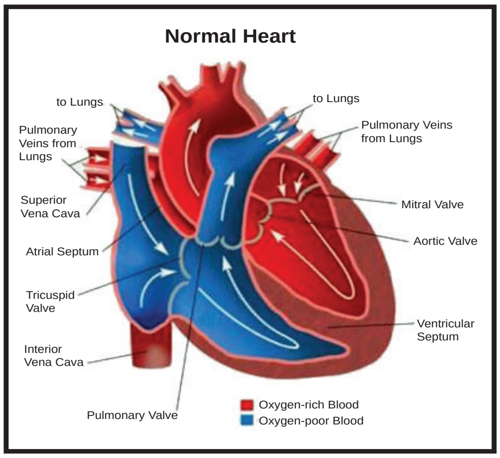
அத்தியாயம் 9

வகை நுண்கணிதம்
எல்லைகள் மற்றும் தொடர்ச்சித் தன்மை
DIFFERENTIAL CALCULUS LIMITS AND CONTINUITY

ZG0UJ

"மனிதர்கள் மறையலாம்,
அவர்களின் செயல்கள் மறைவதில்லை"
- அகஸ்டின் – லூயிஸ் கோசி

9.1 அறிமுகம் (Introduction)



நுண்கணிதம் என்பது மாற்றத்தின் வீதங்கள் தொடர்பானது. அறிவியலின் அனைத்துப் பிரிவுகளிலும் மாறுதலின் வீதங்கள் உள்ளன. **கணிதவியலில் அறிஞர்கள்** ஒரு வளைவரையின் மீது அமையும் நேர்க்கோட்டில் ஏற்படும் மாறுவீதத்தைக் கணக்கிடுவதில் ஆர்வமாக இருக்கின்றனர். அதே சமயம் **இயற்பியல் அறிஞர்கள்** ஒரு நகரும் பொருளின் இடப்பெயர்ச்சியின் மாறுவீதம், மற்றும் அதன் திசைவேகம் ஆகியவற்றைக் கணக்கிடுவதில் ஆர்வம் காட்டுகின்றனர். **வேதியியலாளர்கள்** ஒன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட மூலகங்கள் சேர்ந்து ஒன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட பொருட்களைக் கொடுக்கும் வேதி வினையின் வீதத்தைக் கணக்கிட விரும்புகின்றனர்.

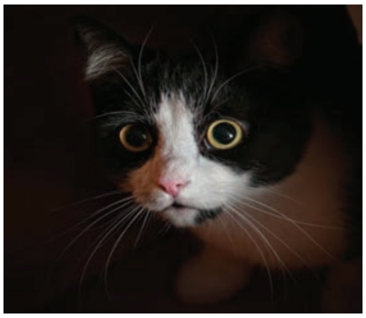
ஓர் **உயிரியலாளர்,** விலங்குகள் அல்லது தாவரங்களின் மொத்த எண்ணிக்கையில் குறிப்பிட்ட சில விலங்குகள் அல்லது தாவரங்களில் ஏற்படும் மாற்றங்களை ஆய்வு செய்ய விரும்புகின்றார். மேலும் இரத்த நாளங்கள் அல்லது தமனிகளில் உள்ள இரத்த ஓட்டத்தின் வீதத்தைக் கணக்கிடவும், இரத்த ஓட்டம் எந்த இரத்த நாளங்கள்/தமனிகளில் குறைவாக/அதிகமாக உள்ளது என்பதைக் காணவும் விழைகின்றார்.

பொருளியலாளர்கள், இறுதிநிலைத் தேவை, இறுதிநிலை வருவாய் மற்றும் இறுதிநிலை இலாபம் ஆகியவற்றை, தேவை, வருவாய் இலாபச் சார்புகளின் மாறுவீதம் மூலம் காண்கின்றனர்.

புவியியலாளர்கள், உருகிய பாறைக் குழம்புகள் சுற்றியுள்ள பாறைகளுடன் வெப்பத்தைக் கடத்தி குளிர்வதற்கான வீதத்தைக் கணக்கிடுவதில் ஆர்வம் காட்டுகின்றனர். ஒரு **பொறியாளர்**, மேல்நிலைத் தொட்டிக்குத் தண்ணீர் ஏற்றும் வீதம் மற்றும் தொட்டியிலிருந்து தண்ணீர் வெளியேறும் வீதத்தைக் கணக்கிட விரும்புகின்றார். நகர்ப்புறப் **புவியியலாளர்**, ஒரு நகரம் விரிவுபடுத்தப்படும்போது ஏற்படும் மக்கள்தொகை அடர்த்தி வீதத்தினைக் கணக்கிட விரும்புகின்றார்.

வானிலையாளர்கள் உயரத்திற்குத் தகுந்தாற்போல் வளிமண்டல அழுத்தத்தில் ஏற்படும் மாறுதலின் மாறுவீதத்தைக் கணக்கிடுவதில் ஆர்வம் காட்டுகின்றனர்.

உளவியலில் கற்றல் கோட்பாட்டில் ஆர்வமுள்ளவர்கள், கற்றல் வளைவரையைப் பற்றிப் படிக்கின்றனர். இது ஒருவரின் பயிற்சிக் காலத்தைப் பொறுத்த கற்றல் திறன் செயல்பாட்டின் வளைவரையாகும். காலத்தைப் பொறுத்துத் திறன் மேம்பாட்டின் வீதத்தின் அடிப்படையில் ஆர்வத்தைக் காணலாம்.



03_9th Differential Calculus 1.indd 93 30-05-2022 14:50:55

நாம் ஓர் இருட்டு அறையில் நுழையும்போது சுற்றியுள்ள பொருட்களைக் காண அதிக ஒளி உள் செல்ல ஏதுவாக நமது கண்பாவை விரிவடைந்து பொருட்களைத் தெளிவாகக் காண உதவுகிறது. அதற்கு நேர்மாறாக நாம் அதிக வெளிச்சமுள்ள ஓர் அறையில் நுழையும்போது அதிக வெளிச்சத்தினால் (ஒளியினால்) நமது பார்வைத் திறன் பாதிக்காத வகையில் நமது கண்பாவை சுருங்கி உள்ளே செல்லும் ஒளியின் அளவைக் குறைக்கின்றது. ஆராய்ச்சியாளர்கள், இது போன்ற செயல்பாடுகளின் வழிமுறையைக் கணித எல்லைகள் மூலம் காண்கின்றனர்.

இயற்பியலில் திசைவேகம், அடர்த்தி, மின்னோட்டம், மின்னாற்றல் மற்றும் வெப்பநிலையின் மாறுநிலை; வேதியியலில் எதிர்வினையின் வீதம் மற்றும் ஒருங்குத் தன்மை; உயிரியியலில் வளர்ச்சி வீதம் மற்றும் இரத்த ஓட்டத்தின் வேகம்; பொருளியியலில் இறுதிநிலைச் செலவு மற்றும் இறுதிநிலை இலாபம்; புவியியலில் வெப்ப ஓட்டத்தின் வீதம்; உளவியலில் செயல்திறன் ஆகியவை வகைக்கெழு என்ற ஒரே ஒரு கணிதக் (கோட்பாட்டின்) கருத்தாக்கத்தின் அடிப்படையில் அமைகிறது.

மேற்கூறியவை கணிதத்தின் திறன் அதன் உள்நுட்பமான தன்மையின் அடிப்படையில் உள்ளதற்கான எடுத்துக்காட்டுகளாகும். ஒரே ஒரு நுட்பமானக் கணிதக் கருத்தாக்கம் (வகைக்கெழு) அறிவியலின் பல்வேறு பிரிவுகளில் பலவிதமான விளக்கங்களைத் தருகின்றது. நாம் கணிதக் கருத்துருக்களை உருவாக்கும்போது அவற்றின் முடிவுகள் அறிவியலின் பல்வேறு பிரிவுகளில் பயன்படுத்தப்படுகின்றன. அறிவியலின் ஒவ்வொரு பிரிவிலும் உருவாகும் தனிப்பட்ட கருத்துருக்களைக் காட்டிலும் இது ஆற்றலுடையது.

பழங்காலத்தின் மிகச் சிறந்த படைப்புகளில் ஒன்று யூக்ளிடின் வடிவியல் ஆகும். இந்த முக்கியமான படைப்புக்கு இணையாக எந்தக் கண்டுபிடிப்பும் இரண்டாயிரம் ஆண்டுகளாக நுண்கணிதம் கண்டுபிடிக்கும்வரை நிகழவில்லை.

நுண்கணிதமானது இங்கிலாந்தில் **சர் ஐசக் நியூட்டன்** (1642-1727) மற்றும் ஜெர்மனியில் **காட்ஃபிரைட் வில்ஹெல்ம் லிபினிட்ஸ்** (1646-1716) என்பவர்களால் 17-ஆம் நூற்றாண்டின் இறுதியில் உருவாக்கப்பட்டது.

நியூட்டனின் கணித ஆர்வத்திற்குக் காரணம், அவருடைய காலத்தில் அவருக்குக் கிடைத்த மிகச் சிறந்த **Euclid's Elements** மற்றும் **Descartio La Geometric** ஆகிய இரு புத்தகங்களாகும். அவர், அவருக்கு முன்னர் வாழ்ந்த **கலிலியோ** மற்றும் **பெர்மாட்** போன்ற ஆராய்ச்சியாளர்கள் பற்றியும் அவர்களின் கண்டுபிடிப்புகள் பற்றியும் அறிந்திருந்தார்.

1664–ன் முடிவில் நியூட்டன் அவருடைய காலத்தில் கணித அறிவை முழுமையாகப் பெற்று அதன்பின் மேலும் வளர்த்துக்கொண்டார். 1665-ல் தொடர்ந்து மாறக்கூடிய தூரங்கள், வெப்பநிலைகள் போன்றவற்றின் மாறுகின்ற வீதம் பற்றி அவருடைய ஆராய்ச்சியை ஆரம்பித்தார். இந்த ஆராய்ச்சியின் விளைவுதான் இன்று நாம் காணும் வகைநுண்கணிதம் ஆகும். இன்று கணிதவியல் படிப்பவர்கள் அனைவரும் ஐசக் நியூட்டனின் கண்டுபிடிப்புகளில் பயணிக்கின்றனர்.

லிபினிட்ஸின் கணித ஆராய்ச்சிக் கட்டுரைகள் அவர் 1682-ல் ஆரம்பித்த **'Acta Eruditorum'** என்ற சஞ்சிகையில் பிரசுரமானது. இந்த சஞ்சிகையில் அவருடைய நுண்கணிதம் பற்றிய கட்டுரைகள் இடம்பெற்றன. இதுவே யார் முதலில் நுண்கணிதம் கண்டுபிடித்தது என நியூட்டனுடன் ஏற்பட்ட முரண்பாட்டிற்குக் காரணமாக இருந்தது. நுண்கணிதத்தின் முக்கிய முடிவுகளையும், தற்போது பயன்படுத்தும் வகைக்கெழு குறியீட்டையும் முதன்முதலாகப் பயன்படுத்தியவர் லிபினிட்ஸ் ஆவார்.

கோஷி
(1789 – 1857)

பாரிசில் 1789-ம் ஆண்டு பிறந்து 19-ஆம் நூற்றாண்டின் முதல் அரைப்பகுதியின் முதன்மையான கணிதமேதையாக அறியப்பட்டவர் **அகஸ்டின் – லூயிஸ் கோஷி** (1789-1857) ஆவார். கோஷி நுண்கணிதத்திற்குப் பல பங்களிப்புகள் செய்திருக்கின்றார். *1829*இல் இவருடைய **'Lecons Le calcul differential'** என்ற புத்தகத்தில் முதன்முதலாக எல்லைகள் பற்றிய தெளிவான வரையறையைத் தந்துள்ளார். மேலும் வகைக்கெழுவை வித்தியாசங்களின் விகிதத்தின் எல்லையாக, அதாவது,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$ -ன் எல்லை எனத் தந்துள்ளார்.

03_9th Differential Calculus 1.indd 94 30-05-2022 14:50:56

எல்லைகளின் துல்லியமான $(\in-\delta)$ வரையறை, தொடர்ச்சி மற்றும் வகைக்கெழு பற்றிய துல்லியமான கருத்துருக்களைக் கார்ல் வொயர்ஸ்ட்ராஸ் (1815-1897) என்ற ஜெர்மன் கணிதமேதை தந்துள்ளார்.

நுண்கணிதம் என்றால் என்ன?

அளவுகளின் அல்லது கணியங்களின் மாறுவீத கணிதம் நுண்கணிதம் ஆகும். மேலும் அன்றாட வாழ்வில் ஆராய்ச்சியாளர்கள், பொறியாளர்கள், பொருளியல் வல்லுனர்கள் பயன்படுத்தும் தொடுகோடுகள், சாய்வுகள், பரப்பு, கன அளவு, வில்லின் நீளம், நடுக்கோட்டுச் சந்தி, விளைவுத் தன்மை போன்ற கருத்துகளின் கணிதமாகவும் நுண்கணிதம் உள்ளது.

நுண்கணிதத்திற்கு முந்தைய புகுமுக நுண்கணிதத்தில், திசைவேகம் முடுக்கம், தொடுகோடுகள், சாய்வுகள் போன்றவைகள் வரையறுக்கப்பட்டிருப்பினும் நுண்கணிதத்திற்கும் புகுமுக நுண்கணிதத்திற்கும் அடிப்படையில் சில வேறுபாடுகள் உள்ளன. நுண்கணிதத்திற்கு முந்தைய புகுமுக நுண்கணிதம் நகராத தன்மையை உரைப்பதாகவும் நுண்கணிதம் நகரும் தன்மையை உரைப்பதாகவும் உள்ளன என்பதனைக் கவனத்தில் கொள்ள வேண்டும்.

- மாறாத திசைவேகத்தில் பயணிக்கும் ஒரு பொருளினைப் பகுப்பாய்வு செய்ய புகுமுக நுண்கணிதம் போதுமானது. ஆனால் முடுக்கிவிடப்பட்ட ஒரு பொருளின் திசைவேகத்தைப் பகுப்பாய்வு செய்ய நுண்கணிதம் தேவைப்படுகின்றது.
- ஒரு நேர்க்கோட்டின் சாய்வைப் பகுப்பாய்வு செய்ய புகுமுக நுண்கணிதம் போதுமானது. ஆனால் ஒரு வளைவரையின் சாய்வினைப் பகுப்பாய்வு செய்ய நுண்கணிதம் தேவைப்படுகின்றது.
- ஒரு வட்டத்தின் தொடுகோட்டைப் பகுப்பாய்வு செய்யப் புகுமுக நுண்கணிதம் போதுமானது. ஆனால் ஏதேனுமொரு வளைவரையின் தொடுகோட்டைப் பகுப்பாய்வு செய்ய நுண்கணிதம் தேவைப்படுகின்றது.
- ஒரு செவ்வகத்தின் பரப்பைப் பகுப்பாய்வு செய்யப் புகுமுக நுண்கணிதம் போதுமானது. ஒரு வளைவரை ஏற்படுத்தும் பரப்பைக் காண நுண்கணிதம் தேவைப்படுகின்றது.

மேற்கண்ட ஒவ்வொரு சூழலிலும் உள்ள பொதுவான உத்தி எல்லைச் செயல்முறை மூலம் புகுமுக நுண்கணிதத்தினை நுண்கணிதமாக மறுசீரமைக்கும் செயலாகும். நுண்கணிதம் என்றால் என்ன? என்ற கேள்விக்கு விடையளிக்கும் விதமாக நுண்கணிதத்தை மூன்று நிலைகள் உடைய "எல்லை இயந்திரம்" எனலாம். இதில் முதல் நிலையானது நேர்க்கோட்டின் சாய்வு, செவ்வகத்தின் பரப்பு காணுதல் போன்ற புகுமுக நுண்கணிதம் ஆகும். இரண்டாம் நிலை எல்லைச் செயல்பாடு ஆகும். மூன்றாம் நிலை புதிய பரிமாணமான வகையிடுதல் மற்றும் தொகையிடுதல் ஆகும்.

புகுமுக நுண்கணிதம்	$\Rightarrow$	எல்லைச் செயல்பாடு	$\Rightarrow$	நுண்கணிதம்

நுண்கணிதத்தை ஒரு செயல்முறையாக அல்லாமல் புதிய சூத்திரங்களின் தொகுப்பாக படிக்க முயற்சிப்பவர்கள், புரிதல், தன்னம்பிக்கை மற்றும் திருப்தியை இழப்பார்கள் என எச்சரிக்கப்படுகின்றனர்.

கற்றலின் நோக்கங்கள்

இப்பாடப்பகுதி நிறைவுறும்போது மாணவர்கள் அறிந்திருக்க வேண்டியவைகளாக

- வடிவியல் செயல்முறையாக எல்லை/தொடர்ச்சிக் கருத்துருக்களைக் காணல்
- எல்லை/தொடர்ச்சிக் கருத்துருகளை அன்றாட வாழ்க்கை செயல்களோடு தொடர்புபடுத்துதல்
- எல்லை/தொடர்ச்சியை நுண்கணிதத்தின் இதயம் மற்றும் உயிர்த் துடிப்பாக உணர்வது
- விஞ்ஞான உலகத்தில் நடைபெறும் ஒவ்வொரு மாற்றத்தினை அளவிடுதலுக்கும் மற்றும் கணிதமயமாக்கலுக்கும் எல்லை/தொடர்ச்சியினை ஒரு கருவியாகப் பயன்படுத்துதல்
- எல்லை/தொடர்ச்சிக் கருத்துருவை வாழ்க்கைச் சூழல் மூலம் திடப்படுத்துதல்

ஆகியவை எதிர்பார்க்கப்படுகின்றன.

03_9th Differential Calculus 1.indd 95 30-05-2022 14:50:56

9.2 எல்லைகள் (Limits)

9.2.1 எல்லைகளைக் காணுதல் (The calculation of limits)

நவீனக் கணிதத்திலும், நுண்கணிதத்திலும் முக்கிய பங்காற்றும் எல்லை பற்றிய கருத்துகளை இந்த அத்தியாயத்தில் விரிவாக காண்போம். கணிதவியல் 3000 ஆண்டுகளுக்கு முற்பட்டது என்றாலும், 19-ம் நூற்றாண்டில் பிரெஞ்சுக் கணித மேதை அகஸ்டின் -லூயிஸ் கோஷி மற்றும் கார்ல் வொயர்ஸ்ட்ராஸ் ஆகியோர் குறிப்பிடும்வரை எல்லை பற்றி அறிந்திருக்கவில்லை. இப்பகுதியில் எல்லையின் வரையறை மற்றும் அவற்றை எவ்வாறு காண்பது என்பதைப் பற்றியும் பார்ப்போம்.

விளக்க எடுத்துக்காட்டு 9.1

$f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ என்ற சார்பு $y = f(x) = x^2+3$ என வரையறுப்பதாக எடுத்துக் கொள்வோம்.

$x = 2$ என்ற புள்ளியில் இந்தச் சார்பின் தன்மை பற்றி ஆராய்வோம். இருவிதமான x-ன் மதிப்புகளைப் பயன்படுத்துவோம் : ஒன்று 2-ன் இடப்பக்கமிருந்து (2-க்கு குறைவானது) 2-ஐ நோக்கி நெருங்கும் மதிப்புகள் ; மற்றொன்று 2-ன் வலப்பக்கமிருந்து 2-ஐ நோக்கி நெருங்கும் மதிப்புகள் (2க்கு அதிகமான).

இடப்பக்கமிருந்து 2-ஐ நெருங்கும் x → ← வலப்பக்கமிருந்து 2-ஐ நெருங்கும் x

x	1.7	1.9	1.95	1.99	1.999	1.9999	2	2.0001	2.001	2.01	2.05	2.1	2.3
$f(x)$	5.89	6.61	6.8025	6.9601	6.99601	6.99960001	7	7.0040001	7.004001	7.0401	7.2025	7.41	8.29

அட்டவணையிலிருந்து x-ன் மதிப்பு 2-ஐ நோக்கி நெருங்கும்போது $f(x) = x^2+3$-ன் மதிப்பு 7-ஐ நெருங்குவதைக் காணலாம். இதில் வியக்கத்தக்கது ஒன்றுமில்லை, ஏனெனில் $x = 2$-ல் $f(x)$-ன் மதிப்பை கணக்கிடும்போது $f(2) = 2^2 + 3 = 7$ எனக்கிடைப்பதைக் காணலாம்.

இந்த எல்லை மதிப்பை யூகிப்பதற்கு $x=2$-ல் $f(x)$-ன் மதிப்பைக் கணக்கிட வேண்டிய அவசியமில்லை.

x-ன் மதிப்பு 2-க்கு இடமிருந்தும் (2-ஐ விட குறைவான மதிப்புகள்) வலமிருந்தும் (2-ஐ விட அதிக மதிப்புகள்) 2-ஐ நெருங்கும்போது $f(x)$-ன் மதிப்பு 7-ஐ நெருங்குகிறது. அதாவது x-ன் மதிப்பு 2-க்கு மிக நெருக்கமாக அமையும்போது $f(x)$-ன் மதிப்பு 7-க்கு மிக அருகில் அமைகிறது. இந்தச் சூழலை சுருக்கமாக பின்வருமாறு கூறலாம்.

x-ன் மதிப்பு 2-ஐ இடப்பக்கமாக நெருங்கும்போது $f(x)$-ன் இடது எல்லை 7-ஆகவும், அதேபோல் x-ன் மதிப்பு 2-ஐ வலப்பக்கமாக நெருங்கும்போது $f(x)$-ன் வலது எல்லை 7-ஆகவும் உள்ளது என்று பொருள். இதனைப் பின்வருமாறு எழுதலாம் :

$x\rightarrow 2^-$ எனில், $f(x)\rightarrow 7$ மற்றும் $x\rightarrow 2^+$ எனில் $f(x)\rightarrow 7$

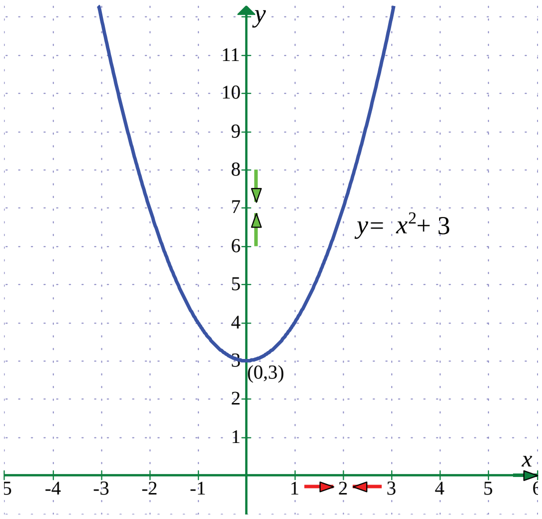
அல்லது

அதாவது, $\lim\limits_{x\to2^-} f(x) = 7$ மற்றும் $\lim\limits_{x\to2^+} f(x) = 7.$

அதாவது $\lim\limits_{x\to2^-} f(x) = 7 = \lim\limits_{x\to2^+} f(x).$

இதன் பொதுவான மதிப்பினை $\lim\limits_{x\to2} f(x) = 7$ என எழுதலாம்.

