Statistics may rightly be called as a science of averages.

– Sir A. L. Bowley

3

મધ્યવર્તી સ્થિતિનાં માપ
(Measures of Central Tendency)

વિષયવસ્તુ :

3.1 અર્થ

3.2 સારી સરેરાશનાં લક્ષણો

3.3 મધ્યક

3.3.1 અર્થ, લાભ અને ગેરલાભ

3.3.2 મિશ્ર મધ્યક અને ભારિત મધ્યક

3.3.3 ગુણોત્તર મધ્યક : અર્થ, લાભ અને ગેરલાભ

3.4 સ્થાનીય સરેરાશનાં માપ : મધ્યસ્થ, ચતુર્થકો, દશાંશકો, શતાંશકો

3.4.1 અર્થ, લાભ અને ગેરલાભ

3.5 બહુલક

3.5.1 અર્થ, લાભ અને ગેરલાભ

3.5.2 આલેખની રીત

3.6 મધ્યક, મધ્યસ્થ અને બહુલકનો તુલનાત્મક અભ્યાસ

3.1 અર્થ (Meaning)

ખૂબ જ વિસ્તૃત આંકડાશાસ્ત્રીય માહિતીને વર્ગીકરણ અથવા કોષ્ટક-રચના દ્વારા સુગઠિત કરી શકાય છે. તે આપેલ માહિતીનાં કેટલાંક લક્ષણો દર્શાવે છે. આપેલ માહિતી માટે દોરેલ આકૃતિઓ તથા આલેખો તેના વલણ તેમજ તરાહ (pattern) દર્શાવે છે. તે દૃશ્ય સ્વરૂપમાં માહિતીનું અર્થઘટન અને તુલના કરવા માટે મદદરૂપ થાય છે. વિશેષ આંકડાશાસ્ત્રીય વિશ્લેષણ માટે આપણને વધુ સંક્ષિપ્ત અને સંખ્યાત્મક પ્રતિનિધિત્વની જરૂર પડે છે. આ બાબતને આપણે એક ઉદાહરણ દ્વારા સમજીએ.

ધારો કે એક વ્યક્તિ તેના માસિક અંદાજપત્ર (budget)નું આયોજન કરે છે. દરેક વસ્તુ માટેનો ખર્ચ એવો ચલ છે જે વસ્તુના વપરાશનો જથ્થો અને તેની બજારકિંમત સાથે બદલાય છે. ધારો કે તેને દૂધ માટે ફાળવવાની રકમ નિશ્ચિત કરવાની છે. તેની પાસે પાછલા 10 મહિનાના દૂધના ખર્ચના આંકડા છે. તેના અંદાજપત્રમાં દૂધ પરના ખર્ચની રકમની જોગવાઈ કરવા માટે તેને આ માહિતી પરથી પ્રતિનિધિ સ્વરૂપે એક કિંમત મેળવવી છે.

માહિતીના એકથી વધુ સમૂહો માટે પ્રતિનિધિત્વ ધરાવતી કિંમતો તે સમૂહોની સરખામણી કરવા માટે અને આગળ જતાં ભવિષ્યના નિર્ણયો લેવા માટે ઉપયોગી થઈ શકે છે.

ઉદાહરણ તરીકે આપણે નીચેની પરિસ્થિતિ જોઈએ :

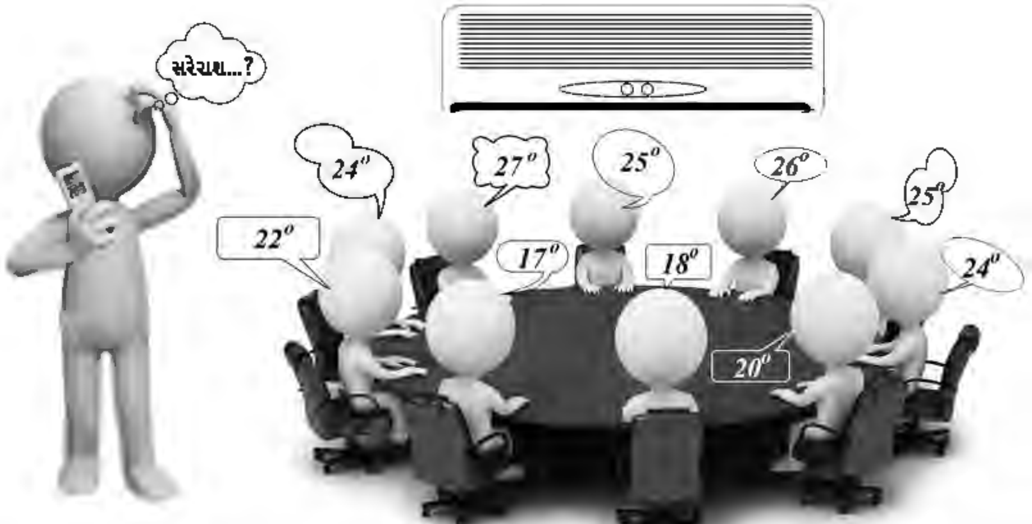
ધારો કે એક કંપનીને તેમણે ઉત્પાદિત કરેલી બે વસ્તુઓના વેચાણની સરખામણી કરવાની છે. વેચાણના આંકડા રોજબરોજ બદલાતા રહે છે. કંપની પાસે છેલ્લા 50 દિવસના વેચાણની માહિતી છે. આ માહિતીમાંથી મેળવેલ આવૃત્તિ-વિતરણો પરથી તે બે વસ્તુઓના વેચાણના તરાહની સરખામણી કરી શકાય છે પણ વિશેષ તારણો અને તુલના માટે તે કંપનીને તેમનાં બે ઉત્પાદનોના વેચાણની માહિતીનું વર્ણન કરતાં કોઈ ચોક્કસ માપોની જરૂર પડે છે.

જુદાં જુદાં આવૃત્તિ-વિતરણો માટે દોરેલા મોટા ભાગના આલેખોમાં આપણે એક સામાન્ય તરાહ જોઈ શકીએ કે ચલની કિંમતો કોઈ વિશિષ્ટ કેન્દ્રીય કિંમતની આસપાસ સંકલિત થાય છે. માહિતીના આ લક્ષણને મધ્યવર્તી સ્થિતિ (Central Tendency) કહેવાય છે. જે કેન્દ્રીય કિંમતની આસપાસ ચલની કિંમતો સંકલિત થાય છે તે કિંમતને મધ્યવર્તી સ્થિતિનું માપ (Measure of Central Tendency) અથવા સરેરાશ (Average) કહેવાય છે. આમ, સરેરાશને સમગ્ર માહિતી સમૂહના પ્રતિનિધિ તરીકે લઈ શકાય છે. આંકડાશાસ્ત્રીય વિશ્લેષણ, અર્થઘટન તથા તુલના કરવા માટે તેનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે.

આ રીતે કોઈ એક સરેરાશ

- આપેલ માહિતીને સંક્ષિપ્ત સ્વરૂપમાં રજૂ કરે છે.
- માહિતીનાં વિશિષ્ટ લક્ષણો દર્શાવે છે.
- બે અથવા તેથી વધુ માહિતી સમૂહોની તુલના કરવામાં મદદરૂપ થાય છે.

એકઠી કરેલ માહિતી માટે મધ્યવર્તી સ્થિતિનાં જુદાં જુદાં માપ મેળવી શકાય છે. માહિતીનો પ્રકાર, સરેરાશનો હેતુ અને આગળ તેના ઉપયોગો પર સરેરાશની પસંદગી આધારિત હોય છે.



3.2 સારા મધ્યવર્તી સ્થિતિનાં માપનાં લક્ષણો (Characteristics of Good Measure of Central Tendency)

નીચેનાં લક્ષણો ધરાવતી સરેરાશને આદર્શ સરેરાશ કહી શકાય છે :

(1) તે સ્પષ્ટ રીતે વ્યાખ્યાયિત અને ચોક્કસ હોવી જોઈએ.

(2) તે સમજવા માટે તેમજ ગણતરી કરવા માટે સરળ હોવી જોઈએ.

(3) તે માહિતીનાં બધાં જ અવલોકનો પર આધારિત હોવી જોઈએ.

(4) વિશેષ બૈજિક ક્રિયાઓ માટે તે અનુકૂળ હોવી જોઈએ.

(5) તે સ્થિર માપ હોવું જોઈએ. એટલે કે એક જ સમષ્ટિમાંથી સમાન કદના જુદા જુદા નિદર્શો લેવામાં આવે, તો દરેક નિદર્શમાંથી મળતી સરેરાશની કિંમત લગભગ સમાન હોવી જોઈએ.

(6) કેટલાક અતિ મોટાં અથવા અતિ નાનાં અવલોકનોની તેના પર વધુપડતી અસર ન થવી જોઈએ.

આપણે નીચેના મધ્યવર્તી સ્થિતિનાં માપોની ચર્ચા કરીશું જેનો માહિતીના પૃથક્કરણમાં વ્યાપક રીતે ઉપયોગ કરવામાં આવે છે.

(1) મધ્યક (2) મધ્યસ્થ અને અન્ય સ્થાનીય સરેરાશો (3) બહુલક.

3.3 સમાંતર મધ્યક (Arithmetic Mean) અથવા મધ્યક (Mean)

આ સૌથી વધુ પ્રચલિત સરેરાશ છે.

3.3.1 અર્થ (Meaning)

બધાં અવલોકનોના સરવાળાને અવલોકનોની કુલ સંખ્યા વડે ભાગવાથી મળતી કિંમતને સમાંતર મધ્યક અથવા મધ્યક તરીકે વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે છે.

ચલ x ના સમાંતર મધ્યકને $\bar{x}$ વડે દર્શાવવામાં આવે છે.

મધ્યકની ગણતરી :

અવર્ગીકૃત માહિતી માટે :

ધારો કે માહિતીમાં n અવલોકનો $x_1, x_2, ..., x_n$ છે, તો સમાંતર મધ્યક $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$

$$= \frac{\Sigma x_i}{n}$$

જ્યાં $\Sigma x_i = x_1 + x_2 + ... + x_n$ = અવલોકનો $x_1, x_2, ..., x_n$ નો સરવાળો

અને n = અવલોકનોની સંખ્યા

નોંધ : દાખલાઓની ગણતરી કરતી વખતે સરળતા ખાતર આપણે અનુગ (Suffix) i ને મૂકીશું નહિ. જેમકે x_i ને બદલે x, d_i ને બદલે d અને f_i ને બદલે f મૂકીશું.

ઉદાહરણ 1 : નીચેની માહિતી એક ગેરેજમાં દરરોજ સમારકામ કરેલા સ્કૂટરોની સંખ્યા દર્શાવે છે. રોજના સમારકામ કરેલાં સ્કૂટરોની સંખ્યાનો મધ્યક શોધો :

7, 13, 4, 8, 6, 9, 10, 4

અહીં $n = 8$

$$\text{મધ્યક } \bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_8}{8}$$

$$= \frac{7 + 13 + 4 + 8 + 6 + 9 + 10 + 4}{8}$$

$$= \frac{61}{8}$$

$$= 7.625$$

$$\approx 7.63$$

આમ, આ ગેરેજમાં દરરોજના સમારકામ કરેલાં સ્કૂટરોનો મધ્યક 7.63 છે.

ટૂંકી રીત :

જો અવલોકનોની કિંમતો ખૂબ મોટી હોય તો ધારેલ મધ્યક (Assumed mean) A નો ઉપયોગ કરીને ગણતરી સરળ બનાવી શકાય છે. A કોઈ એક એવો અચલ છે જે બધાં અવલોકનોના મધ્યની આસપાસ હોય તેવું ઇચ્છનીય છે. અવલોકનો $x_1, x_2, ..., x_n$ માંથી ધારેલ મધ્યક A બાદ કરવામાં આવે છે અને તેવા તફાવતોને $d_1, d_2, ..., d_n$ વડે દર્શાવવામાં આવે છે.

$$d_1 = x_1 - A,\ d_2 = x_2 - A,\ ...,\ d_n = x_n - A$$

મધ્યક $\bar{x}$ નીચે પ્રમાણે મેળવવામાં આવે છે :

$$\bar{x} = A + \frac{\Sigma d_i}{n}$$

જ્યાં A = ધારેલ મધ્યક

$\Sigma d_i = d_1 + d_2 + ... + d_n$

અને n = અવલોકનોની સંખ્યા

નોંધ : Aની કિંમતની જુદી જુદી પસંદગીથી મધ્યકની કિંમત બદલાતી નથી.

ઉદાહરણ 2 : એક જિલ્લાનાં 10 જુદાં જુદાં સ્થળો પર થયેલો વરસાદ (મિમિમાં) નીચે પ્રમાણે નોંધવામાં આવેલ છે :

126, 110, 91, 115, 112, 80, 101, 93, 97, 113

વરસાદનો મધ્યક શોધો.

અહીં અવલોકનોની કિંમતો મોટી હોવાથી આપણે મધ્યકની ગણતરી ટૂંકી રીતે કરીશું. તેમાં ધારેલ મધ્યક A = 100 લઈશું. નીચેના કોષ્ટકમાં અવલોકનો x અને તફાવતો $d = x - A$ દર્શાવેલ છે.

વરસાદ (મિમિ) x	126	110	91	115	112	80	101	93	97	113	કુલ
$d = x - A$, A=100	26	10	–9	15	12	–20	1	–7	–3	13	**38**

અહીં $n = 10$

$$\text{મધ્યક } \bar{x} = A + \frac{\Sigma d}{n}$$

$$= 100 + \frac{38}{10}$$

$$= 100 + 3.8$$

$$= 103.8$$

આમ, વરસાદનો મધ્યક 103.8 મિમિ છે.

ઉદાહરણ 3 : 20 વ્યક્તિઓના જૂથમાં તેમના વજનનો મધ્યક 55 કિગ્રા મેળવવામાં આવ્યો હતો. ત્યાર બાદ માલૂમ પડ્યું કે તે પૈકી એકે તેણીનું વજન 45 કિગ્રા નોંધાવ્યું હતું, જે ખરેખર 54 કિગ્રા હતું. તેમના વજનનો સાચો મધ્યક શોધો.

અહીં $\bar{x} = 55$ અને $n = 20$

$$\text{મધ્યક } \bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = 55$$

$$\therefore \quad \frac{\Sigma x}{20} = 55$$

$$\therefore \quad \Sigma x = 55 \times 20 = 1100$$

આમ, અવલોકનોનો સરવાળો 1100 છે, જેમાં સાચી કિંમત 54 ને બદલે ખોટી કિંમત 45 નો સમાવેશ થયેલ છે.

અવલોકનોનો સાચો સરવાળો શોધવા માટે આપણે સરવાળાની ઉપર મેળવેલ કિંમતમાંથી ખોટું અવલોકન બાદ કરીશું અને સાચું અવલોકન ઉમેરીશું.

$\therefore$ સુધારેલ $\Sigma x = 1100 - 45 + 54$

$= 1109$

$\therefore$ સાચો મધ્યક $= \dfrac{\text{સુધારેલ } \Sigma x}{n}$

$= \dfrac{1109}{20}$

$= 55.45$

આમ, વજનનો સાચો મધ્યક 55.45 કિગ્રા છે.

વર્ગીકૃત માહિતી માટે :

અસતત આવૃત્તિ-વિતરણ માટે :

ધારો કે આપેલ માહિતીમાં અવલોકનો $x_1, x_2, ..., x_k$ માટેની આવૃત્તિઓ અનુક્રમે $f_1, f_2, ..., f_k$ છે.

અહીં n = અવલોકનોની કુલ સંખ્યા

$= f_1 + f_2 + ... + f_k = \Sigma f_i$

x_1ની આવૃત્તિ f_1 છે એટલે કે અવલોકન x_1નું પુનરાવર્તન f_1 વખત થાય છે. બધાં x_1 અવલોકનોનો સરવાળો $f_1 \times x_1$ એટલે કે $f_1\ x_1$ થશે. તે જ રીતે બધાં x_2 અવલોકનોનો સરવાળો $f_2\ x_2$ થશે અને આ રીતે આગળ વધી શકાય.

મધ્યક $\bar{x} = \dfrac{\text{બધાંઅવલોકનોનો સરવાળો}}{\text{અવલોકનોની કુલ સંખ્યા}}$

$= \dfrac{f_1x_1 + f_2x_2 + ... + f_kx_k}{n}$

$= \dfrac{\Sigma f_i x_i}{n}$

જ્યાં $\Sigma f_i\ x_i = f_1\ x_1 + f_2\ x_2 + ... + f_k\ x_k$

ઉદાહરણ 4 : એક વિસ્તારમાં કુટુંબદીઠ બાળકોની સંખ્યા નીચેના કોષ્ટકમાં દર્શાવેલ છે. કુટુંબદીઠ બાળકોની સંખ્યાનો મધ્યક શોધો.

બાળકોની સંખ્યા	0	1	2	3	4	5
કુટુંબોની સંખ્યા	4	8	23	8	6	3

અહીં આપણી પાસે ચલ x ની $k = 6$ કિંમતો છે.

મધ્યક શોધવાની ગણતરી નીચેના કોષ્ટકમાં દર્શાવેલ છે :

બાળકોની સંખ્યા x	**કુટુંબોની સંખ્યા** f	fx
0	4	0
1	8	8
2	23	46
3	8	24
4	6	24
5	3	15
કુલ	$n = 52$	**117**

મધ્યક $\bar{x} = \frac{\Sigma fx}{n}$

$= \frac{117}{52}$

$= 2.25$

આમ, કુટુંબદીઠ બાળકોની સંખ્યાનો મધ્યક 2.25 છે.

ટૂંકી રીત :

અગાઉ અવર્ગીકૃત માહિતી માટે દર્શાવેલ પદ્ધતિ મુજબ ગણતરી સરળ બનાવવા માટે ધારેલ મધ્યક A ની અનુકૂળ કિંમત પસંદ કરી શકાય છે અને અવલોકનો $x_1, x_2, ..., x_k$ના Aમાંથી તફાવતો મેળવી શકાય. ઉપરાંત, જો આ તફાવતોમાં કોઈ સામાન્ય અવયવ c હોય, તો બધા તફાવતોને c વડે ભાગવાથી આપણે ગણતરીને વધુ સરળ બનાવી શકીએ છીએ.

આમ, આપણને $d_1 = \frac{x_1 - A}{c}$, $d_2 = \frac{x_2 - A}{c}$, ..., $d_k = \frac{x_k - A}{c}$ ની કિંમતો મળશે.

હવે મધ્યકનું સૂત્ર નીચે પ્રમાણે લખવામાં આવે છે :

મધ્યક $\bar{x} = A + \frac{\Sigma f_i d_i}{n} \times c$

જ્યાં $\Sigma f_i d_i = f_1 d_1 + f_2 d_2 + ... + f_k d_k$

અને n = અવલોકનોની કુલ સંખ્યા

$= f_1 + f_2 + ... + f_k = \Sigma f_i$

નોંધ : A અને c ની કિંમતોની જુદી જુદી પસંદગીથી મધ્યકની કિંમત બદલાતી નથી.

ઉદાહરણ 5 : એક બસનો બે શહેરો વચ્ચેનો જુદા જુદા દિવસ લેવાયેલ પ્રવાસનો સમય (મિનિટોમાં) નીચેના કોષ્ટકમાં દર્શાવેલ છે :

સમય (મિનિટ)	110	113	120	122	126
દિવસોની સંખ્યા	7	17	11	10	5

પ્રવાસના સમયનો મધ્યક શોધો.

અહીં અવલોકનોની કિંમતો મોટી છે. આપણે ધારેલ મધ્યક $A = 120$ લઈશું.

Aમાંથી લીધેલ તફાવતો 110 – 120 = – 10, 113 – 120 = –7, 120 – 120 = 0, 122 – 120 = 2, 126 – 120 = 6 હશે.

તેમાં 1 સિવાય કોઈ અન્ય સામાન્ય અવયવ નથી. તેથી $c = 1$ લઈશું.

આમ, આપણે $d = \frac{x - A}{c} = \frac{x - 120}{1} = x - 120$ લઈશું.

મધ્યકની ગણતરી નીચે પ્રમાણે થશે :

સમય (મિનિટ) x	**દિવસોની સંખ્યા** f	$d = x - A$, $A = 120$	fd
110	7	– 10	– 70
113	17	– 7	– 119
120	11	0	0
122	10	2	20
126	5	6	30
કુલ	$n = 50$		**– 139**

મધ્યક $\bar{x} = A + \frac{\Sigma fd}{n} \times c$

$= 120 + \frac{(-139)}{50} \times 1$

$= 120 - 2.78$

$= 117.22$

આમ, બસના પ્રવાસ માટેના સમયનો મધ્યક 117.22 મિનિટ છે.

ઉદાહરણ 6 : શહેરના એક વિસ્તારમાં એક વસ્તુની કિંમત દુકાને દુકાને બદલાય છે. તેની નીચેની માહિતી પ્રાપ્ય છે. તે વિસ્તારમાં વસ્તુની કિંમતનો મધ્યક શોધો.

કિંમત (₹)	206	212	218	220	224	230
દુકાનોની સંખ્યા	5	8	9	14	3	1

અવલોકનોની કિંમતો મોટી હોવાથી આપણે મધ્યકની ગણતરી ટૂંકી રીતે કરીશું, તેમાં $A = 220$ પસંદ કરીશું. બધાં અવલોકનોના A માંથી લીધેલા તફાવતો –14, –8, –2, 0, 4, 10 હશે. આ તફાવતોમાં મહત્તમ સામાન્ય અવયવ $c = 2$ છે.

તેથી આપણે $d = \frac{x-A}{c} = \frac{x-220}{2}$ લઈશું.

મધ્યકની ગણતરી :

કિંમત (₹) x	**દુકાનોની સંખ્યા** f	$d = \frac{x-A}{c}$ $A = 220, c = 2$	fd
206	5	–7	–35
212	8	–4	–32
218	9	–1	–9
220	14	0	0
224	3	2	6
230	1	5	5
કુલ	$n = 40$		**–65**

મધ્યક $\bar{x} = A + \frac{\Sigma fd}{n} \times c$

$= 220 + \frac{(-65)}{40} \times 2$

$= 220 + \frac{(-130)}{40}$

$= 220 - 3.25$

$= 216.75$

આમ, વસ્તુની કિંમતનો મધ્યક ₹ 216.75 છે.

સતત આવૃત્તિ-વિતરણ માટે :

જ્યારે આપણે માહિતીનું રૂપાંતર સતત આવૃત્તિ-વિતરણમાં કરીએ છીએ, ત્યારે દરેક આવૃત્તિ તે વર્ગમાં આવતાં અવલોકનોની સંખ્યા દર્શાવે છે. પરંતુ તે વર્ગમાં આવતાં અવલોકનોની કિંમતો આપણે જાણતા નથી. તેથી તે વર્ગની દરેક કિંમત માટે પ્રતિનિધિ સ્વરૂપે તે વર્ગની મધ્યકિંમત લેવાય છે.

દાખલા તરીકે, ધારો કે અનિવારક વર્ગ 0 – 5 ની આવૃત્તિ 7 છે. આ 7 અવલોકનોની સાચી કિંમત આપણે જાણતા નથી તેથી તે વર્ગનાં બધાં જ 7 અવલોકનો માટે મધ્યકિંમત 2.5 ધારવામાં આવે છે, જ્યાં તેમની સાચી કિંમત 0 થી 5 સુધીની કોઈ પણ સંખ્યા હોઈ શકે છે.

