Q4Z2P8

അധ്യായം 6

രേഖീയ അസമതകൾ
(LINEAR INEQUALITIES)

❖*പല കാര്യങ്ങൾ പല രീതിയിൽ പറയുന്ന കലയാണ് ഗണിതം – മാക്സ്‌വെൽ* ❖

6.1 ആമുഖം

ഒരു ചരമുള്ളതും, രണ്ടു ചരങ്ങളുള്ളതുമായ സമവാക്യങ്ങളെക്കുറിച്ച് മുൻ ക്ലാസുകളിൽ പഠിച്ചിട്ടുണ്ട്. പ്രസ്താവനാരീതിയിലുള്ള ധാരാളം പ്രശ്നങ്ങളെ സമവാക്യരൂപത്തിലാക്കി പരിഹാരവും കാണാനറിയാം. പ്രസ്താവനാരൂപത്തിലുള്ള എല്ലാ പ്രശ്നങ്ങളെയും സമവാക്യരൂപത്തിൽ എഴുതുവാൻ കഴിയുമോ? നിങ്ങളുടെ ക്ലാസിൽ ഉൾക്കൊള്ളാൻ കഴിയുന്ന പരമാവധി കസേരകളുടേയോ, മേശകളുടേയോ അഥവാ രണ്ടിന്റെയുമോ എണ്ണം 60 ആണെങ്കിൽ അതിനെ സമവാക്യരൂപത്തിൽ എഴുതുവാൻ സാധിക്കുമോ? ഈ ചോദ്യങ്ങൾക്ക് പരിഹാരമായി $<, >, \leq, \geq$ എന്നീ ചിഹ്നങ്ങൾ ഉൾപ്പെടുന്ന പ്രസ്താവനകൾ വേണ്ടിവരും. ഈ പ്രസ്താവനകളെ അസമതകൾ എന്നു വിളിക്കുന്നു. ഈ അധ്യായത്തിൽ ഒരു ചരമുള്ളതും, രണ്ടുചരങ്ങളുള്ളതുമായ രേഖീയ അസമതകളെക്കുറിച്ചാണ് പഠിക്കുന്നത്. ഗണിതശാസ്ത്രം, ധനതത്വശാസ്ത്രം, മനശാസ്ത്രം എന്നീ മേഖലകളിലെ പ്രശ്ന പരിഹാരത്തിന് അസമതകൾ ഏറെ സഹായിക്കുന്നു.

6.2 അസമതകൾ (Inequalities)

ചുവടെ പറയുന്ന സാഹചര്യങ്ങൾ പരിഗണിക്കുക

i) 1 കി.ഗ്രാം വീതം അരി പാക്കറ്റുകളിലാക്കി വച്ചിരിക്കുന്ന ഒരു കടയിൽ 200 രൂപയുമായി രവി അരി വാങ്ങാനെത്തി. ഒരു കിലോ അരിയുടെ വില 30 രൂപയാണ്. രവി x പാക്കറ്റ് അരി വാങ്ങിയെങ്കിൽ അതിനായി ചെലവഴിച്ച തുക $30x$ ആകുന്നു. അരി 1 കി.ഗ്രാം പാക്കറ്റുകളിൽ മാത്രം ലഭ്യമാകുന്ന കടയായതിനാൽ 200 രൂപ മുഴുവനായും അയാൾക്ക് ചെലവഴിക്കാൻ പറ്റിയില്ല (എന്തുകൊണ്ട്?)

അതുകൊണ്ട് $30x < 200$ ... (1)

(1) ഒരു അസമതയാണ്, കാരണം അതിൽ ' $<$ ' എന്ന ചിഹ്നം ഉപയോഗിച്ചിരിക്കുന്നു.

ii) പുസ്തകങ്ങളും പേനയും വാങ്ങാൻ രേഷ്മയുടെ കൈവശം 120 രൂപയുണ്ട്. ഒരു പുസ്തകത്തിന് 40 രൂപയും ഒരു പേനയക്ക് 20 രൂപയും വിലയുണ്ട്. രേഷ്മ x പുസ്തകങ്ങളും y പേനകളും വാങ്ങിയെങ്കിൽ ആകെ ചെലവായ തുക $40x \quad 20y$

അങ്ങനെയെങ്കിൽ, $40x \quad 20y \leq 120$ ...... (2)

അതായത്, ഒന്നുകിൽ $40x + 20y < 120$ ...... (3)

അല്ലെങ്കിൽ $40x \mid 20y - 120$ .... (4)

(3) സമവാക്യമല്ല അസമതയാണ്, പക്ഷേ (4) സമവാക്യമാണ്.

നിർവചനം 1

രണ്ടു രേഖീയസംഖ്യകളേയോ, ബീജഗണിത വാക്യങ്ങളേയോ $<, >, \leq, \geq$ എന്നീ ചിഹ്നങ്ങളുപയോഗിച്ച് ബന്ധപ്പെടുത്തിയാൽ ഒരു അസമത രൂപപ്പെടുന്നു. പ്രസ്താവനകൾ

(1), (2), (3) എന്നിവ അസമതകളാണ്.

$3 < 5$; $7 > 5$ എന്നിവ സംഖ്യകൾ മാത്രം ഉൾപ്പെടുന്ന അസമതകളും

$x < 5$; $y > 2$; $x \geq 3$, $y \leq 4$ എന്നിവ ചരങ്ങൾ ഉൾപ്പെടുന്ന അസമതകളുമാണ്.

$3 < 5 < 7$, $3 \leq x < 5$ എന്നിവ ഇരട്ട അസമതകൾക്ക് ഉദാഹരണമാണ്.

ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന അസമതകൾ പരിശോധിക്കാം.

$ax \quad b < 0$ ... (5)

$ax \quad b > 0$ ... (6)

$ax \mid b \leq 0$ ... (7)

$ax + b \geq 0$ ... (8)

$ax - by < c$ ... (9)

$ax - by > c$ ... (10)

$ax - by \leq c$ ... (11)

$ax + by \geq c$ ... (12)

$ax^2 + bx - c \leq 0$ ... (13)

$ax^2 \mid bx \mid c > 0$ ... (14)

(5), (6), (9), (10), (14) എന്നിവയെ കർശന അസമതകളെന്നും (7), 8), (11), (12), (13) എന്നിവയെ സ്ലാക് അസമതകളെന്നും പറയുന്നു. (5) മുതൽ (8) വരെയുള്ളവ ഒരു ചരമുള്ള രേഖീയ അസമതകളാണ് ($a \neq 0$). എന്നാൽ (9) മുതൽ (12) വരെയുള്ളവ രണ്ട് ചരങ്ങളുള്ള രേഖീയ അസമതകളാണ് ($a \neq 0$, $b \neq 0$)

(13), (14) എന്നിവ രേഖീയ അസമതകൾ അല്ല, ഒരു ചരമുള്ള ദ്വിമാന അസമതകളാണ് ($a \neq 0$)

ഈ അധ്യായത്തിൽ ഒരു ചരങ്ങളുള്ളതും രണ്ടു ചരങ്ങളുള്ളതുമായ രേഖീയ അസമതകളെക്കുറിച്ച് ചർച്ച ചെയ്യാം.

6.3 ഒരു ചരമുള്ള രേഖീയ അസമതകളുടെ ബീജഗണിത പരിഹാരവും അവയുടെ ഗ്രാഫുകളും

6.2 ലെ ഉദാഹരണം (1) പരിഗണിക്കുക. $30x < 200$. x എന്നത് അരി പാക്കറ്റുകളുടെ എണ്ണമാണ്. അതുകൊണ്ട് x ഒരു ന്യൂനസംഖ്യയോ, ഭിന്നസംഖ്യയോ ആകുവാൻ കഴിയില്ല. ഈ അസമതയുടെ ഇടതുവശം $30x$, വലതുവശം 200 എന്നിവ ആണ്.

അസമതയിൽ x എന്ന ചരത്തിന് 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 എന്നീ വിലകൾ ആരോപിക്കുമ്പോൾ, അസമതയുടെ ഇടതുവശത്തിന്റെ വില യഥാക്രമം 0, 30, 60, 90, 120, 150, 180, 210 എന്നിവയാണ്. ഇതിൽ x ന്റെ വില 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 ആകുമ്പോൾ അസമത സത്യമാകുന്നു (ശരിയാകുന്നു). പക്ഷേ $x = 7$ ആകുമ്പോൾ അസമത അസത്യമാകുന്നു (തെറ്റാകുന്നു).

അസമത സത്യപ്രസ്താവനകളാകുന്ന x ന്റെ വിലകളാണ് ഈ അസമതയുടെ പരിഹാരം. അതുകൊണ്ട്, {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6} ഈ അസമതയുടെ പരിഹാരഗണമാകുന്നു.

അസമത ശരിയാകുന്ന x ന്റെ വിലകളാണ് 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. അസമത സത്യപ്രസ്താവനകളാകുന്ന x ന്റെ വിലകളാണ് ഈ അസമതയുടെ പരിഹാരം.

അതായത് "ഒരു ചരം മാത്രമുള്ള രേഖീയ അസമതയുടെ പരിഹാരം ആ അസമത സത്യപ്രസ്താവന ആകുന്ന ചരത്തിന്റെ വിലകളാണ്.