இதிலிருந்து எல்லை மதிப்பு ஒரு அறுதியிட்ட மெய்யெண் என அறியலாம். இங்கு அறுதியிட்ட என்பது $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)$ மற்றும் $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)$ ஆகியவை வெவ்வேறானவை அல்ல என்பதையும், $\lim\limits_{x\to2} f(x) = \lim\limits_{x\to2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to2^+} f(x)$ என்பது தனித்த ஒரு மெய்யெண் என்பதையும் குறிக்கும்.



படம் 9.1

$x\rightarrow 2$ எனும்போது $f(x) = x^2 + 3$-ன் தன்மையை, படம் 9.1 வடிவியல் முறையில் விளக்குகிறது.

03_9th Differential Calculus 1.indd 96 30-05-2022 14:50:58

விளக்க எடுத்துக்காட்டு 9.2

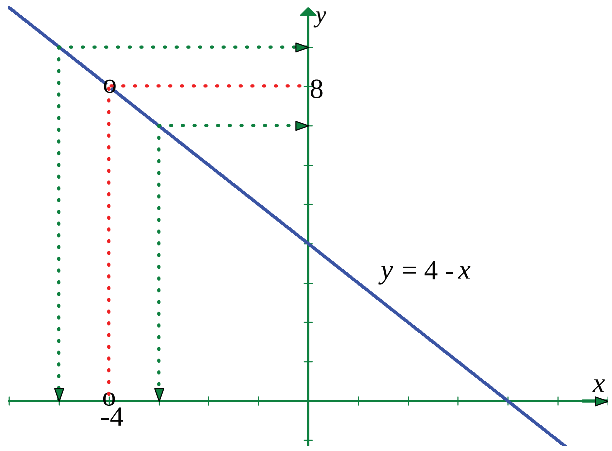
அடுத்ததாக $f(x) = \frac{16-x^2}{4+x}$ என்ற விகிதமுறு சார்பை எடுத்துக்கொள்வோம்.

இந்தச் சார்பின் மதிப்பகம் $\mathbb{R} \setminus \{-4\}$ ஆகும். $f(-4)$ வரையறுக்கப்படவில்லை. எனினும், x-ன் மதிப்பு -4ஐ நெருங்கும்போது உள்ள $f(x)$-ன் மதிப்பைக் கணக்கிட இயலும், ஏனெனில், $\lim_{x\to -4}\left(\frac{16-x^2}{4+x}\right)$ என்ற குறியீட்டின்படி நாம் x-க்கு -4 அருகில் உள்ள மதிப்புகளை மட்டுமே கருத்தில் கொள்கிறோம். $x = -4$ அல்ல என்பதை இது குறிக்கின்றது. பின்வரும் அட்டவணை x-ன் மதிப்பு -4ஐ நெருங்கும்போது உள்ள $f(x)$-ன் மதிப்புகளைத் தருகிறது,

$(x < -4)$ $(x \to -4^-)$	$f(x)$	$(x > -4)$ $(x \to -4^+)$	$f(x)$
-4.1	8.1	-3.9	7.9
-4.01	8.01	-3.99	7.99
-4.001	8.001	-3.999	7.999

$x \neq -4$ எனில், $f(x)$-ஐ நீக்கல் முறையில் சுருக்கலாம் :

$$f(x) = \frac{16-x^2}{4+x} = \frac{(4+x)(4-x)}{(4+x)} = 4 - x.$$



படம் 9.2

படம் 9.2லிருந்து, $f(x)$-ன் வரைபடமானது $x = -4$ என்ற புள்ளியைத் தவிர மற்ற இடங்களில் $y = 4 - x$ என்ற கோட்டின் வரைபடம் அமைந்துள்ளதைக் காணலாம். $x = -4$ என்ற புள்ளி சிறு துவாரமாகத் (puncture) தொடர்ச்சியற்றுக் காட்டப்பட்டுள்ளது. x-ன் மதிப்பு -4-ஐ நெருங்க, நெருங்க y-ன் மதிப்பு 8-ஐ நெருங்கி, நெருங்கி செல்வதைக் காணலாம். இவை படத்தில் x-அச்சின் மீதுள்ள அம்புக்குறிகளையும், y-அச்சின் மீதுள்ள அம்புக்குறிகளையும் குறிக்கின்றன.

இங்கு,

$$\lim_{x\to -4^-} f(x) = 8 = \lim_{x\to -4^+} f(x), \text{ எனவே}$$

$$\lim_{x\to -4} f(x) = \lim_{x\to -4} \frac{16-x^2}{4+x} = 8.$$

03_9th Differential Calculus 1.indd 97 30-05-2022 14:51:03

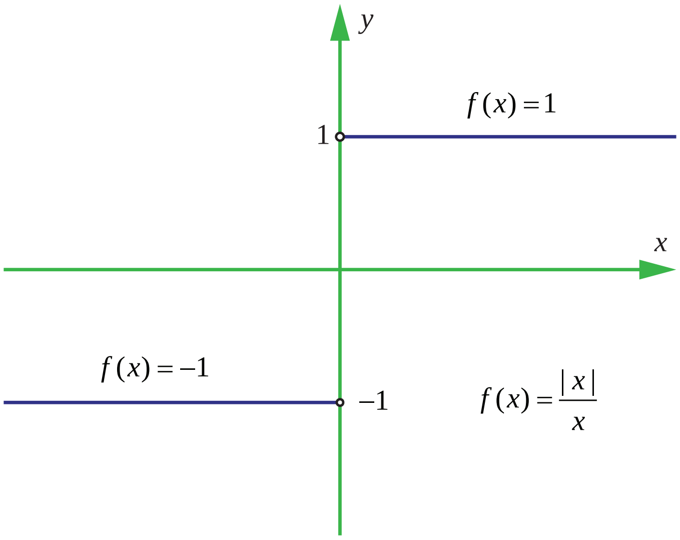
விளக்க எடுத்துக்காட்டு 9.2-ல் $x=-4$ இல் $f(x)$ வரையறுக்கப்படவில்லை எனினும் x-ன் மதிப்பு -4ஐ நெருங்கும்போது $f(x)$-ன் மதிப்பு ஒரு எல்லையை நெருங்குவதைக் காணலாம். $x=-4$-ல் சார்பு $f(x)$-ன் மதிப்பு இருந்தாலும், இல்லாமல் இருந்தாலும் அது x-ன் மதிப்பு -4-ஐ நெருங்கும்போது $f(x)$-ன் எல்லை மதிப்பு இருத்தலைப் பாதிக்கவில்லை என்பதை உணரலாம்.

விளக்க எடுத்துக்காட்டு 9.3

தற்போது நாம் விளக்க எடுத்துக்காட்டுகள் 9.1 மற்றும் 9.2-லிருந்து வேறுபட்ட ஒரு சார்பை எடுத்துக் கொள்வோம்.

$f(x)=\dfrac{|x|}{x}$ என்க.

$x=0$ என்ற மதிப்பு $f(x)$ என்ற சார்பின் சார்பகமான $\mathbb{R}\setminus\{0\}$-ல் இல்லை. வரைபடத்தைக் கவனிக்கவும். வரைபடத்தில் இருந்து x-ன் மிகை மதிப்புகளுக்கு,



படம் 9.3

$\dfrac{|x|}{x}=\dfrac{x}{x}=+1$ எனவும் x-ன்

குறைமதிப்புகளுக்கு, $\dfrac{|x|}{x}=\dfrac{-x}{x}=-1$

எனவும் உள்ளதைக் காணலாம்.

x-ன் மதிப்பு பூஜ்ஜியத்திற்கு எவ்வளவு மிக அருகில் இருந்தாலும் (பூஜ்ஜியத்தின் அண்மையில்), x-ன் மிகை மற்றும் குறை மதிப்புகளுக்கு முறையே $f(x)=1$ மற்றும் $f(x)=-1$ எனுமாறு இருக்கும் என அறியலாம்.

அதாவது, $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=-1$ மற்றும் $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=+1$.

இதிலிருந்து $x=0$-ல் எல்லை மதிப்பு இல்லை என அறியலாம். ஆனால், x-ன் மற்ற மதிப்புகளுக்கு எல்லை மதிப்புகள் உண்டு.

எடுத்துக்காட்டாக, $\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{|x|}{x}=1$ மற்றும் $\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{|x|}{x}=1$.

இதுபோல், $$\lim_{x\to-3^-}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to-3^-}\frac{-x}{x}=-1$$

$$\lim_{x\to-3^+}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to-3^+}\frac{-x}{x}=-1.$$

அதாவது $x_0\neq0$ என உள்ள எல்லா மெய்யெண்களுக்கும்,

$x_0<0$ எனில், $\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{|x|}{x}=-1=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{|x|}{x}$ மற்றும்

$x_0>0$ எனில் $\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{|x|}{x}=1=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{|x|}{x}$

03_9th Differential Calculus 1.indd 98 30-05-2022 14:51:06

இப்போது 9.1 முதல் 9.3 வரையிலான விளக்க எடுத்துக்காட்டுகளின் வேறுபாடுகளைக் காண்போம். விளக்க எடுத்துக்காட்டு 9.1–ல் $f(x) = x^2 + 3$ என்ற சார்பு $x = 2$–ல் வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது. அதாவது 2 என்ற எண் $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ என்ற சார்பகத்தில் உள்ளது. விளக்க எடுத்துக்காட்டு 9.2–ல் $x = -4$ என்ற புள்ளியில் சார்பு வரையறுக்கப்படவில்லை. முதலில் கூறப்பட்ட எடுத்துக்காட்டில் x–ன் மதிப்பு 2–ஐ நெருங்க நெருங்க $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ கிடைக்கக் கூடியதாக அதாவது $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$ மற்றும் $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$ கிடைக்கப்பெற்று அவை சமமாகவும் ஒரு தனித்த மெய்யெண்ணாகவும் உள்ளன.

இரண்டாவது எடுத்துக்காட்டில் $x = -4$–ல் சார்பு வரையறுக்கப்படாவிடினும் x–ன் மதிப்பு -4-ஐ நெருங்க நெருங்க $\lim\limits_{x \to -4} f(x)$ கிடைக்கிறது.

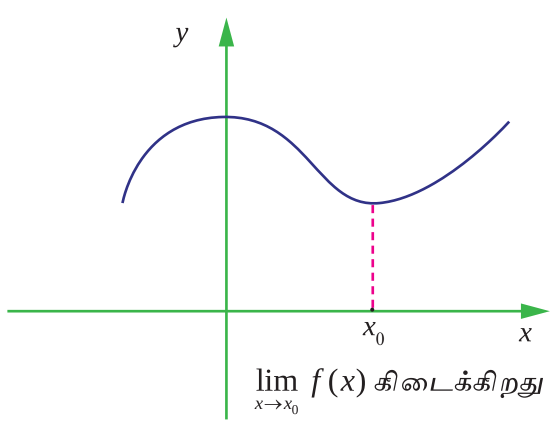
விளக்க எடுத்துக்காட்டு 9.3–ல் $\lim\limits_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$ –ன் மதிப்பு கிடைக்கப்பெறவில்லை என்பதன் பொருள், x–ன் மதிப்பு பூஜ்ஜியத்திற்கு மிக அருகில் உள்ளபோது ஒரு பக்க எல்லைகளான $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x}$ மற்றும் $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x}$ –ன் மதிப்புகள் வெவ்வாறாக உள்ளன என்பதாகும்.

மேற்கண்ட உற்று நோக்கல்களிலிருந்து எல்லைக்கான வரையறையை உய்த்தறியும் முறையில் பெறலாம்.

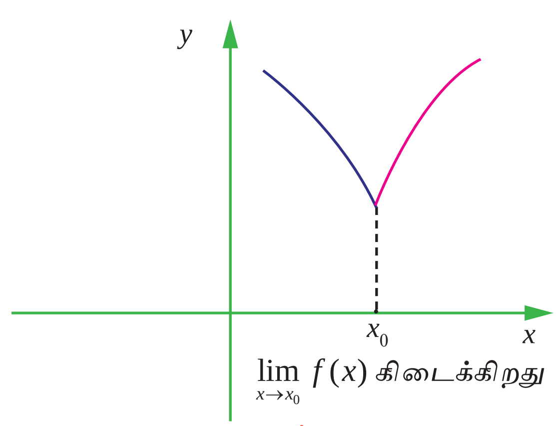
வரையறை 9.1

I என்பது $x_0 \in \mathbb{R}$ என்ற புள்ளியை உள்ளடக்கிய ஒரு திறந்த இடைவெளி என்க. சார்பு $f : I \to \mathbb{R}$. என வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது. x–ன் மதிப்பு x_0–ஐ நெருங்கும்போது $f(x)$–ன் எல்லை மதிப்பு L (அதாவது குறியீட்டில் $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$) எனக் கூற வேண்டுமானால், $x \neq x_0$ ஆக அமைந்து x-ஆனது தேவையான அளவுக்கு x_0–ஐ இருபுறமுமாக நெருங்கும்போது $f(x)$–ன் மதிப்பானது தேவையான அளவுக்கு L–க்கு மிக அருகில் அமைய வேண்டும்.

மேற்கூறிய விவரங்களை பின்வரும் வரைபடங்கள் (9.4 மற்றும் 9.5) மூலம் காணலாம்.



படம் 9.4



படம் 9.5

9.2.2 ஒருபுற எல்லைகள் (One sided limits)

வரையறை 9.2

x–ன் மதிப்பு தேவையான அளவு x_0–க்கு அருகிலும் x_0–ஐ விடக் குறைவாகவும் இருக்கும்போது $f(x)$–ன் மதிப்பு l_1க்கு மிக அருகில் இருக்கும் எனில், x–ன் மதிப்பு x_0–ஐ நெருங்கும்போது $f(x)$–ன் **இடப்பக்க எல்லை** (x இடப்பக்கமிருந்து x_0–ஐ நெருங்கும்போது $f(x)$–ன் எல்லை) எனக்கூறலாம்.

குறியீட்டில் $f(x_0^-) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = l_1$ என எழுதலாம்.

03_9th Differential Calculus 1.indd 99 30-05-2022 14:51:09

இதேபோன்று

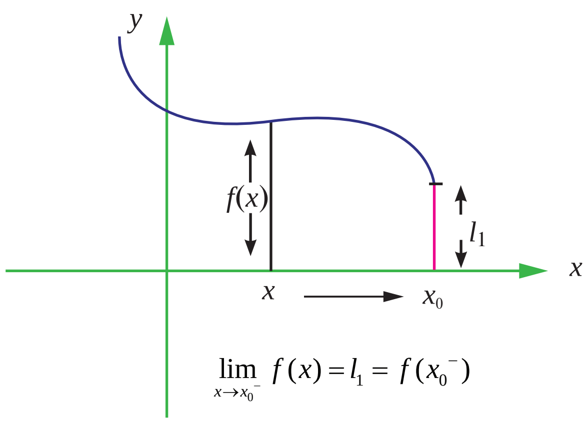
வரையறை 9.3

x-ன் மதிப்பு தேவையான அளவு x_0-க்கு அருகிலும் x_0-ஐ விட அதிகமாகவும் இருக்கும்போது $f(x)$-ன் மதிப்பு l_2-க்கு மிக அருகில் இருக்கும் எனில், x-ன் மதிப்பு x_0-ஐ நெருங்கும்போது $f(x)$-ன் **வலப்பக்க எல்லை** (x வலப்பக்கமிருந்து x_0-ஐ நெருங்கும்போது $f(x)$-ன் எல்லை) எனக்கூறலாம்.

குறியீட்டில் $f(x_0^+) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = l_2$ என எழுதலாம்.

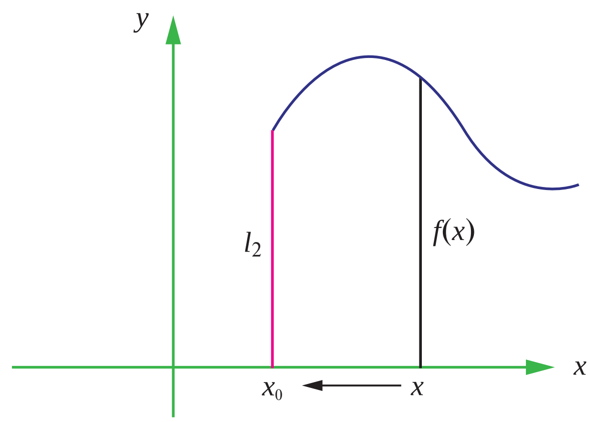
மேலும் $x < x_0$ மற்றும் $x > x_0$ என்பவை முறையே "$x \to x_0^-$" மற்றும் "$x \to x_0^+$" எனக்குறிக்கப்படுகிறது.

இந்த வரையறைகள் 9.6 முதல் 9.9 வரையிலான படங்கள் மூலம் விளக்கப்பட்டுள்ளன.



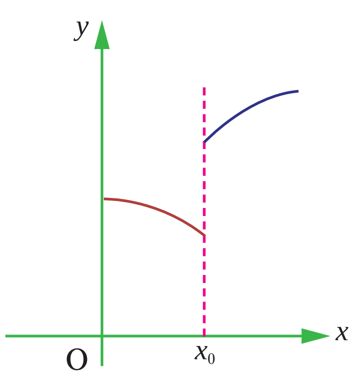
$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = l_1 = f(x_0^-)$

படம் 9.6



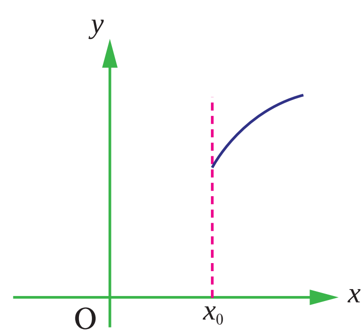
$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = l_2 = f(x_0^+)$

படம் 9.7



$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ இல்லை

படம் 9.8



$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ இல்லை

படம் 9.9

(x_0 - ஐ இடப்பக்கம், வலப்பக்கம் இருந்து நெருங்கும்போது வெவ்வேறான மதிப்புகள் கிடைக்கின்றன)

(x_0-க்கு இடப்பக்கம் சார்பு வரையறுக்கப்படவில்லை)

மேற்கண்ட விவாதங்களிலிருந்து $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ என கிடைக்க வேண்டுமானால் பின்வரும் முடிவுகள் கிடைக்க வேண்டும்.

(i) $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ (ii) $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ (iii) $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = L$

03_9th Differential Calculus 1.indd 100 30-05-2022 14:51:11

x-ன் மதிப்பு x_0-ஐ நெருங்கும்போது $f(x)$-ன் எல்லை மற்றும் ஒருபுற எல்லைகளின் வரையறைகளிலிருந்து பின்வருவனவற்றை பெறலாம்.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0^-} f(x) = L = \lim_{x \to x_0^+} f(x).$$

இவ்வாறாக, $\lim_{x \to x_0} f(x)$ கிடைக்கப்பெறும் எனில் L ஒரு தனித்த மெய்யெண்ணாகும். மேற்கண்ட நிபந்தனைகளில் ஏதேனும் ஒன்றை நிறைவு செய்யவில்லை எனில் x-ன் மதிப்பு x_0-ஐ நெருங்கும்போது $f(x)$-க்கு எல்லை மதிப்பு இல்லை எனலாம்.

ஒருபுற எல்லைகள், எல்லைகளைவிட வலுக்குறைந்தவையாகும் என்பதனைக் கவனத்தில் கொள்ளவும். ஒருபுற எல்லைகளைக் காண கீழ்க்காண்பவை பயனுள்ளதாக இருக்கும்.

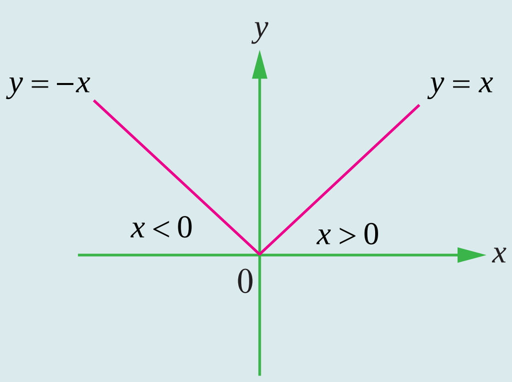
$h > 0$ எனில்,

$$f(x_0^-) = \lim_{h \to 0} f(a-h), \quad f(x_0^+) = \lim_{h \to 0} f(a+h)$$

குறிப்பாக $f(x_0^-)$ மற்றும் $f(x_0^+)$ ஆகியவை முறையே இடப்புற மற்றும் வலப்புற எல்லைகளைக் குறிக்கும்போது $f(x_0)$ என்பது $x = x_0$ என்ற புள்ளியில் சார்பின் மதிப்பாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 9.1

$\lim_{x \to 0} |x|$-ன் மதிப்பு காண்க.



படம் 9.10

தீர்வு

அத்தியாயம் 1-ல் உள்ளபடி $|x| = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}$

$x > 0$ எனில், $|x| = x$, இங்கு x-ன் மதிப்பு

0-ஐ வலப்பக்கமாக நெருங்கும்.

எனவே $\lim_{x \to 0^+} |x| = 0$.

$x < 0$ எனில், $|x| = -x$. இங்கு x-ன் மதிப்பு 0-ஐ இடப்பக்கமாக நெருங்கும். எனவே $\lim_{x \to 0^-} |x| = 0$

இவ்வாறாக, $\lim_{x \to 0^-} |x| = 0 = \lim_{x \to 0^+} |x|$

எனவே, $\lim_{x \to 0} |x| = 0$.

எடுத்துக்காட்டு 9.2

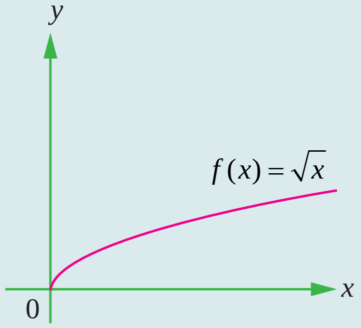
$f(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$ எனில், $\lim_{x \to 0} f(x)$ கிடைக்கப்பெறுமா எனக்காண்க.

