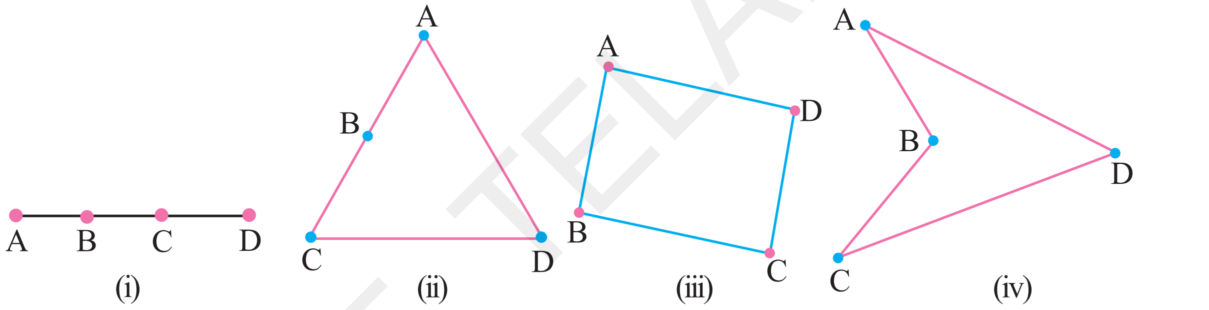
08

K3D3W1

చతుర్భుజాలు (Quadrilaterals)

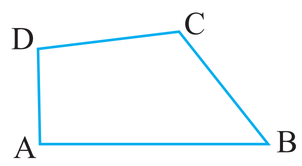
8.1 పరిచయం

మీరు త్రిభుజ ధర్మాలను గురించి, వాటి నిరూపణలను గురించి ముందు అధ్యాయంలో నేర్చుకున్నారు. ఏవైనా మూడు సరేఖీయాలు కాని బిందువులను జతలుగా కలిపితే ఏర్పడే పటం త్రిభుజమని మీకు తెలుసు. మరి నాలుగు బిందువులతో ఏర్పడే పటం ఏదో మీకు తెలుసా? పటం (i) లో చూపిన విధంగా నాలుగు బిందువులు సరేఖీయాలు అయితే అది రేఖాఖండం అవుతుంది. పటం (ii) లో చూపినట్లు నాలుగు బిందువులలో ఏవైనా మూడు బిందువులు సరేఖీయాలైతే అది త్రిభుజం అవుతుంది. నాలుగు బిందువులలో రెండు బిందువుల కన్నా ఎక్కువగా సరేఖీయాలు కానిచో, ఎన్నిరకాలుగా జతపర్చిననూ మనకు వచ్చే పటాలు (iii), (iv) పటాలలో చూపిన విధంగా వస్తాయి. ఇటువంటి పటాలను మనం చతుర్భుజాలంటాం.



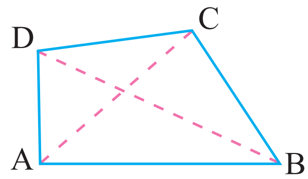
మీరు చతుర్భుజాలను ఎన్నైనా గీయగలరు. అదే విధంగా మన పరిసరాలలో వాటిని గుర్తించగలరు. పటం (iii) మరియు (iv) లలో ఏర్పడిన చతుర్భుజాలు ఒక అంశంలో తేడా స్పష్టంగా కనిపిస్తుంది. అది ఏ విధంగా విభిన్న చతుర్భుజాలో చెప్పగలరా?

మనం ఈ అధ్యాయంలో పటం (iii) లో ఏర్పడిన చతుర్భుజాల వంటి వాటిని గురించే అధ్యయనం చేస్తాము. వీటిని కుంభాకార చతుర్భుజాలంటారు.



సమతలంలో నాలుగు రేఖలతో ఏర్పడిన సరళ సంవృత పటంను చతుర్భుజము అంటాం.

ABCD చతుర్భుజములో నాలుగు భుజాలు AB, BC, CD మరియు DA; A, B, C మరియు D అనేవి నాలుగు శీర్షాలు; $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ మరియు $\angle D$ అనేవి శీర్షాల వద్ద ఏర్పడిన 4 కోణాలు.



A, C మరియు B, D ల వంటి ఎదుటి శీర్షాల జతలను కలిపితే వచ్చే AC, BD లను ABCD చతుర్భుజము యొక్క రెండు కర్ణాలు అంటాం.

8.2 చతుర్భుజాల ధర్మాలు

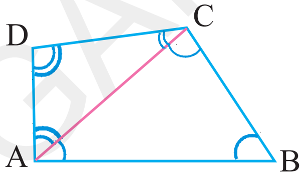
చతుర్భుజానికి 4 అంతర కోణాలుంటాయి. ఈ నాలుగు కోణాల మొత్తం ఎంత అవుతుందో మనం కనుగొనగలమా? "త్రిభుజంలో మూడు కోణాల మొత్తం" ధర్మాన్ని గుర్తుకు తెచ్చుకోండి. దీనిని చతుర్భుజములో నాలుగు కోణాల మొత్తాన్ని కనుగొనుటలో ఉపయోగిస్తాం.

ABCD చతుర్భుజములో AC కర్ణం (పటం చూడండి).

ΔABC లో మూడు కోణాల మొత్తం

$\angle BAC + \angle B + \angle ACB = 180^0$ ...(1) (త్రిభుజంలో మూడు కోణాల మొత్తం)

ఇదే విధంగా ΔADC లో



$$\angle CAD + \angle D + \angle DCA = 180^o \quad ...(2)$$

(1) మరియు (2) లను కూడగా

$\angle BAC + \angle B + \angle BCA + \angle CAD + \angle D + \angle DCA = 180^0 + 180^0$

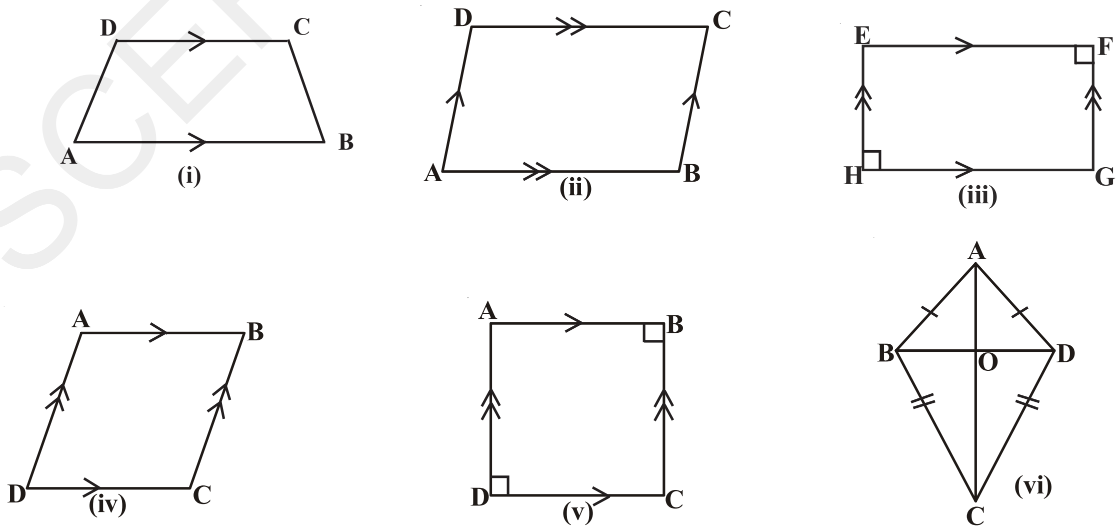
కాని $\angle BAC + \angle CAD = \angle A$ మరియు $\angle BCA + \angle DCA = \angle C$

కావున $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^o$ అయినది.

అంటే చతుర్భుజములో నాలుగు కోణాల మొత్తం 360^o లేదా 4 లంబకోణాలని తెలుస్తున్నది.

8.3 చతుర్భుజాలు – రకాలు

కింద గీయబడిన చతుర్భుజాలను పరిశీలించండి. ఇటువంటి పటాలను మీరు ఇదివరకు పరిశీలించే ఉన్నారు. అందుచే మనం ఈ పటాల ధర్మాల ఆధారంగా వీటి పేర్లు గుర్తించి రాద్దాం.



మనం పరిశీలించిన అంశాలను బట్టి.

- పటం (i) లో ABCD ఒక చతుర్భుజము మరియు ఒక జత ఎదుటి భుజాలు AB మరియు DC సమాంతరంగా ఉన్నాయి. ఇటువంటి చతుర్భుజాలను **సమలంబ చతుర్భుజాలు (ట్రెపీజీయాలు)** అంటాము.

  ట్రెపీజీయంలో ఒక జత ఎదుటి భుజాలు AB, DC లు సమాంతరాలుగా ఉండి మరొక జత AD = BC అయితే దానిని **సమద్విబాహు ట్రెపీజీయం** అంటాము.

