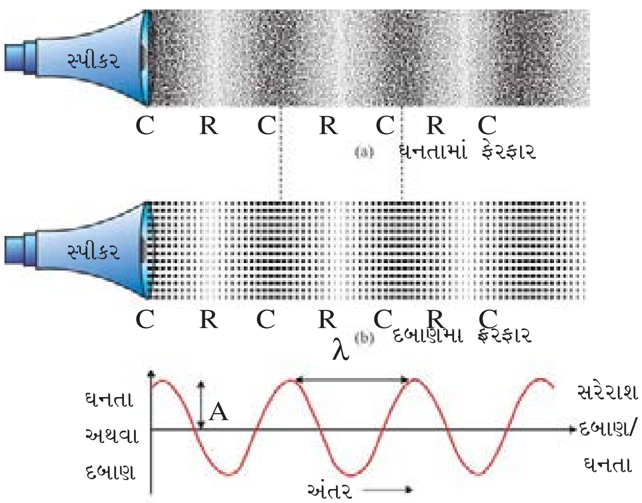
મહત્તમ સ્થાનાંતરોને **ગર્ત (trough)** કહે છે. આ તરંગો માધ્યમમાં ક્રમશઃ શૃંગ અને ગર્ત રચીને પ્રસરણ પામે છે.

સંગત તરંગો (Longitudinal wave) : જે તરંગમાં માધ્યમના કણોનું સ્થાનાંતર તરંગ-પ્રસરણ દિશા પર જ હોય, તેવા તરંગને **સંગત તરંગ** કહે છે. દા. ત., હવામાં પ્રસરતા ધ્વનિના તરંગો. આ તરંગો માધ્યમમાં ક્રમશઃ સંઘનન અને વિઘનન રચીને પ્રસરણ પામતા હોય છે. માધ્યમમાં પ્રસરતા તરંગોમાં માધ્યમના કણો તરંગ-પ્રસરણની દિશા પર પોતાના સમતોલન સ્થાનની આસપાસ દોલન કરતા હોય છે.

સરળતા ખાતર હવામાંથી પસાર થતાં સંગત તરંગોના કિસ્સામાં માધ્યમના કણોની સ્થિતિ, કોઈ એક ક્ષણે કેવી હોય તે આકૃતિ 8.4માં દર્શાવ્યું છે.



હવામાં પ્રસરતા સંગત તરંગો

આકૃતિ 8.4

સંગત તરંગો (ધ્વનિ-તરંગો) હવામાંથી પસાર થાય ત્યારે અમુક વિભાગમાં હવાના અણુઓ તેમનાં દોલનો દરમિયાન એકબીજાની ખૂબ નજીક ધકેલાય છે. પરિણામે તે વિભાગોમાંથી હવાની ઘનતામાં અને પરિણામે હવાના દબાણમાં વધારો થાય છે અને આ વિભાગમાં **સંઘનન (condensation)** રચાયું છે તેમ કહેવાય. બે ક્રમિક સંઘનનો વચ્ચેના વિભાગમાં હવાના અણુઓ છૂટા પડેલા દેખાય છે. આ વિભાગમાં હવાની ઘનતા અને દબાણમાં ઘટાડો થાય છે અને આ વિભાગમાં **વિઘનન (rarefaction)** રચાયું છે, તેમ કહેવાય. (જુઓ આકૃતિ 8.4).

આમ, ધ્વનિના પ્રસરણ દરમિયાન માધ્યમના સ્તરો પોતાના મધ્યમાન સ્થાનની આસપાસ દોલનો ચાલુ રાખે છે અને આ પ્રક્રિયા દરમિયાન ક્રમિક રીતે માધ્યમમાં સંઘનનો અને વિઘનનો રચાતાં જાય છે. જેમજેમ દોલનોની અસર એક પછી એક સ્તર પર પહોંચતી જાય છે, તેમ સંઘનનો અને વિઘનનો માધ્યમમાં આગળ વધતાં જાય છે. આ રીતે માધ્યમમાં ધ્વનિના તરંગોનું પ્રસરણ થાય છે. સંગત તરંગોના પ્રસરણ દરમિયાન માધ્યમના જુદા-જુદા વિભાગોનું દબાણ, સમય અને સ્થાન સાથે બદલાતું જતું હોવાથી આવા તરંગોને **દબાણ-તરંગો (pressure waves)** પણ કહે છે.

લંબગત તરંગોના કિસ્સામાં માધ્યમના કણોનાં દોલનો તરંગના પ્રસરણની દિશાને લંબ હોવાથી જ્યારે આવા તરંગો માધ્યમમાં પ્રસરે છે, ત્યારે માધ્યમનો દરેક ખંડ કે ઘટક આકાર-વિકૃતિ (shearing strain) અનુભવે છે. માત્ર ઘન માધ્યમમાં જ આકાર-પ્રતિબળ (shearing stress) સંભવ હોવાથી લંબગત તરંગો દોરી, તાર કે સળિયા જેવાં ઘન માધ્યમોમાં જ પ્રસરણ પામી શકે છે અને પ્રવાહી કે વાયુમાં લંબગત તરંગો શક્ય નથી.

સંગત તરંગના પ્રસરણમાં માધ્યમના કણોનાં દોલનો પ્રસરણની દિશામાં જ થતાં હોવાથી આવા તરંગના પ્રસરણ દરમિયાન દાબીય વિકૃતિ (compressive strain) ઉત્પન્ન થાય છે અને દાબ-પ્રતિબળ (compressive stress) તો ઘન, પ્રવાહી કે વાયુ એમ દરેક માધ્યમમાં શક્ય હોવાથી સંગત તરંગો બધાં જ માધ્યમોમાં શક્ય છે.

આમ, **ઘન માધ્યમમાં લંબગત અને સંગત એમ બંને પ્રકારના તરંગોનું પ્રસરણ શક્ય છે અને તરલ માધ્યમમાં માત્ર સંગત યાંત્રિક તરંગોનું જ પ્રસરણ શક્ય છે.**

[ધરતીકંપના લીધે પૃથ્વીમાં લંબગત અને સંગત એમ બંને પ્રકારના તરંગો ઉદ્ભવે છે, જેને અનુક્રમે S-તરંગ (secondary wave) અને P-wave (primary wave) કહે છે. પૃથ્વીની સપાટીના અંદરના ભાગમાં ધ્વનિ-તરંગ જેવા સંગત તરંગ (P-તરંગ) ઉદ્ભવે છે, જેની ઝડપ આશરે 4–8 km/s જેટલી હોય છે અને S-તરંગની ઝડપ આશરે 2–5 km/s જેટલી હોય છે. S-તરંગમાં પૃથ્વીની સપાટીનો અંદરનો ભાગ તરંગ પ્રસરણની દિશાને લંબ દિશામાં દોલન કરે છે. સિસ્મોગ્રાફમાં પહેલું P-તરંગ એ પહેલા S-તરંગ કરતાં કેટલું વહેલું નોંધાય છે. તે પરથી સિસ્મોગ્રાફથી ધરતીકંપનું ઉદ્ગમસ્થાન (epi-centre)નું અંતર નક્કી કરી શકાય છે.]

8.4 તરંગોમાં કંપવિસ્તાર, તરંગમાં ઊર્જાનું પ્રસરણ, તરંગલંબાઈ અને આવૃત્તિ (Amplitude of a Wave, Propagation of Energy in a Wave, Wavelength and Frequency)

તરંગનો કંપવિસ્તાર (Amplitude of a wave) : તરંગમાં 'કણો'ના દોલનના કંપવિસ્તારને તરંગનો

કંપવિસ્તાર કહે છે. આકૃતિ 8.5માં દર્શાવ્યા મુજબ તરંગનો કંપવિસ્તાર A છે.

તરંગમાં ઊર્જાનું પ્રસરણ (Propagation of energy in a wave) :

માધ્યમમાં તરંગ ઉત્પન્ન કરવા માટે તો કોઈ કણ (વિભાગ)ને દોલિત અથવા સ્થાનાંતરિત કરવો પડે છે. આ માટે તેના પર કાર્ય કરવું પડે છે. આ કાર્ય જેટલી ઊર્જા કણને મળે છે. જે તેના દોલન દરમિયાન તેની સ્થિતિ-ઊર્જા અને ગતિ-ઊર્જાના સ્વરૂપમાં હોય છે. ક્રમશઃ આવતા કણો જેમજેમ વિક્ષોભ અનુભવતા જાય, તેમતેમ આ ઊર્જા માધ્યમના આગળને આગળના કણોને મળતી જાય છે. આમ, તરંગમાં ઊર્જાનું પ્રસરણ થાય છે. માધ્યમમાં આંતરિક ઘર્ષણબળ હોય તો ઊર્જાનું ઉષ્મા ઊર્જા સ્વરૂપે વિખેરણ થતું જાય છે અને આગળ વધતું તરંગ મંદ પડતું જાય છે.

તરંગની પ્રસરણની દિશાને લંબ એવી એકમ ક્ષેત્રફળ-વાળી સપાટીમાંથી એક સેકન્ડમાં પસાર થતી ઊર્જાને તરંગની તીવ્રતા (intensity) કહે છે.

$$\text{તરંગની તીવ્રતા (I)} = \frac{\text{ઊર્જા/સમય}}{\text{ક્ષેત્રફળ}}$$

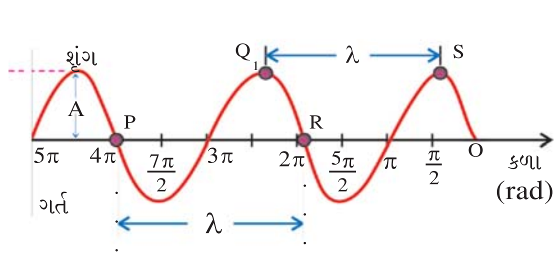
તરંગની તીવ્રતાનો SI એકમ $\frac{J/s}{m^2}$ અથવા $\frac{W}{m^2}$ છે.

તેનું પારિમાણિક સૂત્ર $M^1L^0T^{-3}$ છે.

કણના દોલનની ઊર્જા $E = \frac{1}{2}kA^2$, હોવાથી તરંગની તીવ્રતા, તરંગના કંપવિસ્તારના વર્ગના સમપ્રમાણમાં હોય છે. ($I \propto A^2$).

તરંગલંબાઈ (Wavelength)

તરંગપ્રસરણમાં જે બે ક્રમિક કણો (બિંદુઓ)ના દોલનની કળાનો તફાવત 2π rad હોય છે તેમની વચ્ચેના અંતરને તરંગની તરંગલંબાઈ (λ) કહે છે. તેનો SI એકમ m છે.



તરંગનો કંપવિસ્તાર અને તરંગલંબાઈ

આકૃતિ 8.5

આકૃતિ 8.5 દર્શાવ્યા અનુસાર કણ P અને Rની વચ્ચે દોલનની કળાનો તફાવત $4\pi - 2\pi = 2\pi$ rad છે. આથી, તેમની વચ્ચેનું અંતર એ તરંગની તરંગલંબાઈ (λ) દર્શાવે છે. આકૃતિ પરથી સ્પષ્ટ છે કે બે ક્રમિક શૃંગ અથવા બે ક્રમિક ગર્ત વચ્ચે દોલનનો કળા તફાવત 2π rad હોવાથી તેમની વચ્ચેનું અંતર પણ એ તરંગની તરંગલંબાઈ (λ) દર્શાવે છે. આ જ રીતે ધ્વનિ-તરંગોના કિસ્સામાં બે ક્રમિક સંઘનન અથવા વિઘનન વચ્ચેના અંતરને ધ્વનિ-તરંગની તરંગલંબાઈ કહે છે.

તરંગ-સંખ્યા અને તરંગ-સદિશ (Wave number and wave veetor) :

એકમઅંતર દીઠ તરંગોની સંખ્યા $\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ને તરંગ-સંખ્યા કહે છે. તરંગ-સંખ્યાનો એકમ m^{-1} છે.

તરંગ-પ્રસરણમાં λ અંતરે આવેલા બે કણોના દોલનની કળાનો તફાવત 2π rad હોય છે. આથી એકમઅંતરે રહેલા બે કણોના દોલનની કળાનો તફાવત $\frac{2\pi}{\lambda}$ rad થાય. $\frac{2\pi}{\lambda}$ ને તરંગ-સદિશ અથવા કોણીય તરંગ-સંખ્યા અથવા પ્રસરણ-અચળાંક (propagation constant) (k) કહે છે.

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

k નો SI એકમ rad/m છે. તેનું પારિમાણિક સૂત્ર $M^0L^{-1}T^0$ છે. તરંગ-સદિશની દિશા તરંગ-પ્રસરણની દિશામાં લેવાય છે.

તરંગની આવૃત્તિ (Frequency of a wave) :

એક સેકન્ડમાં માધ્યમના કણે પૂર્ણ કરેલ દોલનોની સંખ્યાને કણની આવૃત્તિ (f) કહે છે. તરંગની આવૃત્તિ (f) એ માધ્યમના કણોના દોલનની આવૃત્તિ જ છે. તરંગ-પ્રસરણમાં કોઈ સ્થાન (કે બિંદુ) પાસેથી એક સેકન્ડમાં પસાર થતા તરંગોની સંખ્યાને તરંગની આવૃત્તિ કહે છે.

તેનો SI એકમ s^{-1} અથવા Hz (Hertz) છે.

$\omega = 2\pi f$ને તરંગની કોણીય આવૃત્તિ કહે છે.

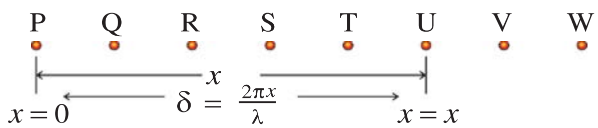
$T = \frac{1}{f}$ ને તરંગનો આવર્તકાળ કહે છે.

8.5 તરંગ-સમીકરણ (Wave Equation)

તરંગ-પ્રસરણની ઘટનામાં ભાગ લેતાં દરેક કણોના સ્થાનાંતર દરેક સમયે જાણી શકાય, તો તરંગ-પ્રસરણની ઘટનાનું વર્ણન કરી શકાય. એક પારિમાણિક તરંગો માટે x-યામ ધરાવતા કોઈ પણ કણનું કોઈ પણ t સમયે સ્થાનાંતર આપતું આપણે સમીકરણ મેળવીશું. આ સમીકરણમાં x અને tનાહ જુદાં-જુદાં મૂલ્યો મૂકીને જુદા-જુદા કણોનાં જુદા-જુદા સમયે કણોનાં સ્થાનાંતરો જાણી શકાય છે અને સમગ્ર

ઘટનાનું વર્ણન મેળવી શકાય છે. આવા સમીકરણને (પ્રસ્તુત કિસ્સામાં એક પારિમાણિક) **તરંગ-સમીકરણ** કહે છે.

આપણે પ્રગામી, હાર્મોનિક, એક-પારિમાણિક તરંગનું સમીકરણ મેળવીશું. ધન x દિશામાં ગતિ કરતા તરંગ માટે તરંગ-સમીકરણ આકૃતિ 8.6માં દર્શાવેલા કોઈક માધ્યમના કણોને ધ્યાનમાં લો.



તરંગ-સમીકરણ

આકૃતિ 8.6

ધારો કે, $t = 0$ સમયે કણ P શૂન્ય પ્રારંભિક કળા સાથે સરળ આવર્તદોલનો શરૂ થાય છે. એટલે કે P પાસેથી $t = 0$ સમયે તરંગ ઉદ્‌ભવે છે.

કણ Pનો x-યામ શૂન્ય અને પ્રારંભિક કળા શૂન્ય હોવાથી $t = 0$ સમયે તેનું સ્થાનાંતર,

$$y = A\sin\omega t \qquad (8.5.1)$$

હવે, Pમાંથી ઉદ્‌ભવેલ તરંગ જ્યારે x અંતર કાપશે ત્યારે, P થી x અંતરે આવેલો માધ્યમનો કણ (U) એ સરળ આવર્તગતિની શરૂઆત કરશે. તેના દોલનની કળા Pના દોલનની કળા કરતાં ઓછી હશે. ધારો કે તેની કળા P કણની કળા કરતાં δ જેટલી ઓછી છે. આથી, x અંતરે આવેલ કણની સરળ આવર્તગતિનું સમીકરણ,

$$y = A\sin(\omega t - \delta) \qquad (8.5.2)$$

ધારો કે તરંગની તરંગલંબાઈ λ છે. આપણે જાણીએ છીએ કે Pથી λ અંતરે આવેલા કણની કળા એ કણ Pની કળા કરતાં 2π જેટલી ઓછી હોય છે. આથી Pથી x અંતરે આવેલા કણની કળા Pની પ્રારંભિક કળા કરતાં $\frac{2\pi x}{\lambda}$ જેટલી ઓછી હશે.

$$\therefore\ \delta = \frac{2\pi x}{\lambda} \qquad (8.5.3)$$

δનું મૂલ્ય સમીકરણ (8.5.2)માં મૂકતાં,

$$y = A\sin\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda}\right)$$

પરંતુ $\frac{2\pi}{\lambda} = k$

$$\therefore\ y = A\sin(\omega t - kx) \qquad (8.5.4)$$

અહીં $(\omega t - kx)$ને ઉદ્‌ગમથી x અંતરે t જેટલા સમયે તરંગની કળા કહે છે. k સદિશની દિશા તરંગ-પ્રસરણની દિશામાં લેવામાં આવે છે.

સમીકરણ (8.5.4) એ xના વધતા મૂલ્યની દિશામાં ગતિ કરતાં પ્રગામી હાર્મોનિક તરંગ માટેનું તરંગ-સમીકરણ છે. **જો તરંગ xના ઘટતા મૂલ્યની દિશામાં ગતિ કરતા હોય તો ઉપરના સમીકરણમાં $\omega t - kx$ને બદલે $\omega t + kx$ લેવું.**

$$y = A\sin(\omega t + kx) \qquad (8.5.5)$$

સમીકરણ (8.5.4)માં $\omega = \frac{2\pi}{T}$ અને $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ મૂકતાં

$$y = A\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \qquad (8.5.6)$$

ઉપર્યુક્ત સમીકરણમાં $\lambda = vT$ મૂકતાં

$$y = A\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{vT}\right)$$

$$y = A\sin 2\pi f\left(t - \frac{x}{v}\right) \quad \left(\because\ \frac{1}{T} = f\right) \qquad (8.5.7)$$

હવે,

$$y = A\sin 2\pi\frac{f}{v}(vt - x)$$

$$\therefore\ y = A\sin\frac{2\pi}{\lambda}(vt - x) \quad (\because\ v = f\lambda) \qquad (8.5.8)$$

ઉપર્યુક્ત સમીકરણો (8.5.6), (8.5.7) અને (8.5.8) એ પ્રગામી હાર્મોનિક તરંગો માટેના તરંગ-સમીકરણનાં જુદાં-જુદાં સ્વરૂપો છે.

જો કણ Pની પ્રારંભિક કળા φ હોય તો તરંગ-સમીકરણ (8.5.4)ને નીચે મુજબ લખી શકાય :

$$y = A\sin(\omega t - kx + \phi) \qquad (8.5.9)$$

8.6 તરંગ-ઝડપ અને કળા-ઝડપ (Wave Speed and Phase Speed)

તરંગ તેના એક આવર્તકાળ T દરમિયાન λ જેટલું અંતર કાપે છે. આથી, તરંગ-ઝડપ

$$\therefore\ v = \frac{\text{અંતર}}{\text{સમય}} = \frac{\lambda}{T}$$

પરંતુ $\frac{1}{T} = f$

$$\therefore\ v = f\lambda \qquad (8.6.1)$$

$$= \frac{\lambda(2\pi f)}{2\pi}$$

પરંતુ, $2\pi f = \omega$ અને $\frac{2\pi}{\lambda} = k$

$$\therefore\ v = \frac{\omega}{k} \qquad (8.6.2)$$

અત્યાર સુધીની ચર્ચામાં આપણે જોયું કે તરંગ-પ્રસરણની ઘટનામાં ભાગ લેતા કણનો કંપવિસ્તાર (A) તેનાં દોલનોનો આવર્તકાળ (T) અને આવૃત્તિ (f) અનુક્રમે એ જ તરંગનો

કંપવિસ્તાર, તરંગનો આવર્તકાળ અને તરંગની આવૃત્તિ છે. પરંતુ **દોલન કરતાં કણનો વેગ અને તરંગનો વેગ જુદો છે.**

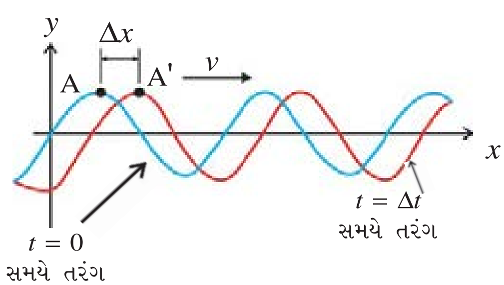
યાદ રાખો કે તરંગની આવૃત્તિ એ ઉદ્‌ગમનો ગુણધર્મ છે, જ્યારે તરંગલંબાઈ એ માધ્યમનો ગુણધર્મ છે. જુદા-જુદા માધ્યમમાં તરંગની ઝડપ જુદી-જુદી હોય છે. આથી તરંગલંબાઈ પણ જુદી-જુદી હોય છે, પરંતુ આપેલ માધ્યમમાં તરંગની ઝડપ અચળ હોય છે.

કળા-ઝડપ

આકૃતિ 8.7માં દર્શાવ્યા અનુસાર તરંગ એ xના વધતા મૂલ્યની દિશામાં ગતિ કરે છે. અહીં સંપૂર્ણ તરંગભાત (wave pattern)એ Δt સમયમાં Δx જેટલું સ્થાનાંતર કરે છે. તરંગભાત પરના દરેક બિંદુઓ (દા. ત., બિંદુ A)એ ગતિ દરમિયાન તેમનું સ્થાનાંતર જાળવી રાખે છે.(યાદ રાખો કે દોરી પરના બિંદુઓનું સ્થાનાંતર બદલાય છે, પરંતુ તરંગભાત પરનાં નહિ) તરંગભાત પરના દરેક બિંદુઓની કળા અચળ હોય છે. આકૃતિ 8.7માં A અને A'ની કળા સમાન છે. આથી,

$$\therefore \omega t - kx = \text{અચળ} \qquad (8.6.3)$$

અહીં, x અને t બંને બદલાય છે. જેમ t વધે છે તેમ x પણ એવી રીતે વધવો જોઈએ કે જેથી $\omega t - kx$ એ અચળ રહે. જે દર્શાવે છે કે તરંગભાત xના વધતા મૂલ્યની દિશામાં ગતિ કરે છે.



તરંગ-ગતિ

આકૃતિ 8.7

ઉપર્યુક્ત સમીકરણનું tની સાપેક્ષે વિકલન કરતાં,

$$\frac{d}{dt}(\omega t - kx) = 0$$

$$\therefore \omega - k\frac{dx}{dt} = 0$$

$$\therefore \frac{dx}{dt} = v = \frac{\omega}{k} \qquad (8.6.4)$$

અહીં v ને તરંગની **કળા-ઝડપ** (phase speed) કહે છે.

ઉપર્યુક્ત સમીકરણ (8.6.4) એ સમીકરણ (8.6.2)જેવું જ છે. આમ, આપણે જે તરંગ-ઝડપ શોધીએ છીએ તે ખરેખર તો તરંગની કળા ઝડપ છે.

ઉદાહરણ 1 : અમદાવાદ વિવિધભારતી પરથી પ્રસારિત રેડિયો-તરંગની આવૃત્તિ 96.7 MHz છે. આ તરંગોની તરંગલંબાઈ, તરંગ-સદિશ અને કોણીય આવૃત્તિ શોધો. રેડિયો-તરંગોની હવામાં ઝડપ 3×10^8 m/s છે.

ઉકેલ :

$f = 96.7$ MHz $= 96.7 \times 10^6$ Hz

$v = 3 \times 10^8$ m/s

તરંગ-ઝડપ, $v = f\lambda$

$$\therefore \lambda = \frac{v}{f} = \frac{3 \times 10^8}{96.7 \times 10^6} = 3.102 \text{ m}$$

તરંગ-સદિશ, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

$$= \frac{2 \times 3.14}{3.102}$$

$$= 2.024 \text{ rad/m}$$

કોણીય આવૃત્તિ, $\omega = 2\pi f$

$= 2 \times 3.14 \times 96.7 \times 10^6$

$= 6.07 \times 10^8$ rad/s

ઉદાહરણ 2 : એક તરંગનું તરંગ-સમીકરણ

$y = 0.5\sin(x - 60t)$ cm છે.

(i) તરંગનો કંપવિસ્તાર (ii) તરંગ-સદિશ (iii) તરંગલંબાઈ (iv) તરંગની કોણીય આવૃત્તિ અને આવૃત્તિ (v) આવર્તકાળ અને (vi) તરંગની ઝડપ શોધો.

ઉકેલ : તરંગ-સમીકરણ,

$y = -0.5 \sin(60t - x)$ ને

$y = A \sin(\omega t - kx)$ સાથે સરખાવતાં,

(i) તરંગનો કંપવિસ્તાર A $= -0.5$ cm

(ii) તરંગ-સદિશ $k = 1$ rad/cm

(iii) તરંગ-લંબાઈ $\lambda = \frac{2\pi}{k}$

$$= \frac{2 \times 3.14}{1} = 6.28 \text{ cm}$$

(iv) તરંગની કોણીય આવૃત્તિ $\omega = 60$ rad/s

હવે, $\omega = 2\pi f$, પરથી તરંગની આવૃત્તિ

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{60}{2 \times 3.14} = 9.55 \text{ Hz}$$

(v) આવર્તકાળ $T = \frac{1}{f} = \frac{1}{9.55} = 0.105$ s

(vi) તરંગ-ઝડપ $v = \frac{\omega}{k} = \frac{60}{1} = 60$ cm/s.

ઉદાહરણ 3 : એક સ્વરકાંટાની આવૃત્તિ 250 Hz છે. જ્યારે સ્વરકાંટો 50 દોલનો પૂરાં કરશે, ત્યારે તેમાંથી ઉદ્ભવતો ધ્વનિએ કેટલું અંતર કાપ્યું હશે ? હવામાં ધ્વનિનો વેગ 340 m/s છે.

ઉકેલ : સ્વરકાંટામાંથી ઉદ્ભવતા તરંગની તરંગલંબાઈ,

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{340}{250} = 1.36 \text{ m}$$

હવે, એક દોલન દરમિયાન તરંગ એ તરંગલંબાઈ (λ) જેટલું અંતર કાપે છે, આથી 50 દોલનો બાદ,

તરંગે કાપેલું અંતર $= 50 \times \lambda$

$= 50 \times 1.36 = 68$ m.

ઉદાહરણ 4 : એક વ્યક્તિ 100 m ઊંચા ટાવર પરથી એક પથ્થરને મુક્તપતન કરાવતાં તે તળાવમાં પડે છે. આ પથ્થર તળાવના પાણી સાથે અથડાતાં, તેમાંથી ઉત્પન્ન થતો ધ્વનિ એ વ્યક્તિએ પથ્થરને મુક્ત પતન કર્યા પછી કેટલા સમય પછી સંભળાશે ? ધ્વનિનો હવામાં વેગ 340 m/s છે.

ઉકેલ : ધારો કે પથ્થર ટાવરની ટોચ પરથી તળાવમાં પડતા t_1 જેટલો સમય લે છે. અને પથ્થર પાણી સાથે ટકરાતા ઉત્પન્ન થતો ધ્વનિ એ ટાવરની ટોચ સુધી પહોંચતા t_2 જેટલો સમય લે છે. આથી, ટાવર પર ઊભેલી વ્યક્તિને $t = t_1 + t_2$ સમય બાદ અથડામણનો ધ્વનિ સંભળાશે.

હવે, પથ્થરને પાણીની સપાટી સુધી પહોંચતાં લાગતા સમય t_1 નીચેના સૂત્ર પરથી શોધી શકાય.

$$s = v_0 t_1 + \frac{1}{2} g\, t_1^2$$

$s = 100$ m, $v_0 = 0$, $g = 9.8$ m/s^2

$$\therefore\ 100 = 0 + \frac{1}{2}(9.8)t_1^2$$

$$\therefore\ t_1 = 4.52 \text{ s.}$$

હવે, પાણીની સપાટી આગળથી ઉદ્ભવતા ધ્વનિને ટાવરની ટોચ સુધી પહોંચતાં લાગતો સમય,

$$t_2 = \frac{\text{અંતર}}{\text{તરંગ - ઝડપ}} = \frac{100}{340} = 0.29 \text{ s}$$

$$\therefore\ t = t_1 + t_2 = 4.52 + 0.29 = 4.81 \text{ s}$$

ઉદાહરણ 5 : એક પરિમાણિક પ્રગામી, હાર્મોનિક લંબગત તરંગનું સમીકરણ,

$$y = 5\sin 30\pi\left(t - \frac{x}{240}\right)$$ છે.

અહીં y મીટરમાં અને t સેકન્ડમાં છે.

(i) ઉદ્ગમબિંદુએ શૂન્ય સમયે કણ ધન Y કે ઋણ Y માંથી કઈ દિશામાં ગતિ કરવાની શરૂઆત કરતું હશે ? એટલે ત્યાં પ્રથમ ગર્ત ઉત્પન્ન થશે કે શૃંગ ?

(ii) $t = 2$ s ને અંતે ઉદ્ગમબિંદુથી 480 m અંતરે આવેલ કણનું સ્થાનાંતર, કણના દોલનનો વેગ અને તરંગનો ઢાળ શોધો.

(iii) તરંગની ઝડપ શોધો.

ઉકેલ :

(i) $x = 0$ પાસે $t = 0$ સમયથી શરૂ કરી y જો ઋણ દિશામાં વધતો હોય, તો ગર્ત ઉત્પન્ન થશે અને જો y ધન દિશામાં વધતો હોય, તો શૃંગ ઉત્પન્ન થશે.

અહીં, $x = 0$, પર $y = 5\sin 30\pi t$ માટે $t = 0$ સમયથી શરૂ કરતાં y ધન દિશામાં વધતો હોવાથી પહેલાં શૃંગ ઉત્પન્ન થશે.

(ii) $t = 2$ sના અંતે ઉદ્ગમબિંદુથી $x = 480$ m અંતરે સ્થાનાંતર

$$y = 5\sin 30\pi\left(2 - \frac{480}{240}\right)$$

$$= 5\sin 30\pi(0) = 0 \text{ m}$$

કણના દોલનનો વેગ,

$$v = \frac{dy}{dt} = 150\pi\cos 30\pi\left(t - \frac{x}{240}\right)$$

$$= 150\pi\cos 30\pi\left(2 - \frac{480}{240}\right)$$

$$= 150\pi \text{ m/s}$$

તરંગનો ઢાળ,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{5\pi}{8}\cos 30\pi\left(t - \frac{x}{240}\right)$$

$$= -\frac{5\pi}{8}\cos 30\pi\left(2 - \frac{480}{240}\right)$$

$$= -\frac{5\pi}{8}$$

(iii) આપેલ સમીકરણને,

$y = A\sin 2\pi f\left(t - \frac{x}{v}\right)$ સાથે સરખાવતાં

$\therefore$ તરંગ-ઝડપ $v = 240$ m/s

અહીં, નોંધો કે તરંગ-ઝડપ અને તરંગ-પ્રસરણમાં ભાગ લેતાં કણના દોલનનાં વેગનું મૂલ્ય સરખું નથી.

8.7 માધ્યમમાં તરંગ-ઝડપ (Speed of Waves in a Medium)

8.7.1 તણાવવાળી દોરી પર લંબગત તરંગની ઝડપ (Speed of Transverse Wave on Streched String) :

અગાઉ આપણે જોયું કે દોરીના કણો વિક્ષોભ પસાર થયા બાદ દોલન કરી, મૂળ સ્થાને પાછા આવે છે. આ માટે માધ્યમમાં પુનઃસ્થાપક બળ અને તેથી માધ્યમની સ્થિતિસ્થાપકતા આવશ્યક છે. તરંગની અસર હેઠળ દોલિત કણ કેટલું સ્થાનાંતર કરશે તે માધ્યમના જડત્વ પર આધારિત છે. આમ, **યાંત્રિક તરંગોના પ્રસરણ માટે માધ્યમમાં સ્થિતિસ્થાપકતા અને જડત્વ જરૂરી છે.** માધ્યમના આ બે ગુણધર્મો વડે તરંગની ઝડપ નક્કી થાય છે.

અભ્યાસો પરથી જણાયું છે કે, તણાવવાળી દોરી જેવા માધ્યમમાં લંબગત તરંગોની ઝડપ બે બાબતો (i) દોરીની રેખીય દળ ઘનતા (μ) અને (ii) દોરીમાંના તણાવબળ T પર આધાર રાખે છે.

અહીં, આપણે દોરી પર તરંગ-ઝડપ એ પારિમાણિક વિશ્લેષણની મદદથી મેળવીશું.

દોરીની રેખીય દળ ઘનતા એટલે એકમલંબાઈ દીઠ દોરીનું દળ.

μનું પારિમાણિક સૂત્ર,

$$\mu = \frac{\text{દોરીનું કુલ દળ}}{\text{દોરીની લંબાઈ}} = \frac{M^1}{L^1}$$

$$= M^1L^{-1}T^0$$

તણાવબળ Tનું પારિમાણિક સૂત્ર $= M^1L^1T^{-2}$

ધારો કે તરંગ-ઝડપ,

$$v = k\ \mu^a\ T^b \qquad (8.7.1)$$

અહીં, k = એ પરિમાણરહિત અંક અને $[a, b] \in$ R છે.

બન્ને બાજુનાં પરિમાણો લખતાં

$$M^0L^1T^{-1} = [M^1L^{-1}T^0]^a\ [M^1L^1T^{-2}]^b$$
$$= M^{a+b}\ L^{-a+b}\ T^{-2b}$$

બન્ને બાજુના પરિમાણો સરખાવતાં, $a + b = 0$, $-a + b = 1$ અને $-2b = -1$

આ પરથી, $a = -\frac{1}{2}$ અને $b = \frac{1}{2}$

સમીકરણ (8.7.1)માં a અને bનાં મૂલ્યો મૂકતાં,

$$v = k\ \mu^{-\frac{1}{2}}T^{\frac{1}{2}}$$

પ્રાયોગિક અને અન્ય અભ્યાસો પરથી $k = 1$ મળે છે.

$$\therefore\ v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \qquad (8.7.2)$$

ઉપરોક્ત સમીકરણ દર્શાવે છે કે તરંગની ઝડપએ તરંગની આવૃત્તિ કે કંપવિસ્તાર પર આધારિત નથી.

ઉદાહરણ 6 : સમાન ત્રિજ્યાઓ ધરાવતા બે તાર PQ અને QRને જોડીને તાર PQR બનાવેલ છે. તાર PQની લંબાઈ 4.8 m અને દળ 0.06 kg છે. તાર QRની લંબાઈ 2.56 m અને દળ 0.2 kg છે. તાર PQRમાં પ્રવર્તતું તણાવ 80 N છે. P છેડે ઉત્પન્ન કરેલ તરંગને R છેડે પહોંચતાં કેટલો સમય લાગશે ?

ઉકેલ : તાર PQ માટે એકમલંબાઈ દીઠ દળ,

$$\mu_1 = \frac{0.06}{4.8} = \frac{1}{80}\ \frac{kg}{m}$$

તાર QR માટે એકમલંબાઈ દીઠ દળ,

$$\mu_2 = \frac{0.2}{2.56} = \frac{10}{128}\ \frac{kg}{m}$$

$\therefore$ તાર PQમાં તરંગ-ઝડપ

$$v_1 = \sqrt{\frac{T}{\mu_1}} = \sqrt{\frac{80}{\frac{1}{80}}} = 80 \text{ m/s}$$

$\therefore$ તાર QR માં તરંગ-ઝડપ

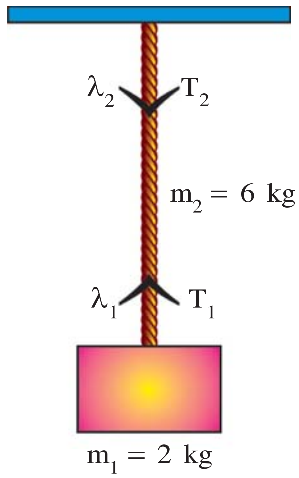
$$v_2 = \sqrt{\frac{T}{\mu_2}} = \sqrt{\frac{80}{\frac{1}{128}}} = 32 \text{ m/s}$$

$\therefore$ તરંગને Pથી R પહોંચવા લાગતો સમય

$$t = t_1 + t_2$$
$$= \frac{PQ}{v_1} + \frac{QR}{v_2}$$
$$= \frac{4.8}{80} + \frac{2.56}{32}$$
$$= 0.14 \text{ s}$$

ઉદાહરણ 7 : જડિત આધાર પરથી લટકાવેલ નિયમિત દોરડાની લંબાઈ 12 m અને દળ 6 kg છે. દોરડાના મુક્ત છેડે 2 kg દળનો બ્લૉક લટકાવેલ છે. દોરડાના નીચેના છેડે 0.06 m જેટલી તરંગલંબાઈવાળું એક તરંગ ઉત્પન્ન કરવામાં આવે છે. આ તરંગ દોરડાના ઉપરના છેડે (જડિત આધાર આગળ) પહોંચે ત્યારે તેની તરંગલંબાઈ કેટલી હશે ?

ઉકેલ :



આકૃતિ 8.8

અહીં દોરડું ભારે હોવાથી દોરડાના નીચેના છેડે અને ઉપરના છેડે તણાવબળ (T) અલગ-અલગ હશે.