മുകളിൽ ചർച്ച ചെയ്ത രീതിയിൽ പരിഹാരം കണ്ടെത്തുന്നത് വളരെ സമയമെടുക്കുന്നതും, ചില സന്ദർഭങ്ങളിൽ കൃത്യത ഉറപ്പാക്കാൻ കഴിയാത്തതുമായതിനാൽ രേഖീയ അസമതയുടെ പരിഹാരം കാണുവാൻ മറ്റു മാർഗങ്ങൾ കൂടി പരിഗണിക്കേണ്ടതുണ്ട്. ഒരു അസമതയുടെ പരിഹാരം കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിന് ചുവടെ നല്കിയിരിക്കുന്ന ചില വസ്തുതകൾ അറിയേണ്ടതുണ്ട്.

1. ഒരു അസമതയുടെ ഇരുവശങ്ങളോടും ഒരേ സംഖ്യ കൂട്ടുകയോ, ഇരുവശങ്ങ

ളിൽ നിന്നും ഒരേ സംഖ്യ കുറയ്ക്കുകയോ ചെയ്താൽ അസമതയ്ക്കു മാറ്റം ഉണ്ടാകില്ല.

2. ഒരു അധിസംഖ്യകൊണ്ട് ഇരുവശങ്ങളിലും ഗുണിച്ചാലും ഹരിച്ചാലും അസമതക്കു മാറ്റമുണ്ടാകുകയില്ല.

3. ഒരു ന്യൂനസംഖ്യകൊണ്ട് ഗുണിക്കുയോ ഹരിക്കുകയോ ചെയ്താൽ അസമത വിപരീതമാകുന്നു.

ഉദാഹരണം : 1

$30\,x < 200$ എന്ന അസമതയുടെ പരിഹാരം കാണുക.

i) x ഒരു എണ്ണൽസംഖ്യ

ii) x ഒരു പൂർണസംഖ്യ,

പരിഹാരം

$30\,x < 200$

$$\frac{30x}{30} < \frac{200}{30} \quad \text{(നിയമം 2)}$$

അതായത്, $x < \dfrac{20}{3}$ ആണ്

(i) x ഒരു എണ്ണൽസംഖ്യയായാൽ 1, 2, 3, 4, 5, 6 എന്നീ വിലകൾക്ക് അസമത സത്യപ്രസ്താവനയാകുന്നു.

ആയതിനാൽ, {1, 2, 3, 4, 5, 6} പരിഹാരഗണമാകുന്നു.

(ii) x ഒരു പൂർണസംഖ്യയായാൽ പരിഹാരങ്ങൾ

.... –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 ആയതിനാൽ

പരിഹാരഗണം {.... –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6}

ഉദാഹരണം : 2

ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന സന്ദർഭങ്ങളിൽ $5x - 3 < 3x + 1$ എന്ന അസമതയുടെ പരിഹാരം കാണുക.

(i) x ഒരു പൂർണസംഖ്യ,

(ii) x ഒരു രേഖീയസംഖ്യ,

പരിഹാരം

$5x - 3 + 3 < 3x + 1 + 3$ (നിയമം -1)

$\Rightarrow 5x < 3x + 4$

$\Rightarrow 5x - 3x < 3x + 4 - 3x$ (നിയമം -1)

$\Rightarrow 2x < 4$

$\Rightarrow x < 2$ (നിയമം -2)

(i) x ഒരു പൂർണസംഖ്യയായാൽ പരിഹാരഗണം $\{\ldots\ldots\ldots\ldots -4, -3, -2, -1, 0, 1\}$ ആണ്.

(ii) x ഒരു രേഖീയ സംഖ്യയാകുമ്പോൾ പരിഹാരം $(-\infty, 2)$ എന്ന ഇടവേളയായിരിക്കും.

> **കുറിപ്പ്**
>
> പരിഹാരം കാണേണ്ട അസമതയിൽ ചരങ്ങൾ ഉൾപ്പെടുന്ന ഗണം പറഞ്ഞിട്ടില്ലെങ്കിൽ, രേഖീയസംഖ്യാഗണമായി പരിഗണിക്കണം.

ഉദാഹരണം : 3

$4x + 3 < 6x + 7$ എന്ന അസമതയുടെ പരിഹാരം കാണുക.

പരിഹാരം

$$4x + 3 < 6x + 7$$

$$\Rightarrow 4x + 3 - 3 < 6x + 7 - 3$$

$$\Rightarrow 4x < 6x + 4$$

$$\Rightarrow 4x - 6x < 6x + 4 - 6x$$

$$\Rightarrow -2x < 4$$

$$\Rightarrow x > -2 \quad \text{(നിയമം -3)}$$

പരിഹാരഗണം: $(-2, \infty)$

ഉദാഹരണം : 4

$\frac{5 \quad 2x}{3} \le \frac{x}{6} \quad 5$ എന്ന അസമതയുടെ പരിഹാരം കാണുക.

പരിഹാരം

$$\frac{5 \quad 2x}{3} \le \frac{x}{6} \quad 5$$

$$\Rightarrow 2(5 - 2x) \le x - 30$$

$$\Rightarrow 10 - 4x \le x - 30$$

$$\Rightarrow 10 - 4x - 10 \le x - 30 - 10$$

$$\Rightarrow -4x \le x - 40$$
$$\Rightarrow -5x \le -40$$

അതായത് $x \geq 8$

പരിഹാരഗണം: $x \in [8, \infty)$

ഉദാഹരണം : 5

$7x + 3 < 5x + 9$ എന്ന അസമതയുടെ പരിഹാരം കാണുക. കൂടാതെ പരിഹാരം സംഖ്യാരേഖയിൽ അടയാളപ്പെടുത്തുക.

പരിഹാരം

$$7x + 3 < 5x + 9$$
$$\Rightarrow 7x + 3 - 3 < 5x + 9 - 3$$
$$\Rightarrow 7x < 5x + 6$$
$$\Rightarrow 7x - 5x < 6$$
$$\Rightarrow 2x < 6$$

അല്ലെങ്കിൽ $x < 3$

പരിഹാരം ഗ്രാഫ് രൂപത്തിൽ

ചിത്രം 6.1

ഉദാഹരണം : 6

$\frac{3x-4}{2} \ge \frac{x+1}{4} - 1$ ന്റെ പരിഹാരം കാണുക. പരിഹാരം സംഖ്യാരേഖയിൽ അടയാളപ്പെടുത്തുക

പരിഹാരം

$$\frac{3x-4}{2} \ge \frac{x+1}{4} - 1$$
$$\Rightarrow \frac{3x-4}{2} \ge \frac{x-3}{4}$$
$$\Rightarrow 2(3x-4) \ge (x-3)$$
$$\Rightarrow 6x - 8 \ge x - 3$$
$$\Rightarrow 5x \ge 5,$$
$$\Rightarrow x \ge 1$$

പരിഹാരം ഗ്രാഫ് രൂപത്തിൽ;

ചിത്രം 6.2

ഉദാഹരണം : 7

ഒന്നും രണ്ടും പാദവാർഷിക പരീക്ഷയിൽ 11-ാം ക്ലാസിൽ പഠിക്കുന്ന ഒരു കുട്ടിക്ക് ലഭിച്ച മാർക്കുകൾ യഥാക്രമം 62, 48 എന്നിവയാണ്. ശരാശരി 60 മാർക്ക് ലഭിക്കാൻ വർഷാന്ത്യപരീക്ഷയിൽ കുട്ടിക്ക് കുറഞ്ഞത് എത്ര മാർക്ക് ലഭിക്കണം?

പരിഹാരം

വർഷാന്ത്യപരീക്ഷയിൽ ലഭിക്കേണ്ട മാർക്ക് x എന്നിരിക്കട്ടെ. അപ്പോൾ

$$\frac{62+48+x}{3} \geq 60$$

$$110 + x \geq 180$$

$$x \geq 70$$

ഏറ്റവും കുറഞ്ഞത് 70 മാർക്ക് വാങ്ങിയാൽ കുട്ടിക്ക് ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ ശരാശരി 60 മാർക്ക് ലഭിക്കും.

ഉദാഹരണം : 8

10 നേക്കാൾ വലുതും, എന്നാൽ തുക 40 നേക്കാൾ കുറവുമായ അടുത്തടുത്ത എല്ലാ ഒറ്റസംഖ്യകളുടേയും ജോടികൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

അടുത്തടുത്ത ഒറ്റസംഖ്യകളിൽ ചെറുത് x എന്നെടുത്താൽ വലുത് $x + 2$ ആകുമല്ലോ. അതുകൊണ്ട്

$$x + 2, x > 10 \qquad \ldots (1)$$

$$x + x + 2 < 40 \qquad \ldots (2)$$

(1), (2) എന്നിവ പരിഗണിച്ചാൽ $10 < x < 19$

x ഒറ്റസംഖ്യയായതുകൊണ്ട് x ന് സ്വീകരിക്കാവുന്ന വിലകൾ 11, 13, 15, 17 ആണ്. അതുകൊണ്ട് ലഭ്യമായ ജോടികൾ (11, 13) (13, 15) (15, 17) (17, 19)

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 6.1

1. $24x < 100$ ന്റെ പരിഹാരം ചുവടെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന സന്ദർഭങ്ങളിൽ കണ്ടുപിടിക്കുക.
   i) x ഒരു എണ്ണൽസംഖ്യയാകുമ്പോൾ
   ii) x ഒരു പൂർണ്ണസംഖ്യയാകുമ്പോൾ
2. $-12x > 30$ ന്റെ പരിഹാരം ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന സന്ദർഭങ്ങളിൽ കണ്ടെത്തുക.
   i) x ഒരു പൂർണ്ണസംഖ്യ.
   ii) x ഒരു രേഖീയസംഖ്യ.
3. $5x - 3 < 7$ ന്റെ പരിഹാരം ചുവടെ പറയുന്ന സന്ദർഭങ്ങളിൽ കണ്ടെത്തുക.
   i) x ഒരു എണ്ണൽസംഖ്യ.
   ii) x ഒരു പൂർണ്ണസംഖ്യ.