- పటం (ii) లో గల చతుర్భుజంలో రెండు జతల ఎదుటి భుజాలు సమాంతరాలుగా ఉన్నాయి. ఇటువంటి చతుర్భుజాలను **సమాంతర చతుర్భుజాలు** అంటాము. పటం (iii), (iv) మరియు (v) కూడా సమాంతర చతుర్భుజాలే.
- పటం (iii) సమాంతర చతుర్భుజము EFGH లో అన్ని కోణాలు లంబకోణాలు. దీనిని **దీర్ఘచతురస్రం** అంటారు.
- పటం (iv) సమాంతర చతుర్భుజములో ఆసన్న భుజాలు సమానం. అయితే దీనిని **సమ చతుర్భుజము (రాంబస్)** అంటాము.
- పటం (v) సమాంతర చతుర్భుజములో ఆసన్న భుజాలు సమానం మరియు ప్రతికోణం 90° కావున ఇది **చతురస్రము**.
- పటం (vi) ABCD చతుర్భుజములో రెండు జతల ఆసన్నభుజాలు సమానం అంటే AB = AD మరియు BC = CD అయినవి. దీనిని మనం **గాలిపటం** అంటాము.

నిషా చెప్పినది పరిశీలించండి

రాంబస్ అనేది చతురస్రము కావచ్చు లేదా కాకపోవచ్చు కాని అన్ని చతురస్రాలు రాంబస్‌లే.

లలిత మరిన్ని అంశాలు జతచేసింది

అన్ని దీర్ఘ చతురస్రాలు, సమాంతర చతుర్భుజాలు కాని అన్ని సమాంతర చతుర్భుజాలు దీర్ఘ చతురస్రాలు కావు.

వీరు చెప్పిన వాటిలో దేనితో మీరు ఏకీభవిస్తారు?

మీ జవాబులకు తగు కారణాలను తెలపండి. ఇటువంటి వాక్యాలను మిగిలిన చతుర్భుజాలకు మీరు రాయండి.

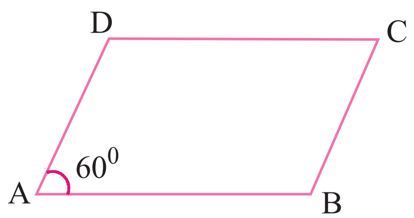
కొన్ని ఉదాహరణలు

ఉదాహరణ-1 : ABCD సమాంతర చతుర్భుజము మరియు $\angle A = 60^\circ$. మిగిలిన కోణాల కొలతలు కనుగొనండి.

సాధన : సమాంతర చతుర్భుజములో ఎదుటి కోణాలు సమానము.

కావున ABCD సమాంతర చతుర్భుజము

$\angle C = \angle A = 60^\circ$ మరియు $\angle B = \angle D$



సమాంతర చతుర్భుజములో పక్క కోణాల మొత్తం 180°.

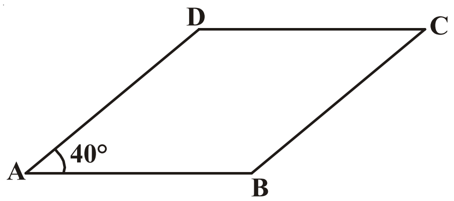
$\angle A$ మరియు $\angle B$ లు పక్క కోణాలు కావున

$$\angle D = \angle B = 180^\circ - \angle A$$
$$= 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ.$$

అందుచే మిగిలిన కోణాలు $120^\circ, 60^\circ, 120^\circ$ అవుతాయి.

ఉదాహరణ-2 : ABCD సమాంతర చతుర్భుజము $\angle DAB = 40^o$ అయిన మిగిలిన కోణాలను కనుగొనండి.

సాధన :



ABCD సమాంతర చతుర్భుజము కావున

$\angle DAB = \angle BCD = 40°$ మరియు $AD \parallel BC$

పక్క కోణాల మొత్తము

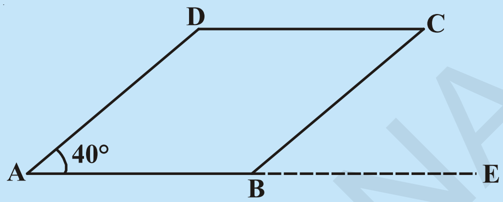
$\angle CBA + \angle DAB = 180°$

$\therefore \ \angle CBA = 180 - 40°$

$= 140°$

దీనిద్వారా $\angle ADC = 140°$ అయితే $\angle BCD = 40°$

ప్రయత్నించండి



AB ని E వరకు పొడిగించండి. $\angle CBE$ ని కనుగొనండి. మీరు ఏమి గమనించారు? $\angle ABC$ మరియు $\angle CBE$ లు ఎటువంటి కోణాలు?

ఉదాహరణ-3 : సమాంతర చతుర్భుజములో రెండు ఆసన్నభుజాలు వరుసగా 4.5 సెం.మీ. మరియు 3 సెం.మీ. దాని చుట్టుకొలత కనుగొనుము.

సాధన : సమాంతర చతుర్భుజము ఎదుటి భుజాల కొలతలు సమానము

కావున మిగిలిన రెండు భుజాలు 4.5 సెం.మీ. మరియు 3 సెం.మీ. కలిగి ఉంటాయి.

కావున, దీని చుట్టు కొలత $= 4.5 + 3 + 4.5 + 3 = 15$ సెం.మీ.

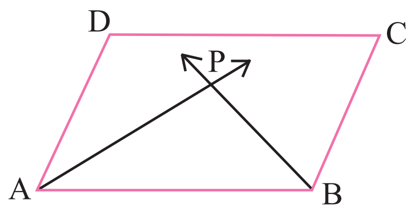
ఉదాహరణ-4 : ABCD సమాంతర చతుర్భుజములో పక్కకోణాలు $\angle A$ మరియు $\angle B$ యొక్క సమద్విఖండన రేఖలు P వద్ద ఖండించుకున్నాయి. అయిన $\angle APB = 90^o$ అని చూపండి.

సాధన : ABCD ఒక సమాంతర చతుర్భుజము పక్క కోణాలు $\angle A$ మరియు $\angle B$ యొక్క సమద్విఖండన రేఖలు $\overrightarrow{AP}$ మరియు $\overrightarrow{BP}$ లు సమాంతర చతుర్భుజములో పక్క కోణాలు సంపూరకాలు కావున

$\angle A + \angle B = 180^o$

$\frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle B = \frac{180}{2}$

$\Rightarrow \angle PAB + \angle PBA = 90^o$



Δ APB లో

$\angle PAB + \angle APB + \angle PBA = 180^o$ (త్రిభుజము మూడు కోణాల మొత్తము)

$\angle APB = 180^0 - (\angle PAB + \angle PBA)$

$= 180^o - 90^o$

$= 90^o$

నిరూపించబడినది.

అభ్యాసం 8.1

1. కింది ప్రవచనాలు 'సత్యమో' లేదా 'అసత్యమో' తెలపండి.

    (i) ప్రతి సమాంతర చతుర్భుజము ఒక ట్రెపీజియం అగును. ( )

    (ii) అన్ని సమాంతర చతుర్భుజాలు, చతుర్భుజాలే. ( )

    (iii) అన్ని ట్రెపీజియమ్‌లు, సమాంతర చతుర్భుజాలే. ( )

    (iv) చతురస్రము అనేది రాంబస్ అవుతుంది. ( )

    (v) ప్రతి రాంబస్ కూడా ఒక చతురస్రము. ( )

    (vi) అన్ని సమాంతర చతుర్భుజాలు, దీర్ఘచతురస్రాలే. ( )

2. కింది పట్టికలో చతుర్భుజ ధర్మాలు ఆయా పటాలకు వర్తిస్తే "అవును" అనీ, వర్తించకపోతే "కాదు" అనీ రాయండి.

	ధర్మాలు	ట్రెపీజియం	సమాంతర చతుర్భుజం	రాంబస్	దీర్ఘచతురస్రం	చతురస్రం
a.	ఒక జత ఎదుటి భుజాలు మాత్రమే సమాంతరాలు	అవును				
b.	రెండు జతల ఎదుటి భుజాలు సమాంతరాలు					
c.	ఎదుటి భుజాలు సమానాలు					
d.	ఎదుటి కోణాలు సమానాలు					
e.	పక్క కోణాలు సంపూరకాలు					
f.	కర్ణాలు సమద్విఖండన చేసుకుంటాయి					
g.	కర్ణాలు సమానం					
h.	అన్ని భుజాలు సమానం					
i.	ప్రతి కోణం లంబకోణం					
j.	కర్ణాలు పరస్పరం లంబాలు					

3. ABCD ట్రెపీజియంలో $AB \parallel CD$. $AD = BC$ అయితే $\angle A = \angle B$ మరియు $\angle C = \angle D$ అవుతాయని చూపండి.