દોરડાનું દળ $m_2 = 6$ kg

બ્લૉકનું દળ $m_1 = 2$ kg

દોરડાના નીચેના છેડે તણાવબળ,

$T_1 = m_1 g = 2g$

દોરડાના ઉપરના છેડે તણાવબળ,

$T_2 = (m_1 + m_2)g$

$= (6 + 2)g = 8g$

હવે દોરડામાં તરંગની ઝડપ $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$

$\therefore f\lambda = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ $(\because v = f\lambda)$

દોરડામાં પ્રસરતા તરંગની આવૃત્તિ દોરડાના દરેક ભાગમાં સમાન હોય છે. તેમજ μ પણ દોરડાના દરેક ભાગમાં સમાન છે. આથી,

$\lambda \propto \sqrt{T}$

દોરડાના નીચેના છેડે તરંગલંબાઈ $\lambda_1 \propto \sqrt{T_1}$

દોરડાના ઉપરના છેડે તરંગલંબાઈ $\lambda_2 \propto \sqrt{T_2}$

$$\therefore \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}$$

અને $\lambda_2 = \lambda_1 \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}$

$$= (0.06)\sqrt{\frac{8g}{2g}}$$

$$= 0.12 \text{ m}$$

ઉદાહરણ 8 : એક તારની લંબાઈ 50 cm, અને આડછેદનું ક્ષેત્રફળ 1 mm અને દળ 5.0 g છે. તારનો યંગ મૉડ્યુલસ 16×10^{11} N/m^2 છે. તારમાંથી પસાર થતાં તરંગની ઝડપ 80 m/s છે. આ તરંગ પ્રસરણને લીધે તારની મૂળ લંબાઈમાં થતો વધારો શોધો.

ઉકેલ :

તારની લંબાઈ $L = 50$ cm $= 50 \times 10^{-2}$ m

તારનું દળ $m = 5g = 5 \times 10^{-3}$ kg

તારના આડછેદનું ક્ષેત્રફળ

$A = 1\text{mm}^2 = 1 \times 10^{-6}$ m^2

તારનો યંગ મૉડ્યુલસ $Y = 16 \times 10^{11}$ N/m^2

તારમાં તરંગની-ઝડપ $v = 80$ m/s.

તારનું એકમ લંબાઈ દીઠ દળ

$$\mu = \frac{m}{L} = \frac{5 \times 10^{-3}}{50 \times 10^{-2}} = 1 \times 10^{-2} \text{ kg/m}$$

તારમાં તરંગ-ઝડપ $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$

$\therefore$ તારમાં તણાવબળ $= T = F = \mu v^2$

$= (1 \times 10^{-2})(80)^2$

$= 64$ N

યંગ મૉડ્યુલસ $Y = \frac{F/A}{\Delta L/L}$

$\therefore$ આથી, તારની લંબાઈમાં વધારો

$$\Delta L = \frac{FL}{AY}$$

$$= \frac{(64)(50 \times 10^{-2})}{(1 \times 10^{-6})(16 \times 10^{11})}$$

$= 0.02$ mm

8.7.2 માધ્યમમાં ધ્વનિ-તરંગો (સંગત-તરંગો)ની ઝડપ (Speed of sound waves (longitudinal wave) in a medium) :

અભ્યાસો પરથી જાણી શકાયું છે કે માધ્યમમાં ધ્વનિ (સંગત-તરંગ) તરંગોની ઝડપ (i) માધ્યમના સ્થિતિસ્થાપક અંક E અને (ii) માધ્યમની ઘનતા ρ પર આધાર રાખે છે.

આ હકીકતનો ઉપયોગ કરી અને પારિમાણિક વિશ્લેષણની મદદથી સંગત તરંગોની ઝડપ નીચે પ્રમાણે મેળવી શકાય :

તરંગ-ઝડપ $v = kE^a\rho^b$

અહીં, k એ પરિમાણરહિત અચળાંક અને $[a, b] \in$ R છે.

હવે, $[E] = M^1L^{-1}T^{-2}$, $[\rho] = M^1L^{-3}T^0$

બંને બાજુએ પારિમાણિક સૂત્રો લખતાં,

$$M^0L^1T^{-1} = [M^1L^{-1}T^{-2}]^a\ [M^1L^{-3}T^0]^b$$
$$= M^{a+b}\ L^{-a-3b}\ T^{-2a}$$

બંને બાજુનાં પરિમાણો સરખાવતાં,

$a + b = 0, -a -3b = 1$ અને $-2a = -1$

$\therefore\ a = \frac{1}{2}$ અને $b = -\frac{1}{2}$

$$\therefore\ v = kE^{\frac{1}{2}}\rho^{-\frac{1}{2}}$$

પ્રાયોગિક તેમજ બીજા અભ્યાસો પરથી $k = 1$ મળે છે.

$$\therefore\ v = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \qquad (8.7.3)$$

તરલ માધ્યમમાં ધ્વનિ જેવા સંગત-તરંગોનું પ્રસરણ સંઘનન-વિઘનન વડે થતું હોય છે. આ પરિસ્થિતિમાં માધ્યમમાં જુદા-જુદા વિસ્તારોમાં દબાણના ફેરફારોના કારણે અહીં સ્થિતિસ્થાપક-અંક તરીકે બલ્ક મૉડ્યુલસ (B) લેવામાં આવે છે.

$$\therefore\ v = \sqrt{\frac{B}{\rho}} \qquad (8.7.4)$$

સળિયા જેવા રેખીય માધ્યમમાં સંગત-તરંગોનાં પ્રસરણ દરમિયાન રેખીય વિકૃતિ જોવા મળે છે. આથી સમીકરણ(8.7.3)માં સ્થિતિસ્થાપક-અંક તરીકે યંગ મૉડ્યુલસ (Y) લેતાં,

$$\therefore\ v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}} \qquad (8.7.5)$$

ટેબલ 8.1માં જુદાં-જુદાં માધ્યમમાં ધ્વનિ-તરંગોની ઝડપ દર્શાવી છે.

ટેબલ 8.1

કેટલાંક માધ્યમોમાં ધ્વનિની ઝડપ (માત્ર જાણકારી માટે)

માધ્યમ	ઝડપ (m/s)
વાયુઓ	
હવા (0°C)	331
હવા (20°C)	343
હિલિયમ	965
હાઇડ્રોજન	1284
પ્રવાહી	
પાણી (0°C)	1402
પાણી (20°C)	1482
દરિયાનું પાણી	1522
ઘન પદાર્થ	
ઍલ્યુમિનિયમ	6420
કૉપર	3560
સ્ટીલ	5941
રબર	54

ટેબલ (8.1) પરથી સ્પષ્ટ છે કે પ્રવાહી અને ઘન પદાર્થોની ઘનતા, વાયુ કરતાં વધુ હોવા છતાં તે માધ્યમોમાં તરંગની ઝડપ વધુ છે. કારણ કે વાયુની સરખામણીમાં પ્રવાહી અને ઘન પદાર્થો ઓછા દબનીય હોય છે. એટલે કે તેમનો બલ્ક મૉડ્યુલસ (B) વધુ હોય છે.

ન્યૂટનનું સૂત્ર : ન્યૂટને અનુમાન કર્યું કે વાયુ (હવા)માં ધ્વનિના પ્રસરણ દરમિયાન વાયુમાં ઉદ્ભવતાં સંઘનન અને વિઘનનની ઘટના સમતાપી હોવી જોઈએ. આથી સમીકરણ 8.7.4માં આઇસોથર્મલ (સમતાપી) બલ્ક મૉડ્યુલસ-અંક વાપરવો જોઈએ.

સમતાપી પ્રક્રિયા માટે PV = અચળ,

(T અચળ હોવાથી PV = μRT = અચળ)

Vની સાપેક્ષે વિકલન કરતાં,

$$P\frac{dV}{dV} + V\frac{dP}{dV} = 0$$

$$\therefore\ P = -V\frac{dP}{dV} = -\frac{dP}{dV/V} = \text{બલ્ક મૉડ્યુલસ B}$$

$$P = \text{બલ્ક મૉડ્યુલસ B} \qquad (\because\ B = -\frac{dP}{dV/V})$$

આમ, વાયુનો આઇસોથર્મલ બલ્ક મૉડ્યુલસ (B) એ વાયુના દબાણ P જેટલો હોય છે.

$$\therefore\ v = \sqrt{\frac{B}{\rho}} = \sqrt{\frac{P}{\rho}} \qquad (8.7.6)$$

આ સૂત્ર હવામાં ધ્વનિની ઝડપ શોધવા માટેનું ન્યૂટનનું સૂત્ર છે.

ઉદાહરણ 9 : ન્યૂટનના સૂત્રનો ઉપયોગ કરી STP એ હવામાં ધ્વનિની ઝડપ મેળવો.

એક મોલ હવાનું દળ = 29.0×10^{-3} kg.

(P = 1.01×10^5 Pa)

ઉકેલ : STPએ 1 mole હવાનું કદ = 22.4 L = $22.4 \times 10^{-3}\ m^3$

આથી, STPએ હવાની ઘનતા $\rho = \frac{\text{દળ}}{\text{કદ}}$

$$\therefore\ \rho = \frac{29.0\times10^{-3}}{22.4\times10^{-3}} = \frac{29.0}{22.4} = 1.29 kg/m^2$$

∴ ન્યૂટનના સૂત્ર અનુસાર,

STP એ હવામાં ધ્વનિની ઝડપ $v = \sqrt{\frac{P}{\rho}}$

$$= \sqrt{\frac{1.01\times10^5}{1.29}} = 279.3\ \text{m/s}$$

લાપ્લાસનો સુધારો :

ન્યૂટનના સૂત્રથી મળતું ધ્વનિની ઝડપનું મૂલ્ય 279.3 m/s છે. પ્રાયોગિક રીતે STP એ મળતું મૂલ્ય 332 m/s છે. જે દર્શાવે છે કે સમીકરણ (8.7.6)માં કંઈક ક્ષતિ છે.

લાપ્લાસે સૂચવ્યું કે, જ્યાં સંઘનન રચાય છે, તે ભાગનું તાપમાન વધે છે અને જ્યાં વિઘનન રચાય છે, ત્યાં તાપમાન ઘટે છે. આથી ધ્વનિના પ્રસરણની ઘટના સમતાપી ન ગણી શકાય.

માધ્યમમાં સંઘનન અને વિઘનન રચાવાની પ્રક્રિયા એટલી ઝડપી હોય છે કે સંઘનન દરમિયાન ઉત્પન્ન થયેલ ઉષ્મા બહાર વિખેરણ પામે તે પહેલા તે સ્થાને રચાતા વિઘનન દરમિયાન શોષાઈ જાય છે. તેમજ વાયુઓની પ્રમાણમાં ઓછી ઉષ્માવાહકતા પણ ઉષ્માને બહાર ન જવા દેવામાં મદદ કરે છે. આમ, **વાયુમાં ધ્વનિ-પ્રસરણની ઘટના સમતાપી નહિ, પરંતુ સમોષ્મી છે.** આથી સમીકરણ (8.7.6)માં વાયુનો સમોષ્મી (adiabatic) બલ્ક મૉડ્યુલસ વાપરવો જોઈએ.

આદર્શવાયુની સમોષ્મી પ્રક્રિયા માટે

PV^{γ} = અચળ

જ્યાં, γ એ વાયુની બે વિશિષ્ટ ઉષ્માઓ C_P અને C_Vનો ગુણોત્તર છે.

Vની સાપેક્ષે સમીકરણનું વિકલન કરતાં,

$$P \cdot \gamma V^{\gamma - 1} + V^{\gamma}\frac{dP}{dV} = 0$$

$$\therefore \gamma P + V\frac{dP}{dV} = 0$$

$$\therefore \frac{-dP}{dV/V} = \gamma P$$

$$\therefore B = \gamma P$$

આમ, સમોષ્મી પ્રક્રિયા માટે બલ્ક મૉડ્યુલસ $B = \gamma P$.

સમીકરણ (8.7.4) માં Bનું મૂલ્ય મૂકતાં, તરંગ-ઝડપ

$$v = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}} \qquad (8.7.7)$$

હવા માટે $\gamma = 1.41$ છે અને STP એ ઝડપ v શોધતાં તે 331.6 m/s મળે છે, જે પ્રાયોગિક મૂલ્ય સાથે મળતું આવે છે. આદર્શવાયુ જેવા માધ્યમમાં તરંગ-ઝડપ મેળવવા માટે ન્યૂટનના સૂત્રને બદલે લાપ્લાસના સૂત્ર (સમીકરણ 8.7.7)નો ઉપયોગ કરવો જોઈએ.

ધ્વનિની ઝડપ પર અસર કરતાં વિવિધ પરિબળો :

એક મોલ આદર્શવાયુ માટે અવસ્થા-સમીકરણ

$$PV = RT \quad (\mu = 1 \text{ mol})$$

$$\therefore P = \frac{RT}{V}$$

ધ્વનિની ઝડપના સૂત્ર $v = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}}$ માં Pનું મૂલ્ય મૂકતાં,

$$\therefore v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{\rho V}}$$

પરંતુ, ρV = એક મોલ વાયુનું દળ = વાયુનો અણુભાર M

$$\therefore \text{ઝડપ } v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} \qquad (8.7.9)$$

ઉપર્યુક્ત સમીકરણ પરથી સ્પષ્ટ છે કે વાયુમાં ધ્વનિની ઝડપ તેના નિરપેક્ષ તાપમાનના વર્ગમૂળના સમપ્રમાણમાં હોય છે.

એટલે કે, $\boldsymbol{v} \propto \sqrt{T}$

જો તાપમાન અચળ રાખીને જો વાયુનું દબાણ (P) બદલવામાં આવે, તો વાયુની ઘનતા ρ પણ દબાણના સમપ્રમાણમાં બદલાતી હોવાથી $\frac{P}{\rho}$ અચળ રહે છે. આથી અચળ તાપમાને અને આર્દ્રતા (humidity) એ **વાયુમાં ધ્વનિની ઝડપ વાયુના દબાણ પર આધારિત નથી.**

અચળ દબાણે પાણીની બાષ્પની ઘનતા સૂકી હવાની ઘનતા કરતાં ઓછી હોય છે. આથી, **વાતાવરણમાં ભેજ વધતા $v = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}}$ સૂત્ર પ્રમાણે ધ્વનિની ઝડપ વધે છે.**

ઉદાહરણ 10 : સાબિત કરો કે t તાપમાને વાયુમાં ધ્વનિ-તરંગની ઝડપ $v_t = v_0\left(1 + \frac{t}{546}\right)$ હોય છે. v_0 એ 0 °C તાપમાને વાયુમાં ધ્વનિની ઝડપ છે. ($t << 273$)

ઉકેલ : આપણે જાણીએ છીએ કે વાયુમાં ધ્વનિની ઝડપ $v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$ છે.

એટલે કે, $v \propto \sqrt{T}$

v_t = t °C તાપમાને વાયુમાં ધ્વનિની ઝડપ

v_0 = 0 °C તાપમાને વાયુમાં ધ્વનિની ઝડપ

$$\therefore \frac{v_t}{v_0} = \sqrt{\frac{273+t}{273}}$$

$(\because T(K) = t(^\circ C) + 273)$

$$\therefore v_t = v_0\left(1+\frac{t}{273}\right)^{\frac{1}{2}}$$

હવે, દ્વિપદી વિસ્તરણનો ઉપયોગ કરતાં અને ઉચ્ચ ઘાતવાળાં પદો અવગણતાં,

$$v_t = v_0\left(1+\frac{1}{2}\times\frac{t}{273}\right)$$

$$v_t = v_0\left(1+\frac{t}{546}\right)$$

[નોંધ : જો 0 °C તાપમાને વાયુમાં ધ્વનિની ઝડપ 332 m/s હોય, તો 1 °C તાપમાને ધ્વનિની ઝડપ, $v_t = 332\left(1+\frac{1}{546}\right) = v_0\left(1+\frac{t}{546}\right) = 332.61$ m/s.

આમ, તાપમાનમાં 1 °C જેટલો વધારો થતાં વાયુમાં ધ્વનિની ઝડપમાં 332.61 − 332 = 0.61 m/s જેટલો વધારો થાય છે.]

ઉદાહરણ 11 : 27 °C તાપમાન અને 76 cm દબાણે વાયુમાં ધ્વનિની ઝડપ 345 m/s છે, તો 127 °C તાપમાન અને 75 cm દબાણે વાયુમાં ધ્વનિની ઝડપ શોધો.

ઉકેલ : યાદ રાખો કે વાયુમાં દબાણ બદલાતા ધ્વનિની ઝડપ બદલાતી નથી. આથી,

જો v_1 અને v_2 એ અનુક્રમે 27°C અને 127°C તાપમાને ધ્વનિની ઝડપ હોય તો,

$$\frac{v_2}{v_1} = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} = \sqrt{\frac{273+127}{273+27}} = \sqrt{\frac{4}{3}}.$$

∴ 127°C તાપમાને ધ્વનિની ઝડપ,

$$v_2 = v_1 \times \sqrt{\frac{4}{3}} = 345 \times \sqrt{\frac{4}{3}} = 398.4 \text{ m/s}$$

ઉદાહરણ 12 : STP એ સૂકી હવામાં ધ્વનિની ઝડપ 332 m s^{-1} છે. ધારો કે હવામાં કદની દૃષ્ટિએ 4 ભાગ નાઇટ્રોજન અને એક ભાગ ઑક્સિજન છે. STP એ નાઇટ્રોજન અને ઑક્સિજનની ઘનતાનો ગુણોત્તર 16 : 14 હોય, તો આ સ્થિતિમાં ઑક્સિજનમાં ધ્વનિની ઝડપ શોધો.

ઉકેલ : હવાની ઘનતા = $\frac{\text{કુલ દળ}}{\text{કુલ કદ}}$

$$\rho_a = \frac{\text{ઑક્સિજનનું દળ + નાઇટ્રોજનનું દળ}}{\text{ઑક્સિજનનું કદ + નાઇટ્રોજનનું કદ}}$$

$$\rho_a = \frac{(V\times\rho_0)+(4V\times\rho_N)}{V+4V}$$

$$= \frac{\rho_0+4\rho_N}{5}$$

$$= \frac{\rho_0\left(1+4\times\frac{\rho_N}{\rho_0}\right)}{5}$$

$$= \frac{\rho_0\left(1+4\times\frac{14}{16}\right)}{5}$$

$$= 0.9\rho_0$$

ધ્વનિની ઝડપ $v \propto \frac{1}{\sqrt{\rho}}$ $\quad (\because v = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}})$

∴ ઑક્સિજનમાં ધ્વનિની ઝડપ $v_0 \propto \frac{1}{\sqrt{\rho_0}}$

અને હવામાં ધ્વનિની ઝડપ $v_a = \frac{1}{\sqrt{\rho_a}}$

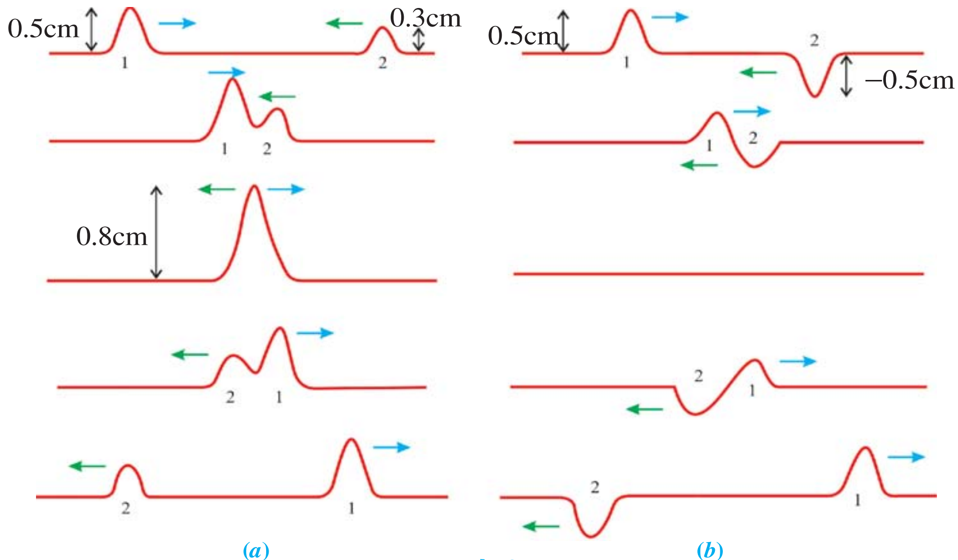
$$\therefore \frac{v_0}{v_a} = \sqrt{\frac{\rho_a}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{0.9\rho_0}{\rho_0}} = 0.9487$$

$$\therefore v_0 = v_a \times 0.9487 = 332 \times 0.9487$$

$$= 314.77 \text{ m/s}$$

8.8 સંપાતપણાનો સિદ્ધાંત (Principle of Superposition)

અત્યાર સુધી આપણે માધ્યમ (દોરી)માં પ્રસરતા ફક્ત એક જ તરંગની ચર્ચા કરી. ધારો કે બે વ્યક્તિઓ દોરીના બંને છેડેથી પકડીને દોરીને હલાવે, તો આકૃતિ 8.9(*a*)માં દર્શાવ્યા અનુસાર દોરી પર બે તરંગ-સ્પંદો એકબીજા તરફ ગતિ કરતા જણાશે. અહીં માધ્યમ એક જ હોવાથી બંને તરંગ-સ્પંદની ઝડપ સમાન હશે.



સંપાતપણાનો સિદ્ધાંત
આકૃતિ 8.9

ધારો કે પહેલા તરંગમાં કણનું મહત્તમ સ્થાનાંતર 0.5 cm છે અને બીજા તરંગમાં તે 0.3 cm છે. અહીં બંને તરંગો એકબીજા તરફની દિશામાં ગતિ કરે છે. આથી કોઈ એક ક્ષણે તેઓ દોરીના કોઈ વિભાગ આગળ એકબીજા પર સંપાત થાય છે અને ત્યાર બાદ તેઓ પોતાની મૂળ દિશામાં પોતાનો આકાર જાળવી રાખીને ગતિ કરે છે. બંને તરંગો દોરીના જે વિભાગમાં સંપાત થાય છે, ત્યાં કણનું મહત્તમ સ્થાનાંતર 0.5 cm + 0.3 cm = 0.8 cm જેટલું થાય છે.

આકૃતિ 8.9(*b*)માં દર્શાવ્યા અનુસાર જો બંને વ્યક્તિઓ દોરીને એવી રીતે દોલિત કરે જેથી દોરીના એક છેડે ઉત્પન્ન થયેલ તરંગ-સ્પંદમાં મહત્તમ સ્થાનાંતર ઊર્ધ્વ દિશામાં 0.5 cm જેટલું મળે અને બીજા છેડે ઉત્પન્ન થયેલા તરંગ-સ્પંદમાં આ સ્થાનાંતર અધોદિશામાં 0.5 cm જેટલું મળે. જ્યારે આ બંને તરંગો દોરી પર ગતિ કરતાં, દોરીના કોઈ એક વિભાગમાં કોઈ એક સમયે સંપાત થશે. ત્યારે બધા કણોનું સ્થાનાંતર 0.5cm + (–0.5 cm) = 0 થશે. અહીં કણનું સ્થાનાંતર શૂન્ય થાય છે, પરંતુ કણનો વેગ શૂન્ય થતો નથી. આ સ્થિતિમાં દોરી સીધી થઈ જાય છે. ત્યાર બાદ બંને તરંગ-સ્પંદ છૂટા પડી પોતાની મૂળ દિશામાં ગતિ કરે છે.

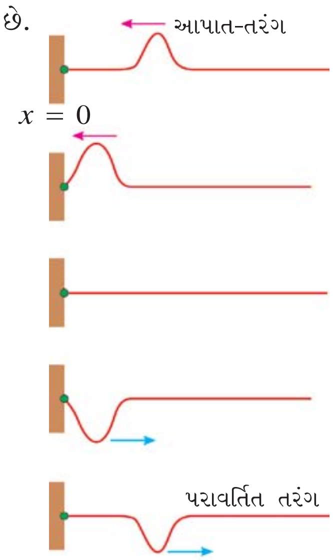
ઉપરનાં અવલોકનો પરથી સંપાતપણાનો સિદ્ધાંત નીચે મુજબ લખી શકાય.

"જ્યારે માધ્યમનો કોઈ કણ એકીસાથે બે કે તેથી વધારે તરંગોની અસર હેઠળ આવે છે, એટલે કે કોઈ કણ પાસે બે કે બે કરતાં વધારે તરંગો સંપાત થાય છે, ત્યારે તે કણનું સ્થાનાંતર તે દરેક તરંગ વડે ઉદ્ભવતાં સ્વતંત્ર સ્થાનાંતરોના સદિશ સરવાળા જેટલું હોય છે."

તરંગનું પરાવર્તન (Reflection of Waves) :

(*a*) જડિત આધાર પાસેથી તરંગનું પરાવર્તન (Reflection of waves from a rigid support) :

આકૃતિ 8.10માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે ધારો કે $y = A\sin(\omega t + kx)$ વડે રજૂ થતું એક પ્રગામી તરંગ xના ઘટતાં મૂલ્યની દિશામાં ગતિ કરતાં $x = 0$ બિંદુ પાસે આવે છે. તરંગ જડિત આધાર પાસે આવતાં તે જડિત આધાર (દીવાલ) પર બળ લગાડે છે. ન્યૂટનના ત્રીજા નિયમ અનુસાર દીવાલ એ દોરી પર પ્રતિક્રિયા બળ લગાડે છે. જે જડિત આધાર આગળ દોરી પર તરંગ ઉત્પન્ન કરે છે. આ તરંગ એ આપાત તરંગની વિરુદ્ધ દિશામાં ગતિ કરે છે, જેને પરાવર્તિત તરંગ કહે છે.



દૃઢ આધાર આગળથી તરંગનું પરાવર્તન
આકૃતિ 8.10

આપાત-તરંગ $y = A\sin(\omega t + kx)$ને કારણે $x = 0$ બિંદુ પરનાં દોલનો

$$y_i = A \sin\omega t \qquad (8.8.1)$$

વડે રજૂ કરી શકાય. $x = 0$ આગળનો છેડો જડિત હોવાથી તેનું સ્થાનાંતર તો શૂન્ય જ રહેવાનું છે. આથી સંપાતપણાના સિદ્ધાંત અનુસાર $x = 0$ આગળ પરાવર્તિત તરંગનું સ્થાનાંતર નીચે મુજબ આપી શકાય.

$$y_r = -A \sin\omega t \qquad (8.8.2)$$

સમીકરણ (8.8.2) ને નીચે મુજબ લખી શકાય :

$$y_r = A\sin(\omega t + \pi) \qquad (8.8.3)$$

આ દર્શાવે છે કે **તરંગ જ્યારે દૃઢ આધાર પરથી પરાવર્તન પામે છે, ત્યારે તેની કળામાં π, જેટલો વધારો થાય છે.** પરાવર્તન પામતી વખતે તરંગનો 'આકાર' ઉલટાઈ જાય છે. અર્થાત્ ગર્ત એ શૃંગરૂપે અને શૃંગ એ ગર્તરૂપે પરાવર્તિત થાય છે.

આ પરાવર્તિત તરંગ xના વધતા મૂલ્યની દિશામાં ગતિ કરતો હોવાથી તેનું તરંગ-સમીકરણ નીચે મુજબ મળે,

$$y_r = A \sin(\omega t + \pi - kx)$$

$$\therefore\ y_r = -A \sin(\omega t - kx) \qquad (8.8.4)$$

જો આપાત તરંગ વધતા xની દિશામાં ગતિ કરતું હોય, તો

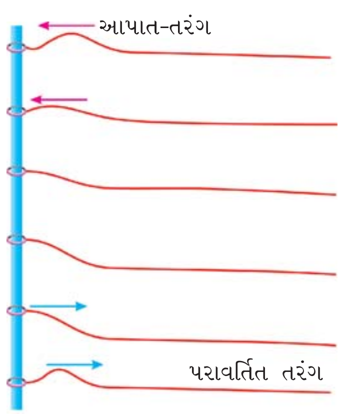
$$y_i = A \sin(\omega t - kx) \qquad (8.8.5)$$

અને પરાવર્તિત તરંગનું સમીકરણ નીચે મુજબ લખી શકાય.

$$y_r = -A \sin(\omega t + kx) \qquad (8.8.6)$$

(*b*) મુક્ત આધાર પાસેથી તરંગનું પરાવર્તન (Reflection of waves from a free end) :

આકૃતિ 8.11માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે દોરીનો એક છેડો ખૂબ જ હળવી રિંગ સાથે બાંધેલ છે અને આ રિંગ શિરોલંબ રાખેલ સળિયા પર ઘર્ષણરહિત સરકી શકે છે. અહીં દોરીનો આ છેડો મુક્ત છે તેમ કહેવાય અને આવા મુક્ત છેડેથી તરંગનું પરાવર્તન થાય ત્યારે શું થાય છે તે સમજીશું.



મુક્ત આધાર પાસેથી તરંગનું પરાવર્તન

આકૃતિ 8.11

દોરીના બીજા છેડેથી ઉત્પન્ન કરેલ તરંગનો ધારો કે શૃંગ જેવો વિભાગ રિંગ પાસે પહોંચે છે. રિંગ દૃઢ આધાર સાથે બાંધેલી ન હોવાથી રિંગ ઉપર તરફ ધકેલાય છે. આથી તેની સાથે બાંધેલી દોરી પણ ઉપર તરફ ખેંચાય છે. પરિણામે દોરીમાં આ છેડેથી પરાવર્તિત તરંગ ઉત્પન્ન થાય છે, જેની કળા આપાત તરંગ જેટલી જ હોય છે. અર્થાત્ આ પ્રકારના પરાવર્તનમાં આકાર ઊલટાતો નથી અને શૃંગ એ શૃંગરૂપે તથા ગર્ત એ ગર્તરૂપે જ પરાવર્તન પામે છે. આવી પરિસ્થિતિમાં રિંગ પર બંને તરંગો સાથે હોવાથી રિંગનું સળિયા પરનું સ્થાનાંતર આપાત-તરંગના કંપવિસ્તારથી બમણું હોય છે.

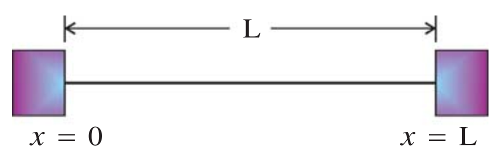
આ ચર્ચા પરથી સ્પષ્ટ છે કે જો આપાત-તરંગનું સમીકરણ $y_i = A \sin(\omega t + kx)$ હોય, તો મુક્ત છેડેથી તેના પરાવર્તિત તરંગનું સમીકરણ નીચે મુજબ લખી શકાય :

$$y_r = A \sin (\omega t - kx) \qquad (8.8.7)$$

આમ, પ્રગામી તરંગ જ્યારે દૃઢ આધાર અથવા બંધ છેડા પરથી પરાવર્તન પામે છે ત્યારે તેની કળામાં π rad જેટલો વધારો થાય છે અને મુક્ત છેડા પરથી પરાવર્તન પામે ત્યારે તેની કળામાં કોઈ તફાવત ઉદ્‌ભવતો નથી.

8.9 સ્થિત-તરંગો (Stationary or Standing Waves)

સમાન કંપવિસ્તારવાળા અને સમાન તરંગલંબાઈવાળાં પરસ્પર વિરુદ્ધ દિશામાં ગતિ કરતાં અને સંપાતીકરણ અનુભવતાં તરંગોની સમાસ અસર રૂપે મળતાં તરંગો પ્રગામીપણાનો ગુણધર્મ ગુમાવી બેસે છે. આ રીતે રચાતા સમાસ-તરંગો માધ્યમમાં સ્થિત ભાત ઊપજાવે છે. આવાં તરંગોને **સ્થિત-તરંગો** કહે છે.



દૃઢ આધાર પર જડિત કરેલ દોરી

આકૃતિ 8.12

આકૃતિ 8.12માં દર્શાવ્યા મુજબ બંને છેડે દૃઢ આધાર પર જડિત કરેલી, L લંબાઈની તણાવવાળી દોરીને ધ્યાનમાં લો. આ દોરીમાં હાર્મોનિક તરંગ ઉત્પન્ન કરતાં તેનું દૃઢ આધારો પરથી વારંવાર પરાવર્તન થાય છે અને દોરીનો દરેક કણ આપાત-તરંગ અને પરાવર્તિત તરંગની અસર હેઠળ આવે છે.

ધારો કે, દોરી પર x ના વધતાં મૂલ્યોની દિશામાં ગતિ કરતું તરંગ (આપાત-તરંગ),

$$y_1 = A \sin(\omega t - kx) \quad (8.9.1)$$

વળી, દૃઢ આધાર આગળથી પરાવર્તન પામી xનાં ઘટતાં મૂલ્યોની દિશામાં ગતિ કરતું તરંગ (પરાવર્તિત તરંગ)

$$y_2 = -A \sin(\omega t + kx) \quad (8.9.2)$$

સંપાતપણાના સિદ્ધાંત અનુસાર દોરીના કોઈ પણ કણનું સ્થાનાંતર,

$$y = y_1 + y_2$$
$$= A\sin(\omega t - kx) - A\sin(\omega t + kx)$$
$$\therefore y = -2A\cos\omega t \sin kx \text{ (જુઓ ફૂટનોટ)}$$
$$= -2A\sin kx \cos\omega t \quad (8.9.3)$$

સમીકરણ (8.9.3)માં તરંગ-વિધેયનું સ્વરૂપ એ $f(\omega t \pm kx)$ પ્રકારનું નથી એટલે કે આ તરંગ પ્રગામી તરંગ નથી. સમીકરણ (8.9.3)એ સ્થિત-તરંગનું સમીકરણ છે. **આવા તરંગ દ્વારા ઊર્જાનું વહન થતું નથી, આથી તેને સ્થિત-તરંગ કહે છે.**

સમીકરણ (8.9.3)માંનું પદ '$\cos \omega t$' સૂચવે છે કે દોરીનો દરેક કણ સરળ આવર્તગતિ કરે છે અને તેમના કંપવિસ્તારો $2A\sin kx$ અનુસાર કણના સ્થાન x પર આધાર રાખે છે. અહીં બધા જ કણનો કંપવિસ્તાર સમાન હોતો નથી. જે કણોના સ્થાન x એવાં છે, જેથી $\sin kx = 0$ થાય, તેવા કણોના કંપવિસ્તાર શૂન્ય છે. આવા કણોનું સ્થાનાંતર હંમેશાં શૂન્ય જ રહે છે. આવા બિંદુઓને **નિસ્પંદ-બિંદુઓ (Nodes)** કહે છે.

સ્થિત-તરંગમાં જે સ્થાનોએ કંપવિસ્તાર હંમેશા શૂન્ય રહે છે. તે સ્થાનોને નિસ્પંદ-બિંદુઓ કહે છે.

હવે, $\sin kx = 0$

$$\therefore kx = n\pi \quad \text{જ્યાં, } n = 1, 2, 3 \ldots\ldots$$

$$\therefore x = \frac{n\pi}{k} = \frac{n\pi}{2\pi/\lambda}$$

$$\therefore x = \frac{n\lambda}{2} \quad (8.9.4)$$

આ દર્શાવે છે કે $x = 0$ થી $x = \frac{\lambda}{2}, \lambda, \frac{3\lambda}{2}, \ldots \frac{n\lambda}{2}$ વગેરે અંતરોએ રહેલા બિંદુઓ નિસ્પંદ-બિંદુઓ છે. **બે અનુક્રમે આવતા નિસ્પંદ-બિંદુઓ વચ્ચેનું અંતર $\frac{\lambda}{2}$ છે.**

ફૂટનોટ : $\sin C - \sin D = 2\cos\left(\frac{C + D}{2}\right)\sin\left(\frac{C - D}{2}\right)$

હવે, જે કણોના સ્થાન $\sin kx = \pm 1$ વડે આપી શકાય છે, તેવા કણો મહત્તમ કંપવિસ્તાર સાથે દોલનો કરે છે. તે બિંદુઓને **પ્રસ્પંદ-બિંદુઓ (Antinodes)** કહે છે.

સ્થિત-તરંગમાં જે સ્થાનોએ કંપવિસ્તાર હંમેશા મહત્તમ રહે છે તે સ્થાનોને પ્રસ્પંદ-બિંદુઓ કહે છે. આવાં બિંદુઓનો કંપવિસ્તાર 2A હોય છે.

હવે, $\sin kx = \pm 1$

$$\therefore kx = (2n - 1)\frac{\pi}{2} \quad \text{જ્યાં, } n = 1, 2, \ldots\ldots$$

$$\therefore x = \frac{(2n - 1)\pi}{2k}$$

$$= (2n - 1)\frac{\lambda}{4} \quad (8.9.5)$$

આમ, દોરીના $x = 0$ છેડાથી પ્રસ્પંદ-બિંદુઓ અનુક્રમે $x = \frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}, \frac{5\lambda}{4}, \ldots\ldots$ અંતરે આવેલાં છે. અહીં પણ **બે અનુક્રમે આવતાં પ્રસ્પંદ-બિંદુઓ વચ્ચેનું અંતર $\frac{\lambda}{2}$ છે.** વળી, અનુક્રમે આવતાં નિસ્પંદ-બિંદુઓ અને પ્રસ્પંદ-બિંદુઓ વચ્ચેનું અંતર $\frac{\lambda}{4}$ હોય છે.

આકૃતિ 8.13માં પ્રસ્પંદ-બિંદુઓને (Antinodes) A વડે અને નિસ્પંદ-બિંદુઓને (Nodes) N વડે દર્શાવ્યા છે.

