3)$$

$$= \frac{k(4k^2 + 6k - 1) + 3(2k+1)(2k+3)}{3}$$

$$= \frac{k(4k^2 + 6k - 1) + 3(4k^2 + 8k + 3)}{3}$$

$$= \frac{4k^3 + 6k^2 - k + 12k^2 + 24k + 9}{3}$$

$$= \frac{4k^3 + 18k^2 + 23k + 9}{3}$$

5. $n \in N$ માટે ગાણિતિક અનુમાનના સિદ્ધાંતનો ઉપયોગ કરી વિધાન સાબિત કરો :

$$1 + \frac{1}{(1+2)} + \frac{1}{(1+2+3)} + \dots\dots + \frac{1}{(1+2+3\dots.n)} = \frac{2n}{n+1}$$

➡ $P(n) : 1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \dots\dots + \frac{1}{1+2+3+\dots.+n} = \frac{2n}{n+1}, \ n \in N$

(i) $n = 1$ માટે,

ડા.બા. $= 1$, જ.બા. $= \frac{2(1)}{1+1} = 1$

$\therefore$ ડા.બા. = જ.બા.

$\therefore$ P(1) સત્ય છે.

(ii) ધારો કે, $P(k)$, $k \in N$ સત્ય છે.

$$\therefore P(k) = 1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \dots\dots + \frac{1}{1+2+3\dots.k} = \frac{2k}{k+1} \quad \dots..(1)$$

(iii) $n = k + 1$ માટે,

ડા.બા. $= 1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \dots\dots + \frac{1}{1+2+3+\dots.k} + \frac{1}{1+2+3\dots.k+(k+1)}$

$$= \frac{2k}{k+1} + \frac{1}{1+2+3+\dots k+(k+1)} \quad (\because \text{ (1) પરથી})$$

$$= \frac{2k}{k+1} + \frac{1}{\frac{(k+1)(k+2)}{2}} \quad \left(\because \sum n = \frac{n(n+1)}{2} \text{ પરથી}\right)$$

$$= \frac{2k}{k+1} + \frac{2}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{2k^2 + 4k + 2}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{2[k^2 + 2k + 1]}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{2(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{2(k+1)}{k+2}$$

= જ.બા.

$\therefore$ P$(k+1)$ સત્ય છે.

$\therefore$ P(k) સત્ય છે. $\Rightarrow$ P$(k+1)$ સત્ય છે.

$\therefore$ ગાણિતીય અનુમાનનાં સિદ્ધાંત પરથી પ્રત્યેક $n \in$ N માટે P(n) સત્ય છે.

6. **$n \in$ N માટે ગાણિતિક અનુમાનના સિદ્ધાંતનો ઉપયોગ કરી વિધાન સાબિત કરો :**

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+.......+\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}$$

➡ $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+.......+\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}$

P(n) : $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+.....+\frac{1}{2^n}=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n, n \in \mathrm{N}$

➡ $n = 1$ માટે, આપેલ વિધાન સત્ય સાબિત કરતાં

ડા.બા. $= \frac{1}{2}$

જ.બા. $= 1-\left(\frac{1}{2}\right)^1 = 1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

ડા.બા. = જ.બા.

$\therefore$ P(1) સત્ય છે.

➡ ધારો કે વિધાન P(k) સત્ય છે, $k \in$ N

P(k) : $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+.....+\frac{1}{2^k}=1-\left(\frac{1}{2}\right)^k$ .... (1)

➡ $n = k + 1$ માટે,

ડા.બા. $= \frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+.....+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^{k+1}}$

$= 1-\left(\frac{1}{2}\right)^k+\frac{1}{2^{k+1}}$ ($\because$ (1) પરથી)

$= 1-\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k \cdot 2}$

$= 1-\frac{1}{2^k}\left(1-\frac{1}{2}\right) = 1-\frac{1}{2^k}\cdot\frac{1}{2}$

$= 1-\frac{1}{2^{k+1}} = 1-\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$

ડા.બા. = જ.બા.

$\therefore$ વિધાન P$(k+1)$ સત્ય છે.

$\therefore$ P(k) સત્ય છે. $\Rightarrow$ P$(k+1)$ સત્ય છે.

$\therefore$ ગણિતીય અનુમાનનાં સિદ્ધાંતથી $\forall\, n \in$ N માટે P(n) સત્ય છે.

7. **$n \in$ N માટે ગાણિતિક અનુમાનના સિદ્ધાંતનો ઉપયોગ કરી વિધાન સાબિત કરો :**

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + ... + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

➡ P(n) : $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + ... + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$, $n \in$ N

➡ $n = 1$ માટે,

ડા.બા. = 1.2.3 = 6

જ.બા. $= \frac{1(1+1)(1+2)(1+3)}{4} = \frac{(2)(3)(4)}{4} = 6$

$\therefore$ ડા.બા. = જ.બા.

$\therefore$ P(1) સત્ય છે.

➥ ધારો કે P(k) સત્ય છે, તેમ સ્વીકારતાં $k \in N$

$$P(k) : 1\cdot2\cdot3 + 2\cdot3\cdot4 + ... + k(k+1)(k+2) = \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4} \quad ....(1)$$

➥ $n = k + 1$ માટે, વિધાન સત્ય સાબિત કરતાં,

$$\text{ડા.બા.} = 1\cdot2\cdot3 + 2\cdot3\cdot4 + ... + k(k+1)(k+2) + (k+1)\,((k+1)+1)((k+1)+2)$$

$$= \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4} + (k+1)(k+2)(k+3) \quad (\because (1) \text{ પરથી})$$

$$= (k+1)(k+2)(k+3)\left[\frac{k}{4}+1\right]$$

$$= (k+1)(k+2)(k+3)\,\frac{(k+4)}{4}$$

$$= \frac{(k+1)\big((k+1)+1\big)\big((k+1)+2\big)\big((k+1)+3\big)}{4}$$

$\therefore$ ડા.બા. = જ.બા.

$\therefore$ P(1) સત્ય છે.

