अध्याय 10

सदिश बीजगणित

10.1 समग्र अवलोकन (Overview)

10.1.1 एक ऐसी राशि जिसमें परिमाण एवं दिशा दोनों होते हैं, **सदिश कहलाती** है।

10.1.2 सदिश $\vec{a}$ की दिशा में मात्रक सदिश $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ होता है और जिसे $\hat{a}$ से निरूपित करते हैं।

10.1.3 किसी बिंदु P (x, y, z) की स्थिति सदिश $\overrightarrow{OP} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ होता है और इसका परिमाण $|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ होता है, जहाँ O मूल बिंदु है।

10.1.4 एक सदिश के अदिश घटक इसके दिक्-अनुपात होते हैं और क्रमागत अक्षों के साथ इसके 'प्रक्षेप' को निरूपित करते हैं।

10.1.5 एक सदिश का परिमाण r, दिक्-अनुपात (a, b, c) और दिक्-कोसाइन l, m, n निम्नलिखित रूप से संबंधित हैं :

$$l = \frac{a}{r},\ m = \frac{b}{r},\ n = \frac{c}{r}$$

10.1.6 त्रिभुज की तीनों भुजाओं को क्रमागत निरूपित करने वाले सदिशों का योग $\vec{0}$ होता है।

10.1.7 सदिश के योग के त्रिभुज नियम के अनुसार "यदि दो सदिशों को किसी त्रिभुज की दो क्रमागत भुजाओं से निरूपित किया जाए, तो उनका योग या परिणामी सदिश उस त्रिभुज की विपरीत क्रम में ली गई तीसरी भुजा से निरूपित होता है।"

10.1.8 ***अदिश गुणन*** यदि $\vec{a}$ एक दिया हुआ सदिश है और λ एक अदिश है तो $\lambda\vec{a}$ एक सदिश है, जिसका परिमाण $|\lambda\vec{a}| = |\lambda|\,|\vec{a}|$. यदि λ धनात्मक है तो $\lambda\vec{a}$ की दिशा $\vec{a}$ की दिशा के समान होती है तथा यदि λ ऋणात्मक है तो $\lambda\vec{a}$ की दिशा $\vec{a}$ की दिशा के विपरीत होती है।

10.1.9 दो बिंदुओं को मिलाने वाला सदिश यदि $P_1 (x_1, y_1, z_1)$ और $P_2 (x_2, y_2, z_2)$ कोई दो बिंदु हैं

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1)\,\hat{i} + (y_2 - y_1)\,\hat{j} + (z_2 - z_1)\,\hat{k}$$

$$|\overrightarrow{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

10.1.10 खंड सूत्र (Section formula)

एक बिंदु R का स्थित सदिश, जो बिंदु P और Q, जिनके स्थिति सदिश क्रमशः $\vec{a}$ और $\vec{b}$ है को

(i) $m : n$ के अनुपात में अंतः विभाजित करता है, $\dfrac{n\vec{a} + m\vec{b}}{m + n}$ होता है

(ii) $m : n$ के अनुपात में बाह्य विभाजित करता है, $\dfrac{m\vec{b} - n\vec{a}}{m - n}$ होता है

10.1.11 सदिश $\vec{a}$ का $\vec{b}$ के अनुदिश प्रक्षेप $\dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}$ होता है और $\vec{a}$ का $\vec{b}$ के अनुदिश प्रक्षेप सदिश

$\left(\dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}\right)\vec{b}$ होता है।

10.1.12 अदिश गुणनफल (Scalar or dot product) दो सदिशों $\vec{a}$ और $\vec{b}$ जिनके बीच का कोण θ है, का अदिश गुणनफल $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos\theta$ द्वारा परिभाषित है।

10.1.13 सदिश गुणनफल (Vector or cross product) दो सदिशों $\vec{a}$ और $\vec{b}$, जिनके बीच का कोण θ है, का सदिश गुणनफल $\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \sin\theta\ \hat{n}$, जहाँ $\hat{n}$ एक मात्रक सदिश है जो $\vec{a}$ और $\vec{b}$ को अंतर्विष्ट करने वाले तल पर लंब है और $\vec{a}, \vec{b}, \hat{n}$ एक दक्षिणावर्ती पद्धति निर्मित करते हैं।

10.1.14 यदि $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$ और $\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$ दो सदिश हैं तथा λ एक अदिश है तब

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1)\hat{i} + (a_2 + b_2)\hat{j} + (a_3 + b_3)\hat{k}$$

$$\lambda \vec{a} = (\lambda a_1)\hat{i} + (\lambda a_2)\hat{j} + (\lambda a_3)\hat{k}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = (b_1c_2 - b_2c_1)\hat{i} + (a_2c_1 - c_1c_2)\hat{j} + (a_1b_b - a_2b_1)\hat{k}$$

दो सदिशों $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के बीच का कोण निम्नलिखित नियम से प्राप्त होता है–

$$\cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

10.2 हल किए हुए उदाहरण

लघु उत्तरीय प्रश्न Short Answer (S.A.)

