1 ગણ

અગત્યના મુદ્દાઓ

ગણ, ગણને દર્શાવવાની રીતો, સાન્તગણ, અનંતગણ, ખાલીગણ, એકાકી ગણ, સાર્વત્રિક ગણ, સામ્યગણ, સમાનગણ, યોગગણ અને છેદગણથી આપણે સૌ પરિચિત છીએ જ. આપણે તેના અન્ય પ્રકારો તેમજ બૈજિક ગુણધર્મોની ચર્ચા અહીં કરીશું.

(1) ઉપગણ : બે અરિક્ત ગણ A તથા B માટે, ગણ A નો પ્રત્યેક ઘટક, ગણ B નો પણ ઘટક હોય, તો A ને B નો ઉપગણ કહે છે. તેને $A \subset B$ વડે દર્શાવાય. B ને A નો અધિગણ પણ કહે છે.

(i) કોઈ પણ અરિક્ત ગણને ખાલીગણ તથા ગણ પોતે એમ બે ઉપગણ હોય જ, જ્યારે રિક્તગણને માત્ર એક જ ઉપગણ હોય.

(ii) આપેલ ગણ માટે ખાલીગણ તથા ગણ પોતે, આ ઉપગણને **અનુચિત ઉપગણ** કહે છે તથા તે સિવાયના ઉપગણને (જો હોય તો) **ઉચિત ઉપગણ** કહે છે.

(iii) જો કોઈ અરિક્ત ગણના સભ્યોની સંખ્યા n હોય, તો તે ગણના ઉપગણની સંખ્યા 2^n થાય, જ્યારે ઉચિત ઉપગણની સંખ્યા $2^n - 2$ થાય. $(n > 1)$

(iv) તમામ ગણ એ સાર્વત્રિક ગણના ઉપગણ છે અને સાર્વત્રિક ગણ એ સૌનો અધિગણ થાય.

(2) ઘાતગણ : કોઈપણ ગણ A ના સંદર્ભમાં, A ના તમામ ઉપગણથી બનતા ગણને A નો ઘાતગણ કહે છે. તેને P (A) અથવા 2^A વડે દર્શાવાય છે.

નોંધ :

(1) કોઈ પણ ગણનો ઘાતગણ ક્યારેય ખાલી ગણ ન હોઈ શકે.

(2) કોઈ પણ ગણના ઘાતગણના સભ્યોની ન્યૂનતમ સંખ્યા 1 હોય જ.

(3) જો A ના ઘટકોની સંખ્યા n હોય, તો ઘાતગણના સભ્યોની સંખ્યા 2^n.

યોગક્રિયા તથા છેદક્રિયાના બૈજિક ગુણધર્મો

યોગક્રિયા માટે :

(1) **સંવૃતત્તાનો ગુણધર્મ :** $A, B \in P(U) \Rightarrow (A \cup B) \in P(U)$

(2) $A \subset (A \cup B)$; $B \subset (A \cup B)$

(3) **સ્વયંઘાતી નિયમ :** $A \cup A = A$

(4) જો $A \subset B$ અને $C \subset D$ હોય, તો $(A \cup C) \subset (B \cup D)$

(5) **ક્રમનો નિયમ :** $A \cup B = B \cup A$

(6) **જૂથનો નિયમ :** $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

(7) $A \cup \emptyset = A$. આથી $\emptyset$ એ યોગક્રિયા માટેનો તટસ્થ ઘટક છે.

(8) $A \cup U = U$

છેદક્રિયા માટે :

(1) $A, B \in P(U) \Rightarrow (A \cap B) \in P(U)$

(2) $(A \cap B) \subset A;\ (A \cap B) \subset B$

(3) $A \cap A = A$ ને સ્વયંઘાતી નિયમ કહે છે.

(4) જો $A \subset B$ અને $C \subset D$ હોય, તો $(A \cap C) \subset (B \cap D)$

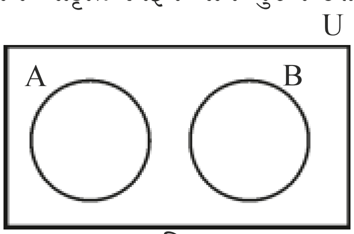
(5) **ક્રમનો નિયમ :** $A \cap B = B \cap A$

(6) **જૂથનો નિયમ :** $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

(7) $A \cap \emptyset = \emptyset$

(8) $A \cap U = A$. આથી U એ છેદક્રિયા માટેનો એકમ ઘટક છે.

