ஆனால் இந்த முயற்சி ஒரு பெரிய சாதனைக்கு வழி வகுத்தது. அதாவது பலவகை வடிவ கணிதங்கள் உருவாக்கப் பட்டன. இந்த வடிவ கணிதங்கள் யூக்ளிட்டின் வடிவ கணிதத்திலிருந்து வேறு பட்டவை. அவை யூக்ளிட்டியன் அல்லாத வடிவ கணிதங்கள் என அழைக்கப் படுகின்றன. அவற்றின் உருவாக்கம் ஒரு வரலாற்று சிறப்பு மிக்கது. ஏனெனில் அதுவரை யூக்ளிட்டின் வடிவ கணிதம் மட்டுமே வடிவக் கணிதம் என எல்லோரும் நம்பினார்கள்; உலகமே யூக்ளிட்டினுடையது என நம்பினர். தற்போது நாம் உபயோக்கிக்கும் வடிவ கணிதம் யூக்ளிட்டின் அல்லாத வடிவ கணிதமாகும். அதாவது அது கோள வடிவக் கணிதம் (Spherical Geometry) என அழைக்கப் படுகிறது. கோள வடிவக் கணிதத்தில் கோடுகள் நேராக இருக்காது. அவை பெரிய வட்டங்களின் ஒரு பகுதியாக இருக்கும். (அதாவது கோளத்தின் வெட்டு வடிவத்தின் ஒரு பகுதியாக கோளத்தின் மையத்தின் வழியாக செல்லும் தளங்களாக இருக்கும்.

படம் 2.12 ல் கோடுகள் AN மற்றும் BN (கோளத்தின் பெரிய வட்டத்தின் பகுதி) என்பவை AB க்கு செங்குத்தாக உள்ளன. AB ன் ஒரே பக்கமுள்ள உட்கோணங்களின் கூடுதல் இரண்டு செங்கோணங்களுக்கு குறைவாக இல்லை என்றாலும் அவை ஒன்றையொன்று சந்திக்கின்றன. (உண்மையாக $90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$) அதே சமயம ΔNAB யின் கோணங்களின் கூடுதல் 180° யை விட அதிகம்). ஏனெனில் $\angle A + \angle B = 180^\circ$. எனவே யூக்ளிட்டின் வடிவக் கணிதம் சமதளத்திற்கு மட்டுமே ஏற்புடையது. வளைவு தளத்தில் அது தோல்வியுற்றது.

இப்போது ஒரு எடுத்துக் காட்டை பார்ப்போம்.

எடுத்துக்காட்டு 3 : கீழ்க் கண்ட அறிக்கையை கவனி: எல்லா இடங்களிலும் ஒன்றுக் கொன்று சம தொலைவில் அமைந்த ஒரு ஜோடி நேர்க்கோடுகள் உள்ளன. இது யூக்ளிட்டின் ஐந்தாவது கோட்பாட்டின் நேரடி விளைவால் உருவானதா? விளக்கு.

தீர்வு: ஏதாவது நேர்க்கோடு l ஐ எடுத்துக்கொள். அதன் மீது இல்லாத புள்ளி P யை எடுத்துக்கொள். யூக்ளிட்டின் ஐந்தாவது கோட்பாட்டிற்கு சமமான பிளேபேர் எடுகோளின்படி P வழியாக ஒரே ஒரு கோடு m என்பது l க்கு இணையாக உள்ளது.

இப்போது ஒரு கோட்டிற்கு வெளியே உள்ள புள்ளியின் தூரம் அந்தபுள்ளியிலிருந்து அந்த கோட்டிற்கு உள்ள செங்குத்து நீளம் ஆகும். l லிருந்து m மீது எந்த புள்ளிக்கும் தூரம் சமமாக இருக்கும். மற்றும் l மீது m லிருந்து எந்த புள்ளியாக இருந்தாலும் சமமாக இருக்கும். எனவே இந்த

இரண்டு கோடுகளும் எந்த இடத்திலும் ஒன்றுக் கொன்று சம தூரத்தில் இருக்கும்.

குறிப்பு: *பிறகு வரும் சில பாடங்களில் நீங்கள் படிக்க இருப்பது யூக்ளிட்டின் வடிவக் கணிதம். இருப்பினும் நாம் உபயோகிக்கும் தேற்றங்கள் மற்றும் எடுகோள்கள் யூக்ளிட்டின் கோட்பாட்டிற்கு வேறுபட்டதாக இருக்கும்.*

பயிற்சி 2.2

1. *யூக்லிட் - இன் ஐந்தாவது அடிப்படைக் கோட்பாட்டை எளிதில் புரியும் வகையில் எவ்வாறு மாற்றி எழுதுவாய்?*
2. *யூக்லிட் - இன் ஐந்தாவது அடிப்படைக் கோட்பாடானது இணைகோடுகள் இருப்பதை குறிக்கிறதா? விளக்கு.*

2.4 தொகுப்பு

இவ்வலகில், கீழ்காணும் கருத்துகளை நீ படித்திருக்கிறாய்:

1. *யூக்கிலிட் என்பவர் ஒரு புள்ளி, கோடு மற்றும் தளம் இவற்றை வறையறுத்திருந்தாலும் வரையரைகளை கணக்கியல் ஆய்வளார்கள் ஏற்றுக் கொள்வதில்லை. எனவே, இச்சொற்கள் வரையறுக்கப்படாதவைகளாகவே கொள்ளப்பட்டுள்ளன.*
2. *எடுகோள்கள் மற்றும் அடிப்படைக் கோட்பாடுகள் இவை தெளிவாகத் தெரியும் உலகியல் உண்மைகள். அவை நிரூபிக்கப் படுவதில்லை.*
3. *தேற்றங்கள் என்பன, வரையரைகள், எடுகோள்கள், முன்னமே நிரூபிக்கப்பட்ட கூற்றுகள் மற்றும் துப்பறிந்து பகுத்தறிதல் இவற்றைக் கொண்டு நிரூபிக்கப்பட்ட கூற்றுகள் ஆகும்.*
4. *யூக்லிட் - இன் சில எடுகோள்கள்:*
    1. *ஒரு பொருளுக்கு சமமாக உள்ள வெவேறு பொருட்கள். ஒன்றுக்கொன்று சமமாக இருக்கும்.*
    2. *சமமானவற்றை சமமானவைகளுடன் கூட்டினால் கிடைக்கும் பூர்த்திகளும் சமம்.*
    3. *சமமானவைகளை சமமானவற்றிலிருந்து கழித்தால் மீதிகள் சமம்.*
    4. *ஒன்றுக்கொன்று பொருந்தும் பொருட்கள் ஒன்றுக் கொன்று சமமானவை.*

5. முழுமையானவை பகுதியை விடபெரியது.

6. ஒன்றைப் போலவே உள்ள பொருட்களின் இருமடங்குகள் அனைத்துமே ஒன்றுக்கொன்று சமமானவை

7. ஒன்றைப் போலவே உள்ள பொருட்களின் அரை மடங்குகள் அனைத்துமே ஒன்றுக்கொன்று சமமானவை.

5. யூக்லிட் - இன் இடிப்படைக் கோட்பாடுகளானவை:

1. ஒரு புள்ளியிலிருந்து மற்ற ஏதாவது ஒரு புள்ளிக்கு ஒரு நேர்கோடு வரையலாம்.

2. ஒரு முடிவுற்றக் கோட்டை அளவில்லாமல் நீட்டிக்கலாம்.

3. எந்த ஒரு ஆரத்தைக் கொண்டும் எந்த மையப் புள்ளியைக் கொண்டு ஒரு வட்டம் வரையமுடியும்.

4. எல்லா செங்கோணங்களும் ஒன்றுக் கொன்று சமமானவை.

5. ஒரு நேர்க்கோடு இரண்டு நேர்க்கோடுகளை வெட்டினால், ஒரே பக்கத்தில் இரண்டு உட்கோணங்களை உண்டாக்குகின்றன. அந்த கோணங்களின் கூடுதல் இரண்டும் இரண்டு செங்கோணங்களுக்கு குறைவு எனில் அந்த இரண்டு நேர்க்கோடுகளையும் அளவற்று **(indefinitely)** நீட்டினால் இரண்டு கோணங்களின் கூடுதல் இரண்டு செங்கோணங்களை விட குறைவாக உள்ள பக்கத்தில் அந்த இரண்டுகளும் சந்திக்கும்.

6. யூக்ளிட் இன் ஐந்தாவது அடிப்படைக் கோட்பாட்டிற்கு சமமான இரு வாக்கியங்கள் :

(i) ஒவ்வொரு கோடு l மற்றும் l மீது அமையாத புள்ளி, P வழியாக ஔளொம் ஒரே ஒருக் கோடு m ஆனது l க்கு இணையாகச் இருக்கும்.

(ii) இரண்டு வெவ்வேறான வெட்டும் ஒன்றை ஒன்று நேர்க்கோடுகள் அந்த நேர்க் கோட்டிற்கு இணையாக இருக்க முடியாது.

7. யூக்ளிட் - இன் ஐந்தாவது அடிப்படைக் கோட்பாட்டை அவருடைய முதல் நான்கு கோட்பாடுகளை கொண்டு நிரூபிக்க எடுத்துக்கொண்ட முயற்சிகள் அனைத்தும் தோற்றன ஆனால், இம்முயற்சிகள் யூக்ளியிடியன் அல்லாத வடிவியலின் கண்டு பிடிப்பிற்கு வித்திட்டன.

பாடம் 3

கோடுகளும் கோணங்களும் (Lines and Angles)

3.1 முன்னுரை

ஒரு கோடு வரைவதற்கு குறைந்தது இரண்டு புள்ளிகள் தேவை என்பதை நீங்கள் பாடம் 2 இல் படித்துள்ளீர். மேலும் நீங்கள் இதனுடன் சில நிபந்தனை (axioms) கற்றுள்ளீர். இவை மற்ற வாக்கியங்களை நிருபிக்க வழிவகுக்கின்றன. இந்த பாடத்தில் இரண்டு கோடுகள் ஒன்றையொன்று வெட்டிக் கொள்ளும் போது உறுவாகும் கோணங்களின் பண்புகளையும், மேலும் ஒரு நேர்க்கோட்டால் இரண்டு அல்லது அதற்கும் அதிகமான இணைக் கோடுகள் வெவ்வேறு புள்ளிகளில் வெட்டிக் கொள்ளும் போது உண்டாகும் கோணங்களின் பண்புகளையும் கற்போம். அடுத்தது நீங்கள் இந்த பண்புகளைப் பயன்படுத்தியும், சில நுண்ணாய்வு (deductive) காரணத்துடனும் சில வாக்கியங்களை நிருபிக்கலாம் (பிற்சேர்க்கை 1 இல் பார்க்கவும்) சில செயல்பாட்டின் வழியாக இந்த மாதிரியான வாக்கியங்களை நீங்கள் முந்திய வகுப்புகளில் சரிப்பார்த்துள்ளீர்கள்.

உங்களுடைய அன்றாட வாழ்க்கையில், தளபரப்பு (உருவங்கள்) முனைகளுக்கு இடையில் பல்வேறு கோணங்கள் உருவாகிருப்பதை நீங்கள் பார்த்திருக்கின்றீர்கள். இதே போல சில வகை உருவமாதிரிகள் (models) உருவாக்க தளப்பரப்புகளை நாம் பயன்படுத்து கின்றோம் இதற்கு "கோணம்" (Angle) என்பது என்ன என்ற அறிவு பெற நமக்கு தேவைப்படுகின்றன. ஒரு வேளை நீங்கள் மூங்கில் குச்சிகளைப் பயன்படுத்தி குடிசைஉருவமாதிரி ஒன்று செய்து, பள்ளிக்கூடப் பொருட்காட்சியில் வைக்க வேண்டும் என்றால் அது எவ்வாறு செய்திருப்போம் என்று கற்பனை செய்து பார்? சில குச்சிகள் ஒன்றுக்கு மற்றொன்று இணையாகவும், சில குச்சிகள் சாய்வாகவும் வைத்திருப்போம். கட்டடக்கலை நிபுணர்கள் பல அடுக்குமாடி கட்டடங்களை கட்டுவதற்கான திட்ட வரைப்படங்கள் வரைந்திருப்பதை

எப்போ தாவது பார்த்துண்டா? அவற்றில் பல்வேறு பட்ட கோணங்களில், சில கோடுகள் இணையாகவும், சில கோடுகள் குறுக்கு வெட்டாகவும் வரையப் பட்டு இருக்கும். இத்தகைய கோடுகள் மற்றும் கோணங்கள் அவற்றின் பண்புகளின் அறிவுயின்றி கட்டடங்களை அடங்கிய குடியிருப்பு திட்ட வரைப்படங்கள் வரைய முடியுமா நினைத்து பாருங்கள்?

அறிவியல் பாடத்தில், ஒளிக்கதிர் வரைந்து ஒளியின் பண்புகளை நாம் படித்திருக்கின்றோம் எடுத்துக்காட்டாக, ஓர் ஊடகத்தில் இருந்து மற்றொர் ஊடகத்திற்கு ஒளிக்கதிர் நுழையும் போது ஒளியின் பிரதிப்பலிப்பு பண்பு படிக்க, நாம் இணைக்கோடுகள் மற்றும் குறுக்கு வெட்டுக் கோடுகளின் பண்பு இவற்றை பயன் படுத்துகின்றோம். ஒரு பொருளின் மீது இரண்டு அல்லது அதற்கும் அதிகமான விசைகள் செயல்படும் போது அந்த விசை களின் தொகுபயன் (மொத்த நிகர விளைவு) னை படிக்க எந்த ஒரு விசை யையும் அடையாளப் படுத்தவும், நாம் நேர்க்கோட்டுத் துண்டுகளால் படத்தில் குறிக்கின்றோம் அதே நேரத்தில் நீங்கள், கதிர்கள் அல்லது கோடு கள் ஒன்றையொன்று வெட்டிக் கொள்ளும் போதும் உண்டாகும் கோணங்கள் இவற்றிற்கு இடையில் உள்ள தொடர்பு அறிந்துக் கொள்ள வேண்டும். ஒரு கோபுரத்தின் உயர்த்தை கணக்கிடவோ அல்லது கலங்கரை "விளக்கி" லிருந்து ஒரு கப்பல் உள்ள தூரம் கண்டுபிடிக்க. பார்வை கோடுக்கும், கிடைக் கோடுக்கும் இடையே அமைந்த கோணம் ஒன்று தெரிந்திருப்பது தேவை (வேண்டும்). வடிவியலில் கோடு மற்றும் கோணம் இவற்றினை பயன்படுத்தும் எடுத்துக்காட்டுகள் பல உள்ளன.

தொடர்ந்து வரும் வடிவியல் பாடங்களில், நீங்கள் கோடுகள் மற்றும் கோணங்களின் பண்புகளைப் பயன்படுத்தி இன்னும் பல பயனுள்ள பண்புகளை தெரிந்து கொள்வீர்கள்.

முதலில் முந்திய வகுப்புகளில் கற்றுக் கொண்ட கோணம் மற்றும் கோடுகள் ஆகியவற்றிற்கு உள்ள தொடர்ப்பு, வரையறை, வார்த்தைகள் போன்றவை மீள்பார்வைக்கு எடுத்துக்கொள்வோம்.

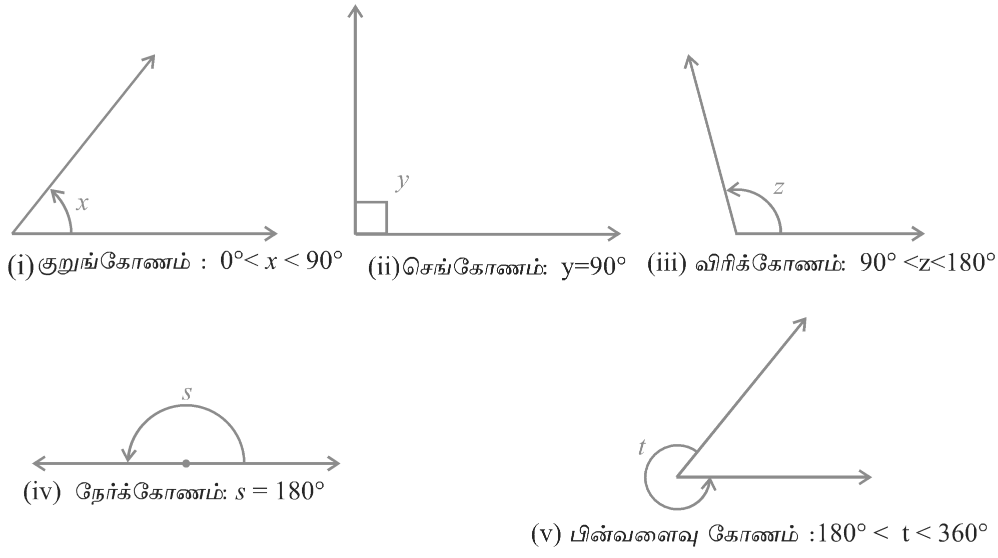
3.2 அடிப்படை வார்த்தைகளும் வரையறைகளும் (Basic Terms and Definitions)

இரண்டு முடிவுப்புள்ளிகளுடன் இருக்கும் ஒரு கோட்டின் ஒரு பகுதி துண்டு ''கோட்டுத்துண்டு'' (Line Segment) என அழைக்கப் படுகிறது. மற்றும் ஒரு முடிவுப்புள்ளி உடன் இருக்கும் ஒரு கோட்டின் பகுதியை கதிர் என கூறுவதும் நாம் மீண்டும் நினைவுப்படுத்துவோம். கவனிக்கவும், AB என்ற கோட்டுத்துண்டை $\overline{AB}$ என்ற குறியீட்டு அடையாளத் தினாலும் மற்றும் அதன் நீளத்தை AB ஆலும் குறிக்கப் படுகிறது. கதிர் AB ஐ $\overline{AB}$

குறியீட்டால் மற்றும் ஒரு கோடு $\overline{AB}$ ஆல் அடையாளப் படுத்தப்படுகிறது. எவ்வாறு இருப்பினும் நாம் அடையாளக் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தாமல் AB கோட்டுத்துண்டு, AB கதிர், AB நீளம், AB கோடு என்ற ஒரேமாதிரியான குறியீட்டால் குறிப்போம். AB என்பது அந்த அமைப்பிலிருந்து தெளிவான வேறுபாட்டை தருகிறது. சில சமயங்களில் கோடுகளை ஆங்கில சிறு எடுத்துக்களான *l, m, n* ஆகியவற்றால் குறிக்கிறோம்.

மூன்று அல்லது அதிகமான புள்ளிகள் ஒரு கோட்டின் மேல் அமைந்திருந்தால் அவைகளை "**ஒரே நேர்க்கோட்டில் அமைந்த புள்ளிகள்**" (collinear points) என அழைக்கப்படுகிறது. அவ்வாறு அமையாவிட்டால் நேர்க்கோட்டில் "**அமையா புள்ளிகள்**" என அழைக்கப்படுகிறது.