उदाहरण 1 सदिशों $\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ और $\vec{b} = -\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$ के योग के अनुदिश मात्रक सदिश ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए कि $\vec{c}$, $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के योग को व्यक्त करता है। तब

$$\vec{c} = (2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}) + (-\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}) = \hat{i} + 5\hat{k}$$

अब $|\vec{c}| = \sqrt{1^2 + 5^2} = \sqrt{26}$

इसलिए, अभीष्ट मात्रक सदिश $\hat{c} = \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|} = \frac{1}{\sqrt{26}}(\hat{i} + 5\hat{k}) = \frac{1}{\sqrt{26}}\hat{i} + \frac{5}{\sqrt{26}}\hat{k}$

उदाहरण 2 यदि बिंदु P और Q क्रमशः (1, 3, 2) और (–1, 0, 8) है, तो $\overrightarrow{PQ}$, के विपरीत दिशा में परिमाण 11 का एक सदिश ज्ञात कीजिए।

हल सदिश जिसका प्रारंभिक बिंदु P (1, 3, 2) है और अंतिम बिंदु Q (–1, 0, 8) है, निम्नलिखित है

$$\overrightarrow{PQ} = (-1-1)\ \hat{i} + (0-3)\ \hat{j} + (8-2)\ \hat{k} = -2\ \hat{i} - 3\ \hat{j} + 6\ \hat{k}$$

इसलिए $\overrightarrow{QP} = -\ \overrightarrow{PQ} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 6\hat{k}$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{QP}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + (-6)^2} = \sqrt{4+9+36} = \sqrt{49} = 7$$

इस प्रकार, $\overrightarrow{QP}$ की दिशा में मात्रक सदिश $\hat{QP} \quad \frac{\overrightarrow{Q\,P}}{|\overrightarrow{Q\,P}|} \quad \frac{2\,\hat{i} \quad 3\,\hat{j} \quad 6\,\hat{k}}{7}$ है।

अतः $\overrightarrow{QP}$ की दिशा में परिमाण 11 का अभीष्ट सदिश निम्नलिखित है

$$11\ \hat{QP} = 11 \quad \frac{2\hat{i} \quad 3\hat{j} \quad 6\hat{k}}{7} = \frac{22}{7}\hat{i} + \frac{33}{7}\hat{j} - \frac{66}{7}\hat{k}.$$

उदाहरण 3 P और Q दो बिंदुओं के स्थिति सदिश क्रमशः $\overrightarrow{OP} \quad 2\,\vec{a} \quad \vec{b}$ और $\overrightarrow{OQ} \quad \vec{a} - 2\,\vec{b}$ हैं। एक ऐसे बिंदु R का स्थिति सदिश ज्ञात कीजिए जो PQ को 1:2 के अनुपात में (i) अंतः और (ii) बाह्यतः विभाजित करता है।

हल (i) P और Q को 1:2 के अनुपात में अंतः विभाजित करने वाले बिंदु R का स्थिति सदिश निम्नलिखित है

$$\overrightarrow{OR} \quad \frac{2(2\vec{a} \quad \vec{b}) \quad 1(\vec{a} - 2\vec{b})}{1 \quad 2} \quad \frac{5\vec{a}}{3}$$

(ii) P और Q को 1: 2 के अनुपात में बाह्यतः विभाजित करने वाले बिंदु R′ का स्थिति सदिश निम्नलिखित है

$$\overrightarrow{OR'} = \frac{2(2\bar{a} + \vec{b}) - 1(\vec{a} - 2\bar{b})}{2-1} = 3\vec{a} + 4\vec{b}$$

उदाहरण 4 यदि बिंदु (–1, –1, 2), (2, m, 5) और (3,11, 6) सरेखी, हैं तो m का मान ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए कि दिए हुए बिंदु A (–1, –1, 2), B (2, m, 5) और C (3, 11, 6) हैं।

तब $\overrightarrow{AB} = (2+1)\ \hat{i} + (m+1)\ \hat{j} + (5-2)\ \hat{k} = 3\ \hat{i} + (m+1)\ \hat{j} + 3\hat{k}$

और $\qquad \overrightarrow{AC} = (3+1)\,\hat{i} + (11+1)\,\hat{j} + (6-2)\,\hat{k} \quad = 4\,\hat{i} + 12\,\hat{j} + 4\hat{k}$

क्योंकि A, B, C, संरेखी है, $\overrightarrow{AB} = \lambda\, \overrightarrow{AC}$, अर्थात्,

$$(3\,\hat{i} \quad (m \quad 1)\,\hat{j} \quad 3\hat{k}) \quad \lambda(4\hat{i}+12\hat{j}+4\hat{k})$$

$\Rightarrow \qquad 3 = 4\,\lambda$ और $m + 1 = 12\,\lambda$

इसलिए $\qquad m = 8$

उदाहरण 5 परिमाण $3\sqrt{2}$ का एक सदिश $\vec{r}$ ज्ञात कीजिए जो y और z -अक्षों से क्रमशः कोण $\frac{\pi}{4}$ और $\frac{\pi}{2}$ बनाता है।