અહીં, દોરીના બંને છેડા $x = 0$ તેમજ $x = L$ પાસે દૃઢ આધાર સાથે બાંધેલી હોવાથી તે છેડાનું સ્થાનાંતર પણ બધા જ સમયે શૂન્ય રહેવું જોઈએ.

$$\therefore \sin kL = 0 \text{ થવું જોઈએ.}$$

$$\therefore kL = n\pi \quad \text{જ્યાં, } n = 1, 2, 3, \ldots\ldots$$

$$\therefore \frac{2\pi}{\lambda}L = n\pi$$

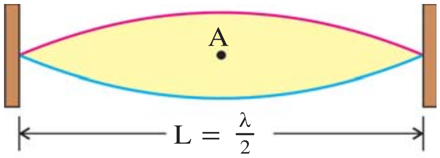
$$\therefore \lambda_n = \frac{2L}{n} \quad (8.9.6)$$

આ સમીકરણ દર્શાવે છે કે, nના જુદાં-જુદાં મૂલ્યો અનુસાર, અત્રે આપેલ L લંબાઈની દોરીમાં $2L, L, \frac{2L}{3}, \frac{L}{2}, \ldots\ldots$ જેવી અમુક નિશ્ચિત તરંગલંબાઈનાં તરંગો માટે સ્થિતતરંગો જોવા મળશે. આમ, **આપેલી તણાવવાળી દોરીમાં ગમે તે તરંગલંબાઈના તરંગો ઉત્પન્ન કરી સ્થિત-તરંગોની રચના મેળવી શકાય નહિ.**

દોરી પર ઉત્પન્ન થતા સ્થિત-તરંગોની શક્ય એવી તરંગલંબાઈઓને અનુરૂપ આવૃત્તિ,

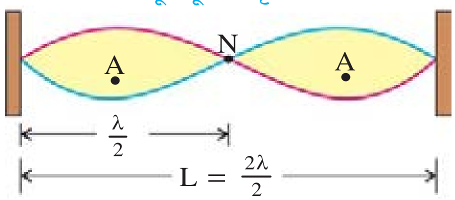
$$f_n = \frac{v}{\lambda_n}$$

સમીકરણ 8.9.6 પરથી, $f_n = \frac{nv}{2L} \quad (8.9.7)$



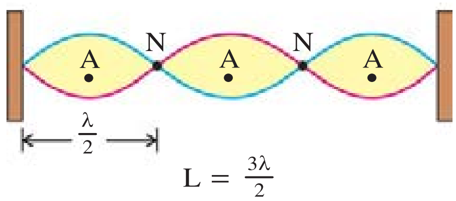
(a) n = 1

મૂળભૂત આવૃત્તિ



(b) n = 2

દ્વિતીય હાર્મોનિક અથવા પ્રથમ ઓવરટોન



(c) n = 3

તૃતીય હાર્મોનિક અથવા દ્વિતીય ઓવરટોન

દોરી પર સ્થિત-તરંગો

આકૃતિ 8.13

અથવા $f_n = \dfrac{n}{2L}\sqrt{\dfrac{T}{\mu}}$ (8.9.8)

જ્યાં, v = દોરી પર તરંગની ઝડપ = $\sqrt{\dfrac{T}{\mu}}$

સમીકરણ (8.9.7)માં $n = 1$ મૂકતાં,

$$f_1 = \frac{v}{2L}$$

અહીં, f_1ને દોરીની **મૂળભૂત આવૃત્તિ** અથવા **પ્રથમ હાર્મોનિક** કહે છે.

$n = 2$ લેતાં,

$$f_2 = \frac{2v}{2L} = 2f_1$$

f_2 ને **દ્વિતીય (second) હાર્મોનિક** અથવા **પ્રથમ ઓવરટોન કહે છે.**

$n = 3$ લેતાં,

$$f_3 = \frac{3v}{2L} = 3f_1$$

f_3 ને **તૃતીય હાર્મોનિક** અથવા **દ્વિતીય ઓવરટોન કહે છે.**

આમ, સમીકરણ (8.9.7)માં nના જુદાં-જુદાં મૂલ્યો લઈને દોરીના શક્ય પ્રકારનાં દોલનો મેળવી શકાય અને તેને અનુરૂપ આવૃત્તિઓ શોધી ચતુર્થ.....વગેરે હાર્મોનિક્સ મેળવી શકાય.

પ્રથમ, દ્વિતીય અને તૃતીય હાર્મોનિક્સ સાથે દોરી પર થતાં દોલનો આકૃતિ 8.13માં દર્શાવ્યાં છે. આકૃતિ પરથી સ્પષ્ટ છે કે દોરી પર ઉત્પન્ન થતાં ગાળાઓની સંખ્યા n જેટલી છે.

આમ, જુદી-જુદી નિશ્ચિત આવૃત્તિઓ સાથેના શક્ય દોલનોને દોરીનાં **પ્રસામાન્યરીતિ દોલનો (Normal Modes of Vibration)** કહે છે.

જુદા-જુદા નૉર્મલ મોડ્સ ઑફ વાઇબ્રેશનને અનુરૂપ આવૃત્તિઓ નીચેના સૂત્રથી મેળવી શકાય.

$$f_n = \frac{nv}{2L} = nf_1 \text{ જ્યાં, } n = 1, 2, 3....$$

જ્યાં, દોરી પર ઉત્પન્ન થતી આવૃત્તિ f_nને n-મી હાર્મોનિક અથવા $(n - 1)$મો ઓવરટોન કહે છે. અહીં, n એ દોરી પર રચાતા ગાળાઓની સંખ્યા પણ દર્શાવે છે.

ઉદાહરણ 13 : 60 cm લાંબી એક દોરીમાં ઉત્પન્ન કરેલા સ્થિત-તરંગો $y = 4\sin\left(\dfrac{\pi x}{15}\right)\cos(96\pi t)$ સમીકરણ વડે રજૂ કરવામાં આવે છે. અહીં x અને y cmમાં અને t સેકન્ડમાં છે.

(1) નિસ્પંદ-બિંદુઓનાં સ્થાન શોધો.

(2) પ્રસ્પંદ-બિંદુઓનાં સ્થાન શોધો.

(3) $x = 5$ cm અંતરે રહેલા કણનું મહત્તમ સ્થાનાંતર શોધો.

(4) આ સ્થિત-તરંગ જે ઘટક-તરંગોનું બનેલું હોય તે ઘટક-તરંગોનાં સમીકરણો શોધો.

ઉકેલ : $y = 4\sin\left(\dfrac{\pi x}{15}\right)\cos(96\pi t)$ ને $y = 2A\sin(kx)\cos(\omega t)$ સાથે સરખાવતાં,

$$A = 2 \text{ cm}, k = \frac{\pi}{15}\frac{\text{rad}}{\text{cm}} \text{ અને } \omega = 96\pi \text{ rad/s.}$$

પરંતુ, $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$

$$\therefore \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{15} \Rightarrow \lambda = 30 \text{ cm}$$

(1) નિસ્પંદ-બિંદુઓનાં સ્થાન

$= \dfrac{n\lambda}{2}$, જ્યાં, $n = 1, 2,...$

$= 15$ cm, 30 cm, 45 cm

(0 cm અને 60 cm અંતરે રહેલા કણો તો જકડેલા રાખેલા છે, એટલે ગણતરીમાં તેમનો સમાવેશ કર્યો નથી.)

(2) પ્રસ્પંદ-બિંદુઓનાં સ્થાન

$= (2n - 1)\frac{\lambda}{4}$, જ્યાં, $n = 1, 2, 3,...$

$= 7.5$ cm, 22.5 cm, 37.5 cm, 52.5 cm

(3) $x = 5$ cm અંતરે રહેલ કણનું મહત્તમ સ્થાનાંતર

$= 2A\sin kx$

$= 4\sin\left(\frac{\pi x}{15}\right)$

$= 4\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$ ($\because x = 5$ cm)

$= 4\frac{\sqrt{3}}{2}$

$= 2\sqrt{3}$ cm

(4) $y = 4\sin\left(\frac{\pi x}{15}\right)\cos(96\pi t)$

$$=2\sin\left(\frac{\pi x}{15} + 96\pi t\right)+2\sin\left(\frac{\pi x}{15} - 96\pi t\right)$$

$\therefore$ ઘટક-તરંગ $y_1 = 2\sin\left(\frac{\pi x}{15} + 96\pi t\right)$cm અને,

$$y_2 = 2\sin\left(\frac{\pi x}{15} - 96\pi t\right)\text{cm}$$

ઉદાહરણ 14 : એક માધ્યમમાં પ્રસરતા પ્રગામી, હાર્મોનિક તરંગનું સમીકરણ $y_i = A\cos(ax + bt)$ છે, જ્યાં A, a અને b ધન અચળાંકો છે. $x = 0$ સ્થાને રાખેલ દૃઢ આધારથી આ તરંગનું પરાવર્તન થાય છે અને પરાવર્તિત તરંગની તીવ્રતા એ આપાત-તરંગની તીવ્રતાથી 0.64 ગણી છે, તો

(*a*) આપાત-તરંગની તરંગલંબાઈ અને આવૃત્તિ શોધો.

(*b*) પરાવર્તિત તરંગનું સમીકરણ મેળવો.

(*c*) આપાત અને પરાવર્તિત તરંગોના સંપાતીકરણથી મળતા પરિણામી તરંગને પ્રગામી તરંગ અને સ્થિત-તરંગનાં સમીકરણો રૂપે દર્શાવો.

ઉકેલ :

(*a*) આપાત-તરંગ $y_i = A\cos(ax + bt)$

આ સમીકરણને તરંગ-સમીકરણ $y = A\cos(kx + \omega t)$ સાથે સરખાવતાં,

$\therefore$ તરંગ-સદિશ $k = a$

$\therefore \frac{2\pi}{\lambda} = a$

$\therefore \lambda = \frac{2\pi}{a}$

કોણીય આવૃત્તિ $\omega = 2\pi f = b$

$\therefore f = \frac{b}{2\pi}$

(*b*) તરંગ-તીવ્રતા $I \propto A^2$, જ્યાં A = કંપવિસ્તાર.

અહીં A_1 અને A_2 આપાત અને પરાવર્તિત તરંગોના કંપવિસ્તાર તથા I_1 અને I_2 અનુક્રમે તેઓની તીવ્રતાઓ છે.

$$\therefore \frac{I_2}{I_1} = \frac{(A_2)^2}{(A_1)^2}$$

$$\therefore \frac{A_2}{A_1} = \left(\frac{I_2}{I_1}\right)^{\frac{1}{2}} = (0.64)^{\frac{1}{2}}$$

$\therefore A_2 = 0.8$ A ($\because A_1$ = આપાત તરંગનો કંપવિસ્તાર = A)

$\therefore$ પરાવર્તિત તરંગનો કંપવિસ્તાર $A_2 = 0.8$ A

પરાવર્તિત તરંગનું સમીકરણ

$y_r = -A_2\cos(bt - ax)$

$\therefore y_r = -0.8\,A\cos(bt - ax)$

(*c*) પરિણામી તરંગ $y = y_i + y_r$

$= A\cos(bt + ax) - 0.8\,A\cos(bt - ax)$

$= 0.8\,A[\cos(bt + ax) - \cos(bt - ax)]$

$+ 0.2\,A\cos(bt + ax)$

$= -1.6\,A\sin(ax)\cdot\sin(bt) + 0.2\,A\cos(bt + ax)$,

જ્યાં સ્થિત-તરંગ

$y_s = -1.6\,A\sin(ax)\cdot\sin(bt)$ અને

પ્રગામી તરંગ $y_p = 0.2\,A\cos(bt + ax)$ છે.

ઉદાહરણ 15 : સોનોમીટરના તારના મુક્ત છેડે એક બ્લૉક લટકાવેલ છે. આ પરિસ્થિતિમાં તારનાં દોલનો માટે મૂળભૂત f_1 Hz છે. આ બ્લૉકને પાણીમાં ડુબાડતાં તે જ તાર માટે મૂળભૂત આવૃત્તિ f_2 Hz થાય છે. તે પછી બ્લૉકને એક પ્રવાહીમાં ડુબાડતાં આ તાર માટે f_3 Hz મૂળભૂત આવૃત્તિ મળે છે, તો બ્લૉકના દ્રવ્યની અને પ્રવાહીની વિશિષ્ટ ઘનતાઓ શોધો.

ઉકેલ : બ્લૉકને હવામાં, પાણીમાં અને પ્રવાહીમાં રાખતાં તેના પર જુદું-જુદું ઉત્પ્લાવક બળ (force of buoyancy) લાગે છે. આથી દરેક કિસ્સામાં અસરકારક વજન બદલાતાં તારમાં તણાવ બદલાય છે અને પરિણામે આપેલ લંબાઈના એક જ દ્રવ્યના તાર માટે આવૃત્તિ પણ બદલાય છે.

ધારો કે બ્લૉકનું વજન, હવામાં W_1, પાણીમાં W_2 અને પ્રવાહીમાં W_3 છે.

મૂળભૂત આવૃત્તિનું સૂત્ર $f = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$ છે.

અહીં, L અને μ અચળ હોવાથી,

$f \alpha \sqrt{T}$

$\therefore$ $T = kf^2$ જ્યાં, k = સમપ્રમાણતાનો અચળાંક

પરંતુ તણાવ $T = W$

$\therefore$ $W = kf^2$

$\therefore$ $W_1 = kf_1^2$; $W_2 = kf_2^2$; $W_3 = kf_3^2$

આર્કિમિડિઝના સિદ્ધાંત અનુસાર,

બ્લૉકના (ઘન પદાર્થના) દ્રવ્યની વિશિષ્ટ ઘનતા

$$= \frac{\text{હવામાં બ્લૉકનું વજન}}{\text{પાણીમાં બ્લૉકના વજનમાં ઘટાડો}}$$

$$= \frac{W_1}{W_1 - W_2} = \frac{f_1^2}{f_1^2 - f_2^2}$$

પ્રવાહીની વિશિષ્ટ ઘનતા

$$= \frac{\text{પ્રવાહીમાં બ્લૉકના વજનમાં ઘટાડો}}{\text{પાણીમાં બ્લૉકના વજનમાં ઘટાડો}}$$

$$= \frac{W_1 - W_3}{W_1 - W_2} = \frac{kf_1^2 - kf_3^2}{kf_1^2 - kf_2^2}$$

$$= \frac{f_1^2 - f_3^2}{f_1^2 - f_2^2}$$

8.10 નળીમાં સ્થિત-તરંગો (Stationary Wave in Pipes)

જેમ દોરીમાં નિશ્ચિત આવૃત્તિવાળા લંબગત તરંગોનું પરાવર્તન થતાં, આપાત અને પરાવર્તિત તરંગોના સંપાતીકરણને લીધે સ્થિત-તરંગો રચાય છે તેવી જ રીતેનળી (pipe) માં રહેલા હવાના સ્તંભમાં પણ નિશ્ચિત આવૃત્તિવાળા સંગત-તરંગોના નળીના છેડેથી થતાં પરાવર્તનના કારણે સ્થિત-તરંગો રચાય છે. વાંસળી, ટ્રમ્પેટ (trumpet), ક્લેરિનેટ (clarinet) જેવાં સંગીતનાં વાદ્યો પણ આવી નળીઓ-ઑર્ગન પાઇપ્સ છે. જેમાં સ્થિર-તરંગો રચાય છે.

નળીઓ બે પ્રકારની હોય છે : (1) જે નળીમાં બંને છેડા ખુલ્લા હોય તેવી નળીને ઓપન પાઇપ (open pipe) કહે છે. દા.ત., વાંસળી. (2) જેમાં એક છેડો ખુલ્લો અને બીજો છેડો બંધ હોય તેવી નળીને ક્લોઝ્ડ પાઇપ (closed pipe) કહે છે. દા.ત., ક્લેરિનેટ.

જેમ દોરીના કિસ્સામાં જડિત છેડે હંમેશા નિસ્પંદ બિંદુ જ હોય છે, તેવી જ રીતે પાઇપના બંધ છેડેથી સંગત-તરંગનું પરાવર્તન એવી રીતે થાય છે કે તે છેડો **નિસ્પંદ-બિંદુ જ** બને. પરંતુ સંગત-તરંગની તરંગલંબાઈની સરખામણીમાં પાઇપ સાંકડી હોય, તો **ખુલ્લા છેડે (કે તેની સહેજ બહાર) પ્રસ્પંદ બિંદુ** મળે છે. (પાઇપના ખુલ્લા છેડેથી થતા સંગત તરંગોના પરાવર્તનની પ્રક્રિયા થોડી જટિલ હોય છે.)

ક્લોઝ્ડ પાઇપમાં સ્થિર-તરંગો :

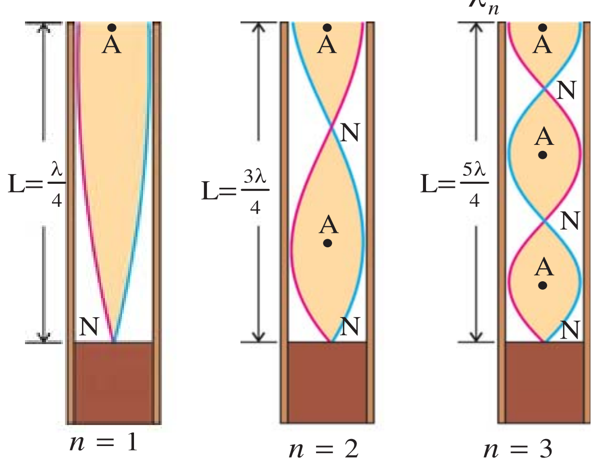
ક્લોઝ્ડ પાઇપમાં સ્થિત-તરંગો મળે તે માટે તરંગલંબાઈ (λ) એવી હોવી જોઈએ કે જેથી પાઇપના બંધ છેડે નિસ્પંદ બિંદુ અને ખુલ્લા છેડે પ્રસ્પંદ-બિંદુ મળે. સ્થિત-તરંગોમાં નિસ્પંદ અને પ્રસ્પંદ-બિંદુઓ વચ્ચેનું અંતર $\frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}, \frac{5\lambda}{4}$, ...$(2n-1)\frac{\lambda}{4}$ હોય છે. આથી વ્યાપક રીતે, ક્લોઝ્ડ પાઇપની આપેલી લંબાઈ L માટે તરંગોની તરંગલંબાઈ λ એવી હોય કે જેથી,

$$L = (2n-1)\frac{\lambda}{4} \text{ જ્યાં, } n = 1, 2, 3, ... \quad (8.10.1)$$

થાય તો જ નળીમાં સ્થિત-તરંગો ઉદ્ભવે.

આથી, ક્લોઝ્ડ પાઇપમાં ઉદ્ભવતાં સ્થિત-તરંગોની શક્ય એવી તરંગલંબાઈઓ નીચેના સૂત્રમાં nનાં જુદાં-જુદાં મૂલ્યો મૂકવાથી મળે છે. $\lambda_n = \frac{4L}{(2n-1)}$ (8.10.2)

પાઇપમાં સ્થિત-તરંગોની આવૃત્તિ $f_n = \frac{v}{\lambda_n}$,



(a) મૂળભૂત આવૃત્તિ (પ્રથમ હાર્મોનિક) (b) તૃતીય હાર્મોનિક (પ્રથમ ઓવરટોન) (c) પાંચમી હાર્મોનિક (દ્વિતીય ઓવરટોન)

ક્લોઝ્ડ પાઇપમાં સ્થિત-તરંગો

આકૃતિ 8.14

$$\therefore f_n = \frac{v}{4L}(2n - 1) \quad (8.10.3)$$

જ્યાં, v એ તરંગની ઝડપ છે.

(i) $n = 1$ લેતાં,

$$f_1 = \frac{v}{4L}$$

f_1 ને **મૂળભૂત આવૃત્તિ** અથવા **પ્રથમ હાર્મોનિક** કહે છે (જુઓ આકૃતિ 8.14(*a*)).

(ii) $n = 2$ લેતાં,

$$f_2 = \frac{3v}{4L} = 3f_1 \quad (\because f_1 = \frac{v}{4L})$$

f_2 ને **તૃતીય હાર્મોનિક** અથવા **પ્રથમ ઓવરટોન** કહે છે (જુઓ આકૃતિ 8.14(*b*)).

(iii) આ જ રીતે $n = 3$ લેતાં

$$f_3 = \frac{v}{4L}(2(3) - 1) = \frac{5v}{4L} = 5f_1$$

f_3 ને **પાંચમી હાર્મોનિક** અથવા **દ્વિતીય ઓવરટોન** કહે છે.

આમ, વ્યાપક રીતે ક્લોઝ્ડ પાઇપમાં nમાં પ્રસામાન્ય, રીતી દોલનોની આવૃત્તિ નીચે મુજબ આપી શકાય.

$$f_n = \frac{v}{4L}(2n - 1) = (2n - 1)f_1 \quad (8.10.4)$$

જ્યાં, $n = 1, 2, 3,....$

જ્યાં, f_n એ $(2n - 1)$મી હાર્મોનિક અથવા $(n - 1)$મો ઓવરટોન દર્શાવે છે.

આમ, ક્લોઝ્ડ પાઇપ માટે બધા જ હાર્મોનિક શક્ય નથી, મૂળભૂત આવૃત્તિના એકી પૂર્ણાંક હાર્મોનિક (f_1, $3f_1$, $5f_1$, ...) જ શક્ય છે.

[આ સંદર્ભમાં સમીકરણ (8.10.3)ને નીચે મુજબ પણ લખી શકાય.

$$f_n = nf_1 = \frac{nv}{4L} \text{ જ્યાં, } n = 1, 3, 5....$$

જ્યાં, f_n એ nમી હાર્મોનિક અથવા $\left(\frac{n-1}{2}\right)$મી ઓવરટોન કહે છે.]

નળીમાં જે આવૃત્તિઓવાળાં સ્થિત-તરંગો રચાય છે, તે આવૃત્તિઓનો (જુદા-જુદા હાર્મોનિક્સને) નળીની પ્રાકૃતિક આવૃત્તિઓ (natural or characteristics frequencies) કહે છે.

ઓપન પાઇપ (ખુલ્લી નળી)માં સ્થિત-તરંગો : ઓપન પાઇપમાં બંને છેડે પ્રસ્પંદ-બિંદુઓ રચાય છે. આપણે જાણીએ છીએ કે પ્રસ્પંદ-બિંદુઓ વચ્ચેનું અંતર $\frac{\lambda}{2}$, λ, $\frac{3\lambda}{2}$ ..... $\frac{n\lambda}{2}$ હોય છે. જ્યાં, $n = 1, 2, 3,.......$

આથી વ્યાપક રીતે, ઓપન પાઇપની આપેલી લંબાઈ L માટે તરંગોની તરંગલંબાઈ λ એવી હોય કે જેથી,

$$L = \frac{n\lambda}{2}$$

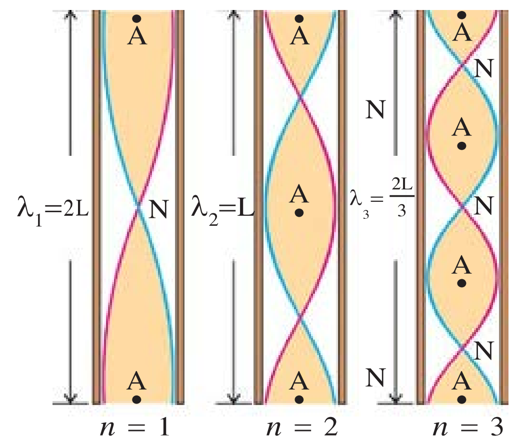
થાય તો જ નળીમાં સ્થિત-તરંગો ઉદ્ભવે,

$$\text{આથી, } \lambda_n = \frac{2L}{n} \quad (8.10.5)$$

ઓપન પાઇપમાં સ્થિત-તરંગોની આવૃત્તિ,

$$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{nv}{2L} \quad (8.10.6)$$

જ્યાં, v એ તરંગની ઝડપ છે.



(*a*) મૂળભૂત આવૃત્તિ (પ્રથમ હાર્મોનિક) (*b*) દ્વિતીય હાર્મોનિક (પ્રથમ ઓવરટોન) (*c*) તૃતીય હાર્મોનિક (દ્વિતીય ઓવરટોન)

ઓપન પાઇપમાં સ્થિત-તરંગો

આકૃતિ 8.15

(i) સમીકરણ (8.10.6)માં $n = 1$ મૂકતાં,

$$f_1 = \frac{v}{2L} \quad (8.10.7)$$

અહીં, f_1 ને **મૂળભૂત આવૃત્તિ** અથવા **પ્રથમ હાર્મોનિક** કહે છે. (જુઓ આકૃતિ 8.15*a*) જે ક્લોઝ્ડ પાઇપની મૂળભૂત આવૃત્તિ કરતાં બમણી છે. ($\because f_1 = \frac{v}{4L}$).

(ii) $n = 2$ લેતાં,

$$f_2 = \frac{2v}{2L} = \frac{v}{L} = 2f_1$$

f_2 ને **દ્વિતીય હાર્મોનિક** અથવા **પ્રથમ ઓવરટોન** કહે છે. (જુઓ આકૃતિ 8.15*b*)

આમ, સમીકરણ (8.10.6)માં nનાં જુદાં-જુદાં મૂલ્યો લઈને તૃતીય, ચતુર્થ .... હાર્મોનિક્સ મેળવી શકાય છે. વ્યાપક રૂપે ઓપન પાઇપમાં ***n*મી હાર્મોનિક અથવા (*n* – 1)માં ઓવરટોન માટે,**

$$f_n = \frac{nv}{2L} = nf_1 \quad (8.10.8)$$

જ્યાં, $n = 1, 2, 3....$

આમ, **ઓપન પાઇપ માટે દરેક હાર્મોનિક (f_1, $2f_1$, $3f_1$....) શક્ય છે.**

આમ, બંને પ્રકારની પાઈપ્સમાં પણ હવાના સ્તંભ માટે નૉર્મલ મોડ્સ ઑફ વાઈબ્રેશન મળે છે.

ઉદાહરણ 16 : ક્લોઝ્ડ પાઈપનો દ્વિતીય ઓવરટોન અને ઓપન પાઈપનો તૃતીય ઓવરટોન સમાન હોય, તો બંને પાઈપની લંબાઈનો ગુણોત્તર શોધો.

ઉકેલ :

ક્લોઝ્ડ પાઈપ માટે દ્વિતીય ઓવરટોન એટલે પાંચમી હાર્મોનિક્સ. આથી નીચેના સમીકરણમાં $n = 5$ મૂકતાં,

$$f = \frac{nv}{4L} = \frac{5v}{4L_1}.$$

ઓપન પાઈપ માટે ત્રીજી ઓવરટોન એટલે ચોથી હાર્મોનિક્સની આવૃત્તિ આથી નીચેના સમીકરણમાં $n = 4$ મૂકતાં, $f = \frac{nv}{2L} = \frac{4v}{2L_2}$.

હવે, બંને પાઈપ્સની આવૃત્તિ સમાન હોવાથી,

$$\frac{5v}{4L_1} = \frac{4v}{2L_2}$$

$$\therefore \frac{L_1}{L_2} = \frac{5}{8} \text{ OR } L_1 : L_2 = 5 : 8$$

ઉદાહરણ 17 : અનુનાદ-નળીના પ્રયોગમાં જ્યારે હવાના સ્તંભની (નળીની) લંબાઈ 9.75 cm હોય, ત્યારે 800 Hz આવૃત્તિવાળા સ્વરકાંટા સાથે પ્રથમ અનુનાદ થાય છે. હવે હવાના સ્તંભની (નળીની) લંબાઈ વંધારીને 31.25 cm કરવામાં આવે ત્યારે પાછો તેજ સ્વરકાંટા સાથે અનુનાદ સર્જાય છે. આ અવલોકનો પરથી હવામાં ધ્વનિની ઝડપ શોધો.

ઉકેલ : અનુનાદ-નળીના પ્રયોગમાં ઓપન પાઈપનો એક છેડો પાણીમાં ડુબાડેલો રાખીને ક્લોઝ્ડ પાઈપની રચના મેળવી શકાય છે.

જો નળીમાંના હવાના સ્તંભને તેની પ્રાકૃતિક આવૃત્તિ જેટલી જ આવૃત્તિ ધરાવતા સ્વરકાંટાથી દોલિત કરવામાં આવે તો હવાનો સ્તંભ મોટા કંપવિસ્તાર સાથે દોલનો કરે છે. આ સ્થિતિમાં પ્રબળ અવાજ સંભળાય છે. આને **અનુનાદની ઘટના** કહે છે.

અહીંયા, $f = 800$ Hz, $L_1 = 9.75$ cm, $L_2 = 31.25$ cm.

અનુનાદ-નળી એ ક્લોઝ્ડ પાઈપ છે. ક્લોઝ્ડ પાઈપ માટે પ્રાકૃતિક આવૃત્તિ નીચેના સમીકરણ વડે અપાય છે.

$$f = (2n - 1)\frac{v}{4L}$$

પ્રથમ અનુનાદ વખતે ઉપર્યુક્ત સમીકરણમાં $n = 1$ લેતાં,

$$f = \frac{v}{4L_1}$$

$$\therefore L_1 = \frac{v}{4f}$$

બીજા અનુનાદ માટે $n = 2$ મૂકતાં,

$$f = (2 \times 2 - 1)\frac{v}{4L_2} = \frac{3v}{4L_2}$$

$$\therefore L_2 = \frac{3v}{4f}$$

$$\therefore L_2 - L_1 = \frac{3v}{4f} - \frac{v}{4f} = \frac{2v}{4f} = \frac{v}{2f}$$

$\therefore$ ધ્વનિની ઝડપ $v = (L_2 - L_1)(2f)$

$= (31.25 - 9.75)(2 \times 800)$

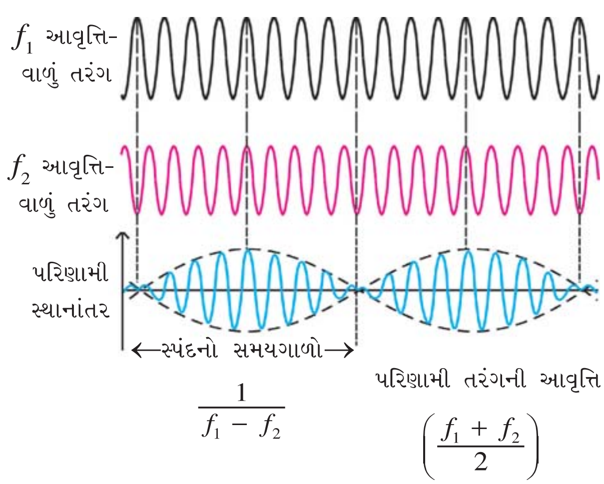
$= 34400$ cm/s

$= 344$ m/s

8.11 સ્પંદ (Beats)

આગળના પરિચ્છેદમાં આપણે એકસમાન કંપવિસ્તાર વાળા, સમાન આવૃત્તિવાળા અને પરસ્પર વિરુદ્ધ દિશામાં ગતિ કરતાં તરંગો માટે સંપાતપણાનો સિદ્ધાંત લાગુ પાડ્યો, જે માધ્યમમાં અપ્રગામી એવા સ્થિત-તરંગો રચે છે.

હવે, સંપાતપણાના સિદ્ધાંતથી આપણે સમાન કંપવિસ્તારવાળાં પણ સહેજ જુદી પડતી આવૃત્તિવાળાં હાર્મોનિક તરંગો માધ્યમમાં એક જ દિશામાં ગતિ કરે, તો માધ્યમનું કણ કેવી દોલિત ગતિ કરશે તેનો અભ્યાસ કરીશું.



સ્પંદની ઘટના

આકૃતિ 8.16

ધારો કે માધ્યમમાં પ્રસરતાં બે હાર્મોનિક તરંગો,

$y_1 = A \sin \omega_1 t = A \sin 2\pi f_1 t$ અને

$y_2 = A \sin \omega_2 t = A\sin 2\pi f_2 t$

અહીં, સરળતા ખાતર આપણે બંને તરંગોની પ્રારંભિક કળા શૂન્ય લીધી છે. f_1 અને f_2 એ અનુક્રમે પ્રથમ અને બીજા તરંગની આવૃત્તિઓ છે. યાદ રાખો કે આપણે અહીં બંને તરંગોની અસર હેઠળ માધ્યમના કોઈ એક કણનું અવલોકન કરી રહ્યા છીએ.

સંપાતપણાના સિદ્ધાંત અનુસાર t સમયે કથિત કણનું સ્થાનાંતર y હોય તો,

$$y = y_1 + y_2$$
$$= A \sin 2\pi f_1 t + A \sin 2\pi f_2 t$$

$$\therefore\ y = [2A\cos 2\pi\left(\frac{f_1 - f_2}{2}\right)t] \sin 2\pi\left(\frac{f_1 + f_2}{2}\right)t \quad (8.11.1)$$

$$y = A'\sin 2\pi\left(\frac{f_1 + f_2}{2}\right)t$$

અથવા $y = A'\sin 2\pi\, ft$ (8.11.2)

ઉપર્યુક્ત સમીકરણ દર્શાવે છે કે કથિત કણનું પરિણામી દોલન $f = \left(\frac{f_1 + f_2}{2}\right)$ આવૃત્તિ સાથેનાં આવર્તદોલનો છે. f એ બંને તરંગોની સરેરાશ આવૃત્તિ દર્શાવે છે. આ દોલનોનો કંપવિસ્તાર,

$$A' = 2A\cos 2\pi\left(\frac{f_1 - f_2}{2}\right)t \quad (8.11.3)$$

કંપવિસ્તાર સમય સાથે આવર્ત રીતે બદલાતો જાય છે. કંપવિસ્તારનું આ પદ સમયમાં આવર્ત-વિધેય છે. આ વિધેયની આવૃત્તિ $\left(\frac{f_1 - f_2}{2}\right) = f\,'$ છે. આથી, તેનો આવર્તકાળ,

$$T = \frac{1}{f'} = \frac{2}{f_1 - f_2} \quad (8.11.4)$$

હવે, એક આવર્તકાળ (T) જેટલા સમયગાળા દરમિયાન cosine વિધેય બેવાર મહત્તમ મૂલ્યો અને બે વાર શૂન્ય મૂલ્ય ધારણ કરે છે. તેથી એકમસમયમાં આ વિધેય $f_1 - f_2$ વખત મહત્તમ મૂલ્ય ધારણ કરે છે. અર્થાત્ કણનાં પરિણામી દોલનોનો કંપવિસ્તાર એકમસમયમાં $f_1 - f_2$ વખત મહત્તમ અને $f_1 - f_2$ વખત શૂન્ય બને છે.

ફૂટનોટ : $\sin C + \sin D = 2\sin\left(\frac{C+D}{2}\right)\cos\left(\frac{C-D}{2}\right)$

જો તરંગો ધ્વનિ-તરંગો હોય તો ધ્વનિની પ્રબળતા કંપવિસ્તારના વર્ગ ના સમપ્રમાણમાં ($I \propto A^2$) હોવાથી બંને તરંગો માધ્યમના જે વિસ્તારમાં સંપાત થાય છે, ત્યાં એકમસમયમાં ધ્વનિ $f_1 - f_2$ વખત મહત્તમ અને $f_1 - f_2$ વખત શૂન્ય થાય છે.

આમ, **સમાન કંપવિસ્તારવાળા પણ સહેજ જુદી પડતી આવૃત્તિઓવાળાં તરંગોના સંપાતીકરણને કારણે આવર્ત રીતે કંપવિસ્તાર અને પરિણામે ધ્વનિની પ્રબળતા મહત્તમ બનવાની ઘટનાને સ્પંદ કહે છે. એકમસમય દીઠ સ્પંદની સંખ્યા $f_1 - f_2$ છે.** જેને સ્પંદની આવૃત્તિ પણ કહે છે.

નોંધ : ધ્વનિના કિસ્સામાં સ્પંદ સ્પષ્ટ રીતે અનુભવાય તે માટે $f_1 - f_2$ આશરે 6થી 7 કરતાં વધારે ન હોવો જોઈએ.

સ્પંદનો અનુભવ કરવા માટે સમાન આવૃત્તિવાળા બે સ્વરકાંટા લો. તેમાંથી એક સ્વરકાંટાનાં પાંખિયાં પર મીણ ચોંટાડો. આમ, કરવાથી તેની આવૃત્તિ થોડી ઘટશે. (જો તેના પાંખિયાને ઘસવામાં આવે તો સ્વરકાંટાની આવૃત્તિ વધે છે.) હવે બંને સ્વરકાંટાને કંપિત કરી પાસ પાસે રાખતા તમને નિયમિત સમયાંતરે ધ્વનિમાં થતી પ્રબળતાના ફેરફારનો અનુભવ થશે. સંગીતકારો તેમનાં જુદાં-જુદાં વાંજિત્રોને tune કરવા માટે સ્પંદની ઘટનાનો ઉપયોગ કરે છે.

ઉદાહરણ 18 : સ્વરકાંટો A અને સ્વરકાંટો B ને એક સાથે કંપિત કરતાં 8 સેકન્ડમાં 20 સ્પંદ ઉત્પન્ન થાય છે. કોઈ એક સ્વરકાંટા પર મીણ લગાડતાં તેઓ 8 સેકન્ડમાં 32 સ્પંદ ઉત્પન્ન કરે છે. જે સ્વરકાંટા પર મીણ લગાવ્યું નથી, તેની આવૃત્તિ 512 Hz હોય, તો બીજા સ્વરકાંટાની આવૃત્તિ શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે સ્વરકાંટા B પર મીણ લગાવવામાં આવે છે. સ્વરકાંટા Aની આવૃત્તિ

$f_A = 512$ Hz.

સ્વરકાંટાની B મૂળ આવૃત્તિ $f_B = ?$

મીણ લગાડ્યા પહેલા, એકમસમયમાં ઉત્પન્ન થતાં,

સ્પંદોની સંખ્યા $= \frac{20}{8} = 2.5$ Hz.