இரண்டு கதிர்கள் ஒரு பொதுவான முடிவு புள்ளியிலிருந்து தொடங்கும்போது அமைக்கப் பட்ட இடைவெளியே **கோணம்** என்பதை நினைவுப் படுத்திக் கொள்வோம். கோணத்தை உண்டாக்கும் அந்த கதிர்களை கோணத்தின் **புயங்கள்** எனவும், அந்த கதிரினுடைய முடிவு புள்ளியை கோணத்தின் **உச்சி** (Vertex) என்றும் அழைக்கின்றோம். முந்திய வகுப்புகளில் குறுங்கோணம், செங்கோணம், விரிக்கோணம், நேர்க்கோணம் மற்றும் பின்வளைவு கோணம் போன்ற பல்வகை கோணங்களைப் பற்றி படித்துள்ளீர்கள் (படம் 3.1 இல் பார்)

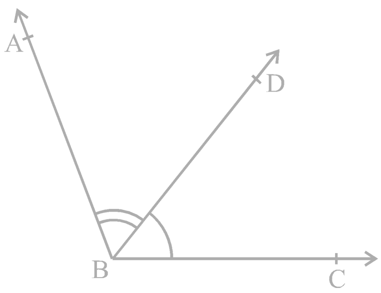


படம் 3.1 : பல்வகை கோணங்கள்

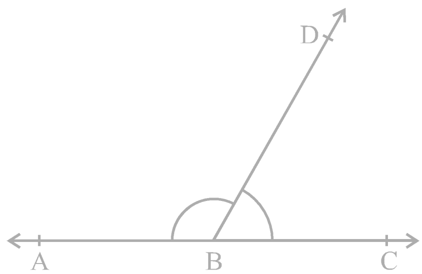
குறுங்கோணம் 0° மற்றும் 90° அளவுக்கு இடையிலும், **செங்கோணம்** சரியாக 90° க்கு சமமாகவும், 90°ஐ விட அதிகமாகவும் 180°ஐ விட

குறைவாகவும் உள்ள ஒரு கோணத்தை **விரிக்கோணம்** என்றும், அதனுடன் 180° க்கு சமமானவை **நேர்க்கோணம்** என்றும், 180° ஐ விட அதிகமாகவும் ஆனால் 360° ஐ விட குறைவாகவும் உள்ள ஒரு கோணத்தை **பின்வளைவுக் கோணம்** என்று அழைக்கப்படுவதை நினைவுக்கு கொண்டு வருவோம். மேலும் இரண்டு கோணங்களின் கூடுதல் 90° ஆக இருப்பதை **நிரப்பு கோணம்** எனவும் மற்றும் இரண்டு கோணங்களின் கூடுதல் 180° ஆக இருப்பதை **மிகை நிரப்பு கோணம்** எனவும் அழைக்கப் படுகின்றன.

இவைகளுடன் அடுத்தடுத்துள்ள கோணங்களைப்பற்றி முந்திய வகுப்புகளில் படித்துள்ளீர் (படம் 3.2 ஐ பார்) இவை **அடுத்தடுத்துள்ள கோணங்கள்** (இரண்டு கோணங்கள்) ஆகும். அவை ஒரு பொதுவான உச்சி, ஒரு பொதுவான புயம் (Arm) அல்லது பக்கம், மற்றும் பொதுவான புயத்திற்கு இரண்டு பக்கங்களிலும் பொதுவில்லாத புயங்கள் இருக்கின்றன. படம் 3.2 இல் ∠ABD மற்றும் ∠DBC என்பன அடுத்தடுத்துள்ள உள்ள கோணங்கள். கதிர் BD அவற்றின் பொதுவான புயம்; புள்ளி B என்பது அவற்றின் கோணங்கள் கதிர் BD இவற்றின் பொதுவான புயம் மற்றும் அடுத்துடுத்து B பொதுவான உச்சி, கதிர் BA மற்றும் கதிர் BC என்பன பொதுவில்லா புயங்கள். இன்னும் இந்த இரண்டு கோணங்கள் அடுத்தடுத்துள்ள கோணங்களாக இருக்கும் போது அவற்றின் கூடுதயானது பொது வில்லா புயங்களால் ஆன. (பக்கங்களால் ஆன) கோணத்திற்கு சமமாக எப்போதும் இருக்கும் ஆகையால்



படம் 3.2 அடுத்தடுத்துள்ள கோணங்கள்



படம் 3.3 நேர்கோட்டுக் கோணங்களின் ஜோடிகள்

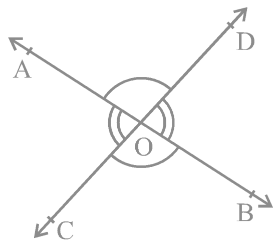
$\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC$ ·

என நம்மால் எழுத முடியும்.

இவற்றைக் கவனி, ∠ABC மற்றும் ∠ABD என்பவை அடுத்தடுத்துள்ள கோணங்கள் அல்ல ஏன்? ஏன்னெற்றால் அவற்றில் பொதுவான புயத்திற்கு ஒரே பக்கத்தில் BD மற்றும் BC என்ற பொதுவில்லா புயங்கள் (பக்கங்கள்) உள்ளன.

படம் *3.2* இல் BA மற்றும் BC என்ற பொதுவில்லா புயங்கள் ஒரு கோட்டால் உருவாக்க படுமாயின்,. இவ்வகையில், ∠ABD மற்றும் ∠DBC ஐ நேர்க்கோட்டு கோணங்களின் சோடிகள் (Linear Pair of Angles) என்று அழைக்கப்படுகின்றன.

AB மற்றும் CD என்ற இரண்டு கோடுகள் ஒன்றையொன்று புள்ளி "O" வில் வெட்டிக் கொள்கின்ற போது உண்டாகும் குத்தெதிர் கோணங்கள் மீண்டும் நீங்கள் நினைப்படுத்திக் கொள்ளுங்களை (படம் *3.4*ஐ பார்) அவைகள் இரண்டு ஜோடி **குத்தெதிர்க் கோணங்கள்** எனப்படும்.

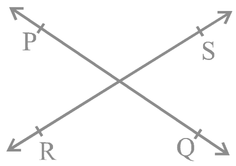


படம் 3.4: குத்தெதிர்க் கோணங்கள்

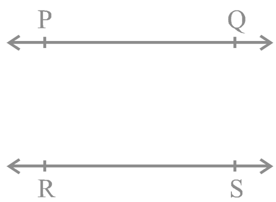
∠AOD மற்றும் ∠BOC என்பன ஒரு ஜோடி கோணங்கள் ஆகும் உங்களால் மற்றொரு ஜோடியை கண்டுபிடிக்க **முடியுமா**?

3.3 வெட்டு கோடுகள் மற்றும் வெட்டா கோடுகள்

இரண்டு வெவ்வேறான கோடுகள் PQ மற்றும் RS ஒரு தாள் மீது வரையவும், அவைகள் படம் *3.5* (i) மற்றும் படம் *3.5* (ii) இல் காட்டப் பட்டது போல இரண்டு வெவ்வேறான வழிகளில் நீங்கள் வரைந்து பார்க்க முடியும்.



(i) குறுக்குவெட்டு



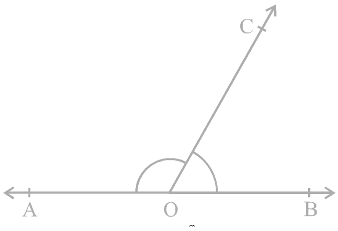
(ii) வெட்டா கோடுகள் (இணைக்கோடுகள்)

படம் 3.5: வரையப்பட்ட இரண்டு கோடுகளின் வேறுபட்ட வகைகள்

நினைவுப்படுத்திகொள்! ஒரு கோட்டில் உள்ள அடையாளக் குறியீடு கவனி. அவை இரண்டு திசைகளிலும் மடிவில்லாத வரை நீ ட்டப் பட்டவை. PQ மற்றும் RS என்ற கோடுகள் படம் *6.5* (i) இல் (உள்ளதுபோல்) வெட்டிக் கொள்கின்றன. படம் *3.5* (ii) இல் இணைக் கோடுகளாக இருக்கின்றன. வெவ்வேறு புள்ளிகளிலிருந்து இரண்டு செ ங்குத்தாய்களை இணைக்கோடுகளுக்கு இடையே வரையும் போது மற்றும் அவைகளுக்கு இடையில் பொதுவான நீளம் (இடைவெளி) இருப்பதையும் கவனிக்கவும். இந்த இரண்டு இணைக் கோடுகளுக்கு இடையில் உள்ள நிளத்தை (இடைவெளிதூரம்) "**சம நீளம்**" (Equal Length) உள்ளவை என அழைக்கின்றோம்.

3.4 கோணங்களின் ஜோடிகள்

3.2 பிரிவில், நிரப்புக் கோணங்கள், மிகை நிரப்புக் கோணங்கள், அடுத்தடுத்துள்ள கோணங்கள், கோணங்களின் நேர்க்கோட்டுச் ஜோடிகள் போன்ற சிலவற்றின் “வரையறைகளை” கற்றிந்துள்ளீர். அந்தக் கோணங்களுக்கு இடையில் உள்ள தொடர்புகள் சிலவற்றை நினைத்து பார்க்க முடியுமா? இப்போது



படம் 3.6 கோணங்களின் நேர் கோட்டு ஜோடிகள்

ஒரு கோட்டின் மேல் ஒரு கதிர் நிற்கும்போது (அமையும் போது) உண்டாகும் கோணங்களுக்கு இடையில் உள்ள தொர்பை, (உறவு) கண்டறிய நாம் எடுத்துக்கொள்வோம். படம் *3.6* இல் காட்டப்பட்டது போல, ஒரு கோட்டின் மேல் ஒரு கதிர் அமையும் படி படம் வரைக. கோடு AB மற்றும் கதிர் OC என பெயரிடுக.

எந்தமாதிரியான கோணம் "O" இல் உருவாகின்றன?

அவைகள் $\angle$AOC, $\angle$BOC மற்றும் $\angle$AOB ஆகும்.

$\angle AOC + \angle BOC = \angle AOB$ என நாம் எழுத முடியுமா? ஆம், முடியும் (ஏன்?) .....(1)

(3.2 பிரிவில் உள்ள அடுத்தடுத்துள்ள கோணங்களை பார்த்து ஆய்வுக்கு எடுத்துக்கொள்)

$\angle$AOB இன் அளவு எவ்வளவு? அவை 180° ஆகும் (ஏன்?) .....(2)

(1) மற்றும் (2) இருந்து $\angle AOC + \angle BOC = 180^\circ$ என நீங்கள் (உங்களால்) சொல்ல முடியுமா? ஆம்! (ஏன்?) மேற்கண்ட முடிவினை கலந்தாலோசித்த பிறகு அதிலிருந்து பின்வரும்

நிபந்தனையை (axiom) நாம் கூறமுடியும்.

நிபந்தனை 3.1 : ஒரு கோட்டின் மேல் ஒரு கதிர் அமையுமானால் அதனால் உருவாகும் அடுத்தடுத்துள்ள கோணங்களின் கூடுதல் 180° ஆகும்.

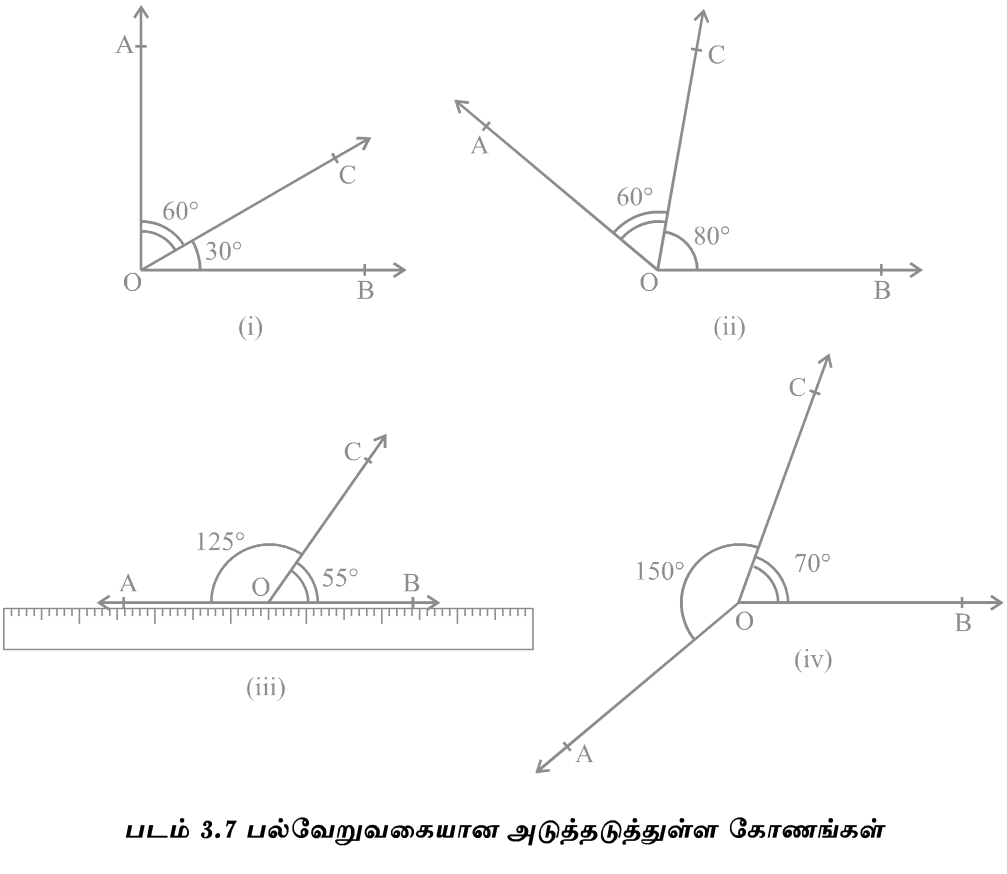
இரண்டு அடுத்தடுத்துள்ள கோணங்களின் கூடுதல் 180° ஆக இருக்கும் போது அந்த கோணங்கள் ‘‘**கோணங்களின் நேர்கோட்டு ஜோடிகள்**’’ என அழைக்கப்படுவதை நினைவுக்கு கொண்டு வாருங்கள்.

நிபந்தனை *3.1* இல் கொடுக்கப்பட்டவை, ஒரு கோட்டின் மேல் ஒரு கதிர் அமைந்துள்ளது. அக்கதிரினால் இரண்டு அடுத்தடுத்துள்ள கோணங்களின் கூடுதல் 180° ஆகும் என்ற முடிவுக்கு நாம் வரலாம்.

நிபந்தனை 3.1 ஐ வேறு வழி முறையில் எழுத முடியுமா? (A) *இரண்டு அடுத்துடுத்துள்ள கோணங்களின் கூடுதல்* 180° *இருக்குமேயானால் அவை ஒரு கோட்டின் மீது ஒரு கதிர் அமைந்திருக்கும் இவை ஒரு கோட்டால் உருவாக்கப்ட்ட பொது வில்லாத புயங்களை கொண்டிருக்கும்.*

இப்போது நீங்கள் பார்ப்பது நிபந்தனை 3.1 மற்றும் வார்த்தை (A) *ஒன்று மற்றொன்றின் மறுதலையாக இருப்பதை உணர்த்துகிறது.*

நாம் இவற்றை ஒன்று மற்றொன்றை மாற்றத்தக்கவை என்கிறோம். வார்த்தை (A) *உண்மை அல்லது உண்மையற்றதா நாம் அறிந்துகொள்ள இயலாது. எனவே சரிப்பார்க்க எடுத்துகொள். படம் 3.7 இல் உள்ளவாறு அடுத்தடுத்துள்ள கோணங்கள் பல அளவுகளில் வெவ்வேறாக வரைக. அவற்றுடன் பொதுவான புயங்கள் இல்லாதவாறு என்ற விதிமுறையை மனதில் வைத்துக் கொண்டு ஒன்றுமட்டும் வரைக இந்த பொதுவில்லா புயத்தை கொண்டுள்ள விதி முறையானது. மற்றவைகளுக்கும் பொருந்துகிறதா?*



படம் 3.7 பல்வேறுவகையான அடுத்தடுத்துள்ள கோணங்கள்

படம் *3.7* (iii) இல் உள்ளவை, இரண்டு பொதுவில்லா புயங்களை (பக்கங்களை) இதில் மட்டும் கொண்டுள்ளதா என்பதைக் கண்டுபிடிக்கவும். அதில் விதிமுறை கடைப்பிடிக்க பட்டுள்ளதா? இதில் புள்ளிகள் A, O மற்றும் B ஒரே கோட்டின் மேல் அமைக்கப்பட்டுள்ளது மற்றும் கதிர் OC அதன்மீது அமைந்துள்ளன அத்துடன் $\angle AOC + \angle COB = 125° + 55° = 180°$ இதிலிருந்து வார்த்தை (A) உண்மை என்ற முடிவுக்கு நீங்கள் வரக்கூடும் ஆகையால் பின்வருபவைகளில் எந்தமாதிரியான நிபந்தனையில் உருவாக்கப் பட்டுள்ளன என்ற வார்த்தையை நீங்கள் கூற முடியும்.

நிபந்தனை 3.2: இரண்டு அடுத்தடுத்துள்ள கோணங்களின் கூடுதல் 180° இருந்தால், அதனுடைய கோணங்களின் பொதுவில்லாத புயங்கள் ஒரு நேர்கோட்டை உருவாக்கும்.

பொருத்தமான காரணத்திற்காக, மேலே உள்ள இரண்டு நிபந்தனைகளையும் சேர்த்து கோணங்களின் ''**நேர்க்கோட்டு ஜோடிகளின் நிபந்தனை**'' என்கிறோம்.

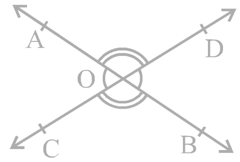
இரண்டு நேர்க்கோடுகள் ஒன்றையொன்று வெட்டிக்கொள்ளும் போது உண்டாகும் கோணங்கள் என்ற வகையில் உள்ள கோணங்களை இப்போது பரிசோதித்தலுக்கு எடுத்துக்கொள்வோம்.

நினைவுப்படுத்துக, முந்திய வகுப்புகளில் பயின்றவை, "இரண்டு நேர்க்கோடுகள் ஒன்றையொன்று வெட்டிக் கொள்ளவதால் உண்டாகும் குத்தெதிரிக் கோணங்கள் சமம்"

இப்பொழுது அதன் முடிவுகளை நிருபிக்க எடுத்துக்கொள்வோம். பிற்ச்சோர்க்கை *1* இல் உள்ளதை பார்க்கவும், நிருபணத்தின் (ingredients) காக மற்றும் கீழ்யுள்ளவற்றை நிருப்பதற்காக அவைகள் மனதில் வை.

தேற்றம் (3.1): “இரண்டு கோடுகள் ஒன்றையொன்று வெட்டிக் கொள்வதனால் உண்டாகும் குத்தெரிக் கோணங்கள் சமம்''

நிருபணம்: மேலுள்ள வாக்கியத்தில் “இரண்டு கோடுகள் ஒன்றையொன்று வெட்டிக் கொள்கின்றன'' என்பவை கொடுக்கப்பட்டுள்ளன ஆகையால். AB மற்றும் CD என்ற இரண்டு கோடு கள் "O" வில் வெட்டில் கொள்வதை படம் *3.8* இல் காட்டப்பட்டுள்ளது போல எடுத்துக்கொள் அந்த இரண்டு குத்தெதிர்க் கோண ஜோடிகளுக்கு பெயர் வைப்போம்.



படம் 3.8 குத்தெதிர்க் கோணஙங்களள்

பெயர்கள் (i) $\angle AOC$ மற்றும் $\angle BOD$

(ii) $\angle AOD$ மற்றும் $\angle BOC$

நாம் $\angle AOC = \angle BOD$ மற்றும் $\angle AOD = \angle BOC$ என நிருபிக்க வேண்டும்.

இப்போது, OA கதிர்யானது CD கோட்டின் மேல் நிற்கிறது (அமைந்துள்ளது).

அப்படியென்றால் $\angle AOC + \angle AOD = 180°$ ஆகும் .....(1)

$\angle AOD + \angle BOD = 180°$ என நம்மால் எழுதமுடியுமா? ஆம், எழுதமுடியும். (ஏன்?) .....(2)

(1) மற்றும் (2) இவற்றில் இருந்து நம்மால் எழுதமுடியும்.

$\angle AOC + \angle AOD = \angle AOD + \angle BOD$

அதிலிருந்து $\angle AOC = \angle BOD$

இதேபோல், $\angle AOD = \angle BOC$ என்று

நிருபிக்கப்படுகிறது.

(2.2 பிரிவையும் நிபந்தனை 3 யும் பார்த்து கற்றிதல்)

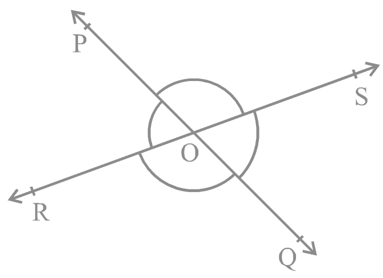
இப்போது 3.1 மற்றும் நேர்க்கோட்டு ஜோடி

நிபந்தனைநின் அடிப்படையில் சில எடுத்துக்காட்டுகளை பரிசோதிப்பதற்காக எடுத்துக்கொள்வோம்.