हल यहाँ $m = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ और $n = \cos\frac{\pi}{2} = 0$

इसलिए $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ से

$$l^2 + \frac{1}{2} + 0 \quad = 1$$

$$\Rightarrow \qquad l \quad = \quad \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

अतः अभीष्ट सदिश $\vec{r} = 3\sqrt{2}\ \ (l\,\hat{i} + m\,\hat{j} + n\,\hat{k})$

$$\vec{r} = 3\sqrt{2}\ (\ \ \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{i} \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{j} \quad 0\hat{k}) \Rightarrow \vec{r} = \pm 3\hat{i} + 3\hat{j}$$

उदाहरण 6 यदि $\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$, $\vec{b} = \hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ और $\vec{c} = \hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$, तो λ का वह मान ज्ञात कीजिए जिससे $\vec{a}$ सदिश $\vec{b}$ $\vec{c}$ पर लंब हो।

हल हम जानते हैं कि

$$\lambda\vec{b} + \vec{c} = \lambda\,(\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}) + (\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k})$$

$$= (\lambda + 1)\,\hat{i} + (\lambda + 3)\,\hat{j} - (2\lambda + 1)\,\hat{k}$$

क्योंकि $\vec{a} \perp (\lambda\vec{b} + \vec{c})$ इसलिए $\vec{a}\,.(\lambda\vec{b} + \vec{c}) = 0$

$$\Rightarrow (2\,\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})\,.\,[(\lambda + 1)\,\hat{i} + (\lambda + 3)\,\hat{j} - (2\lambda + 1)\hat{k}] = 0$$

$$\Rightarrow 2\,(\lambda + 1) - (\lambda + 3) - (2\lambda + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = -2$$

उदाहरण 7 परिमाण $10\sqrt{3}$ वाले उन सभी सदिशों को ज्ञात कीजिए जो $\hat{i}\quad 2\hat{j}\quad \hat{k}$ और $\hat{i}\quad 3\hat{j}\quad 4\hat{k}$ को अंतर्विष्ट करने वाले तल पर लंब हो।

हल मान लीजिए कि $\vec{a} = \hat{i}\quad 2\hat{j}\quad \hat{k}$ और $\vec{b} = \quad \hat{i}\quad 3\hat{j}\quad 4\hat{k}$ तब

$$\vec{a}\quad \vec{b}\quad \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{vmatrix}\quad \hat{i}(8\quad 3)\quad \hat{j}(4\quad 1)\quad \hat{k}(3\quad 2) = 5\hat{i} - 5\hat{j} + 5\hat{k}$$

$$\Rightarrow \qquad |\vec{a}\quad \vec{b}|\quad \sqrt{(5)^2\quad (\quad 5)^2\quad (5)^2}\quad \sqrt{3(5)^2}\quad 5\sqrt{3}$$

इसलिए $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के तल के लंबवत मात्रक सदिश निम्नलिखित है

$$\frac{\vec{a}\quad \vec{b}}{|\vec{a}\quad \vec{b}|}\quad \frac{5\hat{i}\quad 5\hat{j}\quad 5\hat{k}}{5\sqrt{3}}$$

अत: $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के तल के लंबवत $10\sqrt{3}$ परिमाण वाला सदिश $\quad 10\sqrt{3}\quad \dfrac{5\hat{i}\quad 5\hat{j}\quad 5\hat{k}}{5\sqrt{3}}$,

अर्थात् $\quad 10(\hat{i}\quad \hat{j}\quad \hat{k})$ हैं।

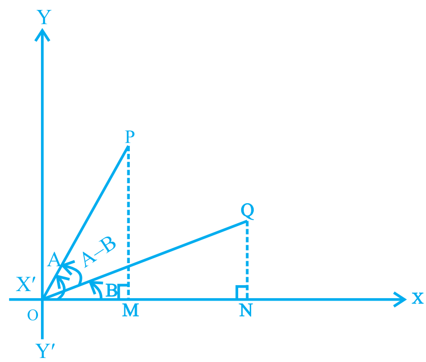
दीर्घ उत्तरीय प्रश्न (L.A.)

उदाहरण 8 सदिशों के प्रयोग द्वारा सिद्ध कीजिए कि cos (A – B) = cosA cosB + sinA sinB

हल माना $\overrightarrow{OP}$ और $\overrightarrow{OQ}$, मात्रक सदिश हैं जो x-अक्ष की धनात्मक दिशाओं के साथ क्रमशः A और B कोण बनाते हैं। तब $\angle QOP = A - B$ [आकृति 10.1]

हम जानते हैं कि $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MP} \quad \hat{i}\cos A + \hat{j}\sin A$ और

$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NQ} = \hat{i}\cos B + \hat{j}\sin B$.