(3) અલગ ગણ : કોઈ બે અરિક્ત ગણનો છેદગણ $\emptyset$ હોય, તો તે બંને ગણ અલગ ગણ છે તેમ કહેવાય. આ હકીકતને વેન આકૃતિ સ્વરૂપે નીચે મુજબ દર્શાવાય :



આકૃતિ 1.1
$A \cap B = \emptyset$

→ ત્રણ અરિક્ત ગણ A, B તથા C માટે, કોઈ પણ બે ગણનો છેદગણ $\emptyset$ હોય, તો, તે પરસ્પર અલગ ગણ દર્શાવે છે તેમ કહેવાય.

→ ગણ A તથા ગણ B માટે,
$P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$, પરંતુ $P(A \cup B) \neq P(A) \cup P(B)$

→ વિધાનો (i) $A \subset B$ (ii) $A \cup B = B$ તથા (iii) $A \cap B = A$ તાર્કિક રીતે સમાન છે.

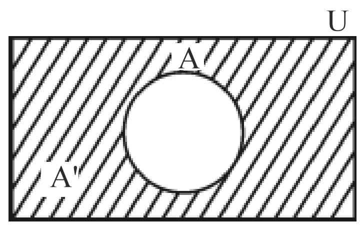
- **વિભાજનના નિયમો :** કોઈ પણ ત્રણ ગણ $A, B, C \in P(U)$ માટે,

  (i) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ તથા

  (ii) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ ને વિભાજનના નિયમો કહે છે.

(4) પૂરકગણ : $A \in P(U)$ માટે, સાર્વત્રિક ગણ U માં હોય પરંતુ ગણ A માં ન હોય તેવા તમામ સભ્યોથી બનતા ગણને A નો પૂરકગણ કહે છે. તેને A' કે A^c વડે દર્શાવાય. ટૂંકમાં, A' અથવા $A^c = \{x \mid x \in U, x \notin A\}$

વેન આકૃતિ સ્વરૂપે A' ને સામે મુજબ દર્શાવાય.



આકૃતિ 1.2

(i) $(A')' = A$ (ii) $\emptyset' = U$ તથા $U' = \emptyset$ (iii) $A \cup A' = U$

(iv) $A \cap A' = \emptyset$ (v) જો $A \subset B \Leftrightarrow B' \subset A'$

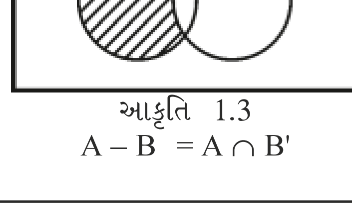
દ'મોર્ગનના નિયમો : બે ગણ $A, B \in P(U)$ માટે,

(i) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ તથા (ii) $(A \cap B)' = A' \cup B'$ ને **દ'મોર્ગનના નિયમો** કહે છે.

(5) તફાવત ગણ : ગણ $A, B \in P(U)$ હોય તો, ગણ Aમાં હોય પરંતુ ગણ Bમાં ન હોય તેવા તમામ સભ્યોથી બનતા ગણને ગણ A તથા ગણ B નો તફાવત ગણ કહે છે. તેને $A - B$ વડે દર્શાવાય.

ટૂંકમાં, $A - B = \{x \mid x \in A, x \notin B\}$

તેને વેન આકૃતિ સ્વરૂપે આકૃતિ 1.3 મુજબ દર્શાવાય.



આકૃતિ 1.3
$A - B = A \cap B'$

યાદ રાખો

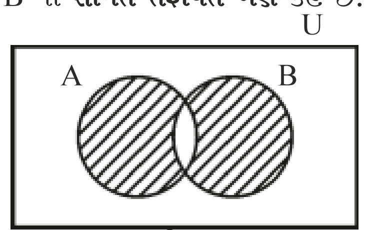
(i) $A - B = A \cap B' = A - (A \cap B)$ (ii) $U - A = A'$

(iii) જો $A \subset B$ હોય, તો $A - B = \emptyset$

(6) સંમિત તફાવત ગણ : બે ગણ $A, B \in P(U)$ હોય તો, ગણ A માં હોય અથવા ગણ Bમાં હોય પરંતુ ગણ A તથા ગણ B બંનેમાં ન હોય તેવા તમામ સભ્યોથી બનતા ગણને ગણ A તથા ગણ B નો **સંમિત તફાવત ગણ** કહે છે. તેને સંકેતમાં $A \Delta B$ વડે દર્શાવાય.