***எடுத்துக்காட்டு 1:** படம் 3.9 இல், PQ மற்றும் RS என்ற கோடுகள் "O" வில் வெட்டிக் கொள்கிறது.*

$\angle POR : \angle ROQ = 5:7$ என்றால்

அனைத்து கோணங்களையும் கண்டுபிடி.



படம் 3.9

***தீர்வு :** $\angle POR + \angle ROQ = 180°$*

(கோணங்களின் நேர்க்கோட்டுச் ஜோடிகள்)

ஆனால் $\angle POR : \angle ROQ = 5 : 7$ *(கொடுக்கப்பட்டவை)*

அப்படியானால் $\angle POR = \frac{5}{12} \times 180° = 75°$

இதேபோல் $\angle ROQ = \frac{7}{12} \times 180° = 105°$

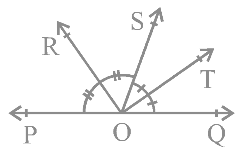
இப்போது $\angle POS = \angle ROQ = 105°$ *(குத்தெதிர்க் கோணங்கள்)*

மற்றும் $\angle SOQ = \angle POR = 75°$ *(குத்தெதிர்க் கோணங்கள்)*

எடுத்துக்காட்டு 2: *படம் 3.10* இல், கதிர் OS ஆனது POQ என்ற ஒரு கோட்டின் மீது அமைந்துள்ளது, கதிர் OR மற்றும் கதிர் OT ஆனவை

$\angle$ POS மற்றும் $\angle$ SOQ இன் கோண இருசம வெட்டிகள் ஆகும், $\angle$ POS $= x$ எனில் $\angle$ ROT யை கண்டுபிடி

தீர்வு: கதிர் OS ஆனது POQ கோட்டின் மேல் அமைந்துள்ளது



படம் 3.10

ஆகையால் $\angle POS + \angle SOQ = 180^{o}$

ஆனால் $\angle POS = x$

அப்படியானால் $x + \angle SOQ = 180°$

எனவே $\angle SOQ = 180° - x$

இப்போது கதிர் OR ஆனது $\angle$POS கோண இருசமவெட்டி

அப்படியானால் $\angle ROS = \frac{1}{2} \angle POS$

$= \frac{1}{2} \times x = \frac{x}{2}$

இதேபோல $\angle SOT = \frac{1}{2} \times \angle SOQ$

$= \frac{1}{2} \times (180° - x) = 90° - \frac{x}{2}$

$\angle ROT = \angle ROS + \angle SOT$

$= \frac{x}{2} + 90° - \frac{x}{2} = 90°$

எடுத்துக்காட்டு 3: *படம் 3.11* இல், OP, OQ, OR, மற்றும் OS என்பன நான்கு கதிர்கள், எனில்

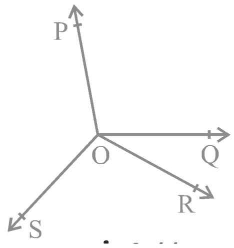
$\angle POQ + \angle QOR + \angle SOR + \angle POS = 360°$ என நிருபி

தீர்வு: நீங்கள் OP, OQ, OR, அல்லது OS இவற்றில் ஏதாவது ஒரு கதிரை புள்ளிக்கு பின்னோக்கி நீட்ட வேண்டும். கதிர் OQ வை புள்ளிக்கு பின்னோக்கி T வரை நீட்டப்பட்டதாக எடுத்துக்கொளவோம் ஆகையால் TOQ ஒரு கோடு ஆகும் (படம் ***3.12*** ஐ பார்) இப்போது, கதிர் OP யானது, TOQ கோட்டின் மேல் அமைந்துள்ளது

அப்படியானால் $\angle TOP + \angle POQ = 180°$ ...(1)

(நேர்க்கோட்டு ஜோடி நிபந்தனை படி)

இதேபோல, கதிர் OS ஆனது TOQ கோட்டின்மேல் அமைந்துள்ளது அப்படியானால்
$\angle TOS + \angle SOQ = 180^\circ$ ...(2)



படம் 3.11

ஆனால் $\angle SOQ = \angle SOR + \angle QOR$

எனவே, (2) பின்வருமாறு ஆகும்

$\angle TOS + \angle SOR + \angle QOR = 180^\circ$ ...(3)

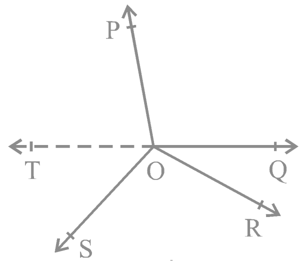
இப்போது, *(1)* மற்றும் *(2)* ஐ கூட்டினால் நாம் பெறுவது

$\angle TOP + \angle POQ + \angle TOS + \angle SOR + \angle QOR = 360^\circ$ ...(4)

ஆனால் : $\angle TOP + \angle TOS = \angle POS$

அப்படியொனால் (4) ஆனது.

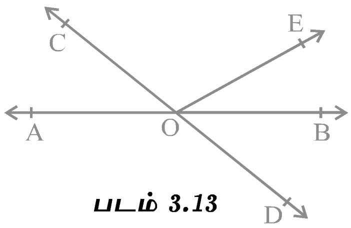
$\angle POQ + \angle QOR + \angle SOR + \angle POS = 360^\circ$



படம் 3.12

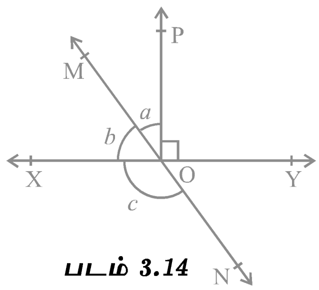
பயிற்சி 3.1

1. படம் *3.13* இல், AB மற்றும் CD என்ற கோடுகள் O வில் வெட்டிக் கொள்கின்றன. $\angle AOC + \angle BOE = 70^\circ$ மற்றும் $\angle BOD = 40^\circ$ ஆக இருந்தால் $\angle BOE$ மற்றும் பின்வளைவு கோணம் $\angle COE$ ஐ கண்டுபிடி.



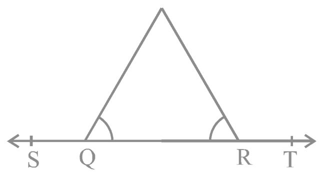
படம் 3.13

2. படம் *3.14* இல், XY மற்றும் MN என்ற கோடுகள் "O" என்ற புள்ளியில் வெட்டிக்கொள்கின்றன. $\angle POY = 90^\circ$ மற்றும் $a : b = 2 : 3$ ஆயின் "c" ஐ கண்டுபிடி.



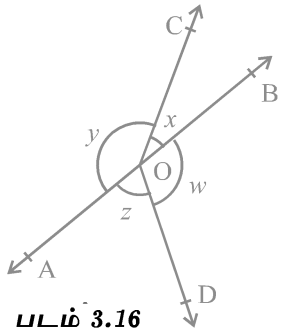
படம் 3.14

3. படம் *3.15* இல் $\angle PQR = \angle PRQ$ ஆயின் $\angle PQS = \angle PRT$ என நிறுவுக.



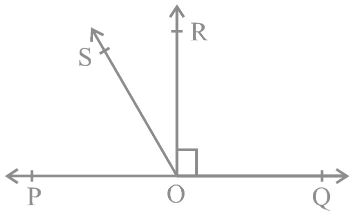
படம் 3.15

4. *படம் 3.16 இல்* $x + y = w + z$ *எனில்* AOB *என்பது ஒரு கோடு என நிரூபி.*



படம் 3.16

5. *படம் 3.17 இல்* POQ *என்பது ஒரு கோடு,* OR *கதிர் ஆனது* PQ *கோட்டுக்கு செங்குத்தாக உள்ளது* OS *என்பது மற்றொருகதிர்* OP *மற்றும்* OR *கதிர்களுக்கு இடையில் அமைக்கப் பட்டுள்ளன .*



படம் 3.17

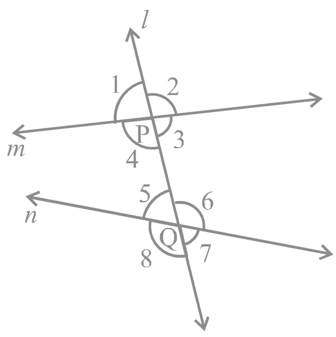
$\angle \text{ROS} = \frac{1}{2}\ (\angle \text{QOS} - \angle \text{POS})$ *என நிரூபி.*

6. $\angle XYZ = 64^\circ$ *என கொடுக்கப் பட்டுள்ளது மற்றும்* XY *ஆனது* P *என்ற புள்ளிவரை நீட்டிக்க படுகிறது. இந்த விளக்கத்திற்கு படம் வரைக. கதிர்* YQ *ஆனது* $\angle ZYP$ *ஐ இருசமமாக வெட்டுகிறது எனில்* $\angle XYQ$ *மற்றும்* $\angle QYP$ *பின் வளைவு கோணங்களைக் காண்க.*

3.5 இணை கோடுகள் மற்றும் ஒரு குறுக்கு வெட்டு கோடு (Parallel Lines and a Transversal)

*ஒரு கோடு ஆனது இரண்டு அல்லது அதிகமான கோடுகளை வெவ்வேறு புள்ளிகளில் வெட்டிக் கொண்டால் அந்த கோட்டை "**குறுக்கு வெட்டுக்கோடு**" (Transversal) என்று அழைக்கப் படுவதை நினைவுப்படுத்தி கொள்க, (படம் 3.18 இல் பார்) கோடு* l *ஆனது* m *மற்றும்* n *என்ற கோடுகளை* P *மற்றும்* Q *என்ற புள்ளிகளில் வெட்டிக் கொள்கின்றன. அப்படியானால்,* m *மற்றும்* n *என்ற கோட்டுக்கு "குறுக்கு வெட்டுக் கோடு* l *ஆகும்.* P *மற்றும்* Q *என்ற வொவ்வரு புள்ளிகளிலும் நான்கு கோணங்கள் உருவாகி இருப்பதை கவனிக்கவும் இந்த மாதிரியான கோணங்கள்* $\angle 1, \angle 2, ... \angle 8$ *என பெயர் சூட்டப்பட்டதை அறிந்து கொள், இவை படம் 6.18 இல் காட்டப் பட்டுள்ளது.*

$\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 7$, $\angle 8$ என்பவை **''வெளிக் கோணங்கள்''** (exterior) என்றும் $\angle 3$, $\angle 4$, $\angle 5$, $\angle 6$ என்பன உள்கோணங்கள் (Interior angles) என்றும் அழைக்கப் படுகிறது.



படம் 3.18

முந்திய வகுப்புகளில் நீங்கள் கற்றறிந்து உள்ளீர்கள் இரண்டு கோடுகள் ஒரு குறுக்கு வெட்டுக் கோட்டால் வெட்டும் போது உண்டாகும் கோணங்களின் ஜோடிகளை நினைவுப்படுத்தி கொள்ளுங்கள், அவை பின்வருமாறு.

(a) ஒத்தகோணங்கள் (corresponding Angle)

(i) $\angle 1$ மற்றும் $\angle 5$ (ii) $\angle 2$ மற்றும் $\angle 6$

(iii) $\angle 4$ மற்றும் $\angle 8$ (iv) $\angle 3$ மற்றும் $\angle 7$

(b) ஒன்றை விட்ட உள் கோணங்கள் (Alternate interior Angle)

(i) $\angle 4$ மற்றும் $\angle 6$ (ii) $\angle 3$ மற்றும் $\angle 5$

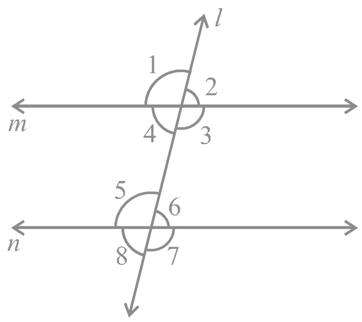
(c) ஒன்றை விட்ட வெளி கோணங்கள் (Alternate exterior angles)

(i) $\angle 1$ மற்றும் $\angle 7$ (ii) $\angle 2$ மற்றும் $\angle 8$

(d) குறுக்கு வெட்டு கோட்டின் ஒரே பக்கத்தில் அமைந்த உள் கோணங்கள்

(i) $\angle 4$ மற்றும் $\angle 5$ (ii) $\angle 3$ மற்றும் $\angle 6$

உள்கோணங்கள் குறுக்கு வெட்டிக்கு ஒரே பக்கத்தில் இருந்தால் அந்த கோணங்கள் தொடர்ச்சியான உள்கோணங்கள் அல்லது கூட்டு உட்கோணங்கள் அல்லது துணை உள்கோணங்கள் என்று கூறுவர் அடுத்தடுத்தாக பலநேரங்களில் நாம் உள்ஒன்றை விட்ட கோணத்தை சாதாரணமாக ஒன்றை விட்ட கோணம் என்ற வார்த்தையே பயன்படுத்துகின்றோம்.



படம் 3.19

இப்பொழுது, *m* மற்றும் *n* என்பன இணைக்கோடுகளாக இருக்குபோது *l* என்ற குறுக்குவெட்டுகோட்டால் வெட்டும் போது அதில் உண்டாகும் ஜோடி கோணங்களுக்கு இடையே உள்ள தொடர்பை நாம் எடுத்துக்கொள்வோம்.

உங்களுக்கு தெரியும், உங்களுடைய 'கோடுபோட்ட குறிப்புச் சுவடி' இல் (in ruled lines Note book) உள்ள கோடுகள் இவ்வாறு படம் *3.19* இல் காட்டப்பட்டு உள்ளது போல இரண்டு இணையான கோடுகளை ஒரு குறுக்கு வெட்டுக் கோட்டால் வெட்டுவது போல் பென்சில், மற்றும் அளவுகோல் கொண்டு வரைக.

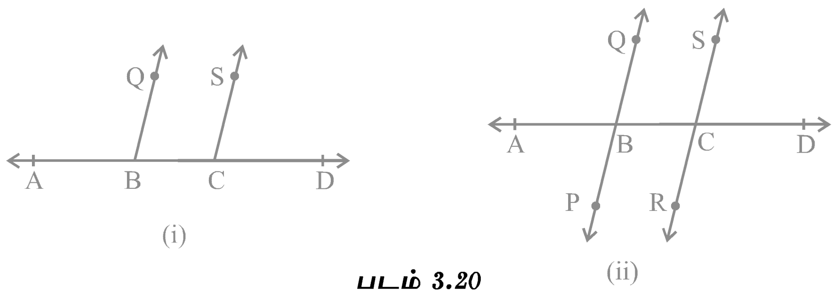
இப்போது ஏதாவது ஒரு ஜோடி ஒத்தகோணங்களை அளக்கவும் மற்றும் அவற்றிற்கு இடையே உள்ள தொடர்பை வெளிபடுத்துங்கள். நீங்கள் $\angle 1 = \angle 5$, $\angle 2 = \angle 6$, $\angle 4 = \angle 8$ மற்றும் $\angle 3 = \angle 7$ இருப்பதைக் கண்டுபிடிக்கலாம்.

பின்வரும் நிபந்தனைகளை முடிவு செயலாம்.

நிபந்தனை* (axiom) *3.3: ஒரு குறுக்கு வெட்டுக் கோட்டால் இரண்டு இணைக்கோடுகளை வெட்டும் போது உண்டாகும் ஒத்தகோணங்களின் ஒவ்வொரு ஜோடியும் சமமாகும்.

நிபந்தனை 3.3 ஆனது ஒத்தகோண நிபந்தனை எனப்படுகிறது பின்வருவனவற்றில் எது நிபந்தனையின் மறுதலையாக உள்ளது கலந்து பேசி முடிவு செய்க.

ஒரு குறுக்கு வெட்டுக் கோட்டால், இரண்டு கோடுகள் வெட்டப்பட்டால் அதனால் உண்டான ஒத்த கோணங்களில் ஒரு ஜோடி சமமெனில் அந்த இரண்டு கோடுகள் இணையாக இருக்கும். இந்த வாக்கியம் உண்மையானதா? (சரியா?), பின்வருபவைகளை கொண்டு சரிப்பார்க்க முடியும், AD என்ற கோடுவரைக மற்றும் அதன் மேல் B மற்றும் C என்ற புள்ளிகளைக் குறி, B மற்றும் C இல் $\angle ABQ$ மற்றும் $\angle BCS$ க்கு சமமாக படம் *3.20* (i) இல் காட்டியதுபோல மற்றவை ஒவ்வொன்றிற்றகும் வரைக.



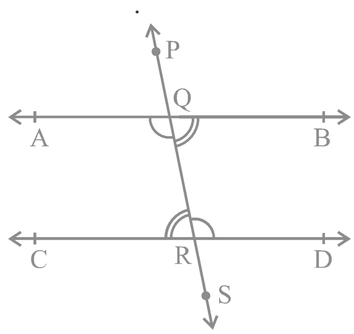
படம் 3.20

(படம் *3.20* (ii) இல் உள்ளதை பார்) PQ மற்றும் RS என்ற கோடு களை உருவாக்க AD இன் மற்றொரு பக்கத்தின் மேல் QB மற்றும் SC நீட்டு. அந்த இரண்டு கோடுகளும் ஒன்றுமற்றொன்றை வெட்டுவதில்லை என்பதை நீங்கள் கவனிக்கலாம். PQ மற்றும் RS என்ற இரண்டு கோடுகளுக்கு வெவ்வேறு புள்ளிகளில் பொதுவான செங்குத்துகளையும் கூட நீங்கள்

வரையலாம் மற்றும் அவைகளுக்கு இடைப்பட்ட நீளங்களை அளக்கவும் எங்கு பார்த்தாலும் அந்த நீளம் ஒரே மாதிரியாக இருப்பதை நீங்கள் கண்டுபிடிக்கவும், அப்படியானால், அந்தகோடுகள் இணைக்கோடுகளாக இருக்கும் என்ற முடிவுக்கு நீங்கள் வரலாம். ஆகையால் ஒத்தகோணங்களின் நிபந்தனையின் மறுதலைக் கூட சரியாகும் எனவே நாம் பின்வரும் நிபந்தனையைப் நிபந்தனைகளை பெறுவோம்.

நிபந்தனை 3.4: ஒரு குறுக்கு வெட்டு கோட்டால் இரண்டு கோடுகள் வெட்டப்பட்டு அவற்றில் ஒத்தகோணங்களில் ஒரு ஜோடி கோணங்கள் சமமாக இருந்தால் அந்த கோடுகள் ஒன்றுக்கொன்று இணையாகும்.

ஒரு குறுக்கு வெட்டுக் கோட்டால் இரண்டு இணைக் கோடுகளை வெட்டப் பட்டபோது உண்டாகும் ஒன்றைவிட்ட உள்கோணங்களுக்கு இடையேயுள்ள தொடர்ப்புகளை கண்டுபிடிக்க, ஒத்தகோண நிபந்தனையான உண்மையை (வாக்கியம்) உங்களால் பயன் படுத்த முடியுமா?



படம் 3.21

படம் ***3.21*** இல் பார், PS என்ற குறுக்கு வெட்டு கோடானது AB மற்றும் CD என்ற இணைக் கோடுகளை Q மற்றும் R என்ற புள்ளிகளில் வெட்டிக் கொள்கிறது.

$\angle BQR = \angle QRC$ மற்றும் $\angle AQR = \angle QRD$ ஆக உள்ளதா? நீங்கள் தெரிந்துக் கொண்டவை.

$$\angle PQA = \angle QRC \qquad .....(1)$$

(ஒத்தக்கோண நிபந்தனை)

$\angle PQA = \angle BQR$ உள்ளதா? ஆம், சமம் (ஏன்?) .....(2)

ஆகையால் (1) மற்றும் (2) இருந்து

$\angle BQR = \angle QRC$ என்ற முடிவுக்கு வரலாம்

இவ்வாறே, $\angle AQR = \angle QRD$

மேலே குறிப்பிட்டுள்ள முடிவினை கீழே கொடுத்துள்ள தேற்றத்தின் வழியாக கூற முடியும்.