દરેક વર્ગની મધ્યકિંમતને ચલ xની કિંમતો તરીકે લઈને અસતત આવૃત્તિ-વિતરણ માટે અગાઉ વર્ણન કરેલ રીતના ઉપયોગથી મધ્યક મેળવી શકાય.

આમ, મધ્યકની ગણતરી નીચે મુજબ થશે :

મધ્યક $\bar{x} = A + \frac{\Sigma f_i d_i}{n} \times c$

જ્યાં A = ધારેલ મધ્યક

c = તફાવતો $x_i - A$ નો સામાન્ય અવયવ

$d_i = \frac{x_i - A}{c}$

f_i = મધ્યકિંમત x_i ધરાવતા વર્ગની આવૃત્તિ

$\Sigma f_i d_i = f_1 d_1 + f_2 d_2 + ... + f_k d_k$

n = અવલોકનોની કુલ સંખ્યા

$= f_1 + f_2 + ... + f_k = \Sigma f_i$

ઉદાહરણ 7 : નીચેની માહિતી એક ફેક્ટરીમાં કામ કરતા મજૂરોની માસિક આવક (₹ માં) દર્શાવે છે. તેમની આવકનો મધ્યક શોધો.

આવક (₹)	2000 - 3000	3000 - 4000	4000 - 5000	5000 - 6000	6000 - 7000	7000 - 8000	8000 - 9000
મજૂરોની સંખ્યા	2	3	7	15	25	16	12

આપણે સૌપ્રથમ દરેક વર્ગની મધ્યકિંમત મેળવીએ.

$$\text{મધ્યકિંમત} = \frac{\text{વર્ગની ઊર્ધ્વસીમા + વર્ગની અધઃ સીમા}}{2}$$

આ મધ્યકિંમતો 2500, 3500, 4500, 5500, 6500, 7500, 8500 છે. આપણે A = 5500 લઈશું.

તફાવતો $x - A$ અનુક્રમે –3000, –2000, –1000, 0,1000, 2000, 3000 થશે. આ તફાવતોમાં મહત્તમ સામાન્ય અવયવ c = 1000 હોવાથી આપણે $d = \frac{x-A}{c} = \frac{x-5500}{1000}$ લઈશું.

મધ્યકની ગણતરી નીચેના કોષ્ટકમાં દર્શાવેલ છે :

આવક (₹)	મજૂરોની સંખ્યા f	મધ્યકિંમત x	$d = \frac{x-A}{c}$ $A = 5500, c = 1000$	fd
2000 - 3000	2	2500	–3	–6
3000 - 4000	3	3500	–2	–6
4000 - 5000	7	4500	–1	–7
5000 - 6000	15	5500	0	0
6000 - 7000	25	6500	1	25
7000 - 8000	16	7500	2	32
8000 - 9000	12	8500	3	36
કુલ	$n = 80$			**74**

મધ્યક $\bar{x} = A + \frac{\Sigma fd}{n} \times c$

$= 5500 + \frac{74}{80} \times 1000$

$= 5500 + \frac{74000}{80}$

$= 5500 + 925$

$= 6425$

આમ, આ મજૂરોની માસિક આવકનો મધ્યક ₹ 6425 છે.

ઉદાહરણ 8 : એક ઝાડ પરથી મળેલી કેરીઓનું વજન (ગ્રામમાં) નીચે પ્રમાણે છે. ઉપરાંત આ કેરીઓમાં ન્યૂનતમ વજન 410 ગ્રામ છે. કેરીઓના વજનનો મધ્યક શોધો.

કેરીનું વજન (ગ્રામ)	420થી ઓછું	430થી ઓછું	440થી ઓછું	450થી ઓછું	460થી ઓછું	470થી ઓછું
કેરીઓની સંખ્યા	14	34	76	130	165	180

આ કોષ્ટકમાં 'થી ઓછી' પ્રકારની સંચયી આવૃત્તિ દર્શાવેલ છે. ક્રમાનુસાર વર્ગોની આવૃત્તિઓ બાદ કરતા આપણે આ સંચયી આવૃત્તિઓ પરથી દરેક વર્ગની આવૃત્તિ મેળવીશું. પ્રથમ વર્ગની અધઃસીમા 410 ગ્રામ આપેલ છે.

આમ, નીચે મુજબનું આવૃત્તિ-વિતરણ મળશે :

કેરીનું વજન (ગ્રામ)	410 - 420	420 - 430	430 - 440	440 - 450	450 - 460	460 - 470
કેરીઓની સંખ્યા	14	20	42	54	35	15

વર્ગોની મધ્યકિંમતો 415, 425, ..., 465 છે.

જો આપણે $A = 435$ લઈએ તો મળતા તફાવતોની કિંમતો –20, –10, ..., 30માં મહત્તમ સામાન્ય અવયવ $c = 10$ છે.

તેથી આપણે $d = \frac{x-A}{c} = \frac{x-435}{10}$ લઈશું.

મધ્યકની ગણતરી નીચે પ્રમાણે છે :

કેરીનું વજન (ગ્રામ)	કેરીઓની સંખ્યા f	મધ્યકિંમત x	$d = \frac{x-A}{c}$ $A = 435, c = 10$	fd
410 - 420	14	415	–2	–28
420 - 430	20	425	–1	–20
430 - 440	42	435	0	0
440 - 450	54	445	1	54
450 - 460	35	455	2	70
460 - 470	15	465	3	45
કુલ	$n = 180$			**121**

મધ્યક $\bar{x} = A + \frac{\Sigma fd}{n} \times c$

$= 435 + \frac{121}{180} \times 10$

$= 435 + \frac{1210}{180}$

$= 435 + 6.7222$

$= 441.7222$

≈ 441.72

આમ, આ કેરીઓના વજનનો મધ્યક 441.72 ગ્રામ છે.

પ્રવૃત્તિ

ઉપર આપેલ દાખલા માટે $A = 415$ લો અને c ની યોગ્ય કિંમત લઈને મધ્યક શોધો.

હવે, $A = 440$ લો અને તફાવતો મેળવો. મહત્તમ સામાન્ય અવયવ c કેટલો છે ? A અને c ની આ કિંમતો લઈને ફરીથી મધ્યક મેળવો.

જુઓ કે મધ્યકના બધા જવાબો સમાન છે.

ઉદાહરણ 9 : કોઈ એક ઝોનમાં આવેલી જુદી જુદી કંપનીઓના વાર્ષિક વેચાણવેરાનું વિતરણ નીચે આપેલ છે. કંપનીઓના વેચાણવેરાનો મધ્યક શોધો :

વેચાણવેરો (હજાર ₹)	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 50	50 - 70
કંપનીઓની સંખ્યા	3	14	32	40	21

આ વિતરણમાં વર્ગલંબાઈ સમાન નથી. વર્ગોની મધ્યકિંમતો 5, 15, 25, 40, 60 છે. $A = 25$ લેતાં વિચલનોની કિંમતો –20, –10, 0, 15, 35 આવશે, જેમાં મહત્તમ સામાન્ય અવયવ $c = 5$ છે. તેથી આપણે $d = \frac{x-A}{c} = \frac{x-25}{5}$ લઈશું.

મધ્યકની ગણતરી નીચેના કોષ્ટકમાં દર્શાવેલ છે :

વેચાણવેરો (હજાર ₹)	**કંપનીઓની સંખ્યા f**	**મધ્યકિંમત x**	$d = \frac{x - A}{c}$ $A = 25, c = 5$	fd
0 - 10	3	5	–4	–12
10 - 20	14	15	–2	–28
20 - 30	32	25	0	0
30 - 50	40	40	3	120
50 - 70	21	60	7	147
	$n = 110$			**227**

મધ્યક $\bar{x} = A + \frac{\Sigma fd}{n} \times c$

$= 25 + \frac{227}{110} \times 5$

$= 25 + \frac{1135}{110}$

$= 25 + 10.3182$

$= 35.3182$

≈ 35.32

આમ, વેચાણવેરાનો મધ્યક ₹ 35.32 હજાર છે.

મધ્યકના લાભ અને ગેરલાભ :

લાભ :

નીચેના લાભોને કારણે મધ્યક એ મધ્યવર્તી સ્થિતિનું સૌથી વધુ પ્રચલિત માપ છે.

(1) તે ચોક્કસ રીતે વ્યાખ્યાયિત થયેલ છે. તેનું એક નિશ્ચિત ગાણિતિક સૂત્ર છે.

(2) તે સમજવા માટે તેમજ ગણતરીમાં સરળ છે.

(3) તે બધાં અવલોકનો પર આધારિત છે.

(4) વિશેષ બૈજિક ક્રિયાઓ માટે તે અનુકૂળ છે.

(5) તે પ્રમાણમાં વધુ સ્થિર માપ છે. આનો અર્થ એ કે એક જ સમષ્ટિમાંથી લીધેલા સમાન કદના નિદર્શોનાં મધ્યકોમાં પ્રમાણમાં ઓછું વિચલન હોય છે.

(6) મધ્યકની ગણતરીમાં બધાં અવલોકનોને સરખું મહત્ત્વ આપવામાં આવે છે.

ગેરલાભ :

મધ્યકને મધ્યવર્તી સ્થિતિના માપ તરીકે ઉપયોગમાં લેતા પહેલાં તેના નીચેના ગેરલાભ પણ જાણવા જોઈએ.

(1) તેના પર અતિ મોટાં અને અતિ નાનાં અવલોકનોની અસર વધુ પડતી થાય છે.

(2) ખુલ્લા છેડાના વર્ગો (open ended classes) ધરાવતી માહિતીમાં તેની ગણતરી કરી શકાતી નથી.

(3) આલેખ વડે અથવા નિરીક્ષણ વડે તેની ચોક્કસ કિંમત મેળવી શકાતી નથી.

(4) જો અમુક અવલોકનો ખૂટતાં હોય તો મધ્યકની ચોક્કસ કિંમત શોધી શકાતી નથી.

(5) સરેરાશની આસપાસ સમાન રીતે વિતરિત ન થયેલી માહિતી માટે મધ્યક આપેલ માહિતીનું એટલું સારું પ્રતિનિધિત્વ ધરાવતો નથી.

(6) જો અવલોકનોનું મહત્ત્વ જુદું જુદું હોય તો સરેરાશ તરીકે મધ્યકનો ઉપયોગ કરવો યોગ્ય નથી.

મધ્યક માટેના કેટલાંક અગત્યનાં પરિણામો :

(1) અવલોકનોના મધ્યકમાંથી લીધેલ વિચલનોનો સરવાળો હંમેશાં શૂન્ય હોય છે. સાંકેતિક રીતે વિચલનોને $x_i - \bar{x}$ વડે દર્શાવવામાં આવે છે અને તેથી $\Sigma (x_i - \bar{x}) = 0$

દાખલા તરીકે 4 કિંમતો 1, 7, 5, 3 લઈએ.

તેમનો મધ્યક $\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{1+7+5+3}{4} = \frac{16}{4} = 4$

નીચેના કોષ્ટકમાં મધ્યકમાંથી લીધેલ વિચલનો દર્શાવેલ છે :

x	1	7	5	3	કુલ
$(x - \bar{x})$	–3	3	1	–1	$\Sigma (x - \bar{x}) = 0$

અન્ય કોઈપણ કિંમતમાંથી લીધેલ વિચલનોનો સરવાળો શૂન્ય થશે નહિ.

પ્રવૃત્તિ

ઉપર આપેલ અવલોકનોના 5 માંથી લીધેલાં વિચલનો શોધો. તેનો સરવાળો કેટલો છે ? શું તે શૂન્ય છે ?

હવે, મધ્યક સિવાયની તમારી પસંદગીની કોઈ પણ કિંમત લો અને ચકાસો કે આ કિંમતમાંથી લીધેલાં વિચલનોનો સરવાળો શૂન્ય નથી.

(2) જો $x_1, x_2, \ldots, x_n$ માંથી દરેક અવલોકનને કોઈ શૂન્યેતર અચલ b વડે ગુણવામાં આવે અને તે ગુણાકારમાં અન્ય કોઈ અચલ a ઉમેરવામાં આવે તો આપણને અવલોકનોનો નવો સમૂહ મળશે. આપણે આ કિંમતોને $y_1, y_2, \ldots, y_n$ વડે દર્શાવીશું, જ્યાં $y_1 = bx_1 + a,\ y_2 = bx_2 + a, \ldots, y_n = bx_n + a$

$y_1, y_2, \ldots, y_n$ નો મધ્યક $\bar{y} = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_n}{n}$

જો આપણને ચલ x નો મધ્યક $\bar{x}$ જ્ઞાત હોય, તો y નો મધ્યક $\bar{y}$ શોધવા માટે $\bar{y} = b\bar{x} + a$ આ સૂત્રનો ઉપયોગ કરી શકીએ.

પ્રવૃત્તિ

તમારા ઘરના આજુબાજુના 10 પડોશીઓની ઉંમર x નોંધો અને તેનો મધ્યક $\bar{x}$ શોધો. તે બધાની બે વર્ષ પછી ઉંમર કેટલી હશે ? તમે ગણેલા આંકડા y નો મધ્યક $\bar{y}$ શોધો. અહીં દરેક વ્યક્તિની 2 વર્ષ પછીની ઉંમર $y = x + 2$ થશે. જુઓ કે $\bar{y} = \bar{x} + 2$

સ્વાધ્યાય 3.1

1. એક નર્સરીમાં વાવેલા છોડની સપ્તાહદીઠ વૃદ્ધિ (સેમીમાં) નીચે પ્રમાણે છે :
   1.0, 3.2, 1.4, 1.9, 2.4, 1.6, 1.4, 2.1, 1.3, 1.5
   છોડની વૃદ્ધિનો મધ્યક શોધો.
2. એક રીલે રેસમાં 4 સ્પર્ધકોની ઉંમરનો મધ્યક 24 વર્ષ ગણવામાં આવ્યો હતો. પાછળથી માલૂમ પડ્યું હતું કે એક સ્પર્ધકની ઉંમર ખરેખર 27 વર્ષ હતી તે 25 વર્ષ એમ ખોટી નોંધવામાં આવી હતી. જો ઉંમરનો મધ્યક 25 વર્ષથી વધારે હોય તો સ્પર્ધામાં ભાગ લઈ શકે નહિ એવો નિયમ હોય તો તેઓ ઉંમરનો સુધારો કર્યા પછી પણ સ્પર્ધામાં ભાગ લઈ શકશે ?
3. એક મોટા જથ્થામાંથી પસંદ કરેલ વિવિધ સ્ક્રૂના વ્યાસ (મિમિમાં) નીચેના કોષ્ટકમાં આપેલ છે. સ્ક્રૂના વ્યાસનો મધ્યક શોધો.

સ્ક્રૂનો વ્યાસ (મિમિ)	30	35	40	45	50	55
સ્ક્રૂની સંખ્યા	4	10	15	8	5	3

4. વિદ્યાર્થીઓના એક સમૂહના એક કસોટીના ગુણ નીચે મુજબ છે. વિદ્યાર્થીઓના ગુણનો મધ્યક શોધો.

ગુણ	0 – 10	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50	50 – 60	60 – 70
વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા	3	5	12	16	11	5	4

5. એક મોબાઇલ ધારકના નોંધાયેલા 254 કૉલની વાતચીતના સમય (Talk time)ની માહિતી નીચે પ્રમાણે મળે છે. તેના વાતચીતના સમયનો મધ્યક શોધો.

વાતચીતનો સમય (મિનિટ)	4થી ઓછી	8થી ઓછી	12થી ઓછી	16થી ઓછી	20થી ઓછી
કૉલની સંખ્યા	20	42	57	65	70

6. 50 પેઢીના છેલ્લા વર્ષમાં થયેલા નફા (લાખ ₹માં)ની વિગત નીચે આપેલી છે. નફાનો મધ્યક શોધો.

નફો (લાખ ₹)	0–7	7–14	14–21	21–28	28–35
પેઢીની સંખ્યા	4	9	18	12	7

7. એક વસ્તુની વિવિધ દિવસોની માંગનું વિતરણ નીચે પ્રમાણે છે. માંગનો મધ્યક શોધો.

માંગ (એકમો)	5–14	15–24	25–34	35–49	50–64	65–79
દિવસોની સંખ્યા	4	17	19	22	18	10

*

3.3.2 મિશ્ર મધ્યક અને ભારિત મધ્યક :

મિશ્ર મધ્યક (Combined Mean) :

જો આપણને બે કે તેથી વધુ સમૂહોનાં મધ્યકો જ્ઞાત હોય તો આપણે તેના સંયુક્ત સમૂહનો મધ્યક મેળવી શકીએ છીએ. આવી કિંમતને મિશ્ર મધ્યક કહેવાય છે. તેને ($\bar{x}_c$) વડે દર્શાવવામાં આવે છે. ધારો કે n_1, n_2,.....n_k અવલોકનો ધરાવતા k સમૂહોના મધ્યકો અનુક્રમે, $\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_k$ છે.

મિશ્ર મધ્યકનું સૂત્ર નીચે પ્રમાણે છે :

$$\bar{x}_c = \frac{n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2 + ... + n_k\bar{x}_k}{n_1 + n_2 + ... + n_k}$$

ઉદાહરણ 10. એક ફેક્ટરી માલિકને ખબર છે કે જાન્યુઆરીથી માર્ચ સુધીના માસિક ઉત્પાદનનો મધ્યક 350 એકમો છે. એપ્રિલ થી ઑગસ્ટ માટે તે 254 એકમો છે અને સપ્ટેમ્બરથી ડિસેમ્બર માટે તે 315 એકમો છે. તે વર્ષ માટે માસિક ઉત્પાદનનો મધ્યક શોધો.

અહીં $n_1 = 3$ માસ, $n_2 = 5$ માસ, $n_3 = 4$ માસ,

$\bar{x}_1 = 350$, $\bar{x}_2 = 254$ $\bar{x}_3 = 315$

મિશ્ર મધ્યક $\bar{x}_c = \frac{n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2 + n_3\bar{x}_3}{n_1 + n_2 + n_3}$

$$= \frac{3(350) + 5(254) + 4(315)}{3 + 5 + 4}$$

$$= \frac{1050 + 1270 + 1260}{12}$$

$$= \frac{3580}{12}$$

$$= 298.3333$$

$$\approx 298.33$$

આમ, તે વર્ષ માટે માસિક ઉત્પાદનનો મધ્યક 298.33 એકમો છે.

ઉદાહરણ 11. એક ઑફિસમાં સ્ત્રીઓ અને પુરુષ કર્મચારીઓનું પ્રમાણ 1:2 છે. સ્ત્રીઓ અને પુરુષોની ઉંમરના મધ્યકો અનુક્રમે 34 વર્ષ અને 37 વર્ષ હોય, તો ઑફિસના બધા કર્મચારીઓની ઉંમરનો મધ્યક શોધો.

ધારો કે, સ્ત્રીઓની સંખ્યા = a છે. સ્ત્રી અને પુરુષ કર્મચારીઓની સંખ્યાનું પ્રમાણ 1:2 હોવાથી પુરુષોની સંખ્યા = $2a$ થશે. $\bar{x}_1 = 34$ અને $\bar{x}_2 = 37$

મિશ્ર મધ્યક $\bar{x}_c = \frac{n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2}{n_1 + n_2}$

$$= \frac{a(34) + 2a(37)}{a + 2a}$$

$$= \frac{34a + 74a}{3a}$$

$$= \frac{108a}{3a}$$

$$= 36$$

આમ, ઑફિસના બધા કર્મચારીઓની ઉંમરનો મધ્યક 36 વર્ષ છે.

ઉદાહરણ 12 : એક ક્રિકેટ મૅચમાં એક ટીમને મૅચ જીતવા માટે 20 ઓવરમાં 5.25 રનરેટથી સ્કોર કરવો પડે તેમ છે. 13 ઓવરના અંતે રનરેટ 5.1 છે. મેચ જીતવા માટે બાકીની ઓવરોમાં ઓછામાં ઓછો રનરેટ કેટલો હોવો જોઈએ ?

આપણે જાણીએ છીએ કે રનરેટ $= \frac{\text{કુલ રનની સંખ્યા}}{\text{કુલ ઓવરની સંખ્યા}}$

= રનનો મધ્યક

આમ, રનરેટને રનના મધ્યક તરીકે લઈશું.

અહીં $n_1 = 13$, $n_2 = 7$ $\bar{x}_c$ = કુલ 20 ઓવરનો રનરેટ

= 5.25

$\bar{x}_1$ = પ્રથમ તેર ઓવરનો રનરેટ = 5.1

મિશ્ર મધ્યક $\bar{x}_c = \frac{n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2}{n_1 + n_2}$

$$\therefore \quad 5.25 = \frac{13(5.1) + 7\bar{x}_2}{13 + 7}$$

$$\therefore \quad 5.25 = \frac{66.3 + 7\bar{x}_2}{20}$$

$$\therefore \quad 5.25 \times 20 = 66.3 + 7\bar{x}_2$$

$$\therefore \quad 105 = 66.3 + 7\bar{x}_2$$

$$\therefore \quad 7\bar{x}_2 = 105 - 66.3 = 38.7$$

$$\therefore \quad \bar{x}_2 = \frac{38.7}{7}$$

$$= 5.5286$$

$$\approx 5.53$$

આમ, મૅચ જીતવા માટે તે ટીમનો છેલ્લી 7 ઓવરોમાં ઓછામાં ઓછો 5.53 રનરેટ હોવો જોઈએ.

ભારિત મધ્યક (Weighted Mean) :

આપણે કહ્યું કે માહિતીનાં બધાં અવલોકનોનું મહત્ત્વ સરખું ન હોય તો સમાંતર મધ્યકનો ઉપયોગ કરવો યોગ્ય નથી. આવી પરિસ્થિતિમાં એક વિશેષ મધ્યક શોધવામાં આવે છે જેને ભારિત મધ્યક કહેવાય છે. ભારિત મધ્યકને $\bar{x}_w$ વડે દર્શાવાય છે. દરેક અવલોકનને તેના મહત્ત્વના પ્રમાણમાં એક સંખ્યાત્મક કિંમત આપવામાં આવે છે જેને ભાર (Weight) કહેવાય છે. સૌથી વધુ મહત્ત્વ ધરાવતા અવલોકનને મહત્તમ ભાર અપાય છે.

ધારો કે અવલોકનો $x_1, x_2, ..., x_n$ ને આપવામાં આવેલા ભાર અનુક્રમે $w_1, w_2, ..., w_n$ છે.

તો ભારિત મધ્યકનું સૂત્ર નીચે પ્રમાણે થશે :

ભારિત મધ્યક $\bar{x}_w = \dfrac{w_1x_1 + w_2x_2 + ... + w_nx_n}{w_1 + w_2 + ... + w_n}$

$= \dfrac{\Sigma w_i x_i}{\Sigma w_i}$

અહીં $\Sigma w_i x_i = w_1 x_1 + w_2 x_2 + ... + w_n x_n$

અને $\Sigma w_i = w_1 + w_2 + ... + w_n$

= ભારનો સરવાળો

ઉદાહરણ 13 : એક વિદ્યાર્થીને થિયરી પેપરમાં 35 ગુણ, પ્રેક્ટિકલ પરીક્ષામાં 15 ગુણ અને મૌખિક પરીક્ષામાં 5 ગુણ મળ્યા છે. તે શાળામાં આ પ્રકારની પરીક્ષાઓને અનુક્રમે 4, 2 અને 1 ભાર આપવામાં આવે છે. વિદ્યાર્થીના ગુણનો ભારિત મધ્યક શોધો.