$\therefore$ આથી, મીણ લગાવ્યા પહેલાં સ્વરકાંટા Bની આવૃત્તિ

$512 + 2.5 = 514.5$ Hz

અથવા $512 - 2.5 = 509.5$ Hz

હવે, સ્વરકાંટા B પર મીણ લગાવ્યા બાદ

એકમ સમયમાં ઉત્પન્ન થતાં સ્પંદોની સંખ્યા

$= \frac{32}{8} = 4$ Hz.

આથી મીણ લગાવ્યા બાદ સ્વરકાંટા Bની આવૃત્તિ,

512 + 4 = 516 Hz

અથવા 512 − 4 = 508 Hz

પરંતુ, મીણ લગાવ્યા બાદ સ્વરકાંટા Bની આવૃત્તિ ઘટશે. ઉપર્યુક્ત ગણતરીમાં જોઈ શકાય છે કે મીણ લગાવ્યા પહેલાં સ્વરકાંટા Bની આવૃત્તિ 509.5 Hz અને ત્યાર બાદ તે 508 Hz થાય છે.

આથી, સ્વરકાંટા Bની મૂળ આવૃત્તિ 509.5 Hz હશે.

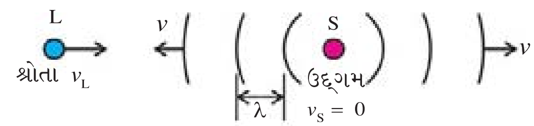
8.12 ડૉપ્લર-અસર (Doppler Effect)

જ્યારે ધ્વનિ-ઉદ્ગમ અથવા શ્રોતા અથવા બંને હવાના માધ્યમની સાપેક્ષે અને એકબીજાની સાપેક્ષે ગતિ કરે ત્યારે શ્રોતા દ્વારા અનુભવાતી ધ્વનિની આવૃત્તિ, ઉદ્ગમ દ્વારા ઉત્સર્જાતી ધ્વનિની આવૃત્તિ કરતાં જુદી સંભળાય છે. આ ઘટનાને **ડૉપ્લર અસર** કહે છે. આ અસર ક્રિશ્ચયન જ્હૉન ડૉપ્લર (1803–1853) નામના ઑસ્ટ્રિયન વિજ્ઞાનીએ શોધી હતી.

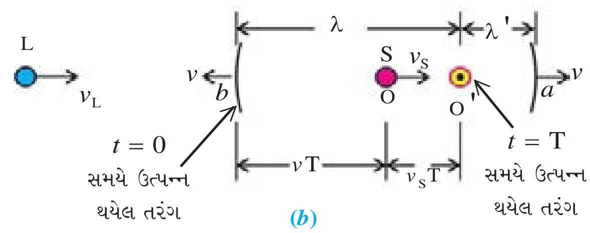
આપણી તરફ ગતિ કરતી ટ્રેનની વ્હીસલની આવૃત્તિ મૂળ આવૃત્તિ કરતાં વધુ અનુભવાતાં વ્હીસલનો ધ્વનિ વધુ તીક્ષ્ણ લાગે છે. ટ્રેન બરાબર આપણી પાસેથી પસાર થાય ત્યારે અનુભવાતી આવૃત્તિ એ મૂળ ઉત્સર્જાતિ આવૃત્તિ જેટલી અનુભવાય છે અને ટ્રેન આપણાથી દૂર જાય ત્યારે અનુભવાતી આવૃત્તિ એ મૂળભૂત આવૃત્તિ કરતાં ઓછી હોઈ અવાજ ઓછો તીક્ષ્ણ લાગે છે.

ડૉપ્લર અસર સમજવા માટે આપણે આકૃતિ 8.17 માં દર્શાવ્યા અનુસાર સુરેખ પથ પર, સ્થિર હવા (માધ્યમ)ની સાપેક્ષે શ્રોતાનો વેગ v_L અને ધ્વનિ ઉદ્ગમનો વેગ v_S લઈશું. તેમજ શ્રોતાથી ઉદ્ગમ તરફ જતી દિશામાંના વેગોને ધન ગણીશું અને તેનાથી વિરુદ્ધ દિશામાંના વેગોને ઋણ ગણીશું. ધ્વનિની ઝડપ v હંમેશાં ધન ગણીશું. આવી પ્રણાલિકા સ્વીકારવાથી એક વ્યાપક પરિણામ મેળવી શકાય છે અને બીજા કિસ્સાઓ તેના ખાસ કિસ્સા તરીકે ચર્ચી શકાય છે.

ગતિમાન શ્રોતા : ધારો કે શ્રોતા L એ v_L વેગથી સ્થિર ધ્વનિ ઉદ્ગમ S તરફ ગતિ કરે છે. (જુઓ આકૃતિ 8.17) ધ્વનિ-ઉદગમમાંથી ઉત્સર્જાતાં તરંગોની આવૃત્તિ f_S છે. આથી તેમની તરંગલંબાઈ $\lambda = \frac{v}{f_S}$ થશે. જ્યાં v એ ધ્વનિ-તરંગનો વેગ છે.



(a)
શ્રોતા ગતિમાં અને ધ્વનિ-ઉદ્ગમ સ્થિર



(b)
શ્રોતા અને ધ્વનિ-ઉદ્ગમ બંને ગતિમાં

ડૉપ્લર અસર

આકૃતિ 8.17

આ તરંગો શ્રોતા તરફ ગતિ કરતાં હોવાથી, શ્રોતાની સાપેક્ષે ધ્વનિ-તરંગોનો વેગ $v + v_L$ થશે. આથી, શ્રોતા વડે અનુભવાતી આવૃત્તિ

$$f_L = \frac{v + v_L}{\lambda} \qquad (8.12.1)$$

ગતિમાન ઉદ્ગમ અને ગતિમાન શ્રોતા : હવે, ધારો કે ધ્વનિ ઉદ્ગમ એ v_s જેટલા વેગથી L થી S તરફની દિશામાં ગતિ કરે છે. (જુઓ આકૃતિ 8.17 *b*).

$t = 0$ સમયે ધ્વનિ-ઉદ્ગમ (S) એ O સ્થાન પર અને $t = T$ સમયે તે O'સ્થાન પર છે, જ્યાં $T = \frac{1}{f_S}$ એ ઉદ્ભવતાં તરંગનો આવર્તકાળ છે.

આ T સમયમાં ધ્વનિ ઉદ્ગમે કાપેલું અંતર, $OO' = v_S T$ થશે અને ધ્વનિ ઉદ્ગમે $t = 0$ સમયે ઉત્પન્ન કરેલું તરંગ (શૃંગ) એ T સમયમાં vT અંતર કાપશે. આકૃતિ પરથી, $Oa = Ob = v$T.

હવે, $t = T$ સમયે ઉદ્ગમ O' પાસે હશે ત્યારે તે બીજું ક્રમિક ધ્વનિ તરંગ (શૃંગ) ઉત્પન્ન કરે છે અને શ્રોતા તરફ ગતિ કરતું તરંગ O'b વચ્ચે અને શ્રોતાથી દૂર જતું તરંગ O'a વિસ્તારમાં હશે.

શ્રોતા તરફ જતાં તરંગની તરંગલંબાઈ,

λ = O'b વિસ્તારમાં બે ક્રમિક તરંગ (શૃંગ) વચ્ચેનું અંતર

$= v_S T + vT$

$$\therefore \lambda = \frac{v_S + v}{f_S} \quad (\because T = \frac{1}{f_S}) \qquad (8.12.3)$$

સમીકરણ (8.12.1) માંથી λ નું મૂલ્ય મૂકતાં,

$$f_L = \frac{v + v_L}{v + v_S} \cdot f_S \qquad (8.12.3)$$

$$\text{અથવા } \frac{f_L}{v + v_L} = \frac{f_S}{v + v_S} \qquad (8.12.4)$$

આકૃતિ (8.17) પરથી સ્પષ્ટ છે કે ધ્વનિ-ઉદ્‌ગમની ગતિને લીધે ઉદ્‌ગમના આગળના વિસ્તાર (O'a) માં તરંગો દબાય છે અને તરંગલંબાઈ ઘટે છે, જ્યારે પાછળના વિસ્તારમાં (O'b) તરંગ ફેલાય છે અને તેની તરંગલંબાઈ વધે છે. અહીં, તરંગ એક જ માધ્યમ (હવા)માં પ્રસરતું હોવા છતાં તેની તરંગલંબાઈ બદલાય છે ? કેમ આમ થયું ? આ માટે તરંગ અને ધ્વનિ-ઉદ્‌ગમનું સાપેક્ષ સ્થાનાંતર જવાબદાર છે.

કેટલાક ખાસ કિસ્સાઓ :

(i) શ્રોતા સ્થિર હોય અને ધ્વનિ-ઉદ્‌ગમ શ્રોતા તરફ ગતિ કરતું હોય, તો આપણે ઉપર આપેલી વેગોની સંજ્ઞાની પ્રણાલિકા અનુસાર સમીકરણ (8.12.3)માં $v_L = 0$ અને $v_S = -v_S$ લેતાં,

$$\text{શ્રોતાને સંભળાતી આવૃત્તિ } f_L = \frac{v}{v - v_S} f_S$$

આ દર્શાવે છે કે શ્રોતાને સંભળાતી આવૃત્તિ એ મૂળ આવૃત્તિ કરતાં ઊંચી આવૃત્તિ સંભળાશે. ($f_L > f_S$)

(ii) શ્રોતા સ્થિર હોય અને ધ્વનિ-ઉદ્‌ગમ શ્રોતાથી દૂર થાય તે કિસ્સામાં $v_L = 0$ અને $v_S = +v_S$ થશે.

$$\text{શ્રોતાને સંભળાતી આવૃત્તિ } f_L = \frac{v}{v + v_S} f_S.$$

આ દર્શાવે છે કે $f_L < f_S$ એટલે કે શ્રોતાને મૂળ આવૃત્તિ કરતાં નીચી આવૃત્તિ સંભળાશે.

(iii) શ્રોતા અને ધ્વનિ-ઉદ્‌ગમ બંને એકબીજાં તરફ ગતિ કરતાં હોય, તો $v_L = +v_L$ અને $v_S = -v_S$ થશે. આથી શ્રોતાને સંભળાતી આવૃત્તિ,

$$f_L = \frac{v + v_L}{v - v_S} f_S$$

આ કિસ્સામાં પણ $f_L > f_S$ થશે.

(iv) શ્રોતા અને ધ્વનિ-ઉદ્‌ગમ એકબીજાંથી દૂર જતાં હોય તે કિસ્સામાં $v_L = -v_L$ અને $v_S = +v_S$ લેવા પડે.

$$\therefore f_L = \frac{v - v_L}{v + v_S} f_S$$

આ કિસ્સામાં $f_L < f_S$ થશે.

આ ગણતરીમાં આપણે માધ્યમ (હવા)ને સ્થિર ધારેલ છે. જો પવન ધ્વનિની ગતિની દિશામાં જ (ઉદ્‌ગમથી શ્રોતા તરફ) v_w જેટલા વેગથી ગતિ કરતો હોય, તો સમીકરણ 8.12.3માં ધ્વનિ-તરંગોનો વેગ vને બદલે $v + v_w$ અને જો પવન ધ્વનિ-તરંગોની વિરુદ્ધ દિશામાં (શ્રોતાથી ઉદ્‌ગમ તરફ) ગતિ કરતો હોય તો ધ્વનિ-તરંગોનો વેગ $v - v_w$ લેવો.

આવા બધા કિસ્સાઓમાં આપણે શ્રોતા અને ઉદ્‌ગમનો વેગ ધ્વનિના વેગ કરતાં ઓછો ધાર્યો છે.

ઉદાહરણ 19 : એક પોલીસકારની સાઇરનમાંથી ઉદ્‌ભવતાં ધ્વનિની આવૃત્તિ 300 Hz છે. ધ્વનિની હવામાં ઝડપ 340 m/s છે. (*a*) પોલીસકાર સ્થિર હોય, ત્યારે સાયરનમાંથી ઉદ્‌ભવતા તરંગની તરંગલંબાઈ શોધો. (*b*) જો પોલીસકાર 108 km/hની ઝડપે ગતિ કરતી હોય તો કારની આગળના વિસ્તારમાં અને કારની પાછળના વિસ્તારમાં ધ્વનિ-તરંગોની તરંગલંબાઈ શોધો.

ઉકેલ : (*a*) પોલીસકાર સ્થિર હોય ત્યારે,

$f_S = 300$ Hz, $v = 340$ m/s.

સાયરનમાંથી ઉદ્‌ભવતાં તરંગની તરંગલંબાઈ

$$\lambda = \frac{v}{f_S} = \frac{340}{300} = 1.13 \text{ m.}$$

(*b*) પોલીસકારની ઝડપ v_S = 108 km/h = 30 m/s.

$$\text{હવે } f_L = \frac{v + v_L}{v + v_S} f_S$$

ગતિમાન કારની આગળના વિસ્તારમાં શ્રોતા ઊભો હોય, તો $v_L = 0$ થશે અને $v_S = -v_S$

$$\therefore f_{front} = \frac{v}{v - v_S} f_S$$

$$\therefore \ \frac{v}{\lambda_{front}} = \frac{v}{v - v_S} f_S$$

$$\therefore \ \lambda_{front} = \frac{v - v_S}{f_S} = \frac{340 - 30}{300} = 1.033 \text{ m}$$

હવે, ગતિમાન પોલીસકારની પાછળના વિસ્તાર માટે

$v_L = 0$ અને $v_S = +v_S$.

$$f_{behind} = \frac{v}{v + v_S} f_S$$

$$\therefore \ \lambda_{behind} = \frac{v + v_S}{f_S} = \frac{340 + 30}{300} = 1.233\text{m}.$$

ઉદાહરણ 20 : દરિયામાં સ્થિર રહેલી સબમરીનમાં ગોઠવેલ SONAR તંત્રમાંથી ઉદ્‌ભવતાં ધ્વનિ-તરંગોની આવૃત્તિ 40 kHz છે. દુશ્મનની સબમરીન એ SONAR તંત્ર તરફ 360 kmh^{-1}ની ઝડપે ગતિ કરી રહી છે. દુશ્મનની સબમરીન દ્વારા પરાવર્તિત થતાં ધ્વનિની આવૃત્તિ કેટલી હશે ? પાણીમાં ધ્વનિ-તરંગોની ઝડપ 1450 m s^{-1} છે.

ઉકેલ : f_S = 40 kHz, v = 1450 m/s.

અહીં, SONAR માંથી ઉદ્‌ભવતાં ધ્વનિ-તરંગની આવૃત્તિ બે તબક્કામાં બદલાય છે.

(i) SONAR થી દુશ્મનની ગતિમાન સબમરીન તરફ જતાં આવૃત્તિ બદલાશે. આ કિસ્સામાં SONAR એ ધ્વનિ ઉદ્‌ગમ (S) તરીકે અને સબમરીન એ શ્રોતા (L) તરીકે વર્તશે.

આથી, $v_S = 0$ અને

$$v_L = 360 \text{ km/h} = \frac{360 \times 1000}{3600} = 100 \text{ m/s}$$

હવે, $$f_{L_1} = \frac{v + v_L}{v + v_S} \times f_S$$

$$= \frac{1450 + 100}{1450 + 0} \times 40 \times 10^3$$

$$= 42.758 \text{ kHz}$$

(ii) બીજા તબક્કામાં દુશ્મન સબમરીન એ 42.758 kHzની આવૃત્તિને પરાવર્તિત કરે છે. આ કિસ્સામાં સબમરીન એ ધ્વનિ-ઉદ્‌ગમ (S) તરીકે અને SONAR એ શ્રોતા (L) તરીકે વર્તશે.

f_S = 42.758 kHz, $v_L = 0$, $v_S = -100$ m/s

પરાવર્તિત તરંગની આવૃત્તિ,

$$f_{L_2} = \frac{v + v_L}{v + v_S} \times f_S$$

$$= \frac{1450 + 0}{1450 - 100} \times 42.758 \times 10^3$$

$$= 45.92 \text{ kHz}$$

આમ, સબમરીનથી પરાવર્તિત થઈ SONAR તરફ જતાં ધ્વનિની આવૃત્તિ 45.92 kHz હશે.

સારાંશ

1. **તરંગ :** માધ્યમ (કે અવકાશ)માં વિક્ષોભની ગતિને તરંગ-સ્પંદ અથવા સામાન્ય રીતે તરંગ કહે છે.
2. **તરંગનો કંપવિસ્તાર :** તરંગમાં ‘કણો’ના દોલનના કંપવિસ્તારને તરંગનો કંપવિસ્તાર (A) કહે છે.
3. **તરંગલંબાઈ અને આવૃત્તિ :** તરંગ-પ્રસરણમાં જે બે ક્રમિક કણોના દોલનની કળાનો તફાવત 2π rad હોય, તેમની વચ્ચેના અંતરને તરંગની તરંગલંબાઈ (λ) કહે છે.

   તરંગ-પ્રસરણમાં માધ્યમના કણોના દોલનની આવૃત્તિને તરંગની આવૃત્તિ (f) કહે છે.

   $$v = f\lambda = \frac{\omega}{k}$$

   જ્યાં, v એ માધ્યમમાં તરંગની ઝડપ છે.
4. **યાંત્રિક-તરંગો :** જે તરંગોને પ્રસરવા માટે સ્થિતિસ્થાપક માધ્યમની જરૂર પડે છે, તેને યાંત્રિક-તરંગો કહે છે.
5. **લંબગત અને સંગત-તરંગો :** તરંગમાં માધ્યમના કણોના સ્થાનાંતર (દોલન)ની દિશા તરંગ પ્રસરણની દિશાને લંબ હોય તેવા તરંગને લંબગત તરંગ કહે છે.

જે તરંગમાં માધ્યમના કણોનું સ્થાનાંતર તરંગ-પ્રસરણની દિશા પર જ હોય, તેવા તરંગને સંગત-તરંગ કહે છે.

6. **તરંગ-સમીકરણ :** એક પારિમાણિક તરંગ-પ્રસરણની ઘટનામાં ભાગ લેતાં દરેક કણનું કોઈ પણ સમયે સ્થાનાંતર દર્શાવતા સમીકરણને તરંગ-સમીકરણ કહે છે. તરંગ-સમીકરણનાં જુદાં-જુદાં સ્વરૂપો નીચે મુજબ છે :

(i) $y = \text{A} \sin (\omega t - kx)$, (ii) $y = \text{A} \sin \left(\frac{t}{\text{T}} - \frac{x}{\lambda}\right)$,

(iii) $y = \text{A} \sin 2\pi f\left(t - \frac{x}{v}\right)$, (iv) $y = \text{A} \sin \frac{2\pi}{\lambda}(vt - x)$.

ઉપર્યુક્ત સમીકરણો xનાં વધતાં મૂલ્યોની દિશામાં ગતિ કરતાં તરંગ માટે છે. જો તરંગ xનાં ઘટતાં મૂલ્યોની દિશામાં પ્રસરતું હોય, તો સમીકરણમાં '–' ને બદલે '+' મૂકવું.

7. યાંત્રિક-તરંગોના પ્રસરણ માટે માધ્યમની સ્થિતિસ્થાપકતા અને જડત્વ જરૂરી છે.

8. તણાવવાળી દોરી જેવા માધ્યમમાં લંબગત તરંગનો વેગ $v = \sqrt{\frac{\text{T}}{\mu}}$. જ્યાં, T = દોરીમાં તણાવ, μ = એકમલંબાઈ દીઠ દોરીનું દળ = $\frac{m}{\text{L}}$

9. સ્થિતિસ્થાપક માધ્યમમાં ધ્વનિ-તરંગનો વેગ $v = \sqrt{\frac{\text{E}}{\rho}}$. જ્યાં, E = માધ્યમનો સ્થિતિસ્થાપક-અંક, ρ = માધ્યમની ઘનતા

વાયુ જેવા તરલ માધ્યમમાં સંગત-તરંગનો વેગ $v = \sqrt{\frac{\text{B}}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma \text{P}}{\rho}}$. જ્યાં, B = બલ્ક મૉડ્યુલસ

$\gamma = \frac{\text{C}_\text{P}}{\text{C}_\text{V}} = 1.41$ (હવા માટે)

સળિયા જેવા રેખીય માધ્યમમાં સંગત-તરંગોનો વેગ : $v = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho}}$

જ્યાં, γ = યંગ મૉડ્યુલસ, ρ = માધ્યમની ઘનતા, વાયુમાં ધ્વનિનો વેગ (અચળ દબાણે અને આર્દ્રતાએ) તેના નિરપેક્ષ તાપમાનના વર્ગમૂળના સમપ્રમાણમાં હોય છે. $v = \sqrt{\frac{\gamma \text{RT}}{\text{M}}}$

$\therefore v \propto \sqrt{\text{T}}$. ધ્વનિનો વેગ દબાણના ફેરફાર સાથે બદલાતો નથી.

10. **સંપાતપણાનો સિદ્ધાંત :** જ્યારે માધ્યમના કોઈ કણ પાસે બે કે બે કરતાં વધારે તરંગો સંપાત થાય છે, ત્યારે તે કણનું સ્થાનાંતર તે દરેક તરંગ વડે ઉદ્‌ભવતા સ્વતંત્ર સ્થાનાંતરોના સદિશ સરવાળા જેટલું હોય છે.

11. **સ્થિત-તરંગો :** સમાન કંપવિસ્તારવાળાં અને સમાન આવૃત્તિઓવાળાં પણ પરસ્પર વિરુદ્ધ દિશામાં ગતિ કરતા અને સંપાતીકરણ અનુભવતાં તરંગોની સમાસ અસર રૂપે મળતાં તરંગો પ્રગામીપણાના ગુણધર્મ ગુમાવી બેસે છે. આવાં તરંગોને સ્થિત-તરંગો કહે છે.

સ્થિત-તરંગનું સમીકરણ $y = -2\text{A}\sin kx \cos \omega t$, આ સ્થિત-તરંગનો કંપવિસ્તાર 2A $\sin kx$

સ્થિત-તરંગમાં નિસ્પંદ-બિંદુઓનાં સ્થાન $x_n = \frac{n\lambda}{2}$.

જ્યાં, $n = 1, 2, 3.....$ આ બિંદુઓ પાસે કંપવિસ્તાર શૂન્ય હોય છે.

સ્થિત-તરંગમાં પ્રસ્પંદ-બિંદુઓનાં સ્થાન $x_n = (2n - 1)\frac{\lambda}{4}$

જ્યાં, $n = 1, 2, 3,....$ આ બિંદુઓ પાસે કંપવિસ્તાર 2A હોય છે.

12. બંને છેડે તણાવ સાથે બાંધેલી દોરીમાં ઉદ્‌ભવતા નૉર્મલ મોડ્સ ઑફ વાઇબ્રેશનને અનુરૂપ શક્ય આવૃત્તિઓ,

$f_n = \frac{nv}{2L} = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$ જ્યાં, $n = 1, 2, 3......$

13. ક્લોઝ્ડ પાઇપમાં સ્થિત તરંગભાત મેળવવા માટે શક્ય તરંગલંબાઈઓ,

$\lambda_n = \frac{4L}{(2n-1)}$ અને પાઇપની લંબાઈ શક્ય આવૃત્તિઓ $f_n = (2n - 1)\frac{v}{4L} = (2n - 1)f_1$

જ્યાં, $n = 1, 2, 3,.....$ અને L = પાઇપની લંબાઈ

ક્લોઝ્ડ પાઈપમાં $f_1, 3f_1, 5f_1, ...$ જેવી હાર્મોનિક જ શક્ય છે.

14. ઓપન પાઇપમાં સ્થિત તરંગભાત મેળવવા માટે શક્ય તરંગલંબાઈઓ,

$\lambda_n = \frac{2L}{n}$ જ્યાં, $n = 1, 2, 3, ...$ અને L = પાઇપની લંબાઈ

શક્ય આવૃત્તિઓ $f_n = \frac{nv}{2L} = nf_1$

ઓપન પાઇપમાં $f_1, 2f_1, 3f_1, ...$ જેવી બધી જ હાર્મોનિક શક્ય છે.

15. **સ્પંદ :** સમાન કંપવિસ્તારવાળા પણ સહેજ જુદી પડતી આવૃત્તિઓવાળાં તરંગોના સંપતીકરણને કારણે આવર્ત રીતે કંપવિસ્તાર અને પરિણામે ધ્વનિની પ્રબળતા મહત્તમ બનવાની ઘટનાને સ્પંદ કહે છે.

એક સેકન્ડમાં ઉત્પન્ન થતાં સ્પંદોની સંખ્યા $= f_1 - f_2$

16. **ડૉપ્લર-અસર :** જ્યારે ધ્વનિ-ઉદ્‌ગમ કે શ્રોતા કે બંને હવાના માધ્યમની સાપેક્ષે અને એકબીજાની સાપેક્ષે ગતિ કરે છે, ત્યારે શ્રોતા દ્વારા અનુભવાતી ધ્વનિની આવૃત્તિ, ઉદ્‌ગમ દ્વારા ઉત્સર્જાતી ધ્વનિની આવૃત્તિ કરતાં જુદી હોય છે. આ ઘટનાને ડૉપ્લર-અસર કહે છે.

શ્રોતાને સંભળાતી આવૃત્તિ, $f_L = \frac{v \pm v_L}{v \pm v_S} f_S$

જ્યાં, v = ધ્વનિનો વેગ

v_L = શ્રોતાનો વેગ

v_S = ઉદ્‌ગમનો વેગ

f_S = ઉદ્‌ગમ દ્વારા ઉત્સર્જાતા ધ્વનિની આવૃત્તિ

સ્વાધ્યાય

નીચેનાં વિધાનો માટે આપેલા વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો :

1. યાંત્રિક તરંગો .... નું વહન કરે છે.

(A) ઊર્જા (B) દ્રવ્ય

(C) ઊર્જા અને દ્રવ્ય બંને (D) એક પણ નહિ

2. એક સ્વરકાંટો (tunign fork) એ એક સેકન્ડમાં 256 વાર ધ્રુજારી અનુભવે છે. જો માધ્યમમાં ધ્વનિની ઝડપ 330 m/s હોય, તો સ્વરકાંટાની ઉત્પન્ન થતાં તરંગની તરંગલંબાઈ .... હશે.

(A) 0.56 cm (B) 0.89 m (C) 1.11 m (D) 1.29 m

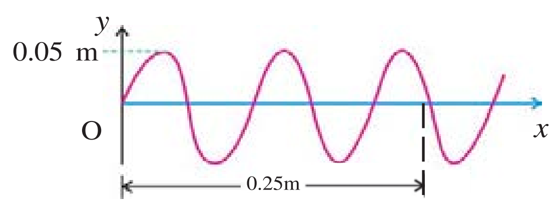
3. જ્યારે 300 Hz આવૃત્તિવાળો ધ્વનિ માધ્યમમાંથી પસાર થાય છે, ત્યારે માધ્યમના કણનું મહત્તમ સ્થાનાંતર 0.1 cm છે. આ કણનો મહત્તમ વેગ .... હશે.

(A) 60π cm/s (B) 30π cm/s (C) 30 cm/s (D) 60 cm/s

4. 500 Hz આવૃત્તિવાળા એક તરંગની ઝડપ 360 m s^{-1} છે. તેના પર 60° જેટલો કળા-તફાવત ધરાવતા બે કણો વચ્ચેનું લઘુતમ અંતર .... છે.

(A) 0.23 m (B) 0.12 m (C) 8.33 m (D) 60 m

5. આકૃતિમાં દર્શાવેલ તરંગની માધ્યમમાં ઝડપ 330 m/s છે. આ તરંગ ધન x-દિશામાં ગતિ કરતું હોય તો તેનું તરંગ સમીકરણ ....



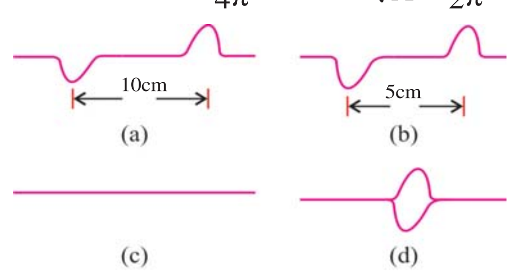
આકૃતિ 8.18

(A) $y = 0.05 \sin 2\pi (4000\, t - 12.5x)$ m
(B) $y = 0.05 \sin 2\pi (4000\, t - 122.5x)$ m
(C) $y = 0.05 \sin 2\pi (3300\, t - 10x)$ m
(D) $y = 0.05 \sin 2\pi (3300\, t - 10t)$ m

6. $y = A\sin^2 (kx - \omega t)$ તરંગ-સમીકરણ ધરાવતા તરંગનો કંપવિસ્તાર .... અને આવૃત્તિ .... હશે.

(A) A, $\omega/2\pi$ (B) $\frac{A}{2}, \frac{\omega}{\pi}$ (C) 2A, $\frac{\omega}{4\pi}$ (D) $\sqrt{A}, \frac{\omega}{2\pi}$

7. આકૃતિમાં દર્શાવ્યા અનુસાર બે સમાન તરંગ-સ્પંદો, દોરી પર પરસ્પર વિરુદ્ધ દિશામાં 2.5 cm/sની ઝડપથી ગતિ કરે છે. પ્રારંભમાં આ બે તરંગ-સ્પંદ વચ્ચેનું અંતર 10 cm છે. બે સેકન્ડ બાદ દોરીની સ્થિતિ કેવી હશે ?



આકૃતિ 8.19

8. $y = 10\sin(100\, t)\cos(0.01x)$ થી રજૂ થતાં સ્થિત તરંગનાં ઘટક-તરંગોની ઝડપ .... છે. અહીં, x એ yમાં અને t એ sમાં છે.

(A) 1 m s^{-1} (B) 10^2 m s^{-1} (C) 10^3 m s^{-1} (D) 10^4 m s^{-1}

9. 7 m લાંબી દોરીનું દળ 0.035 kg છે. જો દોરી પરનો તણાવ 60.5 N હોય, તો દોરી પર તરંગની ઝડપ ....

(A) 77 m s^{-1} (B) 102 m s^{-1} (C) 110 m s^{-1} (D) 165 m s^{-1}

10. બે તરંગોના સંપાતીકરણથી ઉદ્‌ભવતા સ્પંદમાં મહત્તમ તીવ્રતા એ આપાત થતા મૂળ તરંગોની તીવ્રતાથી x ગણી હોય, તો x = ...

(A) 1 (B) $\sqrt{2}$ (C) 2 (D) 4

11. 2.00 m અને 2.02 m તરંગલંબાઈ ધરાવતા બે તરંગો એકબીજા પર સંપાત થઈને 1 s માં 2 સ્પંદ ઉત્પન્ન કરે છે. જો બંને તરંગોની ઝડપ સમાન હોય, તો સમાન ઝડપ ....

(A) 400 m/s (B) 402 m/s (C) 404 m/s (D) 406 m/s

12. એક માધ્યમમાં 1200 m/s જેટલા ઘટક-તરંગોની ઝડપ ધરાવતા સ્થિત-તરંગોમાં ક્રમિક પ્રસ્પંદ-બિંદુ અને નિસ્પંદ-બિંદુ વચ્ચેનું અંતર 1 m હોય, તો સ્થિત તરંગની આવૃત્તિ ....

(A) 300 Hz (B) 400 Hz (C) 600 Hz (D) 1200 Hz

13. ધ્વનિ ઉદ્‌ગમ અને શ્રોતા બંને એકબીજાની સામે 50 m/s ની સમાન ઝડપે સુરેખ પથ પર ગતિ કરી રહ્યા છે. જો શ્રોતાને સંભળાતી આવૃત્તિ 440 Hz હોય, તો ધ્વનિની મૂળ આવૃત્તિ કેટલી હશે ? (હવામાં ધ્વનિની ઝડપ 340 m/s છે.)

(A) 327 s^{-1} (B) 367 s^{-1} (C) 390 s^{-1} (D) 591 s^{-1}

14. એક ક્લોઝ્ડ પાઈપ માટે હવાના સ્તંભની મૂળભૂત આવૃત્તિ 512 Hz છે. જો આ પાઈપ બંને છેડેથી ખુલ્લી હોય, તો મૂળભૂત આવૃત્તિ .... Hz થાય.

(A) 1024 (B) 512 (C) 256 (D) 128

15. ક્લોઝ્ડ પાઈપમાં હવાના સ્તંભની લંબાઈ .... cm હોય, તો તેનો હવાનો સ્તંભ 264 Hz આવૃત્તિવાળા સ્વરકાંટા સાથે પ્રથમ અનુનાદમાં હોય, ધ્વનિની હવામાં ઝડપ 330 m/s.

(A) 31.25 (B) 62.50 (C) 93.75 (D) 125

16. એક આદર્શવાયુના તાપમાનમાં 600 K જેટલો વધારો કરતાં, તેમાં ધ્વનિ-તરંગની ઝડપ એ પ્રારંભિક ઝડપ કરતાં $\sqrt{3}$ ગણી થાય છે. આ વાયુનું પ્રારંભિક તાપમાન ....

(A) −73 °C (B) 27 °C (C) 127 °C (D) 327 °C

17. બે તરંગો y_1 = Asin $(2000\pi)t$ (m) અને y_2 = Asin $(2008\pi)t$ (m)ના સંપાતીકરણથી માધ્યમમાં સ્પંદ ઉત્પન્ન થાય છે. એક સેકન્ડમાં અનુભવતાં સ્પંદોની સંખ્યા .... હશે.

(A) 0 (B) 1 (C) 4 (D) 8

18. એક સ્થિર શ્રોતા તરફ, ધ્વનિ ઉદ્‌ગમ એ ધ્વનિની ઝડપના 1/10 ગણી ઝડપે ગતિ કરી રહ્યું છે. શ્રોતાને સંભળાતી આવૃત્તિ અને સાચી આવૃત્તિનો ગુણોત્તર ....

(A) 10/9 (B) 11/10 (C) $(11/10)^2$ (D) $(9/10)^2$

19. એક લંબગત તરંગનું સમીકરણ $y = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$ છે. તો કઈ તરંગલંબાઈ માટે કણનો મહત્તમ વેગ એ તરંગ-વેગથી બમણો થાય ?

(A) $\lambda = \frac{\pi A}{4}$ (B) $\lambda = \frac{\pi A}{2}$ (C) $\lambda = \pi A$ (D) $\lambda = 2\pi A$

20. કયા તાપમાને હવામાં ધ્વનિની ઝડપ એ 0^oC તાપમાને ઝડપ હોય તેના કરતાં બમણી થશે ?

(A) 273 K (B) 546 K (C) 1092 K (D) 0 K

જવાબો

1. (A)	**2.** (D)	**3.** (A)	**4.** (B)	**5.** (C)	**6.** (B)
7. (C)	**8.** (D)	**9.** (C)	**10.** (D)	**11.** (C)	**12.** (A)
13. (A)	**14.** (A)	**15.** (A)	**16.** (B)	**17.** (C)	**18.** (A)
19. (C)	**20.** (C)				

નીચે આપેલ પ્રશ્નોના જવાબ ટૂંકમાં આપો :

1. તરંગ તીવ્રતાની વ્યાખ્યા લખો અને તેનો SI એકમ જણાવો.

2. તરંગની કોણીય તરંગસંખ્યા (તરંગસદિશ) એટલે શું ?

3. એક પ્રગામી તરંગની તરંગલંબાઈ λ અને આવૃત્તિ f હોય, તો t સેકન્ડમાં તરંગે કાપેલું અંતર કેટલું થશે ?

4. યાંત્રિક તરંગના પ્રસરણ માટે માધ્યમના કયા ગુણધર્મો જરૂરી છે ?

5. દબાણના તરંગો કોને કહેવાય ?

6. માધ્યમના તાપમાન સાથે તેમાં પ્રસરતા તરંગની ઝડપ કેવી રીતે બદલાય છે ?

7. જો તારમાં રહેલું તણાવબળ ચાર ગણું કરવામાં આવે, તો તારમાં તરંગની ઝડપમાં શો ફેરફાર થશે ?

8. માધ્યમમાં દબાણમાં થતો ફેરફાર તેમાંથી પસાર થતાં તરંગની ઝડપ પર શું અસર કરશે ?

9. એક તરંગનું તરંગ સમીકરણ $y = 5 \sin (0.01x - 2t)$ છે. જ્યાં x અને y એ cmમાં છે. આ તરંગની ઝડપ કેટલી હશે ?

10. દોરી પર પ્રસરતું તરંગ જ્યારે જડિત આધારથી પરાવર્તિત થાય, તો તેની કળામાં કેટલો ફેરફાર થાય ?

11. સ્થિત-તરંગમાં નિસ્પંદ-બિંદુ અને પ્રસ્પંદ-બિંદુનો કંપવિસ્તાર કેટલો હશે ?

12. સ્થિત-તરંગમાં ક્રમિક નિસ્પંદ-બિંદુ અને પ્રસ્પંદ-બિંદુ વચ્ચેનું અંતર 5 cm હોય, તો બે ક્રમિક પ્રસ્પંદ-બિંદુ વચ્ચેનું અંતર કેટલું હશે ?

13. ક્લોઝ્ડ પાઈપની મૂળભૂત આવૃત્તિ 300 Hz છે, તો તેના દ્વિતીય ઓવરટોનની આવૃત્તિ કેટલી હશે ?

14. ધ્વનિઉદ્ગમની આવૃત્તિ 440 Hz છે. જો ધ્વનિઉદ્ગમ અને શ્રોતાનો સાપેક્ષ વેગ શૂન્ય હોય તો શ્રોતાને કઈ આવૃત્તિ સંભળાશે ?

15. સ્પંદ એટલે શું ?

નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

1. તરંગોનું વર્ગીકરણ સમજાવો. પ્રત્યેક તરંગનાં ઉદાહરણ આપો.