4. చతుర్భుజములో కోణాల నిష్పత్తి 1: 2:3:4. అయిన ప్రతీ కోణం కొలతను కనుగొనండి.

5. ABCD ఒక దీర్ఘచతురస్రము AC కర్ణం అయిన ΔACD లో కోణాలను కనుగొనండి. కారణాలు తెలపండి.

8.4 సమాంతర చతుర్భుజ ధర్మాలు

సమాంతర చతుర్భుజాలన్నియూ చతుర్భుజాలని మనం చూసాం సమాంతర చతుర్భుజ ధర్మాలను ప్రత్యేకంగా పరిశీలించి చర్చిద్దాం.

కృత్యం

ఒక సమాంతర చతుర్భుజాకారంలో కాగితాన్ని కత్తిరించండి. దాని కర్ణం వెంబడి మరలా కత్తిరించండి. ఎటువంటి ఆకారాలు ఏర్పడ్డాయి? ఈ రెండు త్రిభుజాలను గూర్చి మీరు ఏమి చెబుతారు?

ఒక త్రిభుజం పై మరొక త్రిభుజాన్ని ఉంచండి. రెండు పటాలు ఒకదానితో ఒకటి ఏకీభవించాయా? ఒకవేళ కానిచో భుజాల వెంబడి కదిపి చూడండి. ఈ రెండు త్రిభుజాలు ఒకదానితో మరొకటి ఖచ్చితంగా ఏకీభవించినందున వీటిని సర్వసమానపటాలంటాము.

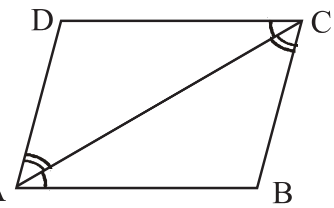
మరికొన్ని సమాంతర చతుర్భుజాలను తీసుకొని ఈ ఫలితాన్ని పరిశీలించండి. దీనికొరకు నీవు ఏ కర్ణంనైనా ఎన్నుకోవచ్చు.

దీని నుండి మనం సమాంతర చతుర్భుజంలోను ప్రతీ కర్ణం రెండు సర్వ సమాన త్రిభుజాలుగా విభజిస్తుందని చెప్పవచ్చు.

ఈ ఫలితాన్ని ఇప్పుడు నిరూపిద్దాం.

సిద్ధాంతం 8.1 : సమాంతర చతుర్భుజమును కర్ణము రెండు సర్వసమాన త్రిభుజాలుగా విభజిస్తుంది.

ఉపపత్తి : ABCD సమాంతర చతుర్భుజంను తీసుకోండి.



A, C లను కలపండి. సమాంతర చతుర్భుజానికి AC కర్ణం అవుతుంది.

$AB \parallel DC$ మరియు AC తిర్యగ్రేఖ కావున

$\angle DCA = \angle CAB$. (ఏకాంతర కోణాలు)

ఇదే విధంగా $DA \parallel CB$ మరియు AC తిర్యగ్రేఖ. కావున $\angle DAC = \angle BCA$ అయినది.

ఇప్పుడు ΔACD మరియు ΔCAB లలో

$\angle DCA = \angle CAB$ మరియు $\angle DAC = \angle BCA$

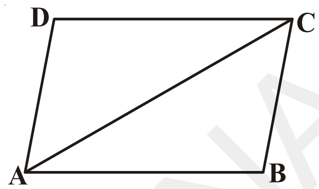
అలాగే $AC = CA$. (ఉమ్మడి భుజం)

అందువలన $\Delta ABC \cong \Delta CDA$ అయినది.

దీని అర్థం ఈ రెండు త్రిభుజాలు కో.భు.కో నియమము (కోణం, భుజం మరియు కోణం) ప్రకారం సర్వసమానాలు. అందుచే కర్ణం AC సమాంతర చతుర్భుజాన్ని రెండు సర్వసమాన పటాలుగా విభజించిందని చెప్పవచ్చు.

సిద్ధాంతం 8.2 : సమాంతర చతుర్భుజము ఎదుటి భుజాలు సమానము.

ఉపపత్తి : కర్ణం, సమాంతర చతుర్భుజాన్ని రెండు సర్వసమాన త్రిభుజాలుగా విభజిస్తుందని మనం నిరూపించాం.



పటంలో $\Delta ACD \cong \Delta CAB$ అయినది.

అందువలన $AB = DC$ మరియు $\angle CBA = \angle ADC$ అగును.

అలాగే $AD = BC$ మరియు $\angle DAC = \angle ACB$

$\angle CAB = \angle DCA$

$\therefore \angle ACB + \angle DCA = \angle DAC + \angle CAB$

అందుచే $\angle DCB = \angle DAB$

దీని నుండి సమాంతర చతుర్భుజంలో

i. ఎదుటి భుజాలు సమానమని

ii. ఎదుటి కోణాలు సమానమని చెప్పవచ్చు

కుంభాకార చతుర్భుజములో ఎదుటి భుజాలు సమాంతరాలైన, మనం ఎదుటి భుజాలు మరియు ఎదుటి కోణాలు సమానమని చూపవచ్చునని తెలుస్తున్నది.

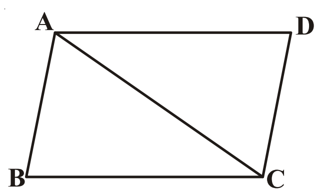
ఇప్పుడు ఈ సిద్ధాంతము యొక్క విపర్యయమును నిరూపించడానికి ప్రయత్నిద్దాం. అదేమంటే చతుర్భుజంలో ఎదుటి భుజాలు సమానము అయితే అది ఒక సమాంతర చతుర్భుజము.

సిద్ధాంతం 8.3 : ఒక చతుర్భుజములో ప్రతి జత ఎదుటి భుజాలు సమానము అయితే, అది సమాంతర చతుర్భుజమగును.

ఉపపత్తి : ABCD చతుర్భుజము $AB = DC$ మరియు $BC = AD$ అని తీసుకోండి.

కర్ణం AC ను గీయండి.

త్రిభుజాలు ΔABC మరియు ΔCDA పరిశీలించండి.



మనకు $BC = AD, AB = DC$ మరియు $AC = CA$ (ఉమ్మడి భుజం)

కావున $\Delta ABC \cong \Delta CDA$

అందువలన $\angle BCA = \angle DAC$, AC తిర్యగ్రేఖతో కలిసి ఉన్నందున

$AB \parallel DC$ అగును ...(1)

ఇదేవిధంగా $\angle ACD = \angle CAB$, CA తిర్యగ్రేఖతో కలిసి ఉన్నందున

$BC \parallel AD$ అయినది ...(2)

(1), (2) లను బట్టి ABCD ఒక సమాంతర చతుర్భుజము అయినది.

సమాంతర చతుర్భుజములో రెండు జతల ఎదుటి భుజాలు సమానమని, విపర్యయంగా చతుర్భుజంలో రెండు జతల ఎదుటి భుజాలు సమానము అయితే అది సమాంతర చతుర్భుజము అవుతుందని మనం తెలుసుకున్నాము.

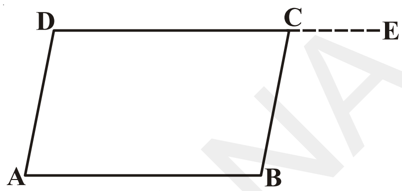
ఇదే విధంగా ఒక చతుర్భుజములోని ఎదుటి కోణాల జతలు సమానమైతే అది సమాంతర చతుర్భుజమని నిరూపించగలరా?

సిద్ధాంతం 8.4 : ఒక చతుర్భుజములో ప్రతి జత ఎదుటి కోణాలు సమానము అయితే అది సమాంతర చతుర్భుజము.

ఉపపత్తి : ABCD చతుర్భుజములో $\angle A = \angle C$ మరియు $\angle B = \angle D$ అయిన ABCD సమాంతర చతుర్భుజమని నిరూపించాలి.

$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$ అని మనకు తెలుసు

$\therefore \angle A + \angle B = \angle C + \angle D = \dfrac{360°}{2}$



i.e. $\angle A + \angle B = 180°$

DC ని E వైపు పొడిగించగా

$\angle BCD + \angle BCE = 180°$ కావున $\angle BCE = \angle ADC$ అగును

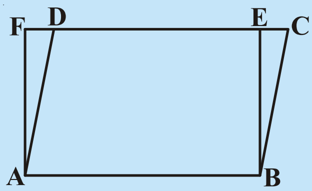
$\angle BCE = \angle ADC$ అయితే $AD \parallel BC$ (ఎందుకు?)

DC ని తిర్యగ్రేఖగా తీసుకో

ఇదే విధంగా $AB \parallel DC$ అని నిరూపించవచ్చు. కావున ABCD సమాంతర చతుర్భుజము అయింది.