ટૂંકમાં, $A \Delta B = \{x \mid x A \cup B, x \notin A \cap B\}$

તેને વેન આકૃતિ સ્વરૂપે આકૃતિ 1.4 મુજબ દર્શાવાય.



આકૃતિ 1.4
$A \Delta B$

યાદ રાખો

(i) $A \Delta A = \emptyset$ (ii) $A \Delta \emptyset = A$ (iii) $A \Delta U = U - A = A'$

(iv) $(A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A) = A \Delta B$

સાન્તગણનો મૂળ અંક : જો A સાન્તગણ હોય તો, A ના સભ્યોની સંખ્યાને ગણ A નો **મૂળ અંક** કહે છે. તેને $n(A)$ વડે દર્શાવાય.

અગત્યનાં પરિણામો :

સાર્વત્રિક ગણ U ના બે સાન્ત ઉપગણ A તથા B માટે

(1) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ જ્યાં $n(A \cap B) \neq 0$ (એટલે કે, $(A \cap B) \neq \emptyset$)

જો $(A \cap B) = \emptyset$ હોય, તો $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$ મળે.

વળી, $n(A \cup B) = n(A \cap B') + n(B \cap A') + n(A \cap B)$

$= n(A - B) + n(B - A) + n(A \cap B)$ દ્વારા પણ દર્શાવી શકાય.

(2) ગણ A તથા ગણ B માટે,

$n(A \cap B') = n(A) - n(A \cap B) = n(A - B)$

(3) ગણ A તથા ગણ B માટે,

$n(B \cap A') = n(B) - n(A \cap B) = n(B - A)$

(4) ગણ A તથા ગણ B માંથી બરાબર કોઈ એક જ ગણમાં હોય, તેવા સભ્યોની સંખ્યા

$= n(A) + n(B) - 2n(A \cap B)$

$= n(A - B) + n(B - A)$

$= n(A \cap B') + n(B \cap A')$

(5) ગણ A ના પૂરકગણના સભ્યોની સંખ્યા $= n(A') = n(U) - n(A)$

સાર્વત્રિક ગણ Uના ત્રણ સાન્ત ઉપગણ A, B તથા C માટે,

(1) ઓછામાં ઓછા કોઈ એક ગણમાં હોય, તેવા ઘટકોની સંખ્યા,

$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C)$

(2) (i) $n(A \cap B' \cap C') = n(A - (B \cup C)')$

$= n(A) - n(A \cap B) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C)$

(ii) $n(A' \cap B \cap C') = n(B - (A \cup C)')$

$= n(B) - n(B \cap A) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$

(iii) $n(A' \cap B' \cap C) = n(C - (A \cup B)')$

$= n(C) - n(C \cap A) - n(C \cap B) + n(A \cap B \cap C)$

(3) $n(A \cup B \cup C)' = n(A' \cap B' \cap C') = n(U) - n(A \cup B \cup C)$

(4) ત્રણ ગણમાંથી બરાબર એક જ ગણમાં હોય, તેવા ઘટકોની સંખ્યા =
$n(A) + n(B) + n(C) - 2n(A \cap B) - 2n(B \cap C) - 2n(C \cap A) + 3n(A \cap B \cap C)$

(5) (i) $n(A \cap B \cap C') = n(A \cap B) - n(A \cap B \cap C)$

(ii) $n(B \cap C \cap A') = n(B \cap C) - n(A \cap B \cap C)$

(iii) $n(C \cap A \cap B') = n(C \cap A) - n(A \cap B \cap C)$

(6) ત્રણ ગણમાંથી બરાબર બે જ ગણમાં હોય, તેવા ઘટકોની કુલ સંખ્યા
$= n(A \cap B \cap C') + n(B \cap C \cap A') + n(C \cap A \cap B')$
$= n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A) - 3\,n(A \cap B \cap C)$

(7) ત્રણ ગણમાંથી ઓછામાં ઓછા બે ગણમાં હોય, તેવા ઘટકોની કુલ સંખ્યા
$= n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A) - 2n(A \cap B \cap C)$

$\rightarrow$ સાન્ત ગણ $A_1, A_2, A_3, \dots A_n$ માટે,

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i,$$

: બહુ વિકલ્પી પ્રશ્નો :

(1) $A = \{x \mid 2\sin x - \sqrt{3} = 0;\ 0 < x < \pi\}$ તથા $B = \{x \mid 2\cos x + 1 = 0;\ 0 < x < 2\pi\}$ હોય, તો $A \cap B$ શોધો.