2. તરંગની તરંગલંબાઈ, તરંગસંખ્યા અને આવૃત્તિ સમજાવો.

3. પારિમાણિક વિશ્લેષણની મદદથી તણાવવાળી દોરી પર પ્રસરતા તરંગના વેગનું સૂત્ર મેળવો.

4. માધ્યમમાં ધ્વનિ-તરંગોનું પ્રસરણ કેવી રીતે થાય છે તે સમજાવો.

5. હવામાં ધ્વનિની ઝડપ માટે ન્યૂટનનું સૂત્ર લખો. ન્યૂટનના સૂત્રમાં લાપ્લાસે કરેલો સુધારો સમજાવો.

6. xના વધતા મૂલ્યની દિશામાં ગતિ કરતા એક પારિમાણિક પ્રગામી તરંગનું તરંગ-સમીકરણ $y = A\sin(\omega t - kx)$ મેળવો.
7. તરંગોના સંપાતપણાનો સિદ્ધાંત લખો અને સમજાવો.
8. સ્થિત-તરંગો એટલે શું ? બે છેડેથી જડિત કરેલ દોરીમાં ઉદ્ભવતા સ્થિત-તરંગનું સમીકરણ મેળવો.
9. દર્શાવો કે ક્લોઝ્ડ પાઇપમાં રચાતા સ્થિત-તરંગમાં ફક્ત મૂળભૂત આવૃત્તિના એકી પૂર્ણાંક હાર્મોનિક જ શક્ય છે.
10. ડૉપ્લર-અસર એટલે શું ? ધ્વનિઉદ્ગમ સ્થિર હોય અને શ્રોતા ઉદ્ગમ તરફ ગતિ કરતો હોય તે કિસ્સામાં શ્રોતા તરફ જતાં તરંગની તરંગલંબાઈનું સૂત્ર મેળવો.

નીચેના દાખલા ગણો :

1. પ્રગામી હાર્મોનિક તરંગના કિસ્સામાં સાબિત કરો કે કોઈ પણ કણના દોલનના તાત્ક્ષણિક વેગના મૂલ્ય અને તરંગ-ઝડપનો ગુણોત્તર તરંગથી રચાતા આકારના આ બિંદુ પાસેના તે સમયના ઢાળના ઋણ મૂલ્ય જેટલો હોય છે.
2. ધરતીકંપના કારણે પૃથ્વીમાં લંબગત (S) અને સંગત (P) એમ બંને પ્રકારના ધ્વનિના તરંગો ઉદ્ભવે છે. S તરંગની ઝડપ લગભગ 4.0 km/s અને P તરંગની ઝડપ લગભગ 8.0 km/s હોય છે. ધરતીકંપ નોંધાતા સિસ્મોગ્રાફ પર પહેલું P તરંગ એ પહેલાં S તરંગ કરતાં 4 મિનિટ વહેલું નોંધાય છે. તરંગો સુરેખપથ પર પ્રસરે છે, તેવું ધારીને આ સિસ્મોગ્રાફથી કેટલા અંતરે ધરતીકંપનું ઉદ્ગમસ્થાન હશે તેનક્કી કરો. [જવાબ : લગભગ 1920 km.]
3. એક પ્રગામી હાર્મોનિક તરંગનો કંપવિસ્તાર 10 m છે. આ તરંગ-પ્રસરણની ઘટનામાં ઉદ્ગમથી 2 m અંતરે આવેલા કણનું 2 સેકન્ડને અંતે સ્થાનાંતર 5 m છે અને ઉદ્ગમથી 16 m અંતરે આવેલા કણનું 8 સેકન્ડના અંતે સ્થાનાંતર $5\sqrt{3}$ m છે. આ તરંગની કોણીય આવૃત્તિ અને તરંગસદિશ શોધો. [જવાબ : $\omega = \pi/8$ rad/s, $k = \pi/24$ rad/m]
4. તણાવવાળી દોરી પર x–દિશામાં ગતિ કરતાં તરંગનું તરંગ સમીકરણ,

   $y = 3\sin[(3.14)x - (314)t]$ છે. જ્યાં x એ cm અને t એ સેકન્ડમાં છે.

   (*i*) દોરી પરના કણની મહત્તમ ઝડપ શોધો.

   (*ii*) ઊગમબિંદુથી $x = 6.0$ cm અંતરે આવેલા દોરી પરના કણનો = $t = 0.11$ સેકન્ડે પ્રવેગ શોધો. [જવાબ : મહત્તમ વેગ = 9.4 m/s, $a = 0$]
5. 0°C તાપમાને 250 Hz આવૃત્તિવાળો એક ધ્વનિઉદ્ગમ હવામાં 1.32 m તરંગ લંબાઈવાળા તરંગો ઉત્પન્ન કરે છે, તો 27°C તાપમાને તેની તરંગલંબાઈમાં કેટલો વધારો થયો હશે ? [જવાબ : 0.06 m]
6. હાઇડ્રોજન વાયુના કેટલા તાપમાને તેમાંથી પસાર થતાં ધ્વનિની ઝડપ એ 1200 °C તાપમાને રહેલા ઑક્સિજન વાયુમાં ધ્વનિની ઝડપ જેટલી હશે ? ઑક્સિજનની ઘનતા, હાઇડ્રોજનની ઘનતા કરતાં 16 ગણી છે. [જવાબ : −180.9 °C]
7. બે છેડે તણાવ સાથે બાંધેલા એક તારની લંબાઈ 110 cm છે. બે ટેકાઓ s_1 અને s_2 યોગ્ય સ્થાનોએ મૂકીને તારને એવી રીતે કંપિત કરવામાં આવે છે, કે તેના ત્રણ વિભાગોમાં રચાતા સ્થિત-તરંગોની મૂળભૂત આવૃત્તિઓ $f_1 : f_2 : f_3 = 1 : 2 : 3$ હોય, તો ટેકાઓનાં સ્થાન (કે તારના વિભાગોની લંબાઈઓ) શોધો.

   [જવાબ : $L_1 = 60$ cm, $L_2 = 30$ cm, $L_3 = 20$ cm]

8. બે છેડે તણાવ સાથે બાંધેલા તારની રેખીય ઘનતા 0.05 g/cm છે. તારમાં તણાવ 450 N છે. આ તાર 420 Hz આવૃત્તિવાળા સ્વરકાંટા સાથે અનુવાદ અનુભવે છે. ત્યાર બાદ તે જ તાર 490 Hz આવૃત્તિ સાથે અનુનાદ અનુભવે છે. આ તારની લંબાઈ શોધો. [**જવાબ :** 2.1 m]

9. એક દોરીની લંબાઈ 100 cm છે. તેના પર રચાયેલ સ્થિત-તરંગોમાં બે ક્રમિક હાર્મોનિક્સની આવૃત્તિઓ અનુક્રમે 300 Hz અને 400 Hz છે. જ્યારે દોરી મૂળભૂત આવૃત્તિથી દોલનો કરે છે ત્યારે મહત્તમ કંપવિસ્તાર 10 cm છે, તો તે વખતના સ્થિત-તરંગનું સમીકરણ મેળવો.

[**જવાબ :** $y = -10\sin\left(\frac{\pi x}{100}\right).\ \cos(200\pi)t$ (cm)]

10. 54 km/4ની ઝડપે ગતિ કરતી એક કાર જ્યારે એક સ્થિર શ્રોતા તરફ આવે છે અને તેનાથી દૂર જાય છે, ત્યારે શ્રોતાને અનુભવાતા હૉર્નના ધ્વનિની આવૃત્તિઓ વચ્ચેનો તફાવત શોધો. હૉર્નની આવૃત્તિ 500 Hz છે અને હવામાં ધ્વનિની ઝડપ 340 m/s છે.

[**જવાબ :** 44.2 Hz]

11. એક ટેકરી તરફ 10 m/s ની ઝડપે ગતિ કરતાં એન્જિનની વ્હીસલ 660 Hz આવૃત્તિવાળો ધ્વનિ ઉત્પન્ન કરે છે. ટેકરી પરથી પરાવર્તન પામીને આવતા ધ્વનિની આ એન્જિનના ડ્રાઈવરને અનુભવાતી આવૃત્તિ શોધો. ધ્વનિની હવામાં ઝડપ 340 m/s છે. [**જવાબ :** 700 Hz]

•

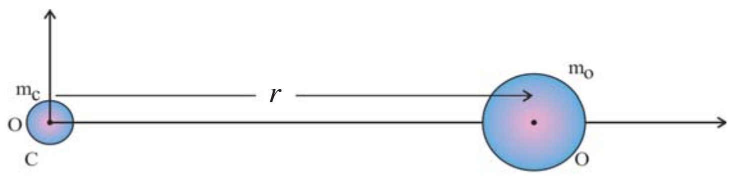
મેઘનાદ સહા (1893-1956)

મેઘનાદ સહાનો જન્મ 6 ઑક્ટોબર, 1893માં સાઓરાટોલી, ઢાકામાં (અત્યારે બાંગ્લાદેશમાં) થયો હતો. 1911માં પ્રેસિડન્સી કૉલેજમાં ભણવા માટે તે કોલકાતા આવ્યા. તે પદાર્થવિજ્ઞાની તરીકે જાણીતા થયા. તે પ્રક્રિયા સમીકરણની થિયરી ગ્લોબલ સાયન્ટિફિક કૉમ્યુનિટીમાં રજૂ કરવા 1920માં ઈંગ્લૅન્ડ ગયા, જે પાછળથી સહાનું થરમૉ આયોનાઈઝેશન સમીકરણ તરીકે ઓળખાયું. 1927માં તે રોયલ સોસાયટી ઑફ લંડનના ફેલો તરીકે ચૂંટાયા. તેમણે સોલાર રે (સૂર્યકિરણો)નું વજન દબાણ માપવાના સાધનની શોધ કરી હતી. તેમની યાદમાં 1943માં કોલકાતામાં સહા ઈન્સ્ટિટ્યૂટ ઑફ ન્યુક્લિઅર ફિઝિક્સની સ્થાપના થઈ. સહાનું અવસાન 16 ફેબ્રુઆરી, 1956ના રોજ થયું.

ઉકેલો (SOLUTION)

પ્રકરણ 1

1.



અહીં ઊગમબિંદુ કાર્બન (C)ના કેન્દ્ર પર લીધું છે :

r = ઑક્સિજનનું કાર્બન-પરમાણુથી અંતર = 1.130×10^{-10} m,

m_O = ઑક્સિજનનું દળ = 16 g mol^{-1}, m_C = કાર્બનનું દળ = 12 g mol^{-1},

r_C = કાર્બનનું ઊગમબિંદુથી અંતર = 0,

r_O = ઑક્સિજનનું ઊગમબિંદુથી અંતર = r = 1.130×10^{-1}m,

$$\therefore\ r_{cm} = \frac{m_C r_C + m_o r_o}{m_C + m_o}$$

2. દ્રવ્યમાનકેન્દ્રનો વેગ $\vec{v}_{cm} = \dfrac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + m_3 \vec{v}_3}{m_1 + m_2 + m_3}$

3. અહીંયાં કાર માટે $m_1 = 1000$ kg, $a_1 = 4.0$ m s^{-2}, પ્રારંભિક ઝડપ $v_{0_1} = 0$ m s^{-1},

ટ્રક માટે $m_2 = 2000$ kg, $a_2 = 0$ m s^{-2}, $v_{0_2} = v_2 = 8.0$ m s^{-1},

3 સેકન્ડ પછી કારની ઝડપ $v_1 = v_{0_1} + a_1 t$, 3 સેકન્ડમાં કાર વડે કપાયેલ અંતર

$d_1 = v_{0_1} t + \frac{1}{2} a_1 t^2$, 3 સેકન્ડમાં ટ્રક વડે કપાયેલ અંતર $d_2 = v_2 t$ ($\because a_2 = 0$)

(*a*) કાર-ટ્રક વડે બનતા તંત્રના દ્રવ્યમાનકેન્દ્રનું ટ્રાફિક સિગ્નલથી અંતર

$$d_{cm} = \frac{m_1 d_1 + m_2 d_2}{m_1 + m_2}$$

(*b*) $M\vec{v}_{cm} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2$

$$\therefore\ \vec{v}_{cm} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2} \quad (\because M = m_1 + m_2)$$

4. $t = 0$ sec સમયે $x_1 = -15\ m$, $x_2 = 15\ m$,

$m_1 = 40$ kg, $m_2 = 20$ kg,

$$\therefore\ x_{cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

x_{cm} નું આ મૂલ્ય અચળ રહેતું હોવાથી $t = 2, 4, 6$ sec માટે x_1 અને x_{cm}નાં મૂલ્યો પરથી x_2 શોધો. $t = 0$ sec માટે કૂતરો અને બિલાડી ઊભાં હોવાથી

$\therefore\ v_1 = v_2 = 0 \Rightarrow p_1 = p_2 = 0$

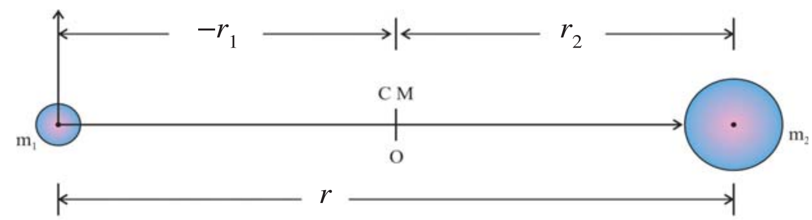
$\Rightarrow p = p_1 + p_2 = 0$

$t = 2$ sec માટે $v_1 = \dfrac{x_1(2\text{ s}) - x_1(0\text{ s})}{2\text{ s}} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$

$v_2 = \dfrac{x_2(2\text{ s}) - x_2(0\text{ s})}{2\text{ s}}$

આ પરથી, $p_1 = m_1v_1$, $p_2 = m_2v_2$ અને $p = p_1 + p_2$ શોધો.
તે જ રીતે $t = 4$ sec અને $t = 6$ sec માટે બાકીની ગણતરી કરો.

5.



આકૃતિમાં ઊગમબિંદુને દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર પર લીધું છે.
$\therefore$ ઊગમબિંદુથી m_1 નું સ્થાન $= -r_1$, ઊગમબિંદુથી m_2નું સ્થાન $= r_2$

$$\therefore\ r_{cm} = 0 = \frac{m_1(-r_1) + m_2r_2}{m_1 + m_2},\ \therefore\ m_1r_1 = m_2r_2,\ \therefore\ \frac{m_1}{m_2} = \frac{r_2}{r_1} \qquad (1)$$

છેદમાં યોગ કરતાં $\dfrac{m_1}{m_1 + m_2} = \dfrac{r_1}{r_1 + r_2} = \dfrac{r_2}{r}$ $\quad (\because\ r = r_1 + r_2)$

$$\therefore\ r_2 = r\left[\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right]$$

સમીકરણ (1) માં અંશમાં યોગ કરતાં $\dfrac{m_1 + m_2}{m_2} = \dfrac{r_1 + r_2}{r_1} = \dfrac{r}{r_1}$

$$\therefore\ r_1 = r\left[\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right]$$

6. ત્રણ ગોળાઓ વડે બનતા તંત્રનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર $\vec{r}_{cm} = \dfrac{m\vec{r}_{cm_1} + m\vec{r}_{cm_2} + m\vec{r}_{cm_3}}{m + m + m}$

જ્યાં $\vec{r}_{cm}$ = ગોળા 1નું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર, ... વગેરે.

7. અહીંયા R ત્રિજ્યાના ગોળાની ઘનતા ρ છે. માટે મૂળ ગોળાનું દળ

$$M = \rho V = \rho \times \frac{4}{3}\pi R^3 \qquad (i)$$

'a' ત્રિજ્યાની નાની ગોળીનું દળ $m_1 = \rho \times \dfrac{4}{3}\pi a^3$ $\qquad$ (ii)

'R' ત્રિજ્યાના ગોળામાંથી 'a' ત્રિજ્યાની ગોળી કાપી લીધા પછી બાકીના ગોળાનું દળ

$$m_2 = M - m_1\ \therefore\ m_2 = \frac{4}{3}\pi\rho\ (R^3 - a^3) \qquad (iii)$$

મૂળ ગોળાનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર $\vec{r}_{cm} = (0, 0, 0)$

'a' ત્રિજ્યાની ગોળીનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર $\vec{r_1} = (b, 0, 0)$

બાકીના ગોળાની X-અક્ષ માટે સંમિતિ છે, પરંતુ Y અને Z-અક્ષ માટે નથી. આથી બાકીના ગોળાનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર ધારો કે $\vec{r_2} = (-x, 0, 0)$

હવે R ત્રિજ્યાનો મૂળ ગોળો 'a' ત્રિજ્યાની નાની ગોળી અને બાકીના (નાની ગોળી સિવાયના) ગોળાનો બનેલો હોવાથી $M\vec{r}_{cm} = m_1\vec{r_1} + m_2\vec{r_2}$

$\therefore M(0, 0, 0) = m_1(b, 0, 0) + m_2(-x, 0, 0)$

x-યામ સરખાવતાં $M(0) = m_1 b - m_2 x$

$$\therefore x = \frac{m_1}{m_2} b \qquad \text{(iv)}$$

અહીં સમીકરણો (ii) અને (iii), પરથી x શોધો.

8. આકૃતિ પરથી ત્રણ કણોના દ્રવ્યમાન તથા સ્થિર સ્થિતિ દરમિયાન તેમના સ્થાન અને તેમના પર લાગતાં બળો અનુક્રમે

$m_1 = 4.0$ kg, $\vec{r_1} = (-2, 3)\ m$, $\vec{F_1} = (-6, 0)$ N

$m_2 = 8.0$ kg, $\vec{r_2} = (4, 2)\ m$, $\vec{F_2} = (12\cos 45^o, 12\sin 45^o)$ N

$m_3 = 4.0$ kg, $\vec{r_3} = (1, -2)\ m$, $\vec{F_3} = (14, 0)$ N

$$\therefore \vec{r}_{cm} = \frac{m_1\vec{r_1} + m_2\vec{r_2} + m_3\vec{r_3}}{m_1 + m_2 + m_3}$$

ન્યૂટનના બીજા નિયમ મુજબ $\vec{F} = M\vec{a}_{cm}$, $M = m_1 + m_2 + m_3$

$$\therefore \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} = M\vec{a}_{cm},\ \vec{a}_{cm} = \frac{\vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3}}{M},\ \therefore \vec{a}_{cm} = (a_{x_{cm}}, a_{y_{cm}})$$

પ્રવેગનું મૂલ્ય $|\vec{a}_{cm}| = \sqrt{(a_{xcm})^2 + (a_{ycm})^2}$

પ્રવેગની X-અક્ષ સાથેની દિશા $\theta = tan^{-1}\left(\frac{a_{ycm}}{a_{xcm}}\right)$

9. આકૃતિ પરથી, 'R' ત્રિજ્યાની સમાન પૃષ્ઠ ઘનતાવાળી તકતીનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર સંમિતિ મુજબ 'ρ' ઊગમબિંદુ પર હશે. $\vec{r}_{cm} = (0, 0)$ (1)

ફક્ત $\frac{R}{2}$ ત્રિજ્યાની તકતી હોય, તો તેનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર તકતીના ભૌમિતિક કેન્દ્ર પર હોય, જેને $\vec{r}_{cm_1}$ વડે દર્શાવીએ તો, $\vec{r}_{cm_1} = \left(\frac{R}{2}, 0\right)$ (2)

$\frac{R}{2}$ ત્રિજ્યાની તકતીને R ત્રિજ્યાની તકતીમાંથી કાપતાં, બનતી તકતીની સંમિતિ X-અક્ષની

સાપેક્ષે જળવાતી હોવાથી તેનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર X-અક્ષ પર હશે, પરંતુ Y-અક્ષની સાપેક્ષે સંમિતિ ન જળવાતી હોવાથી તકતીનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર ઊગમબિંદુથી દૂર X-અક્ષ પર હશે. ધારો કે તે ઊગમબિંદુથી

$(-x)$ પર છે. $\therefore\ \vec{r}_{cm_2} = (-x, 0)$ (3)

સંપૂર્ણ તકતી, એ તકતી 1 અને 2 થી બનતી હોવાથી

$$\therefore\ \vec{r}_{cm} = \frac{M_1 \vec{r}_{cm_1} + M_2 \vec{r}_{cm_2}}{M_1 + M_2} \quad (4)$$

જ્યાં, M_1 = તકતી 1નું દ્રવ્યમાન $= \pi\left(\frac{R}{2}\right)^2 t\rho$ તથા M_2 = તકતી 2નું દ્રવ્યમાન =

$\pi R^2 t\rho - M_1 = \pi R^2 t\rho - \pi\left(\frac{R}{2}\right)^2 t\rho$, $M_2 = \pi t\rho\left[R^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2\right]$

જ્યાં, ρ = તકતીની ઘટના, t = તકતીની જાડાઈ.

આથી સમીકરણ (4) પરથી $\vec{r}_{cm2}$ શોધો.

પ્રકરણ 2

1. સમીકરણ $\theta = \left(\frac{\omega + \omega_0}{2}\right)t$ નો ઉપયોગ કરી ω_0 મેળવો અને $\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}t^2$ પરથી α મેળવો.

2. $\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$ પરથી α મેળવો. હવે $\theta = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\alpha}$ પરથી θ મેળવો અને તેને પરિભ્રમણમાં દર્શાવો. (2π rad = 1 પરિભ્રમણ)

3. $\alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t}$ નો ઉપયોગ કરી α મેળવો. હવે $I = m\, r^2$ અને $\tau = I\alpha$નો ઉપયોગ કરી τ મેળવો. $\theta = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\alpha}$ પરથી θ મેળવો. હવે કાર્ય $= \tau \cdot \theta$

4. $\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$ નો ઉપયોગ કરો. $\vec{r} = 4\hat{i} + 6\hat{j} + 12\hat{k}$ અને $\vec{p} = m\vec{v}$ $= 50\ (2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k})$

5. θ કોણવાળા ઢાળ પર સરક્યા સિવાય ગબડતા પદાર્થના પ્રવેગનું સૂત્ર $a = \frac{g\sin\theta}{\left[1 + \frac{K^2}{R^2}\right]}$માં પોલા નળાકાર માટે K = R મૂકી a મેળવો.

6. તંત્રની જડત્વની ચાકમાત્રા $I_z = I_{1z} + I_{2z}$; I_{1z} = 100 kg પદાર્થની Z-અક્ષને અનુલક્ષીને જડત્વની ચાકમાત્રા; I_{2z} = 200 k પદાર્થની Z-અક્ષને અનુલક્ષીને જડત્વની ચાકમાત્રા છે.

$I_z = I_x + I_y = m(x^2 + y^2)$ (1)

અત્રે અંતરો Z-અક્ષની સાપેક્ષે લેવાના હોવાથી Z-યામ ગણતરીમાં આવતો નથી.

$\therefore I_{1z} = I_{1x_1} + I_{2y_1} = 100\ (x^2_1 + y^2_1)$

તે જ રીતે,

$I_{2z} = I_{1x_2} + I_{2y_2}$

આ મૂલ્યો (1)માં મૂકો.

7. $v^2 = \dfrac{g \sin\theta}{\left[1 + \dfrac{K^2}{R^2}\right]}$ અને નક્કર ગોળા માટે $K = \sqrt{\dfrac{2}{5}}R$નો ઉપયોગ કરી v મેળવો.

હવે $mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$નો ઉપયોગ કરી ચાકગતિ-ઊર્જા $\frac{1}{2}I\omega^2$ મેળવો.

8. પૃથ્વીને નક્કર ગોળા તરીકે સ્વીકારી તેની જડત્વની ચાકમાત્રા $I = \frac{2}{5}MR^2$ લઈ

$L = I\omega$માં $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{2\pi}{24 \times 3600}$ મૂકી L મેળવો.

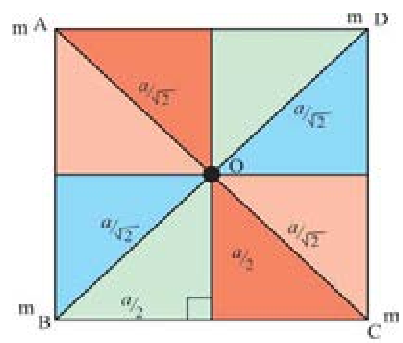
9. $I_1 = I_C + Md_1^2 \quad \therefore I_C = I_1 - Md_1^2$

હવે, $I_2 = I_C + Md_2^2 = I_1 - Md_1^2 + Md_2^2$

$= I_1 + M(d_2^2 - d_1^2)$ પરથી I_2 મેળવો.

10. આકૃતિ પરથી Oમાંથી પસાર થતી અક્ષને અનુલક્ષીને આ તંત્રની જડત્વની ચાકમાત્રા I.

$$I = \frac{ma^2}{2} + \frac{ma^2}{2} + \frac{ma^2}{2} + \frac{ma^2}{2} = 2ma^2$$

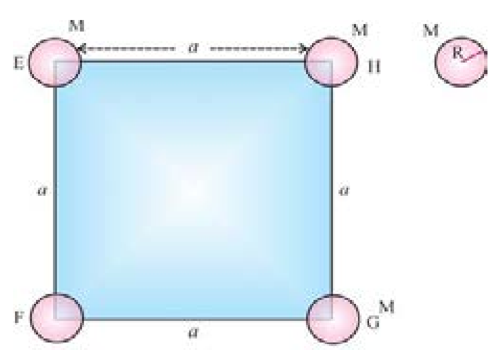


11. ગોળાની તેના કેન્દ્રમાંથી પસાર થતી અક્ષને અનુલક્ષીને જડત્વની ચાકમાત્રા $I_C = \frac{2}{5}MR^2$, EF અક્ષને અનુલક્ષીને તંત્રની જડત્વની ચાકમાત્રા

$I = I_E + I_F + I_G + I_H$

$I = I_C + Md^2$ ઉપયોગમાં લેતાં,

$I_E = \frac{2}{5}MR^2$; $I_F = \frac{2}{5}MR^2$;



$$I_G = \frac{2}{5}MR^2 + Ma^2; \; I_H = \frac{2}{5}MR^2 + Ma^2$$

$$\therefore \; I = \frac{2}{5}MR^2 + \frac{2}{5}MR^2 + \frac{2}{5}MR^2 + Ma^2 + \frac{2}{5}MR^2 + Ma^2$$

$$= 2\left(\frac{4}{5}MR^2 + Ma^2\right)$$

12. $r_1 = 0$, $r_2 = 2$ m, $r_3 = 4$ m, $r_4 = 6$ m, $m_1 = 1$ kg, $m_2 = 2$ kg, $m_3 = 3$ kg, $m_4 = 4$ kg, હવે, $I_{AB} = m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + m_3r_3^2 + m_4r_4^2$ નો ઉપયોગ કરો.

13. કુલ ગતિ-ઊર્જા = રેખીય ગતિ-ઊર્જા + ચાક ગતિ-ઊર્જા

$$= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\,I\omega^2$$

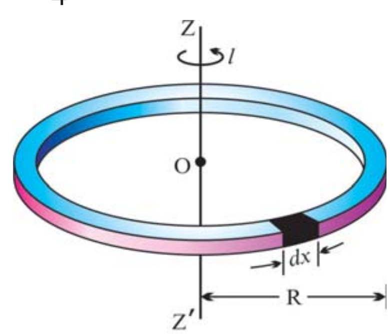
તકતી માટે $I = \frac{mr^2}{2}$ તથા $\omega = \frac{v}{r}$ $(\because \; v = r\omega)$

કુલ ગતિ-ઊર્જા $= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\frac{mr^2}{2}\frac{v^2}{r^2} = \frac{3}{4}mv^2$

ચાક ગતિ-ઊર્જા $= \frac{1}{4}mv^2$

કુલ ગતિ-ઊર્જાનો, ચાકગતિ-ઊર્જા રૂપે રહેલો ભાગ $= \dfrac{\frac{1}{4}mv^2}{\frac{3}{4}mv^2} = \frac{1}{3}$

14. પાતળી વર્તુળાકાર વીંટી (circular ring) અથવા વર્તુળાકાર તાર (circular wire)ની તેના કેન્દ્રમાંથી પસાર થતી અને સમતલને લંબઅક્ષને અનુલક્ષીને જડત્વની ચાકમાત્રા તથા ચક્રાવર્તનની ત્રિજ્યા શોધવા માટે આકૃતિ (2.29)માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે R ત્રિજ્યા તથા M દળવાળી એક પાતળી રીંગ (વીંટી) ધ્યાન લો. આ રિંગની લંબાઈ l એટલે કે



તેનો પરિઘ = $2\pi R$ થશે.

તથા રિંગનું એકમલંબાઈ દીઠ દ્રવ્યમાન $\lambda = \dfrac{\text{રિંગનું દળ}}{\text{રિંગની લંબાઈ (પરિઘ)}} = \dfrac{M}{2\pi R}$

આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે dx લંબાઈના ખંડનું દ્રવ્યમાન $= \lambda \cdot dx$

$$= \frac{M}{2\pi R}dx$$

આ ખંડની ZZ'-અક્ષને અનુલક્ષીને જડત્વની ચાકમાત્રાને dI કહીએ તો,

dI = (ખંડનું દ્રવ્યમાન) (ખંડનું ZZ' અક્ષથી લંબઅંતર)^2 $= \left(\frac{M}{2\pi R} \cdot dx\right)(R^2)$

$$dI = \frac{M}{2\pi} R \cdot dx \qquad (1)$$

ZZ'-અક્ષની સાપેક્ષે સમગ્ર રિંગની જડત્વની ચાકમાત્રા શોધવા માટે સમીકરણ(1)નું $x = 0$થી $x = 2\pi R$ના અંતરાલ વચ્ચે સંકલન કરતાં

$$\therefore I = \int dI = \int_0^{2\pi R} \frac{M}{2\pi} R \cdot dx$$

$$\therefore I = \frac{M}{2\pi} R \int_0^{2\pi R} dx$$

$$= \frac{M}{2\pi} R [x]_0^{2\pi R}$$

$$= \frac{M}{2\pi} R[2\pi R - 0]$$

$$I = MR^2 \qquad (2)$$

સમીકરણ (2)ને $I = MK^2$ સાથે સરખાવતાં $K^2 = R^2$ $\therefore$ ચક્રાવર્તનની ત્રિજ્યા $K = R$.

15. હલકા સળિયા પર લાગતાં બળોનો સદિશ સરવાળો પરિણામી બળ F આપશે.

$\vec{F} = + \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} + \vec{F_4} + \vec{F_5}$ ($\vec{F}$ પરિણામી બળ છે.)

$\vec{F} = \vec{F_1}\hat{j} + \vec{F_2}\hat{j} + \vec{F_3}(-\hat{j}) + \vec{F_4}\hat{j} + \vec{F_5}(-\hat{j})$

Aને અનુલક્ષીને $\vec{F}$ની ચાકમાત્રા = ઘટકબળોની ચાકમાત્રાનો સદિશ સરવાળો

$\therefore F \cdot x = [F_1 \times 0] + [F_2 \times x_1] - [F_3 \times (x_1 + x_2)] + [F_4 \times (x_1 + x_2 + x_3) - [F_5 \times (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)]$

$$\therefore x = \frac{x_1F_2 - (x_1+x_2)F_3 + (x_1+x_2+x_3)F_4 - (x_1+x_2+x_3+x_4)F_5}{F_1 + F_2 + F_4 - F_3 - F_5}$$

પ્રકરણ 3

1. પૃથ્વીના કેન્દ્રથી x અંતરે બંને બળો સમાન મૂલ્યનાં થતાં હોય તો,

$$\frac{GM_e m}{x^2} = \frac{GM_s m}{(r-x)^2},$$

M_e = પૃથ્વીનું દળ, M_s = સૂર્યનું દળ, r = પૃથ્વી અને સૂર્ય વચ્ચેનું અંતર આ પરથી x શોધો.

2. M_e = કદ × ઘનતા = $\left(\frac{4}{3}\pi R_e^3\right)(\rho)$

$\therefore g = \frac{GM_e}{R_e^2} = \frac{4}{3}\pi G\rho R_e$ આ પરથી g શોધો.

3. $\left\{\begin{matrix}\text{પૃથ્વીની વર્તુળગતિ માટે જરૂરી} \\ \text{કેન્દ્રગામી બળ} \\ \dfrac{M_e v_0^2}{r}\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}\text{સૂર્યનું પૃથ્વી પરનું ગુરુત્વબળ} \\ \dfrac{GM_s M_e}{r^2}\end{matrix}\right\}$

$\therefore M_s = \dfrac{r v_0^2}{G}$

4. ઉપગ્રહની વર્તુળગતિમાં $v_0 = \sqrt{\dfrac{GM_e}{r}} = \sqrt{\dfrac{GM_e}{2R_e}}$ $(\because r = R_e + R_e = 2R_e)$

આ પરથી v_0 શોધો.

હવે, $T^2 = \left(\dfrac{4\pi^2}{GM_e}\right) r^3$ આ પરથી T શોધો.

5. ઉપગ્રહની વર્તુળગતિ માટે $mv^2/r = GM_e\ m/r^2$

$\therefore$ ઉપગ્રહની ગતિ-ઊર્જા $\dfrac{1}{2}mv^2 = \dfrac{GM_e m}{2r}$.

પરંતુ સ્થિતિ-ઊર્જા $= \dfrac{-GM_e m}{r}$

$\therefore$ કુલ ઊર્જા = ગતિ-ઊર્જા + સ્થિતિ-ઊર્જા $= \dfrac{-GM_e m}{2r}$

$\therefore$ નિષ્ક્રમણ-ઊર્જા $= \dfrac{GM_e m}{2r}$

$\therefore \dfrac{1}{2}mv_e^2 = \dfrac{GM_e m}{2r}$ આ પરથી v_e શોધો.

6. ઉપગ્રહની વર્તુળગતિ માટે $\dfrac{mv^2}{R_e} = \dfrac{GM_e m}{R_e^2} = (g)m$ (1)

$(\because g = \dfrac{GM_e}{R_e^2})$ $\therefore v^2 = gR_e$ પણ $v = \dfrac{2\pi R_e}{T}$

આ મૂલ્ય સમીકરણ (1)માં મૂકી T શોધો.

7. ઉપગ્રહની વર્તુળગતિ માટે $\dfrac{mv_0^2}{R_e} = \dfrac{GM_e m}{R_e^2}$ $\therefore v_0 = \sqrt{\dfrac{GM_e}{R_e}}$

પૃથ્વી પર સ્થિર રહેલા પદાર્થ માટે $v_e = \sqrt{\dfrac{2GM_e}{R_e}}$ હવે $\dfrac{v_0}{v_e}$ શોધો.

8. આપેલ બિંદુએ કુલ ઊર્જા $= \left[-\dfrac{GM_1 m}{d/2}\right] + \left[\dfrac{-GM_2 m}{d/2}\right] = \dfrac{-2G(M_1 + M_2)m}{d}$

$\therefore$ નિષ્ક્રમણ-ઊર્જા $= \dfrac{2G(M_1 + M_2)m}{d}$

જો નિષ્ક્રમણ-વેગ v_e હોય તો, $\dfrac{1}{2}mv_e^2 = \dfrac{2G(M_1 + M_2)m}{d}$, આ પરથી v_e શોધો.

9. આ ખાસ કિસ્સામાં, વર્તુળગતિ માટે

$$\left(\text{કેન્દ્રગામી બળ } \frac{mv^2}{r}\right) = \left(\text{ગુરુત્વ બળ } \frac{GMm}{r^{5/2}}\right)$$

હવે $v = \frac{2\pi r}{T}$ મૂકીને T^2 શોધો.

પ્રકરણ 4

1. અહીં તારનું વજન = પ્રતાન બળ = $Aldg$, બ્રેકિંગ પ્રતિબળ = $\frac{\text{પ્રતાનબળ}}{\text{ક્ષેત્રફળ}} = ldg$

$\therefore l = \frac{\text{બ્રેકિંગ પ્રતિબળ}}{dg}$

2. જો AB, BC અને CD માં લંબાઈમાં વધારો Δl_{AB}, Δl_{BC} અને Δl_{CD} હોય, તો ત્રણેયનાં મૂલ્ય $\Delta l = \frac{Fl}{AY}$ સૂત્રથી મેળવો.

Bનું સ્થાનાંતર = Δl_{AB}, Cનું સ્થાનાંતર = $\Delta l_{AB} + \Delta l_{BC}$,
Dનું સ્થાનાંતર = $\Delta l_{AB} + \Delta l_{BC} + \Delta l_{CD}$

3. વર્તુળગતિ માટે જરૂરી કેન્દ્રગામી બળ પુનઃસ્થાપકબળ દ્વારા પૂરું પડાય છે.

$Y = \frac{FL}{A\Delta l}$ $\therefore F = \frac{YA\Delta L}{L}$ અને $F = \frac{mv^2}{L} = \frac{m\omega^2 L^2}{L}$ બંને Fને સરખાવો.

4. બંને દળના F.B.D. બનાવી તારમાં તણાવ T શોધો.

અહીં પ્રતિબળ = $\frac{T}{A}$ અને $\frac{\Delta l}{l} = \frac{\text{પ્રતિબળ}}{Y}$

5. સૌપ્રથમ $Y = \frac{Fl}{A\Delta L}$ નો ઉપયોગ કરી Δl મેળવો. હવે ઉદાહરણ 3નો ઉપયોગ કરો.

$U = \frac{1}{2} Y \times$ પ્રતિબળ $\times$ વિકૃતિ $\times$ કદનો ઉપયોગ કરો.

6. $\Delta l = l\,\alpha\,\Delta t$, $\therefore \frac{\Delta l}{l} = \alpha\Delta t$ હવે $Y = \frac{F}{A}\frac{l}{\Delta t}$; જ્યાં અહીં F તણાવમાં થતો ફેરફાર છે. હવે F ગણો.