અહીં $x_1 = 35$, $x_2 = 15$, $x_3 = 5$ અને

$w_1 = 4$, $w_2 = 2$, $w_3 = 1$

ભારિત મધ્યક $\bar{x}_w = \dfrac{w_1x_1 + w_2x_2 + w_3x_3}{w_1 + w_2 + w_3}$

$= \dfrac{4(35) + 2(15) + 1(5)}{4 + 2 + 1}$

$= \dfrac{140 + 30 + 5}{7}$

$= \dfrac{175}{7}$

$= 25$

આમ, વિદ્યાર્થીના ગુણનો ભારિત મધ્યક 25 ગુણ છે.

સ્વાધ્યાય 3.2

1. એક ફેક્ટરીના 75 કુશળ કારીગરોને આપવામાં આવતા દૈનિક વેતનનો મધ્યક ₹ 280 છે, જ્યારે 125 બિનકુશળ કારીગરોના દૈનિક વેતનનો મધ્યક ₹ 150 છે. બધા કારીગરોના વેતનનો મધ્યક શોધો.

2. નીચેની માહિતી પરથી ભાવ આધારિત ટકાવારી ફેરફારોનો ભારિત મધ્યક શોધો :

ખોરાકની વસ્તુ	ચોખા	ઘઉં	ચા	ખાંડ	કઠોળ
ભાર	7	10	5	8	2
ભાવનો ટકાવારી ફેરફાર	134	125	115	97	120

3. એક ઑફિસમાં કામ કરતા 2 ઑફિસર, 10 ક્લાર્ક અને 3 પટાવાળા સ્ટાફ પિકનિક માટે ફાળો આપે છે. દરેક વ્યક્તિનો ફાળો નીચેના કોષ્ટકમાં આપેલ છે :

ઑફિસર	ક્લાર્ક	પટાવાળા
₹ 1000	₹ 500	₹ 200

ભારિત મધ્યકનો ઉપયોગ કરીને વ્યક્તિદીઠ ફાળાનો મધ્યક શોધો.

4. એક વિદ્યાર્થીને 7 થિયરી પેપરમાં મળતા ગુણનો મધ્યક 62 છે. 3 પ્રેક્ટિકલ પરીક્ષાઓમાં તેના ગુણનો મધ્યક કેટલો હોવો જોઈએ કે જેથી સંપૂર્ણ પરીક્ષામાં તેના ગુણનો મધ્યક 68 થાય ?
(પ્રત્યેક થિયરી પેપર અને પ્રેક્ટિકલ પરીક્ષાના ગુણ સરખા છે.)

*

3.3.3 ગુણોત્તર મધ્યક (Geometric Mean) :

ધારો કે આપણે સમય સાથે બદલાતા કોઈ ચલનો અભ્યાસ કરીએ છીએ. જો આપણે ચલના ફેરફારોનો સરેરાશ દર શોધવો હોય, તો સમાંતર મધ્યકનો ઉપયોગ કરવો યોગ્ય નથી.

આપણે એક ઉદાહરણ વડે આ બાબત સમજીએ.

ધારો કે એક વસ્તુની કિંમત ₹ 200 છે. જો એક મહિના પછી ભાવમાં 50 % વધારો અને બીજા મહિના પછી 25 % વધારો થયો હોય, તો ક્રમાનુસાર આવતા મહિનાઓમાં તેનો ભાવ $200 \times \frac{150}{100} = 300$ અને $300 \times \frac{125}{100} = 375$ ₹ થશે.

જો આપણે બે મહિનાના ટકાવારી ભાવની સરેરાશ સમાંતર મધ્યકનો ઉપયોગ કરીને મેળવીએ તો તે $\frac{150+125}{2} = 137.5$ થશે.

આ સરેરાશનો ઉપયોગ કરીને આપણે 2 મહિના પછીનો ભાવ શોધીએ તો તે $200 \times \frac{137.5}{100} \times \frac{137.5}{100} = 378.18$ ₹ થશે જેની કિંમત અગાઉ ગણેલ ₹ 375 જેટલી નથી.

અહીં એક બીજી સરેરાશ વધુ યોગ્ય નીવડે છે જેને ગુણોત્તર મધ્યક કહેવાય છે.

n ધન અવલોકનોના ગુણાકારના n મા મૂળને ગુણોત્તર મધ્યક કહેવાય છે અને તેને G વડે દર્શાવાય છે.

આમ, n અવલોકનો $x_1, x_2, ..., x_n$ માટે

ગુણોત્તર મધ્યક $G = \sqrt[n]{x_1 \times x_2 \times ... \times x_n}$

ઉપરના ઉદાહરણ માટે આપણે ગુણોત્તર મધ્યક શોધીશું. 150 અને 125 આ બે સંખ્યા જે ટકાવારી ભાવ દર્શાવે છે તેનો $G = \sqrt{150 \times 125} = 136.93$ થાય છે.

હવે આ સરેરાશનો ઉપયોગ કરીને બે મહિના પછીની વસ્તુની કિંમત $200 \times \frac{136.93}{100} \times \frac{136.93}{100} = 375$ ₹ થશે જે આપણે અગાઉ ગણેલ કિંમત જેટલી છે.

નોંધ : જો આપેલ ચલમાં p % વધારો થયો હોય તો વધેલી કિંમત ટકાવારીમાં $(100 + p)$ લખીશું જ્યારે આપેલ કિંમત p % ઘટતી હોય તો ઘટેલી કિંમત ટકાવારીમાં $(100 - p)$ લખીશું.

દાખલા તરીકે જો કોઈ મહિનામાં વસ્તુની કિંમત 20 % ઘટી હોય તો તે માસને અંતે તેની કિંમત ટકાવારીમાં $(100 - 20) = 80$ લેવાશે.

નોંધ : આપેલ અવલોકનો $x_1, x_2, ..., x_n$ માટે સમાંતર મધ્યકની કિંમત હંમેશાં ગુણોત્તર મધ્યક જેટલી અથવા તેનાથી વધુ હોય છે. એટલે કે $\bar{x} \geq G$

જો બધાં અવલોકનોની કિંમત સરખી હોય તો જ $\bar{x} = G$ થાય છે.

ઉદાહરણ 14 : એક વિસ્તારની વસ્તીમાં ચાર વર્ષોમાં અનુક્રમે 15 %, 18 %, 13 %, 20 % વધારો થયો છે. વસ્તીના વધારાની સરેરાશ મેળવો.

અહીં, વસ્તીના વધારાની કિંમતો ટકાવારીમાં આપી હોવાથી આપણે સરેરાશ માટે ગુણોત્તર મધ્યક વાપરીશું.

વસ્તીના વધારાની ટકાવારી ધ્યાનમાં લેતા આપણને અવલોકનો નીચે મુજબ મળશે.

$x_1 = 100 + 15 = 115 \qquad x_2 = 100 + 18 = 118,$

$x_3 = 100 + 13 = 113 \qquad x_4 = 100 + 20 = 120$

$$G = \sqrt[4]{x_1 \times x_2 \times x_3 \times x_4}$$

$$= \sqrt[4]{115 \times 118 \times 113 \times 120}$$

$$= \sqrt[4]{184009200}$$

$$= \sqrt{13564.9991}$$

$$= 116.4689$$

$$\approx 116.47$$

આમ, આ ચાર વર્ષમાં થયેલ વસ્તીવધારાની સરેરાશ 16.47 % છે.

નોંધ : અહીં 4 થું મૂળ શોધવા માટે 184009200 નું વર્ગમૂળ મેળવેલ છે અને તેનું ફરી વર્ગમૂળ લીધેલ છે. આ જ રીતે 8 મું મૂળ શોધવા માટે વર્ગમૂળની પ્રક્રિયા ત્રણ વખત કરવી પડે.

ઉદાહરણ 15 : બે સંખ્યાઓનો ગુણોત્તર મધ્યક 2 છે. જો એક સંખ્યા બીજી સંખ્યાની 4 ગણી હોય, તો તે સંખ્યાઓ શોધો.

ધારો કે નાની સંખ્યા $x_1 = a$ છે.

તો તેનાથી 4 ગણી હોય તેવી બીજી સંખ્યા $x_2 = 4a$ થશે.

$$G = 2$$

$$G = \sqrt{x_1 \times x_2}$$

$$\therefore \quad 2 = \sqrt{a \times 4a}$$

$$\therefore \quad 2 = \sqrt{4a^2}$$

$$\therefore \quad 2 = 2a$$

$$\therefore \quad a = 1$$

આમ, પ્રથમ સંખ્યા $x_1 = a = 1$ અને બીજી સંખ્યા $x_2 = 4a = 4$ મળે છે.

ઉદાહરણ 16 : બે સંખ્યાઓ 9 અને 16 ના સમાંતર મધ્યક અને ગુણોત્તર મધ્યક શોધો અને ચકાસો કે $\bar{x} > G$.

અહીં $x_1 = 9$, $x_2 = 16$ અને $n = 2$

સમાંતર મધ્યક $\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{9+16}{2} = \frac{25}{2} = 12.5$

ગુણોત્તર મધ્યક $G = \sqrt{x_1 \times x_2} = \sqrt{9 \times 16} = \sqrt{144} = 12$

$\bar{x} = 12.5$ અને $G = 12$ હોવાથી $\bar{x} > G$

ગુણોત્તર મધ્યકના લાભ :

(1) તે ચોક્કસ રીતે વ્યાખ્યાયિત થયેલ છે.

(2) તે બધાં અવલોકનો પર આધારિત છે.

(3) વિશેષ બૈજિક ક્રિયાઓ માટે તે સુયોગ્ય છે.

(4) તેના પર અતિ મોટાં અને અતિ નાનાં અવલોકનોની અસર પ્રમાણમાં ઓછી થાય છે.

ગુણોત્તર મધ્યકના ગેરલાભ :

(1) જો બધાં અવલોકનોની કિંમત ધન હોય તો જ ગુણોત્તર મધ્યક શોધી શકાય છે.

(2) તેની ગણતરી અઘરી છે.

(3) જો અવલોકનોની સંખ્યા વધારે હોય તો તેની ગણતરી વધુ અઘરી થાય છે.

પ્રવૃત્તિ

1, 7, 5, 100 કિંમતોનો સમાંતર મધ્યક અને ગુણોત્તર મધ્યક શોધો.
કઈ સરેરાશ વધુ યોગ્ય ગણાય ? કેમ ?

સ્વાધ્યાય 3.3

(1) નીચેની માહિતી એક વર્ગના 8 વિદ્યાર્થીઓએ પાછલા મહિનામાં વાંચેલાં પુસ્તકોની સંખ્યા દર્શાવે છે.
2, 1, 5, 9, 1, 3, 2, 4
ગુણોત્તર મધ્યકનો ઉપયોગ કરીને વાંચેલાં પુસ્તકોની સંખ્યાની સરેરાશ મેળવો.

(2) એક મશીનની કિંમતમાં તેના પહેલા ચાર વર્ષોમાં અનુક્રમે 10 % , 7 %, 5 % અને 2 %ના દરે ઘસારો થાય છે. ઘસારાની સરેરાશ યોગ્ય રીતે શોધો.

(3) એક ટેક્સીએ સોમવારે 15 કિમી અને મંગળવારે 254 કિમીનો પ્રવાસ કર્યો છે. આ બે દિવસોમાં પ્રવાસ કરેલા અંતરની સરેરાશ ગુણોત્તર મધ્યકનો ઉપયોગ કરીને મેળવો.

3.4 સ્થાનીય સરેરાશનાં માપ (Measures of Positional Average)

મધ્યસ્થ, ચતુર્થકો, દશાંશકો, શતાંશકો :

આપણે જોયું કે જો અવલોકનો સરેરાશની આસપાસ સમાન રીતે વિતરિત થયા હોય અને તેમાં અતિ મોટાં અને અતિ નાનાં અવલોકનો ન હોય તો મધ્યક યોગ્ય સરેરાશ ગણાય. જો આ શરતો લાગુ ન પડતી હોય તો મધ્યક વડે આપેલ માહિતીનાં અવલોકનોનું એટલું સારું પ્રતિનિધિત્વ થતું નથી તેમ કહેવાય છે. આવી પરિસ્થિતિમાં એક અન્ય સરેરાશ વધુ યોગ્ય માપ છે જેને મધ્યસ્થ કહેવાય છે. આ એક સ્થાનીય માપ છે. મધ્યસ્થ ઉપરાંત ચતુર્થકો, દશાંશકો અને શતાંશકો પણ સ્થાનીય માપ છે.

3.4.1 અર્થ

આપેલ ચલની કિંમતોને ક્રમમાં ગોઠવતાં કોઈ એક ચોક્કસ સ્થાન પર આવતા અવલોકનનો ઉપયોગ કરીને મધ્યસ્થ, ચર્તુથકો, દશાંશકો અને શતાંશકોની કિંમત શોધવામાં આવતી હોવાથી આ સરેરાશોને સ્થાનીય સરેરાશો કહેવાય છે.

મધ્યસ્થ (Median) :

આપેલ માહિતીને ચઢતા કે ઊતરતા ક્રમમાં ગોઠવતાં તેના મધ્યમાં આવેલ અવલોકનની કિંમતને મધ્યસ્થ તરીકે વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે છે. તેને M વડે દર્શાવાય છે. બીજી રીતે કહીએ તો માહિતીમાંથી 50 % અવલોકનોની કિંમત મધ્યસ્થથી વધુ હોય છે અને 50 % અવલોકનો મધ્યસ્થથી ઓછી કિંમત ધરાવતાં હોય છે.

મધ્યસ્થની ગણતરી :

અવર્ગીકૃત માહિતી માટે :

આપણે મધ્યમાં આવેલી કિંમત શોધવાની હોવાથી અવલોકનોને ચઢતા અથવા ઊતરતા ક્રમમાં ગોઠવવાં પડે છે.

n અવલોકનો $x_1, x_2, \dots, x_n$ નો મધ્યસ્થ નીચે મુજબ શોધવામાં આવે છે :

$$\text{મધ્યસ્થ } M = \left(\frac{n+1}{2}\right) \text{ મા અવલોકનની કિંમત}$$

દાખલા તરીકે, આપેલ માહિતીમાં 15 અવલોકનો હોય તો $\left(\frac{15+1}{2}\right)$ એટલે કે 8 મું અવલોકન કેન્દ્રમાં આવશે જેને મધ્યસ્થ કહેવાય છે.

ધારો કે આપેલ માહિતીમાં 20 અવલોકનો છે તો $\frac{n+1}{2} = \frac{20+1}{2} = 10.5$ થવાથી 10 મું અને 11 મું આ બંને અવલોકનો કેન્દ્રમાં છે એમ કહેવાય. આ કિસ્સામાં આ બે કેન્દ્રીય કિંમતોના મધ્યકને મધ્યસ્થ તરીકે લેવાય છે.

ઉદાહરણ 17 : જુદા જુદા સપ્તાહમાં એક ફેક્ટરીમાં ઉત્પાદન થયેલ એકમોની સંખ્યા 80, 85, 90, 92, 68, 80, 72, 63, 55 છે. ઉત્પાદનનો મધ્યસ્થ મેળવો.

ચઢતા ક્રમમાં ગોઠવેલ અવલોકનો નીચે પ્રમાણે છે :

55, 63, 68, 72, 80, 80, 85, 90, 92

અહીં $n = 9$

મધ્યસ્થ $M = \left(\frac{n+1}{2}\right)$મા અવલોકનની કિંમત

$= \left(\frac{9+1}{2}\right)$મા અવલોકનની કિંમત

= 5મા અવલોકનની કિંમત

= 80

આમ, આ ફેક્ટરીના ઉત્પાદનનો મધ્યસ્થ 80 એકમો છે.

ઉદાહરણ 18 : એક ફેરિયાના છેલ્લા 10 દિવસનો નફો (₹માં) નીચે આપેલ છે. નફાનો મધ્યસ્થ શોધો.

261.5, 257, 258.5, 260, 265, 249, 255.5, 262.5, 264, 267

ચઢતા ક્રમમાં ગોઠવતાં આ અવલોકનો નીચે પ્રમાણે આવશે :

249, 255.5, 257, 258.5, 260, 261.5, 262.5, 264, 265, 267

મધ્યસ્થ $M = \left(\frac{n+1}{2}\right)$મા અવલોકનની કિંમત

$= \left(\frac{10+1}{2}\right)$મા અવલોકનની કિંમત

= 5.5મા અવલોકનની કિંમત

$= \frac{\text{5મા અવલોકનની કિંમત + 6ઠ્ઠા અવલોકનની કિંમત}}{2}$

$= \frac{260+261.5}{2}$

= 260.75

આમ, ફેરિયાના દૈનિક નફાનો મધ્યસ્થ ₹ 260.75 છે.

ઉદાહરણ 19 : એક ઑફિસમાં 11 કર્મચારીઓ છે. આમાંથી સૌથી ઓછો પગાર ધરાવતા 7 કર્મચારીઓના માસિક પગાર (₹ માં) 4500, 2100, 3400, 3600, 2500, 4200, 1500 છે. બધા કર્મચારીઓના માસિક પગારનો મધ્યસ્થ કેટલો છે ?

આપેલ માહિતીમાં કેટલાંક અવલોકનો અજ્ઞાત છે. આપણને સૌથી વધુ પગાર ધરાવતાં 4 કર્મચારીઓના પગારની કિંમતો આપેલી નથી.

ધારો કે, તેની કિંમતો ચઢતા ક્રમમાં અનુક્રમે *a, b, c, d* છે. આ ચાર કિંમતો આપેલ અવલોકનો કરતાં મોટી છે કારણ કે તે સૌથી વધુ પગાર ધરાવતા કર્મચારીઓના પગારની કિંમતો છે.

હવે આપણે આ માહિતીને ચઢતા ક્રમમાં ગોઠવીશું. 1500, 2100, 2500, 3400, 3600, 4200, 4500, *a, b, c, d.*

અહીં, $n = 11$

મધ્યસ્થ $M = \left(\frac{n+1}{2}\right)$મા અવલોકનની કિંમત

$= \left(\frac{11+1}{2}\right)$મા અવલોકનની કિંમત

= 6ઠ્ઠા અવલોકનની કિંમત

= 4200

આમ, આ કર્મચારીઓમાં પગારનો મધ્યસ્થ ₹ 4200 છે.

વર્ગીકૃત માહિતી માટે :

અસતત આવૃત્તિ-વિતરણ માટે :

ધારો કે એક ચલની કિંમતો $x_1, x_2, ..., x_k$ માટે આવૃત્તિઓ અનુક્રમે $f_1, f_2, ..., f_k$ છે.

આવૃત્તિ-વિતરણમાં અવલોકનો સામાન્ય રીતે ચઢતા ક્રમમાં ગોઠવેલાં હોય છે. ચઢતા ક્રમમાં ગોઠવેલાં અવલોકનોના આવૃત્તિ વિતરણ માટે મધ્યસ્થ શોધવા માટે આપણે સંચયી આવૃત્તિનો ઉપયોગ કરીશું.

અહીં મધ્યસ્થ નીચે પ્રમાણે શોધવામાં આવે છે :

મધ્યસ્થ $M = \left(\frac{n+1}{2}\right)$મા અવલોકનની કિંમત

જ્યાં $n = f_1 + f_2 + ... + f_k = \Sigma f_i$ = અવલોકનોની કુલ સંખ્યા

ઉદાહરણ 20 : એક મહિનામાં એક વર્ગમાં ગેરહાજર રહેલા વિદ્યાર્થીઓની નોંધ નીચેના કોષ્ટકમાં દર્શાવેલ છે. વિદ્યાર્થીદીઠ ગેરહાજર દિવસોની સંખ્યાનો મધ્યસ્થ શોધો.

વિદ્યાર્થીના ગેરહાજર દિવસોની સંખ્યા	0	1	2	3	4	5
વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા	8	12	18	9	5	1

આપણે નીચે દર્શાવ્યા પ્રમાણે સંચયી આવૃત્તિ-વિતરણ મેળવીશું :

ગેરહાજર દિવસોની સંખ્યા x	0	1	2	3	4	5	કુલ
વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા f	8	12	18	9	5	1	53
સંચયી આવૃત્તિ cf	8	20	38	47	52	53	–

અહીં $n = \Sigma f = 53$

મધ્યસ્થ $M = \left(\frac{n+1}{2}\right)$મા અવલોકનની કિંમત

$= \left(\frac{53+1}{2}\right)$મા અવલોકનની કિંમત

= 27મા અવલોકનની કિંમત

સંચયી આવૃત્તિ પરથી જાણી શકાય કે 21માથી 38મા અવલોકનોની કિંમત 2 છે.

તેથી 27 મા અવલોકનની કિંમત 2 છે. $\therefore$ મધ્યસ્થ $M = 2$ દિવસો

આમ, વિદ્યાર્થીદીઠ ગેરહાજર દિવસોની સંખ્યાનો મધ્યસ્થ 2 દિવસ છે.

ઉદાહરણ 21 : જુદા જુદા ટાઇપિસ્ટોને એક રિપોર્ટ ટાઇપ કરવા માટે લાગેલો સમય નીચેની માહિતીમાં આપેલ છે તે પરથી ટાઇપિંગના સમયનો મધ્યસ્થ શોધો :

ટાઇપિંગનો સમય (મિનિટ)	10	11	12	13	14
ટાઇપિસ્ટોની સંખ્યા	5	7	8	15	5

આપણે નીચે દર્શાવ્યા પ્રમાણે સંચયી આવૃત્તિ-વિતરણ મેળવીશું :

ટાઇપિંગનો સમય x	10	11	12	13	14
ટાઇપિસ્ટોની સંખ્યા f	5	7	8	15	5
સંચયી આવૃત્તિ cf	5	12	20	35	40

અહીં $n = \Sigma f = 40$

આ અસતત આવૃત્તિ-વિતરણના અવલોકનો ચઢતા ક્રમમાં નીચે મુજબ છે. 10, 10, 10, 10, 10, 11, 11,11, 11, 11, 11, 11, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, **12, 13,** 13, 13, ... ઉપર્યુક્ત અવલોકનોનું નિરીક્ષણ કરતાં જોઈ શકાય કે 20.5મું અવલોકન 12 અને 13ની સરેરાશ છે.

મધ્યસ્થ $M = \left(\frac{n+1}{2}\right)$મા અવલોકનની કિંમત

$= \left(\frac{40+1}{2}\right)$મા અવલોકનની કિંમત

$= 20.5$મા અવલોકનની કિંમત

$= \frac{\text{20મા અવલોકનની કિંમત + 21મા અવલોકનની કિંમત}}{2}$

સંચયી આવૃત્તિઓ પરથી જાણી શકાય કે 13મા થી 20મા અવલોકનોની કિંમતો 12 છે અને 21મા અવલોકનથી 35મા અવલોકનોની કિંમત 13 છે.