தேற்றம் *3.2:* “ஒரு குறுக்கு வெட்டு கோடானது, இரண்டு இணைக்கோடுகளை வெட்டினால் உண்டாகும் ஒற்றை விட்ட உள்கோணங்களின் ஒவ்வொரு ஜோடிகளும் சமமாக இருக்கும்”

இப்போது ஒத்த கோணங்களின் நிபந்தனையை பயன்படுத்தி உங்களால் ஒரு ஜோடி ஒன்றை விட்ட உள்கோணங்கள் சமமாக இருந்தால் இரண்டு கோடுகள் இணையாக உள்ளது என நம்மால் காட்ட முடியுமா? படம் *3.22* இல் பார். PS குறுக்கு வெட்டுக் கோட்டால் AB மற்றும் CD கோடுகள் "Q" மற்றும் "R" என்ற புள்ளிகளில் வெட்டிக் கொண்டால் அவை இவ்வாறு இருக்கும்.

$\angle$ BQR = $\angle$QRC

AB || CD *யா ?* $\angle$ BQR =$\angle$ PQA *(ஏன்?)* .....(1)

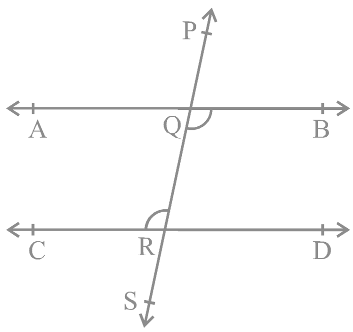
ஆனால் $\angle$ BQR =$\angle$ QRC *(கொடுக்கப்பட்டவை)* .....(2)

ஆகாயையல் *(1)* மற்றும் *(2)* இருந்து நீங்கள் இந்த முடிவுக்கு வரலாம்.

$\angle$ PQA =$\angle$ QRC

ஆனால் அவைகள் ஒத்தகோணங்கள்,

ஆனால் AB || CD *(ஒத்த கோணங்களின் வாக்கியத்தின் மறுதலை)* இந்த முடிவை கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள ஒரு தேற்றமாக கூற முடியும்.



படம் 3.22

தேற்றம் 3.3 : ஒரு குறுக்கு வெட்டுக் கோடானது, இரண்டு நேர்க்கோடுகளை வெட்டும் போது ஒன்றை விட்ட கோணங்களில் ஒரு ஜோடி கோணங்கள் சமமானால் அந்த இரண்டு கோடுகள் இணையாக இருக்கும்.

அதைப்போலவே, குறுக்கு வெட்டுக் கோட்டுக்கு ஒரே பக்கத்தின் மேல் உள்ள உள்கோணங்களுக்கு இடையேயுள்ள தொடர்பை பின்வரும் இரண்டு தேற்றங்கள் மூலம் நீங்கள் காணமுடியும்.

தேற்றம் 3.4: ஒரு குறுக்கு வெட்டுக் கோடானது இரண்டு இணைக்கோடுகளை வெட்டினால், குறுக்கு வெட்டுக் கோட்டின் ஒரே பக்கத்தின் மீது அமைந்துள்ள ஒவ்வொரு ஜோடி உள்கோணங்களும் மிகை நிரப்பு கோணங்களாக இருக்கும்.

தேற்றம் 3.5: ஒரு குறுக்கு வெட்டுக் கோடானது இரண்டு கோடு களை வெட்டுகிறது போது அந்த குறுக்கு வெட்டிக்கோட்டுக்கு ஒரே பக்க த்தில் அமைந்த உள்கோணங்களின் ஒரு ஜோடி ஆனது மிகை நிரப்புக் கோணங்களாக அமையும் போது அவ்விரண்டு இரண்டு கோடுகள் இணை கோடுகளாக இருக்கும்.

மேலே கூறப்பட்ட வாக்கியங்கள் அனைத்தும் முந்திய வகுப்புகளில் செயல்பாடுகளின் மூலம் சரிப்பார்க்கப்பட்டுள்ளது என்பதை நினைவுபடுத்தி கொள்ளவும். மீண்டும் அந்த செயல்பாட்டுகளை இங்கு செய்யலாம்.

3.6 ஒரே கோட்டுக்கு இணையான கோடுகள்

இரண்டு கோடுகள் ஒரு கோட்டுக்கு இணையாக இருந்தால் இருந்தால், அவைகள் ஒன்றுக்கொன்று இணைக்கோடுகளாக இருக்குமா? அதை சரிப்பார்க்க படம் *3.23* இல் உள்ளதுபோல எடுத்துக்கொள்வோம் அதில்.

கோடுகள்ள $m \parallel$ கோடு l மற்றும் $n \parallel$ கோடு l.

கோடுகள் l, m மற்றும் n கோடுகளுக்கு t என்ற ஒரு வெட்டுக்கோடு வரை எடுத்துக்கொள்வோம்.

அதில் கோடுள் $m \parallel$ கோடு l மற்றும் $n \parallel$ கோடு l என்பது கொடுக்கப் பட்டிருக்கிறது.

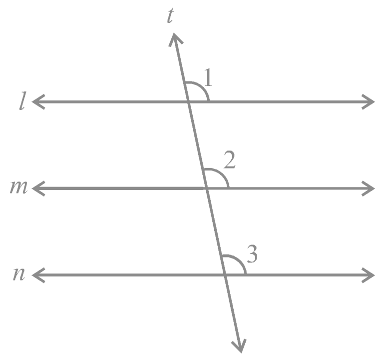
அப்படியென்றால்

$\angle 1 = \angle 2$ மற்றும் $\angle 1 = \angle 3$

(ஒத்தகோணங்கள் நிபந்தனை) எனவே $\angle 2 = \angle 3$ (ஏன்?)

ஆனால் $\angle 2$ மற்றும் $\angle 3$ ஒன்றை விட்ட கோணங்கள் மற்றும் அவைகள் சமம்.

அப்படியானால் கோடு $m \parallel$ கோடு n என்று உங்களால் சொல்ல முடியும் (ஒத்த கோணங்களின் நிபந்தனையின் மறுதலை யாகும்)



படம் 3.23

இதன் முடிவை பின்வரும் தேற்றமாக சொல்ல முடியும்.

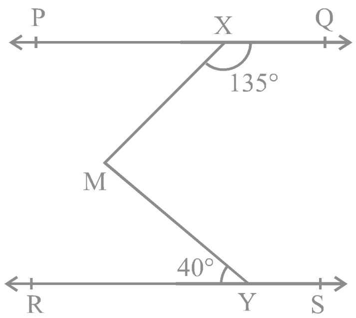
தேற்றம் 3.6: ஒரே கோட்டிற்கு இணையாக அமைந்த கோடுகளானவை ஒன்றிற்கு ஒன்று இணையாக அமையும்.

குறிப்பு : மேற்குறிப்பிட்ட பண்பானது இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட கோடுகளுக்கும் நீட்டிக்க முடியும்.

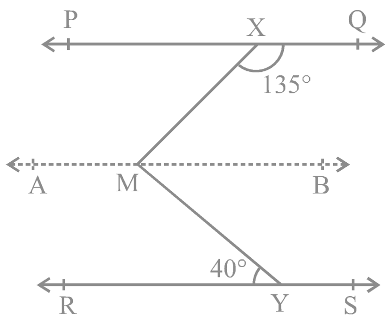
இப்போது இணைக்கோடுகளுக்கு தொடர்பான தீர்வை காண சில எடுத்துக் காட்டுகளை எடுத்துக்கொள்வோம்.

எடுத்துக்காட்டு 4: படம் *3.24* இல், $PQ \parallel RS$, $\angle MXQ = 135^{\circ}$ மற்றும் $\angle MYR = 40^{\circ}$ எனில் $\angle XMY$ஐ கண்டுபிடி.

தீர்வு: இங்கு, படம் *3.25* இல் காட்டப்பட்டது போல கோடு PQ க்கு இணையாக ஒரு கோடு AB யை புள்ளி M இன் வழியாக வரையவேண்டும்.



படம் 3.24



படம் 3.25

இப்போது AB || PQ மற்றும் PQ || RS

அப்படியென்றால் AB || RS *(ஏன்?)*

இப்போது, $\angle QXM + \angle XMB = 180^\circ$

(AB||PQ,XM வெட்டுக்கோட்டின் ஒரே பக்கத்தின் மீதுள்ள உள்கோணங்கள்)

ஆனால், $\angle QXM = 135^\circ$

ஆகையால் $135^\circ + \angle XMB = 180^\circ$

அப்படியானால் $\angle XMB = 45^\circ$ .....(1)

இப்பொழுது $\angle BMY = \angle MYR$ (AB || RS ஒன்றைவிட்ட கோணம்)

ஆகையால் $\angle BMY = 40^\circ$ .....(2)

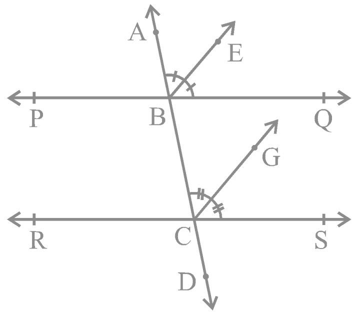
(1) மற்றும் *(2)* ஐ கூட்டினால் நாம் பெறுவது

$\angle XMB + \angle BMY = 45^\circ + 40^\circ$

$\therefore \angle XMY = 85^\circ$ இப்படி இருக்கும்

எடுத்துக்காட்டு 5: ஒரு குறுக்கு வெட்டு கோடானது இரண்டு கோடு களை வெட்டும் போது உருவான ஒத்த கோணங்களின் ஒரு ஜோடியை இருசமமாக வெட்டும்கோடுகள் இணைக்கோடுகளாக இருந்தால் அந்த இரண்டு கோடுகளும் இணைக் கோடுகளாகும் - என நிருபி.

தீர்வு : *படம் 3.26 இல்* AD *என்ற ஒரு குறுக்கு வெட்டுக் கோடானது* PQ *மற்றும்* RS *என்ற இரண்டு கோடுகளை* B *மற்றும்* C *என்ற புள்ளிகளில் வெட்டிக் கொள்கின்றன. கதிர்* BC *ஆனது* ∠ABQ *இன் இருசமவெட்டுக் கோடு மற்றும் கதிர்* CG, ∠BCS *இன் இரு சமவெட்டி என்பது கொடுக்கப் பட்டுள்ளன.*



படம் 3.26

நாம் PQ || RS *என நிரூபிக்க,*

ஆகையால் $\angle ABE = \frac{1}{2}\angle ABQ$ .....(1)

இதேபோன்று $\angle BCG = \frac{1}{2}\angle BCS$ ......(2)

ஆனால் BE||CD *மற்றும்* AD *என்பது ஒரு குறுக்கு வெட்டு கோடு.*

ஆகையால் $\angle ABE = \angle BCG$ ....(3)

(ஒத்த கோணங்களின் நிபந்தனை)

(1) மற்றும் (2) ஐ (3) இல் பதிலீடு செய்தால் நமக்கு கிடைப்பது.

$$\frac{1}{2}\angle ABQ = \frac{1}{2}\angle BCS$$

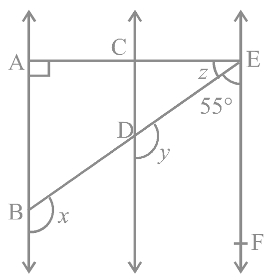
எனவே $\angle ABQ = \angle BCS$

ஆனால் அவைகளின் AD *குறுக்கு வெட்டுக் கோட்டால்* PQ *மற்றும்* RS *உடன் வெட்டும் போது உருவான ஒத்த கோணங்கள் சமமாக இருக்கிறது.*

அப்படியானால் PQ || RS *(ஒத்த கோணங்களின் நிபந்தனை இன் மறுதலை ஆகும்)*

எடுத்துக்காட்டு 6: *படம் 3.27 இல்,* AB || CD *மற்றும்* CD || EF *அதனுடன்* EA ⊥ AB, ∠BEF = 55° *எனில்* x, y *மற்றும்* z *இன் மதிப்புகளைக் கண்டுபிடி.*

தீர்வு: $y + 55° = 180°$ *(ED என்ற குறுக்கு வெட்டுக் கோட்டின் ஒரே பக்கத்தில் மேலுள்ள உள்கோணங்கள்)*



படம் 3.27

ஆகையால் $y = 180° - 55° = 125°$

மீண்டும் $x = y$ *(AB || CD, ஒத்த கோணங்களின் நிபந்தனை)*

அப்படியானால் $x = 125°$

இப்போது, AB || CD மற்றும் CD || EF இல் இருந்து

AB || EF

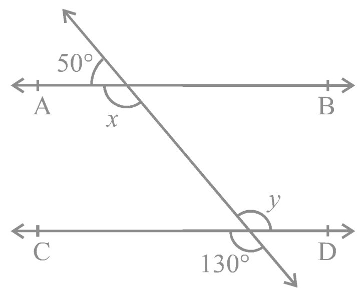
ஆகையால், ∠EAB +∠FEA=180° (EA என்ற குறுக்கு வெட்டுக் கோட்டின் ஒரே பக்கத்தின் மேல் அமைந்த உள்கோணங்கள்)

எனவே 90° + Z + 55° = 180°

Z = 35° என தருகிறது,

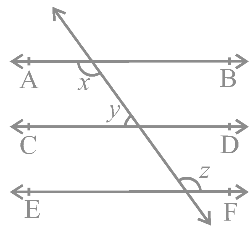
பயிற்சி 3.2

1. படம் *3.28* இல் *x* மற்றும் *y* இன் மதிப்புகள் கண்டுபிடி மற்றும் AB || CD எனக் காட்டுக.



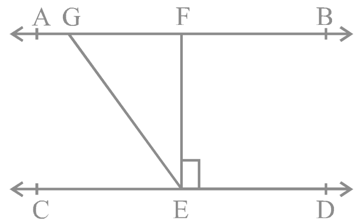
படம் 3.28

2. படம் *3.29* இல், AB || CD, CD || EF மற்றும் *y* : *z* =3:7 எனில் *x* இன் மதிப்பு கண்டுபிடி.



படம் 3.29

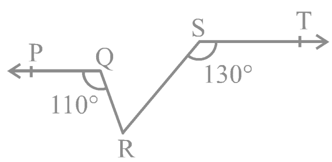
3. படம் *3.30* இல் AB || CD, EF ⊥ CD மற்றும் ∠GED =126° எனில் ∠AGE, ∠GEF மற்றும் ∠FGE இன் அளவுகள் காண்க.



படம் 3.30

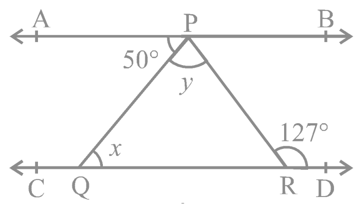
4. படம் *3.31* இல், PQ || ST, ∠PQR = 110° மற்றும் ∠RST = 130° எனில் ∠QRS ஐ கண்டுபிடி.

   (குறிப்பு புள்ளி R இன்வழியாக ST க்கு இணைக்கோடுகள் வரைக)



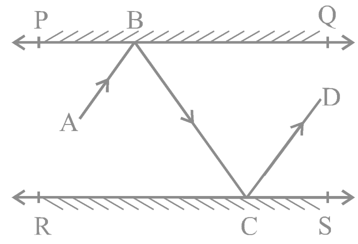
படம் 3.31

5. *படம் 3.32 இல்,* AB || CD, ∠APQ = 50° *மற்றும்* ∠PRD =127° *எனில்* x *மற்றும்* y *இன் மதிப்புகளை காண்க.*



படம் 3.32

6. *படம் 3.33 இல்* PQ *மற்றும்* RS *என்ற இரண்டு ஆடிகளை ஒன்றுக்கொன்று இணையாகவைக்கப்படுள்ளது. கதிர்* AB *யானது* PQ *மீது* B *இல் (பட்டு) அக்கதிர் பிரதிபலிக்கப்பட்டு* BC *வழியாக ஆடி* RS *இன் மேல்* C.



படம் 3.33

இல் (பட்டு) CD *யின் மூலம் வெளியேறுகிறது, என்றால்* AB||CD *என நிருபி.*

3.7 முக்கோணத்தின் கோண கூடுதல் பண்பு

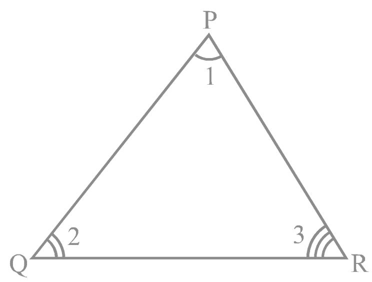
(Angle Sum property of a Triangle)

முந்திய வகுப்புகளில் ஒரு முக்கோணத்தின் எல்லா கோணங்களின் கூடுதல் 180° ஆகும் என்பதை செயல்பாட்டின் வழியாக படித்துள்ளீர். நாம் இந்த வாக்கியத்தை இணைக் கோடுகளுக்கு உள்ள தேற்றம் மற்றும் நிபந்தனை பயன்படுத்தி நிருபிக்க முடியும்.

தேற்றம் 3.7: ஒரு முக்கோணத்தின் (மூன்று) கோணங்களின் கூடுதல் 180° ஆகும்.

நிருபணம் : மேலே உள்ள வாக்கயத்தில்

கொடுக்கப்பட்டுள்ள ஊகம் (hypothis) என்ன என்பதை எடுத்துக் கொள் நிருபிக்க, நமக்கு என்ன தேவைபடுகிறது? PQR என்ற ஒரு முக்கோணத்தில் ∠1, ∠2 மற்றும் ∠3 இவையாவையும் ΔPQR இன் கோணங்கள்



படம் 3.34

(படம் 3.34 இல் பார்க்கவும்) நாம் நிருபிக்க வேண்டியவை ∠1 + ∠2 + ∠3 = 180° *படம் 3.35* இல் காட்டியதுபோல உச்சி P க்கு திராக QR க்கு இணையாக XPY என்ற ஒரு கோடு வரைந்து கொள்வோம்.

எனவே நாம் இப்போது இணைக் கோடுகளுக்கு தொடர்புள்ள பண்புகளை பயன்படுத்துவோம்.

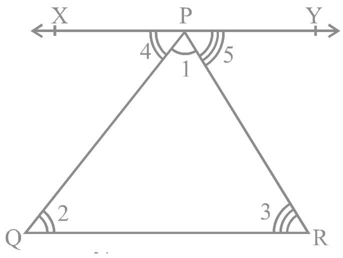
இப்போது, XPY என்பது ஒரு கோடாகும்

அப்படியானால், $\angle 4 + \angle 1 + \angle 5 = 180°$

ஆனால் XPY || QR மற்றும் PQ, PR குறுக்கு வெட்டுக் கோடுகள்.

ஆகையால் $\angle 4 = \angle 2$ மற்றும் $\angle 5 = \angle 3$

(ஒன்றைவிட்ட கோணங்களின் ஜோடிகள்)



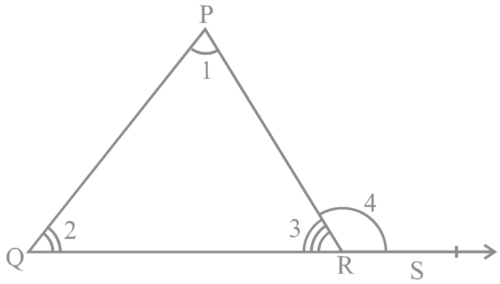
படம் 3.35

$\angle 4$ மற்றும் $\angle 5$ ஐ (1) இல் பதிலீடு செய்வும். நமக்கு கிடைப்பது.

$$\angle 2 + \angle 1 + \angle 3 = 180°$$

அதாவது $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$ ஆகும்.

ஒரு முக்கோணத்தின் வெளிக்கோணம் உருவாதலைப் பற்றி முந்திய வகுப்புகளில் படித்துள்ளீர் அவற்றை நீங்கள் நினைவுப் படுத்தி கொள்ளவும். (படம் 3.36 இல் பார்) QR பக்கத்தை புள்ளி S க்கு நீட்டுக, ΔPQR இன் **வெளிக் கோணம்** $\angle$PRS என அழைக்கப்டுகிறது.