(A) $\emptyset$ (B) $\left\{\frac{\pi}{3}\right\}$ (C) $\left\{\frac{2\pi}{3}\right\}$ (D) $\left\{\frac{5\pi}{6}\right\}$

ઉકેલ : $A = \{x \mid 2\sin x - \sqrt{3} = 0\}$

$\therefore 2 \sin x = \sqrt{3}$

$\therefore \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} > 0$

હવે $x \in (0, \pi)$ હોવાથી

$x = \frac{\pi}{3}$ અથવા $\frac{2\pi}{3}$

$\therefore A = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right\}$

$B = \{x \mid 2 \cos x + 1 = 0\}$

$\therefore 2 \cos x = -1$

$\therefore \cos x = \frac{-1}{2} < 0$

વળી, $x \in (0, 2\pi)$ આપેલ છે.

પરંતુ $\cos x < 0$ હોવાથી, $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ મળે.

$\therefore x = \pi - \frac{\pi}{3}$ અથવા $\pi + \frac{\pi}{3}$

$\therefore x = \frac{2\pi}{3}$ અથવા $\frac{4\pi}{3}$

$\therefore B = \left\{\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right\}$

$\therefore A \cap B = \left\{\frac{2\pi}{3}\right\}$

નોંધ : $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} > 0$ તથા $\cos x = -\frac{1}{2} < 0$ હોવાથી P(x) બીજા ચરણમાં હોય. $x \in (0, 2\pi)$ હોવાથી

$x = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$.

જવાબ : (C)

(2) જો $U = \{x \mid x^5 - 6x^4 + 11x^3 - 6x^2 = 0 ; x \in R\}$ હોય તથા $A = \{x \mid x^2 - 5x + 6 = 0 ; x \in R\}$ અને $B = \{x \mid x^2 - 3x + 2 = 0 ; x \in R\}$ હોય, તો નીચેના જોડકાં જોડો :

P	Q
(i) $A \cup B$	(a) $\{2\}$
(ii) $A \cap B$	(b) $\{1, 3\}$
(iii) $A \Delta B$	(c) $\{3\}$
(iv) $(A - B)$	(d) $\{1, 2, 3\}$

(A) (i) → (d), (ii) → (a), (iii) → (b), (iv) → (c)

(B) (i) → (a), (ii) → (b), (iii) → (c), (iv) → (d)

(C) (i) → (c), (ii) → (b), (iii) → (a), (iv) → (d)

(D) આપેલ પૈકી એકપણ નહિ

ઉકેલ : $x^5 - 6x^4 + 11x^3 - 6x^2 = 0$

$\therefore x^2 (x^3 - 6x^2 + 11x - 6) = 0$

$\therefore x^2 (x - 1) (x^2 - 5x + 6) = 0$ (શેષ પ્રમેય પરથી)

$\therefore x^2 (x - 1) (x - 2) (x - 3) = 0$

$\therefore x = 0$ અથવા $x = 1$ અથવા 2 અથવા 3

$\therefore U = \{0, 1, 2, 3\}$ મળે

હવે, $A = \{x \mid x^2 - 5x + 6 = 0\}$, જ્યાં $x \in R$ છે.

હવે, $x^2 - 5x + 6 = (x - 2) (x - 3) = 0$

$\therefore x = 2$ અથવા $x = 3$ આથી, $A = \{2, 3\}$

વળી, $B = \{x \mid x^2 - 3x + 2 = 0; x \in R\}$ છે.

$\therefore x^2 - 3x + 2 = (x - 2) (x - 1) = 0$

$\therefore x = 1$ અથવા $x = 2$ મળે. આથી, $B = \{1, 2\}$

આથી, (i) $A \cup B = \{1, 2, 3\} \rightarrow (d)$

(ii) $A \cap B = \{2\} \rightarrow (a)$.