03_9th Differential Calculus 1.indd 101 30-05-2022 14:51:16

தீர்வு

எல்லை கிடைக்காது.

$x < 0$-க்கு $f(x) = \sqrt{x}$ வரையறுக்கப்படவில்லை. எனவே, $x \to 0^-$-க்கு, $\sqrt{x}$ வரையறுக்கப்படவில்லை. எனவே, $\lim_{x \to 0^-} \sqrt{x}$ -ன் மதிப்பு கிடைக்கப்பெறாது. இருப்பினும் $\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$. ஆகையால் $\lim_{x\to 0} \sqrt{x}$ கிடைக்கப்பெறாது.



படம் 9.11

$\lim_{x\to 0^-} \log x$ கிடைக்கப்பெறுமா?

இந்த வினாவின் விடைக்கு log x-ன் வரைபடத்தைப் பார்க்கவும்.

எடுத்துக்காட்டு 9.3

$\lim_{x\to 2^-} \lfloor x \rfloor$ மற்றும் $\lim_{x\to 2^+} \lfloor x \rfloor$ ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

தீர்வு

x-ஐ விட மிகைப்படாத மீப்பெரு முழு எண் மதிப்பைப் பெறும் சார்பு $f(x) = \lfloor x \rfloor$ ஆகும். படம்1.25-ல் உள்ள இந்த சார்பின் வரைபடம் மூலம் $\lim_{x \to 2^-} \lfloor x \rfloor = 1$ மற்றும் $\lim_{x \to 2^+} \lfloor x \rfloor = 2$ என்பது தெளிவாகிறது.

மேலும், ஏதேனும் ஒரு இயல் எண் n-க்கு, $\lim_{x \to n^-} \lfloor x \rfloor = n - 1$ மற்றும் $\lim_{x \to n^+} \lfloor x \rfloor = n$ ஆகும்.

$f(x) = \lim_{x\to n} \lceil x \rceil$ கிடைக்கப்பெறுமா? இந்த வினாவிற்கான விடைக்கு $\lceil x \rceil$ என்ற சார்பின் படம் 1.26-ஐ பார்க்கவும்.

எடுத்துக்காட்டு 9.4

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x > 0 \\ x-1, & x < 0 \end{cases}$$ என்க.

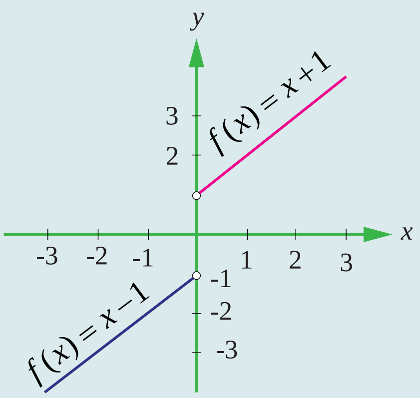
$x \to 0$ எனில், $f(x)$-க்கு எல்லை மதிப்பு உள்ளதா என சோதிக்கவும்.

தீர்வு

இந்தச் சார்பின் (படம் .9.12)

படத்திலிருந்து $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$ மற்றும் $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$.

இம்மதிப்புகள் வெவ்வேறானவையாக உள்ளதால் $\lim_{x \to 0} f(x)$ கிடைக்கப்பெறாது.



படம் 9.12

எடுத்துக்காட்டு 9.5

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x+5|}{x+5}, & ;\ x \neq -5 \\ 0, & ;\ x = -5 \end{cases}$$ எனில், $\lim_{x \to -5} f(x)$ கிடைக்கப் பெறுமா எனச் சோதிக்க.

தீர்வு

(i) $f(-5^-)$.

$x < -5$ எனில், $|x + 5| = -(x + 5)$

எனவே, $f(-5^-) = \lim\limits_{x\to -5^-} \frac{-(x+5)}{(x+5)} = -1$

(ii) $f(-5^+)$.

$x > -5$ எனில், $|x + 5| = (x + 5)$

இதனால் $f(-5^+) = \lim\limits_{x\to -5^+} \frac{(x+5)}{(x+5)} = 1$

$f(-5^-) \neq f(-5^+)$. எனவே எல்லை மதிப்பு இல்லை.

எடுத்துக்காட்டு 9.6

$\lim\limits_{x\to 1} \frac{4|x-1|+x-1}{|x-1|}, x \neq 1$ கிடைக்கப்பெறுமா எனச் சோதிக்க.

தீர்வு

$x > 1$ எனில், $|x - 1| = x - 1$ மற்றும் $f(1^+) = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{4(x-1)+x-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{5(x-1)}{(x-1)} = 5$

$x < 1$ எனில், $|x - 1| = -(x - 1)$, மற்றும் $f(1^-) = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{-4(x-1)+(x-1)}{-(x-1)} = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{3(x-1)}{(x-1)} = 3$

அதாவது $f(1^-) \neq f(1^+)$. எனவே எல்லை மதிப்பு கிடைக்காது.

பயிற்சி 9.1

1 முதல் 6 வரை உள்ள கணக்குகளுக்குக் அட்டவணையைப் பயன்படுத்தி எல்லை மதிப்பைக் கணக்கிடுக.

(1) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x-2}{x^2-x-2}$

x	1.9	1.99	1.999	2.001	2.01	2.1
$f(x)$	0.344820	0.33444	0.33344	0.333222	0.33222	0.332258

(2) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x-2}{x^2-4}$

x	1.9	1.99	1.999	2.001	2.01	2.1
$f(x)$	0.25641	0.25062	0.250062	0.24993	0.24937	0.24390

(3) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}{x}$

x	– 0.1	– 0.01	– 0.001	0.001	0.01	0.1
$f(x)$	0.2911	0.2891	0.2886	0.2886	0.2885	0.28631

(4) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{\sqrt{1-x}-2}{x+3}$

x	– 3.1	– 3.01	– 3.00	– 2.999	– 2.99	– 2.9
$f(x)$	– 0.24845	– 0.24984	– 0.24998	– 0.25001	– 0.25015	– 0.25158

(5) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x}$

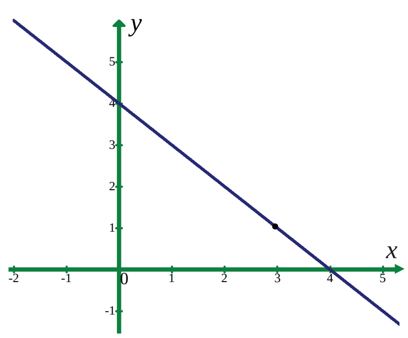
x	– 0.1	– 0.01	– 0.001	0.001	0.01	0.1
$f(x)$	0.99833	0.99998	0.99999	0.99999	0.99998	0.99833

(6) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x}$

x	– 0.1	– 0.01	– 0.001	0.0001	0.01	0.1
$f(x)$	0.04995	0.0049999	0.0004999	–0.0004999	–0.004999	–0.04995

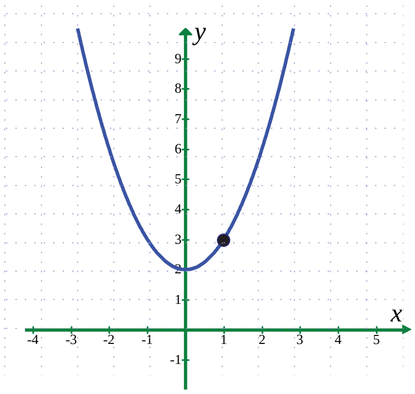
7 முதல் 15 வரை உள்ள கணக்குகளுக்கு வரைபடத்தைப் பயன்படுத்தி எல்லை மதிப்பு காண்க (உள்ளது எனில்). எல்லை மதிப்பு இல்லை எனில், காரணத்தை விளக்குக.

(7) $\lim\limits_{x \to 3}(4-x)$



படம் 9.13

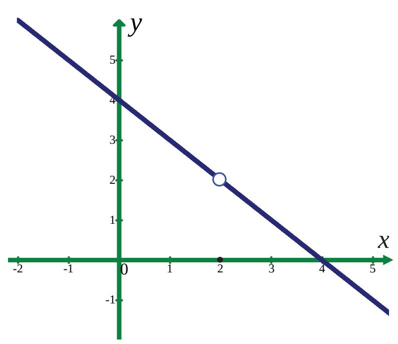
(8) $\lim\limits_{x \to 1}(x^2+2)$.



படம் 9.14

(9) $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$.

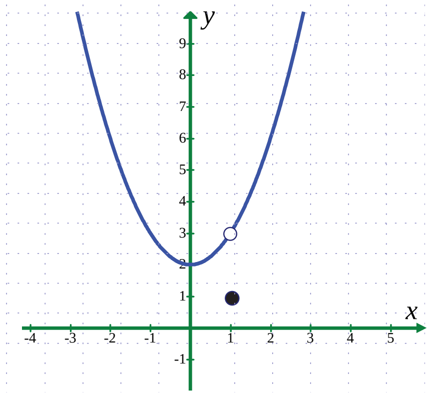
இங்கு $f(x) = \begin{cases} 4-x, & x \neq 2 \\ 0, & x = 2 \end{cases}$.



படம் 9.15

(10) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$.

இங்கு $f(x) = \begin{cases} x^2+2, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$.

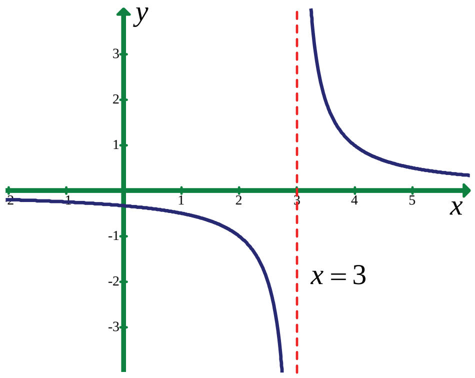


படம் 9.16

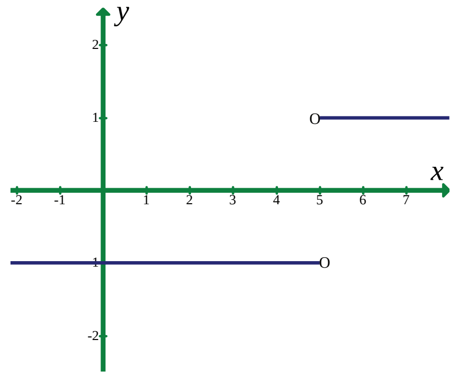
03_9th Differential Calculus 1.indd 104 30-05-2022 14:51:30

(11) $\lim\limits_{x \to 3} \frac{1}{x-3}$

(12) $\lim\limits_{x \to 5} \frac{|x-5|}{x-5}$



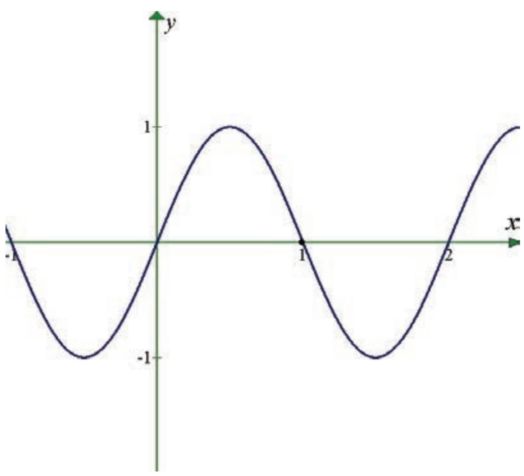
படம் 9.17



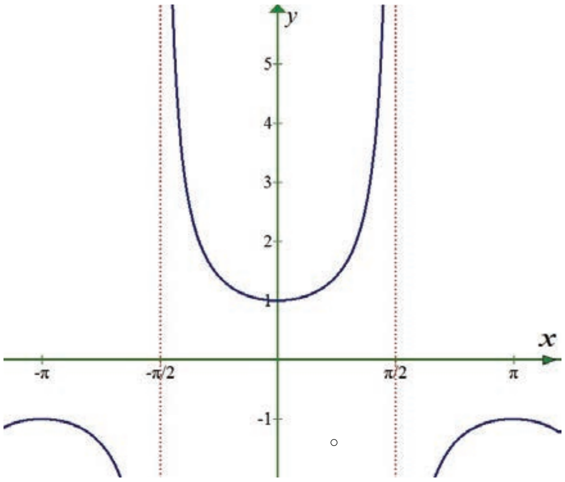
படம் 9.18

(13) $\lim\limits_{x \to 1} \sin \pi x$

(14) $\lim\limits_{x \to 0} \sec x$

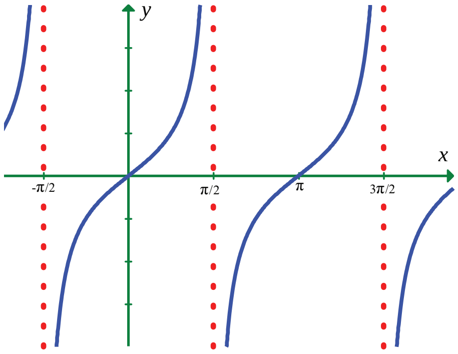


படம் 9.19



படம் 9.20

(15) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \tan x$



படம் 9.21

16, 17 கணக்குகளுக்கு f–ன் வரைபடம் வரைந்து x_0–ன் எந்த மதிப்புகளுக்கு $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ உள்ளது என்பதைக் காண்க.

(16) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \le 2 \\ 8-2x, & 2 < x < 4 \\ 4, & x \ge 4 \end{cases}$.

03_9th Differential Calculus 1.indd 105 30-05-2022 14:51:31

(17) $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x < 0 \\ 1-\cos x, & 0 \le x \le \pi \\ \cos x, & x > \pi \end{cases}$

(18) கொடுக்கப்பட்ட மதிப்புகளை நிறைவு செய்யும் சார்பின் வரைபடம் வரைக.

(i) $f(0)$ வரையறுக்கப்படவில்லை

$\lim_{x\to 0} f(x) = 4$

$f(2) = 6$

$\lim_{x\to 2} f(x) = 3$

(ii) $f(-2) = 0$

$f(2) = 0$

$\lim_{x\to -2} f(x) = 0$

$\lim_{x\to 2} f(x)$ என்ற எல்லை மதிப்பு இல்லை

(19) $\lim_{x\to 8} f(x) = 25$ என்ற குறியீட்டு முறையின் பொருளைச் சுருக்கமாக விளக்குக.

(20) $f(2) = 4$ எனில், x–ன் மதிப்பு 2–ஐ நெருங்கும்போது $f(x)$–ன் எல்லை மதிப்பைப் பற்றி ஏதேனும் முடிவு செய்ய இயலுமா?

(21) x–ன் மதிப்பு 2–ஐ நெருங்கும்போது $f(x)$–ன் எல்லை மதிப்பு 4 எனில், $f(2)$–ஐப் பற்றி ஏதேனும் முடிவு செய்ய இயலுமா? விடைக்கான விளக்கம் தருக.

(22) $f(3^-)$ மற்றும் $f(3^+)$ கண்டு, அவற்றின் மூலம் $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3}$ –க்கு மதிப்பு இருக்குமானால் அந்த மதிப்பைக் காண்க.

(23) $f(x) = \begin{cases} \frac{|x-1|}{x-1}, & ; \ x \ne 1 \\ 0, & ; \ x = 1 \end{cases}$ எனில் $\lim_{x\to 1} f(x)$ –ன் மதிப்பு உள்ளதா என்பதைச் சரிபார்க்க.

9.2.3 எல்லைகள் மீதான தேற்றங்கள் (Theorems on limits)

முற்பகுதியில் எடுத்துக் கொண்ட முறைசாரா விவாதத்தின் நோக்கம் எல்லை மதிப்பு உள்ளதா, இல்லையா என்பதைப் பற்றி உள்ளார்ந்து உணர்ந்து கொள்ளவே. இருப்பினும், எல்லா நேரங்களிலும் வரைபடம் அல்லது சார்பின் மதிப்புக்கான அட்டவணை மூலம் எல்லை மதிப்பு உள்ளதா? என்பது பற்றி முடிவு செய்வது நடைமுறைச் சாத்தியமில்லை. எனவே எல்லை மதிப்பைக் காணவும் அல்லது எல்லை மதிப்பு இல்லை என நிறுவவும் ஒரு முறை தேவை. இப்பகுதியில் அது போன்ற வழிகளை நிறுவும் தேற்றங்களைக் காணலாம். இந்தத் தேற்றங்களின் நிரூபணம் இப்புத்தகத்திற்கு அப்பாற்பட்டது.

விளக்க எடுத்துக்காட்டு 9.1–ல் $\lim_{x\to 2}(x^2+3) = 2^2+3 = 7$ என முடிவு செய்தோம். அதாவது x–ன் மதிப்பு 2-ஐ நெருங்கும்போது $f(x) = x^2+3$–ன் எல்லை மதிப்பு $x = 2$–ல் $f(x)$–ன் மதிப்புக்குச் சமம் [அதாவது, $f(2)$]. இருப்பினும், சில நேரங்களில் x_0 என்ற புள்ளியில் $f(x)$ வரையறுக்கப்படாமலும் இருக்கலாம் என்பதால் இந்த முறையில் எல்லை மதிப்பைக் காண்பதை எல்லா நேரங்களிலும் பயன்படுத்த முடியாது. இருந்தாலும் **f ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை எனில் மதிப்பீடு முறையில் எல்லை மதிப்பைக் கணக்கிட முடியும்.**

தேற்றம் 9.1

$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை என்க. இங்கு $a_0, a_1 \cdots a_n$ என்பன மெய்யெண்கள் மற்றும் n ஒரு நிலையான மிகை முழு எண், எனில்

$$\lim_{x\to x_0} P(x) = a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \cdots + a_nx_0^n = P(x_0) \text{ ஆகும்.}$$

03_9th Differential Calculus 1.indd 106 30-05-2022 14:51:38

எடுத்துக்காட்டு 9.7

$\lim_{x\to 3}(x^3-2x+6)$ –ன் மதிப்பைக் கணக்கிடுக.

தீர்வு

$P(x)=x^3-2x+6$ ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை.

எனவே, $\lim_{x\to 3}P(x)=P(3)=3^3-2\times 3+6=27.$

எடுத்துக்காட்டு 9.8

ஏதேனும் ஒரு மெய்யெண் x_0–க்கு $\lim_{x\to x_0}(5)$ –ன் மதிப்பைக் கணக்கிடுக.

தீர்வு

$f(x)=5$ ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை (படி 0).

எனவே, $\lim_{x\to x_0}(5)=f(x_0)=5$.

மாறிலிச் சார்பின் எல்லை மதிப்பு அந்த மாறிலியாகும்.

தேற்றம் 9.2

$x_0\in\mathbb{R}$ என்ற புள்ளியை உள்ளடக்கிய ஒரு திறந்த இடைவெளி I என்க.

$f,g:I\to\mathbb{R}$ என்க.

c ஒரு மாறிலியாகவும் $\lim_{x\to x_0}f(x)$ மற்றும் $\lim_{x\to x_0}g(x)$–ன் மதிப்புகள் உள்ளன எனில்,

$\lim_{x\to x_0}(cf(x))$, $\lim_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$, $\lim_{x\to x_0}[f(x)-g(x)]$, $\lim_{x\to x_0}[f(x)g(x)]$ மற்றும் $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}, g(x)\neq 0$

என்பனவற்றின் மதிப்புகள் கிடைக்கும். மேலும்

(i) $\lim_{x\to x_0}cf(x)=c\lim_{x\to x_0}f(x)$,

(ii) $\lim_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=\lim_{x\to x_0}f(x)\pm\lim_{x\to x_0}g(x)$,

(iii) $\lim_{x\to x_0}[f(x).g(x)]=\lim_{x\to x_0}f(x).\lim_{x\to x_0}g(x)$ மற்றும்

(iv) $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to x_0}f(x)}{\lim_{x\to x_0}g(x)}$, இங்கு $\lim_{x\to x_0}g(x)\neq 0$.

இந்த முடிவுகளை, எல்லா முடிவுறு எண்ணிக்கையிலான சார்புகளுக்கும் விரிவுபடுத்தலாம். ◻

எடுத்துக்காட்டு 9.9

மதிப்பினைக் காண்க : (i) $\lim_{x\to 8}(5x)$ (ii) $\lim_{x\to -2}\left(-\frac{3}{2}x\right)$.

தீர்வு

(i) $\lim_{x\to 8}(5x)=5\lim_{x\to 8}(x)=5\times 8=40$.

(ii) $\lim_{x\to -2}\left(-\frac{3}{2}x\right)=-\frac{3}{2}\lim_{x\to -2}(x)=\left(-\frac{3}{2}\right)(-2)=3$.

03_9th Differential Calculus 1.indd 107 30-05-2022 14:51:45

எடுத்துக்காட்டு 9.10

கணக்கிடுக : $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{x^2+x}{x}+4x^3+3\right]$.

தீர்வு

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{x^2+x}{x}+4x^3+3\right] = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2+x}{x}\right)+\lim_{x\to 0}(4x^3+3)$$

$$= \lim_{x\to 0}(x+1)+\lim_{x\to 0}(4x^3+3)$$

$$= (0 + 1) + (0 + 3) = 4.$$

எடுத்துக்காட்டு 9.11

கணக்கிடுக : $\lim\limits_{x\to -1}(x^2-3)^{10}$.

தீர்வு

$$\lim_{x\to -1}(x^2-3) = 1 - 3 = -2.$$

எனவே, $\lim\limits_{x\to -1}(x^2-3)^{10} = \lim\limits_{x\to -1}(x^2-3)\,(x^2-3)...(x^2-3)$ (10 முறை)

$$= \lim_{x\to -1}(x^2-3)\lim_{x\to -1}(x^2-3)...\lim_{x\to -1}(x^2-3) \text{ (10 முறை)}$$

$$= \left[\lim_{x\to -1}(x^2-3)\right]^{10} = (-2)^{10} = 2^{10} = 1024.$$

$\lim\limits_{x\to -1}(x^2-3)^{10} = \left[\lim\limits_{x\to -1}(x^2-3)\right]^{10}$ என்பதை கவனிக்கவும்.

தேற்றம் 9.3

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ கிடைக்குமானால் $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^n$ -ம் கிடைக்கப்பெற்று

$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^n = \left[\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right]^n$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 9.12

$\lim\limits_{x\to -2}(x^3-3x+6)\,(-x^2+15)$ -ன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு

$$\lim_{x\to -2}(x^3-3x+6) = (-2)^3 - 3(-2) + 6 = -8 + 6 + 6 = 4$$

$$\lim_{x\to -2}(-x^2+15) = -(-2)^2 + 15 = -4 + 15 = 11$$

$$\lim_{x\to -2}(x^3-3x+6)\,(-x^2+15) = \lim_{x\to -2}(x^3-3x+6)\lim_{x\to -2}(-x^2+15) = 4\times 11 = 44.$$

எடுத்துக்காட்டு 9.13

$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x^2-6x+5)}{x^3-8x+7}$ -ன் மதிப்பைக் காண்க.