$\therefore$ વિધાન P(k + 1) સત્ય છે.

$\therefore$ P(k) સત્ય છે. $\Rightarrow$ P(k + 1) સત્ય છે.

$\therefore$ ગણિતીય અનુમાનનાં સિદ્ધાંતથી $\forall\ n \in N$ માટે

P(n) સત્ય છે.

8. $n \in N$ માટે ગાણિતિક અનુમાનના સિદ્ધાંતનો ઉપયોગ કરી વિધાન સાબિત કરો :

$$\frac{1}{2\cdot5} + \frac{1}{5\cdot8} + \frac{1}{8\cdot11} + ... + \frac{1}{(3n-1)(3n+2)} = \frac{n}{(6n+4)}$$

➥ $$P(n) : \frac{1}{2\cdot5} + \frac{1}{5\cdot8} + \frac{1}{8\cdot11} + ... + \frac{1}{(3n-1)(3n+2)} = \frac{n}{(6n+4)},\ n \in N$$

(i) $n = 1$ માટે,

ડા.બા. $= \frac{1}{2\cdot5}$	જ.બા. $= \frac{(1)}{6(1)+4}$
$= \frac{1}{10}$	$= \frac{1}{10}$

$\therefore$ ડા.બા. = જ.બા.

$\therefore$ P(1) સત્ય છે.

(ii) ધારો કે, P(k), $k \in N$ માટે સત્ય છે.

$$\therefore P(k) = \frac{1}{2\cdot5} + \frac{1}{5\cdot8} + \frac{1}{8\cdot11} + ... + \frac{1}{(3k-1)(3k+2)} = \frac{k}{6k+4} \quad .....(1)$$

(iii) $n = k + 1$ માટે,

$$\text{ડા.બા.} = \frac{1}{2\cdot5} + \frac{1}{5\cdot8} + \frac{1}{8\cdot11} + ... + \frac{1}{(3k-1)(3k+2)} + \frac{1}{\big(3(k+1)-1\big)\big(3(k+1)+2\big)}$$

$$= \frac{k}{6k+4} + \frac{1}{(3k+2)(3k+5)}$$

$$= \frac{k}{2(3k+2)} + \frac{1}{(3k+2)(3k+5)}$$

$$= \frac{k(3k+5)+2}{2(3k+2)(3k+5)}$$

$$= \frac{3k^2 + 5k + 2}{2(3k + 2)(3k + 5)}$$

➥ $P(n) : \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 11} + \ldots\ldots + \frac{1}{(3n-1)(3n+2)} = \frac{n}{(6n+4)}, \; n \in N$

(i) $n = 1$ માટે,

ડા.બા. $= \frac{1}{2 \cdot 5} = \frac{1}{10}$	જ.બા. $= \frac{(1)}{6(1) + 4} = \frac{1}{10}$

$\therefore$ ડા.બા. = જ.બા.

$\therefore$ P(1) સત્ય છે.

(ii) ધારો કે, $P(k)$, $k \in N$ માટે સત્ય છે.

$$\therefore P(k) = \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 11} + \ldots\ldots + \frac{1}{(3k-1)(3k+2)} = \frac{k}{6k+4} \quad \ldots\ldots(1)$$

(iii) $n = k + 1$ માટે,

$$\text{ડા.બા.} = \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 11} + \ldots\ldots + \frac{1}{(3k-1)(3k+2)} + \frac{1}{\big(3(k+1)-1\big)\big(3(k+1)+2\big)}$$

$$= \frac{k}{6k + 4} + \frac{1}{(3k + 2)(3k + 5)}$$

$$= \frac{k}{2(3k + 2)} + \frac{1}{(3k + 2)(3k + 5)}$$

$$= \frac{k(3k + 5) + 2}{2(3k + 2)(3k + 5)}$$

$$= \frac{3k^2 + 5k + 2}{2(3k + 2)(3k + 5)}$$

9. $n \in N$ માટે ગાણિતિક અનુમાનના સિદ્ધાંતનો ઉપયોગ કરી વિધાન સાબિત કરો :

$$\mathbf{1 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3^3 + \ldots\ldots + n \cdot 3^n = \frac{(2n - 1)3^{n+1} + 3}{4}}$$

➥ $P(n) : 1 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3^3 + \ldots\ldots + n \cdot 3^n = \frac{(2n - 1)3^{n+1} + 3}{4}, \; n \in N$

(i) $n = 1$ માટે,

ડા.બા. $= 1 \cdot 3 = 3$, જ.બા. $= \frac{(2(1) - 1)3^{1+1} + 3}{4}$

$$= \frac{9 + 3}{4}$$

$$= \frac{12}{4} = 3$$

$\therefore$ ડા.બા. = જ.બા.

$\therefore$ P(1) સત્ય છે.

(ii) ધારો કે, $P(k)$, $k \in N$ સત્ય છે.

$$\therefore P(k) = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3^3 + \ldots + k \cdot 3^k = \frac{(2k - 1)3^{k+1} + 3}{4} \quad \ldots\ldots(1)$$

(iii) $n = k + 1$ માટે,

ડા.બા. $= 1 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3^3 + \ldots\ldots\ldots + k \cdot 3^k + (k + 1) \cdot 3^{k+1}$

$$= \frac{(2k-1)\,3^{k+1}+3}{4} + (k+1)\cdot 3^{k+1} \quad (\because \text{ (1) પરથી})$$

$$= \frac{1}{4}\left[(2k-1)3^{k+1} + 3 + 4(k+1)\cdot 3^{k+1}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[3^{k+1}\,(2k - 1 + 4k + 4) + 3\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[3^{k+1}\,(6k + 3) + 3\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[3^{k+1}\cdot 3\,(2k + 1) + 3\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[3^{k+2}\,(2k + 1) + 3\right]$$

$$= \frac{\left[2(k+1) - 1\right]3^{(k+1)+1} + 3}{4} = \text{જ.બા.}$$

$\therefore$ P$(k + 1)$ સત્ય છે.