(iii) $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B) = \{1, 2, 3\} - \{2\} = \{1, 3\} \rightarrow (b)$

(iv) $A - B = \{3\} \rightarrow (c)$ મળે. **જવાબ : (A)**

(3) જો $2 \le i \le 4$; $i \in A$, $1 \le j \le 5$; $j \in B$ તથા $2 \le k \le 4$; $k \in C$ હોય તેમજ $S_9 = \{a_i, b_j, c_k) \mid i + j + k = 9\}$ હોય તો S_9 ના કુલ ઘટકોની સંખ્યા ...... હોય.

(A) 6 (B) 7 (C) 9 (D) 10

ઉકેલ : $i \in A$ તથા $2 \le i \le 4$ હોવાથી, $i \ne 1$

જો $i = 2$ હોય તો, $j + k = 7$ થાય.

$\therefore$ $j = 3$ તથા $k = 4$, $j = 4$ તથા $k = 3$ અને $j = 5$ તથા $k = 2$ મળે.

પરંતુ $2 \le k \le 4$ હોવાથી, $j = 2$ અને $k = 5$ શક્ય નથી તથા $j = 1$, $k = 6$ પણ શક્ય નથી.

$\therefore$ S_9 ના શક્ય ઘટકો (2, 3, 4), (2, 4, 3), (2, 5, 2) મળે.

જો $i = 3$ હોય, તો $j + k = 6$ થાય.

$\therefore$ $j = k = 3$ તેમજ $j = 2, k = 4$ અને $j = 4, k = 2$ શક્ય બને, પરંતુ $j = 5$ તથા $k = 1$ શક્ય નથી, $j = 1$ અને $k = 5$ પણ શક્ય નથી.

$\therefore$ S_9 માં (3, 3, 3), (3, 2, 4), (3, 4, 2) મળે.

જો $i = 4$ હોય તો, $j + k = 5$ થાય.

આથી $j = 1, k = 4$ તેમજ $j = 2, k = 3$ તથા $j = 3, k = 2$ શક્ય બને.પરંતુ $j = 4, k = 1$ શક્ય નથી.

$\therefore$ S_9 માં (4, 1, 4), (4, 2, 3) અને (4, 3, 2) મળે.

આમ, S_9 ના કુલ (4, 1, 4), (2, 5, 2), (3, 2, 4), (3, 3, 3), (3, 4, 2), (4, 2, 3), (4, 3, 2) (2, 4, 3), (2, 3, 4) જેવા નવ ઘટકો મળે. **જવાબ : (C)**

(4) ગણિત તથા ભૌતિકવિજ્ઞાનની થયેલ પરીક્ષા પૈકી 15 % વિદ્યાર્થીઓ ભૌતિકવિજ્ઞાનમાં અનુત્તીર્ણ થયેલ છે તથા 75% વિદ્યાર્થીઓ આ બંને વિષયમાં ઉત્તીર્ણ થયેલ છે. જો માત્ર ભૌતિક વિજ્ઞાનમાં ઉત્તીર્ણ થયેલ વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા 120 હોય, તો કુલ ...... વિદ્યાર્થીઓએ પરીક્ષા આપી હશે.

(A) 1000 (B) 1200 (C) 1100 (D) 800

ઉકેલ : ધારો કે x વિદ્યાર્થીઓએ પરીક્ષા આપી છે.

A : ભૌતિકવિજ્ઞાનમાં ઉત્તીર્ણ થયેલ વિદ્યાર્થીઓનો ગણ

B : ગણિતમાં ઉત્તીર્ણ થયેલ વિદ્યાર્થીઓનો ગણ

$A \cap B$: બંને વિષયમાં ઉત્તીર્ણ થયેલ વિદ્યાર્થીઓનો ગણ

હવે 75 % વિદ્યાર્થીઓ બંને વિષયમાં ઉત્તીર્ણ થયેલ છે.

$\therefore n(A \cap B) = \dfrac{75x}{100}$; આ જ રીતે, $n(A) = \dfrac{85x}{100}$

માત્ર, ભૌતિક વિજ્ઞાનમાં પાસ થયેલ વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા 120 છે.

$\therefore n(A \cap B') = 120$

$\therefore n(A) - n(A \cap B) = 120$

$\therefore \dfrac{85x}{100} - \dfrac{75x}{100} = 120$

$\therefore \dfrac{10x}{100} = 120$

$\therefore x = 1200$

$\therefore$ 1200 વિદ્યાર્થીઓએ પરીક્ષા આપી હશે.