03_9th Differential Calculus 1.indd 108 30-05-2022 14:51:52

தீர்வு

$$\lim_{x\to3}(x^2-6x+5) = 3^2 - 6\times3+5 = -4$$

$$\lim_{x\to3}(x^3-8x+7) = 3^3 - 8\times3+7 = 10 \neq 0.$$

எனவே, $$\lim_{x\to3}\frac{(x^2-6x+5)}{x^3-8x+7} = \frac{\lim_{x\to3}(x^2-6x+5)}{\lim_{x\to3}(x^3-8x+7)} = \frac{-4}{10} = -\frac{2}{5}.$$

நினைவில் கொள்க

$\lim_{x\to x_0} g(x)=0$ எனில் பின்னச்சார்புக்கு எல்லைத் தேற்றத்தினைப் பயன்படுத்துதல் கூடாது.

எடுத்துக்காட்டு 9.14

கணக்கிடுக : $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$.

தீர்வு

இங்கு $\lim_{x\to1}(x-1)=0$. எனவே தொகுதியை விகிதப்படுத்துக.

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim_{x\to1}\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)} = \lim_{x\to1}\frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{\lim_{x\to1}(1)}{\lim_{x\to1}\left(\sqrt{x}+1\right)} = \frac{1}{2}.$$

எடுத்துக்காட்டு 9.15

$\lim_{t\to0}\frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$ –ன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு

இயற்கணித முறையில் தொகுதியை விகிதப்படுத்துக.

$$\frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2} = \frac{\left(\sqrt{t^2+9}-3\right)\left(\sqrt{t^2+9}+3\right)}{t^2\left(\sqrt{t^2+9}+3\right)} = \frac{t^2+9-9}{t^2\left(\sqrt{t^2+9}+3\right)}$$

$$\lim_{t\to0}\frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2} = \lim_{t\to0}\frac{t^2}{t^2\sqrt{t^2+9}+3} = \lim_{t\to0}\frac{1}{\sqrt{t^2+9}+3} = \frac{1}{\sqrt{9}+3} = \frac{1}{6}.$$

தேற்றம் 9.4

$$\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a} = na^{n-1}.$$

நிரூபணம்

$$x^n-a^n = (x-a)(x^{n-1}+x^{n-2}a+x^{n-3}a^2+\cdots+xa^{n-2}+a^{n-1})$$

$$\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x^{n-1}+x^{n-2}a+x^{n-3}a^2+\cdots+xa^{n-2}+a^{n-1})}{(x-a)}$$

$$= \lim_{x\to a}(x^{n-1}+x^{n-2}a+x^{n-3}a^2+\cdots+x-a^{n-2}+a^{n-1})$$

$$= a^{n-1}+a^{n-1}+\cdots+a^{n-1} \quad (n \text{ முறை})$$

$$\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a} = na^{n-1}$$

இது எல்லா விகிதமுறு எண் n–க்கும் உண்மையாகும்.

03_9th Differential Calculus 1.indd 109 30-05-2022 14:51:59

எடுத்துக்காட்டு 9.16

கணக்கிடுக : $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$.

தீர்வு

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1^3}{x - 1} = 3(1)^{3-1} = 3 .$$

எடுத்துக்காட்டு 9.17

$\lim\limits_{t \to 1} \dfrac{\sqrt{t} - 1}{t - 1}$ –ன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{t} - 1}{t - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{t^{\frac{1}{2}} - 1^{\frac{1}{2}}}{t - 1} = \frac{1}{2}(1)^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}.$$

எடுத்துக்காட்டு 9.18

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(2 + x)^5 - 2^5}{x}$ –ன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு

$2 + x = y$ என்க. இதனால் $x \to 0$ எனில், $y \to 2$ ஆகும்.

எனவே, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(2+x)^5 - 2^5}{x} = \lim\limits_{y \to 2} \dfrac{y^5 - 2^5}{y - 2} = 5(2^4) = 80.$

எடுத்துக்காட்டு 9.19

$\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^n - 3^n}{x - 3} = 27$ எனுமாறு உள்ள மிகை முழு எண் n–ஐ காண்க.

தீர்வு

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^n - 3^n}{x - 3} = n.3^{n-1} = 27$$

அதாவது, $n.3^{n-1} = 3 \times 3^2 = 3 \times 3^{3-1} \Rightarrow n = 3$

எடுத்துக்காட்டு 9.20

$f(x) = \begin{cases} ax + b & , x > 3 \\ 3ax - 4b + 1 & , x < 3 \end{cases}$ மற்றும் $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ கிடைக்கப்பெறுமானால் a மற்றும் b–க்கு இடையே உள்ள தொடர்பைக் காண்க.

தீர்வு

$\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = 9a - 4b + 1$

$\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 3a + b$. எல்லை கிடைக்கப் பெறுதல் என்பதன் விளைவாக,

$\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$.

$\Rightarrow 9a - 4b + 1 = 3a + b$

$\Rightarrow 6a - 5b + 1 = 0.$

03_9th Differential Calculus 1.indd 110 30-05-2022 14:52:03

பயிற்சி 9.2

பின்வரும் எல்லை மதிப்புகளைக் காண்க :

(1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-16}{x-2}$ (2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1}$, m, n முழு எண்கள்

(3) $\lim\limits_{\sqrt{x}\to 3}\dfrac{x^2-81}{\sqrt{x}-3}$ (4) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}, x>0$ (5) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x+4}-3}{x-5}$

(6) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}}{x-2}$ (7) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-x^2}{1-\sqrt{x}}$ (8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$

(9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$ (10) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{7+x^3}-\sqrt{3+x^2}}{x-1}$ (11) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2-\sqrt{x+2}}{\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4-x}}$

(12) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$ (13) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x}-1}{x^2}$ (14) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$

(15) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{x-b}-\sqrt{a-b}}{x^2-a^2}(a>b)$

FDZCV

9.2.4 முடிவுறா எல்லை மற்றும் முடிவிலியில் எல்லை (Infinite limits and Limits at infinity)

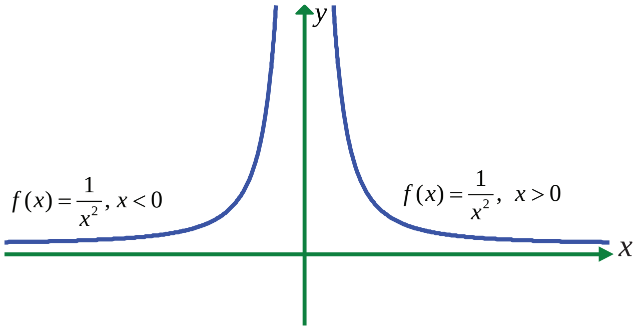
முடிவுறா எல்லை (Infinite Limits)

$f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ என்ற சார்பு $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ என வரையறுக்கப்படுகிறது என்க. இப்போது $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}$ கணக்கிடுவதைக் காண்போம். 0–ன் அருகில் $\dfrac{1}{x^2}$–ன் மதிப்புகளை கீழ்க்காணும் அட்டவணை காண்பிக்கிறது.

$x\to 0^+$			$x\to 0^-$		
x	x^2	$\frac{1}{x^2}$	x	x^2	$\frac{1}{x^2}$
1	1	1	–1	1	1
0.5	0.25	4	– 0.5	0.25	4
0.1	0.01	100	– 0.1	0.01	100
0.01	0.0001	10,000	– .01	0.0001	10,000
0.001	0.000001	10,00,000	– 0.001	0.000001	10,00,000
0.0001	0.00000001	10,00,00,000	– 0.0001	0.00000001	10,00,00,000

03_9th Differential Calculus 1.indd 111 30-05-2022 14:52:09

அட்டவணையிலிருந்து x-ன் மதிப்பு பூஜ்ஜியத்தை நெருங்க, நெருங்க $f(x) = \frac{1}{x^2}$ -ன் மதிப்பு பெரிய, பெரிய மதிப்பாக மாறுவதைக் கவனிக்கலாம். உண்மையில் x-ன் மதிப்பு இருபுறமிருந்தும் பூஜ்ஜியத்தை நெருங்கும்போது $\frac{1}{x^2}$ -ன் மதிப்பு எல்லை இல்லாமல் அதிகரிக்கிறது. இந்நிலையில் x பூஜ்ஜியத்தை நெருங்கும்போது $f(x)$ ஆனது ∞-ஐ நெருங்குகிறது எனலாம்.



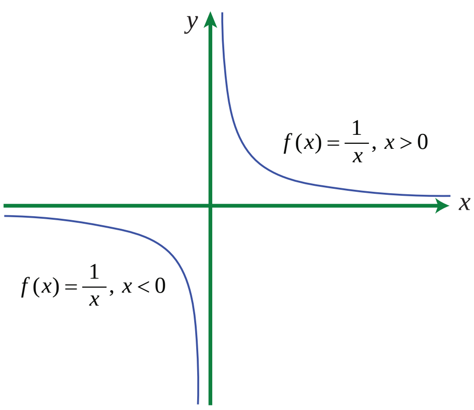
படம் 9.22

$x \to 0^-$ எனில், $\frac{1}{x^2} \to \infty$ மற்றும் $x \to 0^+$ எனில் $\frac{1}{x^2} \to \infty$. எனவே $x \to 0$ எனில், $\frac{1}{x^2} \to \infty$

வடிவியலில், $x = 0$ அதாவது y-அச்சு $f(x) = \frac{1}{x^2}$ என்ற வளைவரையின் செங்குத்துத் தொலைத் தொடுகோடு ஆகும்.

$f(x) = \frac{1}{x^2}$ -ன் வரைபடம் படம் 9.22-ல் தரப்பட்டுள்ளது.

$x = 0$ எனில் எல்லை மதிப்பு முடிவிலி. அதனால் $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2}$ கிடைக்கப்பெறாது. ∞ என்பது $f(x) = \frac{1}{x^2}$ என்ற சார்பின் இந்த செயல்பாட்டைக் குறிக்கும் ஒரு குறியீடு மட்டுமே. அது ஒரு புதிய எண் அல்ல என்பதை மாணவர்கள் நினைவில் கொள்ள வேண்டும். இதுபோல் $f(x) = \frac{1}{x}$, (படம் 9.23) என்ற சார்புக்கு



படம் 9.23

$x \to 0^-$ எனில் $\frac{1}{x} \to -\infty$

$x \to 0^+$ எனில் $\frac{1}{x} \to +\infty$ எனச் சுலபமாகக் காணலாம்.

இதனை $f(x) = \frac{1}{x}$ -ன் வடிவியல் முறையில் தெளிவாக அறியலாம்.

பொதுவாகப் பின்வரும் உள்ளுணர்வு வரையறைகளைக் காணலாம்.

வரையறை 9.4

கொடுக்கப்பட்ட மதிப்பு $M > 0$-க்கு (M, ∞) என்ற திறந்த இடைவெளி ∞ -ன் அண்மைப்பகுதியாகும்.

கொடுக்கப்பட்ட மதிப்பு $K < 0$க்கு $(-\infty, K)$ என்ற திறந்த இடைவெளி $-\infty$-ன் அண்மைப்பகுதியாகும்.

வரையறை 9.5

கொடுக்கப்பட்ட மிகைஎண் M-க்கு x-ன் மதிப்பு x_0 -ன் அண்மைப்பகுதியில் $f(x) > M$ (அதாவது $f(x) \in (M, \infty)$) என இருக்குமாறு x_0-ன் அண்மைப்பகுதி அமையுமானால் $x \to x_0$ எனும்போது $f(x) \to \infty$ எனலாம்.

இதே போன்று கொடுக்கப்பட்ட $K < 0$-க்கு x-ன் அண்மைப்பகுதியில் $f(x) < K$ (அதாவது $f(x) \in (-\infty, K)$) என இருக்குமாறு x_0 அண்மைப்பகுதி அமையுமானால் $x \to x_0$ எனும்போது $f(x) \to -\infty$ எனலாம்.

03_9th Differential Calculus 1.indd 112 30-05-2022 14:52:12

இந்நிகழ்வுகளை குறியீடு வாயிலாகக் கீழ்க்காணுமாறு எழுதலாம்.

$x \to x_0$ எனும்போது $f(x) \to \infty$

$x \to x_0$ எனும்போது $f(x) \to -\infty$

$x \to x_0^-$ எனும்போது $f(x) \to \infty$

$x \to x_0^+$ எனும்போது $f(x) \to -\infty$

$x \to x_0^+$ எனும்போது $f(x) \to \infty$

$x \to x_0^-$ எனும்போது $f(x) \to -\infty$

என்பன **முடிவிலி எல்லைகள்** எனப்படும். மேற்கண்ட நிபந்தனைகளில் ஒன்று நிவர்த்தி செய்யப்படின் $x = x_0$ என்ற கோடு $f(x)$ வரைபடத்தின் **செங்குத்துத் தொலைத் தொடுகோடாக** இருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 9.21

மதிப்பிடுக : $\lim_{x \to 0} \frac{1}{(x^2 + x^3)}$.

தீர்வு

பூஜ்ஜியத்திற்கு அருகில் (இருபுறமிருந்தும்) உள்ள x–ன் மதிப்புகளை அட்டவணைப்படுத்தினால் $f(x) = \frac{1}{x^2 + x^3}$ –ன் மதிப்பு எல்லையற்று அதிகரிக்கின்றது என அறியலாம். எனவே $x \to 0$ எனில் $f(x) \to \infty$ ஆகும்.

இந்தச் சார்பின் எல்லை மதிப்பினை அட்டவணை இல்லாமல் காண்பதற்கு, முதலில் தொகுதியையும் பகுதியையும் x^2–ஆல் வகுக்க வேண்டும். எல்லை மதிப்புக் காணும்போது $x \neq 0$ மற்றும் $x^2 \neq 0$. எனவே வகுத்தல் சாத்தியமாகிறது.

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2 + x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{x^2 + x^3}{x^2}} = \frac{\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\lim_{x\to 0}(1+x)}.$$

தற்போது $x \to 0$ எனில் $\frac{1}{x^2} \to \infty$ மற்றும் $\lim_{x \to 0}(1 + x) = 1$.

அதாவது, பகுதி 1–ஐ நெருங்கும்போது தொகுதி முடிவில்லாமல் அதிகரிக்கின்றது. அதாவது, $\frac{1}{(x^2 + x^3)}$ முடிவிலியை நோக்கிச் செல்கிறது எனலாம்.

இந்த எடுத்துக்காட்டு ஒரு கடினமான கணக்கிடுதலை சில இயற்கணித மாற்றங்களின் மூலம் எவ்வாறு எளிமையாக்கலாம் என விளக்குகின்றது.

எடுத்துக்காட்டு 9.22

மதிப்பிடுக : $\lim_{x \to 2} \frac{1}{(x - 2)^3}$.

03_9th Differential Calculus 1.indd 113 30-05-2022 14:52:18

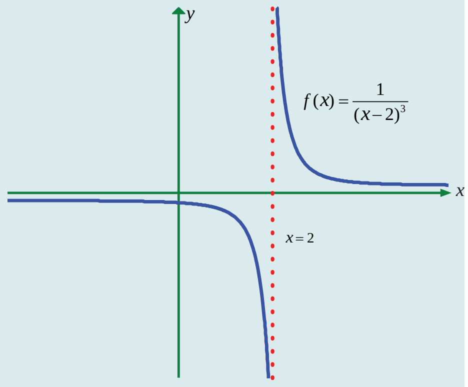
தீர்வு

$f(x)=\dfrac{1}{(x-2)^3}$ -ன் வரைபடத்திலிருந்து

$x\to 2^-$ எனில், $\dfrac{1}{(x-2)^3}\to -\infty$

மற்றும் $x\to 2^+$ எனில் $\dfrac{1}{(x-2)^3}\to \infty$ ஆகும்.

எனவே எல்லை மதிப்பு இல்லை.



படம் 9.24

பொதுவாக

(i) n ஒரு இரட்டைப்படை முழு எண் :

$x\to a$ எனில் $\dfrac{1}{(x-a)^n}\to\infty$

$x\to a^-$ எனில் $\dfrac{1}{(x-a)^n}\to\infty$

$x\to a^+$ எனில் $\dfrac{1}{(x-a)^n}\to\infty$

(ii) n ஒரு ஒற்றைப்படை மிகை முழு எண் :

$x\to a^-$ எனில் $\dfrac{1}{(x-a)^n}\to -\infty$

$x\to a^+$ எனில் $\dfrac{1}{(x-a)^n}\to +\infty$

$x=a$ என்ற கோடு செங்குத்துத் தொலைத் தொடுகோடாக அமையும்.

9.2.5 முடிவிலியில் எல்லைகள் (Limits at infinity)

முற்பகுதியில் முடிவுறா எல்லைகள் மற்றும் செங்குத்துத் தொலைத் தொடுகோடுகள் பற்றி ஆராய்ந்தோம். அங்கு x-ன் மதிப்பு குறிப்பிட்ட எண்ணை நோக்கி நகரும்போது y-ன் மதிப்பு கட்டுப்பாடு இன்றி அதிகரித்தது (மிகை அல்லது குறையில் எல்லையற்று). இப்பகுதியில் x-ன் மதிப்பு சீரற்ற முறையில் அதிகரிக்கும்போது y-ன் மதிப்பு எவ்வாறு உள்ளது எனக் காணலாம்.

x மிகப்பெரிய அளவில் அதிகரிக்கும்போது, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ என்ற சார்பின் தன்மை பற்றி ஆராய்வோம்.

இந்த சார்பின் மதிப்புகளை அட்டவணையிடுவோம்

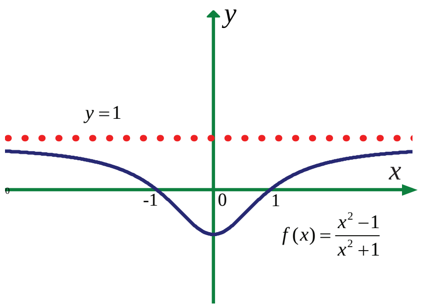
x	$f(x)$
0	–1
±1	0
±2	0.6000000
±3	0.800000
±4	0.882353
±5	0.923077
±10	0.980198
±50	0.999200
±100	0.999800
±1000	0.999998

03_9th Differential Calculus 1.indd 114 30-05-2022 14:52:23

x–ன் மட்டு மதிப்பு பெரிதாகப் பெரிதாக (மிகை அல்லது குறை) $f(x)$–ன் மதிப்பு 1–ஐ நெருங்கி நெருங்கிச் செல்வதைக் காணலாம். x–ன் மதிப்பைத் தேவையான அளவு பெரிதாக எடுத்துக்கொண்டு $f(x)$–ன் மதிப்பை 1–க்கு நெருக்கமாகக் காணலாம் எனத் தெரிகிறது. இந்த நிலையைப் பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-1}{x^2+1}=1.$$

வடிவியலில் இச்சூழல் (படம் 9.25) பின்வரும் வரையறைக்குக் கொண்டு செல்கிறது.



படம் 9.25

வரையறை 9.6

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=l$ அல்லது $\lim_{x\to+\infty} f(x)=l$ எனில் $y = l$ என்ற கோடு $y = f(x)$ என்ற வளைவரையின் கிடைமட்டத் தொலைத் தொடுகோடு ஆகும்.

விளக்க எடுத்துக்காட்டு 9.4

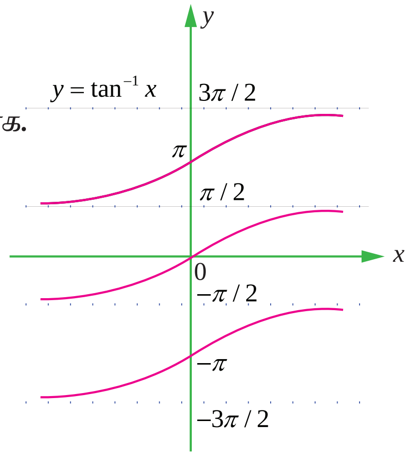
$f:\mathbb{R}\to\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$-ல் $f(x)=\tan^{-1}x$ எனில்

$\lim_{x\to-\infty}\tan^{-1}x$ மற்றும் $\lim_{x\to+\infty}\tan^{-1}x$ என்பவற்றின் மதிப்பு காண்க.

தீர்வு

$y=\tan^{-1}x$ என்ற வரைபடத்தைக் காண்க.

$$\lim_{x\to-\infty}\tan^{-1}x=-\frac{\pi}{2},\quad \lim_{x\to+\infty}\tan^{-1}x=\frac{\pi}{2}.$$



படம் 9.26

விளக்க எடுத்துக்காட்டு 9.5

கணக்கிடுக : $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-2x+3}{x^2+4x+4}$.

தீர்வு

இதன் எல்லை மதிப்பைக் கணக்கிட எல்லைத் தேற்றங்களைப் பயன்படுத்தினால் நாம் பின்வரும் சூழலைச் சென்றடைவோம்.

$x\to\infty$ எனில் $(2x^2-2x+3)\to\infty$

$x\to\infty$ எனில் $(x^2+4x+4)\to\infty$

$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2-2x+3}{x^2+4x+4}\right)=\frac{\infty}{\infty}$ இது தேறப்பெறாத வடிவம் எனப்படும்.

ஆனால் நேரிடையான கணக்கீடு மற்றும் அதன் அட்டவணை பின்வருமாறு உள்ளது :

x	$2x^2-2x+3$	x^2+4x+4	$\frac{2x^2-2x+3}{x^2+4x+4}$
1	3	9	0.3333
10	183	144	1.27083
100	19803	10404	1.90340
1000	1998003	1004004	1.99003
10000	199980003	100040004	1.99900

03_9th Differential Calculus 1.indd 115 30-05-2022 14:52:27

அட்டவணையிலிருந்து x தேவையான அளவிற்கு பெரியதாகும்போது $f(x)$–ன் மதிப்பு 2–ஐ நெருங்கி நெருங்கி செல்வதைக் காணலாம்.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2-2x+3}{x^2+4x+4}\right)=2.$$

இந்தக் கணக்கில் பகுதியையும் தொகுதியையும் x^2–ஆல் வகுப்பதன் மூலம் சுருக்கலாம்.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-2x+3}{x^2+4x+4}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}{1+\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}}\right)$$

$$=\frac{2-0+0}{1+0+0}\ (x\to\infty \text{ எனில் } \frac{1}{x}\to 0,\ \frac{1}{x^2}\to 0)$$

$$=2.$$

இங்குப் பகுதி, தொகுதிகளின்படிச் சமமாக உள்ளதைக் காணலாம்.