$\therefore$ P(k) સત્ય છે. $\Rightarrow$ P$(k + 1)$ સત્ય છે.

$\therefore$ ગાણિતીય અનુમાનનાં સિદ્ધાંત પરથી પ્રત્યેક $n \in$ N માટે P(n) સત્ય છે.

10. $n \in$ N માટે ગાણિતિક અનુમાનના સિદ્ધાંતનો ઉપયોગ કરી વિધાન સાબિત કરો :

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5} + \ldots\ldots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$$

➠ P(n) : $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5} + \ldots\ldots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$, $n \in$ N

➠ $n = 1$ માટે,

ડા.બા. $= \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} = \frac{1}{6}$

જ.બા. $= \frac{1(1+3)}{4(1+1)(1+2)} = \frac{4}{4\,(2)\,(3)} = \frac{1}{6}$

ડા.બા. = જ.બા.

$\therefore$ P(1) સત્ય છે.

➠ ધારો કે વિધાન P(k), $k \in$ N માટે સત્ય છે.

P(k) : $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \ldots\ldots + \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{k(k+3)}{4(k+1)(k+2)}$ .... (1)

➠ $n = k + 1$ માટે,

ડા.બા. $= \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \ldots\ldots + \frac{1}{k(k+1)(k+2)} + \frac{1}{(k+1)((k+1)+1)((k+1)+2)}$

$$= \frac{k(k+3)}{4(k+1)(k+2)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)} \quad (\because \text{ (1) પરથી})$$

$$= \frac{k(k+3)^2 + 4}{4(k+1)(k+2)(k+3)}$$

$$= \frac{k(k^2 + 6k + 9) + 4}{4(k+1)(k+2)(k+3)}$$

$$= \frac{k^3 + 6k^2 + 9k + 4}{4(k+1)(k+2)(k+3)}$$

$$= \frac{(k+1)^2(k+4)}{}$$

$$4(k+1)(k+2)(k+3)$$

$$= \frac{(k+1)((k+1)+3)}{4((k+1)+1(k+1)+2)}$$

ડા.બા. $=$ જ.બા.

$\therefore$ વિધાન $P(k+1)$ સત્ય છે.

$\therefore$ $P(k)$ સત્ય છે. $\Rightarrow$ $P(k+1)$ સત્ય છે.

$\therefore$ ગણિતીય અનુમાનનાં સિદ્ધાંતથી $\forall\, n \in N$ માટે $P(n)$ સત્ય છે.

11. **$n \in N$ માટે ગાણિતિક અનુમાનના સિદ્ધાંતનો ઉપયોગ કરી વિધાન સાબિત કરો :**

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + ... + n \cdot (n+1) = \left[\frac{n(n+1)(n+2)}{3}\right]$$

➡ $P(n) : 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + ... + n\,(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$, $n \in N$

(i) $n = 1$ માટે,

ડા.બા. $= 1 \cdot 2 = 2$ જ.બા. $= \frac{1(1+1)(1+2)}{3}$

$$= \frac{(1)(2)(3)}{3}$$

$$= 2$$

$\therefore$ ડા.બા. $=$ જ.બા.

$\therefore$ $P(1)$ સત્ય છે.

(ii) ધારો કે, $P(k)$, $k \in N$ માટે સત્ય છે.

$\therefore$ $P(k) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + ... + k(k+1) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3}$ .....(1)

(iii) $n = k + 1$ માટે,

ડા.બા. $= 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + ... + k(k+1) + (k+1)(k+2)$

$$= \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + (k+1)(k+2) \quad (\because \text{ (1) પરથી})$$

$$= (k+1)(k+2)\left[\frac{k}{3} + 1\right]$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$$

$=$ જ.બા.

$\therefore$ $P(k+1)$ સત્ય છે.

$\therefore$ $P(k)$ સત્ય છે. $\Rightarrow$ $P(k+1)$ સત્ય છે.

$\therefore$ ગાણિતીય અનુમાનનાં સિદ્ધાંત પરથી પ્રત્યેક $n \in N$ માટે $P(n)$ સત્ય છે.

12. **$n \in N$ માટે ગાણિતિક અનુમાનના સિદ્ધાંતનો ઉપયોગ કરી વિધાન સાબિત કરો :**

$$a + ar + ar^2 + ... + ar^{n-1} = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

➡ $P(n) : a + ar + ar^2 + ... + ar^{n-1} = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$, $n \in N$

(i) $n = 1$ માટે,

ડા.બા. $= a$ જ.બા. $= \frac{a(r^1 - 1)}{r - 1}$

$$= a$$

$\therefore$ ડા.બા. $=$ જ.બા.

$\therefore$ $P(1)$ સત્ય છે.

(ii) ધારો કે, $P(k)$, $k \in N$ માટે સત્ય છે.

$\therefore P(k) = a + ar + ar^2 + ... + ar^{k-1} = \dfrac{a(r^k - 1)}{r - 1}$ ......(1)

(iii) $n = k + 1$ માટે,

ડા.બા. $= a + ar + ar^2 + ... + ar^{k-1} + ar^{(k+1)-1}$

$= \dfrac{a(r^k - 1)}{r - 1} + ar^k$

$= a\left[\dfrac{r^k - 1 + r^k\ (r - 1)}{r - 1}\right]$

$= a\left[\dfrac{r^k - 1 + r^{k+1} - r^k}{r - 1}\right]$

$= a\left[\dfrac{r^{k+1} - 1}{r - 1}\right]$

= જ.બા.

$\therefore P(k + 1)$ સત્ય છે.

$\therefore P(k)$ સત્ય છે. $\Rightarrow P(k + 1)$ સત્ય છે.

$\therefore$ ગાણિતીય અનુમાનનાં સિદ્ધાંત પરથી પ્રત્યેક $n \in N$ માટે $P(n)$ સત્ય છે.