તેથી 20મા અને 21મા અવલોકનોની કિંમતો અનુક્રમે 12 અને 13 છે.

$\therefore \quad M = \frac{12+13}{2}$

$= 12.5$

આમ, ટાઈપિંગના સમયનો મધ્યસ્થ 12.5 મિનિટ છે.

સતત આવૃત્તિ-વિતરણ માટે :

સતત આવૃત્તિ-વિતરણમાં ચલની કિંમતો વર્ગોના સ્વરૂપમાં આપેલી હોય છે અને તે સામાન્ય રીતે ચઢતા ક્રમમાં ગોઠવેલી હોય છે. આવા કિસ્સાઓમાં મધ્યસ્થ શોધવા માટે આપણે સંચયી આવૃત્તિઓનો ઉપયોગ કરીશું. આ સંચયી આવૃત્તિઓ તે ચલનો મધ્યસ્થ કયા વર્ગમાં આવે છે તે દર્શાવશે. તે માટે આપણે મધ્યસ્થનો વર્ગ $= \left(\frac{n}{2}\right)$મા અવલોકનનો વર્ગ લઈશું.

જ્યાં $n = f_1 + f_2 + \dots + f_k = \Sigma f_i$ = અવલોકનોની કુલ સંખ્યા

અહીં મધ્યસ્થ શોધવા માટે નીચેના સૂત્રનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે :

$$\text{મધ્યસ્થ } M = L + \frac{\frac{n}{2} - cf}{f} \times c$$

જ્યાં L = મધ્યસ્થના વર્ગનું અધઃ સીમાબિંદુ

cf = મધ્યસ્થ વર્ગના અગાઉના વર્ગની સંચયી આવૃત્તિ

f = મધ્યસ્થ વર્ગની આવૃત્તિ

c = મધ્યસ્થ વર્ગની વર્ગલંબાઈ

ઉદાહરણ 22 : એક બૅન્કમાં દર દિવસે ભરાયેલા ચેકની સંખ્યાનું આવૃત્તિ-વિતરણ નીચે પ્રમાણે છે :

ચેકની સંખ્યા	**0 - 39**	**40 - 79**	**80 - 119**	**120 - 159**	**160 - 199**
દિવસોની સંખ્યા	2	14	23	7	4

ભરાયેલા ચેકની સંખ્યાનો મધ્યસ્થ શોધો.

આપણે નીચે દર્શાવ્યા પ્રમાણે સંચયી આવૃત્તિ-વિતરણ મેળવીશું :

ચેકની સંખ્યા	**0 - 39**	**40 - 79**	**80 - 119**	**120 - 159**	**160 - 199**
દિવસોની સંખ્યા	2	14	23	7	4
સંચયી આવૃતિ	2	16	39	46	50

અહીં $n = \Sigma f = 50$

મધ્યસ્થનો વર્ગ= $\left(\frac{n}{2}\right)$મા અવલોકનનો વર્ગ

= $\left(\frac{50}{2}\right)$મા અવલોકનનો વર્ગ

= 25મા અવલોકનનો વર્ગ

સંચયી આવૃત્તિઓ પરથી જાણી શકાય કે 17મા અવલોકનથી 39મા અવલોકન સુધી બધાં જ અવલોકનો વર્ગ 80 - 119માં છે માટે તે મધ્યસ્થ વર્ગ થશે.

આ અનિવારક પ્રકારનું વર્ગીકરણ હોવાથી આપણે વર્ગસીમા પરથી વર્ગનાં સીમાબિંદુઓ મેળવીશું. તેથી મધ્યસ્થ વર્ગ 79.5 - 119.5 લેવાશે.

હવે, $L = 79.5$, $cf = 16$, $f = 23$, $c = 40$ લેતાં,

$$\text{મધ્યસ્થ } M = L + \frac{\left(\frac{n}{2}\right) - cf}{f} \times c$$

$$= 79.5 + \frac{25-16}{23} \times 40$$

$$= 79.5 + \frac{9}{23} \times 40$$

$$= 79.5 + \frac{360}{23}$$

$$= 79.5 + 15.6522$$

$$= 95.1522$$

$$= 95.15$$

આમ, દર દિવસે બેન્કમાં ભરાયેલા ચેકનો મધ્યસ્થ 95.15 છે.

ઉદાહરણ 23 : 75 કુટુંબોના પેટ્રોલના માસિક ખર્ચની માહિતી નીચેના કોષ્ટકમાં આપેલ છે. આ કુટુંબોમાં પેટ્રોલના ખર્ચનો મધ્યસ્થ શોધો.

પેટ્રોલનો ખર્ચ (₹)	200 સુધી	400 સુધી	600 સુધી	800 સુધી	1000 સુધી	1200 સુધી
કુટુંબોની સંખ્યા	2	8	17	32	57	75

અહીં સંચયી આવૃત્તિઓ આપેલ છે. આપણે આવૃત્તિ-વિતરણ મેળવીશું.

ખર્ચ (₹)	200 સુધી	200 - 400	400 - 600	600 - 800	800 - 1000	1000 - 1200
કુટુંબોની સંખ્યા	2	6	9	15	25	18
સંચયી આવૃત્તિ cf	2	8	17	32	57	75

અહીં $n = \Sigma f = 75$

મધ્યસ્થ વર્ગ = $\left(\frac{n}{2}\right)$મા અવલોકનનો વર્ગ

= $\left(\frac{75}{2}\right)$મા અવલોકનનો વર્ગ

= 37.5મા અવલોકનનો વર્ગ

સંચયી આવૃત્તિ પરથી જાણી શકાય કે, 37મું અને 38મું એવાં બંને અવલોકનો વર્ગ 800 - 1000માં સમાયેલા છે. તેથી મધ્યસ્થ વર્ગ 800 - 1000 થશે.

હવે, $L = 800$, $cf = 32$, $f = 25$, $c = 200$ લેતાં

મધ્યસ્થ $M = L + \frac{\frac{n}{2} - cf}{f} \times c$

$= 800 + \frac{37.5 - 32}{25} \times 200$

$= 800 + \frac{5.5}{25} \times 200$

$= 800 + \frac{1100}{25}$

$= 800 + 44$

$= 844$

આમ, આ કુટુંબોના માસિક પેટ્રોલના ખર્ચનો મધ્યસ્થ ₹ 844 છે.

ઉદાહરણ 24 : એક શહેરમાં જુદા જુદા દિવસે માપેલું હવાના પ્રદૂષણનું સ્તર (*ppm*માં) નીચે પ્રમાણે છે. પ્રદૂષણના સ્તરનો મધ્યસ્થ શોધો :

પ્રદૂષણનું સ્તર (*ppm*)	**250 કે તેથી વધુ**	**270 કે તેથી વધુ**	**290 કે તેથી વધુ**	**310 કે તેથી વધુ**	**320 કે તેથી વધુ**	**330 કે તેથી વધુ**	**340 કે તેથી વધુ**
દિવસોની સંખ્યા	150	133	108	76	41	20	7

અહીં 'થી વધુ' પ્રકારનું સંચયી આવૃત્તિ-વિતરણ આપેલ છે. આપણે તે પરથી આવૃત્તિ-વિતરણ તેમજ 'થી ઓછા' પ્રકારની સંચયી આવૃત્તિઓ પણ મેળવીશું.

પ્રદૂષણનું સ્તર	**250 - 270**	**270 - 290**	**290 - 310**	**310 - 320**	**320 - 330**	**330 - 340**	**340 કે તેથી વધુ**
દિવસોની સંખ્યા	17	25	32	35	21	13	7
સંચયી આવૃત્તિ *cf*	17	42	74	109	130	143	150

$n = \Sigma f = 150$. અહીં, અસમાન વર્ગલંબાઈ છે.

મધ્યસ્થ વર્ગ $= \left(\frac{n}{2}\right)$મા અવલોકનનો વર્ગ

$= \left(\frac{150}{2}\right)$મા અવલોકનનો વર્ગ

$= 75$મા અવલોકનનો વર્ગ

સંચયી આવૃત્તિ પરથી જાણી શકાય કે 75મું અવલોકન વર્ગ 310 - 320 માં સમાયેલ છે.

તેથી મધ્યસ્થ વર્ગ 310 - 320 થશે.

હવે, $L = 310$, $cf = 74$, $f = 35$, $c = 10$ લેતાં

મધ્યસ્થ $$M = L + \frac{\left(\frac{n}{2}\right) - cf}{f} \times c$$

$$= 310 + \frac{75-74}{35} \times 10$$

$$= 310 + \frac{1}{35} \times 10$$

$$= 310 + \frac{10}{35}$$

$$= 310 + 0.2857$$

$$= 310.2857$$

$$\approx 310.\ 29$$

આમ, પ્રદૂષણના સ્તરનો મધ્યસ્થ 310.29 *ppm* છે.

મધ્યસ્થના લાભ અને ગેરલાભ :

લાભ :

(1) તે ગણતરી કરવામાં અને સમજવામાં સરળ છે.

(2) તે નિરીક્ષણથી મેળવી શકાય છે.

(3) તે આલેખ પરથી શોધી શકાય છે.

(4) જ્યારે આવૃત્તિ-વિતરણમાં ખુલ્લા છેડાના વર્ગો હોય ત્યારે તે એકમાત્ર સરેરાશ શક્ય બને છે.

(5) અતિ મોટાં અને અતિ નાનાં અવલોકનોની તેના પર ઓછી અસર થાય છે.

(6) કેટલીક માહિતી ખૂટતી હોય તોપણ તે શોધી શકાય છે.

ગેરલાભ :

(1) તે ચોક્કસ રીતે વ્યાખ્યાયિત થયેલ નથી.

(2) તે બધાં અવલોકનો પર આધારિત હોતું નથી.

(3) વિશેષ બૈજિક ક્રિયાઓ માટે તે અનુકૂળ નથી.

(4) મધ્યકના પ્રમાણમાં તે ઓછું સ્થિર છે.

અન્ય સ્થાનીય માપ :

આપણે જોયું કે મધ્યસ્થ આપેલ માહિતીને બે સરખા વિભાગોમાં વહેંચે છે. કોઈ વખત આપણને એવી કિંમતોની જરૂર પડે છે કે જે આપેલ માહિતીને 2 થી વધુ વિભાગોમાં વહેંચતી હોય. હવે આપણે કેટલીક આવી સ્થાનીય સરેરાશોનો અભ્યાસ કરીશું.

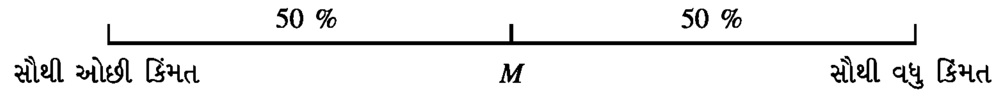
ચતુર્થકો (Quartiles) :

ચઢતા ક્રમમાં ગોઠવેલા આપેલ માહિતીનાં અવલોકનોને જે ત્રણ કિંમતો ચાર સરખા ભાગમાં વહેંચે છે તે કિંમતોને ચતુર્થકો કહેવાય છે. આ ત્રણ ચતુર્થકોને અનુક્રમે Q_1, Q_2, Q_3 વડે દર્શાવાય છે.

આપેલ માહિતીની પ્રથમ 25 % કિંમતો Q_1 તેથી ઓછી હોય છે, ત્યાર પછીની 25 % કિંમતો Q_1 અને Q_2 ની વચ્ચે હોય છે. 25 % કિંમતો Q_2 અને Q_3 ની વચ્ચે હોય છે. તેથી 50% કિંમતો Q_1 અને Q_3 ની વચ્ચે હોય છે અને 25 % કિંમતો Q_3 થી વધુ હોય છે.

આપણે કહી શકીએ કે j મા ચતુર્થક Q_j વડે માહિતીના એવા ભાગ પડે છે કે જેમાં 25 j % અવલોકનો Q_j જેટલાં કે તેથી ઓછાં હોય છે. ($j = 1, 2, 3$) આમ, Q_2 થી ઓછા (25 × 2) % એટલે કે 50 % અવલોકનો હશે. તેથી Q_2 = મધ્યસ્થ = M

મધ્યસ્થ માટે :



ચતુર્થકો માટે :

25 %	25 %	25 %	25 %

સૌથી ઓછી કિંમત Q_1 Q_2 Q_3 સૌથી વધુ કિંમત

દશાંશકો (Deciles) :

ધારો કે અવલોકનોને ચઢતા ક્રમમાં ગોઠવવામાં આવે છે. માહિતીના એકસરખા 10 ભાગ પાડતી 9 કિંમતોને દશાંશકો કહેવાય છે જેને અનુક્રમે D_1, D_2, ..., D_9 વડે દર્શાવવામાં આવે છે. 10 % અવલોકનો D_1 થી ઓછી કિંમત ધરાવે છે, 20 % અવલોકનો D_2 થી ઓછી કિંમતો ધરાવે છે અને આમ આગળ વધી શકાય.

આમ, 10 j % અવલોકનોની કિંમતો jમા દશાંશક D_j થી ઓછી હશે (j = 1, 2, ...9). આપણે જોઈ શકીએ કે $D_5 = M = Q_2$

શતાંશકો (Percentiles) :

ધારો કે અવલોકનોને ચઢતા ક્રમમાં ગોઠવવામાં આવે છે. માહિતીના એકસરખા 100 ભાગ પાડતી 99 કિંમતોને શતાંશકો કહેવાય છે જેને અનુક્રમે P_1, P_2 ..., P_{99} વડે દર્શાવવામાં આવે છે. અહીં 100 j % અવલોકનોની કિંમતો jમા શતાંશક P_j થી ઓછી કિંમત ધરાવશે (j = 1, 2, ...,99). આપણે જોઈ શકીએ કે $D_1 = P_{10}$, $D_2 = P_{20}$, ..., $D_9 = P_{90}$ તેમજ $Q_1 = P_{25}$ અને $Q_3 = P_{75}$

ઉપરાંત $M = Q_2 = D_5 = P_{50}$

મધ્યસ્થ, ચતુર્થકો, દશાંશકો અને શતાંશકો બધી જ સ્થાનીય સરેરાશો હોવાથી તેમની ગણતરીની રીત સમાન હોય છે. jમો ચતુર્થક, jમો દશાંશક અને jમો શતાંશક શોધવાનાં સૂત્રો નીચેના કોષ્ટકમાં આપેલ છે :

માહિતીનો પ્રકાર	jમો ચતુર્થક j = 1, 2, 3	jમો દશાંશક j = 1, 2,...9	jમો શતાંશક j = 1, 2,..., 99
અવર્ગીકૃત માહિતી અથવા અસતત આવૃત્તિ વિતરણ	$Q_j = j\left(\frac{n+1}{4}\right)$મા અવલોકનની કિંમત	$D_j = j\left(\frac{n+1}{10}\right)$મા અવલોકનની કિંમત	$P_j = j\left(\frac{n+1}{100}\right)$મા અવલોકનની કિંમત
સતત આવૃત્તિ-વિતરણ	Q_j નો વર્ગ $= j\left(\frac{n}{4}\right)$મા અવલોકનનો વર્ગ $Q_j = L + \frac{j\left(\frac{n}{4}\right) - cf}{f} \times c$ જ્યાં $L = Q_j$ના વર્ગનું અધઃ સીમાબિંદુ $cf = Q_j$ના વર્ગના અગાઉના વર્ગની સંચયી આવૃત્તિ $f = Q_j$ના વર્ગની આવૃત્તિ $c = Q_j$ના વર્ગની વર્ગલંબાઈ	D_j નો વર્ગ $= j\left(\frac{n}{10}\right)$મા અવલોકનનો વર્ગ $D_j = L + \frac{j\left(\frac{n}{10}\right) - cf}{f} \times c$ જ્યાં $L = D_j$ના વર્ગનું અધઃ સીમાબિંદુ $cf = D_j$ ના વર્ગના અગાઉના વર્ગની સંચયી આવૃત્તિ $f = D_j$ ના વર્ગની આવૃત્તિ $c = D_j$ના વર્ગની વર્ગલંબાઈ	P_j નો વર્ગ $= j\left(\frac{n}{100}\right)$મા અવલોકનનો વર્ગ $P_j = L + \frac{j\left(\frac{n}{100}\right) - cf}{f} \times c$ જ્યાં $L = P_j$ના વર્ગનું અધઃ સીમાબિંદુ $cf = P_j$ના વર્ગના અગાઉના વર્ગની સંચયી આવૃત્તિ $f = P_j$ના વર્ગની આવૃત્તિ $c = P_j$ના વર્ગની વર્ગલંબાઈ

ઉદાહરણ 25 : એક બેટ્સમૅને તેની 20 ઇનિંગમાં સ્કોર કરેલા રન દર્શાવતી નીચેની માહિતી માટે Q_1, D_7, P_{40} શોધો.

32, 28, 47, 63, 71, 9, 60, 10, 96, 14, 31, 148, 53, 67, 29, 10, 62, 40, 80, 54

અવલોકનોની ચઢતા ક્રમમાં ગોઠવણી નીચે પ્રમાણે થશે :

9, 10, 10, 14, 28, 29, 31, 32, 40, 47,

53, 54, 60, 62, 63, 67, 71, 80, 96, 148

અહીં, $n = 20$

> સ્થાનીય સરેરાશ શોધવા માટે તેના સ્થાનની કિંમત અપૂર્ણાંકમાં આવે તો તે સ્થાનીય સરેરાશની કિંમત શોધવા માટે સુરેખ આસાદનનો (Linear approximation) ઉપયોગ કરવામાં આવે છે. દા.ત., 5.25મી કિંમત શોધવા માટે 5મા અવલોકનની કિંમતમાં તે અવલોકન અને ત્યાર બાદનું એટલે કે 6ઠ્ઠા અવલોકનના અંતરના 25 % ઉમેરવામાં આવે છે.

ચતુર્થક $Q_1 = \left(\frac{n+1}{4}\right)$મા અવલોકનની કિંમત

$= \left(\frac{20+1}{4}\right)$મા અવલોકનની કિંમત

$= 5.25$મા અવલોકનની કિંમત

$=$ 5મા અવલોકનની કિંમત $+ 0.25$(6ઠ્ઠા અવલોકનની કિંમત $-$ 5મા અવલોકનની કિંમત)

$= 28 + 0.25(29 - 28)$

$= 28 + 0.25$

$= 28.25$

દશાંશક $D_7 = 7\left(\frac{n+1}{10}\right)$મા અવલોકનની કિંમત

$= 7\left(\frac{20+1}{10}\right)$મા અવલોકનની કિંમત

$= 14.7$મા અવલોકનની કિંમત

$=$ 14મા અવલોકનની કિંમત $+ 0.7$(15મા અવલોકનની કિંમત $-$ 14મા અવલોકનની કિંમત)

$= 62 + 0.7(63 - 62)$

$= 62 + 0.7$

$= 62.7$

શતાંશક $P_{40} = 40\left(\frac{n+1}{100}\right)$મા અવલોકનની કિંમત

$= 40\left(\frac{20+1}{100}\right)$મા અવલોકનની કિંમત

$= 8.4$મા અવલોકનની કિંમત

$=$ 8મા અવલોકનની કિંમત $+ 0.4$(9મા અવલોકનની કિંમત $-$ 8મા અવલોકનની કિંમત)

$= 32 + 0.4(40 - 32)$

$= 32 + 3.2$

$= 35.2$

આમ, Q_1, D_7, P_{40}ની કિંમતો અનુક્રમે 28.25 રન, 62.7 રન અને 35.2 રન છે.

ઉદાહરણ 26 : નીચેની માહિતી એક ડેરીમાં મશીનથી ભરેલી દૂધની 90 કોથળીઓના સંદર્ભમાં છે.

ભરેલ દૂધ (મિલિ)	485 - 490	490 - 495	495 - 500	500 - 505	505 - 510
કોથળીઓની સંખ્યા	5	21	33	23	8

Q_3, D_2, P_{55} શોધો અને તેમનું અર્થઘટન કરો.

આ સતત આવૃત્તિ-વિતરણ માટે આપણે સંચયી આવૃત્તિ-વિતરણ મેળવીશું.

ભરેલ દૂધ (મિલિ)	485 - 490	490 - 495	495 - 500	500 - 505	505 - 510
કોથળીઓની સંખ્યા	5	21	33	23	8
સંચયી આવૃત્તિ *cf*	5	26	59	82	90

અહીં $n = 90$

ચતુર્થક Q_3 માટે :

Q_3 નો વર્ગ $= 3\left(\frac{n}{4}\right)$મા અવલોકનનો વર્ગ

$= 3\left(\frac{90}{4}\right)$મા અવલોકનનો વર્ગ

$= 67.5$મા અવલોકનનો વર્ગ

સંચયી આવૃત્તિઓ પરથી જાણી શકાય કે 67મા અને 68મા અવલોકનોનો વર્ગ 500 - 505 છે.

હવે $L = 500$, $cf = 59$, $f = 23$, $c = 5$ લેતાં

ચતુર્થક $Q_3 = L + \frac{3\left(\frac{n}{4}\right) - cf}{f} \times c$

$= 500 + \frac{67.5 - 59}{23} \times 5$

$= 500 + \frac{8.5}{23} \times 5$

$= 500 + \frac{42.5}{23}$

$= 500 + 1.8478$

$= 501.8478$

≈ 501.85

આમ, સૌથી ઓછો જથ્થો ધરાવતી 75 % કોથળીઓમાં દૂધનો મહત્તમ જથ્થો 501.85 મિલિ હશે.

દશાંશક D_2 માટે :

D_2 નો વર્ગ $= 2\left(\frac{n}{10}\right)$મા અવલોકનનો વર્ગ

$= 2\left(\frac{90}{10}\right)$મા અવલોકનનો વર્ગ

$= 18$મા અવલોકનનો વર્ગ

સંચયી આવૃત્તિ પરથી જાણી શકાય કે 18મા અવલોકનનો વર્ગ 490 - 495 હશે.

હવે $L = 490$, $cf = 5$, $f = 21$, $c = 5$ લેતાં

$$D_2 = L + \frac{2\left(\frac{n}{10}\right) - cf}{f} \times c$$

$$= 490 + \frac{18-5}{21} \times 5$$

$$= 490 + \frac{13}{21} \times 5$$

$$= 490 + \frac{65}{21}$$

$$= 490 + 3.0952$$

$$= 493.0952$$

$$\approx 493.1$$

આમ, સૌથી ઓછો જથ્થો ધરાવતા 20 % કોથળીઓમાં દૂધનો મહત્તમ જથ્થો 493.1 મિલિ હશે.

શતાંશક P_{55} માટે

P_{55} નો વર્ગ $= 55\left(\frac{n}{100}\right)$મા અવલોકનનો વર્ગ

$= 55\left(\frac{90}{100}\right)$મા અવલોકનનો વર્ગ

$= 49.5$મા અવલોકનનો વર્ગ

સંચયી આવૃત્તિ પરથી જાણી શકાય કે 49મા અને 50મા અવલોકનોનો વર્ગ 495 - 500 હશે.

હવે $L = 495$, $cf = 26$, $f = 33$, $c = 5$ લેતાં

$$P_{55} = L + \frac{55\left(\frac{n}{100}\right) - cf}{f} \times c$$

$$= 495 + \frac{49.5-26}{33} \times 5$$

$$= 495 + \frac{23.5}{33} \times 5$$

$$= 495 + \frac{117.5}{33}$$

$$= 495 + 3.5606$$

$$= 498.5606$$

$$\approx 498.56$$

આમ, સૌથી ઓછો જથ્થો ધરાવતી 55 % કોથળીઓમાં દૂધનો જથ્થો વધુમાં વધુ 498.56 મિલિ હશે.