படம் 3.36

$\angle 3 + \angle 4 = 180°$ ஆக உள்ளதா? (ஏன்?)

அதனுடைன் இதையும் பார் $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$ (ஏன்?) .....(2)

(1) மற்றும் (2) இருந்து, நீங்கள் இவ்வாறு காணமுடியும்.

$\angle 4 = \angle 1 + \angle 2$

இந்த முடிவை கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள ஒரு தேற்றத்தை உருவாக்குவதை சொல்ல கூடும்.

தேற்றம் 3.8: ஒரு முக்கோணத்தின் ஒரு பக்கத்தை நீட்டுவதால் உறுவாகும் வெளிக்கோணமானது அதன் இரண்டு உள்ளெதிர் கோணங்களின் கூடுதலுக்கு சமம்.

ஒரு முக்கோணத்தின் வெளிகோணமானது அதனுடைய உள்ளெதிர் கோணத்தில் ஏதாவது ஒரு கோணத்தை விட அதிகமாக இருக்கும் என்பது

இத்தேற்றத்திலிருந்து தெளிவாகிறது. இப்போது, மேலே உள்ள தேற்றத்தின் அடிப்படையில் சில எடுத்துக்காட்டுகளை எடுத்துக்கொள்வோம்.

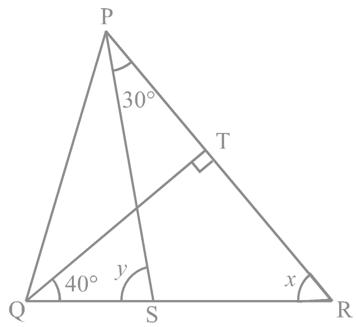
எடுத்துக்காட்டு 7: *படம் 3.37* இல், $QT \perp PR$, $\angle TQR = 40°$ மற்றும் $\angle SPR = 30°$ என்றால் x மற்றும் y இன் அளவு கண்டுபிடி.

தீர்வு: ΔTQR இல், $90° + 40° + x = 180°$ *(ஒரு முக்கோணத்தின் கோணங்களின் கூடுதல் பண்பு)*

அப்படியானால், $x = 50°$

இப்போது $y = \angle SPR + x$ *(தேற்றம் 3.8)*

அப்படியானால் $y = 30° + 50° = 80°$



படம் 3.37

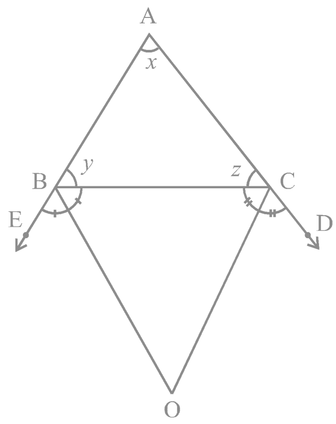
எடுத்துக்காட்டு 8: *படம் 3.38* இல் ΔABC இல் பக்கங்கள் AB மற்றும் AC யை முறையே புள்ளி E மற்றும் (D வரை நீட்டுக. $\angle CBE$ மற்றும் $\angle BCD$ இன் சமவெட்டிக் கோடுகள் BO மற்றும் CO ஆனது புள்ளி "O" வில் சந்திக்கட்டும் என்றால் $\angle BOC = 90° - \frac{1}{2}\angle BAC$ என நிருபி.

தீர்வு: கதிர் BO ஆனது $\angle CBE$ இன் சமவெட்டுக் கோடாக இருக்கட்டும்.

அப்படியானால் $\angle CBO = \frac{1}{2}\angle CBE$

$= \frac{1}{2}(180° - y)$

$= 90° - \frac{y}{2}$ .....(1)



படம் 3.38

இதேபோல், கதிர் CO ஆனது, $\angle BCD$ இன் சமவெட்டிக் கோடாக இருக்கட்டும்.

அப்படியானால், $\angle BCO = \frac{1}{2}\angle BCD$

$= \frac{1}{2}(180° - z)$

$= 90 - \frac{z}{2}$ .....(2)

ΔBOC இல், $\angle BOC + \angle BCO + \angle CBO = 180°$ ......(3)

(1) மற்றும் (2) ஐ (3) இல் பதிலீடு செய்ய நமக்கு கிடைப்பது.

$$\angle BOC + 90^\circ - \frac{z}{2} + 90^\circ - \frac{y}{2} = 180^\circ$$

ஆகையால் $\angle BOC = \frac{z}{2} + \frac{y}{2}$

அல்லது $\angle BOC = \frac{1}{2}(y+z)$ .....(4)

ஆனால் $x + y + z = 180^\circ$ (முக்கோணத்தின் கோணங்களின் கூடுதல் பண்பு படி)

அப்படியானால், (4) ஆனது

$$\angle BOC = \frac{1}{2}(180^\circ - x)$$

$$= 90^\circ - \frac{x}{2}$$

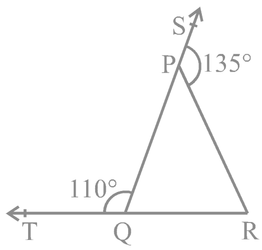
$$= 90^\circ - \frac{1}{2}\angle BAC$$

பயிற்சி 3.3

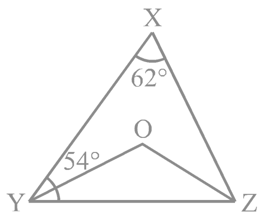
1. படம் 3.39 இல், ΔPQR இன் பக்கங்கள் QP மற்றும் RQ யை அதற்கு புள்ளி S மற்றும் T வரை நீட்டுக, $\angle SPR = 135^\circ$ மற்றும் $\angle PQT = 110^\circ$ என்றால் $\angle PRQ$ ஐ கண்டுபிடிட.

2. படம் 3.40 இல், $\angle X = 62^\circ$, $\angle XYZ = 54^\circ$ ΔXYZ இன் கோணங்கள் $\angle XYZ$ மற்றும் $\angle XZY$ இன் YO மற்றும் ZO சமவெட்டிகளாகும் என்றால் $\angle OZY$ மற்றும் $\angle YOZ$ ஐ கண்டுபிடி.

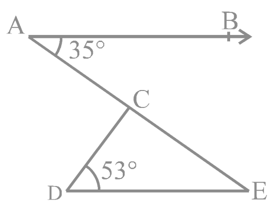
3. படம் 3.41 இல், AB || DE, $\angle BAC = 35^\circ$ மற்றும் $\angle CDE = 53^\circ$ எனில் $\angle DCE$ ஐ கண்டுபிடி.



படம் 3.39



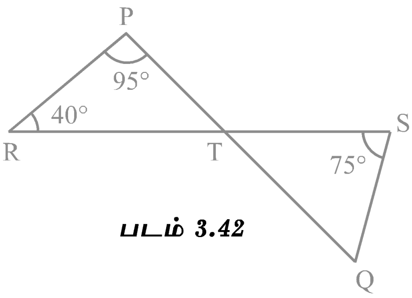
படம் 3.40



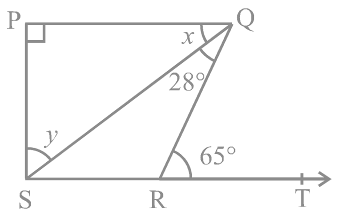
படம் 3.41

4. படம் 3.42 இல், PQ மற்றும் RS என்ற இரண்டுகோடுகள் புள்ளி T இல் $\angle PRT = 40^\circ$ $\angle RPT = 95^\circ$ மற்றும் $\angle TSQ = 75^\circ$ ஆக அமைந்த வகையில் வெட்டிக் கொள்கிறது என்றால் $\angle SQT$ இன் அளவு கண்டுபிடி.

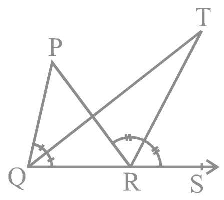
5. படம் 3.43 இல், PQ $\perp$ PS, PQ $\parallel$ SR, $\angle SQR = 28°$ மற்றும் $\angle QRT = 65°$ எனில் x மற்றும் y இன் மதிப்பு கண்டுபிடி.



படம் 3.42



படம் 3.43



படம் 3.44

6. படம் 3.44 இல் ΔPQR இன் பக்கம் QR ஆனது புள்ளி S வரை நீட்டப்பட்டுள்ளது. $\angle PQR$ மற்றும் $\angle PRS$ இன் கோண இருசமவெட்டிகள் புள்ளி T இல் சந்திக்கின்றன என்றால் $\angle QTR = \frac{1}{2}\angle QPR$ (என நிருபி).

3.8 தொகுப்பு (Summary)

இந்த பாடத்தில் நீங்கள் பின்வரும் முக்கியமானவை கருத்துக்களை படித்துள்ளீர்.

1. ஒரு கதிர் ஒரு கோட்டின் மேல் அமைந்து அதனால் உருவாக்கும் இரண்டு அடுத்துள்ள கோணங்கள் கூடுதல் 180° இருகிறது மற்றும் மறுத்தலை (vice versa) யாகவும் அமைகிறது. இந்த பண்பு நேர்க்கோட்டு ஜோடி நிபந்தனை என்று அழைக்கப்படுகிறது.

2. இரண்டு கோடுகள் ஒன்றையொன்று வெட்டிக் கொண்டால் அதனால் ஏற்படும் குத்தெரிக் கோணங்கள் சமமாக உள்ளது.

3. ஒரு குறுக்கு வெட்டுக் கோட்டால் இரண்டு இணைக்கோடுகள் வெட்டப் பட்டது எனில்

   (i) ஒத்த கோணங்களின் ஒவ்வொரு ஜோடியும் சமமாகும்.

   (ii) அடுத்தடுத்துள்ள கோணங்களின் ஒவ்வொரு ஜோடியும் சமமாகும்.

   (iii) ஒரு குறுக்குவெட்டுக் கோட்டின் ஒரே பக்கத்தில் உருவாகும் உள்கோணங்களின் ஒவ்வொரு ஜோடியும் மிகை நிரப்புக் கோணங்களாகும்.

4. ஒரு குறுக்கு வெட்டுக் கோட்டால் இரண்டு கோடுகள் வெட்டப்படும்போது

(i) ஒத்த கோணங்களின் ஏதாவது ஒரு ஜோடி கோணங்கள் சமமாகவோ.

(ii) அடுத்தடுத்துள்ள கோணங்களின் ஏதாவது ஒரு ஜோடி கோணங்கள் சமமாகவோ அல்லது

(iii) குறுக்கு வெட்டுக் கோட்டின் ஒரே பக்கத்தில் உருவாகும் உள்கோணங்களின் ஏதாவது ஒரு ஜோடி கோணங்கள் மிகை நிரப்பு கோணங்களாகவோ இருந்தால் அவ்விரு கோடுகளும் இணை கோடுகளாகும்.

5. கொடுக்கப் பட்டுள்ள ஒரு கோட்டிக்கு எந்தெந்த கோடுகள் இணையாகிறனவோ அவைகள் ஒன்றுக் கொன்று இணை கோடு களாகும்.

6. ஒரு முக்கோணத்தின் மூன்று கோணங்களின் கூடுதுல் 180° ஆக இருக்கும்.

7. ஒரு முக்கோணத்தில் ஒரு பக்கத்தை நீட்டடப்பட்டு இருக்கிறதெனில் அதனால் உரு வாகின்ற வெளிக் கோணமானது இரண்டு உள்ளெதிர்க் கோணங்களின் கூடுதலுக்குச் சமம்.

பாடம் 4

பல்லுறுப்புக் கோவைகள் (Polynomials)

4.1 முன்னுரை

முன் வகுப்புகளில் நீங்கள் இயற்கணிதக் கோவைகள் (algebraic Expressions) குறித்தும் அவற்றின் கூட்டல், கழித்தல், பெருக்கல் மற்றும் வகுத்தல் குறித்தும் படித்துள்ளீர்கள். சில இயற்கணிதக் கோவைகளை எப்படி காரணிப் படுத்துவது என்பது குறித்தும் படித்தீர்கள். கீழ்க் கண்ட இயற்கணித முற்றொருமைகளை நினைவுக் கூர்.

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$$

மற்றும் காரணிப் படுத்துவதிலும் இவை பயன்படுவதை நினைவுகூர். இந்த பாடத்தில் குறிப்பாக ஒரு குறிப்பிட்ட வகையான இயற் கணிதக் கோவைகள் அதாவது 'பல்லுறுப்புக் கோவைகள்' என்பது பற்றி படிப்போம். அதற்கு தொடர்புடைய சொற்றொடர்கள் குறித்தும் படிப்போம்.

மேலும் மீதித் தேற்றம் (Reminder Theorem) மற்றும் காரணித் தேற்றம் (Factor Theorem) குறித்தும் பல்லுறுப்புக் கோவைகளை காரணிப் படுத்து ததில் அவற்றின் பயன் குறித்தும் படிப்போம். மேலும் சில இயற்கணித முற்றொருமைகள் அவற்றை காரணிப் படுத்துதலில் பயன்படும் முறை, சில கோவைகளை விடுவித்தல் ஆகியவற்றைக் குறித்தும் படிப்போம்.

4.2 ஒரு மாறியில் அமைந்த பல்லூறுப்புக் கோவைகள் (Polynomials in one variable)

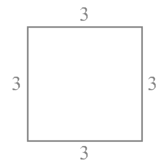
ஒரு மாறி என்பது ஒரு குறியீடு மூலம் அறியப்படும். இந்த குறியீடு எந்த ஒரு மெய் எண்ணின் மதிப்பையும் அடையும் என்பதை நினைவு கூர்வோம். இதிலிருந்து இப்போது ஆரம்பிக்கலாம்.

மாறிகளை குறிக்க $x, y, z,$ என்ற எழுத்துக் களைப் பயன் படுத்தலாம்.

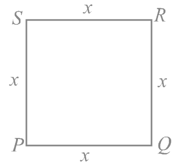
$2x, 3x, -x, -\frac{1}{2}x$ என்பன இயற் கணித கோவைகள் ஆகும். இந்த கோவை கள் அனைத்தும் மாறிலி $\times x$ என்ற வடிவில் உள்ளன. மாறிலி என்னவாக இருக்கும் தெரியாத மாறிலி $\times$ மாறி என்ற கோவையை நாம் எழுத வேண்டும். இதில் மாறிலிகளை a, b, c எனக் குறிப்போம் எனவே கோவை ax என்றாகும்.

எப்படியாயினும் 'மாறி' மற்றும் 'மாறிலி' இவற்றை குறிக்கும் எழுத்து க்களில் வித்தியாசம் உண்டு. மாறிலின் மதிப்பு ஒரு குறிப்பிட்ட சூழலில் மாறாமல் இருக்கும். அதாவது ஒரு குறிப்பிட்ட கணக்கில் மாறிலி மாறாமல் இருக்கும். ஆனால் மாறிகளின் மதிப்பு மாற்றம் அடைந்து கொண்டே இருக்கலாம்.

இப்போது 3 அலகு பக்க அளவைக் கொண்ட ஒரு சதுரத்தை எடுத்துக் கொள். படம் 4.1 ஐ பார். அதன் சுற்றளவு என்ன? சதுரத்தின் சுற்றளவு என்பது 4 பக்கங்களின் அலகுகளின் கூடுதல் என்பது உங்களுக்குத் தெரியும். இங்கு ஒவ்வொரு பக்கமும் 3 அலகுகள். எனவே இதன் சுற்றளவு 4×3 i.e., 12 அலகுகள். சதுரத்தின் ஒரு பக்கத்தின் நீளம் 10 அலகுகள் எனில் சுற்றளவு எவ்வளவு? சுற்றளவு 4×10 i.e., 40 அலகுகள். ஒருவேளை சதுரத்தின் ஒரு பக்கத்தின் நீளம் x அலகு எனில் (படம் 4.2 ஐ பார்) சுற்றளவு $4x$ அலகுகள். சதுரத்தின் பக்கங்களின் அளவு மாற மாற சுற்றளவும் மாறும்.



படம் 4.1



படம் 4.2

சதுரம் PQRS - ன் பரப்பளவைக் கண்டுபிடிக்க முடியுமா? பரப்பளவு $x \times x = x^2$ சதுர அலகுகள். x^2 என்பது ஒரு இயற்கணிதக் கோவை. உங்களுக்கு $2x, x^2 + 2x, x^3 - x^2 + 4x + 7$. போன்ற இயற்கணித கோவைகள் பற்றியும் தெரியும். இதுவரை நாம் பார்த்த கோவைகள் அனைத்திலும் மாறிகளின் அடுக்குகள் முழு எண்களாகவே வந்துள்ளன. இந்த வடிவில் உள்ள கோவைகள் 'ஒரு மாறியில் அமைந்த பல்லுறுப்புக் கோவைகள்' என்றழைக்கப்படுகின்றன. மேற்கண்ட எடுத்துக் காட்டில் மாறி என்பது x. மேலும் $x^3 - x^2 + 4x + 7$ என்பது x மாறி கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவை. இதேபோல் $3y^2 + 5y$ என்பது y மாறி கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவை மற்றும் $t^2 + 4$ என்பது t மாறி உடைய பல்லுறுப்புக் கோவை.

x^2+2x என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையில் x^2 மற்றும் $2x$ என்பன ‘உறுப்பு’ க்கள் எனப்படும். இதேப்போல் $3y^2+5y+7$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையில் மூன்று உறுப்புக்கள் உள்ளன. அவை $3y^2, 5y$ மற்றும் 7 என்பன. பல்லுறுப்புக்கோவை $-x^3+4x^2+7x-2$ ன் உறுப்புக்களை உன்னால் எழுத முடியுமா? இந்த பல்லுறுப்புக் கோவையில் 4 உறுப்புக்கள் உள்ளன. அவை $-x^3$, $4x^2$, $7x$ மற்றும் -2 என்பன. பல்லுறுப்புக் கோவையின் ஒவ்வொரு உறுப்புக்கும் ஒரு கெழு (குணகம்) (coefficient) உள்ளது. ஆகவே $-x^3+4x^2+7x-2$ என் பதில் x^3 ன் கெழு -1, x^2 ன் கெழு $+4$, $x-$ ன் கெழு $+7$ மற்றும் -2 என்பது x^0 ன் கெழு ($x^0=1$ என்பதை நினைவுகூர்) x^2-x+7 என்பதில் x – ன் கெழு என்ன? அது -1 எனபதாகும்.

2 என்பதும் ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை. உண்மையாகவே $2, -5, 7$ என்பன மாறிலி பல்லுறுப்புக் கோவைகள். மாறிலி 0 பூஜ்ஜியம் (சுழியம்) என்பதை சுழிய (பூஜ்ஜிய) பல்லுறுப்புக் கோவை (zero polynomial) என்கிறோம். இது பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் தொகுப்பில் மிக முக்கிய இடத்தைப் பிடிக் கிறது. இதை நீங்கள் மேல் வகுப்புகளில் படிப்பீர்கள்.

இப்போது $x+\frac{1}{x}, \sqrt{x}+3$ மற்றும் $\sqrt[3]{y}+y^2$ என்ற இயற்கணிதக் கோவை களை கவனி, $x+\frac{1}{x}$ என்பதை $x+x^{-1}$ என எழுதலாம் என்பது உனக்குத் தெரியுமா? இங்கு இரண்டாவது உறுப்பு x^{-1} – ன் அடுக்கு -1 ஆகும். இது முழு எண் அல்ல. எனவே இந்த இயற் கணிதக் கோவை பல்லுறுப்புக் கோவை அல்ல.

மேலும் $\sqrt{x}+3$ என்பதை $x^{\frac{1}{2}}+3$ என எழுதலாம். இதில் $x-$ ன் அடுக்கு $\frac{1}{2}$. இது முழு எண் இல்லை. எனவே $\sqrt{x}+3$ என்பது பல்லுறுப்புக் கோவையா? இல்லை அது பல்லுறுப்புக் கோவை இல்லை, $\sqrt[3]{y}+y^2$ என்பது என்ன? இதுவும் பல்லுறுப்புக் கோவை இல்லை. (ஏன்?)

ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையில் உள்ள மாறி x என்றால் நாம் பல்லுறுப்புக் கோவையை $p(x)$ அல்லது $q(x)$ அல்லது $r(x)$ போன்ற பல வடிவங்களில் குறிக்கலாம். எடுத்துக் காட்டாக இப்படி எழுதலாம்.

$$p(x) = 2x^2+5x-3$$

$$q(x) = x^3-1$$

$$r(y) = y^3+y+1$$

$$s(u) = 2-u-u^2+6u^5$$

ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையில் எத்தனை (குறிப்பிட்ட) உறுப்புக்கள் வேண்டுமானாலும் இருக்கலாம்.

உதாரணமாக, $x^{150} + x^{140} + ... + x^2 + x + 1$ என்பது **151** உறுப்புகள் கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவை.

பல்லுறுப்புக் கோவைகள் $2x, 2, 5x^3, -5x^2, y$ மற்றும் u^4 இவற்றை கவனி. இவற்றில் ஒரே ஒரு உறுப்பு மட்டும் இருப்பதை கவனித்தாயா? இத்தகைய கோவை ('mono' means 'one') 'ஓருறுப்புக் கோவைகள்' எனப்படும்.

கீழக் கண்ட பல்லுறுப்புக் கோவைகளை கவனி.

$$p(x) = x + x^2 + \pi$$

$$q(x) = \sqrt{2} + x - x^2$$

$$r(u) = 4 + 4^2 - 2$$

$$t(y) = y^4 + y + 5$$

பல்லுறுப்புக் கோவை $p(x) = 3x^7 - 4x^6 + x + 9$ என்பதை கவனி. x - ன் மிக அதிகபட்ச அடுக்கு உள்ள உறுப்பு எது? அது $3x^7$ என்பதாகும். இந்த உறுப்பின் அடுக்கு 7 என்பதாகும். இதேபோல் பல்லுறுப்புக் கோவை $q(y) = 5y^6 - 4y^2 - 6$ என்பதில் y - ன் அதிகபட்ச அடுக்கு கொண்ட உறுப்பு $5y^6$. இந்த உறுப்பின் அடுக்கு **6.** மாறியின் அதிகபட்ச அடுக்கை நாம் பல்லுறுப்புக் கோவையின் படி The degree of the polynomial) என்கிறோம். எனவே பல்லுறுப்புக் கோவை $3x^7 - 4x^6 + x + 9$ ன் படி 7 இதேபோல் பல்லுறுப்புக் கோவை $5y^6 - 4y^2 - 6$ ன் படி **6.** படி பூஜ்ஜியம் (சுழியம்) உள்ள ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை '**மாறிலி பல்லுறுப்புக் கோவை**' ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1: கீழே கொடுக்கப்பட்ட பல்லுறுப்புக் கோவை ஒவ்வொன்றின் படியையும் எழுது.

(i) $x^5 - x^4 + 3$ (ii) $2 - y^2 - y^3 + 2y^8$ (iii) 2

தீர்வு: (i) மாறியின் அதிகப் பட்ச அடுக்கு **5.** எனவே பல்லுறுப்புக் கோவையின் படி **5.**

(ii) மாறியின் அதிகபட்ச அடுக்கு *8*. எனவே பல்லுறுப்புக் கோவையின் படி *8*.

(iii) இங்குள்ள ஒரே உறுப்பு **2.** இதை $2x^0$ என எழுதலாம். x ன் அடுக்கு *0*, எனவே பல்லுறுப்புக் கோவையின் படி *0*.

இப்போது கீழ்க் கண்ட பல்லுறுப்புக் கோவைகளை கவனி.

$$p(x) = 4x + 5$$
$$q(x) = 2y$$
$$r(y) = t + \sqrt{2}$$
$$s(u) = 3u$$

இவற்றில் பொதுவானவை ஏதாவது தென்படுகிறதா? இந்த ஒவ்வொரு பல்லுறுப்புக் கோவையின் படியும் 1, **படி ஒன்றாக உள்ள ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை "ஒருபடிப் பல்லுறுப்புக் கோவை அல்லது நேரிய பல்லுறுப்புக் கோவை"** எனப்படும். ஒரு மாறி கொண்ட மற்றும் சில ஒருபடிப் பல்லுறுப்புக் கோவைகள்.

$2x-1,\ \sqrt{2}y+1,\ 2-u$ என்பன. இப்போது 3 உறுப்புக் கொண்ட x - ன் மாறியுடன் கூடிய ஒரு படி பல்லுறுப்புக் கோவையை கண்டுபிடி. உன்னால் கண்டுபிடிக்க முடியாது. ஏனெனில் ஒரு படி பல்லுறுப்புக் கோவையில் அதிக பட்சம் இரண்டு உறுப்புக்கள் மட்டுமே இருக்கும். எனவே x மாறி உடன் கூடி ஒருபடி பல்லுறுப்புக் கோவை என்பது $ax + b$ என்ற வடிவில் இருக்கும். இங்கு a மற்றும் b என்பன 'மாறிலி' கள் மற்றும் $a \neq 0$ (ஏன்?). இதேபோல் $ay + b$ என்பது y - ல் ஒருபடி பல்லுறுப்புக் கோவை.

இப்போது கீழ்க் கண்ட பல்லுறுப்புக் கோவைகளை கவனி.

$2x^2 + 5,\ 5x^2 + 3x + 5,\ x^2$ மற்றும் $x^2 + \frac{2}{5}x$

இவை அனைத்தும் படி இரண்டு கொண்டவை என்பதை ஒப்புக் கொள்கிறாயா?

படி இரண்டாக உள்ள ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை 'இருபடிப் பல்லுப்புக் கோவை' (quadratic polynomial) எனப்படும்.

இருபடிப் பல்லுறுப்புக் கோவை களுக்கு சில எடுத்துக்காட்டுகள்.

$5 - y^2,\ 4y + 5y^2$

ஒரு மாறியுடன் கூடிய நான்கு வெவ்வேறு உறுப்புகள் கொண்ட இருபடிப் பல்லுறுப்புக் கோவையை எழுத முடியுமா? ஒரு மாறி கொண்ட இருபடிப் பல்லுறுப்புக் கோவையில் அதிகபட்சம் மூன்று உறுப்புக்களே இருக்கும். x ஐ மாறி ஆகக் கொண்ட இருபடி பல்லுறுப்புக் கோவை $ax^2 + bx + c$ என்ற வடிவில் இருக்கும். இங்கு $a \neq 0$ மற்றும் a, b, c என்பன மாறிலிகள். இதேபோல் yல் உள்ள இருபடி பல்லுறுப்புக் கோவை $ay^2 + by + c$ என்ற வடிவில் இருக்கும். இங்கு $a \neq 0$ மற்றும் a, b, c என்பன மாறிலிகள்.

படி மூன்றாக உள்ள ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை முப்படிப் பல்லுறுப்புக் கோவை (Cubic Polynomial) எனப்படும்.

x - ல் முப்படிப் பல்லுறுப்புக் கோவைக்கு சில உதாரணங்கள்.

$4x^3, 2x^3 + 1, 5x^3 + x^2, 6x^3 - x, 6 - x^3, 2x^3 + 4x^2 + 6x + 7.$

ஒரு மாறி உள்ள முப்படிப் பல்லுறுப்புக் கோவையில் எத்தனை உறுப்புக்கள் இருக்கக் கூடும் என நீ நினைக்கிறாய்? அதிக பட்சமாக நான்கு உறுப்புக்கள் கொண்டதாக இருக்கும்.

இதை $ax^3 + bx^2 + cx + d$ என்ற வடிவில் எழுதலாம். இங்கே $a \neq 0$ மற்றும் a, b, c மற்றும் d என்பன மாறிலிகள்.

இப்போது படி 1, படி 2, படி 3 கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவைகள் எப்படி இருக்கும் என்பது உங்களுக்குத் தெரியும். இயல் எண் 'n' க்கு ஒரு மாறியுடன் கூடிய n படி கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவையை உன்னால் எழுத முடியுமா? ஒரு மாறி x - கொண்ட படி n உடைய பல்லுறுப்புக் கோவை என்பது.

$a_nx^4 + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$ என்ற வடிவில் இருக்கும். இங்கு $a_0, a_1, a_2 ....$ a_n என்பன மாறிலிகள் மற்றும் $a \neq 0$.

குறிப்பாக $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 .... = a_n = 0$ (எல்லா மாறிலிகளும் 0) எனில் நமக்கு பூஜ்ஜிய பல்லுறுப்புக் கோவை (zero polynomial) கிடைக்கிறது. இதை 0 எனக் குறிக்கிறோம். பூஜ்ஜிய பல்லுறுப்புக் கோவையின் 'படி' என்ன? இது வரையறுக்கப் படவில்லை.

இதுவரை நாம் ஒரு 'மாறி' உடைய பல்லுறுப்புக் கோவைகள் பற்றி மட்டும் அலசினோம். ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட மாறிகள் உடைய பல்லுறுப்புக் கோவைகளும் உள்ளன. எடுத்துக் காட்டாக $x^2 + y^2 + xyz$ (இங்கு x, y, z என்பன மாறிகள்) என்பது மூன்று மாறிகள் கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவை. இதேப்போல் $p^2 + q^{10} + r$ (இங்கு மாறிகள் p, q மற்றும்) $u^2 + v^2$ (இங்கு மாறிகள் u மற்றும் v) முதலியன இரண்டு மற்றும் மூன்று மாறிகள் உடைய பல்லுறுப்புக் கோவைகள். இது குறித்து நீங்கள் பிறகு விரிவாகப் படிப்பீர்கள்.

பயிற்சி 4.1

1. கீழ்க் கண்ட வற்றில் பல்லுறுப்புக் கோவைகளில் ஒரு மாறியைக் கொண்ட பல்லுறுப்புக்கோவைப் அல்லாதது எது? ஒரு மாறி இல்லாதது எது? உன்னுடைய விடைக்கு காரணம் கூறு.

(i) $4x^2 - 3x + 7$ (ii) $y^2 + \sqrt{2}$ (iii) $3\sqrt{t} + t\sqrt{2}$

(iv) $y + \dfrac{2}{y}$ (v) $x^{10} + y^3 + t^{50}$

2. கீழ்க் கண்ட ஒவ்வொன்றிலும் x^2 - ன் குணகங்களை (கெழு) எழுது.

(i) $2 + x^2 + x$ (ii) $2 - x^2 + 4x^3$ (iii) $\dfrac{\pi}{2}x^2 + x$ (iv) $\sqrt{2}x - 1$

3. கீழ்க் கண்ட ஒவ்வொன்றிற்கும் ஒரு உதாரணம் கொடு

படி 35 கொண்ட ஈருறுப்புக் கோவை

படி 100 உடைய ஓருறுப்புக் கோவை

4. கீழ்க் கண்ட பல்லுறுப்புக் கோவை ஒவ்வொன்றின் படிகளை எழுது.

(i) $5x^3 + 4x^2 + 7x$ (ii) $4 - y^2$ (iii) $5t - \sqrt{7}$ (iv) 3

5. கீழ்க் கண்டவற்றில் ஒருபடி, இருபடி மற்றும் முப்படிப் பல்லுறுப்புக் கோவைகளை வகைப் படுத்து.

(i) $x^2 + x$ (ii) $x - x^3$ (iii) $y + y^2 + 4$ (iv) $1 + x$

(v) $3t$ (vi) r^2 (vii) $7x^3$

4.3 பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் பூஜ்ஜியங்கள்

(Zeroes of Polynomials)

பல்லுறுப்புக் கோவை $p(x) = 5x^3 - 2x^2 + 3x - 2$ என்பதை எடுத்துக் கொள்

x இருக்கும் இடத்தில் 1 ஐ போட்டல்

$$p(x) = 5x^3 - 2x^2 + 3x - 2$$

$$p(1) = 5(1)^3 - 2(1)^2 + 3(1) - 2$$

$$= 5 - 2 + 3 - 2$$

$$= 4$$

எனவே $p(x)$ என்பதின் மதிப்பு $x = 1$ எனும்போது 4 என்க. இதேபோல்

$p(0) = 5(0)^3 - 2(0)^2 + 3(0) - 2 = -2$

$p(-1)$ ன் மதிப்பைக் கண்டு பிடி.

எடுத்துக் காட்டு 2: கீழ்க் கண்ட ஒவ்வொரு பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் மதிப்பையும் கொடுக்கப்பட்ட மாறியின் மதிப்பிற்கு ஏற்றவாறு கண்டுபிடி.

(i) $p(x) = 5x^2 - 3x + 7$ இதில் $x = 1$

(ii) $q(y) = 3y^3 - 4y + \sqrt{11}$ இதில் $y = 2$

(iii) $p(t) = 4t^4 + 5t^3 - t^2 + a$ இதில் $t = a$

தீர்வு : (i) $p(x) = 5x^2 - 3x + 7$

ஆனால் $x = 1$ எனில்

$p(1) = 5(1)^2 - 3(1) + 7$

$p(1) = 5 - 3 + 7$

$p(1) = 12 - 3$

$p(1) = 9$

(ii) $q(y) = 3y^3 - 4y + \sqrt{11}$

ஆனால் $y = 2$ எனில்

$q(2) = 3(2)^3 - 4(2) + \sqrt{11}$

$q(2) = 3(8) - 8 + \sqrt{11}$

$= 24 - 8 + \sqrt{11}$

$= 16 + \sqrt{11}$

(iii) $p(t) = 4t^4 + 5t^3 - t^2 + 6$

ஆனால் $t = a$ எனில்

$p(a) = 4a^2 + 5a^3 - a^2 + 6$

இப்போது பல்லுறுப்புக் கோவை

$p(x) = x - 1$ என்பதை எடுத்துக் கொள் இதில் $p(1)$ ன் மதிப்பு என்ன?

$p(1) = 1 - 1 = 0$

$p(1) = 0$ என்பதால் நாம் *1* என்பது பல்லுறுப்புக் கோவை $p(x)$ ன் பூஜ்ஜியம் என்கிறோம். இதேபோல் **2** என்பது $q(x)$ ன் பூஜ்ஜியம் இங்கே $q(x) = x - 2$. பொதுவாக ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை $p(x)$ ன் பூஜ்ஜியம் என்பது எண் c ஆகும். இங்கே $p(c) = 0$.

$p(x)$ என்பது ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை என்க. பின்னர் $p(x) = 0$ என்பது x - ல் அமைந்த ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவைச் சமன்பாடு எனப்படும்.

$p(x) = x - 1$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையை எடுத்துக் கொள்க. $x = 1$ என்பது பல்லுறுப்புக் கோவை $p(x) = x - 1$ இன் பூஜ்ஜியமாகும். இப்போது

$p(x) = 0$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவைச் சமன்பாட்டை எடுத்துக் கொள்க. அதாவது $x - 1 = 0$ ஐ எடுத்துக் கொள்வோம். $x - 1 = 0$ எனில் $x = 1$ ஆகும். $x = 1$ என்பது பல்லுறுப்புக் கோவைச் சமன்பாடு $p(x) = 0$ இன் மூலம் (root) ஆகும்.

இப்போது மாறிலி பல்லுறுப்புக் கோவை *5* ஐ எடுத்துக் கொள். இதனுடைய பூஜ்ஜியம் என்னவென்று உன்னால் சொல்ல முடியுமா? இதற்கு பூஜ்ஜியம் கிடையாது ஏனெனில் $5x^0$ – ல் x க் பதிலாக எந்த எண்ணைக் கொடுத்தாலும் அதன் மதிப்பு *5* மட்டுமே வரும். எனவே பூஜ்ஜியம் அல்லாத மாறிலி பல்லுறுப்புக் கோவை என்பதற்கு பூஜ்ஜியம் இல்லை. பூஜ்ஜிய பல்லுறுப்புக் கோவையின் பூஜ்ஜியம் என்பது என்ன? வழக்கப்படி ஒவ்வொரு மெய் எண்ணும் பூஜ்ஜிய பல்லுறுப்புக் கோவையின் பூஜ்ஜியம் ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3: -2 மற்றும் 2 என்பன பல்லுறுப்புக் கோவை $x + 2$ ன் பூஜ்ஜியமா எனக் கண்டுபிடி.

தீர்வு : $p(x) = x + 2$ என்க

பிறகு $p(2) = 2 + 2 = 4$

$p(-2) = -2 + 2 = 0$

எனவே -2 என்பது பல்லுறுப்புக் கோவை $x + 2$ ன் பூஜ்ஜியம் ஆகும். ஆனால் *2* என்பது இல்லை.

எடுத்துக்காட்டு 4: பல்லுறுப்புக் கோவை $p(x) = 2x + 1$ என்பதின் பூஜ்ஜியத்தைக் கண்டுபிடி.

தீர்வு: $p(x)$ ன் பூஜ்ஜியத்தை கண்டுபிடிப்பதற்கு சமன் பாட்டைத்தீர்.

$p(x) = 0$

இப்போது $2x + 1 = 0$

$$\therefore \quad x = \frac{-1}{2}$$

எனவே $-\frac{1}{2}$ என்பது பல்லுறுப்புக் கோவை $2x + 1$ ன் பூஜ்ஜியமாகும்.

இப்போது $p(x) = ax + b$ and $a \neq 0$ இது ஒருபடி பல்லுறுப்புக் கோவை எனில் $p(x)$ - ன் பூஜ்ஜியத்தை நாம் எப்படி கண்டு பிடிப்பது? எடுத்துக் காட்டு *4* என்பது உங்களுக்கு சில வழிமுறையைக் காட்டும். பல்லுறுப்புக் கோவை $p(x)$ - ன் பூஜ்ஜியத்தைக் காண பல்லுறுப்புக் கோவை சமன்பாடு $p(x) = 0$ என்பதை தீர்க்கவேண்டும்.

இப்போது $p(x) = 0$ எனில்

$ax + b = 0$ மற்றும் $a \neq 0$

எனவே

$ax = -b$

i.e $x = \frac{-b}{a}$

$x = \frac{-b}{a}$ என்பது மட்டுமே $p(x)$ என்பதன் பூஜ்ஜியமாகும். எனவே

ஒரு படி பல்லுறுப்புக் கோவை ஒரே ஒரு பூஜ்ஜியத்தை பெற்றிருக்கும்.

இப்போது நாம் இப்படி கூறலாம்.

1 என்பது $x - 1$ *ன் பூஜ்ஜியம்*

-2 என்பது $x + 2$ ன் பூஜ்ஜியம்

எடுத்துக்காட்டு 5: *2 மற்றும் 0 என்பன பல்லுறுப்புக் கோவை* $x^2 - 2x$ *என்பதன் பூஜ்ஜியங்களா என்பதை சரிபார்.*

தீர்வு : $p(x) = x^2 - 2x$ என்க

எனவே $p(2) = 2^2 - 2(2)$

$= 4 - 4 = 0$

மற்றும் $p(0) = 0^2 - 2(0)$

$= 0 - 0 = 0$

எனவே 2 மற்றும் 0 என்பன

பல்லுறுப்புக் கோவை $x^2 - x$ *என்பதன் பூஜ்ஜியங்கள் ஆகும்.*

கீழே நம்முடைய மதிப்பீடுகளைப் பட்டியலிடுவோம்.

(i) *ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையின் பூஜ்ஜியமானது 0 ஆக இருக்க வேண்டிய அவசியமில்லை.*

(ii) *ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையின் பூஜ்ஜியம் 0 ஆக இருக்கலாம்.*

(iii) *ஒவ்வொரு ஒரு படி பல்லுறுப்புக் கோவையும் ஒரே ஒரு பூஜ்ஜியத்தை பெற்றிருக்கும்.*

(iv) *ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை ஒன்றிற்கும் அதிகமான பூஜ்ஜியங்களைப் பெற்றிருக்கும்.*

பயிற்சி 4.2

1. பல்லுறுப்புக் கோவை $5x - 4x^2 + 3$ ன் மதிப்பை கீழ்க் கண்டவற்றின் உதவியுடன் கண்டுபிடி.

   (i) $x = 0$ (ii) $x = -1$ (iii) $x = 2$

2. கீழ்க் கண்ட ஒவ்வொரு பல்லுறுப்புக் கோவைக்கும் $p(0), p(1)$ மற்றும் $p(2)$இவற்றின் மதிப்புக் களை கண்டுபிடி.