అభ్యాసం 8.2

1. ABCD ఒక సమాంతర చతుర్భుజము మరియు ABEF ఒక దీర్ఘచతురస్రము అయిన $\Delta AFD \cong \Delta BEC$ అని చూపండి.



2. రాంబస్‌లో కర్ణాలు దానిని నాలుగు సర్వసమాన త్రిభుజాలుగా విభజిస్తాయని నిరూపించండి.
3. ABCD చతుర్భుజములో $\angle C$ మరియు $\angle D$ ల యొక్క సమద్విఖండన రేఖలు O వద్ద ఖండించుకుంటే

   $\angle COD = \dfrac{1}{2}(\angle A + \angle B)$ అని చూపండి.

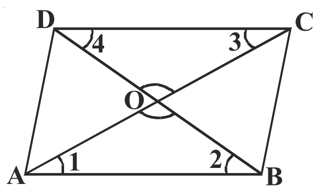
8.4 సమాంతర చతుర్భుజము యొక్క కర్ణాలు

సిద్ధాంతం 8.5 : సమాంతర చతుర్భుజములో కర్ణాలు పరస్పరము సమద్విఖండన చేసుకుంటాయి.

ఉపపత్తి : ABCD సమాంతర చతుర్భుజము గీయాలి.

రెండు కర్ణాలు AC మరియు BD లు 'O' వద్ద ఖండించుకున్నట్లు గీయాలి.

ΔOAB మరియు ΔOCD లలో



పటంలో ఏర్పడిన కోణాలను $\angle 1, \angle 2, \angle 3, \angle 4$ గా గుర్తించాలి.

$\angle 1 = \angle 3$ ($AB \parallel CD$ మరియు AC తిర్యగ్రేఖ చేసిన ఏకాంతర కోణాలు)

$\angle 2 = \angle 4$ (ఎలా?) (ఏకాంతర కోణాలు)

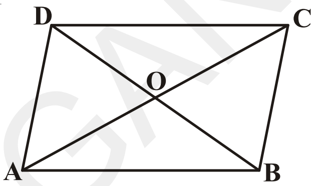
మరియు $AB = CD$ (సమాంతర చతుర్భుజంలోని ఎదుటి భుజాలు)

కావున కో.భు.కో. త్రిభుజ సర్వసమానత్వ నియమం ప్రకారం

$\Delta OCD \cong \Delta OAB$ అగును

అందువలన $CO= OA$, $DO = OB$ అయినవి

అంటే కర్ణములు పరస్పరం సమద్విఖండన చేసుకున్నవి. మనం ఇప్పుడు దీని విపర్యయం కూడా సత్యమో, కాదో పరిశీలిద్దాం. అంటే దీని విపర్యయం "ఒక చతుర్భుజము కర్ణములు పరస్పరము సమద్విఖండన చేసుకుంటే, అది సమాంతర చతుర్భుజం" అవుతుంది.



సిద్ధాంతం 8.6 : ఒక చతుర్భుజంలో కర్ణములు పరస్పరం సమద్విఖండన చేసుకుంటే అది సమాంతర చతుర్భుజము అగును.

ఉపపత్తి : ABCD ఒక చతుర్భుజం.

AC, BD కర్ణాలు 'O' వద్ద ఖండించుకున్నాయి.

$OA = OC$, $OB = OD$ అగునట్లు

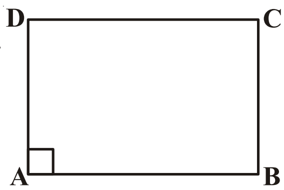
మనం ABCD ని ఒక సమాంతర చతుర్భుజమని చూపాలి.

గమనిక : ΔAOB మరియు ΔCOD లను తీసుకోండి. ఇవి సర్వసమానములేనా? అయితే దాని నుండి మీరు ఏమి చెప్పగలరు?

8.5.1. మరిన్ని జ్యామితీయ ప్రవచనాలు

ఇంతవరకు మనం నిరూపించిన సిద్ధాంతాలు కాని, ఉదాహరణలు కాని ఒక పటం (సమాంతర చతుర్భుజం) ఆధారంగా రూపొందించి కొన్ని ప్రవచనాలను రాబట్టడం జరిగింది. వీటిని కొలతల ఆధారంగా ప్రతిసారి నిరూపించనవసరంలేదు. సిద్ధాంత పరంగా నిరూపించినవి, అన్ని సందర్భాలలోనూ సత్యప్రవచనాలుగా రూపొందుతాయి. అయితే ప్రధాన సిద్ధాంతం నుండి ఎప్పటి కప్పుడు కొత్త వాటిని తిరిగి మరిన్ని కొత్త వాటిని ప్రతిపాదించి నిరూపిస్తాం. వీటిని ఉపసిద్ధాంతాలు అంటారు. ఒక నిరూపించబడిన ప్రతిపాదన లేదా సిద్ధాంతం నుండి రూపొందింది. సత్యమని భావింపబడే ప్రవచనాలను ఉపసిద్ధాంతాలుగా భావింపవచ్చు.

ఉపసిద్ధాంతం-1 : దీర్ఘచతురస్రంలో ప్రతీకోణము లంబకోణము అని నిరూపించండి.



నిరూపణ : దీర్ఘచతుస్రమనేది ఒక సమాంతర చతుర్భుజము మరియు ఒక కోణము లంబకోణము.

ABCD ఒకదీర్ఘచతురస్రము. ఒక కోణం $\angle A = 90^o$ అనుకోండి.

మనం $\angle B = \angle C = \angle D = 90^o$ అని చూపాలి.

ABCD సమాంతర చతుర్భుజము కావున $AD \parallel BC$ మరియు AB తిర్యగ్రేఖ

కావున $\angle A + \angle B = 180^o$ (తిర్యగ్రేఖకు ఒకే వైపునగల అంతరకోణాల మొత్తం)

కాని $\angle A = 90^o$ (తీసుకోబడింది)

$$\therefore \angle B = 180^o - \angle A$$
$$= 180^o - 90^o = 90^o$$

ఇప్పుడు $\angle C = \angle A$ మరియు $\angle D = \angle B$ (సమాంతర చతుర్భుజంలో)

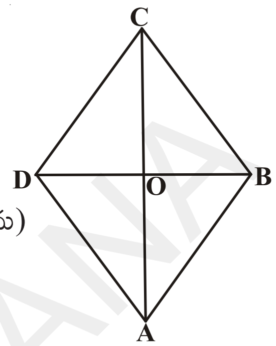
కావున $\angle C = 90^o$ మరియు $\angle D = 90^o$ అయింది.

అందుచే దీర్ఘచతురస్రములో ప్రతికోణం లంబకోణము అగును.

ఉపసిద్ధాంతం -2 : రాంబస్‌లో కర్ణాలు పరస్పరం లంబాలుగా ఉంటాయని చూపండి.

నిరూపణ : అన్ని భుజాలు సమానంగా గల సమాంతర చతుర్భుజమును రాంబస్ అంటారని మీకు తెలుసు.

ABCD ఒక రాంబస్ AC మరియు BD కర్ణాలు O వద్ద ఖండించుకున్నాయనుకొనండి.



మనం AC కర్ణం, BD కర్ణానికి లంబంగా ఉంటుందని చూపాలి.

ΔAOB మరియు ΔBOC లను తీసుకోండి.

$OA = OC$ (సమాంతర చతుర్భుజము కర్ణాలు పరస్పరం సమద్విఖండన చేసుకొనును)

$OB = OB$ (ΔAOB మరియు ΔBOC ఉమ్మడి భుజం)

$AB = BC$ (రాంబస్‌లో భుజాలు)

అందువలన $\Delta AOB \cong \Delta BOC$ (భు.భు.భు. నియమము)

కావున $\angle AOB = \angle BOC$

కాని $\angle AOB + \angle BOC = 180^o$ (రేఖీయద్వయం)

అందుచే $2\angle AOB = 180^o$

లేదా $\angle AOB = \dfrac{180^o}{2} = 90^o$

ఈ విధంగా $\angle BOC = \angle COD = \angle AOD = 90^o$ అయినది

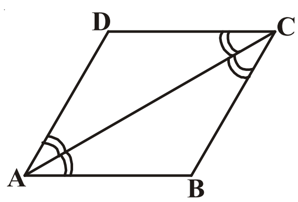
కావున AC కర్ణం, BD కర్ణానికి లంబం అని తెలిసింది.

అందుచే రాంబస్‌లో కర్ణాలు ఒకదానికొకటి లంబంగా ఉంటాయి.

ఉపసిద్ధాంతం- 3 : ABCD సమాంతర చతుర్భుజములో AC కర్ణం $\angle A$ ను సమద్విఖండన చేస్తే ABCD ఒక రాంబస్ అవుతుందని నిరూపించండి.

నిరూపణ : ABCD ఒక సమాంతర చతుర్భుజము

అందుచే $AB \parallel DC$. AC తిర్యగ్రేఖ $\angle A$, $\angle C$ లను ఖండించింది.