ઉદાહરણ 27 : એક બૅન્કના 100 ગ્રાહકોની તેમની એક મહિનાની બૅન્કની મુલાકાતની સંખ્યાની તપાસ પરથી આપણને નીચેની માહિતી મળે છે :

મુલાકાતોની સંખ્યા	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
ગ્રાહકોની સંખ્યા	12	22	40	15	6	4	1

પ્રથમ ચતુર્થક, 4થો દશાંશક અને 95મો શતાંશક શોધો.

અસતત આવૃત્તિ-વિતરણ માટે સંચયી આવૃત્તિઓ મેળવીશું.

મુલાકાતોની સંખ્યા	0	1	2	3	4	5	6
ગ્રાહકોની સંખ્યા	12	22	40	15	6	4	1
સંચયી આવૃત્તિ *cf*	12	34	74	89	95	99	100

અહીં, $n = 100$

પ્રથમ ચતુર્થક $Q_1 = \left(\frac{n+1}{4}\right)$મા અવલોકનની કિંમત

$= \left(\frac{100+1}{4}\right)$મા અવલોકનની કિંમત

$= 25.25$મા અવલોકનની કિંમત

સંચયી આવૃત્તિઓ પરથી જાણી શકાય કે 25મા અને 26મા અવલોકનની કિંમતો 1 છે. $\therefore\ Q_1 = 1$

આમ, સૌથી ઓછી મુલાકાત લેતા 25 % ગ્રાહકોમાં મહત્તમ મુલાકાતોની સંખ્યા 1 છે.

4 થો દશાંશક $D_4 = 4\left(\frac{n+1}{10}\right)$મા અવલોકનની કિંમત

$= 4\left(\frac{100+1}{10}\right)$મા અવલોકનની કિંમત

$= 40.4$મા અવલોકનની કિંમત

સંચયી આવૃત્તિઓ પરથી જાણી શકાય કે 40મા અને 41મા અવલોકનની કિંમતો 2 છે. $\therefore\ D_4 = 2$

આમ, સૌથી ઓછી મુલાકાત લેતા 40 % ગ્રાહકો બૅન્કની 2 દિવસ સુધી મુલાકાત લે છે.

95 મો શતાંશક $P_{95} = 95\left(\frac{n+1}{100}\right)$મા અવલોકનની કિંમત

$= 95\left(\frac{100+1}{100}\right)$મા અવલોકનની કિંમત

$= 95.95$મા અવલોકનની કિંમત

સંચયી આવૃત્તિઓ પરથી જાણી શકાય કે 95મા અવલોકનની કિંમત 4 અને 96મા અવલોકનની કિંમત 5 છે.

$P_{95} =$ 95મા અવલોકનની કિંમત + 0.95(96મા અવલોકનની કિંમત − 95મા અવલોકનની કિંમત)

$= 4 + 0.95(5 - 4)$

$= 4 + 0.95$

$= 4.95$

આમ, સૌથી ઓછી વખત મુલાકાત લેતા 95 % ગ્રાહકોમાં મુલાકાતોની મહત્તમ સંખ્યા 4.95 કે 5 હશે.

ઉદાહરણ 28 : લોકલ બસમાં પ્રવાસ કરતા 50 મુસાફરોના માસિક પ્રવાસખર્ચ (₹ માં)ની માહિતી નીચેના કોષ્ટકમાં દર્શાવેલ છે :

માસિક પ્રવાસ-ખર્ચ	**350 - 500**	**500 - 650**	**650 - 800**	**800 - 950**	**950 અને વધુ**
મુસાફરોની સંખ્યા	7	13	16	9	5

(1) વચ્ચેના 50 % મુસાફરોના પ્રવાસ-ખર્ચની સીમાઓ મેળવો.

(2) સૌથી વધુ ખર્ચ કરતા 15 % મુસાફરોમાં ન્યૂનતમ ખર્ચ કેટલો હશે ?

(3) સૌથી ઓછો ખર્ચ કરતા 10 % મુસાફરોમાં મહત્તમ ખર્ચ કેટલો હશે ?

ઉપરના પ્રશ્નોના જવાબ શોધવા માટે આપણે સ્થાનીય સરેરાશોના ખ્યાલનો ઉપયોગ કરીશું. તે માટે આપેલ સતત આવૃત્તિ-વિતરણ માટે આપણે સંચયી આવૃત્તિઓ મેળવીશું.

પ્રવાસ-ખર્ચ (₹)	**350 - 500**	**500 - 650**	**650 - 800**	**800 - 950**	**950 અને વધુ**
મુસાફરોની સંખ્યા	7	13	16	9	5
સંચયી આવૃત્તિ *cf*	7	20	36	45	50

અહીં $n = 50$

(1) કોઈ પણ ચલ માટે કેન્દ્રનાં 50 % અવલોકનો Q_1 અને Q_3 ની વચ્ચે હોય છે. તેથી Q_1 અને Q_3 શોધીશું.

Q_1 નો વર્ગ = $\left(\frac{n}{4}\right)$મા અવલોકનનો વર્ગ

= $\left(\frac{50}{4}\right)$મા અવલોકનનો વર્ગ

= 12.5મા અવલોકનનો વર્ગ

સંચયી આવૃત્તિઓ પરથી જાણી શકાય કે 12મા અને 13મા અવલોકનનો વર્ગ 500 - 650 છે.

હવે $L = 500,\ cf = 7,\ f = 13,\ c = 150$ લેતાં

$$Q_1 = L + \frac{\left(\frac{n}{4}\right) - cf}{f} \times c$$

$$= 500 + \frac{12.5 - 7}{13} \times 150$$

$$= 500 + \frac{5.5}{13} \times 150$$

$$= 500 + \frac{825}{13}$$

$$= 500 + 63.4615$$

$$= 563.4615$$

$$\approx 563.46$$

Q_3 નો વર્ગ = $3\left(\frac{n}{4}\right)$મા અવલોકનનો વર્ગ

= $3\left(\frac{50}{4}\right)$મા અવલોકનનો વર્ગ

= 37.5મા અવલોકનનો વર્ગ

સંચયી આવૃત્તિ પરથી જાણી શકાય કે 37મા અને 38મા અવલોકનનો વર્ગ 800 - 950 છે.

હવે $L = 800,\ cf = 36,\ f = 9,\ c = 150$ લેતાં

$$Q_3 = L + \frac{3\left(\frac{n}{4}\right) - cf}{f} \times c$$

$$= 800 + \frac{37.5 - 36}{9} \times 150$$

$$= 800 + \frac{1.5}{9} \times 150$$

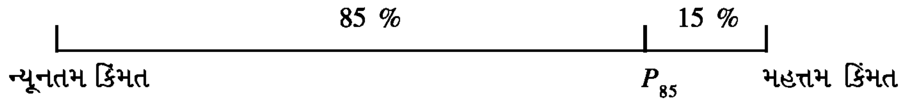
$$= 800 + \frac{225}{9}$$

$$= 800 + 25$$

$$= 825$$

આમ, કેન્દ્રના 50 % મુસાફરોનો માસિક પ્રવાસ-ખર્ચ ₹ 563.46 અને ₹ 825 ની વચ્ચે હશે.

(2) અહીં આપણને એવી કિંમત જોઈએ છે કે જેનાથી 15 % અવલોકનો વધુ કિંમત ધરાવતા હોય એટલે કે 85 % અવલોકનોની કિંમત તેનાથી ઓછી હોવી જોઈએ. તેથી આપણે P_{85} શોધીશું.



P_{85} નો વર્ગ $= 85\left(\frac{n}{100}\right)$મા અવલોકનનો વર્ગ

$= 85\left(\frac{50}{100}\right)$મા અવલોકનનો વર્ગ

$= 42.5$મા અવલોકનનો વર્ગ

સંચયી આવૃત્તિ પરથી જાણી શકાય કે 42મા અને 43મા અવલોકનોનો વર્ગ 800 - 950 છે.

હવે $L = 800,\ cf = 36,\ f = 9,\ c = 150$ લેતાં

$$P_{85} = L + \frac{85\left(\frac{n}{100}\right) - cf}{f} \times c$$

$$= 800 + \frac{42.5 - 36}{9} \times 150$$

$$= 800 + \frac{6.5}{9} \times 150$$

$$= 800 + \frac{975}{9}$$

$$= 800 + 108.3333$$

$$= 908.3333$$

$$\approx 908.33$$

આમ, સૌથી વધુ પ્રવાસખર્ચ ધરાવતા 15 % મુસાફરોમાં ન્યૂનતમ પ્રવાસ-ખર્ચ ₹ 908.33 છે.

(3) જે કિંમતથી ઓછાં 10 % અવલોકનો હોય તે કિંમત શોધવા માટે આપણે D_1 શોધીશું.

| 10 % | 90 % |

ન્યૂનતમ કિંમત D_1 મહત્તમ કિંમત

D_1 નો વર્ગ $= \left(\frac{n}{10}\right)$મા અવલોકનનો વર્ગ

$= \left(\frac{50}{10}\right)$મા અવલોકનનો વર્ગ

= 5મા અવલોકનનો વર્ગ

સંચયી આવૃત્તિ પરથી જાણી શકાય કે 5 મા અવલોકનનો વર્ગ 350 – 500 છે.

હવે $L = 350,\ cf = 0,\ f = 7,\ c = 150$

$$D_1 = L + \frac{\left(\frac{n}{10}\right) - cf}{f} \times c$$

$$= 350 + \frac{5-0}{7} \times 150$$

$$= 350 + \frac{5}{7} \times 150$$

$$= 350 + \frac{750}{7}$$

$$= 350 + 107.1429$$

$$= 457.1429$$

$$\approx 457.14$$

આમ, સૌથી ઓછો પ્રવાસ-ખર્ચ ધરાવનાર 10 % મુસાફરોમાં મહત્તમ ખર્ચ ₹ 457.14 છે.

સ્વાધ્યાય 3.4

1. કોઈ એક વર્ગની કસોટીમાં 15 વિદ્યાર્થીઓએ મેળવેલા ગુણની નીચે આપેલી માહિતી પરથી બધા ચતુર્થકો શોધો.

   8, 6, 7, 0, 2, 4, 6, 5, 5, 4, 8, 9, 3, 6, 7

2. એક સેલ્સમેને છેલ્લા વર્ષમાં જુદા જુદા દિવસોમાં કરેલ મુસાફરી (કિમીમાં)ની માહિતી નીચેના કોષ્ટકમાં દર્શાવેલ છે. મધ્યસ્થ, Q_3, D_8, P_{62} શોધો અને તેમનું અર્થઘટન કરો :

મુસાફરી (કિમી)	**0–100**	**100–200**	**200–300**	**300–400**	**400–500**	**500–600**
દિવસોની સંખ્યા	5	18	24	7	5	1

3. એક કૉલેજમાંથી પસંદ કરેલા 80 વિદ્યાર્થીઓની ઉંમર નીચેના કોષ્ટકમાં આપેલ છે :

ઉંમર (વર્ષ)	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**
વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા	11	14	22	15	8	6	4

   વિદ્યાર્થીઓની ઉંમરનો મધ્યસ્થ શોધો. ઉપરાંત ઉંમર માટે Q_1, D_4, P_{32} પણ શોધી, તેમનું અર્થઘટન કરો.

4. એક પેઢીના કર્મચારીઓના વેતનનો મધ્યસ્થ શોધવા માટે નીચેની માહિતીનો ઉપયોગ કરો. સૌથી વધુ વેતન ધરાવતા 20 % કર્મચારીઓના વેતનની ન્યૂનતમ સીમા પણ મેળવો.

વેતન (હજાર ₹)	5 કે તેથી વધુ	10 કે તેથી વધુ	15 કે તેથી વધુ	20 કે તેથી વધુ	25 કે તેથી વધુ	30 કે તેથી વધુ
કર્મચારીઓની સંખ્યા	120	117	106	76	31	12

5. 100 વિદ્યાર્થીઓના એક સમૂહમાં મનોરંજન પાછળના માસિક ખર્ચની વિગત નીચેના કોષ્ટકમાં દર્શાવેલ છે. આ ખર્ચનો મધ્યસ્થ શોધો.

ખર્ચ (₹માં)	200 થી ઓછો	200 - 400	400 - 600	600 - 700	700 - 800	800 અને વધુ
વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા	8	23	40	17	7	5

6. નીચેની માહિતી એક હૉસ્પિટલમાં દાખલ થયેલા 30 દર્દીઓના હૉસ્પિટલમાં રોકાણના દિવસોની નોંધ છે :

1, 10, 2, 6, 3, 4, 15, 1, 5, 9, 2, 4, 3, 1, 10,

7, 3, 5, 4, 2, 4, 8, 5, 3, 1, 9, 6, 2, 3, 7

રોકાણના દિવસોનો મધ્યસ્થ શોધો. ઉપરાંત આ માહિતીને પ્રથમ વર્ગ 1–3 હોય તેવા સમાન લંબાઈના વર્ગો ધરાવતા સતત આવૃત્તિ-વિતરણ (અનિવારક પ્રકાર)માં ફેરવો. આવૃત્તિ-વિતરણ પરથી મધ્યસ્થ શોધો અને તમારા અગાઉના જવાબ સાથે સરખાવો.

*

3.5 બહુલક (Mode)

મધ્યવર્તી સ્થિતિના માપ તરીકે આપણે મધ્યક અને મધ્યસ્થનો અભ્યાસ અગાઉ કર્યો છે. એક અન્ય માપ તરીકે હવે આપણે બહુલકનો અભ્યાસ કરીશું જેનો વેપાર અને વાણિજ્યના ક્ષેત્રમાં વ્યાપક પ્રમાણમાં ઉપયોગ કરવામાં આવે છે.

3.5.1 અર્થ :

આપેલ માહિતીમાં ચલની સૌથી વધુ વખત પુનરાવર્તિત થતી એટલે કે મહત્તમ આવૃત્તિ ધરાવતી કિંમતને **બહુલક** કહેવામાં આવે છે. તેને M_o વડે દર્શાવવામાં આવે છે.

વ્યવહારુ પ્રશ્નોમાં ઘણી વાર આ માપનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે. દાખલા તરીકે નીચેનાં વિધાનો જુઓ :

(1) આ શાળાના વિદ્યાર્થીઓને સરેરાશ 3 ભાષાઓ આવડે છે.

(2) આપણા દેશમાં પુરુષોની સરેરાશ ઊંચાઈ 1.7 મીટર છે.

(3) અમારી કંપનીનું સરેરાશ દૈનિક ઉત્પાદન 50 એકમો છે.

(4) કારખાનાના કારીગરો સરેરાશ 3 કલાક ઓવરટાઈમ કરે છે.

અહીં સરેરાશની ગણતરીમાં સૌથી વધુ વખત આવતી કિંમતને ધ્યાનમાં લેવામાં આવે છે, જેમકે પ્રથમ વિધાનમાં શાળાના મોટા ભાગના વિદ્યાર્થીઓને 3 ભાષાઓ આવડે છે તેવું સૂચિત થાય છે. તેથી ત્યાં સરેરાશ તરીકે બહુલકનો ઉપયોગ થયો છે તેમ કહી શકાય.

બહુલકની ગણતરી :

અવર્ગીકૃત માહિતી અને અસતત આવૃત્તિ-વિતરણ માટે :

આવા કિસ્સામાં બહુલકની કિંમત માત્ર નિરીક્ષણથી મેળવવામાં આવે છે. આપેલાં અવલોકનોમાંથી મહત્તમ વખત પુનરાવર્તન પામતી અથવા મહત્તમ આવૃત્તિ ધરાવતી કિંમતને બહુલક તરીકે લેવામાં આવે છે.

ઉદાહરણ 29 : એક બુક સ્ટોરમાંથી 15 વ્યક્તિઓએ ખરીદેલાં પુસ્તકોની સંખ્યાઓ નીચે આપેલ છે :

1, 0, 2, 2, 3, 4, 2, 7, 2, 2, 5, 4, 2, 1, 2.

ખરીદેલ પુસ્તકોની સંખ્યાનો બહુલક શોધો.

આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે, આપેલ અવલોકનોની કિંમતોમાં કિંમત 2નું 7 વાર પુનરાવર્તન થાય છે, જે અન્ય કોઈ પણ કિંમતની પુનરાવર્તનની સંખ્યા કરતાં વધુ છે. તેથી બહુલક $M_o = 2$.

આમ, વ્યક્તિએ ખરીદેલાં પુસ્તકોનો બહુલક 2 છે.

ઉદાહરણ 30 : ટી.વી. બનાવતી એક કંપનીએ એક મહિનામાં એસેમ્બલ કરેલા ટી.વી.ની તપાસ કરવામાં આવી. નીચેનું કોષ્ટક દરેક ટી.વી.માં રહેલ ખામીઓની સંખ્યા દર્શાવે છે. ખામીઓની સંખ્યાનો બહુલક શોધો.

ખામીઓની સંખ્યા	0	1	2	3	4	5
ટી.વી.ની સંખ્યા	45	22	18	10	6	4

આવૃત્તિઓનું નિરીક્ષણ કરતા એવું જણાય છે કે, અવલોકન 0ની મહત્તમ આવૃત્તિ 45 છે. તેથી બહુલક $M_o = 0$

આમ, ટી. વી.ની ખામીઓની સંખ્યાનો બહુલક 0 છે.

નોંધ : આ દાખલામાં બહુલકનું મૂલ્ય બહુલકની વ્યાખ્યા મુજબ 0 મળે છે. પણ તે માહિતીના મધ્યવર્તી સ્થિતિનાં માપ તરીકે લઈ શકાય નહિ, કારણ કે આ બહુલકનું મૂલ્ય માહિતીની શરૂઆતમાં આવે છે.

આવી માહિતી માટે મધ્યવર્તી સ્થિતિનાં માપ તરીકે મધ્યક અથવા મધ્યસ્થની પસંદગી કરવી જોઈએ. અન્યથા બહુલકની કિંમત શોધવા માટે મધ્યક અને મધ્યસ્થ પર આધારિત આસાદિત સૂત્રનો ઉપયોગ કરવો જોઈએ જેની ચર્ચા આ પ્રકરણમાં પાછળ કરવામાં આવી છે.

ઉદાહરણ 31 : 24 ટૅક્સી ડ્રાઇવરોએ એક દિવસમાં કરેલા ફેરાઓની સંખ્યા નીચેની માહિતીમાં દર્શાવેલ છે. ફેરાઓની સંખ્યાનો બહુલક શોધો.

ફેરાઓની સંખ્યા	1	2	4	5	6	7
ડ્રાઇવરોની સંખ્યા	3	7	4	7	2	1

મહત્તમ આવૃત્તિ 7 એ અવલોકનો 2 અને 5 ની આવૃત્તિ છે. આમ, આપણે કહી શકીએ કે આ વિતરણમાં બે બહુલક $M_o = 2$ અને $M_o = 5$.

આમ, ટૅક્સી ડ્રાઇવરના ફેરાઓના બહુલક 2 અને 5 છે.

નોંધ : આ પ્રકારના વિતરણને દ્વિ-બહુલકીય વિતરણ કહેવાય છે. તે જ રીતે એવાં પણ વિતરણો હોઈ શકે કે જેમાં બેથી વધુ બહુલકો હોય.

ઉદાહરણ 32 : એક ક્લિનિકમાં તેના કામના કલાકોમાં દર કલાકે આવતા દર્દીઓની સંખ્યા નીચે પ્રમાણે નોંધવામાં આવી છે :

3, 5, 4, 2, 7, 8

દર્દીઓની સંખ્યાનો બહુલક શોધો.

અહીં દરેક કિંમત એક જ વખત આવે છે તેથી આપણે મહત્તમ પુનરાવર્તન થાય તેવું અવલોકન શોધી શકતા નથી.

અહીં વ્યાખ્યાની મદદથી દર્દીઓની સંખ્યાનો બહુલક આપેલ માહિતી પરથી શોધી શકાતો નથી.

સતત આવૃત્તિ-વિતરણ માટે :

જ્યારે આપેલ માહિતીને વર્ગો ધરાવતા સતત આવૃત્તિ-વિતરણમાં ફેરવવામાં આવે છે ત્યારે અવલોકનોની મૂળ કિંમત પ્રાપ્ય હોતી નથી.

મધ્યસ્થની જેમ બહુલક માટે પણ સૌપ્રથમ બહુલકનો વર્ગ શોધવામાં આવે છે અને તેના આધારે બહુલકની કિંમત શોધવામાં આવે છે.

આવૃત્તિ-વિતરણમાં મહત્તમ આવૃત્તિ ધરાવતા વર્ગને બહુલક વર્ગ કહેવાય છે. ત્યાર બાદ નીચેના સૂત્રનો ઉપયોગ કરીને બહુલક મેળવવામાં આવે છે.

બહુલક $M_o = L + \frac{f_m - f_1}{2f_m - f_1 - f_2} \times c$

જ્યાં L = બહુલક વર્ગનું અધઃસીમાબિંદુ

f_m = બહુલક વર્ગની આવૃત્તિ

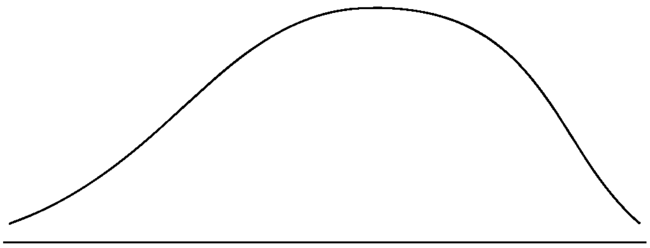
f_1 = બહુલક વર્ગના અગાઉના વર્ગની આવૃત્તિ

f_2 = બહુલક વર્ગના પછીના વર્ગની આવૃત્તિ

c = બહુલક વર્ગની વર્ગલંબાઈ

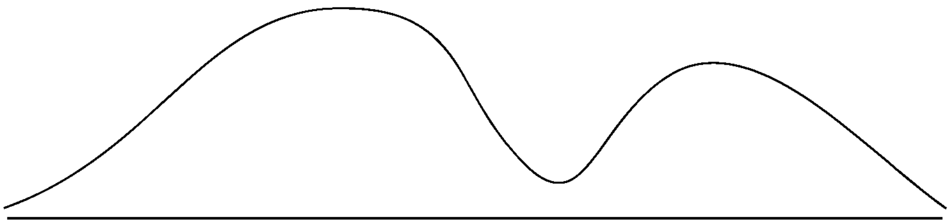
નોંધ : ઉપર દર્શાવેલ સૂત્રનો ઉપયોગ સમાન વર્ગલંબાઈ હોય તેવા સતત આવૃત્તિ-વિતરણ માટે જ કરી શકાય તેમજ આવૃત્તિ-વિતરણમાં મહત્તમ આવૃત્તિ કોઈ એક જ વર્ગ માટે હોય તેવા કિસ્સામાં જ આ સૂત્ર વાપરી શકાય છે.