પ્રકરણ 5

1. $A_1 v_1 = A_2 v_2$ ની મદદથી નોઝલમાંથી બહાર આવતા પાણીનો વેગ શોધો.

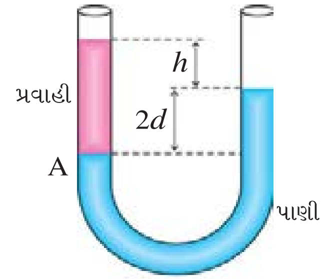
શિરોલંબ ગતિ માટે $y = \frac{1}{2}gt^2$ અને $y = 1$ m અને સમક્ષિતિજ ગતિ માટે $x = v_{L2}t$

$\therefore y = \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_2}\right)^2$ $\therefore x = \sqrt{\frac{2yv_2^2}{g}}$

2. A આગળનું દબાણ = B આગળનું દબાણ

$\therefore (h + 2d)\rho_e g + P_a = P_a + 1(2d)g$

હવે ρ_l મેળવો.



3. સમક્ષિતિજ પ્રવાહ માટે

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

$$\therefore P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_2^2)$$

$\therefore \rho_{Hg}\, g(h_1 - h_2) = \frac{1}{2}\rho_{water}\,(r_2^2 - r_1^2)$ h_2 ની કિંમત શોધવા બાકીની કિંમતો મૂકો.

4. કાર્ય = $T\Delta A = T2\pi\ (r_2^2 - r_1^2)$

5. $T = \dfrac{rh\rho g}{2cos\theta}$

$\therefore h = \dfrac{2Tcos\theta}{r\rho g}$ પરથી બીજા ભુજ માટે ઊંચાઈ મેળવો અને તફાવત શોધો.

6. $\eta = \dfrac{2}{9}\dfrac{v^2}{v_t}(\rho - \rho_0)g$

અહીં પરપોટાનો અચળ વેગ તેનો અંતિમ વેગ છે.

7. અને **8.** સૂચનમાં આપેલ સૂત્રનો ઉપયોગ કરો.

9. $P_i - P_o = \dfrac{4T}{R}$ પરથી P_i શોધો. $P_o = 10^5\ Pa$

હવે સમતાપી સંકોચન માટે ત્રિજ્યા અડધી થાય માટે કદ આઠમા ભાગનું થાય.

$P_iV = P_i'\dfrac{V}{8}$ પરથી P_i' મેળવો.

હવે $P_i' - P_o' = \dfrac{4T}{R'}$ માટે $R' = \dfrac{R}{2}$ લઈને P_o' મેળવો.

પ્રકરણ 6

1. $m = 200$ g, $\Delta T = T_f - T_i$, $C = 0.215$ cal $g^{-1}\ C^{o-1}$, $Q = mC\Delta T$

અને $H_C = \dfrac{Q}{\Delta T}$

2. (*a*) 32 g O_2 = 1 મોલ

$\therefore$ 10 g $O_2 = \dfrac{10}{32} = \dfrac{5}{6}$ મોલ

$\therefore \mu = \dfrac{5}{6}$ મોલ

$P = 3 \times 10^5\ N\ m^{-2}$, $T = 273 + 10 = 283$ K

આદર્શવાયુ અવસ્થા-સમીકરણ પરથી,

$$PV_1 = \mu RT_1 \Rightarrow V_1 = \frac{\mu RT_1}{P}$$

તથા $V_2 = 10\ L = 10^{-2}\ m^3$

આથી વાયુ વડે થતું કાર્ય

$$W = P(V_2 - V_1)$$

(*b*) O_2 દ્વિપરમાણ્વિક (rigid rotator) હોવાથી

$$C_V = \frac{5}{2}R$$

તથા $PV_2 = \mu RT_2 \Rightarrow T_2 = \frac{PV_2}{\mu R}$

$\therefore\ \Delta E_{int} = \mu C_V (T_2 - T_1)$

(*c*) $\Delta E_{int} = Q - W$

$\therefore\ Q = \Delta E_{int} + W$

3. અહીં, $T_2 = 300$ K, $\eta = 40\ \% = 0.4$, $\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}$, પરથી T_1 શોધો.

T_1 = અચળ રાખીને $\eta' = 50\ \% = 0.5$ કરવા T_2 = ?

$\eta' = 1 - \frac{T_2}{T_1}$ પરથી T_2' શોધો.

4. $T_1 = 500$ K, $T_2 = 375$ K, $Q_1 = 600$ k cal

(i) કાર્યક્ષમતા $\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}$, (ii) $\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{T_2}{T_1}\ \therefore\ Q_2 = \frac{T_2}{T_1} \times Q_1$

ચોખ્ખું કાર્ય $W = (Q_1 - Q_2) \times 4.2\frac{J}{cal}$ (iii) ઠારણ-વ્યવસ્થામાં પાછી મેળવાતી ઉષ્મા = Q_2

5. $T_i = 27\ ^oC = 27 + 273 = 300$ K

$P_i = 2$ atm, $\mu = 1$ mol, $\gamma = 1.5$, $V_f = \frac{1}{8}V_i$

(*a*) સમોષ્મી સંકોચન માટે PV^γ = અચળ

$$\therefore\ P_iV_i^\gamma = P_f V_f^\gamma \Rightarrow P_f = P_i\left(\frac{V_i}{V_f}\right)^\gamma$$

(*b*) આદર્શ વાયુ અવસ્થા-સમીકરણ મુજબ, $P_iV_i = \mu RT_i$

$$P_fV_f = \mu RT_f\ \therefore\ \frac{P_iV_i}{P_fV_f} = \frac{T_i}{T_f} \Rightarrow T_f = T_i\frac{P_fV_f}{P_iV_i}$$

6. સમોષ્મી પ્રક્રિયા માટે $W = \frac{\mu R(T_i - T_f)}{\gamma - 1}$, પરંતુ અહીંયાં કદ સંકોચન થતું હોવાથી કાર્ય ઋણ મળે છે.

$$\therefore\ W = \frac{-\mu R(T_i - T_f)}{\gamma - 1} = \frac{\mu R(T_f - T_i)}{\gamma - 1}$$

7. થરમૉડાઈનેમિકના પ્રથમ નિયમ મુજબ $\therefore\ \Delta E_{int} = Q - W$

પરંતુ બંધ વાયુપાત્ર માટે કદ અચળ હોવાથી $\Rightarrow \Delta V = 0\ \therefore\ W = 0$

$$\Delta E_{int} = Q = \mu C_V\Delta T = \frac{PV}{RT}C_V\Delta T \quad (\because\ PV = \mu RT,\ \therefore\ \mu = \frac{PV}{RT})$$

$\therefore\ \Delta T = \frac{QRT}{PVC_V}$ (એક-પરમાણ્વિક વાયુ માટે $C_V = \frac{3}{2}R$)

$\therefore$ અંતિમ તાપમાન $T_f = T_i + \Delta T$, આ ઉપરાંત આદર્શવાયુ માટે $P_iV_i = \mu RT_i$

$P_fV_f = \mu RT_f\ (\because\ V_f = V_i)$

$$\therefore\ \frac{P_f}{P_i} = \frac{T_f}{T_i} \Rightarrow P_f = P_i\frac{T_f}{T_i}$$

8. અહીંયાં $\mu = 1$ મોલ, $\Delta T = 30\ C^o = 30$ K, $V \propto T^{\frac{2}{3}}$

$\therefore V = AT^{\frac{2}{3}}$, A = અચળ $\therefore dV = A\frac{2}{3}T^{-\frac{1}{3}}dT$

આથી $W = \int_{T}^{T+\Delta T} PdV = \int_{T}^{T+\Delta T} \frac{RT}{V}dV$ ($\because PV = \mu RT,\ \therefore\ PV = RT, \mu = 1$)

$$= \int_{T}^{T+\Delta T} \frac{RT}{AT^{\frac{2}{3}}} A\frac{2}{3}T^{-\frac{1}{3}}dT = \frac{2R}{3}\int_{T}^{T+\Delta T} dT = \frac{2}{3}R\,[T]_{T}^{T+\Delta T}$$

$$= \frac{2}{3}R[T + \Delta T - T] \ \therefore\ W = \frac{2}{3}R\Delta T$$

9. અહીંયાં $P = 1.0$ atm $= 1.01 \times 10^5$ N m^{-2}, T = 300 K, $\mu = 2$ mol, $R = 8.31$ J mol^{-1} K^{-1}

દ્વિ-પરમાણ્વિક (rigid rotator) માટે $\gamma = \frac{7}{5}$

આદર્શવાયુ અવસ્થા-સમીકરણ મુજબ $PV = \mu RT$

$\therefore V = \frac{\mu RT}{P}$

સમોષ્મી પ્રક્રિયા માટે PV^{γ} = અચળ

$\therefore$ અચળાંક $= P\left(\frac{\mu RT}{P}\right)^{\gamma}$

10. અહીંયાં $T_1 = 300$ K, $T_2 = 600$ K, $T_3 = 455$ K, એક-પરમાણ્વિક વાયુ માટે $f = 3$

આથી 1 મોલ વાયુ માટે

$E_{int,1} = \frac{fRT_1}{2}$, $E_{int,2} = \frac{fRT_2}{2}$ અને $E_{int,3}$ = બિંદુ 3 પાસે આંતરિક ઊર્જા $= \frac{fRT_3}{2}$

પ્રક્રિયા 1 → 2 : સમકદ પ્રક્રિયા હોવાથી $\Rightarrow W_1 = 0$

$\therefore Q_1 = \Delta E_{int,12} = E_{int,2} - E_{int,1}$

પ્રક્રિયા 3 → 1 : સમદાબ પ્રક્રિયા હોવાથી

$\therefore \Delta E_{int,31} = Q_3 - W_3$, $W_3 = PdV$

પરંતુ વાયુનું કદ સંકોચન થતું હોવાથી W ઋણ હોય છે.

$\therefore W_3 = -PdV = -\mu R(T_3 - T_1)$ અને $\Delta E_{int,31} = \Delta E_{int,1} - \Delta E_{int,3}$

આથી, $Q_3 = \Delta E_{int,31} + W_3$

11. $\eta = 22\% = 0.22$, $Q_1 - Q_2 = 75$ J, $\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} \Rightarrow Q_1 = \frac{Q_1 - Q_2}{\eta}$

અને $Q_2 = Q_1 - 75$ J

12. અહીંયા $Q_1 = 10{,}000$ J, W = 2000 J, $L_C = 5.0 \times 10^4$ J/g

(*a*) એન્જિનની કાર્યક્ષમતા $\eta = \frac{W}{Q_1}$,

(*b*) દરેક ચક્ર દરમિયાન ઠારણ-વ્યવસ્થામાં આપેલી ઉષ્મા $Q_2 = Q_1 - W$,

(*c*) ધારો કે દરેક ચક્ર દરમિયાન m ગ્રામ ગૅસોલિન વપરાય છે.

$\therefore Q_1 = mL_C \therefore m = \frac{Q_1}{L_C}$

(*d*) એક ચક્ર દરમિયાન વપરાતું ગૅસોલિન = m ગ્રામ, ∴ 1 સેકન્ડમાં 25 ચક્ર દરમિયાન વપરાતું ગૅસોલિન, M = 25 × m ગ્રામ, ∴ 1 કલાકમાં વપરાતું ગૅસોલિન = 60 × 60 × M g/h = ... kg/h

(*e*) 1 સેકન્ડમાં એન્જિને ઉત્પન્ન કરેલ પાવર = 1 સેકન્ડમાં થતા ચક્ર × 1 ચક્ર દીઠ થતું કાર્ય

પ્રકરણ 7

1. (*a*) $T = 3$ s, $A = 2$ cm, $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{3}$, $\phi = 60^o = \frac{\pi}{3}$

$\therefore y = 2 \sin\left(\frac{2\pi}{3}t + \frac{\pi}{3}\right)$

(*b*) $T = 1$ min $= 60$ s, $A = 3$ cm, $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{60}$, $\phi = -90^o = -\frac{\pi}{2}$

$\therefore y = 3 \cos\left(\frac{\pi}{30}t\right)$

2. $K = k + 2k + k = 8$ N m^{-1}, $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}} = 0.628$ s

3. અહીં $F = -kl = -k(l_1 + l_2)$, ઉપરાંત $F_1 = -k_1l_1 = -k(l_1 + \frac{l_1}{n}) \therefore k_1 = (1 + \frac{l_1}{n})\, k$,
અને $F_2 = -k_2l_2 = -k(l_2 + l_2) \therefore k_2(n + 1)k$

4. $m = 100$ g, $A\,(t) = \frac{A}{2}$, $t = 100 \times 2 = 200$ s, $A(t) = A^{-bt/2m}$

5. $v = \pm\omega\sqrt{4A^2 - 3y^2}$, $v_{new} = \pm\omega\sqrt{A_1^{\,2} - y_1^{\,2}}$ $\quad v_{new} = 2\,v$,

$2\sqrt{A^2_{new} - y^2} = \sqrt{A^2_{new} - y^2}$, $4(A^2 - y^2) = A^2_{new} - y^2$

$\therefore A^2_{new}\, A4^2 - 4y^2 + y$, $A_{new} = \sqrt{4A^2 - 3y^2}$

6. $v = \omega\sqrt{A^2 - y^2}$, $a = -\omega^2 y$, $T = \frac{2\pi}{\omega}$, $a^2T^2 + 4\pi^2v^2 = 4\pi^2\omega^2A^2 =$ અચળ

7. $T - mg\cos\theta = mv^2/L$, $\therefore T = mg\cos\theta + mv^2/L$

જ્યારે $\cos\theta = 1$ અને v મહત્તમ હોય, તો $T = T_{max}$

$v^2_{max} = 2\,hg = 2g\,L\,\frac{\theta_0^{\,2}}{2}$, $v^2_{max} = 2\,hg = 2g\,L\,(1 - \cos\theta_1)$,

$= 2g\,L\,(\sin^2\frac{\theta_0}{2})\ (\because \sin^2\theta = \frac{1-\cos^2\theta}{2}) = 2g\,L\,\frac{\theta_0^{\,2}}{2}$

$gL\left(\frac{A}{L}\right)^2 \quad T_{max} = mg\left[1 + \left(\frac{A}{L}\right)^2\right]$

8. $y_1 = 10 \sin (3\pi t + \frac{\pi}{4})$, $A_1 = 10$, $\omega_1 = 3\pi \Rightarrow T_1 = \frac{2}{3}$ s.

$y_2 = 5 (\sin 3\pi t + \sqrt{3} \cos 3\pi t) = A_2 \cos\phi \sin 3\pi t + A_2 \sin\phi \cos 3\pi t$

$y_2 = A_2 \sin (3\pi t + \phi)$

$A_2 = \sqrt{(5)^2 + (5\sqrt{3})^2} = 10$, $\omega_2 = 3\pi$, $T_2 = \frac{2}{3}$ s, અને $\frac{A_1}{A_2} = 1$

9. $PE = \frac{1}{2}ky^2$, કુલ યાંત્રિક-ઊર્જા $E = K + U \therefore K = E - U$

10. $v_1 = \omega\sqrt{A^2 - y_1^2}$, $v_2 = \omega\sqrt{A^2 - y_2^2}$, $v_1^2 - v_2^2 = \omega^2(y_2^2 - y_1^2)$, $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

પ્રકરણ 8

1. તરંગ-સમીકરણ $y = A\sin (\omega t - kx)$નું t સાપેક્ષે વિકલન કરતાં, t સમયે કણનો તત્કાલીન વેગ મળશે. $v_p = \frac{dy}{dt} = A\omega \cos (\omega t - kx)$

હવે તરંગ-ઝડપ $v = \omega/k$

તરંગનો x અંતરે ઢાળ $= \frac{dy}{dx} = -kA\cos (\omega t - kx)$

ઉપર્યુક્ત ત્રણેય સમીકરણો પરથી $\frac{v_P}{v} = -\frac{dy}{dx}$

2. P તરંગનો વેગ $v_P = \frac{d}{t}$, S તરંગનો વેગ $v_S = \frac{d}{t+240}$,

($\because$ 4 મિનિટ $= 60 \times 4 = 240$ s) આ બંને સમીકરણોને ઉકેલતાં, $t = 240$ s મળશે.

હવે $v_P = \frac{d}{t}$ સમીકરણમાં t નું અને v_P નું મૂલ્ય મૂકી d શોધો.

3. $A = 10$ m, $x_1 = 2$ m, $t_1 = 2$ s અને $y_1 = 5$ m, $x_2 = 16$ m, $t_2 = 8$ s અને $y_z = 5\sqrt{3}$ m.

હવે, $y_1 = A \sin (\omega t_1 - kx_1)$માં કિંમતો મૂકતાં, $\omega - k = \frac{\pi}{12}$ (1)

$y_2 = A\sin (\omega t_2 - kx_2)$ માં કિંમતો મૂકતાં, $\omega - 2k = \frac{\pi}{24}$ (2)

સમીકરણ (1) માંથી (2) બાદ કરતાં, $k = \frac{\pi}{24}$ rad/m, k નું મૂલ્ય સમીકરણ (1)માં મૂકતાં,

$\omega = \pi/8$ rad/s

4. $y = 3 \sin ((3.14)x - (314)t)$નું t સાપેક્ષે વિકલન કરતાં,

$v = \frac{dy}{dx} = -(3)(314) \cos ((3.14)x - (314)t)$

$\therefore$ કણનો મહત્તમ વેગ $= (3)(314) = 9.4$ m s^{-1}

ઉપર્યુક્ત સમીકરણનું tની સાપેક્ષે વિકલન કરતાં,

$a = \dfrac{dv}{dt} = -(3)(314)(314) \sin((3.14)x - (314)t)$

હવે $x = 6$ cm અને $t = 0.11$ s મૂકતાં,

$a = -(3)(314)^2 \sin(6\pi - 11\pi) = (-3)(314)^2 \sin(-5\pi) = 0.$

5. $T_1 = 0. + 273 = 273$ K, $\lambda_1 = 1.32$ m, $T_2 = 27 + 273 = 300$ K, $\lambda_2 = ?$

હવે, $\dfrac{v_1}{v_2} = \sqrt{\dfrac{T_1}{T_2}} \therefore \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2} = \sqrt{\dfrac{T_1}{T_2}}$ $(\because v = f\lambda)$

ઉપર્યુક્ત સમીકરણમાં કિંમતો મૂકતાં, $\lambda_2 = 1.384$ m

તરંગલંબાઈમાં વધારો $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = 0.064$ m

6. $T_0 = 1200 + 273 = 1473$ K, $\rho_0 = 16\ \rho_H$, $T_H = ?$ હવે, $v_0 = v_H$

$\therefore \sqrt{\dfrac{\gamma R T_0}{\rho_0 V}} = \sqrt{\dfrac{\gamma R T_H}{\rho_H V}} \therefore T_H = T_0 \times \dfrac{\rho_H}{\rho_0} = 1473 \times \dfrac{1}{16} = 92.06$ K

$\therefore T_H = 92.06 - 273 = -180.94^\circ C$

7. અહીં $L_1 + L_2 + L_3 = 100$ cm છે. સમગ્ર તાર એક જ માધ્યમ હોવાથી બધા વિભાગોમાં તરંગ ઝડપ v સમાન હોય છે. $\therefore v = f_1\lambda_1 = f_2\lambda_2 = f_3\lambda_3$

તારનો દરેક વિભાગ મૂળભૂત આવૃત્તિથી ($f = 2L$) દોલનો કરે છે.

$\therefore f_1 (2L_1) = f_2 (2L_2) = f_3 (2L_3)$

આ સમીકરણમાં $f_1 : f_2 = 1 : 2$ અને $f_1 : f_3 = 1 : 3$ મૂકીને L_1, L_2 અને L_3 શોધો.

8. $\mu = 0.05$ g/cm, $f_n = 420$ Hz, $f_{n+1} = 490$ Hz, T = 490 N

ધારો કે તાર એ 420 Hz આવૃત્તિ માટે nમી હાર્મોનિક સાથે અને 490 Hz આવૃત્તિ માટે $(n + 1)$મી હાર્મોનિક સાથે અનુનાદ કરે છે.

$f = \dfrac{n}{2L}\sqrt{\dfrac{T}{\mu}}$ અનુસાર, $f_n = \dfrac{n}{2L}\sqrt{\dfrac{T}{\mu}}$ (1) અને $f_{n+1} = \dfrac{n+1}{2L}\sqrt{\dfrac{T}{\mu}}$ (2)

બંને સમીકરણોનો ગુણોત્તર લેતાં,

$\dfrac{f_{n+1}}{f_n} = \dfrac{n+1}{n} \quad \therefore n = 6$ (f_{n+1} અને f_nની કિંમતો મૂકતાં)

$420 = \dfrac{6}{2L}\sqrt{\dfrac{450}{5 \times 10^{-3}}} = \dfrac{900}{L}$

$\therefore L = \dfrac{900}{420} = 2.1$ m

9. L = 100 cm, $f_n = 300$ Hz, $f_{n+1} = 400$ Hz, 2A = 10 cm

હવે, $f_{n+1} - f_n = (n + 1) f_1 - nf_1$, $\therefore f_1 = 100$ Hz, $\lambda_1 = \dfrac{2L}{1} = 200$ cm,

$\therefore k = \dfrac{2\pi}{\lambda} = \dfrac{\pi}{100}$ rad/cm, $\omega = 2\pi f_1 = 2\pi(100)$ rad/s

આથી, સ્થિત તરંગનું સમીકરણ, $y = -10 \sin(\dfrac{\pi}{100}x) \cos(200\pi)t$ cm

10. કાર શ્રોતા તરફ ગતિ કરે ત્યારે, $f_{L_1} = \left(\dfrac{v + 0}{v - v_S}\right) f_s$

કાર શ્રોતાથી દૂર તરફ ગતિ કરે ત્યારે $f_{L_2} = \left(\frac{v + 0}{v + v_S}\right) f_S$

$\therefore \quad f_{L_1} - f_{L_2} = \left(\frac{v}{v - v_S} - \frac{v}{v + v_S}\right) f_S$ સમીકરણમાં, $v = 340$ m/s, $v_S = 15$ m/s અને $f_S = 500$ Hz મૂકતાં, $f_{L_1} - f_{L_2} = 44.2$Hz

11. $f_S = 600$ Hz, $v = 340$ m/s, $v_L = 10$ m s^{-1}

એન્જિન જ્યારે ટેકરી તરફ 10 m s^{-1}ના વેગથી ગતિ કરે છે ત્યારે તેનું પ્રતિબિંબ તેનાથી વિરુદ્ધ દિશામાં ગતિ કરતું ગણી શકાય. શ્રોતા એન્જિનમાં બેઠેલો છે અને એન્જિન ટેકરી તરફ ગતિ કરે છે. આથી v_L ની દિશા L થી S તરફ અને v_S ની દિશા S થી L તરફ થશે.

$$\therefore f_L = \frac{v + v_L}{v - v_S} \times f_S = \frac{340 + 10}{340 - 10} \times 660 = 700 \text{ Hz}$$

•

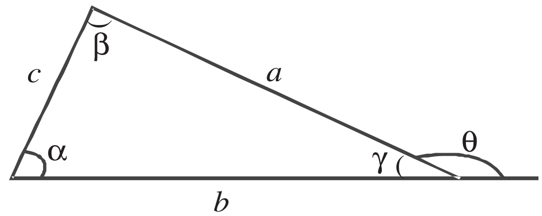
પરિશિષ્ટ

SINE અને COSINEના નિયમો

(i) $\dfrac{sin\ \alpha}{a} = \dfrac{sin\ \beta}{b} = \dfrac{sin\ \gamma}{c}$

(ii) $c^2 = a^2 + b^2 - 2\ abcos\ \gamma$

(iii) બહિર્કોણ $\theta = \alpha + \beta$



ત્રિકોણમિતીય સૂત્રો (TRIGONOMETRIC IDENTITIES)

(i) $sin^2\theta + cos^2\theta = 1$

(ii) $1 + tan^2\theta = sec^2\theta$

(iii) $1 + cot^2\theta = cosec^2\theta$

(iv) $sec^2\theta - tan^2\theta = 1$

(v) $cosec^2\theta - cot^2\theta = 1$

(vi) $sin2\theta = 2sin\theta\ cos\theta$

(vii) $cos2\theta = cos^2\theta - sin^2\theta = 2cos^2\theta - 1 = 1 - 2sin^2\theta$

(viii) $sin(\alpha \pm \beta) = sin\alpha cos\beta \pm cos\alpha sin\beta$

(ix) $cos(\alpha \pm \beta) = cos\alpha cos\beta \mp sin\alpha sin\beta$

(x) $sin\alpha \pm sin\beta = 2sin\ \dfrac{\alpha \pm \beta}{2}\ cos\ \dfrac{\alpha \mp \beta}{2}$

(xi) $cos\alpha + cos\beta = 2cos\ \dfrac{\alpha + \beta}{2}\ cos\ \dfrac{\alpha - \beta}{2}$

(xii) $cos\alpha - cos\beta = -2sin\ \dfrac{\alpha + \beta}{2}\ sin\ \dfrac{\alpha - \beta}{2}$

ખાસ ખૂણાઓ માટે sine અને cosineનાં મૂલ્યો

વિધેય	0° 0 rad.	30° $\frac{\pi}{6}$ rad	45° $\frac{\pi}{4}$ rad	60° $\frac{\pi}{3}$ rad	90° $\frac{\pi}{2}$ rad	180° π rad	270° $\frac{3\pi}{2}$ rad	360° 2π rad
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	−1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	−1	0	1
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	∞	0

દ્વિઘાત સમીકરણનાં બીજ :

જો $ax^2 + bx + c = 0$, હોય તો, $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

લોગ (Log) નાં સૂત્રો :

1. જો $log\ a = x$, તો $a = 10^x$
2. $log(ab) = log(a) + log(b)$
3. $log\left(\dfrac{a}{b}\right) = log(a) - log(b)$
4. $log(a^n) = n\ log\ a$
5. $log_a a = 1$
6. $ln\ a = log_e a = 2.303\ log_{10} a$

અગત્યનાં વિસ્તરણો :

1. દ્વિપદી વિસ્તરણ : $(1 \pm x)^n = 1 \pm nx + \dfrac{n(n-1)x^2}{2!} + \ldots\ldots (x^2 < 1)$

   $(1 \pm x)^{-n} = 1 \mp nx + \dfrac{n(n+1)x^2}{2!} \ldots\ldots (x^2 < 1)$

2. $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \ldots$.. જ્યારે $x << 1$, હોય ત્યારે $e^x = 1 + x$

3. $ln(1 + x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^2}{3} + \ldots (|\ x\ | < 1)$

   જ્યારે $x << 1$, હોય, ત્યારે $ln(1 \pm x) = \pm x$

4. ત્રિકોણમિતીય વિસ્તરણો (θ રેડિયનમાં છે.)

   (i) $\sin\theta = \theta - \dfrac{\theta^3}{3!} + \dfrac{\theta^5}{5!} + \ldots$.. (ii) $\cos\theta = 1 - \dfrac{\theta^2}{2!} + \dfrac{\theta^4}{4!} + \ldots$..

   (iii) $\tan\theta = \theta + \dfrac{\theta^3}{3} + \dfrac{2\theta^5}{15} + \ldots$..

   જો θ ખૂબ જ નાનો હોય, તો $sin\theta \approx \theta$; $cos\theta \approx 1$ and $tan\theta \approx \theta$ rad

y	$\dfrac{dy}{dx}$	y	$\dfrac{dy}{dx}$
x^n	nx^{n-1}	$sec\ x$	$\sec x \tan x$
$sin\ x$	$cos\ x$	$cosec\ x$	$-cosec\ x\ cot\ x$
$cos\ x$	$-sin^{-2}\ x$	lnx	$\dfrac{1}{x}$
$cot\ x$	$-cosec^2\ x$	$tan\ x$	$sec^2\ x$
$cos\ kx$	$-k\ sin\ x$	e^x	e^x
$sin\ kx$	$k\ cos\ x$	a^x	$a^x\ ln\ a$

વિકલિતના કાર્ય-નિયમો :

(1) $\dfrac{d}{dx}(k) = 0$ (જ્યાં, k અચળ છે.

(2) $\dfrac{d}{dx}(x) = 1$

(3) $\dfrac{d}{dx}(ky) = k\dfrac{dy}{dx}$ (જ્યાં, k અચળ છે.)

(4) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \times \dfrac{du}{dx}$

(5) જો $y = u \pm v$, હોય, તો $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{du}{dx} \pm \dfrac{dv}{dx}$

(6) જો $y = uv$ હોય, તો $\dfrac{dy}{dx} = u\dfrac{dv}{dx} \pm v\dfrac{du}{dx}$

(7) જો $y = \dfrac{u}{v}$ હોય, તો $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$

અમુક પ્રમાણિત વિધેયોનાં સંકલિતો :

$f(x)$	$F(x) = \quad f(x)dx$	$f(x)$	$F(x) = \quad f(x)dx$
x^n $(n \neq -1)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	$(ax + b)^n$	$\frac{1}{a}\frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + c$
$\frac{1}{x}$	$ln\ x + c$	$sin\ x$	$-cos\ x + c$
e^x	$e^x + c$	$cos\ x$	$sin\ x + c$
e^{kx}	$\frac{1}{k}e^{kx} + c$	$sin\ kx$	$-\frac{1}{k}cos\ x + c$
a^x	$\frac{a^x}{lna} + c$	$cos\ kx$	$\frac{1}{k}sin\ kx + c$

સંદર્ભ ગ્રંથો (REFERENCE BOOKS)

1. PHYSICS, Part 1 and 2, Std. XI, GSBST
2. PHYSICS, Part 1 and 2, Std. XI, NCERT
3. Fundamentals of PHYSICS by Halliday, Resnick and Walker
4. University Physics by Young, Zemansky and sears
5. CONCEPTS OF PHYSICS by H. C. Verma
6. Advanced PHYSICS by Tom Duncan
7. Advanced LEVEL PHYSICS by Nelkon and Parker
8. FUNDAMENTAL UNIVERSITY PHYSICS by Alonso and Finn
9. COLLEGE PHYSICS by Weber, Manning, White and Weygand
10. PHYSICS FOR SCIENTIST AND ENGINEERS by Fishbane, Gasiorowicz, Thornton
11. PHYSICS by Cutnell and Johnson
12. COLLEGE PHYSICS by Serway and Faughn
13. UNIVERSITY PHYSICS by Ronald Reese
14. CONCEPTUAL PHYSICS by Hewitt
15. PHYSICS FOR SCIENTIST AND ENGINEERS by Giancoli
16. Heat Transfer by Holman

•

પારિભાષિક શબ્દો

(સિમેસ્ટર I)

પ્રકરણ 1 ભૌતિક જગત

ગાણિતીય વાદ	Mathematical theory	(મેથેમેટિકલ થીયરી)
તર્ક	Logic	(લૉજિક)
ઘટના	Event	(ઇવેન્ટ)
દ્રવ્ય	Matter	(મેટર)
વિકિરણ	Radiation	(રેડિયેશન)
મૂળભૂત	Fundamental	(ફન્ડામેન્ટલ)
પરમાણુ	Atom	(એટમ)
અણુ	Molecule	(મોલેક્યુલ)
સંક્રાંતિ	Transition	(ટ્રાન્ઝિશન)
ઇલેક્ટ્રૉન સંરચના	Electronic configuration	(ઇલેક્ટ્રૉનિક કન્ફિગ્યુરેશન)
વાયુ	Gas	(ગૅસ)
પ્રવાહી	Liquid	(લિક્વિડ)
ઘન	Solid	(સોલિડ)
તાપમાન	Temperature	(ટેમ્પરેચર)
સ્રોત	Source	(સોર્સ)
આંતરક્રિયા	Interaction	(ઇન્ટરેક્શન)
તારાવિશ્વો	Galaxies	(ગૅલેક્સિઝ)
ઉપગ્રહ	Satellite	(સેટેલાઇટ)
ગુરુત્વાકર્ષણ બળ	Gravitational force	(ગ્રેવિટેશનલ ફૉર્સ)
વિદ્યુતચુંબકીય બળ	Electromagnetic force	(ઇલેક્ટ્રૉમૅગ્નેટિક ફૉર્સ)
લઘુઅંતરી	Short range	(શૉર્ટ રેન્જ)
ગુરુઅંતરી	Long range	(લૉન્ગ રેન્જ)
સંરક્ષણ	Conservation	(કૉન્ઝર્વેશન)
સમાંગ	Homogeneous	(હોમોજિનિયસ)
સમદિગ્ધર્મી	Isotropic	(આઇસોટ્રોપિક)
રેખીય વેગમાન	Linear momentum	(લિનિયર મોમેન્ટમ)
કોણીય વેગમાન	Angular momentum	(ઍન્ગ્યુલર મોમેન્ટ)
ઊર્જા	Energy	(ઍનર્જી)

પ્રકરણ 2 માપન તથા એકમપદ્ધતિ

ભૌતિકરાશિ	Physical quantity	(ફિઝિકલ ક્વૉન્ટિટી)
એકમ	Unit	(યુનિટ)
એકમપદ્ધતિ	System of Units	(સિસ્ટમ ઑફ યુનિટ્સ)
પ્રતિકૃતિ	Replica	(રેપ્લિકા)
મૂળભૂત	Fundamental	(ફન્ડામેન્ટલ)
સાધિત	Derived	(ડિરાઇવ્ડ)
વિદ્યુતપ્રવાહ	Electric current	(ઇલેક્ટ્રિક કરન્ટ)
અધિસૂક્ષ્મ	Hyperfine	(હાઇપરફાઇન)
ગલનબિંદુ	Melting point	(મેલ્ટિંગ પૉઇન્ટ)
દબાણ	Pressure	(પ્રેશર)
દળ	Mass	(માસ)
લંબાઈ	Length	(લેન્થ)
સમય	Time	(ટાઇમ)
સમતલ કોણ	Plane angle	(પ્લેન ઍન્ગલ)
ઘન કોણ	Solid angle	(સોલિડ ઍન્ગલ)
પૂરક	Supplementary	(સપ્લિમેન્ટરી)
દૃષ્ટિસ્થાનભેદ	Parallax	(પેરેલેક્સ)
ગ્રહ	Planet	(પ્લેનેટ)
કોણીય વ્યાસ	Angular diameter	(ઍન્ગ્યુલર ડાયામીટર)
આણ્વિક સ્તર	Molecular layer	(મોલેક્યુલર લેયર)
માપન	Measurement	(મેઝરમેન્ટ)
ચોકસાઈ	Accuracy	(એક્યુરસી)
ત્રુટિ	Error	(એરર)
વ્યવસ્થિત	Systematic	(સિસ્ટેમેટિક)
અવ્યવસ્થિત	Random	(રેન્ડમ)
અંદાજ	Estimation	(એસ્ટિમેશન)
નિરપેક્ષ	Absolute	(એબ્સોલ્યુટ)
સાપેક્ષ	Relative	(રિલેટિવ)
પ્રતિશત	Percentage	(પરસન્ટેજ)
સાદું લોલક	Simple pendulum	(સિમ્પલ પેન્ડ્યુલમ)
આવર્તકાળ	Periodic time (or Period)	(પિરિયોડિક ટાઇમ (ઑર પિરિયડ))
ઘાત	Index	(ઇન્ડેક્સ)
શૂન્યેતર	Non-zero	(નોન-ઝીરો)
સાર્થક	Significant	(સિગ્નિફિકન્ટ)
દશાંશચિહ્ન	Decimal point	(ડેસિમલ પૉઇન્ટ)
પરિમાણો	Dimensions	(ડાઇમેન્શન્સ)
પારિમાણિક વિશ્લેષણ	Dimensional analysis	(ડાઇમેન્શનલ એનાલિસિસ)

પ્રકરણ 3 સુરેખ પથ પર ગતિ
પ્રકરણ 4 સમતલમાં ગતિ

પરિમાણ	Dimension	(ડાઈમેન્શન)
ગતિ	Motion	(મોશન)
રેખીય ગતિ	Linear motion	(લિનિયર મોશન)
ચાકગતિ	Rotational motion	(રોટેશનલ મોશન)
કંપનગતિ	Vibrational motion	(વાઇબ્રેશનલ મોશન)
દોલનગતિ	Oscillatory motion	(ઓસ્સિલેટરી મોશન)
સ્થાનાંતર	Displacement	(ડિસ્પ્લેસમેન્ટ)
વેગ	Velocity	(વેલોસિટી)
પ્રવેગ	Acceleration	(એક્સલરેશન)
ભૌતિકરાશિ	Physical quantity	(ફિઝિકલ ક્વૉન્ટિટી)
અદિશ રાશિઓ	Scalar quantities	(સ્કેલર ક્વૉન્ટિટીઝ)
સદિશ રાશિઓ	Vector quantities	(વેક્ટર ક્વૉન્ટિટીઝ)
નિર્દેશ ફ્રેમ	Reference frame	(રેફરન્સ ફ્રેમ)
જડત્વીય નિર્દેશફ્રેમ	Inertial reference frame	(ઇનર્શિયલ રેફરન્સ ફ્રેમ)
અજડત્વીય નિર્દેશફ્રેમ	Non-inertial reference frame	(નોન ઇનર્શિયલ રેફરન્સ ફ્રેમ)
અવલોકનકાર	Observer	(ઑબ્ઝર્વર)
કણ	Particle	(પાર્ટિકલ)
સ્થાન	Position	(પોઝિશન)
પથલંબાઈ	Pathlength	(પાથલેન્થ)
યામો	Co-ordinates	(કો-ઑર્ડિનેટ્સ)
દળ	Mass	(માસ)
ઘનતા	Density	(ડેન્સિટી)
કદ	Volume	(વૉલ્યુમ)
તાપમાન	Temperature	(ટેમ્પરેચર)
ક્ષેત્રફળ	Area	(એરિયા)
કાર્ય	Work	(વર્ક)
વેગમાન	Mometum	(મોમેન્ટમ)
પરિણામી	Resultant	(રઝિલ્ટન્ટ)
ગુણધર્મો	Properties	(પ્રોપર્ટિઝ)
એકમ સદિશ	Unit vector	(યુનિટ વેક્ટર)
શૂન્ય સદિશ	Null vector	(નલ વેક્ટર)
સ્થાનસદિશ	Position vector	(પોઝિશન વેક્ટર)
મૂલ્ય	Magnitude	(મેગ્નિટ્યૂડ)
દિશા	Direction	(ડાઈરેક્શન)
ઘટકો	Components	(કૉમ્પોનેન્ટ્સ)
વિભાજન	Resolution	(રિઝોલ્યુશન)
સરેરાશ	Average	(એવરેજ)
તત્કાલીન	Instantaneous	(ઇન્સ્ટેન્ટેનિયસ)
સમતલ	Plane	(પ્લેન)
ગતિપથ	Path of motion	(પાથ ઑફ મોશન)
સ્પર્શક	Tangent	(ટેન્જન્ટ)
વિધેય	Function	(ફંક્શન)
નિયમિત વર્તુળાકાર ગતિ	Uniform circular motion	(યુનિફોર્મ સરક્યુલર મોશન)
કેન્દ્રગામી	Centripetal	(સેન્ટ્રિપીટલ)
ત્રિજ્યાવર્તી	Radial	(રેડિયલ)
સાપેક્ષ	Relative	(રીલેટિવ)
પ્રક્ષિપ્ત ગતિ	Projectile motion	(પ્રોજેક્ટાઇલ મોશન)
મહત્તમ	Maximum	(મેક્સિમમ)
અવધિ	Rance	(રેન્જ)
ઉડ્ડયન	Flight	(ફ્લાઈટ)