కావున $\angle BAC = \angle DCA$ (ఏకాంతర కోణాలు) ...(1)

$\angle BCA = \angle DAC$ ...(2)

కాని AC కర్ణం, $\angle A$ ను సమద్విఖండన చేసింది.

కనుక $\angle BAC = \angle DAC$

$\therefore \angle DCA = \angle DAC$ ...(3)

అందుచే AC కర్ణం $\angle C$ ని కూడా సమద్విఖండన చేసింది.

(1), (2) మరియు (3) లను బట్టి, మనకు

$\angle BAC = \angle BCA$

ΔABC లో $\angle BAC = \angle BCA$ అంటే $BC = AB$ (సమద్విబాహుత్రిభుజము)

కాని $AB = DC$ మరియు $BC = AD$ (సమాంతర చతుర్భుజములో ABCD లో ఎదుటి భుజాలు సమానం)

$\therefore\ AB = BC = CD = DA$

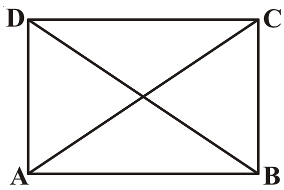
ఈవిధంగా ABCD రాంబస్ అయినది.

ఉపసిద్ధాంతం-4 : దీర్ఘచతురస్రంలో కర్ణాలు సమానమని నిరూపించండి.

నిరూపణ : ABCD దీర్ఘచతురస్రము AC మరియు BD లు వాని కర్ణాలు

మనకు $AC = BD$ అని తెలియాలి.

ABCD దీర్ఘచతురస్రమంటే ABCD ఒక సమాంతర చతుర్భుజము మరియు దానిలో ప్రతీ కోణము ఒక లంబకోణము.



ΔABC మరియు ΔBAD లను తీసుకోండి.

$AB = BA$ (ఉమ్మడి భుజం)

$\angle B = \angle A = 90^o$ (దీర్ఘచతురస్రములోని ప్రతీ కోణం 90^o లంబకోణం)

$BC = AD$ (దీర్ఘచతురస్రములో ఎదుటి భుజాలు)

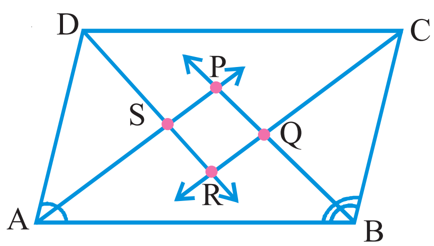
అందువలన $\Delta ABC \cong \Delta BAD$ (భు.కో.భు. నియమం) అగును.

దీని నుండి $AC = BD$

లేదా దీర్ఘచతురస్రములో కర్ణాలు సమానమని చెప్పవచ్చు.

ఉపసిద్ధాంతం-5 : సమాంతర చతుర్భుజములో కోణ సమద్విఖండన రేఖలు దీర్ఘచతురస్రాన్ని ఏర్పరుస్తాయని చూపండి.

నిరూపణ : ABCD ఒక సమాంతర చతుర్భుజము $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ మరియు $\angle D$ యొక్క కోణ సమద్విఖండన రేఖలు P, Q, R, S ల వద్ద ఖండించుకొని చతుర్భుజాన్ని ఏర్పరిచాయి. (పటం చూడండి.)



ABCD సమాంతర చతుర్భుజములో $AD \parallel BC$. AB ని తిర్యగ్రేఖగా తీసుకుంటే, $\angle BAD + \angle ABC = 180^o$ (సమాంతర చతుర్భుజములో పక్క కోణాలు)

కాని $\angle BAP = \frac{1}{2}\ \angle BAD$ మరియు $\angle ABP = \frac{1}{2}\ \angle B$

[AP, BP లు $\angle A$ మరియు $\angle B$ యొక్క సమద్విఖండన రేఖలు]

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\angle BAD + \frac{1}{2}\angle ABC = \frac{1}{2}\times 180^o$$

లేదా $\angle BAP + \angle ABP = 90^o \quad ...(1)$

కావున ΔAPB లో

$$\angle BAP + \angle APB + \angle ABP = 180^o \text{ (త్రిభుజంలో మూడు కోణాల మొత్తము)}$$

కావున $\angle APB = 180^o - (\angle BAP + \angle ABP)$

$\Rightarrow \angle APB = 180^o - 90^o$ ((1) నుండి)

$= 90^o$

అందుచే మనకు $\angle SPQ = \angle APB = 90^\circ$ అయినది.

ఇదేవిధంగా $\angle CRD = \angle QRS = 90^\circ$ (ఒకే కోణం)

కాని $\angle BQC = \angle PQR$ మరియు $\angle DSA = \angle PSR$ (ఎందుకు?)

$\therefore \angle PQR = \angle QRS = \angle PSR = \angle SPQ = 90^\circ$

కావున PQRS లో నాలుగు కోణాలు 90° కు సమానము

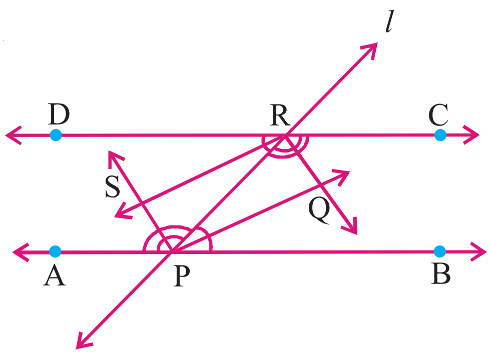
అందుచే PQRS ను దీర్ఘ చతురస్రమని చెప్పవచ్చు.

ఆలోచించి, చర్చించి రాయండి

1. చతురస్రంలో కర్ణాలు సమానమని, అవి పరస్పరం లంబ సమద్విఖండన చేసుకుంటాయని చూపండి.
2. రాంబస్‌లో కర్ణాలు దానిని నాలుగు సర్వసమాన త్రిభుజాలుగా విభజిస్తాయని చూపండి.

మరికొన్ని ఉదాహరణలు

ఉదాహరణ-5 : $\overleftrightarrow{AB}$ మరియు $\overleftrightarrow{DC}$ రెండు సమాంతర రేఖలు. తిర్యగ్రేఖ l, $\overleftrightarrow{AB}$ ని P వద్ద $\overleftrightarrow{DC}$ ని R వద్ద ఖండించింది. అయిన అంతరకోణాల సమద్విఖండనరేఖలు దీర్ఘచతురస్రాన్ని ఏర్పరుస్తాయని చూపండి.



నిరూపణ : $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{DC}$, తిర్యగ్రేఖ l $\overleftrightarrow{AB}$ ని P వద్ద $\overleftrightarrow{DC}$ ని R వద్ద ఖండించింది.

$\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{RQ}, \overrightarrow{RS}$ మరియు $\overrightarrow{PS}$ లు $\angle RPB, \angle CRP, \angle DRP$ మరియు $\angle APR$ ల యొక్క సమద్విఖండన రేఖలు అనుకొనండి.

$\angle BPR = \angle DRP$ (ఏకాంతర కోణాలు) ...(1)

కాని $\angle RPQ = \frac{1}{2}\angle BPR$ ($\because \overrightarrow{PQ}$, $\angle BPR$ యొక్క సమద్విఖండన రేఖ)

అలాగే $\angle PRS = \frac{1}{2}\angle DRP$ ($\because \overrightarrow{RS}$, $\angle DPR$ యొక్క సమద్విఖండన రేఖ) ...(2)

(1), (2) లను బట్టి

$\angle RPQ = \angle PRS$

ఇవి $\overline{PR}$ తిర్యగ్రేఖగా $\overleftrightarrow{PQ}$ మరియు $\overleftrightarrow{RS}$ రేఖలపై ఏర్పరచిన ఏకాంతర కోణాలు, కావున

$\therefore \quad \overleftrightarrow{PQ} \parallel \overleftrightarrow{RS}$

ఇదేవిధంగా $\angle PRQ = \angle RPS$ కావున $\overleftrightarrow{PS} \parallel \overleftrightarrow{RQ}$

అందువలన PQRS ఒక సమాంతర చతుర్భుజం అయినది ...(3)

మనకు $\angle BPR + \angle CRP = 180^o$ (తిర్యగ్రేఖ (l) ఒకే వైపున ఏర్పరచిన అంతరకోణాలు కావున $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{DC}$)

$\frac{1}{2}\angle BPR + \frac{1}{2}\angle CRP = 90^o$

$\Rightarrow \angle RPQ + \angle PRQ = 90^o$

కాని Δ PQR లో

$\angle RPQ + \angle PQR + \angle PRQ = 180^o$ (త్రిభుజంలోని మూడు కోణాలు)

$\angle PQR = 180^o - (\angle RPQ + \angle PRQ)$

$= 180^o - 90^o = 90^o$ ...(4)

(3), (4) లను బట్టి

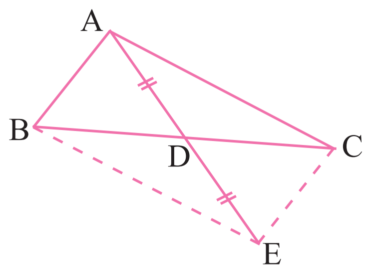
PQRS సమాంతర చతుర్భుజము మరియు ప్రతీకోణము లంబకోణము అయినది.