13. $n \in N$ માટે ગાણિતિક અનુમાનના સિદ્ધાંતનો ઉપયોગ કરી વિધાન સાબિત કરો :

$$\left(1 + \frac{3}{1}\right)\left(1 + \frac{5}{4}\right)\left(1 + \frac{7}{9}\right) + ... + \left(1 + \frac{(2n + 1)}{n^2}\right) = (n + 1)^2$$

➥ $P(n) : \left(1 + \frac{3}{1}\right)\left(1 + \frac{5}{4}\right)\left(1 + \frac{7}{9}\right) + ... + \left(1 + \frac{(2n + 1)}{n^2}\right) = (n + 1)^2$, $n \in N$

(i) $n = 1$ માટે,

ડા.બા. $= \left(1 + \frac{3}{1}\right)$	જ.બા. $= (1 + 1)^2$
$= 1 + 3$	$= (2)^2$
$= 4$	$= 4$

$\therefore$ ડા.બા. = જ.બા.

$\therefore P(1)$ સત્ય છે.

(ii) ધારો કે, $P(k)$, $k \in N$ માટે સત્ય છે.

$\therefore P(k) = \left(1 + \frac{3}{1}\right)\left(1 + \frac{5}{4}\right)\left(1 + \frac{7}{9}\right) \times ...... \times \left(1 + \frac{(2k + 1)}{k^2}\right) = (k + 1)^2$

(iii) $n = k + 1$ માટે,

ડા.બા. $= \left(1 + \frac{3}{1}\right)\left(1 + \frac{5}{4}\right)\left(1 + \frac{7}{9}\right) \times ...... \times \left(1 + \frac{(2k + 1)}{k^2}\right) + \left(1 + \frac{2(k + 1) + 1}{(k + 1)^2}\right)$

$= (k + 1)^2 + \dfrac{(k + 1)^2 + 2k + 2 + 1}{(k + 1)^2}$ ($\because$ (1) પરથી)

$= k^2 + 2k + 1 + 2k + 3$

$= k^2 + 4k + 4$

$= (k + 2)^2$

= જ.બા.

$\therefore P(k + 1)$ સત્ય છે.

$\therefore P(k)$ સત્ય છે. $\Rightarrow P(k + 1)$ સત્ય છે.

∴ ગાણિતીય અનુમાનનાં સિદ્ધાંત પરથી પ્રત્યેક $n \in N$ માટે $P(n)$ સત્ય છે.

14. **$n \in N$ માટે ગાણિતિક અનુમાનના સિદ્ધાંતનો ઉપયોગ કરી વિધાન સાબિત કરો : $n(n + 1)(n + 5)$ એ 3 નો ગુણિત છે.**

➡ $P(n)$: $n(n + 1)(n + 5)$ એ 3 નો ગુણિત છે, $n \in N$

(i) $n = 1$ માટે,

$1(1 + 1)(1 + 5) = 12 = 3 \times 4$ જે 3 નો ગુણિત છે.

∴ $P(1)$ સત્ય છે.

(ii) ધારો કે, $P(k)$, $k \in N$ માટે સત્ય છે.

$P(k)$: $k(k + 1)(k + 5)$ એ 3 નો ગુણિત છે.

∴ $k(k + 1)(k + 5) = 3\lambda$ $(\lambda \in N)$

∴ $k(k^2 + 6k + 5) = 3\lambda$

∴ $k^3 + 6k^2 + 5k = 3\lambda$ ......(1)

(iii) $n = k + 1$ માટે,

$(k + 1)\ ((k + 1) + 1)\ ((k + 1) + 5)$

$= (k + 1)\ (k + 2)\ (k + 6)$

$= (k^2 + 3k + 2)\ (k + 6)$

$= k^3 + 6k^2 + 3k^2 + 18k + 2k + 12$

$= k^3 + 9k^2 + 20k^2 + 12$

$= (3\lambda - 6k^2 - 5k) + 9k^2 + 20k + 1^2$ ($\because$ પરિણામ (1) પરથી $k^3 = 3\lambda - 6k^2 - 5k$)

$= 3\lambda - 6k^2 - 5k + 9k^2 + 20k + 12$

$= 3\lambda + 3k^2 + 15k + 12$

$= 3(\lambda + k^2 + 5k + 4)$ જે 3 નો ગુણિત છે.

∴ $P(k + 1)$ સત્ય છે.

∴ $P(k)$ સત્ય છે. $\Rightarrow P(k + 1)$ સત્ય છે.

∴ ગાણિતીય અનુમાનનાં સિદ્ધાંત પ્રમાણે પ્રત્યેક $n \in N$ માટે $P(n)$ સત્ય છે.

15. **$n \in N$ માટે ગાણિતિક અનુમાનના સિદ્ધાંતનો ઉપયોગ કરી વિધાન સાબિત કરો :**

$$\left(1 + \frac{1}{1}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right) \ldots\ldots \left(1 + \frac{1}{n}\right) = (n + 1)$$

➡ $P(n)$: $\left(1 + \frac{1}{1}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right) \ldots\ldots \left(1 + \frac{1}{n}\right) = (n + 1)$, $n \in N$

(i) $n = 1$ માટે,

ડા.બા. $= \left(1 + \frac{1}{1}\right)$	જ.બા. $= (1 + 1)$
$= 2$	$= 2$

∴ ડા.બા. = જ.બા.

∴ $P(1)$ સત્ય છે.

(ii) ધારો કે, $P(k)$, $k \in N$ માટે સત્ય છે.

$$\therefore P(k) = \left(1 + \frac{1}{1}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right) \ldots\ldots \left(1 + \frac{1}{k}\right) = (k + 1) \ldots\ldots(1)$$

(iii) $n = k + 1$ માટે,

$$\text{ડા.બા.} = \left(1 + \frac{1}{1}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right) \ldots\ldots$$

$$= (k + 1)\left(1 + \frac{1}{k + 1}\right) \qquad (\because \text{ (1) પરથી})$$

$= (k + 1)\left(\frac{k+1+1}{k+1}\right)$

$= (k + 2)$

$=$ જ.બા.

$\therefore$ $P(k + 1)$ સત્ય છે.