आकृति 10.1

परिभाषा से $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} \quad |\overrightarrow{OP}|\,|\overrightarrow{OQ}| \cos \, A\text{-}B$

$= \cos (A - B)$ ... (1)

$\left(\text{क्योंकि } |\overrightarrow{OP}| = 1 = |\overrightarrow{OQ}| \right)$

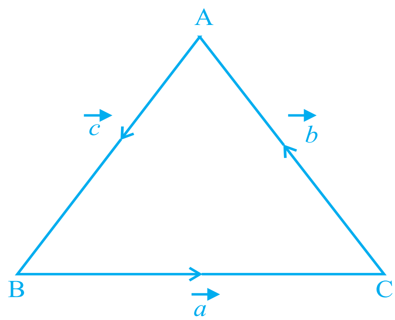
घटकों के पदों में,

$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = (\hat{i}\cos A \quad \hat{j}\sin A).(\hat{i}\cos B \quad \hat{j}\sin B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$ ... (2)

(1) और (2), से

cos (A – B) = cosA cosB + sinA sinB

उदाहरण 9 सिद्ध कीजिए कि किसी Δ ABC, में $\dfrac{\sin A}{a} \quad \dfrac{\sin B}{b} \quad \dfrac{\sin C}{c}$, जहाँ a, b, c क्रमशः A, B, C शीर्षों की सम्मुख भुजाओं के परिमाण को निरूपित करते हैं।



आकृति 10.2

हल मान लीजिए कि $\vec{a}, \vec{b}$ और $\vec{c}$ द्वारा निरूपित त्रिभुज की तीनों भुजाएँ क्रमशः BC, CA और AB हैं [आकृति 10.2].

हम जानते हैं कि $\vec{a} \quad \vec{b} \quad \vec{c} \quad \vec{0}$. अर्थात् $\vec{a} \quad \vec{b} \quad \vec{c}$

उपर्युक्त समिका का $\vec{a}$ द्वारा बाएँ ओर से सदिश गुणनफल

तथा $\vec{b}$ द्वारा दाहिने ओर से सदिश गुणनफल प्राप्त करके सरल करने पर

$$\vec{a} \quad \vec{b} \quad \vec{b} \quad \vec{c} \quad \vec{c} \quad \vec{a}$$

$\Rightarrow$ $$|\vec{a} \quad \vec{b}| \quad |\vec{b} \quad \vec{c}| \quad |\vec{c} \quad \vec{a}|$$

$\Rightarrow$ $$|\vec{a}||\vec{b}|\sin(\quad - C) \quad |\vec{b}||\vec{c}|\sin(\quad - A) \quad |\vec{c}||\vec{a}|\sin(\quad - B)$$

$\Rightarrow$ $$ab \sin C = bc \sin A = ca \sin B$$

प्रत्येक पद को abc से भाग देने पर

$$\frac{\sin C}{c} \quad \frac{\sin A}{a} \quad \frac{\sin B}{b} \text{ अर्थात् } \frac{\sin A}{a} \quad \frac{\sin B}{b} \quad \frac{\sin C}{c}$$

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

उदाहरण 10 से 21 तक प्रत्येक में दिए हुए चार विकल्पों में से सही उत्तर चुनिए–

उदाहरण 10 सदिश $6\hat{i} \quad 2\hat{j} \quad 3\hat{k}$ का परिमाण है

(A) 5 (B) 7 (C) 12 (D) 1

हल सही उत्तर (B) है।

उदाहरण 11 उस बिंदु का स्थिति सदिश, जो दो बिंदुओं, जिनके स्थिति सदिश क्रमशः $\vec{a} \quad \vec{b}$ और $2\vec{a} \quad \vec{b}$ हैं, को 1 : 2 के अनुपात में विभाजित करता है,

(A) $\frac{3\vec{a} \quad 2\vec{b}}{3}$ (B) $\vec{a}$ (C) $\frac{5\vec{a} \quad \vec{b}}{3}$ (D) $\frac{4\vec{a} \quad \vec{b}}{3}$

हल सही उत्तर (D) है। खंड सूत्र के प्रयोग से अभीष्ट बिंदु का स्थिति सदिश निम्नलिखित है

$$\frac{2(\vec{a} \quad \vec{b}) \quad 1(2\vec{a} \quad \vec{b})}{2 \quad 1} \quad \frac{4\vec{a} \quad \vec{b}}{3}$$

उदाहरण 12 प्रारंम्भिक बिंदु P (2, – 3, 5) और अंतिम बिंदु Q(3, – 4, 7) वाला सदिश है

(A) $\hat{i} \quad \hat{j} \quad 2\hat{k}$ (B) $5\hat{i} \quad 7\hat{j} \quad 12\hat{k}$ (C) $\hat{i} \quad \hat{j} \quad 2\hat{k}$ (D) इनमें से कोई नहीं

हल सही उत्तर (A) है।

उदाहरण 13 सदिश $\hat{i} \quad \hat{j}$ और सदिश $\hat{j} \quad \hat{k}$ के बीच का कोण है

(A) $\frac{}{3}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{}{3}$ (D) $\frac{5}{6}$

हल सही उत्तर (B) है। सूत्र $\cos\theta = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}$ का प्रयोग कीजिए।