కావున PQRS ఒక దీర్ఘచతురస్రము

ఉదాహరణ-6 : ΔABC లో BC భుజం మీదకు మధ్యగతం AD గీయబడినది. AD = ED అగునట్లు E వరకు పొడిగించబడినది. అయిన ABEC ఒక సమాంతర చతుర్భుజాన్ని నిరూపించండి.

నిరూపణ : ΔABC త్రిభుజములో AD మధ్యగతం.

AD = ED అగునట్లు AD ని E వరకు పొడిగించబడింది.



BE మరియు CE లను కలపండి.

Δ^s ABD మరియు ECD లలో

BD = DC (BC మధ్య బిందువు D)

$\angle ADB = \angle EDC$ (శీర్షాభిముఖ కోణాలు)

AD = ED (ఇవ్వబడినది)

కావున $\Delta ABD \cong \Delta ECD$ అయినది (భు.కో.భు. నియమము)

అందువలన AB = CE (సర్వసమాన త్రిభుజాలలో సరూప భాగాలు)

అలాగే $\angle ABD = \angle ECD$

ఇవి $\overleftrightarrow{AB}$ మరియు $\overleftrightarrow{EC}$ రేఖలతో $\overline{BC}$ తిర్యగ్రేఖ చేసిన ఏకాంతర కోణాలు.

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CE}$

ABEC చతుర్భుజంలో

AB || CE మరియు AB = CE

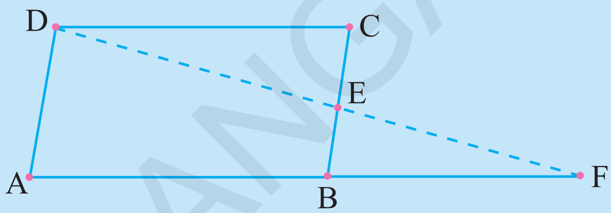
అయినందున ABEC ఒక సమాంతర చతుర్భుజము అయినది.

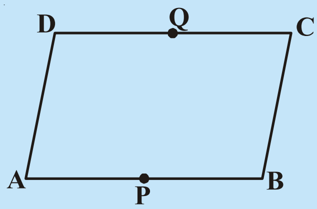
అభ్యాసం 8.3

1. సమాంతర చతుర్భుజము ఎదుటి కోణాలు $(3x - 2)^o$ మరియు $(x + 48)^o$ అయిన సమాంతర చతుర్భుజములో ప్రతీ కోణాన్ని కనుగొనండి.

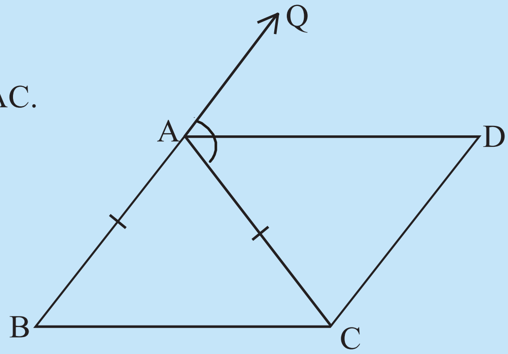
2. సమాంతర చతుర్భుజములో ఒక కోణం, అతి చిన్న కోణమునకు రెట్టింపు కన్నా 24^o తక్కువ అయిన సమాంతర చతుర్భుజంలో అన్ని కోణాలను కనుగొనుము.

3. పక్క పటంలో ABCD ఒక సమాంతర చతుర్భుజము మరియు BC యొక్క మధ్యబిందువు E. AB మరియు DE లను F వరకు పొడిగించిన, AF = 2AB అని నిరూపించండి.





4. పక్క పటంలో ABCD ఒక సమాంతర చతుర్భుజము. AB, DC ల యొక్క మధ్యబిందువు P మరియు Q లు అయిన PBCQ ఒక సమాంతర చతుర్భుజమని చూపండి.



5. ABC ఒక సమద్విబాహు త్రిభుజము మరియు AB = AC. బాహ్యకోణం QAC నకు AD సమద్విఖండనరేఖ అయితే

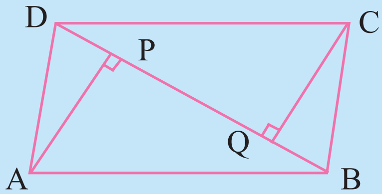
   (i) $\angle DAC = \angle BCA$

   (ii) ABCD ఒక సమాంతర చతుర్భుజమని చూపండి.

6. ABCD ఒక సమాంతర చతుర్భుజము AP మరియు CQ లు శీర్షాలు A మరియు C నుండి కర్ణం BD పైకి గీచిన లంబాలు (పటంలో చూడండి) అయిన

   (i) $\Delta APB \cong \Delta CQD$

   (ii) AP = CQ అని చూపండి.



7. ΔABC మరియు ΔDEF లలో AB = DE; BC = EF మరియు

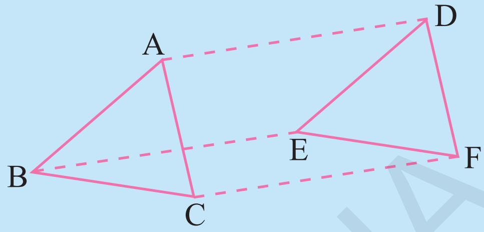
BC || EF. శీర్షాలు A, B మరియు C లు వరుసగా D, E మరియు F లకు కలుపబడినవి (పటం చూడండి) అయిన

(i) ABED ఒక సమాంతర చతుర్భుజము

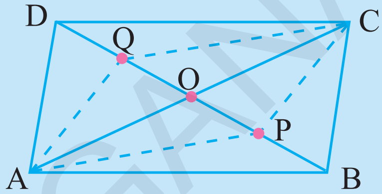
(ii) BCFE ఒక సమాంతర చతుర్భుజము

(iii) AC = DF

(iv) $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ అని చూపండి.



8. ABCD ఒక సమాంతర చతుర్భుజము. AC మరియు BD లు O వద్ద ఖండించుకున్నాయి. P, Q లు BD కర్ణంపై త్రిథాకరించబడిన బిందువులైన CQ || AP మరియు AC కర్ణం, PQ ను సమద్విఖండన చేయునని చూపండి (పటం చూడండి).



9. ABCD ఒక చతురస్రము. E, F, G మరియు H లు వరుసగా AB, BC, CD మరియు DA లపై గల బిందువులు AE = BF = CG = DH అయినచో EFGH ఒక చతురస్రమని చూపండి.

8.6 త్రిభుజ మధ్యబిందువు సిద్ధాంతము

మనం త్రిభుజం మరియు చతుర్భుజాల ధర్మాలను తెలుసుకున్నాము. త్రిభుజ భుజాల మధ్యబిందువుల ఆధారంగా, మనం మరికొన్ని నూతన సంబంధాలను రాబడదాం.

ప్రయత్నించండి

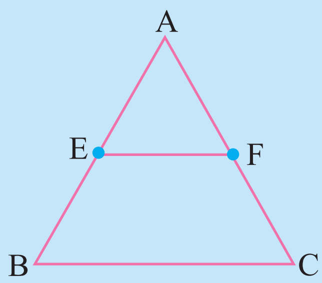
ΔABC త్రిభుజం గీయండి. AB మరియు AC మధ్యబిందువులుగా E మరియు F లుగా గుర్తించండి. E, F లను పటంలో చూపిన విధంగా కలపండి.

త్రిభుజములో EF కొలతను, మూడవ భుజం BC కొలతను కొలవండి. అదేవిధంగా $\angle AEF$ మరియు $\angle ABC$ కోణాలను కలపండి.

మనకు $\angle AEF = \angle ABC$, మరియు $EF = \frac{1}{2}BC$ అని వస్తుంది.

ఈ కోణాలు EF, BC రేఖలపై తిర్యగ్రేఖ AB తో ఏర్పడిన సదృశకోణాలు కావున మనం EF || BC అని చెప్పవచ్చు.

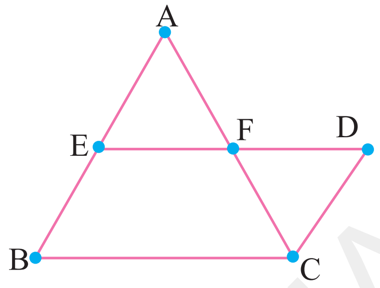
మరికొన్ని త్రిభుజాలు గీచి, ఫలితాలను సరిచూడండి.