4. $3x - 8 > 2$ ന്റെ പരിഹാരം ചുവടെ പറയുന്ന സന്ദർഭങ്ങളിൽ കണ്ടെത്തുക.
   i) x ഒരു പൂർണസംഖ്യ.
   ii) x ഒരു രേഖീയസംഖ്യ.

ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന അസമതകൾക്കു പരിഹാരം നിർദേശിക്കുക.

5. $4x + 3 < 6x + 7$
6. $3x - 7 > 5x - 1$
7. $3(x - 1) \leq 2(x - 3)$
8. $3(2 - x) \geq 2(1 - x)$
9. $x + \frac{x}{2} + \frac{x}{3} < 11$
10. $\frac{x}{3} > \frac{x}{2} + 1$
11. $\frac{3(x-2)}{5} \leq \frac{5(2-x)}{3}$
12. $\frac{1}{2}\left(\frac{3x}{5} + 4\right) \geq \frac{1}{3}(x - 6)$
13. $2(2x + 3) - 10 < 6(x - 2)$
14. $37 - (3x + 5) \geq 9x - 8(x - 3)$
15. $\frac{x}{4} < \frac{(5x-2)}{3} - \frac{(7x-3)}{5}$
16. $\frac{(2x-1)}{3} \geq \frac{(3x-2)}{4} - \frac{(2-x)}{5}$

ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന അസമതകൾക്കു പരിഹാരം കണ്ടെത്തുക. പരിഹാരം സംഖ്യാരേഖയിൽ അടയാളപ്പെടുത്തുക.

17. $3x - 2 < 2x + 1$
18. $5x - 3 \geq 3x - 5$
19. $3(1 - x) < 2(x + 4)$
20. $\frac{x}{2} \geq \frac{(5x-2)}{3} - \frac{(7x-3)}{5}$
21. ആദ്യ രണ്ടു യൂണിറ്റ് ടെസ്റ്റുകളിൽ രവിക്ക് ലഭിച്ച മാർക്കുകൾ യഥാക്രമം 70, 75 ആണ്. ഏറ്റഴും കുറഞ്ഞ ശരാശരി 60 മാർക്ക് ലഭിക്കുവാൻ മൂന്നാം യൂണിറ്റ് ടെസ്റ്റിൽ രവിക്ക് ലഭിക്കേണ്ട കുറഞ്ഞ മാർക്കു കണ്ടെത്തുക.
22. ഒരു കോഴ്സിന് എ ഗ്രേഡ് ലഭിക്കുവാൻ 5 വിഷയങ്ങൾക്ക് ശരാശരി 90 അല്ലെങ്കിൽ അതിൽ കൂടുതൽ മാർക്ക് വാങ്ങണം. സുനിതക്ക് ആദ്യ 4 പരീക്ഷകളിൽ ലഭിച്ച മാർക്കുകൾ 87, 92, 94, 95 ആയാൽ എ ഗ്രേഡ് ലഭിക്കാൻ 5-ാം പരീക്ഷയിൽ ലഭിക്കേണ്ട കുറഞ്ഞ മാർക്ക് എത്രയെന്നു കണ്ടെത്തുക.
23. 10 നേക്കാൾ കുറവായ തുടർച്ചയായ രണ്ടു ഒറ്റസംഖ്യകളുടെ തുക 11 നേക്കാൾ കൂടുതലായാൽ സംഖ്യകൾ കാണുക.
24. 5 നെക്കാൾ കൂടുതലായ തുടർച്ചയായ രണ്ടു ഇരട്ടസംഖ്യകളുടെ തുക 23 ൽ കുറവവാണെങ്കിൽ സംഖ്യകൾ കണ്ടെത്തുക.
25. ഒരു ത്രികോണത്തിലെ ഏറ്റവും വലിയ വശം ഏറ്റവും ചെറിയ വശത്തിന്റെ 3 മടങ്ങാണ്; മൂന്നാം വശം ഏറ്റവും വലിയ വശത്തിനേക്കാൾ 2 സെ.മീ. കുറവും ആണ്. ത്രികോണത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് കുറഞ്ഞപക്ഷം 61 സെ.മീ. ആകാൻ ഏറ്റവും ചെറിയ വശത്തിന്റെ കുറഞ്ഞ നീളം കണ്ടെത്തുക.

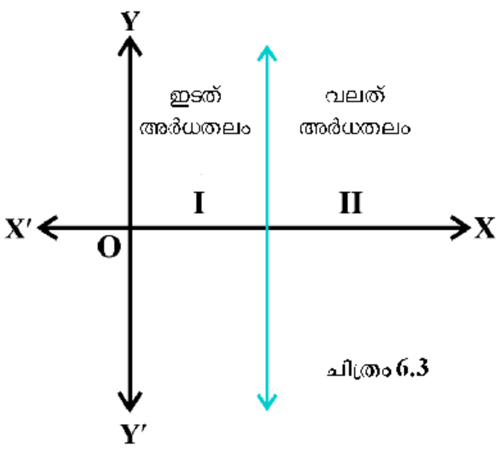
26. 91 സെ.മീ. നീളമുള്ള ഒരു പലകയെ ഒരാൾക്ക് 3 ഭാഗങ്ങൾ ആക്കണം. രണ്ടാം ഭാഗത്തിന്റെ നീളം ഏറ്റവും ചെറിയ ഭാഗത്തിന്റെ നീളത്തേക്കാൾ 3 സെ.മീ. കൂടുതലും, മൂന്നാം ഭാഗം നീളം കുറഞ്ഞ ഭാഗത്തിന്റെ ഇരട്ടിയുമാണ്. രണ്ടാം ഭാഗത്തിന്റെ നീളത്തേക്കാൾ ഏറ്റവും കുറഞ്ഞത് 5 സെ.മീ. കൂടുതലുമായാൽ ചെറിയ ഭാഗത്തിന്റെ സാധ്യമായ നീളം കണ്ടെത്തുക.

സൂചന : പലകയുടെ ഏറ്റവും ചെറിയ വശത്തിന്റെ നീളം x എന്ന് എടുത്താൽ $(x - 3)$, $2x$ എന്നിവ യഥാക്രമം രണ്ടും മൂന്നും പലകകളുടെ നീളമാകും. അങ്ങനെ എങ്കിൽ $x + (x - 3) + 2x \leq 91$; $2x \geq (x + 3) + 5$

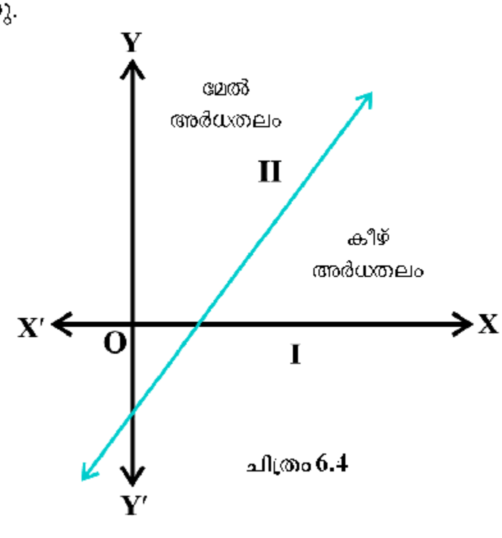
6.4 രണ്ടുചരങ്ങളുള്ള രേഖീയ അസമതകളുടെ ഗ്രാഫ് ഉപയോഗിച്ചുള്ള പരിഹാരം

ഒരു ചരമുള്ള അസമതയുടെ പരിഹാരവും അത് സംഖ്യാരേഖയിൽ അടയാളപ്പെടുത്തുന്നത് കുറേകൂടി സൗകര്യപ്രദവുമാണെന്ന് മനസിലാക്കി. ഇനി രണ്ട് ചരമുള്ള രേഖീയ അസമതയുടെ പരിഹാരവും അവയുടെ ഗ്രാഫും പരിചയപ്പെടാം. ഇവിടെ രണ്ട് ചരമുള്ളതുകൊണ്ട് കാർട്ടീഷ്യൻ തലത്തിലാണ് ഈ അസമതയുടെ പരിഹാരം അടയാളപ്പെടുത്തുന്നത്. രണ്ട് ചരമുള്ള സമവാക്യം കാർട്ടീഷ്യൻ തലത്തിൽ ഒരു വരയായാണ് സൂചിപ്പിക്കുന്നത് എന്ന് അറിയാം.