પ્રકરણ 5 ગતિના નિયમો

પ્રાચલો	Parameters	(પેરામીટર્સ)
બળ	Force	(ફોર્સ)
સંપર્કબળ	Contact force	(કોન્ટેક્ટ ફોર્સ)
લોહચુંબક	Magnet	(મૅગ્નેટ)
ક્ષેત્ર	Field	(ફિલ્ડ)
ઘર્ષણબળ	Frictional force	(ફ્રિક્શનલ ફોર્સ)
બાહ્યબળ	External force	(એક્સ્ટર્નલ ફોર્સ)
ગતિના નિયમો	Laws of motion	(લૉઝ ઑફ મોશન)
અસંતુલિત બળ	Unbalanced force	(અનબૅલેન્સ્ડ ફોર્સ)
સ્થિર	Stationary	(સ્ટેશનરી)
વેગ	Velocity	(વેલોસિટી)
અચળવેગી ગતિ	Uniform motion	(યુનિફૉર્મ મોશન)
જડત્વ	Inertia	(ઇનર્શિયા)
સંતુલન	Equilibrium	(ઇક્વિલિબ્રિયમ)
પ્રવેગી ગતિ	Accelerated motion	(એક્સલરેટેડ મોશન)

વેગમાન	Momentum	(મોમેન્ટમ)
પરિણામી બળ	Resultant force	(રીઝલ્ટન્ટ ફોર્સ)
સમક્ષિતિજ	Horizontal	(હોરિઝોન્ટલ)
બળનો આઘાત	Impulse of a force	(ઇમ્પલ્સ ઑફ અ ફોર્સ)
આંતરક્રિયા	Interaction	(ઇન્ટરેક્શન)
આઘાત અને પ્રત્યાઘાત	Action and reaction	(ઍક્શન ઍન્ડ રિએક્શન)
આંતરિક બળ	Internal force	(ઇન્ટર્નલ ફોર્સ)
સંરક્ષણનો નિયમ	Law of conservation	(લૉ ઑફ કોન્ઝરવેશન)
અલગ કરેલ તંત્ર	Isolated system	(આઇસોલેટેડ સિસ્ટમ)
ઊર્જા વર્ણપટ	Energy spectrum	(ઍનર્જી સ્પેક્ટ્રમ)
ઘટક	Component	(કોમ્પોનન્ટ)
એકબિંદુગામી બળો	Concurrent forces	(કોનકરન્ટ ફોર્સિસ)

તણાવ	Tension	(ટેન્શન)
લંબબળ	Normal force	(નોર્મલ ફોર્સ)
અપેક્ષિત ગતિ	Impending motion	(ઇમ્પેન્ડિંગ મોશન)
ઘર્ષણાંક	Co-efficient of friction	(કો-એફિસિયન્ટ ઑફ ફ્રિક્શન)
સ્થિત	Static	(સ્ટેટિક)
ગતિક	Kinetic	(કાઇનેટિક)
મહત્તમ સલામત ઝડપ	Maximum safe Speed	(મેક્સિમમ સેફ સ્પિડ)
કેન્દ્રગામી બળ	Centripetal force	(સેન્ટ્રિપીટલ ફોર્સ)
કેન્દ્રત્યાગી બળ	Centrifugal force	(સેન્ટ્રિફ્યુગલ ફોર્સ)
આભાસી બળ	Pseudo force	(સુડો ફોર્સ)
ચલ	Variable	(વેરિયેબલ)
દહન	Combustion	(કમ્બશન)

પ્રકરણ 6 કાર્ય, ઊર્જા અને પાવર

કાર્ય	Work	(વર્ક)
ઊર્જા	Energy	(ઍનર્જી)
કાર્યત્વરા (પાવર)	Power	(પાવર)
સંખ્યાત્મક	Quantitative	(ક્વૉન્ટિટેટિવ)
સ્થાનાંતર	Displacement	(ડિસ્પ્લેસમેન્ટ)
સમક્ષિતિજ	Horizontal	(હોરિઝોન્ટલ)
ઘટક	Component	(કોમ્પોનન્ટ)
કેન્દ્રગામી બળ	Centripetal force	(સેન્ટ્રિપીટલ ફોર્સ)
પરિણામી બળ	Resultant force	(રિઝલ્ટન્ટ ફોર્સ)
ઘર્ષણબળ	Frictional force	(ફ્રિક્શનલ ફોર્સ)
ગતિનું સમીકરણ	Equation of motion	(ઇક્વેશન ઑફ મોશન)
ઘર્ષણાંક	Co-efficient of friction	(કો-ઍફિસિયન્ટ ઑફ ફ્રિક્શન)
પ્રક્ષેપ	Projection	(પ્રોજેક્શન)
સમક્રમી	Commutative	(કમ્યુટેટિવ)
વિભાજનનો ગુણધર્મ	Distributive property	(ડિસ્ટ્રિબ્યુટિવ પ્રોપર્ટી)
વર્ગમૂળ	Square root	(સ્ક્વેર રૂટ)
ચલ બળ	Variable force	(વેરિયેબલ ફોર્સ)
એકમ સદિશો	Unit vectors	(યુનિટ વેક્ટર્સ)
વક્રમાર્ગ	Curved path	(કર્વ્ડ પાથ)
ખંડ	Element	(એલીમેન્ટ)
ગતિ-ઊર્જા	Kinetic energy	(કાઇનેટિક ઍનર્જી)
ક્ષમતા	Capacity	(કેપેસિટી)
સ્થિતિ-ઊર્જા	Potential energy	(પોટૅન્શિયલ ઍનર્જી)

સંરચના	Configuration	(કન્ફિગ્યુરેશન)
સંરક્ષી બળ	Conservative force	(કોન્ઝર્વેટિવ ફોર્સ)
સંદર્ભસપાટી	Reference level	(રેફરન્સ લેવલ)
યાદચ્છિક	Arbitrary	(આર્બિટ્રરી)
યાંત્રિક-ઊર્જા	Mechanical energy	(મિકેનિકલ ઍનર્જી)
રેખાખંડ	Line element	(લાઇન એલીમેન્ટ)
સ્થિતિસ્થાપકતા	Elasticity	(ઇલાસ્ટિસિટી)
બળ-અચળાંક	Force constant	(ફોર્સ કોન્સ્ટન્ટ)
વિકલિત	Derivative	(ડેરિવેટિવ)
વિદ્યુત-ઊર્જા	Electric energy	(ઇલેક્ટ્રિક ઍનર્જી)
સંઘાત	Collision	(કોલિઝન)
સ્થિતિસ્થાપક સંઘાત	Elastic collision	(ઇલાસ્ટિક કોલિઝન)
અસ્થિતિસ્થાપક સંઘાત	Inelastic collision	(ઇનઇલાસ્ટિક કોલિઝન)
આંતરિક ઊર્જા	Internal energy	(ઇન્ટર્નલ ઍનર્જી)
રાસાયણિક ઊર્જા	Chemical energy	(કેમિકલ ઍનર્જી)
ઉષ્મા-ઊર્જા	Heat (or thermal) energy	(હીટ (ઓર થર્મલ) ઍનર્જી)
દળ	Mass	(માસ)
સમતુલ્યતા	Equivalence	(ઇક્વિવેલન્સ)
બંધન-ઊર્જા	Binding energy	(બાઇન્ડિંગ ઍનર્જી)
સંરક્ષણ	Conservation	(કોન્ઝર્વેશન)

પ્રકરણ 7 ઉષ્મા-પ્રસરણ

ઉષ્માવહન	Thermal conduction	(થર્મલ કન્ડક્શન)
સંતુલનસ્થાન	Equilibrium position	(ઈક્વિલિબ્રિયમ પોઝિશન)
લંબઘન ચોસલું	Slab	(સ્લેબ)
તાપમાન પ્રચલન	Temperature gradient	(ટેમ્પરેચર ગ્રેડિયન્ટ)
ઉષ્માપ્રવાહ	Heat current	(હીટ કરન્ટ)
ઉષ્મવાહકતા	Thermal conductivity	(થર્મલ કન્ડ્ક્ટિવિટી)
ઉષ્મીય રીતે અલગ	Thermally isolated	(થર્મલી આઇસોલેટેડ)
સ્થાયી ઉષ્મા-અવસ્થા	Steady thermal state	(સ્ટેડી થર્મલ સ્ટેટ)
ઉષ્મીય અવરોધ	Thermal resistance	(થર્મલ રેઝિસ્ટન્સ)
ઉષ્મીય વાહક	Thermal conductor	(થર્મલ કન્ડકટર)
ગોળાકાર કવચ	Sqherical shell	(સ્ફેરિકલ શેલ)
ઉષ્માનયન	Convection	(કન્વેક્શન)
ઉષ્મીય વિકરણ	Thermal radiation	(થર્મલ રેડિયેશન)
શોષકતા	Absorptivity	(એબ્સોર્પ્ટિવિટી)
કુલ ઉત્સર્જન પાવર	Total emissive power	(ટોટલ એમિસિવ પાવર)
સ્પેક્ટ્રલ ઉત્સર્જન પાવર	Total emissive power	(સ્પેક્ટ્રલ એમિસિવ પાવર)
તરંગલંબાઈ	Wavelength	(વેવલેન્થ)
સપાટી	Surface	(સરફેસ)
શોષક	Absorber	(એબ્સોર્બર)
ઉત્સર્જક	Emitter	(એમિટર)
પરાવર્તક	Reflector	(રિફ્લેક્ટર)
સ્થળાંતરનો નિયમ	Displacement law	(ડિસ્પોસમેન્ટ લૉ)
ઉત્સર્જકતા	Emissivity	(એમિસિવિટી)
વિખેરણ	Dissipation	(ડિસિપેશન)

પ્રકરણ 8 વાયુનો ગતિવાદ

ઉષ્માવહન	Thermal	(થર્મલ કન્ડક્શન)
સ્થૂળ રાશિ	Macroscopic quantitay	(મેક્રોસ્કોપિક ક્વોન્ટિટી)
સ્થૂળ વર્ણન	Macroscopic description	(મેક્રોસ્કોપિક ડિસ્ક્રિપ્શન)
સૂક્ષ્મ રાશિ	Microscopic quantity	(માઇક્રોસ્કોપિક ક્વોન્ટિટી)
સૂક્ષ્મ વર્ણન	Microscopic description	(માઇક્રોસ્કોપિક ડિસ્ક્રિપ્શન)
આદર્શ વાયુ	Ideal gas	(આઇડિયલ ગૅસ)
થર્મોડાઈનેમિક ચલ	Thermodynamic variable	(થરમૉડાઈનેમિક વેરિયેબલ)
વાસ્તવિક વાયુ	Real gas	(રિયલ ગૅસ)
સાર્વત્રિક વાયુ-નિયતાંક	Universal gas contant	(યુનિવર્સલ ગૅસ કોન્સટન્ટ)
એવોગેડ્રો અધિતક	Avogadro's hypothesis	(એવોગેડ્રો હાઇપોથેસિસ)
પરમાણુભાર	Atomic mass	(એટોમિક માસ)
અણુભાર	Molecular mass	(મોલિક્યુલર માસ)
એક-પરમાણુક	Monoatomic	(મોનોએટમિત)
દ્વિ-પરમાણુક	Diatomic	(ડાય એટમિક)
દોલનીય ગતિ	Vibrational motion	(વાઇબ્રેશનલ મોશન)
મુક્તતાન અંશો	Degrees of freedom	(ડિગ્રીઝ ઑફ ફ્રિડમ)
સંઘાત ગોળો	Sphere of collision	(સ્ફિયર ઓફ કોલિઝન)

(સિમેસ્ટર II)

પ્રકરણ 1 કણોના તંત્રનું ગતિવિજ્ઞાન

કણ	Particle	(પાર્ટિકલ)
તંત્ર	System	(સિસ્ટમ)
રેખીય વેગમાન	Linear momentum	(લિનિયર મોમેન્ટમ)
મૂળભૂત	Fundamental	(ફન્ડામેન્ટલ)
સાર્વત્રિક	Universal	(યુનિવર્સલ)
દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર	Centre of mass	(સેન્ટર ઓફ માસ)
યામપદ્ધતિ	Co-ordinate system	(કો-ઑર્ડિનેટ સિસ્ટમ)
સ્થાનસદિશ	Position vector	(પોઝિશન વેક્ટર)
બાહ્યબળ	External force	(એક્સટર્નલ ફોર્સ)
આંતરિક બળ	Internal force	(ઇન્ટર્નલ ફોર્સ)
પરિણામી	Resultant	(રિઝલ્ટન્ટ)
અવલંબન	Dependence	(ડીપેન્ડન્સ)
શિરોબિંદુઓ	Vertices	(વર્ટાઇસીસ)
સમબાજુ ત્રિકોણ	Equilaternal triangle	(ઇક્વિલેટરલ ટ્રાઇન્ગલ)
રેખીય પ્રવેગ	Linear acceleration	(લિનિયર એક્સલરેશન)
સંરક્ષણનો નિયમ	Law of conservation	(લો ઓફ કોન્ઝર્વેશન)
પ્રારંભિક	Initial	(ઇનિશયલ)
કાર્ય-ઊર્જા પ્રમેય	Work energy theorem	(વર્ક એનર્જી થીઅરામ
જટિલ અણુઓ	Complex molecules	(કોમ્પલેક્સ મોલેક્યુલ્સ
ટુકડાઓ	Fragments	(ફ્રેગ્મેન્ટ્સ)
સમિતિ	Symmetry	(સીમેટ્રી)
સાપેક્ષ સ્થાન	Relative position	(રીલેટિવ પોઝિશન)
નિયમિત ઘનતા	Uniform density	(યુનિફોર્મ ડેન્સિટી)
સમાન આડછેદ	Uniform cross section	(યુનિફોર્મ ક્રોસ સેક્શન)
સૈદ્ધાંતિક રીતે	Theoretically	(થીઅરેટિકલી)
સતત વિતરણ	Continuous distribution	(કન્ટિન્યુઅસ ડિસ્ટ્રિબ્યુશન)
દળ ખંડ	Mass element	(માસ એલિમેન્ટ)

પ્રકરણ 2 ચાકગતિ

દૃઢ વસ્તુ	Particle	(રિજિડ બોડી)
ચાકગતિ	System	(રોટેશનલ મોશન)
ભ્રમણાક્ષ	Linear momentum	(એક્સિઝ ઑફ રોટેશન)
ભ્રમણ	Rotation	(રોટેશન)
કોણીય	Angular	(ઍંગ્યુલર
સ્થાનાંતર	displacement	ડિસ્પ્લેસમેન્ટ)
સંદર્ભ રેખા	Reference line	(રેફરન્સ લાઇન)
કોણીય ઝડપ	Angular speed	(ઍંગ્યુલર સ્પીડ)
ત્રિજ્યા	Radius	(રેડિયસ)
ચાપ	Arc	(આર્ક)
ખૂણો (કોણ)	Angle	(ઍંગલ)
સ્પર્શક	Tangent	(ટેન્જન્ટ)
જમણા હાથના	Right hand	(રાઇટ હેન્ડ
સ્ક્રૂનો નિયમ	Screw rule	(સ્ક્રૂ રૂલ)
ત્રિજ્યાવર્તી	Radial	(રેડિયલ)
સ્પર્શીય	Tangential	(ટેન્જન્શિયલ)
લાક્ષણિકતાઓ	Characteristics	(કેરેક્ટરીસ્ટિક્સ)
કોણીય ચલો	Angular variables	(ઍંગ્યુલર વેરિયેબલ્સ)
રેખીય ચલો	Linear variables	(લિનિયર વેરિયેબલ્સ
કાર્યરેખા	Line of action	(લાઇન ઑફ એક્શન
બળયુગ્મ	Couple	(કપલ)
બળની ચાક-માત્રા	Moment of force	(મોમેન્ટ ઑફ ફોર્સ)
રેખીય વેગમાન-ચાકમાત્રા	Moment of linear moment	(મોમેન્ટ ઑફ ફોર્સ)
જડત્વની ચાકમાત્ર	Moment of inertia	(મોમેન્ટ ઑફ લનિયરમોમેન્ટમ)
ક્ષેત્રિય વેગ	Arial velocity	(એરિયલ વેલોસિટી)
ચક્રાવર્તનની ત્રિજ્યા	Radius of gyration	(રેડિયસ ઑફ ગાયરેશન)
પાતળો સળિયો	Thin rod	(થિન રોડ)
વીંટી	Ring	(રિંગ)
વર્તુળાકાર તકતી	Circular disc	(સરક્યુલર ડિસ્ક)
પોલો નળાકાર	Hollow cylinder	(હોલો સિલિન્ડર)
નક્કર નળાકાર	Solid cylinder	(સોલિડ સિલિન્ડર)
પોલો ગોળો	Spherical shell	(સ્ફેરિકલ શેલ)
નક્કર ગોળો	Solid sphere	(સોલિડ સ્ફીયર)
શંકુ	Cone	(કૉન)

પ્રકરણ 3 ગુરુત્વાકર્ષણ

પૃથ્વી-કેન્દ્રિય વાદ	Geo-centric theory	(જીઓ સેન્ટ્રિક થીયરી)
સૂર્ય-કેન્દ્રિય વાદ	Helio-centric theory	(હિલિયો-સેન્ટ્રિક થીયરી)
લંબવૃતીય કક્ષા	Elliptical orbit	(ઇલિપ્ટિકલ ઓરબિટ)
લંબવૃત્ત	Ellipse	(ઇલિપ્સ)
અર્ધ-દીર્ઘ અક્ષ	Semi-major axis	(સેમિ-મેજર એક્સિસ)
ક્ષેત્રીય વેગ	Areal velocity	(એરિયલ વેલોસિટી)
આવર્તકાળ	Time-period	(ટાઈમ-પિરિયડ)
પરસ્પર ક્રિયાગત	Mutually interacting	(મ્યુચ્યુઅલી ઇન્ટરએક્ટિંગ)
ગુરુત્વાકર્ષણ	Gravitation	(ગ્રેવિટેશનલ)
ગુરુત્વાકર્ષણનો સાર્વત્રિક નિયતાંક	Universal constant of gravitation	(યુનિવર્સલ કોન્સ્ટન્ટ ઑફ ગ્રેવિટેશન)
ગુરુત્વ પ્રવેગ	Gravitational acceleration or (acceleration due to gravity)	(ગ્રેવિટેશન એક્સેલરેશન) અથવા (એક્સેલરેશન ડ્યુ ટુ ગ્રેવિટી)
ગુરુત્વ બળ	Gravitational force	(ગ્રેવિટેશનલ ફોર્સ)
ગોળાકાર કવચ વળ	Spherical shell Twist	સ્ફેરિકલ શેલ ટ્વિસ્ટ)
ગુરુત્વ સ્થિતિ-માન	Gravitational potential	(ગ્રેવિટેશનલ પોટેન્શયલ)
ગુરુત્વ સ્થિતિ-ઊર્જા	Garavotational potential energy	(ગ્રેવિટેશનલ પોટે-ન્શયલ એનર્જી)
નિષ્ક્રમણ ઊર્જા	Escape energy	(એસ્કેમ એનર્જી)
નિષ્ક્રમણ ઝડપ	Escape speed	(એસ્કેમ સ્પીડ)
બંધન ઊર્જા	Binding energy	(બાઇન્ડિંગ એનર્જી)
ગુરુત્વતીવ્રતા	Gravitational intensity	(ગ્રેવિટેશનલ ઇન્ટે-સિટી)
ઉપગ્રહ	Satellite	(સેટેલાઇટ)
ભૂસ્થિર ઉપગ્રહ	Geo-stationary satellite	(જીઓ સ્ટેશનરી સેટેલાઇટ)
વિષુવવૃત્તિય કક્ષા	Equatorial orbit	(ઇક્વેટોરિયલ ઓરબિટ)
ધ્રુવીય કક્ષા	Polar orbit	(પોલર ઓરબિટ)
કક્ષીય ગતિ	Orbital motion	(ઓરબિટલમોશન)
કક્ષીય ઝડપ	Orbital speed	(ઓરબિટલ ઝડપ)

પ્રકરણ 4 ઘન પદાર્થના ગુણધર્મો

ઘન પદાર્થ	Solid	(સોલિડ)
સ્થિતિસ્થાપકતા	Elasticity	(ઇલોસ્ટિસિટી)
આંતર પરમાણુ બળ	Inter atomic force	(ઇન્ટર એટમિક ફોર્સ)
આંતર અણુબળ	Inter molecular force	(ઇન્ટર મોલેક્યુલર ફોર્સ)
પ્રવાહી	Liquid	(લિક્વિડ)
વાયુ	Gas	(ગૅસ)
પરમાણુ	Atom	(એટમ)
અણુ	Molecule	(મોલેક્યુલ)
સ્ફટીક	Crystal	(ક્રિસ્ટલ)
સ્ફટીકમય પદાર્થ	Crystallive substance	(ક્રિસ્ટલાઇન સબસ્ટન્સ)
અસ્ફટીકમય પદાર્થ	Non-crystalline substance	(નોન ક્રિસ્ટલાઇન સબસ્ટન્સ)
વિકૃતિ	Strain	(સ્ટ્રેન)
પ્રતિબળ	Stress	(સ્ટ્રેસ)
દબાણ	Pressure	(પ્રેસર)
પ્રતાન(સંગત વિકૃતિ)	Longitudinal strain	(લોંઝિટ્યુડિનલ સ્ટ્રેન)
કદ વિકૃતિ	Volume strain	(વોલ્યુમ સ્ટ્રેન)
સ્પર્શીય પ્રતિબળ	Shearing stress	(શિયરિંગ સ્ટ્રેસ)
દાબીય પ્રતિબળ	Compressive stress	(કોમ્પ્રેસિવ સ્ટ્રેસ)
કદ પ્રતિબળ	Volume strain	(વોલ્યુમ સ્ટ્રેસ)
આકાર વિકૃતિ	Shearing strain	(શિયરિંગ સ્ટ્રેન)
તન્ય	Ductile	(ડકટાઇલ)
કદ સ્થિતિસ્થાપકતા અંક	Bulk modulus	(બલ્ક મોડ્યુલસ)
આકાર સ્થિતિ-સ્થાપકતા અંક (દઢતાઅંક)	Shear modulus (Modulus rigidity)	(શિયર મોડ્યુલસ) (મોડ્યુલસ ઑફ રિઝિડિટી)
પાર્શ્વિક	Lateral	(લેટરલ)
ઊર્જાઘનતા	Energy density	(એનર્જી ડેન્સિટી)

પ્રકરણ 5 તરલનું મિકેનિક્સ

તરલ	Fluid	(ફ્લુઇડ)
ઘનતા	Density	(ડેન્સિટી)
દબનીય	Compressible	(કોમ્પ્રિસિબલ)
અદબનીય	Incompressible	(ઇનકોમ્પ્રિસિબલ)
તરલસ્તંભ	Fluid column	(ફ્લુઇડ કૉલમ)
કદખંડ	Volume element	(વોલ્યુમ એલિમેન્ટ)
ઉત્પ્લાવક્તા	Buoyancy	(બોયન્ટ ફોર્સ)
વિસ્થાપિત	Byoyant force	(ડિસ્પલેસ્ડ)
સમઘન	Cube	(ક્યુબ)
શ્યાનતાબળ	Viscous force	(વિસ્કસ ફોર્સ)
શ્યાનતા ગુણાંક	Co-efficient of viscocity	(કો-એફિશિયન્ટ ઑફ વિસ્કોસિટી)
વેગ પ્રચલન	Velocity gradient	(વેલોસિટી ગ્રેડિયન્ટ)
ટર્મિનલ વેગ	Terminal velocity	(ટર્મિનલ વેલોસિટી)
વમળયુક્ત વહન	Turbulent flow	(ટરબ્યુલન્ટ ફ્લો)
સ્થિર વહન	Steady flow	(સ્ટેડી ફ્લો)
પૃષ્ઠતાણ	Surface force	(સરફેશ ઇન્સન)
સંસક્તી બળ	Cohasive force	(કોહેસિલ ફોર્સ)
આસક્તી બળ	Adhasive force	(એડહેસિલ ફોર્સ)
અણુક્રિયા અવધી	Range of inter molecular force	(રેન્જ ઑફ ઇન્ટર મોલેક્યુલર ફોર્સ)
અણુક્રિયા ગોળો	Sphere of mole-cular action	(સ્ફિયર ઑફ મોલેક્યુલર એક્શન)
મુક્ત સપાટી	Free surface	(સરફેશ)
આંતર અણુ અંતર	Inter molecular distance	(ઇન્ટર મોલેક્યુલર ડિસ્ટન્સ)
પૃષ્ઠઊર્જા	Surface energy	(સરફેશ એનર્જી)
ક્રાંતીવેગ	Critical velocity	(ક્રિટિકલ વેલોસિટી)
અંર્તગોળ	Concave	(કોન્ટકવ)
બર્હિંગોળ	Conrex	(કોનવેક્ષ)
કેશાકર્ષણ	Capillarity	(કેપિલારિટી)
સંપર્કકોણ	Angle of contact	(એંગલ ઑફ કોન્ટેક્ટ)
વક્રતાત્રિજ્યા	Radius of curveture	(રેડિયસ ઑફ કર્વેચર)

પ્રકરણ 6 થરમૉડાઇનેમિક્સ

વિકિરણ	Radiation	(રેડિએશન)
પરિસર	Surrounding	(સરાઉન્ડિંગ)
વાતાવરણ	Environment	(એનવાયર્નમેન્ટ)
યાંત્રિક યામો	Mechanical co-ordinates	(મિકેનિકલ કો-ઑર્ડિનેટ્સ)
દૃઢવસ્તુ	Rigid body	(રિઝિડ બોડી)
વિનિમય	Transfer	(ટ્રાન્સફર)
બાષ્પીકરણ	Vaporization	(વેપરાઇઝેશન)
ઉષ્મીય સંકુચન	Termal contraction	(થર્મલ કોન્ટ્રેક્શન)
વિવર્ધન	Magnification	(મેગ્નિફિકેશન)
અનિયમિત	Anomalous	(આનોમાલસ)
ઠારણ	Freezing/ condensation	(ફ્રીઝિંગ કંન્ડેશેશન)
અલગ કરેલું	Isolated	(આઇસોલેટેડ)
રૂપાંતરણની ઉષ્મા	Heat of Trans-formation	(હીટ ઑફ ટ્રાન્સફોર્મેશન)
ગુપ્ત ઉષ્મા	Latent heat	(લેટેન્ટ હીટ)
તંત્ર	System	(સિસ્ટમ)
અવસ્થા	State	(સ્ટેટ)
ઉષ્મા	Heat	(હીટ)
ઉષ્મા-ઊર્જા	Heat energy	(હીટ એનર્જી)
કાર્ય	Work	(વર્ક)
ઉષ્મીય સંતુલન	Thermal equilibrium	(થર્મલ ઇક્વિલિબ્રિયમ)

તાપમાન	Temperature	(ટેમ્પરેચર)
ઉષ્મા-સંવેદી પદાર્થ	Thermo-sensitive object	(થર્મોસેન્સેટીવ ઓબ્જેક્ટ)
નિરપેક્ષ તાપમાન	Absolute Temperature	(એબ્સોલ્યુટ ટેમ્પરેચર)
ઉત્કલનબિંદુ	Boiling point	(બોઇલિંગ પૉઇન્ટ)
ઉષ્મીય પ્રસરણ	Thermal expansion	(થર્મલ એક્સ્પાન્શન)
રેખીય પ્રસરણ	Linear expansion	(લિનિયર એક્સ્પાન્શન)
પરિસીમા	Boundary	(બાઉન્ડ્રી)
સ્થૂળ રાશિ	Macroscopic quantity	(મેક્રોસ્કોપિક ક્વૉન્ટિટી)
સૂક્ષ્મ રાશિ	Microscpic quantity	(માઇક્રોસ્કોપિક ક્વૉન્ટિટી)
આંતરક્રિયા	Interaction	(ઇન્ટરેક્શન)
	Equation of state	
-	Scale	
-	Constituent particles	
-	Internal energy	
ઉષ્મીય આંતરક્રિયા	Thermal interaction	(થર્મલ ઇન્ટરેક્શન)
યાંત્રિક આંતરક્રિયા	Mechanical interaction	(મિકેનિકલ ઇન્ટરેક્શન)
અવસ્થા વિધેય	State function	(સ્ટેટ ફંક્શન)
ઉષ્માધારિતા	Heat capacity	(હીટ કૅપેસિટી)
વિશિષ્ટ ઉષ્મા	Specific heat	(સ્પેસિફિક હીટ)
અચળ કદે-દબાણે વિશિષ્ટ ઉષ્મા	Specific heat at constant volume/pressure	(સ્પેસિફિક હીટ એટ કોન્સ્ટન્ટ વોલ્યુમ-પ્રેશન)
થરમૉડાઇનેમિક પ્રક્રિયા	Thermodynamic process	(થરમૉડાઇનેમિક પ્રોસેસ)
સમદાબ પ્રક્રિયા	Isobaric process	(આઇસોબેરિક પ્રોસેસ)
સમકદ પ્રક્રિયા	Isochoric process	(આઇસોકોરિક પ્રોસેસ)
સમોષ્મી પ્રક્રિયા	Adiabatic process	(એડિયાબેટિક પ્રોસેસ)
સમતાપી પ્રક્રિયા	Isothermal process	(આઇસોથપ્રોસેસ)
ચક્રીય પ્રક્રિયા	Cyclic process	(સાઇક્લિક પ્રોસેસ)
પ્રતિવર્તી પ્રક્રિયા	Reversible process	(રિવર્સિબલ પ્રોસેસ)
અપ્રતિવર્તી પ્રક્રિયા	Irrversible process	(ઇર્રિવર્સિબલ પ્રોસેસ)
અસંતુલિત અવસ્થા	Inequilibrium state	(ઇનઇક્વિલિબ્રિ-યમ સ્ટેટ)
કાર્યકારી પદાર્થ	Working substance	(વર્કિંગ સબસ્ટન્સ)
ઠારણ-વ્યવસ્થા	Cooling system or sink	(કુલિંગ સિસ્ટમ ઓર સિંક)
ઉષ્માપ્રાપ્તિસ્થાન	Heat source	(હીટ સોર્સ)
કાર્યક્ષમતા	Efficiency	(એફિશિયન્સી)
પરફોર્મન્સ-ગુણાંક	C-oefficient of performance	(કો-એફિશિયન્ટ ઑફ પરફોર્મન્સ)
સમતાપી વિસ્તરણ	Isothermal expansion	(આઇસોથર્મલ એક્સ્પાન્શન)
સમોષ્મી વિસ્તરણ	Adiabatic expansion	(એડિયાબેટિક એક્સપાન્શન)
સમતાપી સંકોચન	Isthermal compression	(આઇસોથર્મલ કોમ્પ્રેશન)
સમોષ્મી સંકોચન	Adiabatic compression	(એડિયાબેટિક કોમ્પ્રેશન)

પ્રકરણ 7 દોલનો

દોલન	Oscillation	(ઓસ્સિલેશન)
આવર્તગતિ	Periodic motion	(પિરિયોડિક મોશન)
દોલકગતિ	Oscillatory motion	(ઓસ્સિલેટરી મોશન)
દોલક	Oscillator	(ઓસ્સિલેટર)
પ્રસંવાદિ	Harmonic	(હારમોનિક)
સરળ આવર્તગતિ (સ.આ.દો.)	Simple harmonic motion	(સિમ્પલ હાર્મોનિક મોશન)
સમતોલ સ્થિતિ	Equillibrium Position	(ઇક્વિલિબ્રિયમ પોઝિશન)
મધ્યમાન સ્થિતિ	Mean position	(મીન પોઝિશન)
સ્થાનાંતર	Displacement	(ડિસ્પ્લેસમેન્ટ)
કંપવિસ્તાર	Amplitude	(એમ્પ્લિટ્યૂડ)
આવર્તકાળ	Periodic time, time period, period	(પિરિયોડિક ટાઈમ ટાઈમ પિરિયડ પિરિયડ)
આવૃત્તિ	Frequency	(ફ્રિક્વન્સી)
કોણીય આવૃત્તિ	Angular frequency	(એંગ્યુલર ફ્રિક્વન્સી)
કળા	Phase	(ફેઝ)
કલા-અચળાંક	Phase constant	(ફેઝ કોન્સ્ટન્ટ)
પ્રારંભિક કળા	Initial phase epoch	(ઇનિશિયલ ફેઝ એપોક)
પુનઃસ્થાપક બળ	Restoring force	(રિસ્ટોરિંગ ફોર્સ)
-	Force constant	
સ્પ્રિંગ અચળાંક	Spring constant	(સ્પ્રિંગ કોન્સ્ટન્ટ)
વિકલ સમીકરણ	Differential equation	(ડિફરન્શિયલ ઈક્વેશન)
રેખિય સંયોજન	Linear combi-nation	(લિનિયર કોમ્બિનેશન)
ગતિપથ	Trejectory	(ટ્રેજેક્ટરી)
શિરોલંબ	Vertical	(વર્ટિકલ)
યાંત્રિક-ઊર્જા	Mechanical energy	(મિકેનિકલ એનર્જી)
ગતિ-ઊર્જા	Kinetic energy	(કાયનેટિક એનર્જી)
સ્થિતિ-ઊર્જા	Potential energy	(પોટેન્શિયલ એનર્જી)
પ્રક્ષેપ	Projection	(પ્રોજેક્શન)
સંદર્ભકણ	Reference particle	(રેફરન્સ પાર્ટિકલ)
સંદર્ભવર્તુળ	Reference circle	(રેફરન્સ સર્કલ)
સાદુ લોલક	Simple pendulum	(સિમ્પલ પેન્ડ્યુલમ)
અવમંદિત દોલનો	Damped oscillations	(ડેમ્પ્ડ ઓસ્સિલેશન્સ)
અવમંદન	Damping	(ડેમ્પિંગ)
અવરોધક બળ	Resistive force damping force	(રેસિસ્ટીવ ફોર્સ-ડેમ્પિંગ ફોર્સ)
અવરોધક ગુણાંક	Damping co-efficient damping constant	(ડેમ્પિંગ કો-એફિશિયન્ટ-ડેમ્પિંગ કોન્સ્ટન્ટ)
ચરઘાતાકીય	Exponentially	(એક્સ્પોનેન્શિયલી)
પ્રાકૃતિક દોલનો	Natural oscillations	(નેચરલ ઓસ્સિમેશન્સ)
પ્રણોદિત્ત દોલનો (બળ-પ્રેરિત દોલનો)	Forced oscillation	(ફોર્સ્ડ એસ્સિલેશન્સ)
અનુનાદ	Resonance	(રેઝોનન્સ)
તરલ માધ્યમ	Fluid medium	(ફ્લુઇડ મિડિયમ)
સ્વરકાંટો	Tuning fork	(ટ્યૂનિંગ ફોર્ક)
અનુનાદીય આવૃત્તિ	Resonant frequency	(રેઝોનન્ટ ફ્રિક્વન્સી)