பொதுவாக $x \to \pm\infty$ எனில் விகிதமுறு கோவைகளின் எல்லை மதிப்பைக் காண பகுதியில் உள்ள x–ன் அதிகபட்ச அடுக்கால் பகுதியையும் தொகுதியையும் வகுத்து பகுதிக்கும் தொகுதிக்கும் தனித்தனியே எல்லை மதிப்பைக் காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 9.23

மதிப்புக் காண்க : $\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+2x+3}{(5x^2+1)}$.

தீர்வு

x^2–ஆல் வகுக்க

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+2x+3}{(5x^2+1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}{5+\frac{1}{x^2}}\to\infty$$

அதாவது, $x\to\infty$ எனில் $\frac{x^3+2x+3}{(5x^2+1)}\to\infty$

அதாவது, எல்லை மதிப்பைக் காண இயலாது. தொகுதியின் படி பகுதியின் படியைவிட அதிகமாக உள்ளதைக் கவனிக்கவும்.

எடுத்துக்காட்டு 9.24

மதிப்புக் காண்க : $\lim_{x\to\infty}\frac{1-x^3}{3x+2}$

தீர்வு

x–ஆல் வகுக்க

$$\frac{1-x^3}{3x+2}=\frac{\frac{1}{x}-x^2}{3+\frac{2}{x}}\ .\ x\to\infty \text{ எனில் } \frac{1-x^3}{3x+2}\to-\infty$$

ஆதலால் எல்லை மதிப்பு இல்லை.

03_9th Differential Calculus 1.indd 116 30-05-2022 14:52:30

9.2.6 விகிதமுறு சார்புகளின் எல்லைகள் (Limits of rational functions)

$R(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ மற்றும் $q(x)$–ன் படியைவிட $p(x)$–ன் படி அதிகமாக இருந்தால்

$x \to \infty$ எனும்போது $\dfrac{p(x)}{q(x)} \to +\infty$ அல்லது $-\infty$ ஆகும்.

$q(x)$–ன் படி $p(x)$–ன் படியைவிட அதிகமாக இருந்தால்,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = 0.$$

முடிவாக $p(x)$ மற்றும் $q(x)$–ன் படிகள் சமம் எனில்,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(x)\text{ல் உள்ள } x\text{-ன் அதிகபட்ச அடுக்கின் கெழு}}{q(x)\text{ல் உள்ள } x\text{-ன் அதிகபட்ச அடுக்கின் கெழு}}$$

குறிப்புரை

$x \to a$ எனில் $f(x) \to \infty$, $x \to a$ எனில் $f(x) \to -\infty$ மற்றும் $x \to \infty$ எனில் $f(x) \to \infty$, $x \to \infty$ எனில் $f(x) \to -\infty$ என்பவைகள் எல்லை மதிப்பு இல்லை என்பதை மறுபடியும் உறுதி செய்கின்றன. ∞ என்ற குறியீடு ஒரு எண்ணைக் குறிக்கவில்லை. மேலும் அதை ஒரு எண்ணாகவும் பயன்படுத்தக்கூடாது.

9.2.7 எல்லைகளின் பயன்பாடு (Applications of limits)

எடுத்துக்காட்டு 9.25

உடலில் உள்ள ஆல்கஹாலை நுரையீரல், சிறுநீரகம் போன்ற உறுப்புகளும் மற்றும் வேதி வினைமூலம் கல்லீரலும் வெளியேற்றுகின்றன. ஆல்கஹாலின் அடர்த்தி மிதமாக இருந்தால் அதை வெளியேற்றுகின்ற வேலையின் பெரும்பகுதியைக் கல்லீரலே செய்கின்றது. அதன் அளவில் 5% க்குக் குறைவாகவே நுரையீரலும், சிறுநீரகமும் வெளியேற்றுகின்றன. இரத்த ஓட்டத்தில் உள்ள ஆல்கஹாலை கல்லீரல் பிரித்தெடுக்கும் வீதம் r–க்கும் இரத்தத்தில் உள்ள ஆல்கஹாலின் அடர்த்தி x–க்கும் உள்ள தொடர்பு ஒரு விகிதமுறு சார்பாக $r(x) = \dfrac{\alpha x}{x+\beta}$ என உள்ளது. இங்கு α, β என்பன மிகை மாறிலிகள். ஆல்கஹாலினை வெளியேற்றும் மீப்பெரு வீதம் காண்க.

தீர்வு

ஆல்கஹாலின் அடர்த்தி x அதிகரிக்கும்போது அதை வெளியேற்றும் வீதமும் அதிகரிக்கின்றது.

எனவே, வெளியேற்றும் மீப்பெரு வீதம் என்பது $\lim_{x\to\infty} r(x)$ ஆகும்.

$$\lim_{x\to\infty} r(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\alpha x}{x+\beta}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\alpha}{\left(1+\frac{\beta}{x}\right)} = \alpha$$

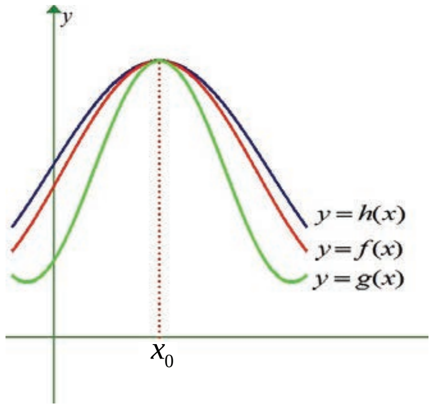
9.2.8 இடையீட்டுத் தேற்றம் (Sandwich Theorem)

இத்தேற்றம் நெருக்குத் தேற்றம் (Squeeze Theorem) எனவும் அழைக்கப்படுகிறது. படம் 9.27–ல் உள்ளபடி $f(x)$ என்ற சார்பின் வளைவரை $y = f(x)$ மற்றும் $y = g(x)$ என்ற வளைவரைகளுக்கு இடையில் அமைந்துள்ளது. குறிப்பாக x என்ற புள்ளியானது x_0–ஐ நெருங்கும்போது $f(x)$ ஆனது $g(x)$ மற்றும் $h(x)$–க்கு இடையில் மிக நெருக்கமாக அமைகிறது. இப்போது x-ஆனது x_0–ஐ நெருங்கும்போது g மற்றும் h என்பவைகளின் எல்லைகள் lஆக இருப்பின் f–ன் எல்லையும் l–ஆக அமையும்.

03_9th Differential Calculus 1.indd 117 30-05-2022 14:52:36

இடையீட்டுத் தேற்றம் (Sandwich Theorem)

$f, g, h : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ என்ற சார்புகள் I-ல் உள்ள x_0-ஐ நீக்கிய x_0-ன் அண்மைப்பகுதியில் உள்ள எல்லா x-க்கும் $g(x) \le f(x) \le h(x)$ எனவும் மேலும் $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = l$, எனவும் இருக்குமானால் $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ ஆக இருக்கும்.



படம் 9.27

எடுத்துக்காட்டு 9.26

ஐன்ஸ்டினின் சார்பியல் கோட்பாட்டின்படி v திசைவேகத்துடன் கூடிய ஒரு பொருளின் நிறை $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$, இங்கு m_0 என்பது ஆரம்ப நிறை மற்றும் c என்பது ஒளியின் வேகம். $v \to c^-$ எனில் m-ல் ஏற்படும் மாற்றம் என்ன? ஏன் இடதுபக்க எல்லை அவசியம்?

தீர்வு

$$\lim_{v \to c^-}(m) = \lim_{v \to c^-} \frac{m_0}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} = \frac{m_0}{\sqrt{\lim\limits_{v \to c^-}\left(1 - \dfrac{v^2}{c^2}\right)}}$$

$h > 0$ எனில், $c - h < v < c$. இதன் மூலம் $(c-h)^2 < v^2 < c^2$

அதாவது $\dfrac{(c-h)^2}{c^2} < \dfrac{v^2}{c^2} < 1 \Rightarrow \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(c-h)^2}{c^2} < \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{v^2}{c^2} < \lim\limits_{h \to 0} 1$

$$\Rightarrow 1 < \lim_{h \to 0} \frac{v^2}{c^2} < 1 \Rightarrow 1 < \lim_{h \to 0}(m) \frac{v^2}{c^2} < 1 \Rightarrow 1 < \lim_{v \to c^-} \frac{v^2}{c^2} < 1$$

இடையீட்டுத் தேற்றத்தின்படி, $\lim\limits_{v \to c^-} \dfrac{v^2}{c^2} = 1$

எனவே $\lim\limits_{v \to c^-}(m) \to \infty$

ஆகவே, $v \to c^-$ எனில் நிறை மிக மிகப்பெரியதாக (முடிவிலி) அமைகிறது.

இடப்புற எல்லை தேவையானதாக உள்ளது. வலப்புற எல்லை எடுப்பின் $v \to c^+$ எனில் $1 - \dfrac{v^2}{c^2} < 0$ ஆக அமையும். எனவே நிறை காண இயலாது.

எடுத்துக்காட்டு 9.27

ஆகாயத்திலிருந்து விழுகின்ற ஒரு பொருளின் வேகம் $r(t) = -\sqrt{\dfrac{32}{k}} \dfrac{1 - e^{-2t\sqrt{32k}}}{1 + e^{-2t\sqrt{32k}}}$ என வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது. வேகம் அடி/வினாடியில் கணக்கிடப்படுகிறது. இங்கு k என்ற மாறிலி அந்தப் பொருளின் அளவு, வடிவம் மற்றும் காற்றின் அடர்த்தியைப் பொறுத்து உள்ளது. அந்தப் பொருளின் எல்லை வேகத்தினைக் காண்க. அதாவது, $\lim\limits_{t \to \infty} r(t)$ -ஐக் காண்க.

03_9th Differential Calculus 1.indd 118 30-05-2022 14:52:45

தீர்வு

$$\lim_{t\to\infty} r(t) = \lim_{t\to\infty} -\sqrt{\frac{32}{k}}\,\frac{1-e^{-2t\sqrt{32k}}}{1+e^{-2t\sqrt{32k}}}$$

$$= -\sqrt{\frac{32}{k}}\lim_{t\to\infty}\frac{1-e^{-2t\sqrt{32k}}}{1+e^{-2t\sqrt{32k}}}$$

$$= -\sqrt{\frac{32}{k}}\,\frac{(1-0)}{(1+0)} = -\sqrt{\frac{32}{k}}$$ அடி/வினாடி

எடுத்துக்காட்டு 9.28

ஒரு விலங்கின் கண்பாவையின் விட்டம் $f(x)=\dfrac{160x^{-0.4}+90}{4x^{-0.4}+15}$ என்ற சார்பாகத் தரப்பட்டுள்ளது. இங்கு x என்பது ஒளியின் செறிவினைக் குறிக்கின்றது மற்றும் $f(x)$ மி.மீ.–இல் தரப்பட்டுள்ளது. அந்தக் கண்பாவையின் விட்டத்தை,

(a) ஒளியின் செறிவு குறைவாக (b) ஒளியின் செறிவு அதிகமாக, காண்க.

தீர்வு

(a) ஒளியின் செறிவு குறைவாக இருக்கும்போது, அதாவது $x\to 0^+$ எனும்போது, சார்பின் எல்லையைக் காண வேண்டும்.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{160x^{-0.4}+90}{4x^{-0.4}+15} = \lim_{x\to 0^+}\frac{160+90x^{0.4}}{4+15x^{0.4}}$$

$$= \frac{160}{4} = 40 \text{ மி.மீ}$$

(b) ஒளியின் செறிவு அதிகமாக இருக்கும்போது, அதாவது $x\to\infty$ எனும்போது, சார்பின் எல்லையைக் காணவேண்டும்.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{160x^{-0.4}+90}{4x^{-0.4}+15} = \frac{90}{15} = 6 \text{ மி.மீ}$$

ஒளியின் செறிவு அதிகமாக இருக்கும்போது கண்பாவையின் விட்டத்தின் எல்லை 6 மி.மீ ஆக இருக்கும்.

பயிற்சி 9.3

(1) பின்வரும் சார்புகளுக்கு இடப்புற, வலப்புற எல்லைகளின் மதிப்பைக் காண்க.

(a) $x=-2$ -ல் $f(x)=\dfrac{x^2-4}{(x^2+4x+4)(x+3)}$

(b) $x=\dfrac{\pi}{2}$ -ல் $f(x)=\tan x$

பின்வரும் எல்லைகளின் மதிப்பைக் காண்க :

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2(x^2-6x+9)}$ (3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{3}{x-2}-\frac{2x+11}{x^2+x-6}$ (4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x}{x^4-3x^2+1}$

03_9th Differential Calculus 1.indd 119 30-05-2022 14:52:51

(5) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{x^4-5x}{x^2-3x+1}$ (6) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{1+x-3x^3}{1+x^2+3x^3}$ (7) $\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{2x^2-1}-\dfrac{x^2}{2x+1}\right)$

(8) நிறுவுக

(i) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+...+n}{3n^2+7n+2}=\dfrac{1}{6}$ (ii) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1^2+2^2+...+(3n)^2}{(1+2+...+5n)(2n+3)}=\dfrac{9}{25}$

(iii) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{1.2}+\dfrac{1}{2.3}+\dfrac{1}{3.4}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}=1$

(9) மீன் வள அறிவியலின் முக்கிய பிரச்சனை நீரோடைகளில் உள்ள முட்டையிடத் தகுதியான மீன்களின் எண்ணிக்கையைக் கணக்கிட்டு இந்தத் தகவலைப் பயன்படுத்தி இனப்பெருக்கக் காலத்தில் ஆற்றுக்குள் நுழையும் மீன் பிடிப்புக்குத் தகுந்த மீன்களின் எண்ணிக்கையைக் கணக்கிடுவதாகும். S என்பது முட்டையிடும் நிலையில் உள்ள மீன்களின் எண்ணிக்கை மற்றும் R என்பது மீன் பிடிப்புக்குத் தகுந்த மீன்களின் எண்ணிக்கையாகும். “ பிவர்ட்டன் ஹோல்ட்” –ன் இனப்பெருக்கச் சார்பு $R(S)=\dfrac{S}{(\alpha S+\beta)}$, இங்கு α, β என்பன மிகை மாறிலிகள்.

இந்தச் சார்பு இனப்பெருக்க நிலையில் இருக்கும் மீன்களின் எண்ணிக்கை தேவையான அளவு அதிகரிக்கும் போது அறுவடைக்குத் தகுந்த மீன்களின் எண்ணிக்கை தோராயமாக மாறிலியாக அமையும் என நிறுவுக.

(10) ஒரு தொட்டியில் 5000 லிட்டர் நல்ல நீர் உள்ளது என்க. ஒரு லிட்டருக்கு 30 கி அளவு உப்பு கொண்ட உவர் நீர் 25 லி/நிமிடம் என்ற அளவில் தொட்டியில் செலுத்தப்படுகின்றது. t நிமிடங்களில் இந்த உவர் நீரின் அடர்த்தி (கிராம்/லிட்டர்) $C(t)=\dfrac{30t}{200+t}$ என தரப்பட்டுள்ளது. $t\to\infty$ எனில் அடர்த்தி எவ்வாறு மாறும்?

எடுத்துக்காட்டு 9.29

மதிப்பைக் காண்க : $\lim_{x\to 0}x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

தீர்வு

$-1\le\sin\dfrac{1}{x}\le 1$ என நமக்குத் தெரியும். இதிலிருந்து $-x^2\le x^2\sin\dfrac{1}{x}\le x^2$

இங்கு $g(x)=-x^2$, $f(x)=x^2\sin\dfrac{1}{x}$; $h(x)=x^2$ என்க.

$\lim_{x\to 0}g(x)=\lim_{x\to 0}(-x^2)=0$ மற்றும்

$\lim_{x\to 0}h(x)=\lim_{x\to 0}(x^2)=0$ ஆகும்.

இடையீட்டுத் தேற்றப்படி

$$\lim_{x\to 0}x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)=0 \text{ ஆகும்.}$$

எல்லை மதிப்புத் தேற்றங்களைப் பயன்படுத்தியிருந்தால் தவறான முடிவுக்கு வந்திருப்போம்.

அதாவது, $\lim_{x\to 0}x^2\left(\sin\dfrac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}(x^2)\lim_{x\to 0}\left(\sin\dfrac{1}{x}\right)$

தற்போது, $\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ –க்கு மதிப்பு இல்லை. $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$ எனவே $\lim_{x\to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ –ன் மதிப்பு பிரச்சனைக்குரியதாக உள்ளது.

குறிப்பு : $a \le f(x) \le a$, எனில், $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$.

எடுத்துக்காட்டு 9.30

நிறுவுக : $\lim_{x\to 0} \sin x = 0$.

தீர்வு

எல்லா $x \ge 0$–க்கும் $-x \le \sin x \le x$ என நமக்குத் தெரியும்.

$\lim_{x\to 0}(-x) = 0$ மற்றும் $\lim_{x\to 0}(x) = 0.$

இடையீட்டுத் தேற்றப்படி $\lim_{x\to 0} \sin x = 0.$

எடுத்துக்காட்டு 9.31

$\lim_{x\to 0^+} x\left[\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{2}{x}\right\rfloor + \ldots + \left\lfloor\frac{15}{x}\right\rfloor\right] = 120$ என நிறுவுக.

தீர்வு

$$\frac{1}{x} - 1 \le \left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor \le \frac{1}{x} + 1$$

$$\frac{2}{x} - 1 \le \left\lfloor\frac{2}{x}\right\rfloor \le \frac{2}{x} + 1$$

$$\vdots$$

$$\frac{15}{x} - 1 \le \left\lfloor\frac{15}{x}\right\rfloor \le \frac{15}{x} + 1$$

கூடுதல் காண,

$$\frac{120}{x} - 15 \le \left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{2}{x}\right\rfloor + \ldots + \left\lfloor\frac{15}{x}\right\rfloor \le \frac{120}{x} + 15$$

$$120 - 15x \le x\left[\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{2}{x}\right\rfloor + \ldots + \left\lfloor\frac{15}{x}\right\rfloor\right] \le 120 + 15x$$

$$\lim_{x\to 0^+}(120 - 15x) \le \lim_{x\to 0^+} x\left[\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{2}{x}\right\rfloor + \ldots + \left\lfloor\frac{15}{x}\right\rfloor\right] \le \lim_{x\to 0^+}(120 + 15x)$$

$$120 \le \lim_{x\to 0^+} x\left[\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{2}{x}\right\rfloor + \ldots + \left\lfloor\frac{15}{x}\right\rfloor\right] \le 120$$

$$\lim_{x\to 0^+} x\left[\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{2}{x}\right\rfloor + \ldots + \left\lfloor\frac{15}{x}\right\rfloor\right] = 120 .$$

03_9th Differential Calculus 1.indd 121 30-05-2022 14:53:01

9.2.9 இரண்டு சிறப்பான முக்கோணவியல் எல்லைகள் (Two special Trigonometrical limits)

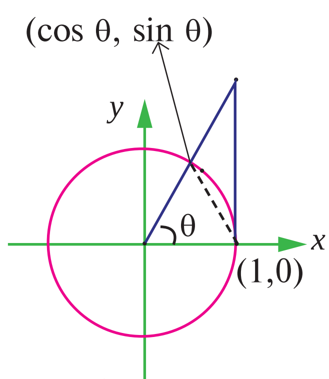
முடிவு 9.1

(a) $\lim\limits_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$ (b) $\lim\limits_{\theta \to 0} \frac{1-\cos\theta}{\theta} = 0$.

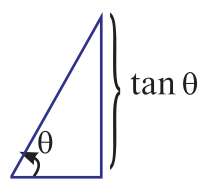
நிரூபணம்

இதனை வட்டக்கோணப் பகுதி மூலம் நிறுவலாம்.

மையம்(0, 0) மற்றும் ஆரம் 1 உள்ள வட்டத்தை எடுத்துக் கொள்வோம். வட்டத்தின் மீதுள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளி $P(\cos\theta, \sin\theta)$ என்க.

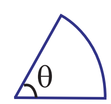


படம் 9.28



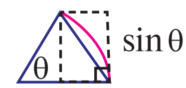
முக்கோணத்தின் பரப்பு $\frac{\tan\theta}{2}$

படம் 9.29



வட்டக்கோணப் பகுதியின் பரப்பு $\frac{\theta}{2}$

படம் 9.30



முக்கோணத்தின் பரப்பு $\frac{\sin\theta}{2}$

படம் 9.31

(a) பரப்பின் பண்புப்படி $\frac{\tan\theta}{2} \geq \frac{\theta}{2} \geq \frac{\sin\theta}{2}$

இதனை $\frac{2}{\sin\theta}$ –ஆல் பெருக்க, $\frac{1}{\cos\theta} \geq \frac{\theta}{\sin\theta} \geq 1$ எனக் கிடைக்கும். தலைகீழி காண, $\cos\theta \leq \frac{\sin\theta}{\theta} \leq 1$.

$\cos(-\theta) = \cos\theta$ மற்றும் $\frac{\sin(-\theta)}{-\theta} = \frac{\sin\theta}{\theta}$ என்பதால் இந்த சமனிலி $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ என்ற திறந்த இடைவெளியில் உள்ள பூஜ்ஜியம் அல்லாத எல்லா θ மதிப்புக்கும் பொருந்தும் எனலாம்.

$\lim\limits_{\theta \to 0} \cos\theta = 1; \lim\limits_{\theta \to 0}(1) = 1$ என நமக்குத் தெரியும்.

எனவே இடையீட்டுத் தேற்றப்படி $\lim\limits_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$. ■

(b) $\lim\limits_{\theta \to 0} \frac{1-\cos\theta}{\theta} = 0$.

$$1 - \cos\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$\frac{1-\cos\theta}{\theta} = \left(\sin\frac{\theta}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

03_9th Differential Calculus 1.indd 122 30-05-2022 14:53:02

எனவே, $\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\theta} = \lim_{\theta\to 0}\left(\sin\frac{\theta}{2}\right).\lim_{\theta\to 0}\left(\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}\right)$

$= 0 \times 1 = 0.$

9.2.10 மற்ற முக்கிய எல்லைகள் (Some important other limits)

முடிவு 9.2

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1.$$

நிரூபணம்

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots$$ (தொடர்முறைகளும் தொடர்களும்)

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots}{x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\ldots\right)=1.$$

முடிவு 9.3

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\log a,\ \ a>0$$

நிரூபணம்

$a^x, \log_a x$ என்பவை ஒன்றுக்கு ஒன்று நேர்மாறு என நாம் அறிவோம்.