ഒരു രേഖ കാർട്ടീഷൻ തലത്തെ രണ്ടായി വിഭജിക്കും എന്നു നമുക്കറിയാം. ലഭിക്കുന്ന ഓരോ ഭാഗത്തേയും അർധതലം എന്നു വിളിക്കുന്നു. ഒരു ലംബരേഖ, തലത്തിനെ ഇടതും വലതുമായ രണ്ട് അർധധതലങ്ങളാക്കി വിഭജിക്കുന്നു. എന്നാൽ ലംബമല്ലാത്ത രേഖ, തലത്തിനെ മേൽഭാഗത്തും, കീഴ്ഭാഗത്തുമുള്ള രണ്ട് അർധതലങ്ങളായി വിഭജിക്കുന്നു. അതുകൊണ്ട് രണ്ട് ചരമുള്ള അസമതയുടെ പരിഹാരം ഇവയിൽ ഏതെങ്കിലും ഒരു അർധതലമായിരിക്കും പരിഹാരമായി വരുന്ന അർധതലത്തെ അവയുടെ പരിഹാരമേഖല എന്ന് പറയുന്നു.



ചിത്രം 6.3



ചിത്രം 6.4

കാർട്ടീഷ്യൻ തലത്തിലെ ഒരു ബിന്ദു പരിഗണിച്ചാൽ അത് ഒന്നുകിൽ ഒരു രേഖയിലോ അല്ലെങ്കിൽ 2 അർധതലങ്ങളിൽ ഏതെങ്കിലും ഒന്നിലോ ആയിരിക്കും.

$ax + by \le c$ (അല്ലെങ്കിൽ $ax + by \ge c$) എന്ന അസമതയുടെ പരിഹാരം കാർട്ടീഷ്യൻ തലത്തിൽ അടയാളപ്പെടുത്തുന്നത് മനസ്സിലാക്കാം. അദ്യം $ax + by = c$ എന്ന വര അടയാളപ്പെടുത്തുന്നു. മുൻപ് വിശദീകരിച്ചതുപോലെ ഈ വര കാർട്ടീഷ്യൻ തലത്തെ രണ്ട് അർധതലങ്ങളായി ഭാഗിക്കുന്നു. ഈ അർധതലങ്ങളിലെ ഏതെങ്കിലും ഒന്നിലെ ഒരു ബിന്ദു എടുത്തതിനു ശേഷം ഈ ബിന്ദുവിൽ തന്നിരിക്കുന്ന അസമത ശരിയാണോ എന്നു പരിശോധിക്കുന്നു. പരിശോധനയിൽ ശരിയാണെങ്കിൽ ബിന്ദു ഉൾപ്പെടുന്ന അർധതലം അസമതയുടെ പരിഹാരമേഖല ആകുകയും ആ ഭാഗം ഷേഡ് ചെയ്ത് പരിഹാരമേഖലയായി സൂചിപ്പിക്കുന്നു. ഇനി പരിശോധനയിൽ അസമത ശരിയാകുന്നില്ലെങ്കിൽ ബിന്ദു ഉൾപ്പെടാത്ത അർധതലം പരിഹാരമേഖലയാകുകയും അത് ഷെഡ് ചെയ്ത് സൂചിപ്പിക്കുകയും ചെയ്യുന്നു. ഇവിടെ വരയിലെ ബിന്ദുക്കളും പരിഹാരമേഖലയുടെ ഭാഗമാണ്.

$ax + by < c$ (അല്ലെങ്കിൽ $ax + by > c$) എന്ന അസമത പരിഗണിക്കുകയാണെങ്കിൽ വരയിലെ ബിന്ദുക്കൾ പരിഹാരമേഖലയുടെ ഭാഗമല്ലാത്തതുകൊണ്ട് വര ബിന്ദുക്കൾ ഉപയോഗിച്ചാണ് സൂചിപ്പിക്കുന്നത്.

കുറിപ്പ്

1. ഒരു രേഖീയ അസമതയുടെ പരിഹാരമായി വരുന്ന അർധതലത്തെ അസമതയുടെ പരിഹാരമേഖല എന്ന് പറയുന്നു.
2. പരിഹാരമേഖല കണ്ടെത്തുവാൻ വരയിലല്ലാത്ത ഒരു ബിന്ദു പരിഗണിക്കുകയും ആ ബിന്ദുവിൽ അസമത ശരിയാണോ എന്നു പരിശോധിക്കുകയും ചെയ്യുന്നു. ശരിയാണെങ്കിൽ ആ അർധതലം പരിഹാരമേഖലയാകും. ശരിയല്ലെങ്കിൽ ബിന്ദു ഉൾപ്പെടാത്ത അർധതലം പരിഹാരമേഖലയാകും.
3. $ax + by \le c$ (അല്ലെങ്കിൽ $ax + by \ge c$) എന്ന അസമതയാണ് വരുന്നതെങ്കിൽ വരയിലെ ബിന്ദുക്കളും പരിഹാരമേഖലയിലായതുകൊണ്ട് സ്പഷ്ടമായ വര കൊണ്ട് സൂചിപ്പിക്കുന്നു.
4. $ax + by < c$ (അല്ലെങ്കിൽ $ax + by > c$) എന്ന അസമതയാണ് വരുന്നതെങ്കിൽ വരയിലെ ബിന്ദുക്കൾ പരിഹാരമേഖലയിലല്ലാത്തതുകൊണ്ട് ഡോട്ടട് ബിന്ദുക്കൾ കൊണ്ടാണ് വരയെ സൂചിപ്പിക്കുന്നത്.

ഭാഗം 6.2 ൽ ലഭിച്ച രണ്ടു ചരങ്ങളുള്ള രേഖീയ സമവാക്യം പരിഗണിക്കുക.

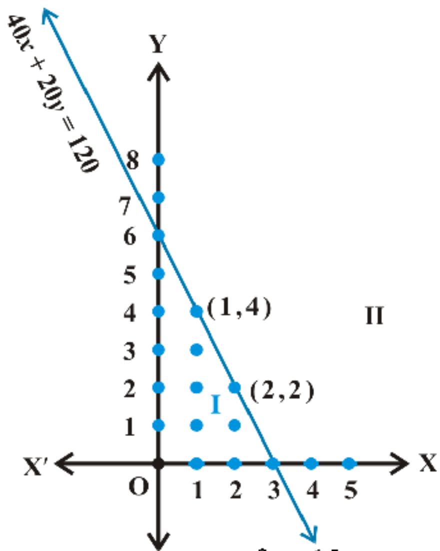
$$40x + 20y \leq 120 \ldots (1)$$

ഇവിടെ x എന്നത് രേഷ്മ വാങ്ങിയ പുസ്തകങ്ങളുടെയും, y പേനകളുടെയും എണ്ണമായിരുന്നു. x, y എന്നിവ എണ്ണത്തിനെ സൂചിപ്പിക്കുന്നതു കൊണ്ട് അതിന്റെ വിലകളായി അഖണ്ഡസംഖ്യ മാത്രമേ പരിഗണിക്കാൻ പറ്റുകയുള്ളൂ. അങ്ങനെ പരിഗണിക്കുമ്പോൾ പ്രസ്താവന

$x - 0$ എന്ന് സങ്കൽപിച്ചു തുടങ്ങിയാൽ (1) ന്റെ ഇടതുഭാഗം

$40x + 20y = 40 \Rightarrow (0) + 20y = 20y$. അതായത്
$20y \leq 120$ അല്ലെങ്കിൽ $y \leq 6$ (2)

$x - 0$ ആകുമ്പോൾ y ക്ക് ലഭിക്കാവുന്ന വിലകൾ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 മാത്രമാണ്. അപ്പോൾ 1 ന്റെ പരിഹാരഗണത്തിലെ അംഗങ്ങൾ (0, 0), (0, 1), (0,2), (0,3), (0,4), (0, 5), (0, 6) ആകുന്നു. ഇതുപോലെ x ന്റെ വില കൾ 1, 2, 3 എന്നിവയായാൽ (1) ന്റെ പരി ഹാരഗണത്തിൽ (1, 0), (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 0), (2, 1), (2, 2), (3, 0) എന്നിവ ഉണ്ടാവും. ഇതാണ് ചിത്രം 6.6 ൽ കൊടുത്തിരിക്കുന്നത്.

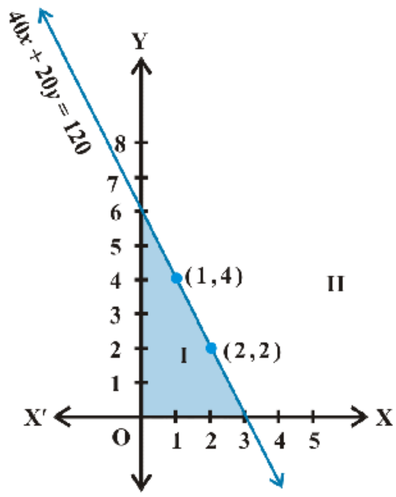


ചിത്രം 6.5

x, y എന്നിവയുടെ മണ്ഡലം അഖണ്ഡസംഖ്യയിൽ നിന്നും രേഖീയ സംഖ്യാഗണത്തിലേക്ക് ഉയർത്തിയാൽ (1) ന്റെ പരിഹാരം എന്താകും എന്നതിനെക്കുറിച്ച് ചിന്തിച്ചിട്ടുണ്ടോ? ഇവിടെ ഗ്രാഫ് ഉപയോഗിച്ചുള്ള പരിഹാരമാണ് ഉചിതമായിട്ടുള്ളത്.