   (i) $p(y) = y^2 - y + 1$ (ii) $p(t) = 2 + t + 2t^2 - t^3$

   (iii) $p(x) = x^3$ (iv) $p(x) = (x - 1)(x + 1)$

3. கீழ்க் கண்டவை அவற்றிற்கு எதிரே கொடுக்கப் பட்டுள்ளபடி பல்லுறுப்புக் கோவையின் பூஜ்ஜியங்களா என சரிப்பார்.

   (i) $p(x) = 3x + 1 ;\ x = -\frac{1}{3}$

   (ii) $p(x) = 5x - \pi ;\ x = \frac{4}{5}$

   (iii) $p(x) = x^2 - 1 ;\ x = 1, -1$

   (iv) $p(x) = (x + 1)(x - 2) ;\ x = -1, 2$

   (v) $p(x) = x^2 ;\ x = 0$

   (vi) $p(x) = lx + m ;\ x = -\frac{m}{l}$

   (vii) $p(x) = 3x^2 - 1 ;\ x = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}$

   (viii) $p(x) = 2x + 1 ;\ x = \frac{1}{2}$

4. கீழ்க் கண்ட ஒவ்வொன்றிற்கும் பல்லுறுப்புக் கோவையின் பூஜ்ஜியத்தைக் கண்டுபிடி.

   (i) $p(x) = x + 5$ (ii) $p(x) = x - 5$

   (iii) $p(x) = 2x + 5$ (iv) $p(x) = 3x - 2$

   (v) $p(x) = 3x$ (vi) $p(x) = ax, a \neq 0$

   (vii) $p(x) = cx + d, c \neq 0, c, d,$ ஆகியன மெய் எண்கள்

4.4 மீதித் தேற்றம் (Remainder Theorem)

15 மற்றும் 6 என்ற எண்களை எடுத்துக் கொள். 15 ஐ 6 ஆல் வகுத்தால் ஈ.வு 2 மற்றும் மீதி 3 என்பது உனக்குத் தெரியும். இந்த உண்மையை எப்படி

சொல்வது என்பது உனக்கு நினைவு இருக்கிறதா? நாம் அதை இப்படி எழுதுவோம்.

$$15 = (6 \times 2) + 3$$

மீதி 3 என்பது வகுக்கும் எண் 6ஐ விட குறைவு என்பதை நாம் காணலாம். இதேபோல் 12 ஐ 6 ஆல் வகுத்தால் நமக்கு கிடைப்பது.

$$12 = (6 \times 2) + 0$$

இங்கு மீதி என்பது என்ன? இங்கு மீதி என்பது 0 மற்றும் 6 என்பது 12ன் காரணி அல்லது 12 என்பது 6ன் பெருக்கல்.

இப்போது நம் முன்னே உள்ள கேள்வி ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையை மற்றொன்றால் வகுக்க முடியுமா? எனவே பல்லுறுப்புக் கோவை $2x^3 + x^2 + x$ ஐ என்ற ஓருறுப்புக் கோவையால் வகுப்போம்.

$$\begin{aligned}(2x^3 + x^2 + x) \div x &= \frac{2x^3}{x} + \frac{x^2}{x} + \frac{x}{x} \\ &= 2x^2 + x + 1\end{aligned}$$

x என்பது $2x^3 + x^2 + x$ என்பதில் ஒவ்வொரு உறுப்பிற்கும் பொதுவாக உள்ளது. எனவே இதை நாம் $x(2x^2 + x + 1)$ என எழுதலாம். x மற்றும் $2x^2 + x + 1$ என் பன $2x^3 + x^2 + x$ என்பதன் காரணிகள் என்கிறோம் மற்றும் $2x^3 + x^2 + x$ என்பது xமற்றும் $2x^2 + x + 1$ என்பன வற்றின் பெருக்கல் என்கிறோம்.

மற்றொரு ஜோடி பல்லுறுப்புக் கோவைகள் $3x^2 + x + 1$ மற்றும் x இவற்றை எடுத்துக் கொள். இங்கே

$$(3x^2 + x + 1) \div x = (3x^2 \div x) + (x \div x) + (1 \div x)$$

இங்கு 1 ஐ x ஆல் வகுத்தால் பல்லுறுப்புக் கோவை உறுப்பு வருவதில்லை. எனவே இதை இங்கேயே நிறுத்தி 1 ஐ மீதி என எடுத்துக் கொள்வோம். எனவே

$$3x^2 + x + 1 = x \times (3x + 1) + 1$$

இதில் $3x + 1$ என்பது ஈ.வு, மற்றும் 1 என்பது மீதி. x என்பது $3x^2 + x + 1$ என்பதன் காரணி என நீ நினைக்கிறாயா? மீதி என்பது 0 என இல்லாததால் அது காரணி இல்லை.

இப்பொழுது நாம் ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையை ஒரு பூஜ்ஜியமற்ற (Non zero) பல்லுறுப்புக் கோவையால் வகுப்பதற்கு எடுத்துக்காட்டு பார்ப்போம்.

எடுத்துக்காட்டு 6: $p(x)$ ஐ $g(x)$ ஆல் வகு. இங்கே $p(x) = x + 3x^2 - 1$ மற்றும் $g(x) = 1 + x$

தீர்வு: கீழ்க்கண்டவாறு நாம் வகுத்தலை படிப்படியாக செய்வோம்.

படி 1: வகுபடும் எண் $x + 3x^2 - 1$ மற்றும் வகுக்கும் எண் $1 + x$ இவற்றை பொது வடிவத்தில் (standard form) எழுதுவோம். எனவே

வகுபடும் எண் $3x^2 + x - 1$

வகுக்கும் எண் $x + 1$

படி 2 : வகுபடும் எண்ணின் முதல் உறுப்பை வகுக்கும் எண்ணின் முதல் உறுப்பால் வகுப்போம். அதாவது நாம் $3x^2$ ஐ x ஆல் வகுப்போம் விடை $3x$. இது 'ஈ.வு' இன் முதல் உறுப்பு ஆகும்.

$$\frac{3x^2}{x} = 3x \text{ ஈ.வின் முதல் உறுப்பு.}$$

படி 3: வகுக்கும் எண்ணை ஈ.வின் முதல் உறுப்பால் பெருக்கவோம் இந்த பெருக்கல் பலனை வகுபடும் எண்ணிலிருந்து கழிப்போம். அதாவது $x + 1$ ஐ $3x$ ஆல் பெருக்குவோம் மற்றும் இதன் பெருக்கல் பலன் $3x^2 + 3x$ ஐ வகுபடும் எண் $3x^2 + x + 1$ லிருந்து கழிப்போம். இதிலிருந்து நமக்கு கிடைக்கும் மீதி $-2x - 1$.

$$\begin{array}{r|l} & 3x \\ \hline x+1 & 3x^2 + x - 1 \\ & 3x^2 + 3x \\ & - \quad - \\ \hline & -2x - 1 \end{array}$$

படி 4: மீதி $-2x - 1$ ஐ புதிய வகுபடும் எண்ணாக எடுத்துக் கொள்வோம். வகுக்கும் எண்ணில் மாற்றமில்லை. படி **2** ஐ மீண்டும் செய்து ஈ.வின் அடுத்த உறுப்பைப் பெறலாம். அதாவது புதிய வகுபடும் எண்ணின் முதல் உறுப்பு $-2x$ ஐ வகுக்கும் எண்ணின் முதல் உறுப்பு x ஆல் வகுப்போம். நமக்கு கிடைப்பது -2 ஈ.வின் இரண்டாவது. உறுப்பு -2 ஆகும்.

$$\frac{-2x}{x} = -2 \text{ ஈ.வின் 2 வது உறுப்பு.}$$

எனவே புதிய ஈ.வு $3x - 2$.

படி 5: வகுக்கும் எண்ணை ஈ.வின் இரண்டாவது உறுப்புடன் பெருக்கு. இந்த பெருக்குத் தொகையை வகுபடும் எண்ணிலிருந்து கழி. அதாவது $x + 1$ ஐ -2 ஆல் பெருக்கு. பெருக்குத் தொகை $-2x - 2$ ஐ வகுபடும் எண் $-2x - 1$ லிருந்து கழித்தால் நமக்கு வரும் மீதி *1*.

$$(x + 1)(-2) = -2x - 2$$

$$\begin{array}{r|l} & -2x - 1 \\ & -2x - 2 \\ (-) & + \quad + \\ \hline & \quad +1 \end{array}$$

இந்த செயல் மீதி 0 வரும்பவரை தொடரும் அல்லது புதிய வகுபடும் எண்ணின் படி வகுக்கும் எண்ணின் படியை விட குறைவாக வரும்வரை தொடரும். இந்த நிலையில் புதிய வகுபடும் எண் மீதியாக நிற்கும். ஈ.வின் கூடுதல் என்பது முழு ஈ.வு ஆகும்.

படி 6: இப்படியாக ஈ.வு மொத்தமும் $3x - 2$ மற்றும் மீதி 1. மேற்கண்ட செயலை நாம் எப்படி செய்தோம் எனக் கீழ்க் கண்டவாறு செய்து பார்ப்போம்.

$$\begin{array}{r|l} & 3x - 2 \\ \hline x + 1 & 3x^2 + x - 1 \\ & 3x^2 + 3x \\ & - \quad - \\ \hline & \quad - 2x - 1 \\ & \quad - 2x - 1 \\ & \quad + \quad + \\ \hline & \qquad\quad 1 \\ \hline \end{array}$$

$3x^2 + x - 1 = (x + 1)(3x - 2) + 1$ என்பதை கவனி.

அதாவது

வகுபடும் எண் = (வகுக்கும் எண் × ஈ.வு) + மீதி

பொதுவாக $p(x)$ மற்றும் $g(x)$ என்பன இரண்டு பல்லுறுப்புக் கோவைகள் எனில், இதில் $p(x)$ ன் படி $\geq g(x)$ ன் படிமற்றும் $g(x) \neq 0$ பிறகு நாம் பல்லுறுப்புக் கோவைகள் $q(x)$ மற்றும் $r(x)$ இவற்றை கண்டு பிடிக்கலாம். எப்படி எனில் $p(x) = g(x)\, q(x) + r(x)$ இதில் $r(x) = 0$ அல்லது $r(x)$ ன் படி $< g(x)$ ன் படி. இங்கே நாம் சொல்வது என்னவெனில் $p(x)$ ஐ $g(x)$ ஆல் வகுத்தால் $q(x)$ என்பது ஈ.வு $r(x)$ என்பது மீதி.

மேற்கண்ட எடுத்துக் காட்டில், வகுக்கும் எண் ஒருபடி பல்லுறுப்புக் கோவை. இத்தகைய சுழலில் மீதிக்கும் வகுப்படும் எண்ணின் ஒரு குறிப்பிட்ட மதிப்பிற்கும் ஏதாவது தொடர்பு இருக்கிறதா என கவனிப்போம்.

$p(x) = 3x^2 + x - 1$ ல் நாம் -1 க்கு பதிலாக x ஐ அளித்தால் நமக்கு கிடைப்பது.

$$p(-1) = 3(-1)^2 + (-1) - 1$$
$$= 3 - 1 - 1 = 3 - 2 = 1$$

எனவே $p(x) = 3x^2 + x - 1$ ஐ $x + 1$ ஆல் வகுக்கும்போது கிடைக்கும் மீதி என்பது பல்லுறுப்புக் கோவை $p(x)$ உடன் பூஜ்ஜிய பல்லுறுப்புக் கோவை $x + 1$ க்கு சமமானது அதாவது -1.

மேலும் சில எடுத்துக் காட்டுகளைப் பார்ப்போம்.

எடுத்துக் காட்டு 7: பல்லுறுப்புக் கோவை $3x^4 - 4x^3 - 3x - 1$ ஐ $x - 1$ ஆல் வகு.

தீர்வு : நீண்ட வகுத்தலை கீழேக் காண்போம்.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 3x^3 - x^2 - x - 4 \\
x - 1 & 3x^4 - 4x^3 - 3x - 1 \\
(-) & 3x^4 - 3x^3 \\
 & - \quad + \\
\hline
 & -x^3 - 3x - 1 \\
(-) & -x^3 + x^2 \\
 & + \quad - \\
\hline
 & -x^2 - 3x - 1 \\
(-) & -x^2 + x \\
 & + \quad - \\
\hline
 & -4x - 1 \\
(-) & -4x + 4 \\
 & + \quad - \\
\hline
 & -5 \\
\hline
\end{array}
$$

இங்கு மீதி -5 இப்போது $x - 1$ ன் பூஜ்ஜியம் 1. எனவே $x = 1$ எனக் $p(x)$ ல் கொடுத்தால் நமக்கு கிடைப்பது.

$p(x) = 3(1)^4 - 4(1)^3 - 3(1) - 1$

$= 3 - 4 - 3 - 1 = -5$ இது மீதி.

எடுத்துக்காட்டு 8: $p(x) = x^3 + 1$ ஐ $x + 1$ ஆல் வகுக்கும்போது கிடைக்கும் மீதியைக் கண்டுபிடி.

தீர்வு : நீண்ட வகுத்தலை கவனி

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 - x + 1 \\
x + 1 & x^3 + 1 \\
 & x^3 + x^2 \\
 & - \quad - \\
\hline
 & -x^2 + 1 \\
 & -x^2 - x \\
 & + \quad + \\
\hline
 & x + 1 \\
 & x + 1 \\
 & - \quad - \\
\hline
 & 0 \\
\hline
\end{array}
$$

எனவே மீதி 0 எனக் கண்டோம். இங்கே

$p(x) = x^3 + 1$ மற்றும் $x + 1 = 0$ ன் மூலம்

$x = -1$ கீழேக் காண்

$p(-1) = (-1)^3 + 1$

$= -1 + 1$

$= 0$

இது நாம் வகுத்தபோது கிடைத்த மீதிக்கு சமம்.

ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையை ஒரு ஒருபடி பல்லுறுப்புக் கோவையால் வகுக்க வரும் மீதியை கண்டு பிடிக்க இது சுலபமான வழி இல்லையா?

இந்த உண்மையை கீழ்க் கண்டதேற்றம் மூலம் பொதுமைப் படுத்துவோம். தேற்றத்தின் நிரூபணம் மூலம் இந்தத் தேற்றம் ஏன் சரியானது என்பதைக் காண்போம்.

மீதித் தேற்றம் : $p(x)$ என்பது ஏதேனும் ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை மற்றும் a என்பது ஏதேனும் ஒரு மெய் எண் என்க. $p(x)$ ஐ $(x-a)$ என்ற ஒருபடி பல்லுறுப்புக் கோவையால் வகுத்தால் கிடைக்கும் மீதி $p(a)$ ஆகும்.

நிரூபணம்: *$p(x)$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையின் படி 1 அல்லது அதற்கு அதிகமாக உள்ளவாறு எடுத்துக் கொள்ள ஒருவேளை $p(x)$ என்பதை $(x-a)$ ஆல் வகுத்தால் ஈவு என்பது $q(x)$ மீதி $r(x)$ அதாவது*

$$p(x) = (x-a)\, q(x) + r(x)$$

$(x-a)$ ன் படி 1 மற்றும் $r(x)$ ன் படி $(x-a)$ ன் படியைவிட குறைவு என்பதால் $r(x)$ ன் படி = 0. அப்படி எனில் $r(x)$ என்பது ஒரு மாறிலி. அதாவது r எனவே.

x ன் ஒவ்வொரு மதிப்பிற்கும், $r(x) = r$

ஆகையால் $p(x) = (x-a)\, q(x) + r$

குறிப்பாக $x = a$ எனில் இந்த சமன் பாடு

$$p(a) = (a-a)\, q(a) + r$$

$$= r$$ *இது தேற்றத்தின் நிரூபணம்.*

இந்த உண்மையை மற்றொரு எடுத்துக் காட்டில் பயன் படுத்துவோம்.

எடுத்துக்காட்டு 9 : *$x^4 + x^3 - 2x^2 + x + 1$ என்பதை $x-1$ ஆல் வகுக்கும்போது கிடைக்கும் மீதியைக் கண்டுபிடி.*

தீர்வு: *இங்கு*

$$p(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 + x + 1$$

$$p(1) = (1)^4 + (1)^3 - 2(1)^2 + 1 + 1$$

$$= 2$$

மீதி தேற்றத்தின் படி $x^4 + x^3 - 2x^2 + x + 1$ என்பதை $x-1$ ஆல் வகுத்தால் கிடைக்கும் மீதி 2.

எடுத்துக்காட்டு 10: *பல்லுறுப்புக் கோவை $q(t) = 4t^3 + 4t^2 - t - 1$ என்பது $(2t + 1)$ ன் பெருக்கலா என்பதை கண்டுபிடி.*

$q(t)$ என்பது $(2t + 1)$ என்பதன் பெருக்கல் எப்போது எனில் $(2t + 1)$ என்பது $q(t)$ ஐ வகுக்கும்போது மீதி பூஜ்ஜியம் வந்தால்.

இப்போது $(2t + 1) = 0$ என்று எடுத்துக்கொள்

$$\therefore\ t = -\frac{1}{2}$$

எனவே $q\left(-\frac{1}{2}\right) = 4\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 4\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right) - 1$

$$= -\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} - 1 = 0$$

$q(t)$ ஐ $2t + 1$ ஆல் வகுக்கும்போது கிடைக்கும் மீதி 0.

எனவே $2t + 1$ என்பது பல்லுறுப்புக் கோவை $q(t)$ ன் காரணி. அதாவது $q(t)$ என்பது $(2t + 1)$ ன் பெருக்கல் என்க.

பயிற்சி 4.3

1. $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ இதை கீழ்க்கண்டவற்றால் வகுக்கும்போது கிடைக்கும் மீதிகளை கண்டுபிடி,

   (i) $x + 1$ (ii) $x - \frac{1}{2}$ (iii) x

   (iv) $x + \pi$ (v) $5 + 2x$

2. $x^3 - ax^2 + 6x - a$ ஐ $x - a$ ஆல் வகுக்கும்போது கிடைக்கும் மீதியைக் கண்டுபிடி.

3. $7 + 3x$ என்பது $3x^3 + 7x$ ன் காரணியா என்பதை கண்டுபிடி.

4.5 பல்லுறுப்புக் கோவைகளை காரணிப்படுத்துதல் (Factorisation of Polynomials)

இப்பொழுது எடுத்துக் காட்டு 10ஐ மீண்டும் ஒருமுறை கூர்ந்து கவனி. அது நமக்கு சொல்லுவது என்னவெனில் மீதி $q\left(-\frac{1}{2}\right) = 0, (2t + 1)$ என்பது $q(t)$ ன் காரணி, அதாவது

$q(t) = (2t + 1)\, g(t)$ இதில்

$g(t)$ யானது ஏதேனும் ஒரு பல்லுறுப்புக்கோவை என்றால் பொருந்தும். இது

கீழ்க் கண்ட தேற்றத்திற்குரிய குறிப்பான ஒரு செயல்.

காரணித் தேற்றம் (Factor Theorem)

$p(x)$ என்பது படி $n \geq 1$ உடைய ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை, மற்றும் a என்பது ஏதேனும் ஒரு மெய் எண் என்க. (i) $p(a) = 0$ எனில் $(x - a)$ என்பது $p(x)$ இன் ஒரு காரணி ஆகும்.

(ii) $(x - a)$ என்பது $p(x)$ ன் காரணி எனில் $p(a) = 0$

நிரூபணம்:

மீதித் தேற்றத்தின்படி

$p(x) = (x - a)\, q(x) + p(a)$

(i) $p(a) = 0$ எனில் பிறகு $p(x) = (x - a)\, q(x)$ இது எதைக் காட்டுகிறது என்றால் $(x - a)$ என்பது $p(x)$ ன் காரணி என்பதைக் காட்டுகிறது.

(ii) $(x - a)$ என்பது $p(x)$ ன் காரணி என்பதால், $p(x) = (x - a)\, g(x)$ இது பல்லுறுப்புக் கோவை $g(x)$ க்காக. இந்த செயலில் $p(a - a)\, g(a) = 0$.

எடுத்துக்காட்டு 11: $(x + 2)$ என்பது $x^3 + 3x^2 + 5x + 6$ மற்றும் $2x + 4$ இவற்றின் காரணியா என்பதை கண்டுபிடி.