उदाहरण 14 x का वह मान जिसके लिए सदिश $2\hat{i} \quad \hat{j} \quad 2\hat{k}$ और सदिश $3\hat{i} \quad \hat{j} \quad \hat{k}$ लंबवत है तो λ बराबर है

(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8

हल सही उत्तर (D) है।

उदाहरण 15 समांतर चतुर्भुज, का क्षेत्रफल जिसकी संलग्न भुजाएँ $\hat{i} \quad \hat{k}$ और $2\hat{i} \quad \hat{j} \quad \hat{k}$ है

(A) $\sqrt{2}$ (B) $\sqrt{3}$ (C) 3 (D) 4

हल सही उत्तर (B) है। समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल जिसकी संलग्न भुजाएँ $\vec{a}$ और $\vec{b}$ हैं $|\vec{a} \quad \vec{b}|$ होता है।

उदाहरण 16 यदि $|\vec{a}| = 8, |\vec{b}| \quad 3$ और $|\vec{a} \quad \vec{b}| \quad 12$ है, तो $\vec{a}.\vec{b}$ बराबर है

(A) $6\sqrt{3}$ (B) $8\sqrt{3}$ (C) $12\sqrt{3}$ (D) इनमें से कोई नहीं

हल सही उत्तर (C) है। सूत्र $|\vec{a} \quad \vec{b}| \quad |\vec{a}|.|\vec{b}||\sin\theta|$ के प्रयोग से $\theta = \pm\frac{\pi}{6}$ ।

इसलिए, $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|\cos \quad = 8 \times 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}$

उदाहरण 17 दो सदिश $\hat{j}+\hat{k}$ और $3\hat{i}-\hat{j}+4\hat{k}$ किसी ΔABC की क्रमशः दो भुजाओं AB और AC को निरूपित करते हैं। बिंदु A से हो कर जाने वाली मध्यिका (मीडियन) की लंबाई है

(A) $\frac{\sqrt{34}}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{48}}{2}$ (C) $\sqrt{18}$ (D) इनमें से कोई नहीं

हल सही उत्तर (A) है। मध्यिका $\overrightarrow{AD}$ को निम्नलिखित प्रकार से व्यक्त कर सकते हैं।

$$\left|\overrightarrow{AD}\right| = \frac{1}{2}\left|3\hat{i}+5\hat{k}\right| = \frac{\sqrt{34}}{2}$$

उदाहरण 18 सदिश $\vec{a} \quad 2\hat{i} \quad \hat{j} \quad \hat{k}$ का सदिश $\vec{b} \quad \hat{i} \quad 2\hat{j} \quad 2\hat{k}$ के अनुदिश प्रक्षेप बराबर है

(A) $\frac{2}{3}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) 2 (D) $\sqrt{6}$

हल सही उत्तर (A) है। सदिश $\vec{a}$ का सदिश $\vec{b}$ के अनुदिश प्रक्षेप

$$\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{(2\hat{i} \quad \hat{j} \quad \hat{k}).(\hat{i} \quad 2\hat{j} \quad 2\hat{k})}{\sqrt{1 \quad 4 \quad 4}} = \frac{2}{3} \text{ ।}$$

उदाहरण 19 यदि $\vec{a}$ और $\vec{b}$ मात्रक सदिश हैं तो $\sqrt{3}\vec{a} \quad \vec{b}$ के मात्रक सदिश होने के लिए $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के बीच क्या कोण होगा?

(A) 30° (B) 45° (C) 60° (D) 90°

हल सही उत्तर (A) है। हम जानते हैं कि $(\sqrt{3}\vec{a} \quad \vec{b})^2 \quad 3\vec{a}^2 \quad \vec{b}^2 \quad 2\sqrt{3}\,\vec{a}.\vec{b}$

$$\Rightarrow \quad \vec{a}.\vec{b} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \theta = 30°$$

उदाहरण 20 एक मात्रक सदिश जो सदिशों $\hat{i} \quad \hat{j}$ और $\hat{i} \quad \hat{j}$ दोनों के लंबवत है तथा एक दक्षिणावर्ती पद्धति को निर्मित करने वाला सदिश है।

(A) $\hat{k}$ (B) $-\hat{k}$ (C) $\frac{\hat{i} \quad \hat{j}}{\sqrt{2}}$ (D) $\frac{\hat{i} \quad \hat{j}}{\sqrt{2}}$

हल सही उत्तर (A) है। अभीष्ट मात्रक सदिश $\frac{\hat{i} \quad \hat{j} \quad \hat{i} \quad \hat{j}}{|\hat{i} \quad \hat{j} \quad \hat{i} \quad \hat{j}|} = \frac{2\hat{k}}{2} \quad \hat{k}$ है।

उदाहरण 21 यदि $|\vec{a}| \quad 3$ और $-1 \quad k \quad 2$ है तो $|k\vec{a}|$ निम्नलिखित में से किस अंतराल में है?

