कक्षा-10

उच्च गणित

उच्च गणित

दसवीं कक्षा के लिए ऐच्छिक उच्च गणित की पाठ्य-पुस्तक

(राज्य शिक्षा शोध एवं प्रशिक्षण परिषद्, बिहार द्वारा विकसित)

बिहार स्टेट टेक्स्टबुक पब्लिशिंग कॉरपोरेशन लिमिटेड, पटना

निदेशक (माध्यमिक शिक्षा), शिक्षा विभाग, बिहार सरकार द्वारा स्वीकृत।

राज्य शिक्षा शोध एवं प्रशिक्षण परिषद्, बिहार, पटना के सौजन्य से सम्पूर्ण बिहार राज्य के लिए निमित्त।

© बिहार स्टेट टेक्स्टबुक पब्लिशिंग कॉरपोरेशन लिमिटेड, पटना।

प्रथम संस्करण : 2014

मूल्य : ₹ 67.00

बिहार स्टेट टेक्स्टबुक पब्लिशिंग कॉरपोरेशन लिमिटेड, बुद्ध मार्ग, पटना - 800 001 द्वारा प्रकाशित तथा बब्लू बाईंडिंग हाउस, पटना कोल्ड स्टोरेज, पटना-800006 द्वारा 5000 प्रतियाँ मुद्रित।

प्राक्कथन

शिक्षा विभाग, बिहार सरकार के निर्णयानुसार अप्रैल 2013 से राज्य के कक्षा IX एव X हेतु ऐच्छिक विषयों का पाठ्यक्रम लागू किया गया है। इस संदर्भ में एस०सी०ई०आर०टी०, बिहार पटना द्वारा विकसित प्रस्तुत पुस्तक निगम द्वारा आवरण चित्रण कर मुद्रित की जा रही है।

बिहार राज्य में विद्यालयीय शिक्षा के गुणवत्तापूर्ण शिक्षा के लिए माननीय मुख्यमंत्री, बिहार श्री जीतन राम मांझी, शिक्षामंत्री, श्री वृशिण पटेल एवं शिक्षा विभाग के प्रधान सचिव श्री आर०के० महाजन के मार्गदर्शन के प्रति हम हृदय से कृतज्ञ हैं।

एस०सी०ई०आर०टी०, बिहार पटना के निदेशक के भी हम आभारी हैं, जिन्होंने अपना सहयोग प्रदान किया।

बिहार राज्य पाठ्य-पुस्तक प्रकाशन निगम छात्रों, अभिभावकों, शिक्षकों, शिक्षाविदों की टिप्पणियों एवं सुझावों का सदैव स्वागत करेगा, जिससे बिहार राज्य को देश के शिक्षा जगत में उच्चतम स्थान दिलाने में हमारा प्रयास सहायक सिद्ध हो सके।

दिलीप कुमार, आई०टी०एस०
प्रबंध निदेशक
बिहार राज्य पाठ्य-पुस्तक प्रकाशन निगम लि०,

दिशा बोध

- श्री अमरजीत सिन्हा, प्रधान सचिव, शिक्षा विभाग, बिहार, पटना
- श्री राहुल सिंह, राज्य परियोजना निदेशक, बिहार माध्यमिक शिक्षा परिषद्, बिहार, पटना
- श्री हसन वारिस, निदेशक, राज्य शिक्षा शोध एवं प्रशिक्षण परिषद्, बिहार, पटना
- डॉ0 सैयद अब्दुल मुईन, विभागाध्यक्ष, राज्य शिक्षा शोध एवं प्रशिक्षण परिषद्, बिहार, पटना
- डॉ0 ज्ञानदेव मणि त्रिपाठी, सदस्य पाठ्यक्रम-सह-पाठ्यपुस्तक विकास समिति

समन्वयक

- डॉ0 स्नेहाशीष दास, व्याख्याता, राज्य शिक्षा शोध एवं प्रशिक्षण परिषद् बिहार, पटना