தீர்வு: $x + 2$ இன் பூஜ்ஜியம் என்பது -2

$p(x) = x^3 + 3x^2 + 5x + 6$ என்க

$p(-2) = (-2)^3 + 3(-2)^2 + 5(-2) + 6$

$p(-2) = -8 + 12 - 10 + 6 = 0$

எனவே காரணி தேற்றத்தின்படி $(x + 2)$

என்பது $x^3 + 3x^2 + 5x + 6$ ன் காரணி ஆகும்.

இதேபோல் $s(x) = 2x + 4$ என்க

$s(-2) = 2(-2) + 4 = 0$

எனவே $(x + 2)$ என்பது $2x + 4$ ன் காரணி ஆகும்.

காரணித் தேற்றத்தை பயன் படுத்தாமலே இதை நீ நிருபிக்கலாம் எப்படி எனில்.

$2x + 4 = 2(x + 2)$

எடுத்துக்காட்டு 12: $x - 1$ என்பது $4x^3 + 3x^2 - 4x + k$ ன் காரணி எனில் k ன் மதிப்பைக் கண்டுபிடி.

தீர்வு: $x - 1$ என்பது $p(x) = 4x^3 + 3x^2 - 4x + k$ ன்

காரணி என்பதால் $p(1) = 4(1)^3 + 3(1)^2 - 4(1) + k$

$= 4 + 3 - 4 + k$

எனவே $4 + 3 - 4 + k = 0$

$7 - 4 + k = 0$

$3 + k = 0$

$k = -3$

படி 2 மற்றும் 3 கொண்ட சில பல்லுறுப்புக் கோவைகளை காரணிப் படுத்த காரணித் தேற்றத்தைப்பயன்படுத்துவோம். ஏற்கனவே நீங்கள் இருபடி கோவை களை காரணிப் படுத்தும் முறையை அறிந்திருக்கிறீர்கள். உதாரணமாக $x^2 + lx + m$. இதில் மைய உறுப்பு lx ஐ பிரித்து அதாவது $lx = ax + bx$ இதில் $ab = m$ பிறகு $x^2 + lx + m = (x + a)(x + b)$. இப்போது இருபடி பல்லுறுப்புக் கோவைகள் $ax^2 + bx + c$ என்ற வடிவில் உள்ளதை காரணிப் படுத்துவோம். இங்கு $a \neq 0$ மற்றும் a, b மற்றும் c என்பன மாறிலிகள்.

$ax^2 + bx + c$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையின் **மைய உறுப்பைப் பிரித்து** கீழ்க் கண்டவாறு காரணிப் படுத்தலாம்.

அவற்றின் காரணிகள் $(px + q)$ மற்றும்

$(rx + s)$ என்க. ஆகவே,

$ax^2 + bx + c = (px + q)(rx + s)$

$= prx^2 + (ps + qr)x + qs$

x^2 ன் குணகங்களை ஒப்பிடும் போது

$a = pr$ எனக் கிடைக்கிறது. இதேபோல் x-ன் குணகங்களை ஒப்பிடும்போது நமக்கு கிடைப்பது $b = ps + qr$ அதேபோல் மாறிலிகளை ஒப்பிடும்போது $c = qs$ எனக் கிடைக்கிறது.

இது எதை காட்டுகிறது எனில் b என்பது ps மற்றும் qr என்ற இரு எண்களின் கூடுதல் இவற்றின் பெருக்கல்

$(ps)(qr) = (pr)(qs) = ac$

எனவே $ax^2 + bx + c$ என்பதைக் காரணிப் படுத்த b என்பதை இரு எண்களின் கூடுதலாக எழுத வேண்டும். அந்த இரு எண்களின் பெருக்கல் ac. எடுத்துக்காட்டு 13 மூலம் இதை சரியாக புரிந்து கொள்ளலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 13: காரணி தேற்றத்தைப் பயன் படுத்தியும் மைய உறுப்பைப் பிரிததும் $6x^2 + 17x + 5$ ஐ காரணிப் படுத்து

தீர்வு : 1

பிரிக்கும் முறை (By splitting method)

இரண்டு எண்கள் p மற்றும் q என்பதில் $p + q = 17$ எனவும் $pq = 6 \times 5 = 30$ எனவும் வருமானால் நமக்கு காரணிகள் கிடைக்கும். எனவே 30 என்பதன் காரணிகளின் ஜோடியைக் காண்போம். 1 மற்றும் 30, 2 மற்றும் 15, 3 மற்றும் 10, 5 மற்றும் 6 இந்த ஜோடிகளில் 2 மற்றும் 15 என்பவை $p + q = 17$ என்று வருகிறது. எனவே

$$\begin{aligned} 6x^2 + 17x + 5 &= 6x^2 + (2 + 15)x + 5 \\ &= 6x^2 + 2x + 15x + 5 \\ &= 2x(3x + 1) + 5\,(3x + 1) \\ &= (3x + 1)\,(2x + 5) \end{aligned}$$

தீர்வு 2: காரணித் தேற்றத்தை பயன் படுத்துதல்

$$\begin{aligned} 6x^2 + 17x + 5 &= 6\left(x^2 + \frac{17}{6}x + \frac{5}{6}\right) \\ &= 6p(x) \end{aligned}$$

a மற்றும் b என்பன $p(x)$ ன் பூஜ்ஜியம் எனில் $6x^2 + 17x + 5 = 6(x - a)\,(x - b)$ ஆகையால் $ab = \frac{5}{6}$ இப்போது a மற்றும் b இவற்றிற்கு சில சாத்தியக் கூறு களைப் பார்ப்போம். அவை ஒருவேளை $\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{5}{3}, \pm\frac{5}{2}, \pm 1$ என இருக்கலாம்.

இப்போது $p\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{17}{6}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{5}{6} \neq 0$ ஆனால் $p\left(-\frac{1}{3}\right) = 0$ ஆகையால் $\left(x + \frac{1}{3}\right)$ என்பது $p(x)$ ன் காரணி ஆகும். இதேபோல் முயற்சித்தால் $\left(x + \frac{5}{2}\right)$ என்பது $p(x)$ ன் காரணி என அறியலாம்.

$$\therefore\ 6x^2 + 17x + 5 = 6\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{5}{2}\right)$$

$$= 6\left(\frac{3x+1}{3}\right)\left(\frac{3x+5}{2}\right)$$

$$= (3x + 1)\ (2x + 5)$$

மேற்கண்ட எடுத்துக் காட்டில் பிரிக்கும் முறை தகுந்ததாக உள்ளது எனலாம். எனினும் மற்றும் ஒரு எடுத்துக் காட்டை காண்போம்.

எடுத்துக்காட்டு 14 : $y^2 - 5y + 6$ ஐ காரணித் தேற்றத்தைப் பயன் படுத்தி காரணிப் படுத்து.

$p(y) = y^2 - 5y + 6$ என்க

$p(y) = (y - a)\ (y - b)$ எனில் இதன் மாறிலி உறுப்பு $= ab$ எனவே $ab = 6$

$p(y)$ ன் காரணிகளை கண்டுபிடிக்க முதலில் 6 ன் காரணிகளை கண்டுபிடி.

6 ன் காரணிகள் *1, 2,* மற்றும் *3* எனபன

இப்போது $p(2) = 2^2 - 5(2) + 6 = 0$

எனவே $y - 2$ என்பது $p(y)$ ன் காரணி

இதேபோல் $p(3) = 3^2 - 5(3) + 6 = 0$

எனவே $y - 3$ என்பதும் $y^2 - 5y + 6$ ன் காரணி

$\therefore\ y^2 - 5y + 6 = (y - 2)\ (y - 3)$

$y^2 - 5y + 6$ என்பதை மைய உறுப்பு $-5y$ யை பிரித்தும் காரணிப் படுத்தலாம்.

இப்போது முப்படி பல்லுறுப்புக் கோவைகளை காரணிப் படுத்துதல் எப்படி என பார்ப்போம். இங்கு பிரித்தல் முறையை பயன் படுத்துவது சரி வராது. நாம் முதலில் குறைந்த பட்சம் ஒரு காரணியையாவது கண்டுபிடிப்பது அவசியம். இதை கீழ்க் கண்ட எடுத்துக் காட்டில் பார்ப்பாய்.

எடுத்துக்காட்டு 15: $x^3 - 23x^2 + 142x - 120$ இதை காரணிப் படுத்து

தீர்வு: $p(x) = x^3 - 23x^2 + 142 - 120$ என்க இப்போது -120 ன் எல்லா காரணிகளையும் பார்ப்போம். அவற்றில் சில $\pm 1, \pm 12, \pm 15, \pm 20, \pm 24, \pm 30, \pm 60$.

இவற்றுள் எவ்வாறு காரணிகளை வைத்து முயற்சி செய்த்தில் நமக்கு கிடைத்தது $p(1) = 0$ எனவே $x - 1$ என்பது $p(x)$ ன் காரணி

இப்போது

$x^3 - 23x^2 + 142x - 120$

$= x^3 - x^2 - 22x^2 + 22x + 120x - 120$

$= x^2 (x - 1) - 22 (x - 1) + 120 (x - 1)$ *(ஏன்?)*

பொதுவாக $(x - 1)$ ஐ எடுக்க

$= (x - 1) (x^2 - 22x + 120)$

இதை $p(x)$ ஐ $(x - 1)$ ஆல் வகுத்தும் பெற்றிருக்கலாம்.

இப்போது $x^2 - 22x + 120$ ஐயும் காரணிப்படுத்தலாம். மைய உறுப்பைப் பிரித்தல் முறையால்,

$$\begin{aligned} x^2 - 22x + 120 &= x^2 - 12x - 10x + 120 \\ &= x(x - 12) - 10(x - 12) \\ &= (x - 12)(x - 10) \end{aligned}$$

எனவே $x^3 - 12x^2 + 142x - 120 = (x - 1)(x - 10)(x - 12)$

பயிற்சி 4.4

1. கீழ்க் கண்ட பல்லுறுப்புக் கோவைகளில் $(x + 1)$ ஐ காரணியாகக் கொண்டவை எவை என்பதைக் கண்டுபிடி.

   (i) $x^3 + x^2 + x + 1$ (ii) $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

   (iii) $x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x + 1$ (iv) $x^3 - x^2 - (2 + \sqrt{2})x + \sqrt{2}$

2. கீழ்க்கண்ட ஒவ்வொன்றிலும் $g(x)$ என்பது $p(x)$ ன் காரணியா என்பதை காரணித் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி கண்டுபிடி.

   (i) $p(x) = 2x^3 + x^2 - 2x - 1,\ g(x) = x + 1$

   (ii) $p(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1,\ g(x) = x + 2$

   (iii) $p(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6,\ g(x) = x - 2$

3. கீழ்க் கண்ட ஒவ்வொன்றிலும் $p(x)$ ன் காரணி $x - 1$ எனில் k ன் மதிப்பைக் கண்டுபிடி.

   (i) $p(x) = x^2 + x + k$ (ii) $p(x) = 2x^2 + kx + \sqrt{2}$

   (iii) $p(x) = kx^2 - \sqrt{2}x + 1$ (iv) $p(x) = kx^2 - 3x + k$

4. காரணிப் படுத்து

(i) $12x^2 - 7x + 1$ (ii) $2x^2 + 7x + 3$

(iii) $6x^2 + 5x + 6$ (iv) $3x^2 - x - 4$

5. காரணிப் படுத்து

(i) $x^3 - 2x^2 - x + 2$ (ii) $x^3 - 3x^2 - 9x - 5$

(iii) $x^3 + 13x^2 + 32x + 20$ (iv) $2y^3 + y^2 - 2y - 1$

4.6 இயற்கணித முற்றொருமைகள் (Algebraic Indentities)

இயற் கணித முற்றொருமை என்பது ஒரு இயற் கணித சமன் பாட்டில் வரும் மாறிகளுக்கு எந்த மதிப்பு அளித்தாலும் அதுசரியாக இருக்கும் என்பதை நீங்கள் முன் வகுப்புகளில் படித்ததை நினைவு கூறுங்கள். கீழ்க்கண்ட இயற்கணித முற்றொருமைகளை நீங்கள் ஏற்கனவே படித்துள்ளீர்கள்.

முற்றொருமை (I) : $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

முற்றொருமை (II) : $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

முற்றொருமை (III) : $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$

முற்றொருமை (IV) : $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

இயற் கணிதக் கோவைகளை காரணிப் படுத்த மேற்கண்ட முற்றொருமைகளைப் பயன் படுத்தி இருப்பிர்கள். அவற்றின் பயன்பாடை கீழேப்பாருங்கள்.

எடுத்துக்காட்டு 16: முற்றொருமைகளைப் பயன் படுத்தி கண்டுபிடி.

(i) $(x + 3)(x + 3)$ (ii) $(x - 3)(x + 5)$

தீர்வு: (i) $(x + 3)(x + 3)$ இங்கே

முற்றொருமை *1* ஐ பயன்படுத்த வேண்டும் $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

$y = 3$ எனில்

$$(x + 3)(x + 3) = (x + 3)^2 = x^2 + 2x(3) + (3)^2$$
$$= x^2 + 6x + 9$$

(ii) முற்றொருமை IV ஐ பயன் படுத்தினால்

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$
$$(x - 3)(x + 5) = x^2 + (-3 + 5)x + (-3)(+5)$$
$$= x^2 + 2x - 15$$

எடுத்துக் காட்டு 17: 105×106 இதை நேரடியாக பெருக்காமல் மதிப்பைக் கண்டுபிடி.

தீர்வு: $(105) \times (106) = (100 + 5) \times (100 + 6)$

முற்றொருமை IV ஐ பயன்படுத்தினால்

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

$$\therefore (100 + 5)(100 + 6) = (100)^2 + (5 + 6)100 + (5 \times 6)$$

$$= 10000 + 1100 + 30$$

$$= 11130$$

கொடுக்கப் பட்ட இயற்கணிதக் கோவைகளின் பெருக்கல் பலனைக்காண முற்றொருமைகளை பயன் படுத்தியதைப் பாரத்தோம். இந்த முற்றொருமைகள் இயற்கணிதக் கோவைகளை காரணிப் படுத்தவும் பயன் படுவதை கீழேக் காண்போம்.

எடுத்துக்காட்டு 18 : காரணிப் படுத்து :

(i) $49a^2 + 70ab + 25b^2$ (ii) $\frac{25}{4}x^2 - \frac{y^2}{9}$

தீர்வு : $49a^2 = (7a)^2$

$25b^2 = (5b)^2$

$70ab = 2(7a)(5b)$

கொடுக்கப்பட்ட கோவையை $x^2 + 2xy + y^2$ என்பதுடன் ஒப்பிட்டால் நாம் கவனிப்பது $x = 7a$ மற்றும் $y = 5b$ முற்றொருமை I ஐ பயன் படுத்தினால்

$$49a^2 + 70ab + 25b^2 = (7a + 5b)^2$$

$$= (7a + 5b)(7a + 5b)$$

(ii) $\frac{25}{4}x^2 - \frac{y^2}{9} = \left(\frac{5}{2}x\right)^2 - \left(\frac{y}{3}\right)^2$

முற்றொருமை III உடன் ஒப்பிட்டால்

$$\frac{25}{4}x^2 - \frac{y^2}{9} = \left(\frac{5}{2}x\right)^2 - \left(\frac{y}{3}\right)^2$$

$$= \left(\frac{5}{2}x + \frac{y}{3}\right)\left(\frac{5}{2}x - \frac{y}{3}\right)$$

இதுவரை ஈருறுப்புக் கோவைகளை முற்றொருமை உதவியுடன் தீர்த்தோம். இப்பொழுது முற்றொருமை I ஐ மூவுறுப்புக் கோவை $x+y+z$ என்பதில் எப்படி பயன் படுத்துவது எனப் பார்ப்போம். $(x+y+z)^2$ என்பதை முற்றொருமை I ஐ பயன் படுத்தி விரிவுப் படுத்துவோம்.

$(x+y+z)^2$ இதில்

$x+y=k$ என்க

$$\begin{aligned} \therefore\ (x+y+z)^2 &= (t+z)^2 \\ &= t^2+2tz+t^2 \\ &= (x+y)^2+2(x+y)z+z^2 \\ &\quad (\because t=x+y) \\ &= x^2+2xy+y^2+2zx+2yz+z^2 \\ &= x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx \end{aligned}$$

எனவே நமக்கு கீழ்க்க கண்ட முற்றொருமை கிடைக்கிறது

முற்றொருமை (V) : $(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx$

குறிப்பு : வலது புற கோவை இடதுபுற கோவையின் விரிவாக்கம் என்கிறோம். $(x+y+z)^2$ என்பதன் விரிவாக்கம் மூன்று வர்க்க (square) உறுப்புக்களையும் மூன்று பெருக்கல் உறுப்புக்களையும் கொண்டுள்ளன.

எடுத்துக்காட்டு 19: $(3a+4b+5c)^2$ இதன் விரிவாக்கத்தைக் கண்டுபிடி.

தீர்வு : கொடுக்கப் பட்ட கோவையை

$(x+y+z)^2$ உடன் ஒப்பிடும்போது,

$x=3a, y=4b$ மற்றும் $z=5c$

முற்றொருமை V ஐ பயன்படுத்துக.

$$\begin{aligned} (x+y+z)^2 &= x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx \\ (3a+4b+5c)^2 &= (3a)^2+(4b)^2+(5c)^2+2(3a)(4b)+2(4b)(5c)+2(5c)(3a) \\ &= 9a^2+16b^2+25c^2+24ab+40bc+30ca \end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 20: விரிவாக்கு $(4a-2b-3c)^2$

தீர்வு: முற்றொருமை V ஐ பயன் படுத்தினால்

$$\begin{aligned} (x+y+z)^2 &= x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx \\ (4a-2b-3c)^2 &= (4a)^2+(-2b)^2+(-3c)^2+2(4a)(-2b)+2(-2b)(-3c)+2(-3c)(4a) \\ &= 16a^2+4b^2+9c^2-16ab+12bc-24ca \end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 21: காரணிப் படுத்து $4x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 2yz + 4zx$

தீர்வு: $4x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 2yz + 4zx$

$$= (2x)^2 + y^2 + z^2 + 2(2x)(-y) + 2(-y)(z) + 2(z)(2x)$$

முற்றொருமை V ஐ பயன் படுத்தினால்.

$$= (2x - y + z)^2$$

$$= (2x - y + z)\,(2x - y + z)$$

இதுவரை நாம் இரண்டு அடுக்கு கொண்ட முற்றொருமைகளைப் பற்றிப் பார்த்தோம். இப்போது முற்றொருமை I ஐ உபயோகித்து $(x + y)^3$ ஐ எப்படி விரிவாக்குவது எனபார்ப்போம்.

$$(x + y)^3 = (x + y)\,(x + y)^2$$

$$= (x + y)\,(x^2 + 2xy + y^2)$$

$$= x(x^2 + 2xy + y^2) + y(x^2 + 2xy + y^2)$$

$$= x^3 + 2x^2y + xy^2 + x^2y + 2xy^2 + y^3$$

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$$

கீழ்க் கண்ட முற்றொருமை நமக்கு கிடைத்தது.

முற்றொருமை (VI) : $(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$

இதேபோல் முற்றொருமை VI ல் y க்கு பதிலாக $-y$ ஐ பயன் படுத்தினால் நமக்கு கிடைப்பது $(x - y)^3 = x^3 - y^3 - 3xy(x - y)$

$$= 125p^3 - 27q^3 - 225p^2q + 135 + q^2$$

முற்றொருமை (V) : $(x - y)^3 = x^3 - y^3 - 3xy(x - y)$

எடுத்துக்காட்டு 22: கீழ்க்கண்ட முப்படி கோவைகளை விரிவுப்படுத்தி எழுதுக.

(i) $(3a + 4b)^3$ (ii) $(5p - 3q)^3$

தீர்வு :

(i) கொடுக்கப்பட்ட கோவையை $(x + y)^3$ உடன் ஒப்பிடும் போது $x = 3a$ மற்றும் $y = 4b$.

முற்றொருமை VI ஐ பயன் படுத்தினால்