$\therefore$ $P(k)$ સત્ય છે. $\Rightarrow P(k + 1)$ સત્ય છે.

$\therefore$ ગાણિતીય અનુમાનનાં સિદ્ધાંત પરથી પ્રત્યેક $n \in N$ માટે $P(n)$ સત્ય છે.

16. **$n \in N$ માટે ગાણિતિક અનુમાનના સિદ્ધાંતનો ઉપયોગ કરી વિધાન સાબિત કરો : $10^{2n-1} + 1$ એ 11 વડે વિભાજ્ય છે.**

➡ $P(n)$: $10^{2n-1} + 1$ એ 11 વડે વિભાજ્ય છે, $n \in N$

(i) $n = 1$ માટે,

$10^{2-1} = 10 + 1 = 11$ જે 11 વડે વિભાજ્ય છે.

$\therefore$ $P(1)$ સત્ય છે.

(ii) ધારો કે, $P(k)$, $k \in N$ માટે સત્ય છે.

$P(k)$: $10^{2k-1} + 1$ એ 11 વડે વિભાજ્ય છે.

$\therefore 10^{2k-1} + 1 = 11m \quad (m \in N)$ ....(1)

(iii) $n = k + 1$ માટે,

$10^{2(k+1)-1} + 1 = 10^{2k+1} + 1$

$= 10^{2k-1+2} + 1$

$= 10^{2k-1} \cdot 10^2 + 1$

$= (11m - 1)(100) + 1$ ($\because$ (1) પરથી $10^{2k-1} = 11m - 1$)

$= 11 \times 100m - 100 + 1$

$= 11 \times 100m - 99$

$= 11\ (100m - 9)$

જે 11 વડે વિભાજ્ય છે.

$\therefore$ $P(k + 1)$ સત્ય છે.

$\therefore$ $P(k)$ સત્ય છે. $\Rightarrow P(k + 1)$ સત્ય છે.

$\therefore$ ગાણિતીય અનુમાનનાં સિદ્ધાંત પ્રમાણે પ્રત્યેક $n \in N$ માટે $P(n)$ સત્ય છે.

17. **$n \in N$ માટે ગાણિતિક અનુમાનના સિદ્ધાંતનો ઉપયોગ કરી વિધાન સાબિત કરો :**

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots\ldots + (2n - 1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$$

➡ $P(n)$: $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots\ldots + (2n - 1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$, $n \in N$

(i) $n = 1$ માટે,

ડા.બા. $= 1^2 = 1$ | જ.બા. $= \frac{(1)(2-1)(2+1)}{3}$ $= 1$

$\therefore$ ડા.બા. $=$ જ.બા.

$\therefore$ $P(1)$ સત્ય છે.

(ii) ધારો કે, $P(k)$, $k \in N$ માટે સત્ય છે.

$\therefore 1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots\ldots + (2k - 1)^2 = \frac{k(2k-1)(2k+1)}{3}$ ......(1)

(iii) $n = k + 1$ માટે,

ડા.બા. $= 1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots\ldots + (2k - 1)^2 + (2(k + 1) - 1)^2$

$$= \frac{k(2k-1)(2k+1)}{3} + (2k+1)^2$$

$$= (2k+1)\left[\frac{k(2k-1)}{3} + (2k+1)\right]$$

$$= (2k+1)\left[\frac{2k^2 - k + 6k + 3}{3}\right]$$

$$= \frac{(2k+1)(2k^2+5k+3)}{3}$$

$$= \frac{(2k+1)(2k+3)(k+1)}{3}$$

$$= \frac{(k+1)\big(2(k+1)-1\big)\big(2(k+1)+1\big)}{3}$$

= જ.બા.

$\therefore$ P(k + 1) સત્ય છે.

$\therefore$ P(k) સત્ય છે. $\Rightarrow$ P(k + 1) સત્ય છે.

$\therefore$ ગાણિતીય અનુમાનનાં સિદ્ધાંત પરથી પ્રત્યેક $n \in N$ માટે P(n) સત્ય છે.

18. $n \in N$ માટે ગાણિતિક અનુમાનના સિદ્ધાંતનો ઉપયોગ કરી વિધાન સાબિત કરો : $x^{2n} - y^{2n}$ એ $x + y$ વડે વિભાજ્ય છે.

➡ P(n) : $x^{2n} - y^{2n}$ એ $x + y$ વડે વિભાજ્ય છે, $n \in N$

(i) $n = 1$ માટે,

$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$ જે $(x + y)$ વડે વિભાજ્ય છે.

$\therefore$ P(1) સત્ય છે.

(ii) ધારો કે, P(k), $k \in N$ માટે સત્ય છે.

P(k) : $x^{2k} - y^{2k}$ એ $x + y$ વડે વિભાજ્ય છે.

$\therefore$ $x^{2k} - y^{2k} = m(x + y)$, $(m \in N)$........(1)

(iii) $n = k + 1$ માટે,

ડા.બા. $= x^{2(k+1)} - y^{2(k+1)}$

$= x^{2k+2} - y^{2k+2}$

$= x^{2k} \cdot x^2 - y^{2k} \cdot y^2$

$= [m(x + y) + y^{2k}]\, x^2 - y^{2k}\, y^2$ ($\because$ (1) પરથી $x^{2k} = m(x+y) \cdot y^{2k}$)

$= m(x + y)x^2 + y^{2k} \cdot x^2 - y^{2k} \cdot y^2$

$= m(x + y)x^2 + y^{2k}\,(x^2 - y^2)$

$= m(x + y)x^2 + y^{2k}\,(x - y)(x + y)$

$= (x + y)\,(mx^2 + y^{2k}\,(x - y))$

જે $(x + y)$ વડે વિભાજ્ય છે.

$\therefore$ P(k + 1) સત્ય છે.

$\therefore$ P(k) સત્ય છે. $\Rightarrow$ P(k + 1) સત્ય છે.