$\log f(x)$ என்பது $\exp(f(x))$ -ன் நேர்மாறு எனில் $\exp(\log f(x)) = f(x)$

எனவே, $a^x = \exp(\log a^x)$

$= e^{x\log a}$

$$\frac{a^x-1}{x} = \frac{e^{x\log a}-1}{x\log a}\times\log a$$

$x \to 0$ எனில், $y = x\log a \to 0$

எனவே, $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}\times\log a = \log a\lim_{y\to 0}\left(\frac{e^y-1}{y}\right) = \log a(1) = \log a$

03_9th Differential Calculus 1.indd 123 30-05-2022 14:53:09

முடிவு 9.4

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=1.$$

நிரூபணம்

என்க $\log(1+x)=y$

$x\to 0$ எனில் $y\to 0$ மற்றும்

$$1+x=e^{y}$$

$$x=e^{y}-1$$

எனவே, $\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{e^{y}-1}$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{1}{\left(\frac{e^{y}-1}{y}\right)}=\frac{1}{1}=1.$$

நிரூபணம் இல்லாத சில முக்கிய எல்லைகள் (Some important limits without proof)

முடிவுகள் 9.5 முதல் 9.9

(5) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^{-1}x}{x}=1$ (6) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan^{-1}x}{x}=1$

(7) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$ உள்ளது மற்றும் இந்த மதிப்பு e எனக் குறிக்கப்படும், $2 < e < 3$.

(8) $\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$ (9) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{x}=e^{k}$.

எண் e என்பது ஆழ்நிலை எண் எனவும் கூறலாம். e என்ற எண் எனவும் கூறலாம்.

e என்ற எண் $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots a_{n-1}x+a_n=0$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவைச் சமன்பாட்டை எப்போதும் நிறைவு செய்யாது.

எடுத்துக்காட்டு 9.32

மதிப்பைக் காண்க : $\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{2\operatorname{cosec} x}$

தீர்வு

$\sin x=\frac{1}{y}$ என்க.

$x\to 0$ எனில், $y\to\infty$ மற்றும்

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{2\operatorname{cosec} x}=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{2y}=\left[\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\right]^{2}=e^{2}.$$

எடுத்துக்காட்டு 9.33

மதிப்பிடுக : $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x-2}\right)^{x}$.

தீர்வு

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x-2}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2+4}{x-2}\right)^{x-2+2}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x-2}\right)^{(x-2)+2}$$

$y=x-2$ எனில் $x\to\infty$ எனும்போது $y\to\infty$.

03_9th Differential Calculus 1.indd 124 30-05-2022 14:53:16

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x-2}\right)^x = \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{4}{y}\right)^{y+2} = \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{4}{y}\right)^{y}.\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{4}{y}\right)^{2}$$

$$= e^4.1 = e^4 .$$

எடுத்துக்காட்டு 9.34

மதிப்பிடுக : $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{4\sqrt{2}-(\cos x+\sin x)^5}{1-\sin 2x}$.

தீர்வு

$$\frac{4\sqrt{2}-(\cos x+\sin x)^5}{1-\sin 2x} = \frac{2^{\frac{5}{2}}-\left[(\cos x+\sin x)^2\right]^{\frac{5}{2}}}{1-\sin 2x}$$

$$= \frac{2^{\frac{5}{2}}-(1+\sin 2x)^{\frac{5}{2}}}{2-(1+\sin 2x)}$$

$$= \frac{2^{\frac{5}{2}}-(1+\sin 2x)^{\frac{5}{2}}}{2-(1+\sin 2x)}$$

எனவே, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{2^{\frac{5}{2}}-[(\cos x+\sin x)^2]^{5/2}}{2-[1+\sin 2x]} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{2^{\frac{5}{2}}-[1+\sin 2x]^{\frac{5}{2}}}{2-(1+\sin 2x)}$.

$y = 1+\sin 2x$ என்க. $x \to \dfrac{\pi}{4}$ எனில் $y\to 2$

$$= \lim_{y\to 2}\frac{2^{\frac{5}{2}}-y^{\frac{5}{2}}}{2-y}$$

$$= \frac{5}{2}.2^{\frac{5}{2}-1} = \frac{5}{2}\times 2^{\frac{3}{2}} = 5\sqrt{2}.$$

எடுத்துக்காட்டு 9.35

$x\to 0$ எனும்போது பின்வரும் சார்புகளுக்கு எல்லைமதிப்பு உள்ளதா எனக் காண்க? விடைக்கான காரணம் கூறுக.

(i) $\dfrac{\sin|x|}{x}$ (ii) $\dfrac{\sin x}{|x|}$ (iii) $\dfrac{x\lfloor x\rfloor}{\sin|x|}$ (iv) $\dfrac{\sin\left(x-\lfloor x\rfloor\right)}{x-\lfloor x\rfloor}$.

தீர்வு

(i) $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(-x)}{x} & ;\ -1<x<0 \\ \dfrac{\sin x}{x} & ;\ 0<x<1 \end{cases}$$

எனவே, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -1$ மற்றும்

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +1$.

இங்கு $f(0^-) \neq f(0^+)$ ஆகையால் எல்லை மதிப்பு இல்லை.

03_9th Differential Calculus 1.indd 125 30-05-2022 14:53:19

(ii) $$\frac{\sin x}{|x|} = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{-x} & ; -1 < x < 0 \\ \dfrac{\sin x}{x} & ; 0 < x < 1 \end{cases}$$

எனவே, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -1$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1.$ ஆகையால் எல்லை மதிப்பு இல்லை.

(iii) $$f(x) = \frac{x\lfloor x \rfloor}{\sin|x|} = \begin{cases} \dfrac{-x}{\sin(-x)} & ; -1 < x < 0 \\ \dfrac{x.0}{\sin x} & ; 0 < x < 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{x}{\sin x} & ; -1 < x < 0 \\ 0 & ; 0 < x < 1 \end{cases}$$

எனவே, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = +1$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0.$

எனவே எல்லை மதிப்பு இல்லை.

(iv) $$\frac{\sin\left(x-\lfloor x \rfloor\right)}{x-\lfloor x \rfloor} = \begin{cases} \dfrac{\sin(x-(-1))}{x-(-1)} & ; -1 < x < 0 \\ \dfrac{\sin(x-0)}{x-0} & ; 0 < x < 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x+1)}{(x+1)} & ; -1 < x < 0 \\ \dfrac{\sin x}{x} & ; 0 < x < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \frac{\sin 1}{1} = \sin 1$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1.$$

எனவே எல்லை மதிப்பு இல்லை.

பயிற்சி 9.4

பின்வருவனவற்றின் மதிப்பைக் காண்க.

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{7x}$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+x)^{1/3x}$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{k}{x}\right)^{\frac{m}{x}}$

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2+3}{2x^2+5}\right)^{8x^2+3}$

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{x+2}$

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^3\left(\dfrac{x}{2}\right)}{x^3}$

03_9th Differential Calculus 1.indd 126 30-05-2022 14:53:27

(7) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin \alpha x}{\sin \beta x}$ (8) $\lim_{x \to 0} \frac{\tan 2x}{\sin 5x}$

(9) $\lim_{\alpha \to 0} \frac{\sin(\alpha^n)}{(\sin \alpha)^m}$ (10) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(a+x) - \sin(a-x)}{x}$

(11) $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2+a^2} - a}{\sqrt{x^2+b^2} - b}$ (12) $\lim_{x \to 0} \frac{2 \arcsin x}{3x}$

(13) $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$ (14) $\lim_{x \to 0} \frac{\tan 2x}{x}$

(15) $\lim_{x \to 0} \frac{2^x - 3^x}{x}$ (16) $\lim_{x \to 0} \frac{3^x - 1}{\sqrt{x+1} - 1}$

(17) $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x \sin 2x}$ (18) $\lim_{x \to \infty} x \left[3^{\frac{1}{x}} + 1 - \cos\left(\frac{1}{x}\right) - e^{\frac{1}{x}} \right]$

(19) $\lim_{x \to \infty} \{x[\log(x+a) - \log(x)]\}$ (20) $\lim_{x \to \pi} \frac{\sin 3x}{\sin 2x}$

(21) $\lim_{x \to \pi} (1 + \sin x)^{2 \operatorname{cosec} x}$ (22) $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos x}}{\sin^2 x}$

(23) $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}}{\tan x}$ (24) $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 4x + 2} \right)^x$

(25) $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$ (26) $\lim_{x \to 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x}$

(27) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x (1 - \cos x)}{x^3}$ (28) $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$

9.3 தொடர்ச்சித் தன்மை (Continuity)

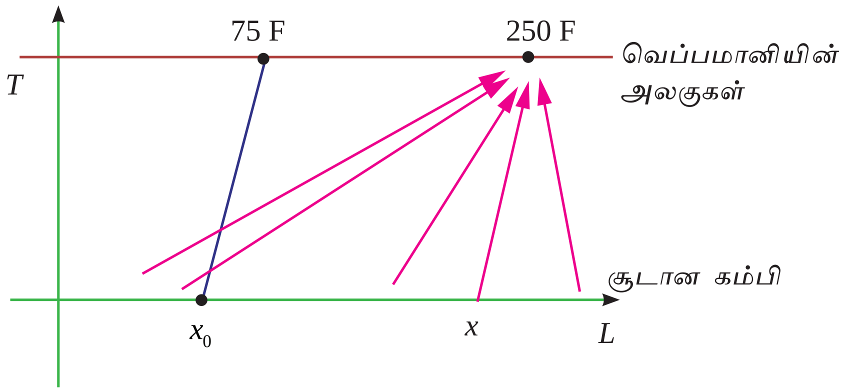
ஒரு சார்பின் தனிச்சிறப்பு வாய்ந்த பண்புகளில் ஒன்று அதன் தொடர்ச்சியாகும். நடைமுறையில் காணும் பல இயற்கை சூழல்களில் இந்தப் பண்பினைக் காணலாம். உதாரணமாக ஒரு கம்பியை சூடேற்றும்போது கம்பியானது தொடர்ந்து நீட்சியடைகிறது. ஓர் உயிரியின் தொடர்ச்சியான வளர்ச்சி, தொடர் ஓட்டம், வளிமண்டல வெப்பநிலையின் தொடர்ச்சியான மாறுதல் எனப் பலவாறாக பேசுவதைக் கேட்டிருப்போம்.

ஒரு சார்பின் தொடர்ச்சி என்ற கருத்தானது சார்பின் வளைவரை எங்கும் "உடைந்து காணப்படவில்லை" என்பதை அடிப்படையாகக் கொண்டது. இந்தச் சொல் "Continuous"என்பது இலத்தீன் மொழியில் "Continuere"இணைந்திருத்தல் என்ற சொல்லில் இருந்து தோன்றியது ஆகும். சார்புகளைப் பகுப்பாய்வு செய்யும்போது தொடர்ச்சியானது என்பதைக் குறிப்பிட "உடைந்து காணப்படவில்லை" அல்லது "இணைந்திருக்கிறது" எனக் கூறுவதில் பெரிய குறைபாடு உள்ளது. ஆகவே தொடர்ச்சியின்மை பற்றி அறிய சார்பின் வளைவரையை முதிர்ச்சி இல்லாமல் பயன்படுத்துவது தவறான வழிகாட்டுதலாகும். இருப்பினும் ஒரு சார்பிற்கு ஒரு குறிப்பிட்ட இடைவெளியில் தொடர்ச்சி என்பது சார்பகம் தெரிந்து கொண்டு, அந்த வளைவரையைப் பென்சிலின் முனையை எடுக்காமல் வரையக்கூடிய வளைவரை என்பதைப் ஒருவர் பின்னர் உணர்ந்து கொள்வார்.

தொடர்ச்சியின் கருத்தாக்கத்தைப் புரிந்துகொள்ளத் தொடர்ச்சியை எல்லையுடன் தொடர்புபடுத்திக் கற்றல் என்பது மிகச் சிறந்த வழியாகும். பொதுவாகக் கூறவேண்டுமானால்,

03_9th Differential Calculus 1.indd 127 30-05-2022 14:53:30

தொடர்ச்சித் தன்மை உள்ளது எனக் கூறும்போது அதன் பொருள் தேவையான ஓர் எல்லை கிடைக்கின்றது என்பதாகும். எல்லையிலிருந்து தொடர்ச்சிக்கான கருத்தாக்கத்தை உருவாக்க ஒரு புள்ளியில் நமது கவனத்தைக் குவிக்க வேண்டும். ஒரு புள்ளியில் எல்லை மற்றும் தொடர்ச்சி ஆகியவை தொடக்க நிலைக் கருத்துகள் ஆகும். ஆனால் சார்பின் தொடர்ச்சி என்பது புள்ளி வாரியாக பெறப்பட்ட சார்பு முழுமைக்குமான பொதுப் பண்பு ஆகும்.



படம் 9.32

உதாரணமாக, ஒரு வெப்பமானி T ஆனது L நீளமுள்ள சூடான கம்பியின் வெப்ப நிலையைப் பதிவு செய்வதாகக் கொள்வோம். L-ன் மீதுள்ள ஒவ்வொரு புள்ளி x-லும் அதன் வெப்பநிலை $t(x)$ என்க. L நீளமுள்ள கம்பியில் x_0-ஐ அடையும் வரை அதன் வெப்பநிலை $250°F$ எனக் கொள்வோம். x_0 என்ற புள்ளியில் திடீரென்று வெப்பநிலையானது (insulation) காப்பின் காரணமாக அறையின் வெப்பநிலையான $75°F$ -க்குக் குறைகின்றது. x_0 -க்குப் பிறகு அதன் வெப்ப நிலை $250°F$ ஆகத் தொடர்கிறது எனில் சார்பின் குறியீட்டால்

$$t(x) = \begin{cases} 250^\circ F & ; \; x \neq x_0 \\ 75^\circ F & ; \; x = x_0 \end{cases}$$ என எழுதலாம்.

ஆகவே x_0 என்ற புள்ளி தனித்துவப் புள்ளியாக (சிறப்பு புள்ளியாக அல்லது வழக்கமற்ற புள்ளியாக) மாறுகின்றது. வெப்பநிலையின் வீச்சை ஆராயும்போது x ஆனது x_0-ஐ நெருங்கவில்லை என்பதை அறியலாம். சுருக்கமாகக் கூறினால் x_0-ல் ஒரு துள்ளல் நிகழ்ந்துள்ளது. ஆகவே வெப்பநிலைச் சார்பானது x_0 -ல் தொடர்ச்சியாக இல்லை எனக் கூற முற்படுகின்றோம். ஏனெனில் x_0 -ன் அண்மையில் x இருக்கும்போது $t(x) = 250°F$ ஆக இருப்பதால் $t(x_0)$–ன் மதிப்பும் $250°F$ ஆக இருக்க வேண்டும் என எதிர்பார்க்கிறோம். இப்பொழுது நாம் தொடர்ச்சி எனும் கருத்தாக்கத்தை பொதுமைப்படுத்தும்போது பிரதி பிம்பங்கள் நெருங்கி வரும்போது அதற்குரிய பிம்பங்களும் நெருங்கி வரவேண்டும் என்கிறோம்.

மேற்கூறிய எடுத்துக்காட்டில் கம்பியின் மீதுள்ள புள்ளிகள் பிரதி பிம்பங்கள் ஆகும். அதற்கான வெப்பநிலைகளின் பிம்பங்கள் ஆகும்.

ஒரு மாணவனுக்குத் தொடர்ச்சியைப் பற்றிய உள்ளுணர்வான கருத்து அதன் தொடர்ச்சித் தன்மையிலிருந்து உருவாக வேண்டுமே அல்லாமல், நடைமுறையில் காணப்படும் திடீரென ஏற்படும் தொடர்ச்சியற்ற தன்மையிலிருந்து உருவாகக் கூடாது. உடனடியாக மனத்தில் தோன்றும் சில சார்புகளின் கணித மாதிரிகளைக் கீழே பட்டியலிட்டுள்ளோம்.

(1) ஒளி விளக்கை ஒளிரச் செய்தல் : இங்கு ஒளியின் செறிவு என்பது காலத்தைப் பொறுத்த சார்பு.

(2) வாகனங்களின் மோதல் : இங்குத் திசைவேகம் என்பது காலத்தைப் பொறுத்த சார்பு.

(3) வானொலியினை அணைத்தல் : இங்கு ஒலியின் செறிவு காலத்தைப் பொறுத்த சார்பு.

(4) பலூன் வெடித்தல் : இங்கு ஆரம் உள்ளே செலுத்தப்படும் காற்றைப் பொறுத்த சார்பு.

(5) கயிற்றினை அறுத்தல் : இங்கு இறுக்கம் என்பது நீளத்தைப் பொறுத்த சார்பு.

(6) அஞ்சல் கட்டணம் : இங்கு அஞ்சல் கட்டணம் என்பது எடையைச் சார்ந்த சார்பு.

(7) வருமான வரி : இங்கு வரி விகிதம் என்பது வருமானத்தைச் சார்ந்த சார்பு.

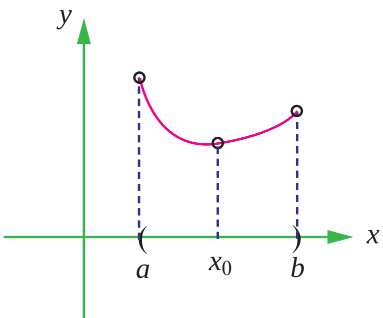
03_9th Differential Calculus 1.indd 128 30-05-2022 14:53:31

(8) வயது வருடங்களில் : இங்கு வயது முழு வருடங்களில் என்பது காலத்தைச் சார்ந்த சார்பு.

(9) காப்பீட்டுத் தவணை : தவணை என்பது வயதைப் பொறுத்த சார்பு.

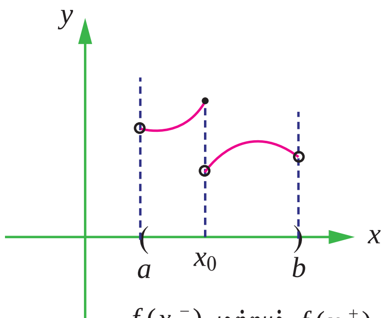
எடுத்துக்காட்டுகள் (1) – (5) வரை மிகவும் துல்லியமாக இல்லை. எடுத்துக்காட்டாக ஒளியின் செறிவு என்பது பரவலாக பூஜ்ஜிய செறிவிலிருந்து மிகைச் செறிவை நோக்கி நகர்கிறது. உண்மையில் இயற்கை தொடர்ச்சியற்ற தன்மையை வெறுப்பதாகத் தோன்றுகிறது. (6) – (9) வரை உள்ள எடுத்துக்காட்டுகள் தொடர்ச்சியற்றதாகவும் மேலும் உண்மையில் ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளியில் துள்ளல் இருப்பதையும் அறியலாம்.

மாணவர்கள், தொடர்ச்சியின் வரையறையை, வழக்கமாக நாம் நடைமுறையில் பயன்படுத்தும் தொடர்ச்சியான என்ற வார்த்தையின் பொருளுடன் ஒப்பிட்டுப் பார்க்க வேண்டும். ஒரு தொடர்ச்சியான நிகழ்வானது படிப்படியாக எந்த இடையூறும் இல்லாமலும், திடீரென்ற மாற்றங்களும் இல்லாதவாறு நடைபெறுவதாகும். அதாவது அதில் எந்த ஒரு ஓட்டையோ, துள்ளலோ அல்லது இடைவெளியோ இல்லாதிருத்தலாகும். கீழ்க்காணும் x-ன் மூன்று மதிப்புகளில் தொடர்ச்சியற்ற தன்மை உள்ளதைக் காணலாம். இடைவெளி (a, b)-ன் மற்ற எல்லா இடங்களிலும் f-ன் வளைவரை எந்தவித குறுக்கீடும் இன்றித் தொடர்ச்சியாக உள்ளது.



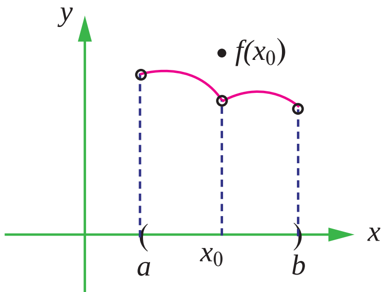
$f(x_0)$ வரையறுக்கப்படவில்லை

படம் 9.33



$f(x_0^-)$ மற்றும் $f(x_0^+)$ என்பன சமமற்றவை

படம் 9.34



$\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$

படம் 9.35

மேற்கூறிய வளைவரைகளில் (படம் 9.33 - 9.35) மூன்று நிபந்தனைகளில் $x = x_0$ என்ற புள்ளியில் தொடர்ச்சித் தன்மை இல்லாமல் இருக்க மூன்று நிபந்தனைகள் உள்ளன.

(1) $x = x_0$-ல் சார்பு வரையறுக்கப்படவில்லை.

(2) $x = x_0$-ல் $f(x)$-க்கு எல்லை வரையறுக்கப்படவில்லை.

(3) $x = x_0$-ல் $f(x)$-க்கு எல்லை உள்ளது. ஆனால் இதன் மதிப்பு $f(x_0)$-க்குச் சமமாக இல்லாமல் இருக்கிறது.

நாம் இப்பொழுது சில விளக்க எடுத்துக்காட்டுகளைக் காண்போம்.

விளக்க எடுத்துக்காட்டு 9.6

(i) $f(x) = x^2+3$ (ii) $f(x) = \dfrac{16 - x^2}{4 + x}$

தீர்வு

(i) $x \to 2$ எனில் ஒரு பக்க எல்லைகள்

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 7, \quad \lim_{x \to 2^+} f(x) = 7$$

எனவே $\lim_{x \to 2} f(x) = 7$ மேலும் $f(2) = 7 = \lim_{x \to 2} f(x)$. இதனால் $x = 2$-ல் $f(x)$ தொடர்ச்சியானது.

(ii) இதன் ஒரு பக்க எல்லைகள்

$$\lim_{x \to -4^-} f(x) = 8$$

03_9th Differential Calculus 1.indd 129 30-05-2022 14:53:32

$$\lim_{x \to -4^+} f(x) = 8$$

ஆகையால் $\lim_{x \to -4} f(x) = 8$ ஆனால் $f(-4)$-ன் மதிப்பு இல்லை.

$f(x)$-ன் எல்லை மதிப்பு இருந்தபோதிலும் $x = -4$-ல் சார்பின் மதிப்பு $f(-4)$ வரையறுக்கப்படவில்லை. இதனால் $\lim_{x \to -4} f(x)$ இருப்பதற்கும் $f(-4)$ஆக இருப்பதற்கும் எந்தத் தொடர்பும் இல்லை.