దీని నుండి మనము సిద్ధాంతాన్ని రాబట్టవచ్చు.

సిద్ధాంతము 8.7 : ఒక త్రిభుజములో రెండు భుజాల మధ్యబిందువులను కలుపుతూ గీయబడిన రేఖ, మూడవ భుజానికి సమాంతరముగానూ, మరియు దానిలో సగము ఉంటుంది.

దత్తాంశం : ΔABC లో AB మధ్యబిందువు E మరియు AC మధ్యబిందువు F.



సారాంశం : (i) $EF \parallel BC$ (ii) $EF = \frac{1}{2}BC$

ఉపపత్తి : EF ను ని కలిపి పొడిగించి BA కు సమాంతరంగా C నుండి ఒక రేఖను గీస్తే, అది పొడిగించిన EF రేఖను D వద్ద ఖండిస్తుంది.

ΔAEF మరియు ΔCDF లలో

$AF = CF$ (AC మధ్యబిందువు)

$\angle AFE = \angle CFD$ (శీర్షాభిముఖ కోణాలు)

మరియు $\angle AEF = \angle CDF$ (CD || BA తో ED తిర్యగ్రేఖ చేసిన ఏకాంతర కోణాలు)

కో.భు.కో. సర్వసమానత్వ నియమము ప్రకారం

$\therefore \Delta AEF \cong \Delta CDF$ అయినది

కావున $AE = CD$ మరియు $EF = DF$ (సర్వసమాన త్రిభుజాల సరూపభాగాలు)

$AE = BE$ అని మనకు ఇవ్వబడింది.

కనుక $BE = CD$ అయింది.

$BE \parallel CD$ మరియు $BE = CD$ కావున BCDE ఒక సమాంతర చతుర్భుజము అయినది

అందుచే $ED \parallel BC$

$\Rightarrow EF \parallel BC$

BCDE సమాంతర చతుర్భుజము కావున $ED = BC$ (ఎలా?) ($\because DF = EF$)

$FD = EF$ అని చూపినందున

$\therefore 2EF = BC$ అగును

అందువలన $EF = \frac{1}{2}BC$ అయినది.

ఈ సిద్ధాంతం యొక్క విపర్యయము కూడా సత్యమని మనకు తెలుస్తుంది. దీనిని ప్రతిపాదించి, ఎలా నిరూపించాలో పరిశీలిద్దాము.

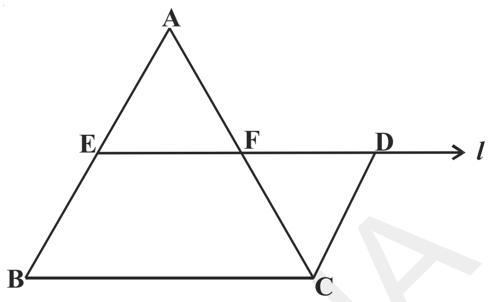
సిద్ధాంతము 8.8 : ఒక త్రిభుజములో ఒక భుజము యొక్క మధ్యబిందువు నుండి వేరొక భుజానికి సమాంతరముగా గీయబడిన రేఖ, మూడవ భుజాన్ని సమద్విఖండన చేస్తుంది.

ఉపపత్తి : ΔABC గీయాలి. AB మధ్యబిందువుగా E ని గుర్తించాలి. E గుండా BC కి సమాంతరముగా 'l' అనే రేఖను గీయాలి. ఇది AC ని F వద్ద ఖండించిందనుకుందాము.

$CD \parallel BA$ ను నిర్మించాలి.

మనం $AF = CF$ అని చూపాలి.

అందుచే ΔAEF మరియు ΔCFD లను తీసుకోండి.



$\angle EAF = \angle DCF$ ($BA \parallel CD$ మరియు AC తిర్యగ్రేఖ) (ఎలా?)

$\angle AEF = \angle D$ ($BA \parallel CD$ మరియు ED తిర్యగ్రేఖ) (ఎలా?)

కాని ఏవైనా రెండు భుజాలను సమానంగా చూపలేదు.

కావున మనం వీటిని సర్వసమాన త్రిభుజాలని చెప్పలేము.

అందువలన $EB \parallel DC$ మరియు

$ED \parallel BC$ తీసుకోండి.

కావున $EDCB$ ఒక సమాంతర చతుర్భుజము అయినది దీని నుండి $BE = DC$ అయినది.

కాని $BE = AE$ కావున మనకు $AE = DC$ అని వచ్చింది.

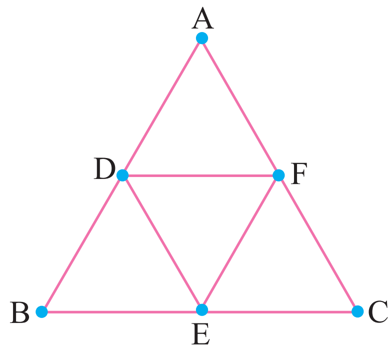
అందుచే కో.భు.కో. నియమం ప్రకారము

$\Delta AEF \cong \Delta CFD$ అయినది.

$\therefore AF = CF$ అగును.

మరిన్ని ఉదాహరణలు

ఉదాహరణ-7 : ΔABC లో D, E మరియు F లు వరుసగా AB, BC మరియు CA భుజాల మధ్యబిందువులు. వీటిని ఒకదానితో మరొకటి కలుపగా ఏర్పడిన నాలుగు త్రిభుజాలు సర్వసమానాలని చూపండి.



నిరూపణ : ΔABC లో D, E లు వరుసగా $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ భుజాల మధ్యబిందువులు. కావున మధ్యబిందువు సిద్ధాంతం ప్రకారము

$DE \parallel AC$

ఇదే విధంగా $DF \parallel BC$ మరియు $EF \parallel AB$ అగును.

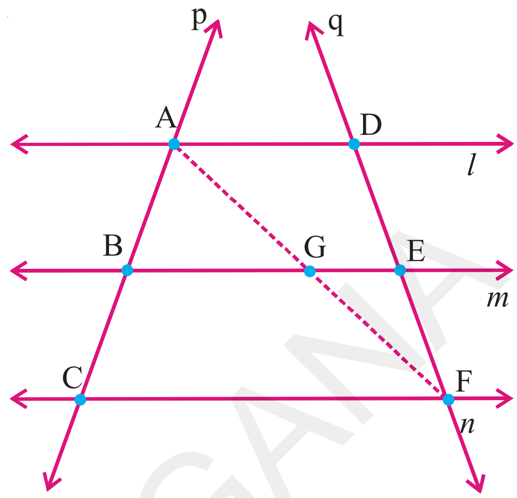
అందువలన ADEF, BEFD మరియు CFDE లు సమాంతర చతుర్భుజాలు.

ఇప్పుడు ADEF సమాంతర చతుర్భుజములో DF కర్ణం.

కావున $\Delta ADF \cong \Delta DEF$ (కర్ణం, సమాంతర చతుర్భుజాన్ని రెండు సర్వసమాన త్రిభుజాలుగా చేసింది)

ఇదే విధంగా $\Delta BDE \cong \Delta DEF$

మరియు $\Delta CEF \cong \Delta DEF$ అగును.



కనుక, నాలుగు త్రిభుజాలు సర్వసమానములు అయినవి.

దీని నుండి "త్రిభుజ భుజాల మధ్యబిందువులను కలుపగా ఏర్పడిన నాలుగు భుజాలు సర్వసమానములని" నిరూపించాము.

ఉదాహరణ-8 : l, m మరియు n అనే మూడు సమాంతర రేఖలను p మరియు q అనే రెండు తిర్యగ్రేఖలు A, B, C మరియు D,E, F ల వద్ద ఖండించాయి. తిర్యగ్రేఖ p, ఈ సమాంతర రేఖలను రెండు సమాన అంతరఖండాలు AB, BC లుగా విభజిస్తే q తిర్యగ్రేఖ కూడా సమాన అంతరఖండాలు DE మరియు EF లుగా విభజిస్తుందని చూపండి.

నిరూపణ : AB, BC మరియు DE, EF ల మధ్య సమానత్వ భావనతో సమన్వయ పరచాలి. A నుండి F కు రేఖను గీయగా అది 'm' రేఖను G వద్ద ఖండించిదనుకొనండి.

ΔACF లో $AB = BC$ (దత్తాంశము)

కావున AC మధ్యబిందువు B

మరియు $BG \parallel CF$ (ఎలా?)

అందుచే AF యొక్క మధ్యబిందువు G అయినది (త్రిభుజ మధ్యబిందువు సిద్ధాంతం).

ఇప్పుడు Δ AFD ఇదే రీతిలో పరిశీలించగా G అనేది AF కు మధ్యబిందువు మరియు $GE \parallel AD$ కావున DF మధ్యబిందువు E అగును.