જે આવૃત્તિ-વિતરણમાં આવૃત્તિઓ શરૂઆતમાં વધે છે અને મહત્તમની આવૃત્તિ સુધી પહોંચીને પછી ઘટતી જાય છે તેવા આવૃત્તિ-વિતરણને નિયમિત આવૃત્તિ-વિતરણ કહેવાય છે. આવાં વિતરણોમાં એક જ બહુલક હોવાથી તેમને એક-બહુલકીય વિતરણ પણ કહી શકાય છે, જેનો આવૃત્તિ વક્ર નીચે પ્રમાણે હોય છે :



નિયમિત આવૃત્તિ-વિતરણનો આવૃત્તિ વક્ર

દ્વિ-બહુલકીય આવૃત્તિ-વિતરણમાં આવૃત્તિઓ વધે અને ઘટે પણ ત્યાર બાદ ફરીથી વધીને ઘટે છે. આવા આવૃત્તિ-વિતરણને અનિયમિત આવૃત્તિ-વિતરણ કહેવાય છે, જેનો આવૃત્તિ વક્ર નીચે પ્રમાણે હોય છે.



અનિયમિત આવૃત્તિ-વિતરણનો આવૃત્તિ વક્ર

ઉદાહરણ 33 : એક ફેક્ટરીના કારીગરોનું ઉત્પાદન નીચેના કોષ્ટકમાં આપેલ છે. ઉત્પાદનનો બહુલક શોધો.

ઉત્પાદન (એકમો)	150 - 160	160 - 170	170 - 180	180 - 190	190 - 200	200 - 210	210 - 220	220 - 230
કારીગરોની સંખ્યા	4	5	19	33	48	22	12	6

વર્ગ 190 - 200 માટે મહત્તમ આવૃત્તિ 48 છે. તેથી બહુલકનો વર્ગ 190 - 200 છે.

હવે, $L = 190, f_m = 48, f_1 = 33, f_2 = 22, c = 10$ લેતાં,

બહુલક $M_0 = L + \frac{f_m - f_1}{2f_m - f_1 - f_2} \times c$

$= 190 + \frac{48-33}{2(48)-33-22} \times 10$

$= 190 + \frac{15}{96-33-22} \times 10$

$= 190 + \frac{150}{41}$

$= 190 + 3.6585$

$= 193.6585$

≈ 193.66

આમ, ઉત્પાદનનો બહુલક 193.66 એકમો છે.

ઉદાહરણ 34 : એક દુકાનદારે જુદા જુદા દિવસે વેચેલી ઠંડાં પીણાંની બોટલોની સંખ્યા નીચેના કોષ્ટકમાં આપી છે. ઠંડાં પીણાંની બોટલોના વેચાણનો બહુલક શોધો.

બોટલોની સંખ્યા	0 - 3	4 - 7	8 - 11	12 - 15	16 - 19	20 - 23
દિવસોની સંખ્યા	3	11	16	20	18	12

વર્ગ 12 - 15 માટે મહત્તમ આવૃત્તિ 20 છે, તેથી બહુલકનો વર્ગ 12 - 15 છે. આ અનિવારક આવૃત્તિ-વિતરણ હોવાથી આપણે તે વર્ગનાં સીમાબિંદુઓ 11.5 - 15.5 લઈશું.

હવે, $L = 11.5, f_m = 20, f_1 = 16, f_2 = 18, c = 4$ લેતાં,

બહુલક $M_o = L + \frac{f_m - f_1}{2f_m - f_1 - f_2} \times c$

$= 11.5 + \frac{20-16}{2(20)-16-18} \times 4$

$= 11.5 + \frac{4}{40-16-18} \times 4$

$= 11.5 + \frac{16}{6}$

$= 11.5 + 2.6666$

$= 14.1666$

≈ 14.17

આમ, ઠંડાં પીણાંની બોટલોના વેચાણનો બહુલક 14.17 છે.

બહુલક માટે આસાદિત સૂત્ર (Empirical Formula):

આપણે જોયું કે ઘણી વાર બહુલક સ્પષ્ટ રીતે વ્યાખ્યાયિત થતું નથી. પ્રસિદ્ધ આંકડાશાસ્ત્રી કાર્લ પિયર્સને માહિતીના જુદા જુદા સમૂહો માટેના અભ્યાસ પરથી મધ્યક, મધ્યસ્થ અને બહુલક વચ્ચેનો સંબંધ પ્રસ્થાપિત કરેલ છે. તેમના નિરીક્ષણ મુજબ સરેરાશની આસપાસ સમાન રીતે વિતરિત ન થયેલી માહિતી માટે મધ્યક અને બહુલક વચ્ચેનો તફાવત એ મધ્યક અને મધ્યસ્થના તફાવત કરતાં લગભગ 3 ગણો હોય છે.

એટલે કે (મધ્યક – બહુલક) = 3 (મધ્યક – મધ્યસ્થ)

આ સંબંધનો ઉપયોગ કરીને બહુલકની કિંમત શોધવા માટે નીચેનું સૂત્ર તારવવામાં આવે છે :

બહુલક = 3 (મધ્યસ્થ) – 2 (મધ્યક)

સંકેતોમાં તેને $M_o = 3M - 2\overline{x}$ વડે લખવામાં આવે છે.

બહુલક શોધવાના આ સૂત્રને આસાદિત સૂત્ર કહેવાય છે; કારણ કે તેમાંથી મળતી કિંમત આશરા પડતી હોય છે, જે આવૃત્તિ-વિતરણ સરેરાશની આસપાસ સમાન રીતે વિતરિત ન થયું હોય તેમાં આ સૂત્ર વડે મળતી બહુલકની કિંમત ઋણ હોઈ શકે છે.

બહુલકના આ સૂત્રનો ઉપયોગ નીચેની પરિસ્થિતિમાં કરવામાં આવે છે :

- અવર્ગીકૃત માહિતીમાં દરેક અવલોકન એક જ વખત આવતું હોય.
- વર્ગીકૃત માહિતી માટે મહત્તમ આવૃત્તિ એક કરતાં વધુ વખત આવતી હોય.
- સતત આવૃત્તિ-વિતરણમાં અસમાન વર્ગલંબાઈ હોય.
- ચલ માટે મિશ્ર આવૃત્તિ-વિતરણ હોય કે જે આંશિક અસતત હોય અને બાકીનું વિતરણ સતત હોય.
- આવૃત્તિ-વિતરણના વક્રનો ડાબી અથવા જમણી તરફનો છેડો ખૂબ જ ખેંચાયેલો હોય.

પ્રવૃત્તિ

ઉદાહરણ 34 માં આપેલ માહિતી પરથી મધ્યક, મધ્યસ્થ શોધો અને આસાદિત સૂત્ર ચકાસો.

ઉદાહરણ 35 : એક જથ્થાબંધના વેપારી માટે તેણે મૂકેલ ઑર્ડર અને તેની પ્રાપ્તિ વચ્ચેનો સમય નીચે પ્રમાણે છે. આ સમયનો બહુલક શોધો.

સમય (કલાક)	**20 - 25**	**25 - 30**	**30 - 35**	**35 - 40**	**40 - 45**	**45 - 50**	**50 - 55**
ઑર્ડરની સંખ્યા	**2**	**5**	**7**	**5**	**6**	**7**	**3**

આપણે જોઈ શકીએ કે મહત્તમ આવૃત્તિ 7 છે જે બે વર્ગો માટે છે તેથી, આપણે બહુલક શોધવા માટે આસાદિત સૂત્રનો ઉપયોગ કરીશું.

મધ્યક અને મધ્યસ્થ શોધવા માટે નીચેની ગણતરી કરવામાં આવી છે :

સમય (કલાકમાં)	**ઑર્ડરની સંખ્યા** f	**મધ્યકિંમત** x	$d = \frac{x-A}{c}$ $A = 37.5$ $c = 5$	fd	**સંચયી આવૃત્તિ** cf
20 - 25	2	22.5	– 3	– 6	2
25 - 30	5	27.5	– 2	– 10	7
30 - 35	7	32.5	– 1	– 7	14
35 - 40	5	37.5	0	0	19
40 - 45	6	42.5	1	6	25
45 - 50	7	47.5	2	14	32
50 - 55	3	52.5	3	9	35
કુલ	$n = 35$			**6**	

મધ્યક $\bar{x} = A + \frac{\Sigma fd}{n} \times c$

$= 37.5 + \frac{6}{35} \times 5$

$= 37.5 + \frac{30}{35}$

$= 37.5 + 0.8571$

$= 38.3571$

≈ 38.36

મધ્યસ્થનો વર્ગ= $\left(\frac{n}{2}\right)$મા અવલોકનનો વર્ગ

= $\left(\frac{35}{2}\right)$મા અવલોકનનો વર્ગ

= 17.5મા અવલોકનનો વર્ગ

સંચયી આવૃત્તિ પરથી જાણી શકાય કે 17મા અને 18મા અવલોકનનો વર્ગ 35 - 40 છે.

હવે $L = 35$, $cf = 14$, $f = 5$, $c = 5$ લેતાં,

મધ્યસ્થ $M = L + \frac{\frac{n}{2} - cf}{f} \times c$

$= 35 + \frac{17.5 - 14}{5} \times 5$

$= 35 + 3.5$

$= 38.5$

આસાદિત સૂત્ર પરથી, $M_o = 3M - 2\bar{x}$

$= 3(38.5) - 2(38.36)$

$= 115.5 - 76.72$

$= 38.78$

આમ, ઑર્ડરના અને તેના પ્રાપ્તિ વચ્ચેના સમયનો બહુલક 38.78 કલાક છે.

ઉદાહરણ 36 : દાંતની તકલીફથી દાંતના ડૉક્ટર પાસે જનાર વ્યક્તિઓની મુલાકાતોની સંખ્યા નીચેના કોષ્ટકમાં આપેલ છે. મુલાકાતોની સંખ્યાનો બહુલક શોધો.

મુલાકાતોની સંખ્યા	1	2	3	4 - 7	7 - 10	10 - 15
વ્યક્તિઓની સંખ્યા	17	11	18	9	4	1

આપેલ આવૃત્તિ-વિતરણ મિશ્ર વિતરણ છે અને વર્ગોની લંબાઈ અસમાન છે. તેથી આપણે બહુલક શોધવા માટે આસાદિત સૂત્રનો ઉપયોગ કરીશું. મધ્યક અને મધ્યસ્થ શોધવા માટેની ગણતરી પાછળના કોષ્ટકમાં દર્શાવેલ છે :

મુલાકાતોની સંખ્યા	વ્યક્તિઓની સંખ્યા f	મધ્યકિંમત x	fx	સંચયી આવૃત્તિ cf
1	7	1	7	7
2	11	2	22	18
3	18	3	54	36
4–7	9	5.5	49.5	45
7–10	4	8.5	34	49
10–15	1	12.5	12.5	50
કુલ	$n = 50$		**179**	

નોંધ : મધ્યકિંમત x ની કિંમતો મોટી ન હોવાથી આપણે ટૂંકી રીત વાપરવાની જરૂર નથી.

મધ્યક $\bar{x} = \frac{\Sigma fx}{n} = \frac{179}{50} = 3.58$ મુલાકાતો

મધ્યસ્થ = $\left(\frac{n}{2}\right)$મા અવલોકનની કિંમત

= $\left(\frac{50}{2}\right)$મા અવલોકનની કિંમત

= 25 મા અવલોકનની કિંમત

સંચયી આવૃત્તિ પરથી જાણી શકાય કે 25મા અવલોકનની કિંમત 3 છે.

$\therefore M = 3$ મુલાકાતો

આસાદિત સૂત્ર પરથી, $M_o = 3M - 2\bar{x}$

$= 3(3) - 2(3.58)$

$= 9 - 7.16$

$= 1.84$

આમ, દાંતના ડોક્ટરની મુલાકાતોની સંખ્યાનો બહુલક 1.84 છે.

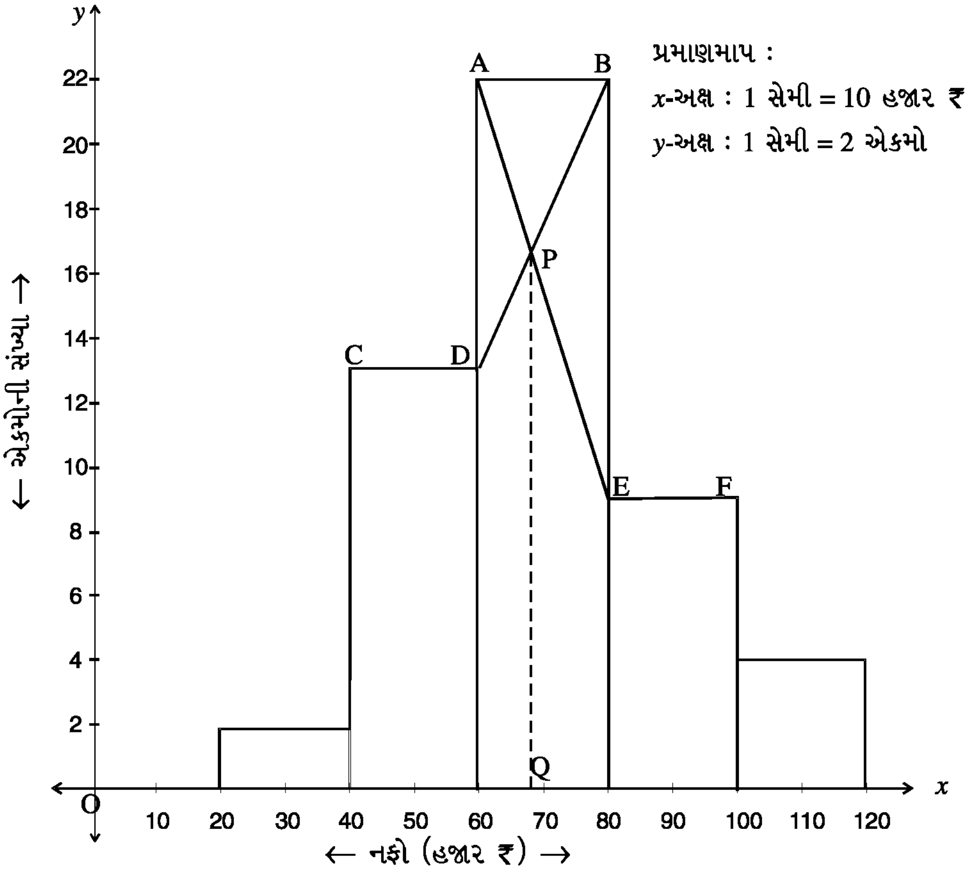
3.5.2 બહુલક માટે આલેખની રીત (Graphical Method)

જો સતત આવૃત્તિ-વિતરણમાં અસમાન લંબાઈવાળા વર્ગો હોય તો સામાન્ય સંજોગોમાં વપરાતા બહુલકના સૂત્ર (પાના નં.101)નો ઉપયોગ કરી શકાતો નથી. સમાન કે અસમાન લંબાઈવાળા વર્ગો હોય એવા સતત આવૃત્તિ-વિતરણમાં આલેખની રીતે બહુલક શોધી શકાય છે, જેમાં આવૃત્તિ-વિતરણના સ્તંભાલેખનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે. આ રીત ફક્ત એક-બહુલકીય વિતરણો માટે જ વાપરી શકાય છે.

આ રીત સમજવા માટે આપણે નીચેની માહિતીનો ઉપયોગ કરીશું જે લઘુઉદ્યોગ એકમોના નફાની (હજાર ₹માં) છે.

નફો (હજાર ₹)	20 - 40	40 - 60	60 - 80	80 - 100	100 - 120
એકમોની સંખ્યા	2	13	22	9	4

આ આવૃત્તિ-વિતરણનો સ્તંભાલેખ નીચે પ્રમાણે છે :



બહુલક શોધવા માટે આપણે સૌપ્રથમ સૌથી વધુ લંબાઈ ધરાવતા લંબચોરસને લઈશું જે મહત્તમ આવૃત્તિ ધરાવતા વર્ગ માટેનો હશે. અહીં તે વર્ગ 60 - 80 છે. આપણે આ લંબચોરસની ઉપરની બાજુને AB વડે દર્શાવીશું. હવે આપણે આ લંબચોરસની આજુબાજુના બે લંબચોરસો લઈશું. આ લંબચોરસો અનુક્રમે વર્ગો 40–60 અને 80–100 માટેના છે. આ બે લંબચોરસોની ઉપરની બાજુઓને આપણે અનુક્રમે CD અને EF વડે દર્શાવીશું. હવે આપણે બિંદુઓ A અને Eને જોડતો રેખાખંડ AE તેમ જ બીજો રેખાખંડ BD દોરીશું. AE અને BDના છેદનબિંદુને P વડે દર્શાવીશું. બિંદુ P થી x–અક્ષ પર લંબ દોરતાં તે લંબ x–અક્ષને જ્યાં મળે છે તે બિંદુને Q વડે દર્શાવીશું. ઊગમબિંદુ O અને બિંદુ Q વચ્ચેનું અંતર આપણને બહુલકની કિંમત આપશે. ઉપરના સ્તંભાલેખ પરથી જોઈ શકાય કે OQ = 68 (હજાર ₹). આમ, આ લઘુઉદ્યોગ એકમોના નફાનો બહુલક ₹ 68 (હજાર) છે.

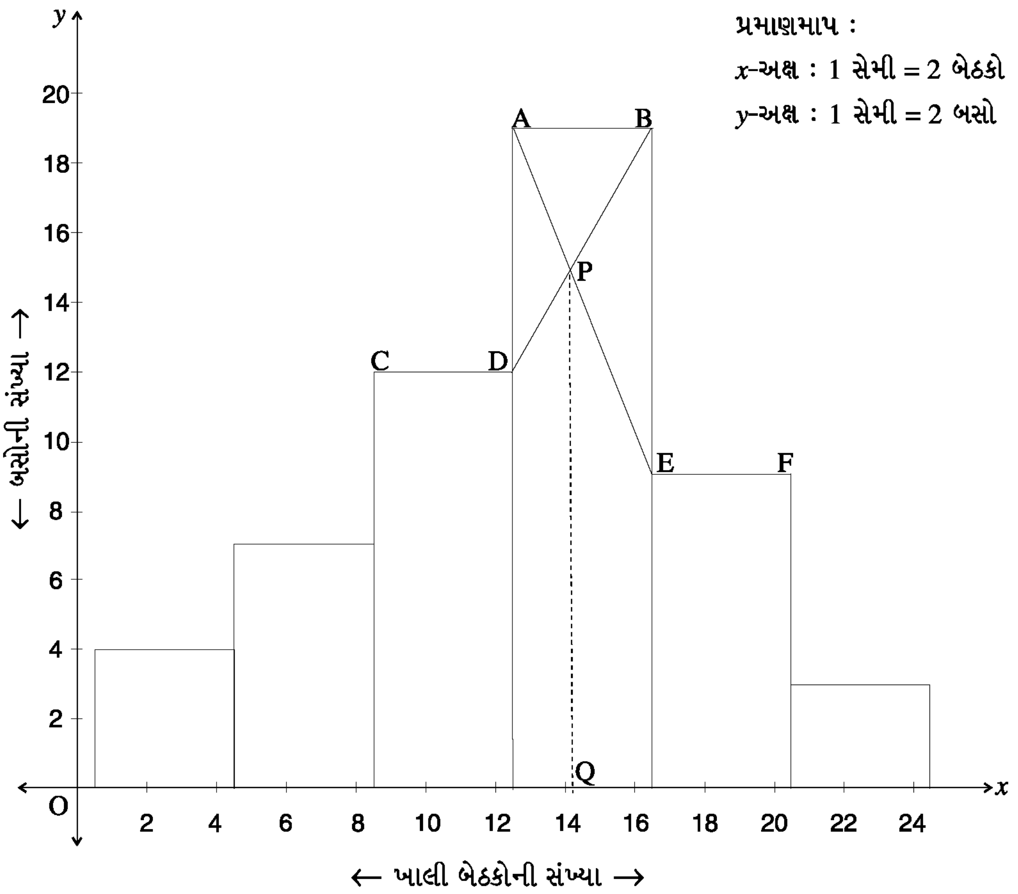
ઉદાહરણ 37 : એક ડેપોમાંથી નીકળતી બસોમાં બસદીઠ ખાલી બેઠકોની સંખ્યા નીચેની માહિતીમાં દર્શાવેલ છે. આલેખની રીતનો ઉપયોગ કરીને બહુલક શોધો.

ખાલી બેઠકોની સંખ્યા	1 - 4	5 - 8	9 - 12	13 - 16	17 - 20	21 - 24
બસોની સંખ્યા	4	7	12	19	9	3

આ અનિવારક પ્રકારનું સતત આવૃત્તિ-વિતરણ છે. તેથી આપણે સ્તંભાલેખ દોરવા માટે દરેક વર્ગનાં સીમાબિંદુ મેળવીશું.

ખાલી બેઠકોની સંખ્યા x	0.5–4.5	4.5–8.5	8.5–12.5	12.5–16.5	16.5–20.5	20.5–24.5
બસોની સંખ્યા	4	7	12	19	9	3

આ વિતરણનો સ્તંભાલેખ નીચે દોરેલ છે :



આલેખની રીતનો ઉપયોગ કરતાં OQ = 14.2 મળે છે. આમ, બસોમાં ખાલી બેઠકોની સંખ્યાનો બહુલક 14.2 છે.

ઉદાહરણ 38 : એક કંપનીના શૅરના ભાવનું જુદા જુદા દિવસોનું વિતરણ નીચેના કોષ્ટકમાં આપેલ છે. શૅરના ભાવનો બહુલક આલેખની રીતે મેળવો.