लेखक समूह

- डॉ0 राकेश कुमार, प्राचार्य, डायट, भागलपुर
- श्री के0के0 ठाकुर, अवकाश प्राप्त राज्य साधन सेवी, बिहार शिक्षा परियोजना, पटना
- श्री अलख कुमार वर्मा, शहीद राजेन्द्र प्र0 सिंह उच्च माध्यमिक विद्यालय गर्दनीबाग, पटना
- श्री मनोज कुमार झा, टी0जी0टी0, उ0म0वि0 नन्दनगढ़, लौरिया, पश्चिमी चम्पारण
- श्री गोविन्द प्रसाद, टी0जी0टी0, म0वि0 तुलाराम घाट, चनपटिया, बेतिया
- श्री दिलीप कुमार, टी0जी0टी0, उ0म0वि0 भानु बिगहा भगवपुर, हिलसा, नालन्दा
- श्री सुनील कुमार तांती, व्याख्याता, डायट नूरसराय, नालन्दा

समीक्षक

- श्री राम कृष्ण प्रसाद, सेवानिवृत्त प्रधानाध्यापक, पी0 एल0 साहु उच्च वि0 सोहसराय, नालन्दा

आमुख

यह पुस्तक राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा 2005 एवं बिहार पाठ्यचर्या की रूपरेखा 2008 के आलोक में निर्मित नवीन पाठ्यक्रम के आधार पर तैयार की गई है। इस पुस्तक के निर्माण में इस बात का ध्यान रखा गया है कि "शिक्षा का मतलब बिहार के स्कूली शिक्षार्थियों को इतना सक्षम बना देना है कि वो अपने जीवन का सही-सही अर्थ समझ सकें, अपनी समस्त योग्यताओं का समुचित विकास कर सकें, अपने जीवन का मकसद तय कर सकें और उसे प्राप्त करने हेतु यथासंभव सार्थक एवं प्रभावी प्रयास कर सकें, साथ ही साथ इस बात को भी समझ सकें कि समाज के दूसरे व्यक्ति को भी ऐसा ही करने का पूर्ण अधिकार प्राप्त है।" राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा 2005 एवं बिहार पाठ्यचर्या की रूपरेखा 2008 हमें बताती है कि शिक्षार्थी के स्कूली जीवन और स्कूल से बाहर के जीवन में सामंजस्य होना चाहिए। किताब और किताब से बाहर की दुनिया आपस में गूँथी होनी चाहिए।

इस पुस्तक में शिक्षार्थियों की कल्पनाशक्ति के विकास, उनकी गतिविधियों की सृजनशीलता, उनके सवाल करने और उनका उत्तर पाने के मौलिक अधिकार के समुचित संरक्षण और उसे रचनात्मक दिशा देने की कोशिश की गई है। निश्चय ही इसमें शिक्षार्थियों के साथ-साथ शिक्षकों की भी महत्त्वपूर्ण भूमिका होती है। शिक्षार्थियों के प्रति संवेदना और सहानुभूति के साथ उन्हें पुस्तक में सक्रिय सहभागिता दिखानी होगी।

ऐच्छिक विषय की पुस्तक उच्च गणित में दी गई अवधारणाओं को स्पष्ट करने हेतु अवधारणाओं को शिक्षार्थियों के पूर्व अनुभव के साथ जोड़ते हुए विषय-सामग्री से परिचय कराया गया है। संबंधित अवधारणाओं पर आधारित क्रियाकलाप भी पुस्तक का अनिवार्य हिस्सा है। व्यावहारिक में सूचनाओं एवं गणना तथा इनके महत्त्व के कारण गणित हमारे जीवन का अनिवार्य अंग बन गया है। हम नित्य नयी-नयी एवं प्रभावी विधियों द्वारा गणित के ज्ञान को सुदृढ़ करने का प्रयास कर रहे हैं। इसलिए गणित को सभी शिक्षार्थियों के अध्ययन के लिए ऐच्छिक विषय के रूप में विशेष स्थान दिया गया है। वैसे शिक्षार्थी, जिनकी गणित में अभिरुचि अधिक है, गणित को अपने कैरियर में विशेष स्थान देना चाहते हैं, साथ ही अधिक समय देकर गणितीय गणना में अधिक कौशल हासिल करना