അതിനായി $40x + 20y = 120$ ----------- (3) ന്റെ ഗ്രാഫ് വരയ്ക്കുക.

അസമത (1) ന്റെ ഗ്രാഫ് വരയ്ക്കാൻ 1-ാം അർധതലത്തിലെ (0, 0) എന്ന ബിന്ദു എടുക്കുക. x, y എന്നിവയുടെ വിലകളായി (0, 0) നൽകുക. (1) സത്യമാണോ അല്ലയോ എന്നു പരിശോധിക്കുക.



ചിത്രം 6.6

ഇവിടെ (1) സത്യമായതായി കാണാം. അതുകൊണ്ട് 1-ാം അർധതലമാണ് (1) ന്റെ ഗ്രാഫ് എന്നു പറയാം. വരയിൽ വന്ന ബിന്ദുക്കളും 1-ാമത്തെ അസമതയെ സ്വീകരിക്കുന്നതുകൊണ്ട് (3) എന്ന വരയും ഗ്രാഫിന്റെ ഭാഗമാകുന്നു പരിഹാരഭാഗം 1-ാം അർധതലത്തിൽ ആകുന്നു. രണ്ടാം അർധതലം ഗ്രാഫിന്റെ ഭാഗമല്ല എന്നും കാണാവുന്നതാണ്. (ചിത്രം 6.7)

അസമത (1) ന്റെ പരിഹാരം വരയുൾപ്പെടെയുള്ള 1 -ാം അർധതലത്തിലെ ബിന്ദുക്കളാണെന്നു പറയാം.

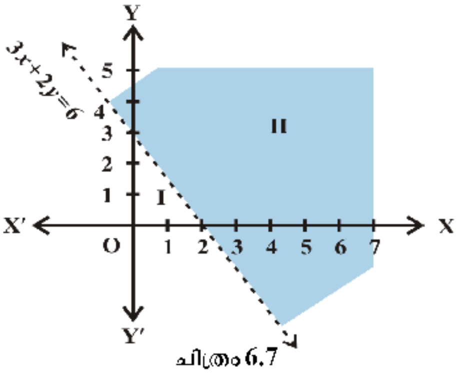
രണ്ടു ചരങ്ങളുള്ള രേഖീയ സമവാക്യങ്ങളുടെ പരിഹാരം മുകളിൽ ചർച്ചചെയ്ത രീതിയിൽ കൂടുതൽ മനസിലാക്കുവാൻ ചില ഉദാഹരണങ്ങൾ കൂടി പരിഗണിക്കാം.

ഉദാഹരണം : 9

ഗ്രാഫ് ഉപയോഗിച്ച് പരിഹാരം കാണുക: $3x + 2y > 6$ .... (1)

പരിഹാരം

$3x + 2y = 6$ ന്റെ ഗ്രാഫാണ് ബിന്ദുക്കൾ കൊണ്ട് അടയാളപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്ന വരയാണ്. ചിത്രം (6.8)



ചിത്രം 6.7

ഈ വര തലത്തെ I, II എന്നീ രണ്ട് അർധതലങ്ങളായി വിഭജിച്ചിരിക്കുന്നു. വരയുടെ ഭാഗമല്ലാത്ത ഏതെങ്കിലും ഒരു അർധതലത്തിൽ വരുന്ന ഒരു ബിന്ദു പരിഗണിക്കുക. ഇവിടെ (0, 0) പരിഗണിക്കാം.

ഈ ബിന്ദു (1) ൽ നൽകിയാൽ

$3\times0+2\times0>6$ അല്ലെങ്കിൽ $0>6$ ഇത് തെറ്റായ പ്രസ്താവനയാണ്.

അതുകൊണ്ട് (0, 0) എന്ന ബിന്ദു ഉൾപ്പെടുന്ന അർധതലം 1 ന്റെ പരിഹാരമായ അർധതലമല്ല.

അതായത് വരയിലെ ബിന്ദുക്കൾ ഒഴിവാക്കിയിട്ടുള്ള രണ്ടാം അർദ്ധതലത്തിലെ ബിന്ദുക്കളാണ് 1 ന്റെ പരിഹാരമായി വരുന്ന ബിന്ദുക്കളുൾപ്പെടുന്ന ഗ്രാഫ്.

> ഉദാഹരണം 9 ലെ അസമത $3x + 2y > 6$ ജിയോജിബ്രയിൽ വരക്കുന്നതിന് $3x + 2y > 6$ എന്ന input command കൊടുത്താൽ മതി. പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങൾ 6.2 ലെ ചോദ്യങ്ങൾ ഈ രീതിയിൽ വരച്ച് മനസ്സിലാക്കാവുന്നതാണ്.

ഉദാഹരണം : 10

$3x - 6 \geq 0$ നെ ഗ്രാഫ് ഉപയോഗിച്ച് കാർട്ടീഷ്യൻ തലത്തിൽ പരിഹാരം അടയാളപ്പെടുത്തുക:

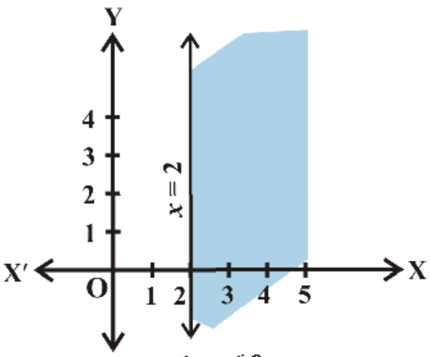
പരിഹാരം

$3x - 6 = 0$ ന്റെ ഗ്രാഫ് ചിത്രം 6.9 ൽ നൽകിയിരിക്കുന്നു. (0,0) എന്ന ബിന്ദുവിനെ തന്നിരിക്കുന്ന അസമതയിൽ നൽകിയാൽ

$3 \times 0 - 6 \geq 0$ അല്ലെങ്കിൽ

$-6 \geq 0$, $(0, 0)$ ഉൾക്കൊള്ളുന്ന അർധതലത്തിൽ തന്നിരിക്കുന്ന അസമത തെറ്റാണ്.

അതിനാൽ (0, 0) ഉൾപ്പെടാത്ത രണ്ടാം അർധതലത്തിലാണ് തന്നിരിക്കുന്ന അസമതയുടെ പരിഹാര ഗ്രാഫ് ഉൾപ്പെടുന്നത്.



ചിത്രം 6.8

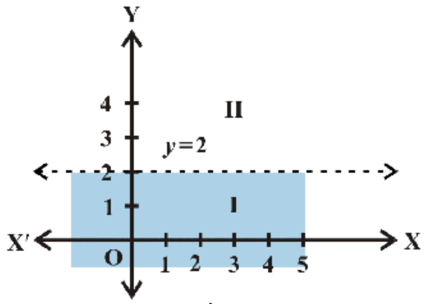
ഉദാഹരണം – 11

$y < 2$ നെ ഗ്രാഫ് ഉപയോഗിച്ച് പരിഹാരം കാണുക.

പരിഹാരം

$y = 2$ ന്റെ ഗ്രാഫ് കുത്തിട്ട വരയായി ചിത്രം 6.10 ൽ നൽകിയിരിക്കുന്നു.

1-ാം അർധതലത്തിലെ (0,0) എന്ന ബിന്ദു പരിഗണിക്കുക. തന്നിരിക്കുന്ന അസമതയിൽ ഈ ബിന്ദു നൽകിയാൽ, $0 < 2$ സത്യമായി മാറുന്നു.



ചിത്രം 6.9

അതായത് ഒന്നാം അർദ്ധതലത്തിൽ $y = 2$ എന്ന വര ഒഴിവാക്കിയുള്ള ഷെയ്ഡു ചെയ്ത ഭാഗമാണ് തന്നിരിക്കുന്ന അസമതയുടെ പരിഹാര ഗ്രാഫ്

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 6.2

താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന അസമതകളുടെ പരിഹാരം ദ്വിമാനതലത്തിൽ ഗ്രാഫ് ഉപയോഗിച്ച് കണ്ടെത്തുക.

1. $x + y < 5$
2. $2x + y \geq 6$
3. $3x + 4y \leq 12$
4. $y + 8 \geq 2x$
5. $x - y \leq 2$
6. $2x - 3y > 6$
7. $-3x + 2y \geq -6$
8. $3y - 5x < 30$
9. $y < -2$
10. $x > -3$.