(A) [0, 6] (B) [– 3, 6] (C) [3, 6] (D) [1, 2]

हल सही उत्तर (A) है। $|k\vec{a}|$ का न्यूनतम मान, k, के न्यूनतम संख्यात्मक मान पर होगा। अर्थात् जब $k = 0$ हो और तब $|k\vec{a}| \quad |k||\vec{a}| \quad 0 \quad 3 \quad 0$, k का संख्यात्मक अधिकतम मान 2 है जिस पर $|k\vec{a}| \quad 6$

10.3 प्रश्नावली

लघुउत्तरीय प्रश्न Short Answer (S.A.)

1. सदिश $\vec{a} \quad 2\hat{i} \quad \hat{j} \quad \hat{k}$ और $\vec{b} \quad 2\hat{j} \quad \hat{k}$ के योग के अनुदिश मात्रक सदिश ज्ञात कीजिए।

2. यदि $\vec{a} \quad \hat{i} \quad \hat{j} \quad 2\hat{k}$ और $\vec{b} \quad 2\hat{i} \quad \hat{j} \quad 2\hat{k}$, की दिशाओं में मात्रक सदिश है

(i) $6\vec{b}$ (ii) $2\vec{a} \quad \vec{b}$

3. $\overrightarrow{PQ}$, की दिशा में मात्रक सदिश ज्ञात कीजिए जहाँ P और Q के निर्देशांक क्रमशः (5, 0, 8) और (3, 3, 2) हैं।

4. यदि $\vec{a}$ और $\vec{b}$ बिंदु A और B के क्रमशः स्थिति सदिश हैं तथा बढ़ाई गई BA में एक बिंदु C इस प्रकार है कि BC = 1.5 BA, तो C का स्थिति सदिश ज्ञात कीजिए।

5. सदिशों के प्रयोग से k का मान ज्ञात कीजिए ताकि बिंदु (k, – 10, 3), (1, –1, 3) और (3, 5, 3) संरेखी हों।

6. एक सदिश $\vec{r}$ तीनों अक्षों से समान कोण पर झुका हुआ है। यदि $\vec{r}$ का परिमाण $2\sqrt{3}$ इकाई है तो $\vec{r}$ ज्ञात कीजिए।

7. एक सदिश $\vec{r}$ का परिमाण 14 है तथा दिक्-अनुपात 2, 3, – 6 हैं। $\vec{r}$ के दिक्-कोसाइन और घटक ज्ञात कीजिए जब कि यह दिया है कि x-अक्ष से $\vec{r}$ न्यून कोण बनता है।

8. परिमाण 6 का एक सदिश ज्ञात कीजिए जो दोनों ही सदिशों $2\hat{i} \quad \hat{j} \quad 2\hat{k}$ और $4\hat{i} - \hat{j} \quad 3\hat{k}$ पर लंब है।

9. सदिशों $2\hat{i} \quad \hat{j} \quad \hat{k}$ और $3\hat{i} \quad 4\hat{j} \quad \hat{k}$ के बीच का कोण ज्ञात कीजिए।

10. यदि $\vec{a} \quad \vec{b} \quad \vec{c} \quad 0$, तो सिद्ध कीजिए कि $\vec{a} \quad \vec{b} \quad \vec{b} \quad \vec{c} \quad \vec{c} \quad \vec{a}$ इस परिणाम का ज्यामितीय विमोचन कीजिए।

11. सदिश $\vec{a} \quad 3\hat{i} \quad \hat{j} \quad 2\hat{k}$ तथा सदिश $\vec{b} \quad 2\hat{i} \quad 2\hat{j} \quad 4\hat{k}$ के बीच का sine ज्ञात कीजिए।

12. यदि A, B, C, D बिंदुओं के स्थिति सदिश क्रमशः $\hat{i} \quad \hat{j} \quad \hat{k}$, $2\hat{i} \quad \hat{j} \quad 3\hat{k}$, $2\hat{i} \quad 3\hat{k}$, $3\hat{i} \quad 2\hat{j} \quad \hat{k}$, है तो $\overrightarrow{AB}$ का $\overrightarrow{CD}$ अनुदिश प्रक्षेप ज्ञात कीजिए।

13. सदिशों के प्रयोग से त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए यदि जिसके शीर्ष A(1, 2, 3), B(2, – 1, 4) और C(4, 5, – 1) है।

14. सदिशों के प्रयोग से सिद्ध कीजिए कि एक ही आधार और एक ही समांतर रेखाओं के मध्य स्थित समांतर चतुर्भुजों के क्षेत्रफल बराबर होते हैं।

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न (L.A.)