$\therefore$ ગાણિતીય અનુમાનનાં સિદ્ધાંત પ્રમાણે પ્રત્યેક $n \in N$ માટે P(n) સત્ય છે.

19. $n \in N$ માટે ગાણિતિક અનુમાનના સિદ્ધાંતનો ઉપયોગ કરી વિધાન સાબિત કરો :

$$\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \ldots\ldots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{n}{3n+1}$$

➡ P(n) : $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \ldots\ldots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{n}{3n+1}$, $n \in N$

(i) $n = 1$ માટે,

ડા.બા. $= \frac{1}{1 \cdot 4}$ $= \frac{1}{4}$ | જ.બા. $= \frac{1}{3+1}$ $= \frac{1}{4}$

$\therefore$ ડા.બા. = જ.બા.

$\therefore$ P(1) સત્ય છે.

(ii) ધારો કે, $P(k)$, $k \in N$ માટે સત્ય છે.

$$\therefore P(k) = \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \ldots\ldots - \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \frac{k}{3k+1} \quad \ldots\ldots(1)$$

(iii) $n = k + 1$ માટે,

ડા.બા. $$= \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \ldots\ldots + \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} + \frac{1}{(3(k+1)-2)(3(k+1)+1)} \ldots\ldots(1)$$

$$= \frac{k}{3k+1} + \frac{1}{(3k+1)(3k+4)} \quad (\because (1) \text{ પરથી})$$

$$= \frac{k(3k+4)+1}{(3k+1)(3k+4)}$$

$$= \frac{3k^2+4k+1}{(3k+1)(3k+4)}$$

$$= \frac{(3k+1)(k+1)}{(3k+1)(3k+4)}$$

$$= \frac{k+1}{3k+4}$$

= જ.બા.

$\therefore$ $P(k+1)$ સત્ય છે.

$\therefore$ $P(k)$ સત્ય છે. $\Rightarrow$ $P(k+1)$ સત્ય છે.

$\therefore$ ગાણિતીય અનુમાનનાં સિદ્ધાંત પરથી પ્રત્યેક $n \in N$ માટે $P(n)$ સત્ય છે.

20. **$n \in N$ માટે ગાણિતિક અનુમાનના સિદ્ધાંતનો ઉપયોગ કરી વિધાન સાબિત કરો : $3^{2n+2} - 8n - 9$ એ 8 વડે વિભાજ્ય છે.**

➥ $P(n)$: $3^{2n+2} - 8n - 9$ એ 8 વડે વિભાજ્ય છે, $n \in N$

(i) $n = 1$ માટે,

$3^{2+2} - 8(1) - 9 = 3^4 - 8 - 9$

$= 81 - 17$

$= 64$ જે 8 વડે વિભાજ્ય છે.

$\therefore$ P(1) સત્ય છે.

(ii) ધારો કે, $P(k)$, $k \in N$ માટે સત્ય છે.

$P(k)$: $3^{2k+2} - 8k - 9$ એ 8 વડે વિભાજ્ય છે.

$\therefore$ $3^{2k+2} - 8k - 9 = 8m, \quad m \in N$

$\therefore$ $3^{2k+2} = 8m + 8k + 9 \quad \ldots\ldots\ldots(1)$

(iii) $n = k + 1$ માટે,

$3^{2(k+1)+2} - 8(k+1) - 9$

$= 3^{2k+2} \cdot 3^2 - 8k - 8 - 9$

$= (8m + 8k + 9)\, 9 - 8k - 17$ ($\because$ (1) પરથી)

$= 8 \times 9m + 72k + 81 - 8k - 17$

$= 8 \times 9m + 64k + 64$

$= 8\ (9m + 8k + 8)$ જે 8 વડે વિભાજ્ય છે.

$\therefore$ $P(k + 1)$ સત્ય છે.

$\therefore$ $P(k)$ સત્ય છે. $\Rightarrow P(k + 1)$ સત્ય છે.

$\therefore$ ગાણિતીય અનુમાનનાં સિદ્ધાંત પ્રમાણે પ્રત્યેક $n \in N$ માટે $P(n)$ સત્ય છે.

21. **$n \in N$ માટે ગાણિતિક અનુમાનના સિદ્ધાંતનો ઉપયોગ કરી વિધાન સાબિત કરો :**

$$\frac{1}{3\cdot5} + \frac{1}{5\cdot7} + \frac{1}{7\cdot9} + \ldots\ldots + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n}{3(2n+3)}$$

➥ $P(n) : \frac{1}{3\cdot5} + \frac{1}{5\cdot7} + \frac{1}{7\cdot9} + \ldots\ldots + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n}{3(2n+3)},\ n \in N$

(i) $n = 1$ માટે,

ડા.બા. $= \frac{1}{3\cdot5} = \frac{1}{15}$

જ.બા. $= \frac{1}{3(2+3)} = \frac{1}{15}$

$\therefore$ ડા.બા. = જ.બા.

$\therefore$ $P(1)$ સત્ય છે.

(ii) ધારો કે, $P(k)$, $k \in N$ માટે સત્ય છે.

$\therefore$ $P(k) = \frac{1}{3\cdot5} + \frac{1}{5\cdot7} + \frac{1}{7\cdot9} + \ldots\ldots + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{k}{3(2k+3)}$ .....(1)

(iii) $n = k + 1$ માટે,

ડા.બા. $= \frac{1}{3\cdot5} + \frac{1}{5\cdot7} + \frac{1}{7\cdot9} + \ldots\ldots + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} + \frac{1}{\left(2(k+1)+1\right)\left(2(k+1)+3\right)}$ ($\because$ 1 પરથી)

$$= \frac{k}{3(2k+3)} + \frac{1}{(2k+3)(2k+5)}$$

$$= \frac{k(2k+5)+3}{3(2k+3)(2k+5)}$$

$$= \frac{2k^2+5k+3}{3(2k+3)(2k+5)}$$

$$= \frac{(2k+3)(k+1)}{3(2k+3)(2k+5)}$$

$$= \frac{(k+1)}{3(2k+5)}$$

= જ.બા.