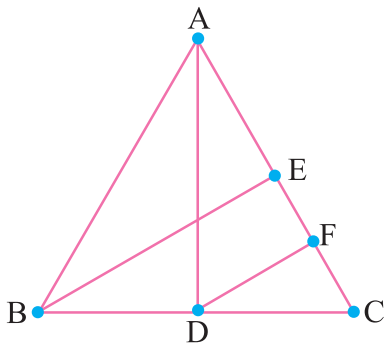
ఇందు మూలంగా $DE = EF$ అయినది.

ఈ విధంగా l, m మరియు n రేఖలు q తిర్యగ్రేఖపై కూడా సమాన అంతర ఖండాలు చేసాయి.

ఉదాహరణ-9 : ΔABC లో AD మరియు BE లు రెండు మధ్యగతరేఖలు మరియు $BE \parallel DF$ (పటంలో చూడండి).

అయిన $CF = \frac{1}{4} AC$ అని చూపండి.

నిరూపణ : Δ ABC లో BC మధ్యబిందువు D మరియు $BE \parallel DF$. మధ్యబిందువు సిద్ధాంతం ప్రకారము CE మధ్యబిందువు F అగును.

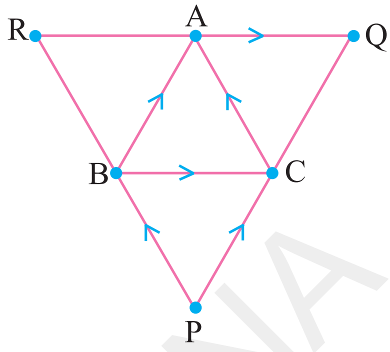


$$\therefore\ CF = \frac{1}{2} CE$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} AC\right) \quad \text{(ఎలా?)}$$

కావున $CF = \frac{1}{4} AC$ అయినది.

ఉదాహరణ-10 : ABC త్రిభుజంలో BC, CA మరియు AB భుజాలకు సమాంతరంగా A, B మరియు C ల గుండా సమాంతర రేఖలు గీస్తే అవి P, Q మరియు R ల వద్ద ఖండించుకున్నాయి. ΔPQR త్రిభుజము చుట్టు కొలత ΔABC త్రిభుజము చుట్టుకొలతకు రెట్టింపు ఉంటుందని చూపండి.



నిరూపణ : AB || QP మరియు BC || RQ కావున ABCQ ఒక సమాంతర చతుర్భుజము. ఇదేవిధంగా BCAR, ABPC లు కూడా సమాంతర చతుర్భుజాలు అవుతాయి.

$\therefore$ BC = AQ మరియు BC = RA

$\Rightarrow$ QR మధ్యబిందువు A అగును.

ఇదేవిధంగా B, C లు వరుసగా PR మరియు PQ ల మధ్యబిందువులు అవుతాయి.

$\therefore AB = \frac{1}{2}PQ;\quad BC = \frac{1}{2}QR$ మరియు $CA = \frac{1}{2}PR$ (ఎలా?)

(సంబంధిత సిద్ధాంతం చెప్పండి)

ఇప్పుడు ΔPQR చుట్టుకొలత $= PQ + QR + PR$

$= 2AB + 2BC + 2CA$

$= 2(AB + BC + CA)$

$= 2$ (ΔABC యొక్క చుట్టుకొలత).

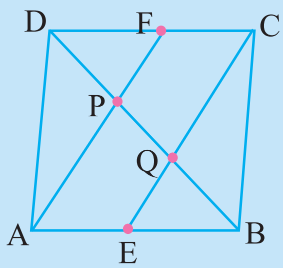
అభ్యాసం 8.4

1. ABC త్రిభుజంలో AB పై D ఒక బిందువు మరియు $AD = \frac{1}{4}AB$. ఇదే విధంగా AC పై బిందువు E మరియు $AE = \frac{1}{4}AC$. DE = 2 సెం.మీ. అయిన BC ఎంత?

2. ABCD చతుర్భుజములో AB, BC, CD మరియు DA ల మధ్యబిందువులు E, F, G మరియు H లు అయిన EFGH సమాంతర చతుర్భుజమని నిరూపించుము.

3. రాంబస్ యొక్క భుజాల మధ్యబిందువులను వరుసగా కలిపితే ఏర్పడే పటం దీర్ఘచతురస్రమని చూపండి.

4. ABCD సమాంతర చతుర్భుజములో AB, DC ల మధ్యబిందువులు వరుసగా E మరియు F అయిన AF మరియు EC రేఖాఖండాలు కర్ణము BD ని త్రిథాకరిస్తాయని చూపండి.



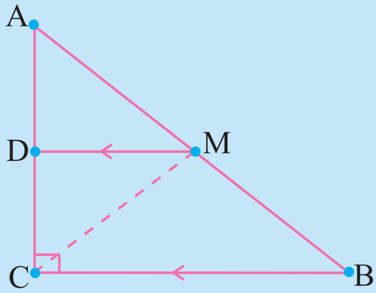
5. చతుర్భుజములో ఎదుటి భుజాల మధ్యబిందువులను కలుపుతూ గీయబడిన రేఖాఖండాలు సమద్విఖండన చేసుకుంటాయని చూపండి.

6. ABC లంబకోణ త్రిభుజములో C లంబకోణం. కర్ణము AB మధ్యబిందువు M గుండా BC కు సమాంతరముగా గీచిన రేఖ AC ని D వద్ద ఖండిస్తే కింది వానిని నిరూపించండి.

   (i) AC మధ్యబిందువు D

   (ii) $MD \perp AC$

   (iii) $CM = MA = \frac{1}{2}AB$.



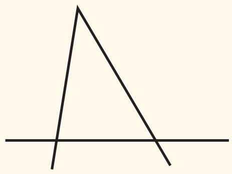
మనం ఏం నేర్చుకున్నాం?

1. సమతలములో నాలుగు రేఖలతో ఏర్పడిన సరళ సంవృత పటాలను చతుర్భుజాలు అంటారు.
2. చతుర్భుజములో నాలుగు కోణాల మొత్తం 360^0 లేదా 4 లంబకోణాలు.
3. చతుర్భుజాలలో సమలంబ చతుర్భుజం (ట్రెపీజియం), సమాంతర చతుర్భుజం, సమచతుర్భుజము (రాంబస్), దీర్ఘచతురస్రము, చతురస్రము మరియు గాలిపటము అనేవి ప్రత్యేక ధర్మాలను కలిగిన చతుర్భుజాలు.
4. సమాంతర చతుర్భుజము మరిన్ని ధర్మాలు కలిగిన ఒక ప్రత్యేక చతుర్భుజము. వీటి ధర్మాలను సిద్ధాంత పరంగా నిరూపించడము జరిగింది.
   a) సమాంతర చతుర్భుజమును కర్ణము రెండు సర్వసమాన త్రిభుజాలుగా విభజిస్తుంది.
   b) సమాంతర చతుర్భుజములోఎదుటి భుజాలు మరియు కోణాలు సమానము.
   c) చతుర్భుజములో ప్రతి జత ఎదుటి భుజాలు సమానము అయితే అది సమాంతర చతుర్భుజము అవుతుంది.
   d) ఒక చతుర్భుజములో ప్రతిజత ఎదుటి కోణాలు సమానము అయితే అది సమాంతర చతుర్భుజము అగును.
   e) సమాంతర చతుర్భుజములో కర్ణాలు పరస్పరము సమద్విఖండన చేసుకుంటాయి.
   f) ఒక చతుర్భుజములో కర్ణములు పరస్పరము సమద్విఖండన చేసుకుంటే అది సమాంతర చతుర్భుజం అవుతుంది.
5. త్రిభుజ భుజాల మధ్యబిందువు సిద్ధాంతం, దాని విపర్యయము
   a) ఒక త్రిభుజములో రెండు భుజాల మధ్యబిందువులను కలుపుతూ గీయబడిన రేఖ, మూడవ భుజానికి సమాంతరముగానూ మరియు దానిలో సగము ఉంటుంది.
   b) ఒక త్రిభుజములో ఒక భుజము యొక్క మధ్యబిందువు నుండి వేరొక భుజానికి సమాంతరముగా గీయబడిన రేఖ, మూడవ భుజాన్ని సమద్విఖండన చేస్తుంది.

K5G6A7

మెదడుకు మేత

1. త్రిభుజ పదకేళిని తయారుచేయండి. కింది పటానికి మరి రెండు రేఖలను జత చేస్తే 10 త్రిభుజాలు ఏర్పడాలి. పటం ఏర్పరచి త్రిభుజాలు లెక్కించండి.



2. 16 సెం.మీ. పొడవు, 9 సెం.మీ. వెడల్పు గల ఒక దీర్ఘచతురస్రాకార కాగితాన్ని తీసుకోండి. దానిని ఖచ్చితంగా రెండు భాగాలు (రెండే రెండు!) చేసి కలిపి, – చతురస్రంగా మార్చండి.