15. सिद्ध कीजिए कि किसी त्रिभुज ABC में $\cos A \quad \dfrac{b^2 \quad c^2 - a^2}{2bc}$, होता है जहाँ a, b, c क्रमशः शीर्षों A, B, C, की सम्मुख भुजाओं के परिमाण हैं।

16. यदि $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ किसी त्रिभुज के शीर्षों को निर्धारित करते हैं तो, सिद्ध कीजिए कि त्रिभुज का क्षेत्रफल $\dfrac{1}{2} \quad \vec{b} \quad \vec{c} \quad \vec{c} \quad \vec{a} \quad \vec{a} \quad \vec{b}$ है। इसके प्रयोग से तीन बिंदुओं $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ के संरेखी होने के प्रतिबंध का निगमन कीजिए। साथ ही त्रिभुज के तल पर अभिलंब मात्रक सदिश भी ज्ञात कीजिए।

17. सिद्ध कीजिए कि समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल, जिसके विकर्ण $\vec{a}$ और $\vec{b}$ द्वारा व्यक्त हैं, $\dfrac{|\vec{a} \quad \vec{b}|}{2}$ है। साथ ही उस समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल भी ज्ञात कीजिए जिसके विकर्ण $2\hat{i} \quad \hat{j} \quad \hat{k}$ और $\hat{i} \quad 3\hat{j} \quad \hat{k}$ है।

18. यदि $\vec{a} = \hat{i} \quad \hat{j} \quad \hat{k}$ और $\vec{b} \quad \hat{j} \quad \hat{k}$ तो सदिश $\vec{c}$ ज्ञात कीजिए इस प्रकार कि $\vec{a} \quad \vec{c} \quad \vec{b}$ और $\vec{a}.\vec{c} \quad 3$.

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

प्रश्न 19 से 33 तक प्रत्येक में दिए हुए चार विकल्पों में से सही उत्तर चुनिए–

19. सदिश $\hat{i} \quad 2\hat{j} \quad 2\hat{k}$ की दिशा में परिमाण 9 वाला सदिश है

(A) $\hat{i} \quad 2\hat{j} \quad 2\hat{k}$ (B) $\frac{\hat{i} \quad 2\hat{j} \quad 2\hat{k}}{3}$ (C) $3(\hat{i} \quad 2\hat{j} \quad 2\hat{k})$ (D) $9(\hat{i} \quad 2\hat{j} \quad 2\hat{k})$

20. बिंदु $2\vec{a} \quad 3\vec{b}$ और $\vec{a} \quad \vec{b}$ को मिलाने वाले रेखाखंड को 3 : 1 में विभाजित करने वाले बिंदु का स्थिति सदिश है

(A) $\frac{3\vec{a} \quad 2\vec{b}}{2}$ (B) $\frac{7\vec{a} \quad 8\vec{b}}{4}$ (C) $\frac{3\vec{a}}{4}$ (D) $\frac{5\vec{a}}{4}$

21. सदिश जिसका प्रारंभिक और अंतिम बिंदु क्रमशः (2, 5, 0) और (–3, 7, 4) है निम्नलिखित है

(A) $\hat{i} \quad 12\hat{j} \quad 4\hat{k}$ (B) $5\hat{i} \quad 2\hat{j} \quad 4\hat{k}$ (C) $5\hat{i} \quad 2\hat{j} \quad 4\hat{k}$ (D) $\hat{i} \quad \hat{j} \quad \hat{k}$

22. दो सदिशों $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के परिमाण क्रमशः $\sqrt{3}$ और 4 हैं तथा $\vec{a}.\vec{b} \quad 2\sqrt{3}$ है। इनके बीच का कोण है

(A) $\frac{}{6}$ (B) $\frac{}{3}$ (C) $\frac{}{2}$ (D) $\frac{5}{2}$

23. यदि सदिश $\vec{a} \quad 2\hat{i} \quad \hat{j} \quad \hat{k}$ और $\vec{b} \quad \hat{i} \quad 2\hat{j} \quad 3\hat{k}$ लांबिक (orthogonol) हों तो λ का मान है

(A) 0 (B) 1 (C) $\frac{3}{2}$ (D) $-\frac{5}{2}$

24. यदि सदिश $3\hat{i}-6\hat{j}+\hat{k}$ और $2\hat{i}-4\hat{j}+\lambda\hat{k}$ समांतर हैं तो λ का मान है

(A) $\frac{2}{3}$ (B) $\frac{3}{2}$ (C) $\frac{5}{2}$ (D) $\frac{2}{5}$

25. मूल बिंदु से A और B बिंदुओं के सदिश क्रमशः $\vec{a}=2\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k}$ और $\vec{b}=2\hat{i}+3\hat{j}+\hat{k}$ हों तो त्रिभुज OAB का क्षेत्रफल है

(A) 340 (B) $\sqrt{25}$ (C) $\sqrt{229}$ (D) $\frac{1}{2}\sqrt{229}$

26. किसी भी सदिश $\vec{a}$ के लिए $(\vec{a} \quad \hat{i})^2 \quad (\vec{a} \quad \hat{j})^2 \quad (\vec{a} \quad \hat{k})^2$ का मान बराबर है

(A) $\vec{a}^2$ (B) $3\vec{a}^2$ (C) $4\vec{a}^2$ (D) $2\vec{a}^2$

27. यदि $|\vec{a}| = 10, |\vec{b}| = 2$ और $\vec{a}.\vec{b} \quad 12$ हो तो $|\vec{a} \quad \vec{b}|$ का मान है