શૅરના ભાવ (₹)	**200 - 210**	**210 - 220**	**220 - 240**	**240 - 260**	**260 - 300**
દિવસોની સંખ્યા	4	13	36	16	8

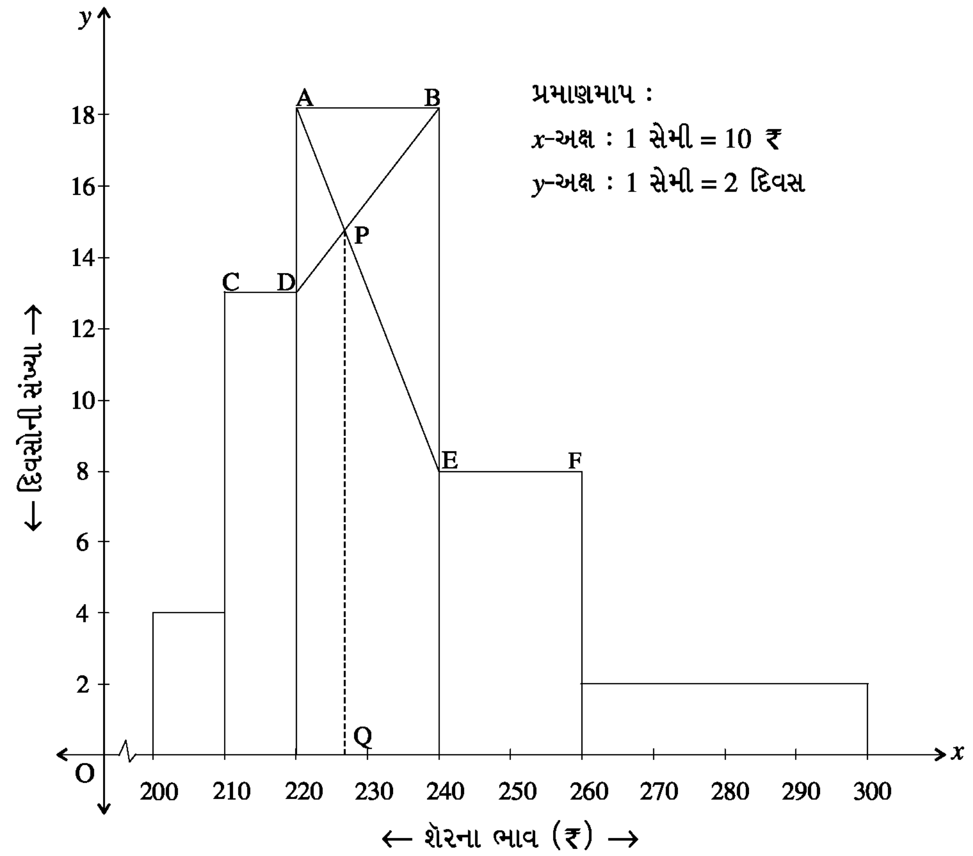
આલેખની રીતે બહુલક મેળવવા માટે સ્તંભાલેખ દોરવાનો છે. આ આવૃત્તિ-વિતરણમાં વર્ગલંબાઈ સમાન નથી, તેથી સૌપ્રથમ આપણે ન્યૂનતમ વર્ગલંબાઈના સાપેક્ષમાં સપ્રમાણ આવૃત્તિઓ મેળવીશું જે નીચેના કોષ્ટકમાં દર્શાવેલ છે :

શૅરનો ભાવ	**વર્ગલંબાઈ**	**આવૃત્તિ**	**સપ્રમાણ આવૃત્તિ**
200 - 210	10	4	$\frac{4}{10} \times 10 = 4$
210 - 220	10	13	$\frac{13}{10} \times 10 = 13$
220 - 240	20	36	$\frac{36}{20} \times 10 = 18$
240 - 260	20	16	$\frac{16}{20} \times 10 = 8$
260 - 300	40	8	$\frac{8}{40} \times 10 = 2$

દરેક વર્ગની સપ્રમાણ આવૃત્તિ = $\frac{\text{વર્ગની આવૃત્તિ}}{\text{વર્ગલંબાઈ}}$ × ન્યૂનતમ વર્ગલંબાઈ

અહીં ન્યૂનતમ વર્ગલંબાઈ 10 છે.

સપ્રમાણ આવૃત્તિ વડે દોરેલ સ્તંભાલેખ નીચે પ્રમાણે હશે :



હવે, આલેખની રીતનો ઉપયોગ કરીને OQ = 227 ₹

આમ, શૅરોના ભાવનો બહુલક ₹ 227 છે.

બહુલકના લાભ અને ગેરલાભ :

લાભ :

(1) તે સમજવામાં તેમજ ગણતરીમાં સરળ છે.

(2) તે માત્ર નિરીક્ષણથી મેળવી શકાય.

(3) તેના પર અતિ મોટાં અને અતિ નાનાં અવલોકનોની વધુ પડતી અસર થતી નથી.

(4) તેની કિંમત આલેખ વડે મેળવી શકાય છે.

ગેરલાભ :

(1) તે ચોક્કસ રીતે વ્યાખ્યાયિત થયેલ નથી.

(2) આપેલ ચલ માટે એકથી વધુ બહુલકો હોઈ શકે છે. જ્યારે કેટલીક વખત બહુલક શોધી શકાતો નથી.

(3) તે બધાં અવલોકનો પર આધારિત હોતો નથી.

(4) મધ્યકની સરખામણીમાં તેમાં નિદર્શનની સ્થિરતા ઓછી હોય છે.

(5) તે વિશેષ બૈજિક ક્રિયા માટે અનુકૂળ નથી.

સ્વાધ્યાય 3.5

1. એક વર્ગના વિદ્યાર્થીઓના બુદ્ધિઆંક (IQ) નીચે આપેલા છે. વિદ્યાર્થીના બુદ્ધિઆંકનો બહુલક શોધો.

146, 134, 143, 144, 138, 145, 153, 138, 138, 146, 140, 135.

2. નીચેનું કોષ્ટક એક બેકરીમાંથી દર દિવસે વેચાયેલ કેકની સંખ્યા દર્શાવે છે. કેકના વેચાણનો બહુલક શોધો.

કેકની સંખ્યા	10	12	13	16	17	18
દિવસોની સંખ્યા	5	9	25	16	10	7

3. એક વૃદ્ધાશ્રમની 48 વ્યક્તિઓની ઉંમરનું વિતરણ નીચે આપેલ છે. બહુલક શોધવા માટે કયું સૂત્ર યોગ્ય થશે ? કેમ ? તમે પસંદ કરેલા સૂત્રનો ઉપયોગ કરીને વૃદ્ધાશ્રમની વ્યક્તિઓની ઉંમરનો બહુલક શોધો.

ઉંમર (વર્ષ)	50 - 60	60 - 65	65 - 70	70 - 85	85 - 100
વ્યક્તિઓની સંખ્યા	6	10	19	9	4

4. દોડવાની સ્પર્ધામાં 8 સ્પર્ધકોએ લીધેલા સમય (સેકન્ડમાં) દર્શાવતી નીચેની માહિતી પરથી તેના બહુલક વિશે તમારું મંતવ્ય જણાવો.

25.2, 26.5, 28.6, 32.1, 29.0, 29.3, 31.3, 27.8

5. નીચેનું કોષ્ટક એક બાગમાંથી એકત્રિત કરેલા 86 સફરજનોના વજનની માહિતી આપે છે. સફરજનોના વજનનો બહુલક શોધો :

સફરજનનું વજન (ગ્રામ)	120 - 130	130 - 140	140 - 150	150 - 160	160 - 170	170 - 180	180 - 190
સફરજનોની સંખ્યા	8	13	19	23	10	8	5

આ માહિતી પરથી આલેખની રીતે પણ બહુલક મેળવો.

6. 50 કુટુંબોના માસિક ઘરભાડાની માહિતી નીચેના કોષ્ટકમાં આપેલ છે :

ઘરભાડું (હજાર ₹)	0–5	5–10	10–20	20–30	30–50
કુટુંબોની સંખ્યા	1	7	14	16	12

આલેખની રીતે ઘરભાડાનો બહુલક મેળવો.

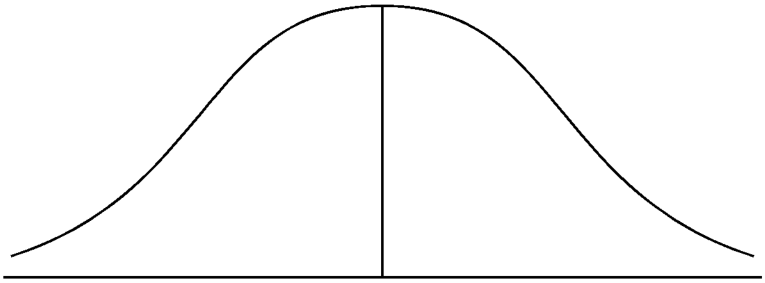
મધ્યવર્તી સ્થિતિનાં માપો માટેનાં કેટલાંક પરિણામો :

(1) જો આપેલ માહિતીમાં બધાં અવલોકનોની કિંમત સમાન હોય તો મધ્યવર્તી સ્થિતિનાં બધાં માપોની કિંમત સરખી હોય છે.

દાખલા તરીકે, એક વર્ગમાંથી પસંદ કરેલા 5 વિદ્યાર્થીઓની ઉંમર (વર્ષમાં) 15, 15, 15, 15, 15 હોય, તો મધ્યવર્તી સ્થિતિનાં બધાં માપની કિંમત 15 થાય છે.

એટલે કે, $\bar{x} = M = M_o = G = \bar{x}_w = 15$

(2) સરેરાશની આસપાસ સમાન રીતે વિતરિત થયેલ માહિતી માટે મધ્યક, મધ્યસ્થ અને બહુલકની કિંમતો સમાન હોય છે.



$\bar{x} = M = M_o$

(3) ચલ x ને કોઈ શૂન્યેતર અચલ b વડે ગુણવામાં આવે અને તેમાં અચલ a ઉમેરવામાં આવે તો ચલ $y = bx + a$ મળે છે.

મધ્યક વિશે આપણે જોયું છે કે x ના મધ્યક $\bar{x}$ નો ઉપયોગ કરીને આપણે ચલ y નો મધ્યક $\bar{y} = b\bar{x} + a$ મેળવી શકીએ છીએ. તે જ રીતે x નો મધ્યસ્થ અથવા બહુલક પ્રાપ્ત હોય તો ચલ y નો અનુક્રમે મધ્યસ્થ અથવા બહુલક શોધી શકાય છે.

y નો મધ્યસ્થ $= b$ (x નો મધ્યસ્થ) $+ a$

y નો બહુલક $= b$ (x નો બહુલક) $+ a$

ઉદાહરણ 39 :

(1) એક ચલ x નો મધ્યક 25 છે. x માંથી 3 બાદ કરવામાં આવે અને ત્યાર બાદ તેને 2 વડે ભાગવામાં આવે તો મળતા ચલનો મધ્યક શોધો.

(2) વસ્તુનો ભાવ (p) અને તેની માંગ (d) વચ્ચેનો સંબંધ $d = 50 - 2p$ છે. જો ભાવનો મધ્યસ્થ ₹ 11 હોય, તો માંગનો મધ્યસ્થ શોધો.

(3) એક કંપનીમાં કામ કરતા કર્મચારીઓના વેતનનો બહુલક ₹8500 છે. કંપનીએ કર્મચારીઓના રાહતફાળા માટે દરેક કર્મચારીના વેતનમાંથી 2 % રકમ કાપવાનો નિર્ણય લીધો છે. તે ફાળાની રકમનો બહુલક શોધો.

(1) અહીં $y = \frac{x-3}{2}$. $\bar{x} = 25$ હોવાથી

$$\bar{y} = \frac{\bar{x}-3}{2}$$

$$= \frac{25-3}{2}$$

$$= \frac{22}{2} = 11$$

આમ, y નો મધ્યક 11 છે.

(2) $d = 50 - 2p$ અને ભાવ (p) નો મધ્યસ્થ 11 છે.

∴ માંગ (d)નો મધ્યસ્થ $= 50 - 2$ (p નો મધ્યસ્થ)

$= 50 - 2\ (11)$

$= 50 - 22$

$= 28$

આમ, માંગનો મધ્યસ્થ 28 એકમો થશે.

(3) કર્મચારીઓના વેતનનો (x) બહુલક ₹8500 છે.

રાહતફાળાની રકમ (y) $= 2\ \% \times x$

$= 0.02\ x$

∴ રાહતફાળાની રકમનો (y) બહુલક $= 0.02$ (x નો બહુલક)

$= 0.02 \times 8500$

$= 170$

આમ, રાહતફાળા માટે કપાયેલ રકમનો બહુલક ₹170 છે.

મધ્યક, મધ્યસ્થ અને બહુલકની સામાન્ય સરખામણી માટે નીચેના ચિત્રનો અભ્યાસ કરો :

x = બિલ્ડિંગના માળની સંખ્યા

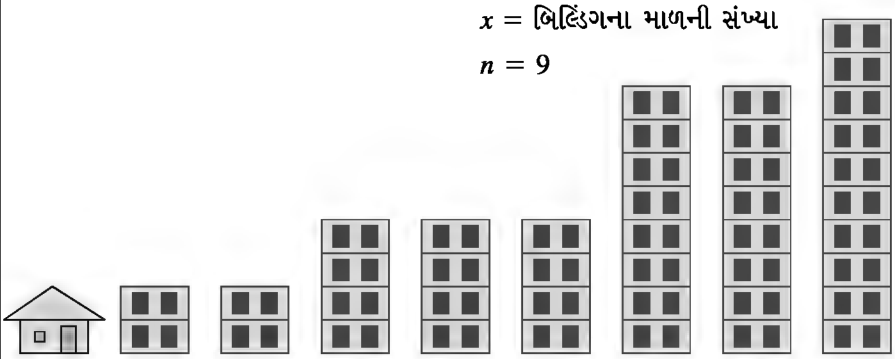
$x = 2$ $x = 10$ $x = 4$ $x = 1$ $x = 4$ $x = 8$ $x = 4$ $x = 2$ $x = 8$

મધ્યક શોધવા માટે અવલોકનોને ક્રમમાં ગોઠવવા જરૂરી નથી.

$$\bar{x} = \frac{2+10+4+1+4+8+4+2+8}{9} = \frac{43}{9} = 4.78$$

x = બિલ્ડિંગના માળની સંખ્યા

$n = 9$

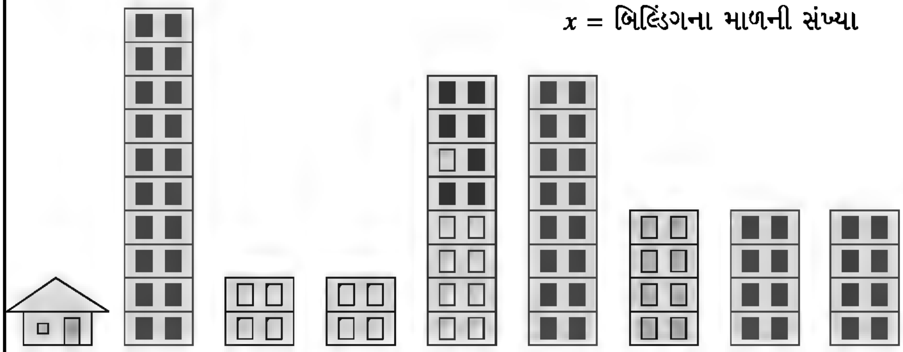


$x = 1$ $x = 2$ $x = 2$ $x = 4$ $x = 4$ $x = 4$ $x = 8$ $x = 8$ $x = 10$

મધ્યસ્થ શોધવા માટે અવલોકનોને તેઓની કિંમતના ચઢતા ક્રમમાં ગોઠવવામાં આવે છે.

$M = \left(\frac{n+1}{2}\right)$ મા અવલોકનની કિંમત = 5 મી કિંમત = 4

x = બિલ્ડિંગના માળની સંખ્યા



$x = 1$	$x = 10$,	$x = 2$, $x = 2$,	$x = 8$, $x = 8$,	$x = 4$, $x = 4$, $x = 4$
$f = 1$	$f = 1$	$f = 2$	$f = 2$	$f = 3$

બહુલક શોધવા માટે સમાન કિંમત ધરાવતાં અવલોકનોને એક સાથે ગોઠવવામાં આવે છે.

M_o = મહત્તમ આવૃત્તિ ધરાવતી કિંમત = 4

3.6 મધ્યક, મધ્યસ્થ, બહુલકનો તુલનાત્મક અભ્યાસ

આપણે મધ્યવર્તી સ્થિતિનાં વિવિધ માપોના લાભ અને ગેરલાભની ચર્ચા કરી છે. તેનાથી સ્પષ્ટ થાય છે કે કોઈ એક જ સરેરાશ બધા પ્રકારની વ્યવહારુ સમસ્યાઓમાં ઉપયોગી થઈ શકે તેમ નથી. દરેક સરેરાશના કોઈ વિશિષ્ટ ઉપયોગો હોય છે તેમજ તેની કેટલીક મર્યાદાઓ હોય છે.

તમામ સરેરાશોમાં મધ્યક સારી સરેરાશની લગભગ બધી જ જરૂરિયાતોને સંતોષે છે, તેથી માહિતીના વિશ્લેષણ માટે મહત્તમ પરિસ્થિતિઓમાં તેનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે. વિશેષ બૈજિક ક્રિયાઓ માટે અનુકૂળ હોવું તે મધ્યકનું સૌથી અગત્યનું લક્ષણ છે. આપેલ સમષ્ટિના વિવિધ ગુણધર્મોનો અભ્યાસ કરવા માટે અથવા બે સમષ્ટિઓની તુલના કરવા માટે વપરાતી ઉચ્ચતર આંકડાશાસ્ત્રીય પદ્ધતિઓમાં અભ્યાસ માટે લીધેલ ચલના પ્રતિનિધિ તરીકે મધ્યકનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે. આ બાબતો મધ્યકને મધ્યવર્તી સ્થિતિનું એક ઇષ્ટતમ (optimum) માપ બનાવે છે.

પણ જો માહિતી સરેરાશની આસપાસ સમાન રીતે વિતરિત ન થઈ હોય તો મધ્યક વડે સમગ્ર માહિતીનું સાચું પ્રતિનિધિત્વ યોગ્ય રીતે થઈ શકતું નથી. સમાજશાસ્ત્ર, ખેતીવિષયક અભ્યાસ કે ધંધાકીય પ્રવૃત્તિઓમાં આવતા ઘણા ચલો સમાન રીતે વિતરિત થયેલા મળતા નથી. આવી પરિસ્થિતિઓમાં મધ્યવર્તી સ્થિતિનું વધુ સારું માપ મધ્યસ્થ હોય છે. શિક્ષણ, કુશળતા, ગ્રાહકનો સંતોષ જેવી ગુણાત્મક માહિતી માટે મધ્યસ્થનો સરેરાશ તરીકે ઉપયોગ કરવામાં આવે છે.

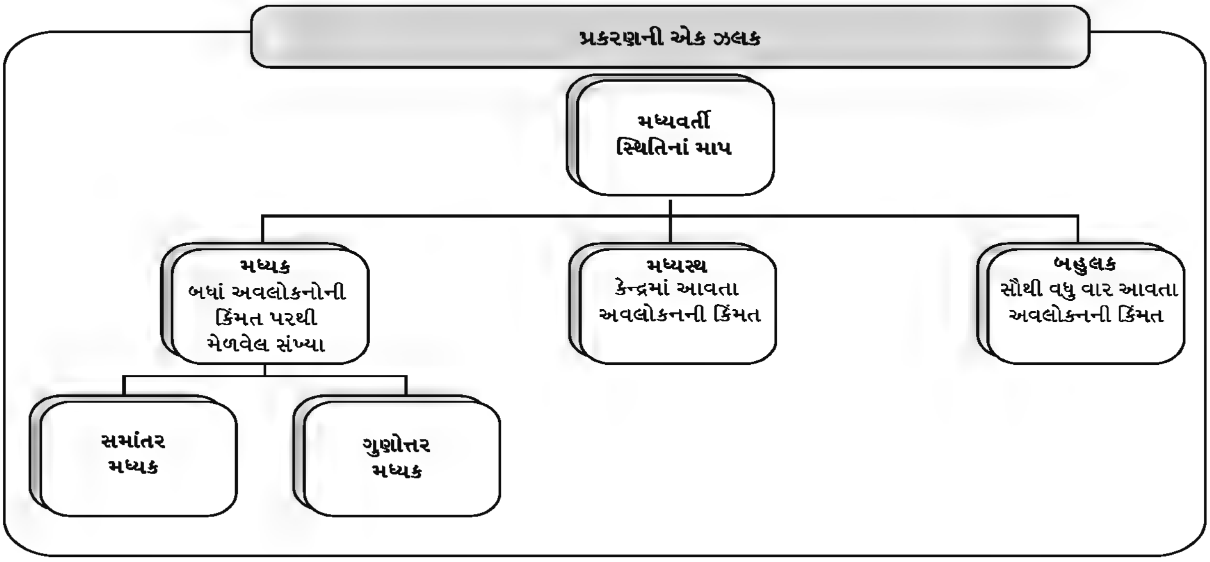
વેપાર અને વાણિજ્ય ક્ષેત્રોમાં બહુલકનો વિશેષ ઉપયોગ કરવામાં આવે છે. ગુણાત્મક માહિતી માટે પણ બહુલક ઉપયોગી નીવડે છે. રેસ્ટોરન્ટમાં પિરસાતી વાનગીઓ અને તેનો સ્વાદ નક્કી કરતી વખતે મહત્તમ ગ્રાહકોની પસંદગી અને રુચિ ધ્યાનમાં લેવાય છે તે બહુલકનું ઉદાહરણ છે. તૈયાર કપડાંની કંપનીઓ તેમજ પગરખાં બનાવતી કંપનીઓ સરેરાશ મેળવવા માટે બહુલકનો મોટા પ્રમાણમાં ઉપયોગ કરે છે.

આમ, સરેરાશની પસંદગી નીચેની બાબતો પર આધારિત હોય છે :

(1) માહિતીનું સ્વરૂપ (2) અભ્યાસ હેઠળના ચલનાં લક્ષણો (3) અભ્યાસનો હેતુ (4) માહિતીના વર્ગીકરણનો પ્રકાર (5) ઉચ્ચતર આંકડાશાસ્ત્રીય વિશ્લેષણ માટે સરેરાશની જરૂરિયાત

સારાંશ

- કોઈ પણ ચલનાં અવલોકનો જે કેન્દ્રીય કિંમત આસપાસ સંકલિત થાય છે તેને મધ્યવર્તી સ્થિતિનું માપ અથવા સરેરાશ કહેવાય છે.
- મધ્યક સૌથી વધુ પ્રચલિત સરેરાશ છે.
- ચતુર્થકો, દશાંશકો, શતાંશકોને સ્થાનીય સરેરાશો કહેવાય છે.
- અવલોકનોના સરવાળાને અવલોકનોની કુલ સંખ્યા વડે ભાગવાથી મધ્યક મળે છે.
- જો બે કે તેથી વધુ સમૂહોના મધ્યકો જ્ઞાત હોય તો સમગ્ર માહિતી માટે મિશ્ર મધ્યક શોધવામાં આવે છે.
- અવલોકનોને તેમના મહત્વના પ્રમાણમાં ભાર આપીને ભારિત મધ્યક શોધવામાં આવે છે.
- n ધન અવલોકનોના ગુણાકારના n મા મૂળને ગુણોત્તર મધ્યક કહેવાય છે.
- માહિતીને ક્રમમાં ગોઠવતાં તેના મધ્યસ્થાને આવતી કિંમતને મધ્યસ્થ કહેવાય છે.
- ચતુર્થકો, દશાંશકો અને શતાંશકો આપેલ માહિતીનાં અવલોકનોને અનુક્રમે 4, 10 અને 100 ભાગમાં વહેંચે છે.
- સૌથી વધુ આવૃત્તિ ધરાવતા અવલોકનને બહુલક કહેવાય છે.
- મધ્યક, મધ્યસ્થ અને બહુલક વચ્ચેના સૂત્ર $M_o = 3M - 2\bar{x}$ ને આસાદિત સૂત્ર કહેવાય છે.