$\therefore$ $P(k + 1)$ સત્ય છે.

$\therefore$ $P(k)$ સત્ય છે. $\Rightarrow P(k + 1)$ સત્ય છે.

$\therefore$ ગાણિતીય અનુમાનનાં સિદ્ધાંત પરથી પ્રત્યેક $n \in N$ માટે $P(n)$ સત્ય છે.

22. **$n \in N$ માટે ગાણિતિક અનુમાનના સિદ્ધાંતોનો ઉપયોગ કરી નીચેનાં વિધાનો સાબિત કરો :**

$$a + (a + d) + (a + 2d) + \ldots\ldots + (a + (n-1)d) = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

➥ **જાતે ગણો**

23. **$n \in N$ માટે ગાણિતિક અનુમાનના સિદ્ધાંતનો ઉપયોગ કરી વિધાન સાબિત કરો :**

$$1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + n < \frac{1}{8}(2n+1)^2$$

➥ $P(n) : 1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + n < \frac{1}{8}(2n+1)^2,\ n \in N$

(i) $n = 1$ માટે,

ડા.બા. $= 1$ જ.બા. $= \frac{1}{8}(2+1)^2 = \frac{9}{8}$

$\therefore 1 < \frac{9}{8}$ જે સત્ય છે.

$\therefore$ P(1) સત્ય છે.

(ii) ધારો કે, $P(k)$, $k \in N$ માટે સત્ય છે.

$P(k) : 1 + 2 + 3 + ... + k < \frac{1}{8}(2k+1)^2$ ......(1)

(iii) $n = k + 1$ માટે,

$$\begin{aligned}
\text{ડા.બા.} &= 1 + 2 + 3 + ... k + (k+1) \\
&< \frac{1}{8}(2k+1)^2 + (k+1) \quad (\because (1) \text{ પરથી}) \\
&= \frac{1}{8}\left[(2k+1)^2 + 8(k+1)\right] \\
&= \frac{1}{8}\left[4k^2 + 4k + 1 + 8k + 8\right] \\
&= \frac{1}{8}\left[4k^2 + 12k + 9\right] \\
&= \frac{1}{8}(2k^2 + 3)^2 \\
&= \frac{1}{8}\left[2(k+1) + 1\right]^2
\end{aligned}$$

$\therefore 1 + 2 + 3 + ... + k + (k+1) < \frac{1}{8}\left[2(k+1)+1\right]^2$

$\therefore P(k+1)$ સત્ય છે.

$\therefore P(k)$ સત્ય છે. $\Rightarrow P(k+1)$ સત્ય છે.

$\therefore$ ગાણિતીય અનુમાનનાં સિદ્ધાંત પરથી પ્રત્યેક $n \in N$ માટે $P(n)$ સત્ય છે.

24. $n \in N$ માટે ગાણિતિક અનુમાનના સિદ્ધાંતનો ઉપયોગ કરી વિધાન સાબિત કરો : $(2n + 7) < (n + 3)^2$

➥ $P(n) : (2n + 7) < (n + 3)^2$

(i) $n = 1$ માટે,

$(2 + 7) = 9 < (1 + 3)^2$

$\therefore 9 < 16$ જે સત્ય છે.

$\therefore$ P(1) સત્ય છે.

(ii) ધારો કે, $P(k)$, $k \in N$ માટે સત્ય છે.

$(2k + 7) < (k + 3)^2$ ....(1)

(iii) હવે પરિણામ (1) પરથી,

$(2k + 7) < (k + 3)^2$

$\therefore (2k + 7) + 2 < (k + 3)^2 + 2$ ($\because$ બંને બાજુ 2 ઉમેરતાં)

$\therefore 2(k + 1) + 7 < k^2 + 6k + 11 < k^2 + 8k + 16$

$\therefore 2(k + 1) + 7 < (k + 4)^2$

$\therefore 2(k + 1) + 7 < ((k + 1) + 3)^2$

$\therefore P(k + 1)$ સત્ય છે.

$\therefore P(k)$ સત્ય છે. $\Rightarrow P(k + 1)$ સત્ય છે.

$\therefore$ ગાણિતીય અનુમાનનાં સિદ્ધાંત પ્રમાણે પ્રત્યેક $n \in N$ માટે $P(n)$ સત્ય છે.

25. **$n \in N$ માટે ગાણિતિક અનુમાનના સિદ્ધાંતનો ઉપયોગ કરી વિધાન સાબિત કરો : $41^n - 14^n$ એ 27 નો ગુણિત છે.**

➡ $P(n)$: $41^n - 14^n$ એ 27 નો ગુણિત છે, $n \in N$

(i) $n = 1$ માટે,

$41 - 14 = 27$ જે 27 નો ગુણિત છે.

$\therefore$ P(1) સત્ય છે.

(ii) ધારો કે, $P(k)$, $k \in N$ માટે સત્ય છે.

$P(k)$: $41^k - 14^k$ એ 27 નો ગુણિત છે.

$\therefore 41^k - 14^k = 27\lambda$, જ્યાં $\lambda \in N$

$\therefore 41^k = 27\lambda + 14^k$ ....(1)

(iii) $n = k + 1$ માટે,

$$\begin{aligned} 41^{k+1} - 14^{k+1} &= 41^k \cdot 41 - 14^{k+1} \\ &= (27\lambda + 14^k) \cdot 41 - 14^{k+1} \\ &= 27\lambda \times 41 + 14^k \cdot 41 - 14^{k+1} \\ &= 27\lambda \times 41 + 14^k (41 - 14) \\ &= 27\lambda \times 41 - 14^k \cdot 27 \\ &= 27 (41\lambda - 14^k) \end{aligned}$$

જે 27 વડે વિભાજ્ય છે.

$\therefore P(k + 1)$ સત્ય છે.

$\therefore P(k)$ સત્ય છે. $\Rightarrow P(k + 1)$ સત્ય છે.

$\therefore$ ગાણિતીય અનુમાનનાં સિદ્ધાંત પ્રમાણે પ્રત્યેક $n \in N$ માટે $P(n)$ સત્ય છે.