தற்போது நாம் தொடர்ச்சி பற்றி முறையான வரையறையைக் காண்போம்.

வரையறை 9.7

x_0-ஐ உள்ளடக்கிய திறந்த இடைவெளி I என்க. $f : I \to \mathbb{R}$ என்க. f என்ற சார்பு $x = x_0$-ன் அண்மைப்பகுதியில் வரையறுக்கப்பட்டு $x = x_0$ என்ற புள்ளியில் சார்பின் மதிப்பும், அதன் எல்லை மதிப்பும் கிடைக்கப்பெற்று சமமாகவும் இருக்குமானால், f என்ற சார்பு $x = x_0$ என்ற புள்ளியில் *தொடர்ச்சியானது* எனலாம்.

இவ்வாறு $x = x_0$ என்ற புள்ளியில் ஒரு சார்பு $y = f(x)$ தொடர்ச்சியானதாக இருக்க மூன்று நிபந்தனைகளை நிறைவு செய்ய வேண்டும்.

(i) x_0-ன் அண்மைப் பகுதியில் $f(x)$ வரையறுக்கப்பட்டிருக்க வேண்டும்.

(ii) $\lim_{x \to x_0} f(x)$ கிடைக்க வேண்டும்.

(iii) $f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x)$.

நிபந்தனை (iii)-ஐ $\lim_{\Delta x \to 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0$ என மாற்றியும் அமைக்கலாம். மேலும் x_0-ல் f-ன் தொடர்ச்சியைப் பின்வருமாறு மாற்றியும் வரையறுக்கலாம். அதாவது.

வரையறை 9.8

x_0 என்ற புள்ளியின் அண்மைப் பகுதியில் சார்பு f வரையறுக்கப்பட்டு $\lim_{\Delta x \to 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0$ ஆகவும் இருக்குமானால் $y = f(x)$ என்ற சார்பு $x = x_0$ என்ற புள்ளியில் தொடர்ச்சியானது எனலாம்.

(iii) என்ற நிபந்தனையை $\lim_{x \to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \to x_0} x\right)$ எனவும் எழுதலாம். $\lim_{x \to x_0} x$-ல் f ஆனது தொடர்ச்சியாக இருக்குமானால் எல்லைக் குறியீட்டையும், சார்புக் குறியீட்டையும் இடமாற்றம் செய்ய முடியும்.

9.3.1 ஒரு புள்ளியில் தொடர்ச்சியான சார்புகளின் எடுத்துக்காட்டுகள் (Examples of functions continuous at a point)

(1) மாறிலிச் சார்பு $\mathbb{R}$ -ன் எல்லா புள்ளியிலும் தொடர்ச்சியானது .

$f(x) = k, k \in \mathbb{R}$ என்பது ஒரு மாறிலி. $x_0 \in \mathbb{R}$, எனில் $f(x_0) = k$. மேலும்

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} (k) = k.$$

03_9th Differential Calculus 1.indd 130 30-05-2022 14:53:36

(2) மிகை முழு எண் அடுக்கு உடைய அடுக்குச் சார்புகள் $\mathbb{R}$ –ன் எல்லா புள்ளிகளிலும் தொடர்ச்சியானவை. $f(x) = x^n$ எனில், f –ன் சார்பகம் $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ மற்றும் எல்லைத் தேற்றத்தின்படி $\lim\limits_{x \to x_0} x^n = x_o^n, x_0 \in \mathbb{R}$.

(3) $p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n, \quad a_0 \neq 0$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவைகள் $\mathbb{R}$ –ன் எல்லா புள்ளிகளிலும் தொடர்ச்சியானது. எல்லைத் தேற்றப்படி

$$\lim_{x \to x_0} p(x) = a_0x_0^n + a_1x_0^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x_0 + a_n = p(x_0)$$

(4) பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் பின்னம் அதாவது $R(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, $q(x) \neq 0$ என்ற விகிதமுறு சார்புகள் எல்லாப் புள்ளிகளிலும் தொடர்ச்சியானவை.

$$\lim_{x \to x_0} R(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{p(x)}{q(x)}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to x_0} p(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} q(x)} = \frac{p(x_0)}{q(x_0)} = R(x_0).$$

(5) வட்டச் சார்புகளான $\sin x$ மற்றும் $\cos x$ என்பவை அவற்றின் சார்பகம் $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$–ல் உள்ள எல்லாப் புள்ளிகளிலும் தொடர்ச்சியானவை.

$$\lim_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0, \quad \lim_{x \to x_0} \cos x = \cos x_0.$$

இதன் விளைவாக, எல்லைகளின் தலைகீழி மற்றும் வகுத்தல் விதிகிளின்படி, $\tan x$, $\cot x$, $\operatorname{cosec} x$, $\sec x$ போன்ற சார்புகள் அவற்றிற்கு பொருத்தமான சார்பகங்களில் தொடர்ச்சியானவை.

(6) $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$ போன்ற n–ஆம் படி மூல சார்புகள் அவற்றிற்கு பொருத்தமான சார்பகங்களில் தொடர்ச்சியானவை. காரணம் $\lim\limits_{x \to x_0} \left(x^{\frac{1}{n}} \right) = x_0^{\frac{1}{n}}$.

(7) தலைகீழிச் சார்பு $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x = 0$–ல் அது தொடர்ச்சியற்றது. ஆனால் $\mathbb{R} - \{0\}$ –ல் எல்லா புள்ளிகளுக்கும் f தொடர்ச்சியானது.

(8) $h(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 0 \\ x^2+1, & x > 0 \end{cases}$

h–ன் சார்பகம் எல்லா மெய்யெண்கள் ஆகும். மேலும்

$$\lim_{x \to 0^-} h(x) = \lim_{x \to 0^-}(x+1) = 1 = h(0)$$

$$\lim_{x \to 0^+} h(x) = \lim_{x \to 0^+}(x^2+1) = 1 = h(0).$$

எனவே $x = 0$–ல் h ஒரு தொடர்ச்சியான சார்பாகும். மேலும் $(-\infty, 0)$ மற்றும் $(0, \infty)$–ல் h ஒரு தொடர்ச்சியான சார்பு. எனவே, $(-\infty, \infty)$–ல் $h(x)$ ஒரு தொடர்ச்சியானது.

03_9th Differential Calculus 1.indd 131 30-05-2022 14:53:39

(9) மீப்பெரு முழு எண் சார்பு $f(x) = \lfloor x \rfloor, x = 0$–ல் தொடர்ச்சியற்றது.

$$\lim_{x \to 0^-} \lfloor x \rfloor = -1 \text{ மற்றும்}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \lfloor x \rfloor = 0$$

எல்லா முழு எண் மதிப்புகளுக்கும் இந்தச் சார்பு தொடர்ச்சியற்றது.

குறிப்பாக $\lim_{x \to n^-} \lfloor x \rfloor = n - 1$ மற்றும்

$$\lim_{x \to n^+} \lfloor x \rfloor = n.$$

(10) மட்டுச் சார்பு $\mathbb{R}$ –ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் தொடர்ச்சியானது.

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x & ; \ x < 0 \\ 0 & ; \ x = 0 \\ x & ; \ x > 0 \end{cases}$$

குறிப்பாக,

$$\lim_{x \to 0^-} |x| = \lim_{x \to 0^-} (-x) = 0,$$

$$\lim_{x \to 0^+} |x| = \lim_{x \to 0^+} (x) = 0, \text{ மற்றும்}$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0 = \lim_{x \to 0^+} f(x) = 0 = f(0).$$

(11) படிக்குறிச் சார்பு $f(x) = e^x$, $\mathbb{R}$ –ன் எல்லா புள்ளிகளுக்கும் தொடர்ச்சியானது.

(12) மடக்கைச் சார்பு $f(x) = \log x \ (x > 0)$, $(0, \infty)$–ல் தொடர்ச்சியானது.

9.3.2 தொடர்ச்சியான சார்புகளின் இயற்கணிதம் (Algebra of continuous functions)

f மற்றும் g என்ற சார்புகள், x_0–ஐ உள்ளடக்கிய அண்மைப் பகுதியிலும் x_0 என்ற புள்ளியிலும் தொடர்ச்சியானவைகள் எனில்,

(1) $x = x_0$–இல் $f + g$ தொடர்ச்சியானது

(2) $x = x_0$–இல் $f - g$ தொடர்ச்சியானது

(3) $x = x_0$–இல் $f \cdot g$ தொடர்ச்சியானது

(4) $x = x_0$–இல் $\dfrac{f}{g}$ $(g(x) \neq 0)$ தொடர்ச்சியானது

(5) தொடர்ச்சியைப் பற்றிய சார்புகளின் சேர்ப்புத் தேற்றம் f என்ற சார்பு $g(x_0)$–இல் மற்றும் g என்ற சார்பு $x = x_0$–இல் தொடர்ச்சியானவை எனில் fog –யும் x_0–இல் தொடர்ச்சியானது.

மூடிய இடைவெளியில் தொடர்ச்சி (Continuity in a closed interval)

வரையறை 9.9

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ என்ற சார்பு, திறந்த இடைவெளி (a, b)–ல் தொடர்ச்சியானதாகவும் $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ மற்றும் $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$ஆகவும் இருப்பின், அந்தச் சார்பு மூடிய இடைவெளி $[a, b]$ –ல் தொடர்ச்சியானது எனக்கூறலாம்.

அதாவது ஒரு சார்பு a-க்கு வலப்பக்கமிருந்து தொடர்ச்சியாகவும் b-க்கு இடப்பக்கமிருந்து தொடர்ச்சியாகவும் மற்றும் (a, b) திறந்த இடைவெளியில் உள்ள ஒவ்வொரு புள்ளி x_0-க்கும் தொடர்ச்சியாக இருக்க வேண்டும்.

விளக்க எடுத்துக்காட்டு 9.7

$f(x) = \sqrt{1-x^2}$ என்ற சார்பின் தொடர்ச்சித் தன்மையை ஆராய்க.

தீர்வு

சார்பு f-ன் வரையறைப்படி சார்பகம் மூடிய இடைவெளி $[-1,1]$ ஆகும்.

($1 - x^2 \geq 0$ ஆக இருக்கும்போது f வரையறுக்கப்படுகிறது)

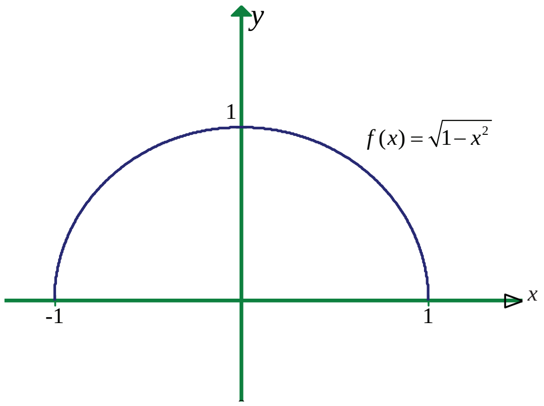
$c \in (-1, 1)$ என்ற ஏதேனும் ஒரு புள்ளிக்கு

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} \sqrt{1-x^2} = \left[\lim_{x \to c}(1-x^2)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= (1-c^2)^{\frac{1}{2}} = f(c).$$

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} (1-x^2)^{\frac{1}{2}} = 0 = f(1).$$

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \left[\lim_{x \to -1^-}(1-x^2)\right]^{\frac{1}{2}} = 0 = f(-1).$$



படம் 9.36

இவ்வாறாக f என்ற சார்பு $[-1, 1]$ இடைவெளியில் தொடர்ச்சியானது. இந்தக் கணக்கினை சார்புகளின் சேர்ப்புத் தேற்றம் மூலமும் தீர்க்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 9.36

பின்வரும் சார்புகள் எந்த இடைவெளிகளில் தொடர்ச்சியானது எனக் காண்க.

(i) $f(x) = \tan x$ (ii) $g(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ (iii) $h(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

தீர்வு

(i) $f(x) = \tan x$ என்ற சார்பு $x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$, $n \in Z$ என்ற இடங்களில் வரையறுக்கப்படவில்லை. மற்ற எல்லா இடங்களிலும் இது தொடர்ச்சியானது, எனவே $f(x) = \tan x$ சார்பு

$$\ldots\left(-\frac{3\pi}{2},-\frac{\pi}{2}\right),\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right),\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right),\ldots$$ போன்ற திறந்த இடைவெளிகளில் தொடர்ச்சியானது.

(ii) $y = \frac{1}{x}$ என்ற சார்பு $x = 0$-ஐ தவிர $\mathbb{R}$ –ன் மற்ற எல்லா இடங்களிலும் தொடர்ச்சியானது. $x = 0$-இல் சார்பு வரையறுக்கப்படவில்லை.

$g(x) = \sin\frac{1}{x}$ என்ற சார்பு $x = 0$ தவிர மற்ற எல்லா இடங்களிலும் தொடர்ச்சியானது.

$\lim_{x \to 0} g(x)$ மதிப்பு கிடைக்காது. எனவே g என்ற சார்பு $(-\infty, 0)$ மற்றும் $(0, \infty)$ இடைவெளிகளில் தொடர்ச்சியானது.

(iii) $h(x)$ என்ற சார்பு, $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$-ல் $x_0 \neq 0$ என உள்ள எல்லா புள்ளிகளுக்கும் வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது.

$$\lim_{x \to x_0} h(x) = \left(\lim_{x \to x_0} x \sin \frac{1}{x} \right) = x_0 \sin \frac{1}{x_0} = h(x_0)$$

For $x_0 = 0$

$$h(x) = x.\sin \frac{1}{x}$$

$$-x \leq x \sin \frac{1}{x} \leq x$$

$$g(x) = -x, f(x) = x \sin \frac{1}{x}, h(x) = x$$

$$\lim_{x \to 0} g(x) = 0, \lim_{x \to 0} h(x) = 0$$

$$\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0.$$

நெருக்குத் தேற்றத்தின்படி

$$\lim_{x \to 0} \left(x \sin \frac{1}{x} \right) = 0 = h(0).$$

எனவே மெய்யெண் கோட்டில் உள்ள எல்லாப் புள்ளிகளுக்கும் $h(x)$ தொடர்ச்சியானது.

எடுத்துக்காட்டு 9.37

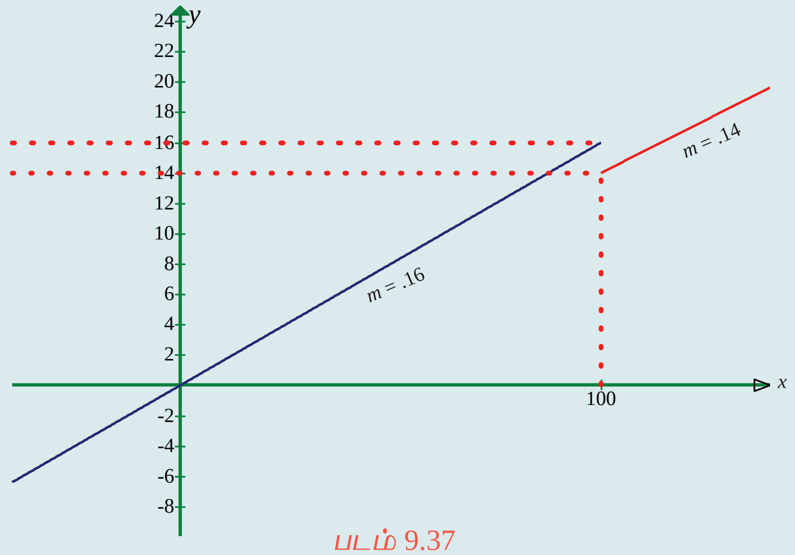
தக்காளி மொத்த விற்பனையாளர் ஒருவர் புதியதாக அறுவடையான தக்காளியின் விலை 100 கிலோவுக்கு குறைவாக வாங்கினால் ரூபாய் ₹ 0.16/கி வீதமும் குறைந்தபட்சம் 100 கி வாங்கினால் ரூபாய் ₹ 0.14/கி விற்பதாகக் காண்கிறார். மொத்த விலையின் சார்பையும் 100 கிலோ வாங்கும்போது உள்ள விலையையும் காண்க.

தீர்வு

நாள் ஒன்றுக்கு வாங்கும் தக்காளியின் அளவு x என்க. மற்றும் விலை C என்க.

$$C(x) = \begin{cases} 0.16x, & ; \quad 0 \leq x < 100 \\ 0.14x, & ; \quad x \geq 100 \end{cases}$$

இந்தச் சார்பின் படம் பின்வருமாறு :



படம் 9.37

03_9th Differential Calculus 1.indd 134 30-05-2022 14:53:50

$x = 100$-இல் சார்பு தொடர்ச்சியற்றது. ஏனெனில் $\lim_{x \to 100^-} C(x) = 16$ மற்றும் $\lim_{x \to 100^+} C(x) = 14$

$C(100) = 14$

இவ்வாறாக, $\lim_{x \to 100^-} C(x) = 16 \neq 14 = \lim_{x \to 100^+} C(x) = C(100)$

இங்குச் சார்பு ஒரு குறிப்பிட்ட மதிப்பு 14-ல் இருந்து மற்றொரு எண் 16க்கு மாற்றம் அடைகிறது.

9.3.3 நீக்கக் கூடிய மற்றும் துள்ளல் தொடர்ச்சியற்ற தன்மை (Removable and Jump discontinuities)

பின்வரும் சார்புகளைக் கவனிப்போம் :

(i) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$

(ii) $g(x) = C(x)$. (எடுத்துக்காட்டு 9.38-ல் வரையறுக்கப்பட்ட $C(x)$)

$x = 0$-ஐ தவிர மெய்யெண் நேர்க்கோட்டில் உள்ள எல்லா புள்ளிகளுக்கும் $f(x)$ வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது. அதாவது, $f(0)$ வரையறுக்கப்படவில்லை. ஆனால், $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ ஆக உள்ளது. பின்வருமாறு சார்பை மாற்றி வரையறுப்போம் எனில்

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

மெய்யெண் நேர்க்கோட்டில் உள்ள அனைத்துப் புள்ளிகளுக்கும் $x = 0$-ஐயும் சேர்த்து h வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது. மேலும் $x = 0$-இல் h தொடர்ச்சியானது.

$$\lim_{x \to 0} h(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 = h(0).$$

$x \neq 0$-க்கு $h(x) = f(x)$ என்பதைக் கவனிக்கவும். மூலச்சார்பு $f(x)$, $x = 0$-இல் தொடர்ச்சியற்றதாக இருந்தபோதிலும் மாற்றி வரையறுக்கப்பட்ட சார்பு h பூஜ்ஜியத்திலும் தொடர்ச்சியானதாக உள்ளது. அதாவது சார்பை மாற்றி வரையறுத்து தொடர்ச்சியற்ற தன்மையை தொடர்ச்சியானதாக மாற்ற முடியும். இவ்வாறு உள்ள தொடர்ச்சியற்ற புள்ளிகள் நீக்கக்கூடியத் தொடர்ச்சியின்மை எனப்படும்.

வரையறை 9.10

$h : I \to \mathbb{R}$ என்ற சார்பு $h(x) = \begin{cases} f(x), & ; \ x \neq x_0 \\ \lim_{x \to x_0} f(x), & ; \ x = x_0 \end{cases}$ என வரையறுக்கப்பட்டால் $I \subseteq R$ என்ற இடைவெளியில் வரையறுக்கப்பட்ட சார்பு f-க்கு $x_0 \in I$-இல் நீக்கக்கூடிய தொடர்ச்சியற்ற தன்மை உள்ளது எனலாம்.

நீக்கக்கூடிய தொடர்ச்சியற்ற தன்மைக்கு $\lim_{x \to x_0} f(x)$ கிடைக்க வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 9.38-ல் உள்ளவாறு $g(x) = C(x)$ என்ற சார்பை ஆய்வு செய்வோம். இது $[0, \infty)$-இல் உள்ள எல்லாப் புள்ளிகளிலும் வரையறுக்கப்பட்டாலும், $\lim_{x \to 100} g(x)$ கிடைக்கப்பெறவில்லை. மேலும் $\lim_{x \to 100^+} g(x) - \lim_{x \to 100^-} g(x) = 16 - 14 = 2$ என்ற முடிவான மதிப்புக்கு

03_9th Differential Calculus 1.indd 135 30-05-2022 14:53:56

ஒரு துள்ளல் உள்ளது. $\lim\limits_{x\to 100} g(x)$ -ன் மதிப்பு கிடைக்கவில்லை என்பதால் $x = 100$-இல் அது தொடர்ச்சியற்றது. இதுபோன்ற தொடர்ச்சியற்ற தன்மைகள் துள்ளல் தொடர்ச்சியற்ற தன்மை எனப்படும். இதிலிருந்து பின்வரும் வரையறையைப் பெறலாம் :

வரையறை 9.11

$I \subseteq R$ என்ற இடைவெளியில் f என்ற சார்பு வரையறுக்கப்பட்டது என்க.

$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ மற்றும் $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ ஆகியவை கிடைக்கப்பெற்று $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ எனுமாறு $x_0 \in I$-இல் f-க்குத் துள்ளல் தொடர்ச்சியற்ற தன்மை உள்ளது எனலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 9.38

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x}, & ; \ x \neq 0 \\ 0, & ; \ x = 0 \end{cases}$$

என வரையறுக்கப்பட்டால் f என்ற சார்பு $\mathbb{R}$ -இல் தொடர்ச்சியானதா எனத் தீர்மானிக்க.

தீர்வு

இடையீட்டுத் தேற்றப்படி $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \sin \dfrac{1}{x} = 0$ மற்றும் $f(x)$-ன் வரையறைப்படி $f(0) = 0$, எனவே, $x = 0$-இல் f தொடர்ச்சியானது. மேலும் மற்ற எல்லா மதிப்புகளுக்கும் தொடர்ச்சியானது என்பது தெளிவாகத் தெரிகிறது. எனவே f என்ற சார்பு $\mathbb{R}$ -இல் தொடர்ச்சியானது.

பயிற்சி 9.5

(1) $f(x) = 2x^2 + 3x - 5$ $\mathbb{R}$ -ன் எல்லா புள்ளிகளிலும் தொடர்ச்சியானது என நிறுவுக.

(2) பின்வருவனவற்றின் தொடர்ச்சித் தன்மையை ஆராய்க :

(i) $x + \sin x$ (ii) $x^2 \cos x$ (iii) $e^x \tan x$

(iv) $e^{2x} + x^2$ (v) $x \,.\ln x$ (vi) $\dfrac{\sin x}{x^2}$

(vii) $\dfrac{x^2 - 16}{x+4}$ (viii) $|x + 2| + |x - 1|$ (ix) $\dfrac{|x - 2|}{|x + 1|}$

(x) $\cot x + \tan x$

(3) பின்வரும் சார்புகளுக்குத் தொடர்ச்சித் தன்மையைக் கொடுக்காத புள்ளிகளைக் காண்க.