સૂત્રોની યાદી :

(1) મધ્યક :

માહિતીનો પ્રકાર		ટૂંકી રીત
અવર્ગીકૃત માહિતી	$\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n}$	$\bar{x} = A + \frac{\Sigma d}{n}$
વર્ગીકૃત માહિતી	$\bar{x} = \frac{\Sigma fx}{n}$	$\bar{x} = A + \frac{\Sigma fd}{n} \times c$

(2) મિશ્ર મધ્યક : $\bar{x}_c = \frac{n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2 + \ldots + n_k\bar{x}_k}{n_1 + n_2 + \ldots + n_k}$

(3) ભારિત મધ્યક : $\bar{x}_w = \frac{w_1x_1 + w_2x_2 + \ldots + w_nx_n}{w_1 + w_2 + \ldots + w_n} = \frac{\Sigma wx}{\Sigma w}$

(4) ગુણોત્તર મધ્યક : $G = \sqrt[n]{x_1 \times x_2 \times \ldots \times x_n}$

મધ્યસ્થ અને અન્ય સ્થાનીય સરેરાશો :

	સ્થાનીય માપ	અવર્ગીકૃત માહિતી અસતત આવૃત્તિ-વિતરણ	સતત આવૃત્તિ-વિતરણ
(5)	મધ્યસ્થ	$M = \left(\frac{n+1}{2}\right)$ મા અવલોકનની કિંમત	$M = L + \frac{\left(\frac{n}{2}\right) - cf}{f} \times c$
(6)	j મો ચતુર્થક	$Q_j = j\left(\frac{n+1}{4}\right)$ મા અવલોકનની કિંમત	$Q_j = L + \frac{j\left(\frac{n}{4}\right) - cf}{f} \times c$
(7)	j મો દશાંશક	$D_j = j\left(\frac{n+1}{10}\right)$ મા અવલોકનની કિંમત	$D_j = L + \frac{j\left(\frac{n}{10}\right) - cf}{f} \times c$
(8)	j મો શતાંશક	$P_j = j\left(\frac{n+1}{100}\right)$ મા અવલોકનની કિંમત	$P_j = L + \frac{j\left(\frac{n}{100}\right) - cf}{f} \times c$

9. બહુલક :

અવર્ગીકૃત માહિતી	અસતત આવૃત્તિ-વિતરણ	સતત આવૃત્તિ-વિતરણ
M_o = સૌથી વધુ વાર આવતા અવલોકનની કિંમત	M_o = મહત્તમ આવૃત્તિ ધરાવતા અવલોકનની કિંમત	$M_o = L + \frac{f_m - f_1}{2f_m - f_1 - f_2} \times c$

10. આસાદિત સૂત્ર : $M_o = 3M - 2\bar{x}$

સ્વાધ્યાય 3

વિભાગ A

નીચે આપેલ બહુવિકલ્પ પ્રશ્નો માટે સાચા વિકલ્પની પસંદગી કરો :

1. કઈ સરેરાશ પર અતિ મોટા અથવા અતિ નાના કિંમતોની સૌથી વધુ અસર થાય છે ?
   (a) સમાંતર મધ્યક (b) મધ્યસ્થ (c) બહુલક (d) ગુણોત્તર મધ્યક
2. નીચેનામાંથી કઈ કિંમત આપણને મધ્યસ્થ આપશે ?
   (a) D_7 (b) Q_1 (c) P_{45} (d) P_{50}
3. નીચેનામાંથી કયા સંજોગોમાં મધ્યક શોધી શકાતો નથી ?
   (a) વર્ગલંબાઈ અસમાન હોય, (b) ખુલ્લા છેડાના વર્ગો હોય,
   (c) વર્ગોની સંખ્યા 5થી વધુ હોય, (d) અનિવારક પ્રકારના વર્ગો હોય
4. કોઈ પણ માહિતી માટે નીચેનામાંથી સાચો સંબંધ કયો ?
   (a) $\bar{x} \le G$ (b) $\bar{x} = G$ (c) $\bar{x} \ge G$ (d) $\bar{x} > G$
5. સરેરાશની આસપાસ સમાન રીતે વિતરિત થયેલી માહિતી માટે નીચેનામાંથી કયું પરિણામ સાચું છે ?
   (a) $\bar{x} = M = M_o$ (b) $\bar{x} > M > M_o$
   (c) $\bar{x} < M < M_o$ (d) $\bar{x} < M > M_o$
6. જો 10 અવલોકનોનો મધ્યક 15 હોય, તો અવલોકનોનો સરવાળો કેટલો હશે ?
   (a) 25 (b) 150 (c) 5 (d) 1.5
7. 5 અવલોકનોની માહિતી માટે $\Sigma(x-9)=0$ હોય તો મધ્યકની કિંમત કેટલી હોય ?
   (a) $\bar{x}=0$ (b) $\bar{x}=5$ (c) $\bar{x}=9$ (d) $\bar{x}=45$
8. અવલોકનો 7, 9, 9, 1, 7, 9, 4, 9, 1નો બહુલક કેટલો છે ?
   (a) 1 (b) 4 (c) 7 (d) 9
9. 50 અવલોકનોના સમૂહમાં મધ્યસ્થ એટલે શું ?
   (a) 25મા અવલોકનની કિંમત, (b) 26મા અવલોકનની કિંમત
   (c) 25.5મા અવલોકનની કિંમત (d) 26.5મા અવલોકનની કિંમત
10. 4 અને 9નો ગુણોત્તર મધ્યક કેટલો થશે ?
    (a) 4 (b) 6 (c) 6.5 (d) 36
11. એક ચલનો મધ્યક 15 અને મધ્યસ્થ 20 હોય, તો આસાદિત સૂત્રથી બહુલક કેટલો થશે ?
    (a) 30 (b) 5 (c) 35 (d) 17.5

12. 10 અવલોકનોનો મધ્યસ્થ 14 છે. જો દરેક અવલોકન બમણું થાય તો મળતાં અવલોકનોનો મધ્યસ્થ કેટલો હશે ?

(a) 10 (b) 28 (c) 7 (d) 1.4

13. એક માહિતીનાં બધાં અવલોકનોની સમાન કિંમત 16 છે, તો તેનો બહુલક કેટલો હશે ?

(a) 8 (b) 2 (c) 16 (d) 4

14. નીચેનામાંથી કયું વિધાન અસત્ય છે ?

(a) ચતુર્થકો વડે માહિતીનાં અવલોકનો 4 ભાગમાં વહેંચાય છે.

(b) મધ્યક આપેલ માહિતીનાં અવલોકનોને 2 ભાગમાં વહેંચે છે.

(c) શતાંશકો આપેલ માહિતીનાં અવલોકનોને 100 ભાગમાં વહેંચે છે.

(d) દશાંશકો આપેલ માહિતીનાં અવલોકનોને 10 ભાગમાં વહેંચે છે.

15. સ્ટીલના પાઇપ બનાવતી એક કંપનીના 6 પાઇપોની લંબાઈ (મીટરમાં) નીચે પ્રમાણે છે :

1.05, 1.15, 0.98, 1.12, 0.89, 0.95

નીચેનામાંથી કયું વિધાન સત્ય છે ?

(a) બહુલક = 1 મી (b) બહુલક = 1.15 મી (c) બહુલક = 0.98 મી (d) બહુલક પ્રાપ્ય નથી.

વિભાગ B

નીચેના પ્રશ્નોના એક વાક્યમાં જવાબ આપો :

1. મધ્યકનો કોઈ પણ એક લાભ જણાવો.
2. જો અવલોકનોનું મહત્ત્વ જુદું જુદું હોય તો કઈ સરેરાશ વાપરવી જોઈએ ?
3. ગમે તે બે સ્થાનીય સરેરાશોનાં નામ આપો.
4. મધ્યક, મધ્યસ્થ અને બહુલક વચ્ચેનું આસાદિત સૂત્ર લખો.
5. કઈ પરિસ્થિતિમાં ગુણોત્તર મધ્યક શોધી શકાતો નથી ?
6. બહુલકની વ્યાખ્યા આપો.
7. મધ્યક, મધ્યસ્થ, બહુલક વચ્ચેનું આસાદિત સૂત્ર આપનાર આંકડાશાસ્ત્રીનું નામ આપો.
8. 10 અવલોકનોનો મધ્યસ્થ 55 છે. જો મહત્તમ અવલોકનની કિંમત 100થી વધીને 110 થાય, તો મધ્યસ્થની નવી કિંમત શોધો.
9. એક ચલ x નો મધ્યક 9 છે. ચલ $y = x + 4$નો મધ્યક કેટલો હશે ?
10. નીચેનું આવૃત્તિ-વિતરણ ધરાવતા ચલનો બહુલક શોધો :

x	5	10	15	20	25
f	12	48	23	10	2

11. બે સંખ્યાઓનો મધ્યક 5 છે. જો એક સંખ્યા 6 હોય તો બીજી સંખ્યા શોધો.
12. અવલોકનો 15, 4, 7, 20, 2, 7, 13 માટે પ્રથમ ચતુર્થક મેળવો.
13. ખુલ્લા છેડાના વર્ગો હોય તેવા સતત આવૃત્તિ-વિતરણ માટે મધ્યવર્તી સ્થિતિનાં માપ તરીકે કઈ સરેરાશ મેળવી શકાય ?
14. એક ચલ માટે $Q_3 = 25.75$ હોય તો P_{75} શોધો.
15. એક ફેરિયાની દૈનિક માંગનો મધ્યસ્થ 15 મેળવેલ છે. જો તે દરેક વસ્તુ ₹10ના ભાવે વેચતો હોય તો તેના વકરાનો મધ્યસ્થ કેટલો હશે ?

વિભાગ C

નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

1. ભારિત મધ્યકની વ્યાખ્યા આપો.
2. મધ્યવર્તી સ્થિતિના માપનો અર્થ સમજાવો.
3. બહુલકના લાભ જણાવો.
4. મિશ્ર મધ્યક સમજાવો.
5. કયા પ્રકારની માહિતીમાં મધ્યક કરતાં મધ્યસ્થ ચઢિયાતું માપ હોય છે ?
6. યોગ્ય સરેરાશની પસંદગી કરવા માટે કઈ બાબતો ધ્યાનમાં લેવી જોઈએ ?
7. એક ચલના મધ્યક અને બહુલક અનુક્રમે 5.5 અને 6.4 છે. મધ્યસ્થની કિંમત શોધો.
8. બે સંખ્યાનો ગુણોત્તર મધ્યક 8 છે. જો પ્રથમ સંખ્યા 4 હોય તો બીજી સંખ્યા શોધો.
9. એક ફેક્ટરીના સાપ્તાહિક ઉત્પાદન (x)નો મધ્યક 81 એકમો છે. જો ઉત્પાદન-ખર્ચ $y = 3x + 50$ હોય, તો ખર્ચનો મધ્યક શોધો.
10. અવલોકનો $a - 5$, $a + 1$, $a + 2$, $a - 3$ અને a નો મધ્યસ્થ 10 છે. a ની કિંમત શોધો.
11. એક વર્ગના 40 વિદ્યાર્થીઓના ગણિત વિષયમાં ગુણનો મધ્યક 76 છે. જ્યારે બીજા વર્ગના 50 વિદ્યાર્થીઓ માટે તે 85 છે. બંને વર્ગના વિદ્યાર્થીઓના ગણિત વિષયના ગુણનો મધ્યક મેળવો.
12. એક વિસ્તારમાં રહેતાં કુટુંબોમાં કુટુંબદીઠ વાહનોની સંખ્યા નીચેના કોષ્ટકમાં આપી છે. વાહનોની સંખ્યાનો મધ્યસ્થ શોધો.

વાહનોની સંખ્યા	0	1	2	3	4	કુલ
કુટુંબોની સંખ્યા	2	4	9	7	3	25

13. નીચેની માહિતી પરથી ચલ x નો ભારિત મધ્યક શોધો :

ચલ x	1500	800	200
ભાર w	5	4	1

વિભાગ D

નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

1. આદર્શ સરેરાશનાં લક્ષણો જણાવો.
2. ગુણોત્તર મધ્યકની વ્યાખ્યા આપો અને તેના લાભ તથા ગેરલાભ જણાવો.
3. મધ્યવર્તી સ્થિતિનાં માપ તરીકે બહુલકનો અર્થ ઉદાહરણ સહિત સમજાવો.
4. સ્થાનીય સરેરાશો સમજાવો.
5. મધ્યવર્તી સ્થિતિનાં માપ તરીકે મધ્યસ્થ અને મધ્યકને સરખાવો.
6. કઈ સરેરાશને ઇષ્ટતમ સરેરાશ કહેવાય છે ? શા માટે ?
7. એક રાજ્યનાં ચાર વર્ષોના આર્થિક વિકાસના દર અનુક્રમે 2 %, 2.5 %, 4 %, 3 % છે. યોગ્ય સરેરાશનો ઉપયોગ કરીને સરેરાશ વિકાસદર શોધો.
8. મોબાઇલ ફોનની એક દુકાનના દૈનિક વેચાણની નીચેની માહિતી પરથી D_7 અને P_{15} શોધો અને તેમનું અર્થઘટન કરો.

મોબાઇલ ફોનની સંખ્યા	4	6	7	8	10	12
દિવસોની સંખ્યા	3	9	15	23	8	2

9. એક પરફ્યુમ ઉત્પાદકના મશીનથી ભરેલ બોટલોમાં પરફ્યુમના જથ્થાનો મધ્યક 29.6 મિલિ અને 30.4 મિલિની વચ્ચે હોવો જોઈએ. તપાસ માટે લીધેલ 7 બોટલોમાં પરફ્યુમનો જથ્થો (મિલિમાં) નીચે પ્રમાણે છે :

30.2, 28.9, 29.2, 30.1, 29.4, 31.3, 31.4

શું આ મશીન યોગ્ય રીતે કામ કરે છે ?

10. એક વર્ગના 34 છોકરાઓને મળેલા ગુણનો મધ્યક 57 છે. તે વર્ગના બધા 60 વિદ્યાર્થીઓના ગુણનો મધ્યક 59 છે. છોકરીઓના ગુણનો મધ્યક શોધો.

11. એક માહિતીમાં 50 અવલોકનોના મધ્યકની કિંમત 35 હતી. પાછળથી માલૂમ પડ્યું કે એક અવલોકનની કિંમત 50 લેવામાં આવી હતી જે ખોટી હતી. આ અવલોકનને બાદ કરતા બાકીનાં અવલોકનોનો મધ્યક શોધો.

12. અર્થશાસ્ત્ર વિષયની પરીક્ષામાં એક સમૂહના 18 વિદ્યાર્થીઓમાંથી 3 વિદ્યાર્થીઓ નાપાસ થયા. પાસ થયેલ 15 વિદ્યાર્થીઓના ગુણ નીચે પ્રમાણે છે :

42, 65, 53, 75, 43, 50, 68, 57, 79, 48, 51, 61, 55, 70, 64. બધા 18 વિદ્યાર્થીઓના ગુણનો મધ્યસ્થ શોધો.

13. એક કંપનીના દૈનિક વેચાણનો મધ્યક 126.2 છે. એક નવી જાહેરાતનીતિ અપનાવ્યા બાદ 10 દિવસના વેચાણના આંકડા નીચે પ્રમાણે છે :

156, 125, 162, 153, 130, 124, 127, 142, 149, 121. શું નવી જાહેરાતનીતિથી વેચાણનો મધ્યક વધ્યો છે તેમ કહેવાય ?

વિભાગ E

નીચેનાના ઉકેલ મેળવો :

1. જુદાં જુદાં કુટુંબોના વીજળીનાં બિલોમાં વપરાશના યુનિટોની સંખ્યા નીચેના કોષ્ટકમાં દર્શાવી છે :

યુનિટની સંખ્યા	200થી ઓછી	200 - 300	300 - 400	400 - 500	500 કે તેથી વધુ
કુટુંબોની સંખ્યા	7	13	24	16	10

વપરાશના યુનિટોની સંખ્યાનો મધ્યસ્થ શોધો.

2. એક વેપારીના સપ્તાહદીઠ નફા-નુકસાનની પ્રાપ્ય માહિતી નીચે પ્રમાણે છે. નફાનો બહુલક શોધો.

નફો (હજાર ₹)	−2 - 0	0 - 2	2 - 4	4 - 6	6 - 8	8 - 10
સપ્તાહની સંખ્યા	4	8	14	6	2	1

3. એક કરિયાણાની દુકાનમાંથી દરરોજ વેચાયેલ ઘઉંની ગૂણોની સંખ્યા નીચે આપેલ છે :

ગૂણોની સંખ્યા	25 - 29	30 - 34	35 - 39	40 - 44	45 - 49	50 - 54	55 અને વધુ
દિવસોની સંખ્યા	9	17	32	24	10	5	3

વેચાયેલ ગૂણોની સંખ્યા માટે Q_1 અને D_4 શોધો.

4. એક કૉલેજના વિદ્યાર્થીઓની ઊંચાઈ નીચેના કોષ્ટકમાં આપેલ છે. વિદ્યાર્થીઓની ઊંચાઈનો મધ્યક શોધો.

ઊંચાઈ (સેમી)	150 - 155	155 - 160	160 - 165	165 - 170	170 - 175	175 - 180	180 - 185
વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા	8	10	20	17	15	4	1

5. એક વિસ્તારમાં રહેતી 130 વ્યક્તિઓની માસિક આવક (હજાર ₹માં) નીચે પ્રમાણે છે :

આવક (હજાર ₹)	4થી ઓછી	4 - 8	8 - 12	12 - 20	20 - 28	28 - 36
વ્યક્તિઓની સંખ્યા	6	14	31	35	28	16

આવકનો મધ્યસ્થ શોધો.

6. એક જિલ્લાના 70 ગામડાઓની વસ્તી (હજારમાં) વિશેની માહિતી નીચેના કોષ્ટકમાં આપેલ છે :

વસ્તી (હજાર)	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50
ગામડાઓની સંખ્યા	6	18	22	15	9

આલેખની રીતે વસ્તીનો બહુલક શોધો.

7. એક પરીક્ષામાં 60 વિદ્યાર્થીઓએ મેળવેલા ગુણનું વિતરણ નીચે મુજબ છે. વિદ્યાર્થીઓના ગુણનો મધ્યક શોધો.

ગુણ	0 - 10	10 - 20	20 - 25	25 - 30	30 - 35	35 - 40
વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા	3	8	20	16	9	4

8. એક ઑફિસના 50 કર્મચારીઓની તેમના કમ્પ્યૂટરના વપરાશના સમયની તપાસ કરવામાં આવી. નીચેના કોષ્ટકમાં તેની વિગતો આપી છે :

સમય (કલાક)	5 - 5.5	5.5 - 6	6 - 6.5	6.5 - 7	7 - 7.5	7.5 - 8	8 - 8.5	8.5 - 9
કર્મચારીઓની સંખ્યા	1	3	5	11	15	9	4	2

કમ્પ્યૂટર વપરાશના સમય માટે ચતુર્થકો Q_1 અને Q_3 શોધો.

વિભાગ F

નીચેનાના ઉકેલ મેળવો :

1. એક શાળાના 55 વિદ્યાર્થીઓના ગુણની માહિતી નીચે આપેલ છે.

ગુણ	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60	60 - 70
વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા	4	7	11	14	9	7	3

(i) જો 30 % વિદ્યાર્થીઓ નાપાસ થયા હોય તો પાસ થવા માટેના જરૂરી ગુણ મેળવો.

(ii) જો સૌથી વધુ ગુણ મેળવનારા 5 % વિદ્યાર્થીઓને શિષ્યવૃત્તિ આપવાની હોય તો તેમાં ન્યૂનતમ ગુણ કેટલા હશે ?

2. બે બ્રાન્ડના ટાયરોની તેમના આયુષ્ય વિશેની સરખામણી કરવાની છે. નીચેની માહિતી પ્રાપ્ય છે :

આયુષ્ય (હજાર કિમી)	10 - 15	15 - 20	20 - 25	25 - 30	30 - 35	35 - 40
A બ્રાન્ડના ટાયરોની સંખ્યા	4	7	10	5	3	1
B બ્રાન્ડના ટાયરોની સંખ્યા	5	8	15	9	6	2

મધ્યકના આધારે કયા બ્રાન્ડના ટાયર વધુ સારાં છે ?

3. એક કંપનીની જુદા જુદા દિવસે વેચાયેલ મોટરોની સંખ્યાનું વિતરણ નીચે આપેલ છે. તે પરથી વેચાયલ મોટરોની સંખ્યાનો બહુલક યોગ્ય સૂત્રથી શોધો.

મોટરોની સંખ્યા	0 - 10	10 - 15	15 - 20	24	26	28
દિવસોની સંખ્યા	8	14	16	11	4	2

4. એક રાજ્યના જુદા જુદા ભાગના ખેડૂતોએ મેળવેલા એકરદીઠ ઘઉંના પાક વિશેની માહિતી નીચે આપેલ છે :

એકરદીઠ પાક (ક્વિંટલ)	20 - 25	25 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60
ખેડૂતોની સંખ્યા	12	23	45	29	7

ઘઉંના એકરદીઠ પાકના મધ્યક અને મધ્યસ્થ મેળવો.

5. એક નાટ્યગૃહના 150 પ્રેક્ષકોની ઉંમરનું વિતરણ નીચે પ્રમાણે છે :

ઉંમર (વર્ષ)	15 - 20	20 - 25	25 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60	60 - 80
પ્રેક્ષકોની સંખ્યા	6	13	19	52	34	18	8

પ્રેક્ષકોની ઉંમરનો બહુલક આલેખની રીતે શોધો.

6. એક ઉત્પાદક એવું માને છે કે તેના દૈનિક ઉત્પાદનનો બહુલક 70 છે. આ ઉત્પાદિત એકમની ડિઝાઇનમાં થોડા ફેરફાર કર્યા પછી લીધેલ માહિતીમાં ઉત્પાદનનું વિતરણ નીચે પ્રમાણે મળે છે :

એકમોની સંખ્યા	60 - 64	65 - 69	70 - 74	75 - 79	80 - 84	85 - 89	90 - 94
દિવસોની સંખ્યા	5	7	10	8	5	3	2

શું તેના ઉત્પાદનની સંખ્યાના બહુલકમાં કોઈ ફેરફાર થયો છે ?

7. એક દુકાનમાંથી દરરોજ વેચાતા બે કંપનીઓના તેલના ડબાના વેચાણના આંકડા નીચે પ્રમાણે છે, જે 40 દિવસનું વેચાણ દર્શાવે છે.

તેલના ડબાની સંખ્યા		2 - 5	6 - 9	10 - 13	14 - 17	18 - 21	22 - 25
દિવસોની સંખ્યા	કંપની X	1	3	17	9	6	4
	કંપની Y	5	9	20	3	2	1

વેચાણની સરખામણી કરવા માટે મધ્યસ્થનો ઉપયોગ કરવામાં આવે, તો કઈ કંપનીનું વેચાણ વધારે છે તેમ કહી શકાય ?

8. 50 વિવાહિત પુરુષોની તેમનાં લગ્ન-સમયની ઉંમરનું (પૂરા વર્ષમાં) વિતરણ નીચે પ્રમાણે છે :

ઉંમર (વર્ષ)	21 - 23	24 - 26	27 - 29	30 - 32	33 - 35
પુરુષોની સંખ્યા	6	21	15	6	2

આલેખની રીતે તેમની લગ્ન-સમયની ઉંમરનો બહુલક શોધો.

C. G. Khatri
(1931 - 1989)

Prof. C.G. Khatri obtained his Phd degree (1960) in Statistics from the MS University of Baroda. He was a Professor and head of the department of Statistics, Gujarat University, Ahmedabad.

Dr. Khatri did original work on multivariate distribution theory, matrix algebra, especially on g-inverses, linear models, in the estimation of variance components and location parameters in linear models, design of experiments, characterization of distributions and optimality of certain functions of matrix arguments.

He has authored or co–authored several books and about two hundred research publications in prestigious journals.

•