चाहते हैं, उन शिक्षार्थियों के लिए उच्च गणित आनन्द के साथ कौशल-वृद्धि का कारण बनेगा।

दशम वर्ग में शिक्षार्थियों के मस्तिष्क का इतना विकास तो हो ही जाता है कि वे उच्च गणित के विभिन्न स्तरों को समझने हेतु सक्षम बन सके। इस पुस्तक के विकास में यह कोशिश भी की गई है कि शिक्षार्थियों को गणित के बुनियादी प्रश्नों को समझने एवं हल करने में आसानी हो सके। इस पुस्तक की एक महत्त्वपूर्ण विशेषता यह है कि इसमें त्रिकोणमिति, कलन, नियामक ज्यामिति एवं बीजगणित को सरल ढंग से प्रस्तुत करने का प्रयास किया गया है। इस पुस्तक के निर्माण में बिहार स्टेट टेक्स्टबुक पब्लिशिंग कॉरपोरेशन लि0 पटना द्वारा पूर्व में प्रकाशित उच्च गणित की पाठ्यपुस्तक से भी सहयोग लिया गया है, हम उनके प्रति आभारी हैं।

इस पुस्तक का विकास निर्णयानुसार शीघ्रता में किया गया। संभव है कुछ त्रुटियाँ रह गयी हों, जिन्हें विद्वत्जनों के सुझाव से अगले संस्करण में सुधारने का प्रयास किया जायेगा।

हम विशेष रूप से विभागाध्यक्ष, अध्यापक शिक्षा विभाग, संकाय सदस्य, राज्य शिक्षा शोध एवं प्रशिक्षण परिषद् तथा विद्वत्जनों के प्रति आभार व्यक्त करते हैं जिनके मार्गदर्शन में इस कार्य को सफलतापूर्वक सम्पन्न कराया गया। हम उन सभी कर्मचारियों को धन्यवाद देते हैं जिनकी एकनिष्ठ सक्रियता ने कार्य को सुगम बना दिया।

हसन वारिस
निदेशक
राज्य शिक्षा शोध एवं प्रशिक्षण परिषद्,
बिहार, पटना-800006

विषय-सूची

इकाई-1		त्रिकोणमिति	
	1.1	कोण एवं मापन पद्धति	1
	1.2	कोण की त्रिकोणमितीय निष्पत्तियाँ	9
	1.3	संयुक्त कोण	16
	1.4	अनुपरिवर्त्तन सूत्र	23
	1.5	अपवर्त्य कोण	29
	1.6	अपवर्तक कोण	46
	1.7	त्रिकोणमितीय तादात्म्य	73
	1.8	त्रिकोणमितीय समीकरणों का हल	86
	1.9	त्रिभुज के गुण	109
इकाई-2		कलन	
	2.1	संबंध एवं फलन	147
	2.2	फलनों का प्रांत एवं परिसर	189
	2.3	फलन की सीमाएँ	199
	2.4	अवकलन	219
	2.5	समाकलन	231
इकाई-3		नियामक ज्यामिति	
	3.1	रैखिक समीकरण का आलेख खींचना	249
	3.2	सरल रेखा की ढाल	253
	3.3	विभिन्न रैखिक समीकरण	256
	3.4	सरल रेखा का व्यापक समीकरण	263
	3.5	रैखिक असमिका का आलेखीय निरूपण	274

इकाई-4 बीजगणित

4.1	अनुक्रम	285
4.2	श्रेणी	287
4.3	समांतर श्रेढ़ी	290
4.4	समांतर माध्य	295
4.5	गुणोत्तर श्रेढ़ी	298
4.6	गुणोत्तर माध्य	305
4.7	समांतर एवं गुणोत्तर माध्य के बीच संबंध	307
4.8	विशेष अनुक्रमों के n पदों का योगफल	311