6.5 രണ്ടു ചരങ്ങളുള്ള ഒരു കൂട്ടം രേഖീയ അസമതകളുടെ പരിഹാരം

മുൻഭാഗങ്ങളിൽ നാം ചർച്ച ചെയ്തത് ഒരു ചരമുള്ള ഒരു രേഖീയ അസമതയുടെയും, രണ്ട് ചരങ്ങളുള്ള ഒരു രേഖീയ അസമതയുടേയും പരിഹാരം ആണ്. ഇനി, രണ്ട് ചരങ്ങളുള്ള രേഖീയ അസമതകൾ ഒന്നിൽ കൂടുതൽ ഉണ്ടെങ്കിൽ അതിന്റെ പരിഹാരം ഗ്രാഫിന്റെ സഹായത്താൽ എങ്ങനെ കണ്ടെത്താം എന്ന് ഏതാനും ഉദാഹരണങ്ങളിൽ കൂടി മനസിലാക്കാം.

ഉദാഹരണം : 12

ചുവടെ നൽകിയിരിക്കുന്ന രണ്ട് രേഖീയ അസമതകളുടെ പരിഹാരം ഗ്രാഫ് ഉപയോഗിച്ച് കണ്ടെത്തുക.

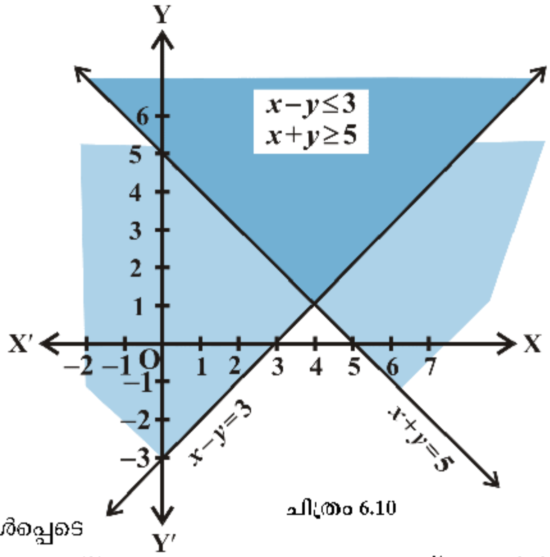
$x + y \geq 5$ ... (1)

$x - y \leq 3$ ... (2)

പരിഹാരം

$x + y - 5$ എന്ന രേഖീയ സമവാക്യത്തിന്റെ ഗ്രാഫ് വരച്ചിരിക്കുന്നത് ശ്രദ്ധിക്കുക. (ചിത്രം 6.11)

അസമത (1) ന്റെ പരിഹാരം $x + y - 5$ എന്ന വരയിലുൾപ്പെടുന്ന ബിന്ദുക്കൾ ഉൾപ്പടെ അതിനു മുകളിലുള്ള ഷേഡ് ചെയ്ത ഭാഗമാണ്. ഇതേ അക്ഷങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് $x - y - 3$ എന്ന രേഖീയ അസമവാക്യത്തിന്റെ ഗ്രാഫ് വരച്ചിരിക്കുന്നത് ചിത്രം 6.11 ൽ നൽകിയിട്ടുള്ളത് ശ്രദ്ധിക്കുക.



ചിത്രം 6.10

$x - y - 3$ എന്ന വരയിലെ ബിന്ദുക്കൾ ഉൾപ്പെടെ അതിനു മുകളിലുള്ള ഷേഡ് ചെയ്ത ഭാഗം (2) എന്ന അസമതയുടെ ഗ്രാഫ് വരച്ചിരിക്കുന്നത് (ചിത്രം 6.11) ൽ നൽകിയിട്ടുണ്ട്.

$x - y - 3$ എന്ന വരയിലെ ബിന്ദുക്കളടക്കം അതിനു മുകളിലുള്ള കറുപ്പിച്ച ഭാഗം അസമത (2) ന്റെ പരിഹാരഭാഗമാണ്. അതായത് (1), (2) എന്നീ അസമതകളുടെ പരിഹാരഭാഗം, ചിത്രത്തിൽ പൊതുവായി ഷെഡ് ചെയ്ത ഭാഗമാണ്. (ചിത്രം 6.11)

ഉദാഹരണം : 13

ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന അസമതകളുടെ പരിഹാരം ഗ്രാഫ് ഉപയോഗിച്ച് കണ്ടുപിടിക്കുക.

$5x + 4y \leq 40$... (1)

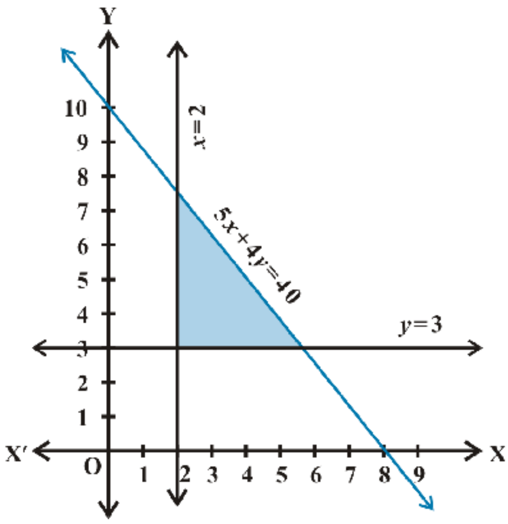
$x \geq 2$ ... (2)

$y \geq 3$ ... (3)

പരിഹാരം

$5x + 4y = 40$; $x = 2$, $y = 3$ എന്നീ സമവാക്യങ്ങളുടെ ഗ്രാഫ് ആദ്യം വരയ്ക്കുക.

അസമത (1) ന്റെ പരിഹാരമായി ലഭിക്കുന്ന ഗ്രാഫ് $x + 4y = 40$ എന്ന വരയുൾപ്പെടെ താഴ്ഭാഗം ഷേഡ് ചെയ്തതും; അസമത (2) ന്റെ പരിഹാരം ഉൾപ്പെടുന്ന ഗ്രാഫ് $x = 2$ എന്നീ വരയുൾപ്പെടെ അതിന്റെ വലതുഭാഗം ഷേഡ് ചെയ്തതും; അസമത (3) ന്റെ പരിഹാരം ഉൾപ്പെടുന്ന ഗ്രാഫ് $y = 3$ എന്ന വരയുൾപ്പെടെ അതിന്റെ മുകൾഭാഗം ഷേഡ് ചെയ്തതും ആകുന്നു. അതുകൊണ്ട് തന്നിരിക്കുന്ന അസമത ക്കൂട്ടത്തിന്റെ പരിഹാരം പൊതുവായി ഷേഡ് ചെയ്ത ഭാഗം ആണ്.



ചിത്രം 6.11

> **കുറിപ്പ്**
>
> പ്രായോഗികമായി ചില അസമതകളിൽ x, y എന്നിവയുടെ വില എണ്ണവുമായി ബന്ധപ്പെട്ടുവരുന്നു. ഉദാഹരണം പുസ്തകങ്ങളുടെ എണ്ണം, ജോലി ചെയ്ത സമയദൈർഘ്യം, ഉത്പാദിപ്പിച്ച വസ്തുക്കളുടെ എണ്ണം, വാങ്ങിയ സാധനങ്ങളുടെ എണ്ണം. ഈ സന്ദർഭങ്ങളിൽ $x \geq 0, y \geq 0$; പരിഹാരമണ്ഡലം ഒന്നാം ചതുർത്ഥാംശ ത്തിലായിരിക്കും.

ഉദാഹരണം : 14

$8x + 3y \leq 100$ ... (1)

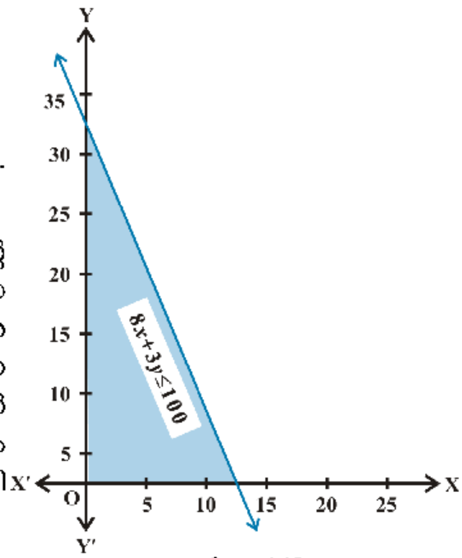
$x \geq 0$ ... (2)

$y \geq 0$ ... (3)

പരിഹാരം, ഗ്രാഫ് ഉപയോഗിച്ച് കണ്ടെത്തുക.

പരിഹാരം

$8x + 3y = 100$ എന്ന രേഖീയ സമവാക്യത്തിന്റെ ഗ്രാഫ് വരയ്ക്കുക. $8x + 3y \leq 100$ എന്ന അസമതയുടെ പരിഹാരം $8x + 3y = 100$ എന്ന വരയിലുള്ള ബിന്ദുക്കളും അതിന് താഴെയുള്ള ഭാഗവും ആണ്. ചിത്രം (6.13) $x \geq 0$, ഒന്നാം ചതുർത്ഥാംശം ആയതിനാൽ തന്നിരിക്കുന്ന കൂട്ടം അസമതകളുടെ കൂട്ടത്തിന്റെ പരിഹാരം ഗ്രാഫിലെ പൊതുവായി ഷേഡ് ചെയ്ത ഭാഗമാണ്.