(A) 5 (B) 10 (C) 14 (D) 16

28. सदिश $\lambda\hat{i}+\hat{j}+2\hat{k}$, $\hat{i}+\lambda\hat{j}-\hat{k}$ और $2\hat{i}-\hat{j}+\lambda\hat{k}$ समतलीय हैं यदि

(A) $\lambda = -2$ (B) $\lambda = 0$ (C) $\lambda = 1$ (D) $\lambda = -1$

29. यदि $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ इस प्रकार के मात्रक सदिश हैं कि $\vec{a} \quad \vec{b} \quad \vec{c} \quad \vec{0}$ है तो $\vec{a}.\vec{b} \quad \vec{b}.\vec{c} \quad \vec{c}.\vec{a}$ का मान

(A) 1 (B) 3 (C) $-\frac{3}{2}$ (D) इनमें से कोई नहीं है

30. सदिश $\vec{a}$ का सदिश $\vec{b}$ पर प्रक्षेप

(A) $\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b}$ (B) $\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|}$ (C) $\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|}$ (D) $\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|^2} \hat{b}$ है

31. यदि तीन सदिश $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ इस प्रकार हैं कि $\vec{a} \quad \vec{b} \quad \vec{c} \quad \vec{0}$ और $|\vec{a}| \quad 2, |\vec{b}| \quad 3, |\vec{c}| \quad 5$ है, तो $\vec{a}.\vec{b} \quad \vec{b}.\vec{c} \quad \vec{c}.\vec{a}$ का मान

(A) 0 (B) 1 (C) – 19 (D) 38 है

32. यदि $|\vec{a}| \quad 4$ और $3 \qquad 2$ है तो $|\quad \vec{a}|$ का अंतराल है

(A) [0, 8] (B) [– 12, 8] (C) [0, 12] (D) [8, 12]

33. सदिशों $\vec{a} = 2\hat{i}+\hat{j}+2\hat{k}$ और $\vec{b} = \hat{j}+\hat{k}$ दोनों ही पर मात्रक लंब सदिशों की संख्या है

(A) एक (B) दो (C) तीन (D) असंख्य

प्रश्न 34 से 40 तक प्रत्येक में रिक्त स्थान की पूर्ति कीजिए–

34. सदिश $\vec{a} + \vec{b}$ असंरेखी सदिशों $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के बीच के कोण को समद्विभाजित करता है यदि

____

35. यदि किसी शून्येतर सदिश $\vec{r}$ के लिए $\vec{r}.\vec{a}=0, \vec{r}.\vec{b}=0,$ और $\vec{r}.\vec{c}=0$ तब $\vec{a}.(\vec{b}\ \ \vec{c})$ का मान ________ के बराबर है।

36. सदिश $\vec{a}\ \ 3i\ \ 2j\ \ 2\hat{k}$ और $\vec{b}\ \ -\hat{i}\ \ 2\hat{k}$ एक समांतर चतुर्भुज है। इसके विकर्णों के बीच का न्यूनकोंण ________ है।

37. यदि k के मानों के लिए $|k\vec{a}|<|\vec{a}|$ और $k\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{a}$ सदिश $\vec{a}$ के समांतर है, तो k के मान ________ हैं।

38. व्यंजक $|\vec{a}\times\vec{b}|^2+(\vec{a}.\vec{b})^2$ का मान ________ है।

39. यदि $|\vec{a}\ \ \vec{b}|^2\ \ |\vec{a}.\vec{b}|^2=144$ और $|\vec{a}|\ \ 4$, तो $|\vec{b}|$ ________ के बराबर है।

40. यदि $\vec{a}$ कोई शून्येतर सदिश है तो $(\vec{a}.\hat{i})\hat{i}\ \ \vec{a}.\hat{j}\ \hat{j}\ \ \vec{a}.\hat{k}\ \hat{k}$ ________ के बराबर है।

बतलाइए कि निम्नलिखित प्रश्नों के कथन सत्य हैं या असत्य–

41. यदि $|\vec{a}|\ \ |\vec{b}|$, तो यह आवश्यक है कि $\vec{a}\ \ \vec{b}$ है।

42. किसी बिंदु P का स्थिति सदिश का प्रारंभिक बिंदु मूल बिंदु होता है।

43. यदि $|\vec{a}\ \ \vec{b}|\ \ |\vec{a}\ \ \vec{b}|$, है तब सदिश $\vec{a}$ और $\vec{b}$ लांबिक (orthogonol) हैं।

44. सूत्र $(\vec{a}\ \ \vec{b})^2\ \ \vec{a}^2\ \ \vec{b}^2\ \ 2\vec{a}\ \ \vec{b}$ शून्येतर $\vec{a}$ और $\vec{b}$ सदिशों के लिए सत्य है।

45. यदि $\vec{a}$ और $\vec{b}$ समचतुर्भुज की संलग्न भुजाएँ हैं तब $\vec{a}\ .\vec{b}=0$ है।