26. **$n \in N$ માટે ગાણિતિક અનુમાનના સિદ્ધાંતોનો ઉપયોગ કરી નીચેનાં વિધાનો સાબિત કરો :**

$$\sqrt{n} \le \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots\dots\dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

➡ **જાતે ગણો**

27. **$n \in N$ માટે ગાણિતિક અનુમાનના સિદ્ધાંતોનો ઉપયોગ કરી નીચેનાં વિધાનો સાબિત કરો :**

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots\dots\dots + \frac{1}{n^2} < 2 - \frac{1}{n},\ n \ge 2$$

➡ **જાતે ગણો**

28. **$n \in N$ માટે ગાણિતિક અનુમાનના સિદ્ધાંતોનો ઉપયોગ કરી નીચેનાં વિધાનો સાબિત કરો :**

$11^{n+2} + 12^{2n+1}$ એ 133 વડે વિભાજ્ય છે.

➡ **જાતે ગણો**

29. **$n \in N$ માટે ગાણિતિક અનુમાનના સિદ્ધાંતોનો ઉપયોગ કરી નીચેનાં વિધાનો સાબિત કરો :**

$n(n + 1)(2n + 1)$ એ 6 વડે વિભાજ્ય છે.

➡ **જાતે ગણો**

30. **$n \in N$ માટે ગાણિતિક અનુમાનના સિદ્ધાંતોનો ઉપયોગ કરી નીચેનાં વિધાનો સાબિત કરો :**

$7^n - 3^n$ એ 4 વડે વિભાજ્ય છે.

➡ **જાતે ગણો**

31. **$n \in N$ માટે ગાણિતિક અનુમાનના સિદ્ધાંતોનો ઉપયોગ કરી નીચેનાં વિધાનો સાબિત કરો :**

$2^{3n} - 1$ એ 7 વડે વિભાજ્ય છે.

➡ **જાતે ગણો**

32. **$n \in N$ માટે ગાણિતિક અનુમાનના સિદ્ધાંતોનો ઉપયોગ કરી નીચેનાં વિધાનો સાબિત કરો :**

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots\dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$$

➡ **જાતે ગણો**

33. **$n \in N$ માટે ગાણિતિક અનુમાનના સિદ્ધાંતોનો ઉપયોગ કરી નીચેનાં વિધાનો સાબિત કરો :**

$1 + 2 + 2^2 + \dots\dots\dots + 2^n = 2^{n+1} - 1.$

➥ **જાતે ગણો**

34. **$n \in N$ માટે ગાણિતિક અનુમાનના સિદ્ધાંતોનો ઉપયોગ કરી નીચેનાં વિધાનો સાબિત કરો :**

$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \dots\dots\dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$ જ્યાં $n \geq 2.$

➥ **જાતે ગણો**

35. **$n \in N$ માટે ગાણિતિક અનુમાનના સિદ્ધાંતોનો ઉપયોગ કરી નીચેનાં વિધાનો સાબિત કરો :**

3^{2n} ને 8 વડે ભાગતાં શેષ 1 રહે છે.

➥ **જાતે ગણો**

36. **$n \in N$ માટે ગાણિતિક અનુમાનના સિદ્ધાંતોનો ઉપયોગ કરી નીચેનાં વિધાનો સાબિત કરો :**

$(2n + 1) < 2^n,\ n \geq 3$

➥ **જાતે ગણો**

37. **$n \in N$ માટે ગાણિતિક અનુમાનના સિદ્ધાંતોનો ઉપયોગ કરી નીચેનાં વિધાનો સાબિત કરો :** $3^n > 2^n$

➥ **જાતે ગણો**

38. **$n \in N$ માટે ગાણિતિક અનુમાનના સિદ્ધાંતોનો ઉપયોગ કરી નીચેનાં વિધાનો સાબિત કરો :**

$10^n + 3.4^{n+2} + 5$ એ 9 વડે વિભાજ્ય છે.

➥ **જાતે ગણો**

39. **$n \in N$ માટે ગાણિતિક અનુમાનના સિદ્ધાંતોનો ઉપયોગ કરી નીચેનાં વિધાનો સાબિત કરો :**

$3 \times 6 + 6 \times 9 + 9 \times 12 + \dots\dots + (3n)(3n + 3) = 3n\ (n + 1)(n + 2)$

➥ **જાતે ગણો**

40. **$n \in N$ માટે ગાણિતિક અનુમાનના સિદ્ધાંતોનો ઉપયોગ કરી નીચેનાં વિધાનો સાબિત કરો :**

ત્રણ ક્રમિક પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનાં ઘનનો સરવાળો 9 વડે વિભાજ્ય છે.

➥ **જાતે ગણો**

41. **$n \in N$ માટે ગાણિતિક અનુમાનના સિદ્ધાંતોનો ઉપયોગ કરી નીચેનાં વિધાનો સાબિત કરો :**

$(1 + x)^n \geq (1 + nx)$

➥ **જાતે ગણો**

42. **$n \in N$ માટે ગાણિતિક અનુમાનના સિદ્ધાંતોનો ઉપયોગ કરી નીચેનાં વિધાનો સાબિત કરો :**

$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots\dots\frac{1}{n} > \frac{13}{24}, n > 1$

➥ **જાતે ગણો**

43. **$n \in N$ માટે ગાણિતિક અનુમાનના સિદ્ધાંતોનો ઉપયોગ કરી નીચેનાં વિધાનો સાબિત કરો :**

$2.7^n + 3.5^n - 5$ એ 24 વડે વિભાજ્ય છે.

➥ **જાતે ગણો**

44. **$n \in N$ માટે ગાણિતિક અનુમાનના સિદ્ધાંતોનો ઉપયોગ કરી નીચેનાં વિધાનો સાબિત કરો :**

$4 + 8 + 12 + \dots\dots\dots\dots + 4n = 2n\ (n + 1).$

➥ **જાતે ગણો**