ചിത്രം 6.12

($x = 0$, $y - 0$, $8x + 3y = 100$ എന്നീ വരകളിലെ ബിന്ദുക്കൾ ഉൾപ്പെടും)

ഉദാഹരണം : 15

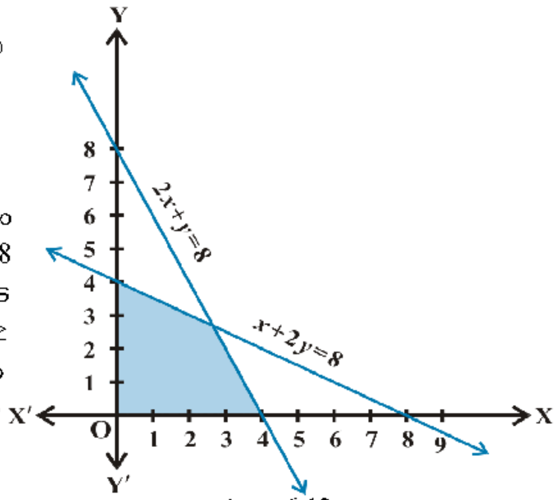
ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന അസമതകളുടെ പരിഹാരം ഗ്രാഫ് ഉപയോഗിച്ച് കാണുക.

$x + 2y \le 8$ ... (1)
$2x + y \le 8$ ... (2)
$x \ge 0$ ... (3)
$y \ge 0$ ... (4)

പരിഹാരം

$x + 2y = 8$, $2x + y = 8$ എന്നീ രേഖീയ സമവാക്യങ്ങളുടെ ഗ്രാഫ് വരയ്ക്കുക.

അസമത (1) ന്റെ പരിഹാരം $x + 2y = 8$ എന്ന വരയിലെ ബിന്ദുക്കളുൾപ്പെടെ അതിന്റെ താഴ്ഭാഗവും അസമത (2) ന്റെ പരിഹാരം $2x + y = 8$ എന്ന വരയിലെ ബിന്ദുക്കളുൾപ്പെടെ അതിന്റെ താഴ്ഭാഗവും ആകുന്നു. $x \ge 0$, $y \ge 0$ എന്നിവ ഒന്നാം ചതുർത്ഥാംശം ആകയാൽ, തന്നിരിക്കുന്ന അസമത ക്കൂട്ടത്തിന്റെ പരിഹാരം ഗ്രാഫിൽ പൊതുവായി ഷേഡ് ചെയ്ത ഭാഗം ആകുന്നു. (ചിത്രം 6.14)



ചിത്രം 6.13

പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങൾ 6.3

തന്നിരിക്കുന്ന അസമതക്കൂട്ടങ്ങളുടെ പരിഹാരം ഗ്രാഫ് ഉപയോഗിച്ച് കാണുക.

1. $x \ge 3, y \ge 2$
2. $3x + 2y \le 12$, $x \ge 1, y \ge 2$
3. $2x + y \ge 6$, $3x + 4y \le 12$
4. $x + y \ge 4$, $2x - y > 0$
5. $2x - y > 1$, $x - 2y < -1$
6. $x + y \le 6$, $x + y \ge 4$
7. $2x + y \ge 8$, $x + 2y \ge 10$
8. $x + y \le 9$, $y > x$, $x \ge 0$
9. $5x + 4y \le 20$, $x \ge 1, y \ge 2$
10. $3x + 4y \le 60$, $x + 3y \le 30$, $x \ge 0$, $y \ge 0$
11. $2x + y \ge 4$, $x + y \le 3$, $2x - 3y \le 6$
12. $x - 2y \le 3$, $3x + 4y \ge 12$, $x \ge 0$, $y \ge 1$

$a : x + 2y <= 8; b : 2x + y <= 8; c : x >= 0; d : y >= 0$ എന്നീ input command കൾ നൽകി ഉദാഹരണം 15 ലെ അസമതകൾ വരക്കാവുന്നതാണ്. പരിഹാരഭാഗം. അടയാള പ്പെടുത്തുന്നതിനായി $a \wedge b \wedge c \wedge d$ എന്ന input command കൊടുക്കുക. പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങൾ 6.3 ലെ ചോദ്യങ്ങൾ ഈ രീതിയിൽ മനസിലാക്കാവുന്നതാണ്.

13. $4x + 3y \le 60, y \ge 2x, \ x \ge 3, \ \ x, y \ge 0$

14. $3x + 2y \le 150, x + 4y \le 80, \ x \le 15, \ y \ge 0, x \ge 0$

15. $x + 2y \le 10, x + y \ge 1, x - y \le 0, x \ge 0, y \ge 0$

കൂടുതൽ ഉദാഹരണങ്ങൾ

ഉദാഹരണം : 16

പരിഹാരം കണ്ടെത്തുക $-8 \le 5x - 3 < 7$.

പരിഹാരം

ഈ ചോദ്യത്തിൽ രണ്ട് അസമതകളാണുള്ളത് അവ $-8 \le 5x - 3$, $5x - 3 < 7$ ഉം എന്നിവയാണ്. ഇവയുടെ പരിഹാരം ഒരേ സമയത്ത് കണ്ടുപിടിക്കണം.

$$-8 \le 5x - 3 < 7$$

അല്ലെങ്കിൽ $-5 \le 5x < 10$ അല്ലെങ്കിൽ $-1 \le x < 2$

ഉദാഹരണം : 17

പരിഹാരം കണ്ടെത്തുക. $-5 \le \dfrac{5-3x}{2} \le 8$

പരിഹാരം

ഇവിടെ $-5 \ \le \dfrac{5-3x}{2} \le 8$ എന്ന് തന്നിരിക്കുന്നു.

അതായത് $-10 \le 5 - 3x \le 16$, അല്ലെങ്കിൽ $-15 \le -3x \le 11$, അല്ലെങ്കിൽ $5 \ge x \ge -\dfrac{11}{3}$

ഇതിനെ $\dfrac{-11}{3} \le \ x \ \le 5$ എന്നെഴുതാം.

ഉദാഹരണം : 18

ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന അസമതകളുടെ പൊതുവായ പരിഹാരം കണ്ടെത്തുകയും അതിനെ സംഖ്യാരേഖയിൽ അടയാളപ്പെടുത്തുകയും ചെയ്യുക.

$$3x - 7 < 5 + x \ \ldots (1)$$

$$11 - 5x \le 1 \ \ \ldots (2)$$

പരിഹാരം

1 -ാം അസമതയിൽ നിന്ന്

$$3x - 7 < 5 + x,$$

അല്ലെങ്കിൽ $x < 6 \ \ldots (3)$

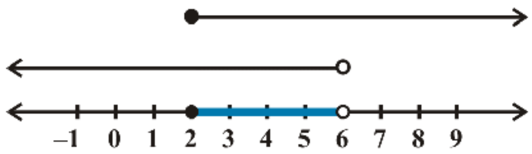
2-ാം അസമതയിൽ നിന്നും,

$$11 - 5x \le 1$$

അല്ലെങ്കിൽ, $-5x \le -10$

അതായത്, $x \ge 2 \ \ldots (4)$

(3), (4) എന്നീ അസമതകളുടെ ഗ്രാഫുകൾ സംഖ്യാരേഖയിൽ വരച്ചാൽ, രണ്ട് അസമതകൾക്കും പൊതുവായ ഭാഗം ചിത്രത്തിൽ നൽകിയിരിക്കുന്നത് കാണുക.



ചിത്രം 6.15

അതുകൊണ്ട്, ഇതിന്റെ പരിഹാരം 2 ഉൾപ്പെടെ 2 നും 6 നും ഇടയിലുള്ള രേഖീയ സംഖ്യകളാണ്.

അതായത്, $2 \le x < 6$

ഉദാഹരണം : 19

ഒരു പരീക്ഷണത്തിന്റെ ഭാഗമായി ഹൈഡ്രോക്ലോറിക് ആസിഡിനെ 30° സെൽഷ്യസിനും 35° സെൽഷ്യസിനും ഇടയിൽ സൂക്ഷിച്ചിരിക്കുന്നു. ഈ ഊഷ്മാവിനെ ഫാരൻഹീറ്റിലേക്ക് ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന സൂത്രവാക്യം ഉപയോഗിച്ച് മാറ്റുക.

$C = \frac{5}{9}(F - 32)$; C സെൽഷ്യസിനെയും F ഫാരൻഹീറ്റിനെയും സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

പരിഹാരം

$30 < C < 35$ എന്ന് തന്നിരിക്കുന്നു.

$C = \frac{5}{9}(F - 32)$ എന്ന വില നൽകുക.

അതായത് $30 < \frac{5}{9}(F - 32) < 35$,

$$\Rightarrow \frac{9}{5} \times (30) < (F - 32) < \frac{9}{5} \times (35)$$

അല്ലെങ്കിൽ $54 < (F - 32) < 63$

അല്ലെങ്കിൽ $86 < F < 95$.

അതായത്, ഊഷ്മാവ് 86° ഫാരൻഹീറ്റിനും 95° ഫാരൻഹീറ്റിനും ഇടയിലായിരിക്കും.