પ્રકરણ 8 તરંગો

તરંગો	Wave	(વેવ)
સ્થિતિસ્થાપક માધ્યમ	Elastic medium	(ઇલાસ્ટિક મિડિયમ)
વિક્ષોભ	Disturbance	(ડિસ્ટર્બન્સ)
પ્રસરણ	Propagation	(પ્રોપેગેશન)
તરંગમાળા	Wave train	(વેવ ટ્રેન)
તરંગતીવ્રતા	Wave intensity	(વેવ ઇન્ટેન્સિટી)
યાંત્રિક તરંગો	Mechanical waves	(મિકેનિકલ વેવ્ઝ)
વિદ્યુત ચુંબકીય	Electromagnetic Waves	(ઇલેક્ટ્રોમેગ્નેટ વેવ)
દ્રવ્ય તરંગો	Matter waves	(મેટર વેવ)
લંબગત તરંગ	Transverse wave	(ટ્રાન્સવર્ઝ વેવ)
સંગત તરંગ	Longitudinal wave	(લોંગિટ્યૂડિનલ વેવ)
શૃંગ	Crest	(ક્રેસ્ટ)
ગર્ત	Trough	(ટ્રફ)
જડિત આધાર	Rigid support	(રિઝિડ સપોર્ટ)
તરંગ ઝડપ	Wave speed	(વેવ સ્પીડ)
રેખીય દળ ઘનતા	Linear mass denisity	(લિનિયર માસ ડેન્સિટી)
સંઘનન	Condensation	(કન્ડેન્સેશન)
વિઘનન	Rarefaction	(રેરફેક્શન)
પ્રગામી તરંગ	Progressive or propagating wave	(પ્રોગ્રેસિવ ઓર પ્રોપેગેટિંગ વેવ)
કળાઝડપ	Phase speed	(ફેઝ સ્પીડ)
સ્થિત-તરંગ	Stationary or standing wave	(સ્ટેશનરી ઓર સ્ટેન્ડિંગ વેવ)
સ્પંદબિંદુ	Node	(નોડ)
પ્રસ્પંદ બિંદુ	Antinode	(એન્ટિનોડ)
મૂળભૂત આવૃત્તિ	Fundamental frequency	(ફન્ડામેન્ટલ ફ્રિક્વન્સી)
બંધ નળી	Colsed pipe	(ક્લોઝ્ડ પાઇપ)
ખુલ્લી નળી	Open pipe	(ઓપન પાઇપ)
તરંગ સ્પંદ	Wave pulse	(વેવ પલ્સ)
સ્પંદ	Beat	(બીટ)
શ્રોતા	Listner	(લિસનર)
ઉદ્ગમ	Source	(સોર્સ)

LOGARITHMS

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mean Difference 1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374	4	8	12	17	21	25	29	33	37
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755	4	8	11	15	19	23	26	30	34
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106	3	7	10	14	17	21	24	28	31
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430	3	6	10	13	16	19	23	26	29
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732	3	6	9	12	15	18	21	24	27
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014	3	6	8	11	14	17	20	22	25
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279	3	5	8	11	13	16	18	21	24
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529	2	5	7	10	12	15	17	20	22
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765	2	5	7	9	12	14	16	19	21
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989	2	4	7	9	11	13	16	18	20
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	2	4	6	8	11	13	15	17	19
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	2	4	6	8	10	12	14	16	18
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	2	4	6	8	10	12	14	15	17
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	2	4	6	7	9	11	13	15	17
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	2	4	5	7	9	11	12	14	16
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	2	3	5	7	9	10	12	14	15
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	2	3	5	7	8	10	11	13	15
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	2	3	5	6	8	9	11	13	14
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	2	3	5	6	8	9	11	12	14
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	1	3	4	6	7	9	10	12	13
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	1	3	4	6	7	9	10	11	13
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	1	3	4	6	7	8	10	11	12
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	1	3	4	5	7	8	9	11	12
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	1	3	4	5	6	8	9	10	12
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	1	3	4	5	6	8	9	10	11
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	1	2	4	5	6	7	9	10	11
36	5563	5575	5587	5566	5611	5623	5635	5647	5658	5670	1	2	4	5	6	7	8	10	11
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	1	2	3	5	6	7	8	9	10
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	1	2	3	5	6	7	8	9	10
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	1	2	3	4	5	7	8	9	10
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	1	2	3	4	5	6	8	9	10
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	1	2	3	4	5	6	7	8	9
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	1	2	3	4	5	6	7	8	9
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	1	2	3	4	5	6	7	8	9
44	6435	6345	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	1	2	3	4	5	6	7	8	9
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618	1	2	3	4	5	6	7	8	9
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	1	2	3	4	5	6	7	7	8
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	1	2	3	4	5	5	6	7	8
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	1	2	3	4	4	5	6	7	8
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	1	2	3	4	4	5	6	7	8
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	1	2	3	3	4	5	6	7	8
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	1	2	3	3	4	5	6	7	8
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	1	2	2	3	4	5	6	7	7
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	1	2	2	3	4	5	6	6	7
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	1	2	2	3	4	5	6	6	7
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

LOGARITHMS

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mean Difference 1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	1	2	2	3	4	5	5	6	7
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	1	2	2	3	4	5	5	6	7
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	1	2	2	3	4	5	5	6	7
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	1	1	2	3	4	4	5	6	7
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	1	1	2	3	4	4	5	6	7
60	7782	7789	7769	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	1	1	2	3	4	4	5	6	6
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	1	1	2	3	4	4	5	6	6
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	1	1	2	3	3	4	5	6	6
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	1	1	2	3	3	4	5	5	6
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	1	1	2	3	3	4	5	5	6
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	1	1	2	3	3	4	5	5	6
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	1	1	2	3	3	4	5	5	6
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	1	1	2	3	3	4	5	5	6
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	1	1	2	3	3	4	4	5	6
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	1	1	2	2	3	4	4	5	6
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	1	1	2	2	3	4	4	5	6
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	1	1	2	2	3	4	4	5	5
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	1	1	2	2	3	4	4	5	5
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	1	1	2	2	3	4	4	5	5
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	1	1	2	2	3	4	4	5	5
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	1	1	2	2	3	3	4	5	5
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	1	1	2	2	3	3	4	5	5
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	1	1	2	2	3	3	4	4	5
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	1	1	2	2	3	3	4	4	5
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025	1	1	2	2	3	3	4	4	5
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	1	1	2	2	3	3	4	4	5
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	1	1	2	2	3	3	4	4	5
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	1	1	2	2	3	3	4	4	5
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	1	1	2	2	3	3	4	4	5
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	1	1	2	2	3	3	4	4	5
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340	1	1	2	2	3	3	4	4	5
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	1	1	2	2	3	3	4	4	5
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	0	1	1	2	2	3	3	4	4
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489	0	1	1	2	2	3	3	4	4
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	0	1	1	2	2	3	3	4	4
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	0	1	1	2	2	3	3	4	4
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	0	1	1	2	2	3	3	4	4
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680	0	1	1	2	2	3	3	4	4
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	0	1	1	2	2	3	3	4	4
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	0	1	1	2	2	3	3	4	4
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	0	1	1	2	2	3	3	4	4
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	0	1	1	2	2	3	3	4	4
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	0	1	1	2	2	3	3	4	4
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9843	9948	9952	0	1	1	2	2	3	3	4	4
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996	0	1	1	2	2	3	3	3	4
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

A n t i l o g a r i t h m S

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mean Difference 1	2	3	4	5	6	7	8	9
00	1000	1002	1005	1007	1009	1012	1014	1016	1019	1021	0	0	1	1	1	1	2	2	2
01	1023	1026	1028	1030	1033	1035	1038	1040	1042	1045	0	0	1	1	1	1	2	2	2
02	1047	1050	1052	1054	1057	1059	1062	1064	1067	1069	0	0	1	1	1	1	2	2	2
03	1072	1074	1076	1079	1081	1084	1086	1089	1091	1094	0	0	1	1	1	1	2	2	2
04	1096	1099	1102	1104	1107	1109	1112	1114	1117	1119	0	1	1	1	1	2	2	2	2
05	1122	1125	1127	1130	1132	1135	1138	1140	1143	1146	0	1	1	1	1	2	2	2	2
06	1148	1151	1153	1156	1159	1161	1164	1167	1169	1172	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.07	1175	1178	1180	1183	1186	1189	1191	1194	1197	1199	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.08	1202	1205	1208	1211	1213	1216	1219	1222	1225	1227	0	1	1	1	1	2	2	2	3
.09	1230	1233	1236	1239	1242	1245	1247	1250	1253	1256	0	1	1	1	1	2	2	2	3
.10	1259	1262	1265	1268	1271	1274	1276	1279	1282	1285	0	1	1	1	1	2	2	2	3
.11	1288	1291	1294	1297	1300	1303	1306	1309	1312	1315	0	1	1	1	2	2	2	2	3
.12	1318	1321	1324	1327	1330	1334	1337	1340	1343	1346	0	1	1	1	2	2	2	2	3
.13	1349	1352	1355	1358	1361	1365	1368	1371	1374	1377	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.14	1380	1384	1387	1390	1393	1396	1400	1403	1406	1409	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.15	1413	1416	1419	1422	1426	1429	1432	1435	1439	1442	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.16	1445	1449	1452	1455	1459	1462	1466	1469	1472	1476	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.17	1479	1483	1486	1489	1493	1496	1500	1503	1507	1510	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.18	1514	1517	1521	1524	1528	1531	1535	1538	1542	1545	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.19	1549	1552	1556	1560	1563	1567	1570	1574	1578	1581	0	1	1	1	2	2	3	3	3
.20	1585	1289	1592	1596	1600	1603	1607	1611	1614	1618	0	1	1	1	2	2	3	3	3
.21	1622	1626	1629	1633	1637	1641	1644	1648	1652	1656	0	1	1	2	2	2	3	3	3
.22	1660	1663	1667	1671	1675	1679	1683	1687	1690	1694	0	1	1	2	2	2	3	3	3
.23	1698	1702	1706	1710	1714	1718	1722	1726	1730	1734	0	1	1	2	2	2	3	3	4
.24	1738	1742	1746	1750	1754	1758	1762	1766	1770	1774	0	1	1	2	2	2	3	3	4
.25	1778	1782	1786	1791	1795	1799	1803	1807	1811	1816	0	1	1	2	2	2	3	3	4
.26	1820	1824	1828	1832	1837	1841	1845	1849	1854	1858	0	1	1	2	2	3	3	3	4
.27	1862	1866	1871	1875	1879	1884	1888	1892	1897	1901	0	1	1	2	2	3	3	3	4
.28	1905	1910	1914	1919	1923	1928	1932	1936	1941	1945	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.29	1950	1954	1959	1963	1968	1972	1977	1982	1986	1991	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.30	1995	2000	2004	2009	2014	2018	2023	2028	2032	2037	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.31	2042	2046	2051	2056	2061	2065	2070	2075	2080	2084	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.32	2089	2094	2099	2104	2109	2113	2118	2123	2128	2133	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.33	2138	2143	2148	2153	2158	2163	2168	2173	2178	2183	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.34	2188	2193	2198	2203	2208	2213	2218	2223	2228	2234	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.35	2239	2244	2249	2254	2259	2265	2270	2275	2280	2286	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.36	2291	2296	2301	2307	2312	2317	2323	2328	2333	2339	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.37	2344	2350	2355	2360	2366	2371	2377	2382	2388	2393	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.38	2399	2404	2410	2415	2421	2427	2432	2438	2443	2449	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.39	2455	2460	2466	2472	2477	2483	2489	2495	2500	2506	1	1	2	2	3	3	4	5	5
.40	2512	2518	2523	2529	2535	2541	2547	2553	2559	2564	1	1	2	2	3	4	4	5	5
.41	2570	2576	2582	2588	2594	2600	2606	2612	2618	2624	1	1	2	2	3	4	4	5	5
.42	2630	2636	2642	2649	2655	2661	2667	2673	2679	2685	1	1	2	2	3	4	4	5	6
.43	2692	2698	2704	2710	2716	2723	2729	2735	2742	2748	1	1	2	3	3	4	4	5	6
.44	2754	2761	2767	2773	2780	2786	2793	2799	2805	2812	1	1	2	3	3	4	4	5	6
.45	2818	2825	2831	2838	2844	2851	2858	2864	2871	2877	1	1	2	3	3	4	5	5	6
.46	2884	2891	2897	2904	2911	2917	2924	2931	2938	2944	1	1	2	3	3	4	5	5	6
.47	2951	2958	2965	2972	2979	2985	2992	2999	3006	3013	1	1	2	3	3	4	5	5	6
.48	3020	3027	3034	3041	3048	3055	3062	3069	3076	3083	1	1	2	3	4	4	5	6	6
.49	3090	3097	3105	3112	3119	3126	3133	3141	3148	3155	1	1	2	3	4	4	5	6	6
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

A n t i l o g a r i t h m S

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mean Difference 1	2	3	4	5	6	7	8	9
50	3162	3170	3177	3184	3192	3199	3206	3214	3221	3228	1	1	2	3	4	4	5	6	7
51	3236	3243	3251	3258	3266	3273	3281	3289	3296	3304	1	2	2	3	4	5	5	6	7
52	3311	3319	3327	3334	3342	3350	3357	3365	3373	3381	1	2	2	3	4	5	5	6	7
53	3388	3396	3404	3412	3420	3428	3436	3443	3451	3459	1	2	2	3	4	5	6	6	7
54	3467	3475	3483	3491	3499	3508	3516	3524	3532	3540	1	2	2	3	4	5	6	6	7
55	3548	3556	3565	3573	3581	3589	3597	3606	3614	3622	1	2	2	3	4	5	6	7	7
56	3631	3639	3648	3656	3664	3673	3681	3690	3698	3707	1	2	3	3	4	5	6	7	8
57	3715	3724	3733	3741	3750	3758	3767	3776	3784	3793	1	2	3	3	4	5	6	7	8
58	3802	3811	3819	3828	3837	3846	3855	3864	3873	3882	1	2	3	4	4	5	6	7	8
59	3890	3899	3908	3917	3926	3936	3945	3954	3963	3972	1	2	3	4	5	5	6	7	8
60	3981	3990	3999	4009	4018	4027	4036	4046	4055	4064	1	2	3	4	5	6	6	7	8
61	4074	4083	4093	4102	4111	4121	4130	4140	4150	4159	1	2	3	4	5	6	7	8	9
62	4169	4178	4188	4198	4207	4217	4227	4236	4246	4256	1	2	3	4	5	6	7	8	9
63	4266	4276	4285	4295	4305	4315	4325	4335	4345	4355	1	2	3	4	5	6	7	8	9
64	4365	4375	4385	4395	4406	4416	4426	4436	4446	4457	1	2	3	4	5	6	7	8	9
65	4467	4477	4487	4498	4508	4519	4529	4539	4550	4560	1	2	3	4	5	6	7	8	9
66	4571	4581	4592	4603	4613	4624	4634	4645	4656	4667	1	2	3	4	5	6	7	9	10
67	4677	4688	4699	4710	4721	4732	4742	4753	4764	4775	1	2	3	4	5	7	8	9	10
68	4786	4797	4808	4819	4831	4842	4853	4864	4875	4887	1	2	3	4	6	7	8	9	10
69	4898	4909	4920	4932	4943	4955	4966	4977	4989	5000	1	2	3	5	6	7	8	9	10
70	5012	5023	5035	5047	5058	5070	5082	5093	5105	5117	1	2	4	5	6	7	8	9	11
71	5129	5140	5152	5164	5176	5188	5200	5212	5224	5236	1	2	4	5	6	7	8	10	11
72	5248	5260	5272	5284	5297	5309	5321	5333	5346	5358	1	2	4	5	6	7	9	10	11
73	5370	5383	5395	5408	5420	5433	5445	5458	5470	5483	1	3	4	5	6	8	9	10	11
74	5495	5508	5521	5534	5546	5559	5572	5585	5598	5610	1	3	4	5	6	8	9	10	12
75	5623	5636	5649	5662	5675	5689	5702	5715	5728	5741	1	3	4	5	7	8	9	10	12
76	5754	5768	5781	5794	5808	5821	5834	5848	5861	5875	1	3	4	5	7	8	9	11	12
77	5888	5902	5916	5929	5943	5957	5970	5984	5998	6012	1	3	4	5	7	8	10	11	12
78	6026	6039	6053	6067	6081	6095	6109	6124	6138	6152	1	3	4	6	7	8	10	11	13
79	6166	6180	6194	6209	6223	6237	6252	6266	6281	6295	1	3	4	6	7	9	10	11	13
80	6310	6324	6339	6353	6368	6383	6397	6412	6427	6442	1	3	4	6	7	9	10	12	13
81	6457	6471	6486	6501	6516	6531	6546	6561	6577	6592	2	3	5	6	8	9	11	12	14
82	6607	6622	6637	6653	6668	6683	6699	6715	6730	6745	2	3	5	6	8	9	11	12	14
83	6761	6776	6792	6808	6823	6839	6855	6871	6887	6902	2	3	5	6	8	9	11	13	14
84	6918	6934	6950	6966	6982	6998	7015	7031	7047	7063	2	3	5	6	8	10	11	13	15
85	7079	7096	7112	7129	7145	7161	7178	7194	7211	7228	2	3	5	7	8	10	12	13	15
86	7244	7261	7278	7295	7311	7328	7345	7362	7379	7396	2	3	5	7	8	10	12	13	15
87	7413	7430	7447	7464	7482	7499	7516	7534	7551	7568	2	3	5	7	9	10	12	14	16
88	7586	7603	7621	7638	7656	7674	7691	7709	7727	7745	2	4	5	7	9	11	12	14	16
89	7762	7780	7798	7816	7834	7852	7870	7889	7907	7925	2	4	5	7	9	11	12	14	16
90	7943	7962	7980	7998	8017	8035	8054	8072	8091	8110	2	4	6	7	9	11	13	15	17
91	8128	8147	8166	8185	8204	8222	8241	8260	8279	8299	2	4	6	8	9	11	13	15	17
92	8318	8337	8356	8375	8395	8414	8433	8453	8472	8492	2	4	6	8	10	12	14	15	17
93	8511	8531	8551	8570	8590	8610	8630	8650	8670	8690	2	4	6	8	10	12	14	16	18
94	8710	8730	8750	8770	8790	8810	8831	8851	8872	8892	2	4	6	8	10	12	14	16	18
95	8913	8933	8954	8974	8995	9016	9036	9057	9078	9099	2	4	6	8	10	12	15	17	19
96	9120	9141	9162	9183	9204	9226	9247	9268	9290	9311	2	4	6	8	11	13	15	17	19
97	9333	9354	9376	9397	9419	9441	9462	9484	9506	9528	2	4	7	9	11	13	15	17	20
98	9550	9572	9594	9616	9638	9661	9683	9705	9727	9750	2	4	7	9	11	13	16	18	20
99	9772	9795	9817	9840	9863	9886	9908	9931	9954	9977	2	5	7	9	11	14	16	18	20
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

NATURAL SINES

Degree	0'	6'	12'	18'	24'	30'	36'	42'	48'	54'	Mean Deifferences				
	0.0°	0.1°	0.2°	0.3°	0.4°	0.5°	0.6°	0.7°	0.8°	0.9°	1'	2'	3'	4'	5'
0	.0000	0017	0035	0052	0070	0087	0105	0122	0140	0157	3	6	9	12	15
1	.0175	0192	0209	0227	0244	0262	0279	0297	0314	0332	3	6	9	12	15
2	.0349	0366	0384	0401	0419	0436	0454	0471	0488	0506	3	6	9	12	15
3	.0523	0541	0558	0576	0593	0610	0628	0645	0663	0680	3	6	9	12	15
4	.0698	0715	0732	0750	0767	0785	0802	0819	0837	0854	3	6	9	12	14
5	.0872	0889	0906	0924	0941	0958	0976	0993	1011	1028	3	6	9	12	14
6	.1045	1063	1080	1197	1115	1132	1149	1167	1184	1201	3	6	9	12	14
7	.1219	1236	1253	1271	1288	1305	1323	1340	1357	1374	3	6	9	12	14
8	.1392	1409	1426	1444	1461	1478	1495	1513	1530	1547	3	6	9	12	14
9	.1564	1582	1599	1616	1633	1650	1668	1685	1702	1719	3	6	9	12	14
10	.1736	1754	1771	1788	1805	1822	1840	1857	1874	1891	3	6	9	11	14
11	.1908	1925	1942	1959	1977	1994	2011	2028	2045	2062	3	6	9	11	14
12	.2079	2096	2113	2130	2147	2164	2181	2198	2215	2233	3	6	9	11	14
13	.2250	2267	2284	2300	2317	2334	2351	2368	2385	2402	3	6	8	11	14
14	.2419	2436	2453	2470	2487	2504	2521	2538	2554	2571	3	6	8	11	14
15	.2588	2605	2622	2639	2656	2672	2689	2706	2723	2740	3	6	8	11	14
16	.2756	2773	2790	2807	2823	2840	2857	2874	2890	2907	3	6	8	11	14
17	.2924	2940	2957	2974	2990	3007	3024	3040	3057	3074	3	6	8	11	14
18	.3090	3107	3123	3140	3156	3173	3190	3206	3223	3239	3	6	8	11	14
19	.3256	3272	3289	3305	3322	3338	3355	3371	3387	3404	3	5	8	11	14
20	.3420	3437	3453	3469	3486	3502	3518	3535	3551	3567	3	5	8	11	14
21	.3584	3600	3616	3633	3649	3665	3681	3697	3714	3730	3	5	8	11	14
22	.3746	3762	3778	3795	3811	3827	3843	3859	3875	3891	3	5	8	11	14
23	.3907	3923	3939	3955	3971	3987	4003	4019	4035	4051	3	5	8	11	14
24	.4067	4083	4099	4115	4131	4147	4163	4179	4195	4210	3	5	8	11	13
25	.4226	4242	4258	4274	4289	4305	4321	4337	4352	4368	3	5	8	11	13
26	.4384	4399	4415	4431	4446	4462	4478	4493	4509	4524	3	5	8	10	13
27	.4540	4555	4571	4586	4602	4617	4633	4648	4664	4679	3	5	8	10	13
28	.4695	4710	4726	4741	4756	4772	4787	4802	4818	4833	3	5	8	10	13
29	.4848	4863	4879	4894	4909	4924	4939	4955	4970	4985	3	5	8	10	13
30	.5000	5015	5030	5045	5060	5075	5090	5105	5120	5135	3	5	8	10	13
31	.5150	5165	5180	5195	5210	5225	5240	5255	5270	5284	2	5	7	10	12
32	.5299	5314	5329	5344	5358	5373	5388	5402	5417	5432	2	5	7	10	12
33	.5446	5461	5476	5490	5505	5519	5534	5548	5563	5577	2	5	7	10	12
34	.5592	5606	5621	5635	5650	5664	5678	5693	5707	5721	2	5	7	10	12
35	.5736	5750	5764	5779	5793	5807	5821	5835	5850	5864	2	5	7	9	12
36	.5878	5892	5906	5920	5934	5948	5962	5976	5990	6004	2	5	7	9	12
37	.6018	6032	6046	6060	6074	6088	6101	6115	6129	6143	2	5	7	9	12
38	.6157	6170	6184	6198	6211	6225	6239	6252	6266	6280	2	5	7	9	11
39	.6293	6307	6320	6334	6347	6361	6374	6388	6401	6414	2	4	7	9	11
40	.6428	6441	6455	6468	6481	6494	6508	6521	6534	6547	2	4	7	9	11
41	.6561	6574	6587	6600	6613	6626	6639	6652	6665	6678	2	4	7	9	11
42	.6691	6704	6717	6730	6743	6756	6769	6782	6794	6807	2	4	6	9	11
43	.6820	6833	6845	6858	6871	6884	6896	6909	6921	6934	2	4	6	8	11
44	.6947	6959	6972	6984	6997	7009	7022	7034	7046	7059	2	4	6	8	10

NATURAL SINES

Degree	0'	6'	12'	18'	24'	30'	36'	42'	48'	54'	Mean Deifferences				
	0.0°	0.1°	0.2°	0.3°	0.4°	0.5°	0.6°	0.7°	0.8°	0.9°	1'	2'	3'	4'	5'
45	.7071	7083	7096	7108	7120	7133	7145	7157	7169	7181	2	4	6	8	10
46	.7193	7206	7218	7230	7242	7254	7266	7278	7290	7302	2	4	6	8	10
47	.7314	7325	7337	7349	7361	7373	7385	7396	7408	7420	2	4	6	8	10
48	.7431	7443	7455	7466	7478	7490	7501	7513	7524	7536	2	4	6	8	10
49	.7547	7559	7570	7581	7593	7604	7615	7627	7638	7649	2	4	6	8	9
50	.7660	7672	7683	7694	7705	7716	7727	7738	7749	7760	2	4	6	7	9
51	.7771	7782	7793	7804	7815	7826	7837	7848	7859	7869	2	4	5	7	9
52	.7880	7891	7902	7912	7923	7934	7944	7955	7965	7976	2	4	5	7	9
53	.7986	7997	8007	8018	8028	8039	8049	8059	8070	8080	2	3	5	7	9
54	.8090	8100	8111	8121	8131	8141	8151	8161	8171	8181	2	3	5	7	8
55	.8192	8202	8211	8221	8231	8241	8251	8261	8271	8281	2	3	5	7	8
56	.8290	8300	8310	8320	8329	8339	8348	8358	8368	8377	2	3	5	6	8
57	.8387	8396	8406	8415	8425	8434	8443	8453	8462	8471	2	3	5	6	8
58	.8480	8490	8499	8508	8517	8526	8536	8545	8554	8563	2	3	5	6	8
59	.8572	8581	8590	8599	8607	8616	8625	8634	8643	8652	1	3	4	6	7
60	.8660	8669	8678	8686	8695	8704	8712	8721	8729	8738	1	3	4	6	7
61	.8746	8755	8763	8771	8780	8788	8796	8805	8813	8821	1	3	4	6	7
62	.8829	8838	8846	8854	8862	8870	8878	8886	8894	8902	1	3	4	5	7
63	.8910	8918	8926	8934	8942	8949	8957	8965	8973	8980	1	3	4	5	6
64	.8988	8996	9003	9011	9018	9026	9033	9041	9048	9056	1	3	4	5	6
65	.9063	9070	9078	9085	9092	9100	9107	9114	9121	9128	1	2	4	5	6
66	.9135	9143	9150	9157	9164	9171	9178	9184	9191	9198	1	2	3	5	6
67	.9205	9212	9219	9225	9232	9239	9245	9252	9259	9265	1	2	3	4	6
68	.9272	9278	9285	9291	9298	9304	9311	9317	9323	9330	1	2	3	4	5
69	.9336	9342	9348	9354	9361	9367	9373	9379	9385	9391	1	2	3	4	5
70	.9397	9403	9409	9415	9421	9426	9432	9438	9444	9449	1	2	3	4	5
71	.9455	9461	9466	9472	9478	9483	9489	9494	9500	9505	1	2	3	4	5
72	.9511	9516	9521	9527	9532	9537	9542	9548	9553	9558	1	2	3	3	4
73	.9563	9568	9573	9578	9583	9588	9593	9598	9603	9608	1	2	2	3	4
74	.9613	9617	9622	9627	9632	9636	9641	9646	9650	9655	1	2	2	3	4
75	.9659	9664	9668	9673	9677	9681	9686	9690	9694	9699	1	1	2	3	4
76	.9703	9707	9711	9715	9720	9724	9728	9732	9736	9740	1	1	2	3	3
77	.9744	9748	9751	9755	9759	9763	9767	9770	9774	9778	1	1	2	3	3
78	.9781	9785	9789	9792	9796	9799	9803	9806	9810	9813	1	1	2	2	3
79	.9816	9820	9823	9826	9829	9833	9836	9839	9842	9845	1	1	2	2	3
80	.9848	9851	9854	9857	9860	9863	9866	9869	9871	9874	0	1	1	2	2
81	.9877	9880	9882	9885	9888	9890	9893	9895	9898	9900	0	1	1	2	2
82	.9903	9905	9907	9910	9912	9914	9917	9919	9921	9923	0	1	1	2	2
83	.9925	9928	9930	9932	9934	9936	9938	9940	9942	9943	0	1	1	1	2
84	.9945	9947	9949	9951	9952	9954	9956	9957	9959	9960	0	1	1	1	2
85	.9962	9963	9965	9966	9968	9969	9971	9972	9973	9974	0	0	1	1	1
86	.9976	9977	9978	9979	9980	9981	9982	9983	9984	9985	0	0	1	1	1
87	.9986	9987	9988	9989	9990	9990	9991	9992	9993	9993	0	0	0	1	1
88	.9994	9995	9995	9996	9996	9997	9997	9997	9998	9998	0	0	0	0	0
89	.9998	9999	9999	9999	9999	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0	0	0	0	0

NATURAL TANGENTS

Degree	0 0.0°	6 0.1°	12 0.2°	18 0.3°	24 0.4°	30 0.5°	36 0.6°	42 0.7°	48 0.8°	54 0.9°	Main Deifferences 1	2	3	4	5
0	.0000	0017	0035	0052	0070	0087	0105	0122	0140	0157	3	6	9	12	15
1	.0175	0192	0209	0227	0244	0262	0279	0297	0314	0332	3	6	9	12	15
2	.0349	0367	0384	0402	0419	0437	0454	0472	0489	0507	3	6	9	12	15
3	.0524	0542	0559	0577	0594	0612	0629	0647	0664	0682	3	6	9	12	15
4	.0699	0717	0734	0752	0769	0787	0805	0822	0840	0857	3	6	9	12	15
5	.0875	0892	0910	0928	0945	0963	0981	0998	1016	1033	3	6	9	12	15
6	.1051	1069	1086	1104	1122	1139	1157	1175	1192	1210	3	6	9	12	15
7	.1228	1246	1263	1281	1299	1317	1334	1352	1370	1388	3	6	9	12	15
8	.1405	1423	1441	1459	1477	1495	1512	1530	1548	1566	3	6	9	12	15
9	.1584	1602	1620	1638	1655	1673	1691	1709	1727	1745	3	6	9	12	15
10	.1763	1781	1799	1817	1835	1853	1871	1890	1908	1926	3	6	9	12	15
11	.1944	1962	1980	1998	2016	2035	2053	2071	2089	2107	3	6	9	12	15
12	.2126	2144	2162	2180	2199	2217	2235	2254	2272	2290	3	6	9	12	15
13	.2309	2327	2345	2364	2382	2401	2419	2438	2456	2475	3	6	9	12	15
14	.2493	2512	2530	2549	2568	2686	2605	2623	2642	2661	3	6	9	12	16
15	.2679	2698	2717	2736	2754	2773	2792	2811	2830	2849	3	6	9	13	16
16	.2867	2886	2905	2924	2943	2962	2981	3000	3019	3038	3	6	9	13	16
17	.3057	3076	3096	3115	3134	3153	3172	3191	3211	3230	3	6	10	13	16
18	.3249	3269	3288	3307	3327	3346	3365	3385	3404	3424	3	6	10	13	16
19	.3443	3463	3482	3502	3522	3541	3561	3581	3600	3620	3	7	10	13	16
20	.3640	3659	3679	3699	3719	3739	3759	3779	3799	3819	3	7	10	13	17
21	.3839	3859	3879	3899	3919	3939	3959	3979	4000	4020	3	7	10	13	17
22	.4040	4061	4081	4101	4122	4142	4163	4183	4204	4224	3	7	10	14	17
23	.4245	4265	8286	4307	4327	4748	4369	4390	4411	4431	3	7	10	14	17
24	.4452	4473	4494	4515	4536	4557	4578	4599	4621	4642	4	7	11	14	18
25	.4663	4684	4706	4727	4748	4770	4791	4813	4834	4856	4	7	11	14	18
26	.4877	4899	4921	4942	4964	4986	5008	5029	5051	5073	4	7	11	15	18
27	.5095	5117	5139	5161	5184	5206	5228	5250	5272	5295	4	7	11	15	18
28	.5317	5340	5362	5384	5407	5430	5452	5475	5498	5520	4	8	11	15	19
29	.5543	5566	5589	5612	5635	5658	5681	5704	5727	5750	4	8	12	15	19
30	.5774	5797	5820	5844	5867	5890	5914	5938	5961	5985	4	8	12	16	20
31	.6009	6032	6056	6080	6104	6128	6152	6176	6200	6224	4	8	12	16	20
32	.6249	6273	6297	6322	6346	6371	6395	6420	6445	6469	4	8	12	16	20
33	.6494	6519	6544	6569	6594	6619	6644	6669	6694	6720	4	8	13	17	21
34	.6745	6771	6796	6822	6847	6873	6899	6924	6950	6976	4	9	13	17	21
35	.7002	7028	7054	7080	7107	7133	7159	7186	7212	7239	4	9	13	18	22
36	.7265	7292	7319	7346	7373	7400	7427	7454	7481	7508	5	9	14	18	23
37	.7536	7563	7590	7618	7646	7673	7701	7729	7757	7785	5	9	14	18	23
38	.7813	7841	7869	7898	7926	7954	7983	8012	8040	8069	5	9	14	19	24
39	.8098	8127	8156	8185	8214	8243	8273	8302	8332	8361	5	10	15	20	24
40	.8391	8421	8451	8481	8511	8541	8571	8601	8632	8662	5	10	15	20	25
41	.8693	8724	8754	8785	8816	8847	8878	8910	8941	8972	5	10	16	21	26
42	.9004	9036	9067	9099	9131	9163	9195	9228	9260	9293	5	11	16	21	27
43	.9325	9358	9391	9424	9457	9490	9523	9556	9590	9623	6	11	17	22	28
44	.9657	9691	9725	9759	9793	9827	9861	9896	9930	9965	6	11	17	23	29

NATURAL TANGENTS

Degree	0 0.0°	6 0.1°	12 0.2°	18 0.3°	24 0.4°	30 0.5°	36 0.6°	42 0.7°	48 0.8°	54 0.9°	Main Deifferences 1	2	3	4	5
45	1.0000	0035	0070	0105	0141	0176	0212	0247	0283	0319	6	12	18	24	30
46	1.0355	0392	0428	0464	0501	0538	0575	0612	0649	0686	6	12	18	25	31
47	1.0724	0761	0799	0837	0875	0913	0951	0990	1028	1067	6	13	19	25	32
48	1.1106	1145	1184	1224	1263	1303	1343	1383	1423	1463	7	13	20	27	33
49	1.1504	1544	1585	1626	1667	1708	1750	1792	1833	1875	7	14	21	28	34
50	1.1918	1960	2002	2045	2088	2131	2174	2218	2261	2305	7	14	22	29	36
51	1.2349	2393	2437	2482	2527	2572	2617	2662	2708	2753	8	15	23	30	38
52	1.2799	2846	2892	2938	2985	3032	3079	3127	3175	3222	8	16	24	31	39
53	1.3270	3319	3367	3416	3465	3514	3564	3613	3663	3713	8	16	25	33	41
54	1.3764	3814	3865	3916	3968	4019	4071	4124	4176	4229	9	17	26	34	43
55	1.4281	4335	4388	4442	4496	4550	4605	4659	4715	4770	9	18	27	36	45
56	1.4826	4882	4938	4994	5051	5108	5166	5224	5282	5340	10	19	29	38	48
57	1.5399	5458	5517	5577	5637	5697	5757	5818	5880	5941	10	20	30	40	50
58	1.6003	6066	6128	6191	6255	6319	6383	6447	6512	6577	11	21	32	43	53
59	1.6643	6709	6775	6842	6909	6977	7045	7113	7182	7251	11	23	34	45	56
60	1.7321	7391	7461	7532	7603	7675	7747	7820	7893	7966	12	24	36	48	60
61	1.8040	8115	8190	8265	8341	8418	8495	8572	8650	8728	13	26	38	51	64
62	1.8807	8887	8967	9047	9128	9210	9292	9375	9458	9542	14	27	41	55	68
63	1.9626	9711	9797	9883	9970	2.0057	2.0145	2.0233	2.0323	2.413	15	29	44	58	73
64	2.0503	0594	0686	0778	0872	0965	1060	1155	1251	1348	16	31	47	63	78
65	2.1445	1543	1642	1742	1842	1943	2045	2148	2251	2355	17	34	51	68	85
66	2.2460	2566	2673	2781	2889	2998	3109	3220	3332	3445	18	37	55	73	92
67	2.3559	3673	3789	3906	4023	4142	4262	4383	4504	4627	20	40	60	79	99
68	2.4751	4876	5002	5129	5257	5386	5517	5649	5782	5916	22	43	65	87	108
69	2.6051	6187	6325	6464	6605	6746	6889	7034	7179	7326	24	47	71	95	119
70	2.7475	7625	7776	7929	8083	8239	8397	8556	8716	8878	26	52	78	104	131
71	2.9042	9208	9375	9544	9714	9887	3.0061	3.0237	3.0415	3.0595	29	58	87	116	145
72	3.0777	0961	1146	1334	1524	1716	1910	2106	2305	2506	32	64	96	129	161
73	3.2709	2914	3122	3332	3544	3759	3977	4197	4420	4646	36	72	108	144	180
74	3.4824	5105	5339	5576	5816	6059	6305	6554	6806	7062	41	81	122	163	204
75	3.7321	7583	7848	8118	8391	8667	8947	9232	9520	9812	46	93	139	186	232
76	4.0108	0408	0713	1022	1335	1653	1976	2303	2635	2972	53	107	160	213	267
77	4.3315	3662	4015	4374	4737	5107	5483	5864	6252	6646	Mean Differences no longer sufficiently accurate				
78	4.7046	7453	7867	8288	8716	9152	9594	5.0045	5.0504	5.0970					
79	5.1446	1929	2422	2924	3465	3955	4486	5026	5578	6140					
80	5.6713	7297	7894	8502	9124	9758	6.0405	6.1066	6.1742	6.2432					
81	6.3138	3859	4596	5350	6122	6912	7720	8548	9395	7.0264					
82	7.1154	2066	3002	3962	4997	5958	6996	8062	9158	8.0285					
83	8.1443	2636	3863	5126	6427	7769	9152	9.0579	9.2052	9.3572					
84	9.514	9.677	9.845	10.02	10.20	10.39	10.58	10.78	10.99	11.20					
85	11.43	11.66	11.91	12.16	12.43	12.71	13.00	13.30	13.62	13.95					
86	14.30	14.67	15.06	15.46	15.89	16.35	16.83	17.34	17.89	18.46					
87	19.08	19.74	20.45	21.20	22.02	22.90	23.86	24.90	26.03	27.27					
88	28.64	30.14	31.82	33.69	35.80	38.19	40.92	44.07	47.74	52.08					
89	57.29	63.66	71.62	81.85	95.49	114.6	143.2	191.0	286.5	573.0					