(i) $f(x) = \begin{cases} 4x+5, & ; \ x \leq 3 \\ 4x-5, & ; \ x > 3 \end{cases}$ (ii) $f(x) = \begin{cases} x+2, & ; \ x \geq 2 \\ x^2, & ; \ x < 2 \end{cases}$

(iii) $f(x) = \begin{cases} x^3 - 3, & , \ x \leq 2 \\ x^2 + 1, & , \ x > 2 \end{cases}$ (iv) $f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{4} \\ \cos x, & \dfrac{\pi}{4} < x < \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

03_9th Differential Calculus 1.indd 136 30-05-2022 14:54:01

(4) கொடுக்கப்பட்ட சார்புக்குக் கொடுக்கப்பட்ட புள்ளி x_0-இல் தொடர்ச்சியானதா அல்லது தொடர்ச்சியற்றதா எனக் காரணத்துடன் கூறுக.

(i) $x_0 = 1$, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1}, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$ (ii) $x_0 = 3$, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x-3}, & ; x \neq 3 \\ 5, & ; x = 3 \end{cases}$

(5) $\begin{cases} \dfrac{x^3-1}{x-1}, & ; x \neq 1 \\ 3, & ; x = 1 \end{cases}$ என்ற சார்பு $(-\infty, \infty)$-இல் தொடர்ச்சியானது எனக்காட்டுக.

(6) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^4-1}{x-1}, & ; x \neq 1 \\ \alpha, & ; x = 1 \end{cases}$ என வரையறுக்கப்பட்ட சார்பில் $x = 1$-இல் சார்பு தொடர்ச்சியானது எனில், α-ன் மதிப்பு காண்க.

(7) $f(x) = \begin{cases} 0, & ; x < 0 \\ x^2, & ; 0 \leq x < 2 \\ 4, & ; x \geq 2 \end{cases}$ என்ற சார்பின் வளைவரையை வரைக. இச்சார்பு $(-\infty, \infty)$-ல் தொடர்ச்சியானது என நிறுவுக.

(8) f மற்றும் g தொடர்ச்சியான சார்புகள் மேலும் $f(3) = 5$ மற்றும் $\lim_{x \to 3} [2f(x) - g(x)] = 4$ எனில் $g(3)$-ஐக் காண்க.

(9) சார்பு தொடர்ச்சியற்றதாக உள்ள புள்ளிகளைக் காண்க. இந்தப் புள்ளிகளில் எந்தப் புள்ளிகளுக்கு f-க்கு வலப்பக்கத் தொடர்ச்சி, இடப்பக்கத் தொடர்ச்சி மற்றும் எதுவுமில்லை என உள்ளதைக் காண்க. f-ன் வளைவரையை வரைக.

(i) $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & ; x \leq -1 \\ 3x & ; -1 < x < 1 \\ 2x-1, & ; x \geq 1 \end{cases}$ (ii) $f(x) = \begin{cases} (x-1)^3, & ; x < 0 \\ (x+1)^3, & ; x \geq 0 \end{cases}$

(10) f பின்வருமாறு வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; x < 0 \\ x & ; 0 \leq x < 1 \\ -x^2+4x-2 & ; 1 \leq x < 3 \\ 4-x & ; x \geq 3 \end{cases}$$

இந்தச் சார்பு தொடர்ச்சியானதா?

(11) பின்வரும் சார்புகளில் எவற்றுக்கு $x = x_0$-ல் நீக்கக்கூடிய தொடர்ச்சியற்ற தன்மை உள்ளது எனக் காண்க? தொடர்ச்சியற்ற தன்மை இருக்குமானால், f-ன் $x \neq x_0$-க்கு ஏற்றவாறு $\mathbb{R}$-இல் தொடர்ச்சியாக இருக்குமாறு g என்ற சார்பைக் காண்க.

(i) $f(x) = \dfrac{x^2-2x-8}{x+2}$, $x_0 = -2$.

(ii) $f(x) = \dfrac{x^3+64}{x+4}, \quad x_0 = -4$.

(iii) $f(x) = \dfrac{3-\sqrt{x}}{9-x}, \quad x_0 = 9$.

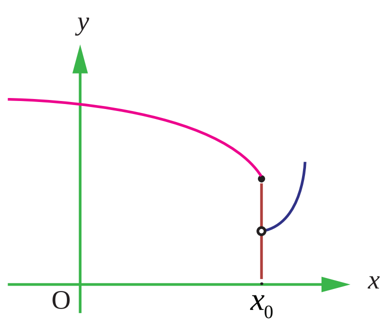
(12) $g(x) = \begin{cases} x^2 - b^2 & ; \; x < 4 \\ bx+20 & ; \; x \geq 4 \end{cases}$ என்ற சார்பு $(-\infty, \infty)$ -ல் தொடர்ச்சியானது எனில் மாறிலி b -ஐக் காண்க.

(13) $f(x) = x \sin \dfrac{\pi}{x}$ என்க. $f(0)$–ன் எந்த மதிப்புக்கு f எல்லா இடங்களிலும் தொடர்ச்சியானதாக இருக்கும்?

(14) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^3-1}$ என்ற சார்பு $x = 1$–ல் வரையறுக்கப்படவில்லை. $f(1)$–ன் எந்த மதிப்பிற்கு $x = 1$–ல் f தொடர்ச்சியானதாக இருக்கும் ?

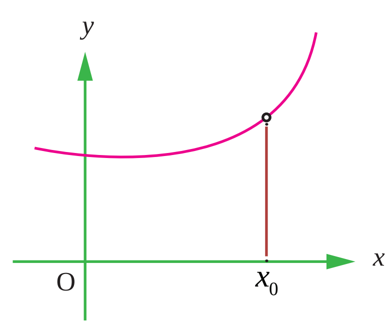
(15) பின்வரும் வளைவரைகளுக்கு $x = x_0$ –ல் எவ்வாறு தொடர்ச்சியற்று உள்ளது எனக்கூறுக?

(a)



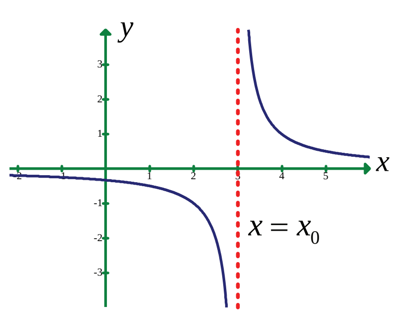
படம் 9.38

(b)



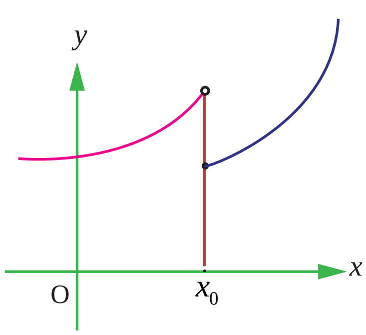
படம் 9.39

(c)



படம் 9.40

(d)



படம் 9.41

பயிற்சி 9.6

சரியான அல்லது மிகவும் ஏற்புடைய விடையினைக் கொடுக்கப்பட்ட நான்கு மாற்று விடைகளிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கவும்.

(1) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin x}{x}$

(1) 1 (2) 0 (3) ∞ (4) $-\infty$

03_9th Differential Calculus 1.indd 138 30-05-2022 14:54:08

(2) $\lim_{x\to\pi/2}\frac{2x-\pi}{\cos x}$

(1) 2 (2) 1 (3) -2 (4) 0

(3) $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1-\cos 2x}}{x}$

(1) 0 (2) 1 (3) $\sqrt{2}$ (4) இவற்றில் ஏதுமில்லை

(4) $\lim_{\theta\to0}\frac{\sin\sqrt{\theta}}{\sqrt{\sin\theta}}$

(1) 1 (2) – 1 (3) 0 (4) 2

(5) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+5x+3}{x^2+x+3}\right)^x$

(1) e^4 (2) e^2 (3) e^3 (4) 1

(6) $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}}{2x+1}=$

(1) 1 (2) 0 (3) – 1 (4) $\frac{1}{2}$

(7) $\lim_{x\to0}\frac{a^x-b^x}{x}=$

(1) $\log ab$ (2) $\log\left(\frac{a}{b}\right)$ (3) $\log\left(\frac{b}{a}\right)$ (4) $\frac{a}{b}$

(8) $\lim_{x\to0}\frac{8^x-4^x-2^x+1^x}{x^2}=$

(1) 2 log 2 (2) $2(\log 2)^2$ (3) log 2 (4) 3 log 2

(9) $f(x)=x(-1)^{\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor}$, $x\le 0$, இங்கு x என்பது x-க்குச் சமமான அல்லது குறைவான மீப்பெரு முழு எண், எனில், $\lim_{x\to0}f(x)$-ன் மதிப்பு

(1) – 1 (2) 0 (3) 2 (4) 4

(10) $\lim_{x\to3}\lfloor x\rfloor=$

(1) 2 (2) 3 (3) மதிப்பு இல்லை (4) 0

(11) $f(x)=\begin{cases}3x & , \ 0\le x\le 1\\ -3x+5 & , \ 1<x\le 2\end{cases}$ எனில்

(1) $\lim_{x\to1}f(x)=1$ (2) $\lim_{x\to1}f(x)=3$

(3) $\lim_{x\to1}f(x)=2$ (4) $\lim_{x\to1}f(x)$ இல்லை

03_9th Differential Calculus 1.indd 139 30-05-2022 14:54:16

(12) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ என்பது $f(x)=\lfloor x-3\rfloor+|x-4|$, $x\in\mathbb{R}$, என வரையறுக்கப்பட்டால் $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$ -ன் மதிப்பு

(1) – 2 (2) – 1 (3) 0 (4) 1

(13) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xe^x-\sin x}{x}$ -ன் மதிப்பு

(1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 0

(14) If $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin px}{\tan 3x}=4$ எனில் p-ன் மதிப்பு

(1) 6 (2) 9 (3) 12 (4) 4

(15) $\lim\limits_{\alpha\to\pi/4}\dfrac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\alpha-\dfrac{\pi}{4}}$ -ன் மதிப்பு

(1) $\sqrt{2}$ (2) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (3) 1 (4) 2

(16) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{3}{n^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2}\right)$ is

(1) $\dfrac{1}{2}$ (2) 0 (3) 1 (4) ∞

(17) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}-1}{x}=$

(1) 1 (2) e (3) $\dfrac{1}{e}$ (4) 0

(18) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\tan x}-e^x}{\tan x-x}=$

(1) 1 (2) e (3) $\dfrac{1}{2}$ (4) 0

(19) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\sqrt{x^2}}$ -ன் மதிப்பு

(1) 1 (2) – 1 (3) 0 (4) எல்லை மதிப்பு இல்லை

(20) $\lim\limits_{x\to k^-} x-\lfloor x\rfloor$ -ன் மதிப்பு இங்கு k

(1) – 1 (2) 1 (3) 0 (4) 2

(21) $x=\dfrac{3}{2}$ -ல் $f(x)=\dfrac{|2x-3|}{2x-3}$ என்பது

(1) தொடர்ச்சியானது (2) தொடர்ச்சியற்றது

(3) வகையிடத்தக்கது (4) பூஜ்ஜியமற்றது

03_9th Differential Calculus 1.indd 140 30-05-2022 14:54:23

(22) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ என்பது $f(x)=\begin{cases} x & ; x \text{ ஒரு விகிதமுறா எண்} \\ 1-x & ; x \text{ ஒரு விகிதமுறு எண்} \end{cases}$ எனில் f என்பது

(1) $x=\frac{1}{2}$ -ல் தொடர்ச்சியற்றது (2) $x=\frac{1}{2}$ -ல் தொடர்ச்சியானது

(3) எல்லா இடங்களிலும் தொடர்ச்சியானது (4) எல்லா இடங்களிலும் தொடர்ச்சியற்றது

(23) சார்பு $f(x)=\frac{x^2-1}{x^3+1}$, $x=-1$ஆல் வரையறுக்கப்படவில்லை. $f(-1)$-ன் எம்மதிப்பிற்கு இந்த சார்பு தொடர்ச்சியானதாக இருக்கும்.

(1) $\frac{2}{3}$ (2) $-\frac{2}{3}$ (3) 1 (4) 0

(24) f என்ற சார்பு [2, 5]–இல் தொடர்ச்சியானது என்க. x–ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் f விகிதமுறு மதிப்புகளை மட்டுமே பெறும். மேலும் $f(3)=12$ எனில் $f(4.5)$–ன் மதிப்பு

(1) $\frac{f(3)+f(4.5)}{7.5}$ (2) 12 (3) 17.5 (4) $\frac{f(4.5)-f(3)}{1.5}$

(25) f என்ற சார்பு $f(x)=\frac{x-|x|}{x}, x\neq 0$ என வரையறுக்கப்பட்டு $f(0)=2$ எனில் f என்பது

(1) எங்கும் தொடர்ச்சியானது அல்ல

(2) எல்லா இடங்களிலும் தொடர்ச்சியானது

(3) x = 1–ஐ தவிர எல்லா x மதிப்புகளுக்கும் தொடர்ச்சியானது

(4) x = 0 –ஐ தவிர எல்லா x மதிப்புகளுக்கும் தொடர்ச்சியானது

பாடத் தொகுப்பு

இப்பாடப்பகுதியில் நாம் கற்றுத் தெளிந்தவை

- x–ன் மதிப்பு x_0 -க்கு குறைவான மதிப்பிலிருந்து x_0 -ஐ நெருங்கும்போது $y=f(x)$ என்ற சார்பின் எல்லை மதிப்பு
- x–ன் மதிப்பு x_0 -க்கு அதிகமான மதிப்பிலிருந்து x_0 -ஐ நெருங்கும்போது $y=f(x)$ என்ற சார்பின் எல்லை மதிப்பு.
- x_0 -ஐ நீக்கிய x_0 -ன் அண்மைப்பகுதியில் x–ன் மதிப்பு x_0 -ஐ நெருங்கும்போது சார்பு f–ன் எல்லைமதிப்பு இருக்குமானால் $\lim_{x\to x_0^-} f(x)=L=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=\lim_{x\to x_0} f(x)=L$ என இருக்கும். இதன் மறுதலையும் உண்மை.
- $\lim_{x\to x_0} f(x)=L$ என்பது $x=x_0$ -ஐ தவிர x–ன் மதிப்பு x_0 -க்கு இருபுறமிருந்தும் x_0 -ஐ நெருங்கும்போது $f(x)$ –ன் மதிப்பு L –க்கு நெருங்குகின்றது.
- $\lim_{x\to x_0} f(x)$ மற்றும் $\lim_{x\to x_0} g(x)$ இருக்குமானால்

03_9th Differential Calculus 1.indd 141 30-05-2022 14:54:32

(i) $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\pm g(x)\right]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$,

(ii) $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x).g(x)\right]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x).\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$

(iii) $\lim\limits_{x\to x_0}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}$ எனில் $g(x)\neq 0$, $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)\neq 0$.

- $x\to x_0^-$ எனும்போது $f(x)\to\pm\infty$ அல்லது $x\to x_0^+$ எனும்போது $f(x)\to\pm\infty$ அல்லது $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=l_1\neq l_2=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ என இருக்குமானால், x-ன் மதிப்பு x_0 -ஐ நெருங்கும்போது $f(x)$-ன் எல்லை மதிப்பு இல்லை.
- (M,∞) என்பது $+\infty$ -ன் அண்மைப்பகுதி, $M>0$

  $(-\infty,K)$ என்பது $-\infty$ -ன் அண்மைப்பகுதி $K<0$.
- $x\to x_0$ எனும்போது $f(x)\to\pm\infty$ எனில் $x\to x_0$ என்று செங்குத்துத் தொலைத் தொடுகோடு ஆகும்.
- $x\to\infty$ எனும்போது $f(x)\to l_1$ அல்லது $x\to-\infty$ எனும்போது $f(x)\to l_2$ ஆகியவற்றில் ஒன்று உண்மை எனில் $y = f(x)$ என்ற வளைவரைக்கு $y=l_1$ (அ) l_2 என்ற கோடு கிடைமட்டத் தொலைத் தொடுகோடு ஆகும்.
- $f(x)$ தொடர்ச்சியானது எனில்

  (i) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$

  (ii) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0$

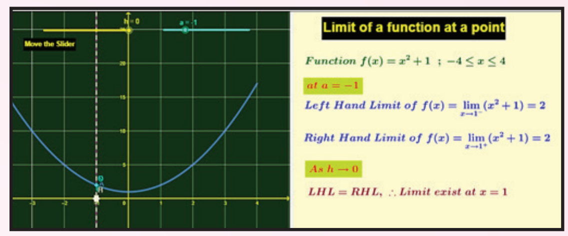
  (iii) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f\left(\lim\limits_{x\to x_0}x\right)$ இதன் மறுதலையும் உண்மை.
- துள்ளல் மற்றும் நீக்கக்கூடிய தொடர்ச்சியற்ற தன்மை.

03_9th Differential Calculus 1.indd 142 30-05-2022 14:54:42

இணையச் செயல்பாடு 9 (a)

வகை நுண்கணிதம்-எல்லைகள் மற்றும் தொடர்ச்சித் தன்மை

செயல்பாட்டின் இறுதியில் கிடைக்கப் பெறுவது



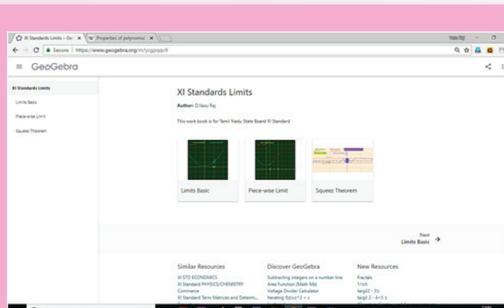
படி – 1

கீழ்க்காணும் உரலி / விரைவுக் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி GeoGebra-வின் "XI standard Limits" பக்கத்திற்குச் செல்க. உங்கள் பாடம் சார்ந்த பல பயிற்சித்தாள்கள் இப்பக்கத்தில் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும்..

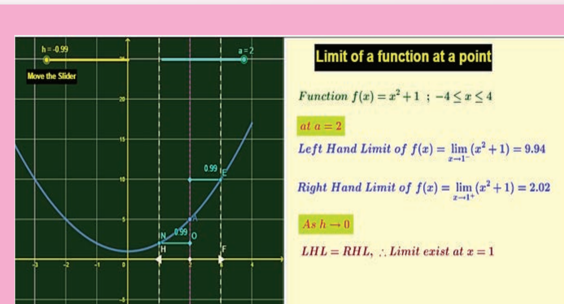
படி –2

"Limits basic" என்ற பயிற்சித் தாளைத் தேர்வு செய்க. தொடர் சார்பு கொடுக்கப்பட்டிருக்கும்.உங்களுக்கு வேண்டிய புள்ளியை நழுவல் 'a' நகர்த்தி தேர்வு செய்து கொள்ளலாம்.கோடு $x = h$ -ஐ நகர்த்தவும் (ஒரு புள்ளிக்கு அருகில்) இடது மற்றும் வலது பக்கம் இரு புறமும் f(h) -ஐ சரிபார்க்க நழுவல் "h"-ஐ நகர்த்தவும். புத்தகத்தில் உள்ள வரையறையுடன் ஒப்பிட்டு சரி பார்க்கவும்..

மேலும் புது வினாக்களுக்கு "New Problem" என்பதைத் தேர்வு செய்யவும்.



படி – 1



படி – 2

உரலி :

https://ggbm.at/ycgpqqv9

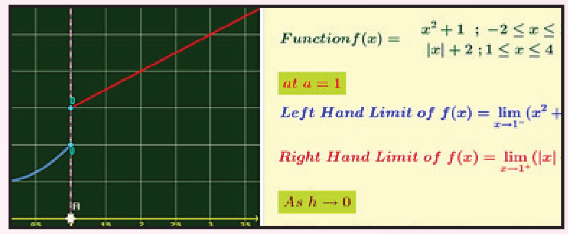
*படங்கள் அடையாளத்திற்கு மட்டும்.

03_9th Differential Calculus 1.indd 143 30-05-2022 14:54:42

இணையச் செயல்பாடு 9 (b)

வகை நுண்கணிதம்-எல்லைகள் மற்றும் தொடர்ச்சித் தன்மை

செயல்பாட்டின் இறுதியில் கிடைக்கப் பெறுவது

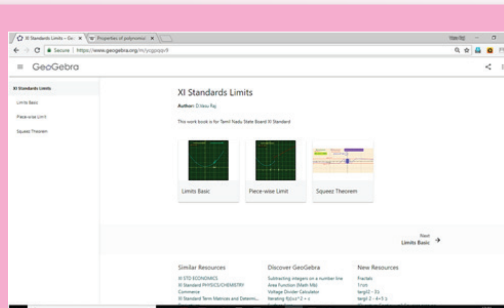


படி – 1

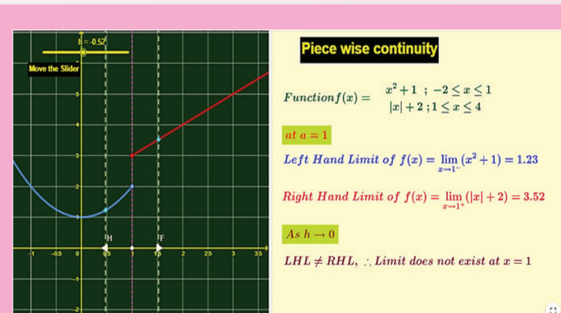
கீழ்க்காணும் உரலி / விரைவுக் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி GeoGebra–வின் XI " standard Limits" பக்கத்திற்குச் செல்க. உங்கள் பாடம் சார்ந்த பல பயிற்சித்தாள்கள் இப்பக்கத்தில் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும்.

படி – 2

"Piece–wise limit" என்ற பயிற்சித் தாளைத் தேர்வுசெய்க.கோடு $x = h$ –ஐ நகர்த்தவும் (ஒரு புள்ளிக்கு அருகில்) இடது மற்றும் வலதுபக்கம் இருபுறமும் f(h) –ஐ சரிபார்க்க நழுவல் "h"–ஐ நகர்த்தவும். புத்தகத்தில் உள்ள வரையறையுடன் ஒப்பிட்டுச் சரிபார்க்கவும்.



படி – 1



படி – 2

உரலி :

https://ggbm.at/ycgpqqv9

*படங்கள் அடையாளத்திற்கு மட்டும்.

03_9th Differential Calculus 1.indd 144 30-05-2022 14:54:43