ഉദാഹരണം : 20

12% ആസിഡുള്ള 600 ലിറ്റർ ലായനി ഒരു ഉൽപാദകന്റെ പക്കലുണ്ട്. 30% ആസിഡുള്ള എത്ര ലിറ്റർ ലായനി ഇതിലേക്ക് ചേർത്താൽ, ലഭിക്കുന്ന മിശ്രിതത്തിൽ 15% ന് മുകളിലും 18% ന് താഴെയും ആസിഡ് ഉണ്ടായിരിക്കും?

പരിഹാരം

കൂട്ടിച്ചേർക്കേണ്ട 30% ആസിഡ് ലായനിയുടെ അളവ് x ലിറ്ററാണെന്ന് കരുതുക.

അതുകൊണ്ട്, ആകെ മിശ്രിതം = $(x + 600)$ ലിറ്റർ

അതുകൊണ്ട്, x ന്റെ 30% + 600 ന്റെ 12% > $(x + 600)$ ന്റെ 15%

x ന്റെ 30% + 600 ന്റെ 12% < $(x + 600)$ ന്റെ 18%

അല്ലെങ്കിൽ $\frac{30x}{100} + \frac{12}{100}(600) > \frac{15}{100}(x + 600)$

$\frac{30x}{100} + \frac{12}{100}(600) < \frac{18}{100}(x + 600)$

അല്ലെങ്കിൽ $30x + 7200 > 15x + 9000$

$30x + 7200 < 18x + 10800$

അല്ലെങ്കിൽ $15x > 1800,\ 12x < 3600$

അല്ലെങ്കിൽ $x > 120, x < 300,$

അതായത് $120 < x < 300$

അതിനാൽ, ചേർക്കേണ്ട 30% ആസിഡ് ലായനിയുടെ അളവ് 120 ലിറ്ററിൽ കൂടുതലും 300 ലിറ്ററിൽ കുറവും ആണ്.

കൂടുതൽ പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ

1 മുതൽ 6 വരെയുള്ള അസമതകളുടെ പരിഹാരം കണ്ടെത്തുക.

1. $2 \le 3x - 4 \le 5$
2. $6 \le -3(2x - 4) < 12$
3. $3 \le 4 - \frac{7x}{2} \le 18$
4. $-15 < \frac{3(x-2)}{5} \le 0$
5. $-12 < 4 - \frac{3x}{-5} \le 2$
6. $7 \le \frac{(3x+11)}{2} \le 11$.

7 മുതൽ 10 വരെയുള്ള അസമതകളുടെ പരിഹാരം കണ്ടതിനുശേഷം അതിന്റെ ഗ്രാഫ് സംഖ്യാരേഖയിൽ അടയാളപ്പെടുത്തുക.

7. $5x + 1 > -24,\quad 5x - 1 < 24$
8. $2(x - 1) < x + 5,\quad 3(x + 2) > 2 - x$
9. $3x - 7 > 2(x - 6),\quad 6 - x > 11 - 2x$
10. $5(2x - 7) - 3(2x + 3) \le 0,\quad 2x + 19 \le 6x + 47$

11. ഒരു മിശ്രിതം 68° ഫാരൻഹീറ്റിനും 77° ഫാരൻഹീറ്റിനും ഇടയിൽ സൂക്ഷിച്ചിരിക്കുന്നു. ഈ ഊഷ്മാവിനെ ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ഫാരൻഹിറ്റ് (F), സെൽഷ്യസ് (C) എന്നിവ ഉൾപ്പെടുന്ന സൂത്രവാക്യം ഉപയോഗിച്ച് സെൽഷ്യസിലേക്ക് മാറ്റുക.

$$F = \frac{9}{5} C + 32$$

12. 8% ബോറിക് ആസിഡ് ലായനിയിൽ 2% ബോറിക് ആസിഡ് ലായനി ഉപയോഗിച്ച് നേർപ്പിക്കുന്നു. ലഭിക്കുന്ന മിശ്രിതത്തിൽ 4% നും 6% നും ഇടയിൽ ബോറിക് ആസിഡ് ഉണ്ടായിരിക്കണം. 8% ബോറിക് ആസിഡുള്ള 640 ലിറ്റർ ലായനി ഉണ്ടെങ്കിൽ, അതിനോടുകൂടി 2% ബോറിക് ആസിഡുള്ള എത്ര ലിറ്റർ ലായനി ചേർക്കണം?

13. 45% ആസിഡുള്ള 1125 ലിറ്റർ ലായനിയിലേക്ക് എത്ര ലിറ്റർ ജലം ചേർത്താൽ ലഭിക്കുന്ന ലായനിയിൽ 25% നും 30% ഇടയിൽ ആസിഡ് സാന്നിദ്ധ്യം ഉണ്ടാകും?

14. ഒരു വ്യക്തിയുടെ ബുദ്ധിക്ഷമത അളക്കുവാൻ ഉപയോഗിക്കുന്ന സൂത്രവാക്യം $IQ = \frac{MA}{CA} \times 100$, ഇവിടെ MA എന്നത് മനഃപ്രായത്തെയും (Mental age) CA എന്നത് കാലക്രമമനുസരിച്ചുള്ള പ്രായത്തെയും (Chronological age) സൂചിപ്പിക്കുന്നു. 12 വയസ്സുള്ള ഒരു കൂട്ടം കുട്ടികളുടെ ബുദ്ധിക്ഷമത $80 \leq IQ \leq 140$ ആയാൽ അവരുടെ മനപ്രായത്തിന്റെ പരിധി കണ്ടെത്തുക.

സംഗ്രഹം

- രണ്ട് രേഖീയസംഖ്യകളെയോ രണ്ട് ബീജഗണിതവാക്യങ്ങളെയോ $<, >, \leq, \geq$ എന്നീ ചിഹ്നങ്ങളിൽ ഏതെങ്കിലും ഉപയോഗിച്ച് ബന്ധിപ്പിച്ചാൽ ഒരു അസമത ലഭിക്കും.
- ഒരു അസമതയുടെ ഇരുവശത്തോട്ടും ഒരേ സംഖ്യ കൂട്ടുകയോ ഇരുവശത്തുനിന്നും ഒരേ സംഖ്യ കുറയ്ക്കുകയോ ചെയ്യാവുന്നതാണ്.
- ഒരു അസമതയുടെ ഇരുവശത്തും ഒരേ അധിസംഖ്യകൊണ്ട് ഗുണിക്കുകയോ ഹരിക്കുകയോ ചെയ്യാവുന്നതാണ്. എന്നാൽ ന്യൂനസംഖ്യകൊണ്ട് ഗുണിക്കുകയോ ഹരിക്കുകയോ ചെയ്താൽ അസമത വിപരീതമാകും.
- x ഉൾപ്പെടുന്ന ഒരു അസമതയെ സത്യപ്രസ്താവനയാക്കുന്ന x ന്റെ വിലകളെ ആ അസമതയുടെ പരിഹാരം എന്നു പറയുന്നു.

- $x < a$ (അല്ലെങ്കിൽ $x > a$) എന്നത് ഒരു സംഖ്യാരേഖയിൽ രേഖപ്പെടുത്തുമ്പോൾ a യ്ക്ക് ചുറ്റും വളരെ ചെറിയ വൃത്തം വരയ്ക്കുകയും അതിന് ഇടതുവശം (അല്ലെങ്കിൽ വലതുവശം) സംഖ്യാരേഖയിൽ ഷേഡ് ചെയ്യുക.
- $x \le a$ (അല്ലെങ്കിൽ $x \ge a$) എന്നത് ഒരു സംഖ്യാരേഖയിൽ രേഖപ്പെടുത്തുമ്പോൾ a യ്ക്ക് ചുറ്റും വളരെ ചെറിയ ഒരു കറുത്ത വൃത്തം വരയ്ക്കുകയും അതിന് ഇടതുവശം (അല്ലെങ്കിൽ വലതുവശം) സംഖ്യാരേഖയിൽ ഷേഡ് ചെയ്യുക.
- $\le, \ge$ എന്നീ ചിഹ്നങ്ങൾ ഉൾപ്പെട്ട അസമതകളുടെ പരിഹാരത്തിൽ ആ വരയിലെ ബിന്ദുക്കളും ഉൾപ്പെടുന്നു. വര വിഭജിക്കുന്ന ഏതെങ്കിലും ഒരു ഭാഗത്തെ ബിന്ദു അസമതയിൽ ശരിയാകുന്നെങ്കിൽ ബിന്ദു ഉൾപ്പെടുന്ന ഭാഗവും, ശരിയാകുന്നില്ലെങ്കിൽ മറ്റുഭാഗവും ഷേഡ് ചെയ്ത് അസമതയുടെ പരിഹാര ഗ്രാഫ് വരക്കുന്നു.
- $<, >$ എന്നീ ചിഹ്നങ്ങൾ ഉൾപ്പെട്ട അസമതകളുടെ പരിഹാരത്തിൽ ആ വരയിലെ ബിന്ദുക്കൾ ഉൾപ്പെടുന്നില്ല. അതുകൊണ്ട് പരിഹാര ഗ്രാഫിൽ വരയിലെ ബിന്ദുക്കൾ ഒഴിവാക്കുന്നു.
- ഒരു കൂട്ടം അസമതകളുടെ പരിഹാരഭാഗം എന്നത് ആ അസമതകൾ ഓരോന്നും പാലിക്കപ്പെടുന്ന പൊതു ഭാഗമായിരിക്കും.