જવાબ : (B)

(5) વિદ્યાર્થીઓને તેમની પસંદગીના ભિન્ન વિષયો પર કરેલ સર્વેક્ષણ અનુસાર મળેલ પરિણામો નીચે મુજબ છે, જ્યાં $n(U) = 30$ છે.

20 વિદ્યાર્થીઓને ગણિત પસંદ છે, 15 વિદ્યાર્થીઓને ભૌતિકવિજ્ઞાન પસંદ છે, 12 વિદ્યાર્થીઓને રસાયણવિજ્ઞાન પસંદ છે, 9 વિદ્યાર્થીઓને ગણિત તથા રસાયણવિજ્ઞાન પસંદ છે, 6 વિદ્યાર્થીઓને ગણિત તથા ભૌતિકવિજ્ઞાન પસંદ છે, 4 વિદ્યાર્થીઓને રસાયણ વિજ્ઞાન તથા ભૌતિક વિજ્ઞાન પસંદ છે, 2 વિદ્યાર્થીઓને ત્રણેય વિષયો પસંદ છે.

આ સર્વેક્ષણ પરથી નીચેનાં જોડકાં જોડો :

પસંદગીના વિષયો	**વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા**
(i) ઓછામાં ઓછો 1 વિષય પસંદ હોય	(a) 0
(ii) ઓછામાં ઓછા 2 વિષયો પસંદ હોય	(b) 28
(iii) વધુમાં વધુ 2 વિષયો પસંદ હોય	(c) 30
(iv) એકપણ વિષય પસંદ ન હોય	(d) 15

(A) (i) $\rightarrow$ (b), (ii) $\rightarrow$ (c), (iii) $\rightarrow$ (d), (iv) $\rightarrow$ (a)

(B) (i) $\rightarrow$ (c), (ii) $\rightarrow$ (d), (iii) $\rightarrow$ (b), (iv) $\rightarrow$ (a)

(C) (i) $\rightarrow$ (a), (ii) $\rightarrow$ (c), (iii) $\rightarrow$ (b), (iv) $\rightarrow$ (d)

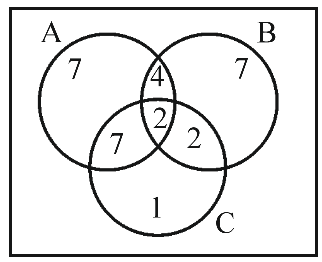
(D) (i) $\rightarrow$ (a), (ii) $\rightarrow$ (b), (iii) $\rightarrow$ (c), (iv) $\rightarrow$ (d)

ઉકેલ : ધારો કે,

A = ગણિત પસંદ હોય તેવા વિદ્યાર્થીઓનો ગણ

B = ભૌતિકવિજ્ઞાન પસંદ હોય તેવા વિદ્યાર્થીઓનો ગણ

C = રસાયણ વિજ્ઞાન પસંદ હોય તેવા વિદ્યાર્થીઓનો ગણ



આકૃતિ 1.15

અહીં, $n(A) = 20, n(B) = 15; n(C) = 12$

$n(C \cap A) = 9$, $n(A \cap B) = 6$; $n(B \cap C) = 4$, $n(A \cap B \cap C) = 2$ આપેલ છે, તો ઉપર આપેલી વેન આકૃતિ પરથી સ્પષ્ટ છે કે, જેમને ઓછામાં ઓછો એક વિષય પસંદ હોય તેવા વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા 30 છે. આમ, (i) $\rightarrow$ (c), (જવાબ (B) નક્કી થયો.)

ઓછામાં ઓછા બે વિષય પસંદ હોય તેવા વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા 15 છે. (ii) $\rightarrow$ (d)

વધુમાં વધુ 2 વિષય પસંદ હોય તેવા વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા 28 છે. (iii) $\rightarrow$ (b)

તથા એક પણ વિષય પસંદ ન હોય તેવો કોઈ વિદ્યાર્થી નથી. (iv) $\rightarrow$ (a)

આમ, (i) $\rightarrow$ (c), (ii) $\rightarrow$ (d), (iii) $\rightarrow$ (b), (iv) $\rightarrow$ (a) મળે. **જવાબ : (B)**

(6) જો $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 25; x, y \in R\}$ અને $B = \{(x, y) \mid 9x^2 + y^2 = 144, x, y \in R\}$ હોય તો $A \cap B$ નાં ઘટકોની સંખ્યા ...... મળે.

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 1

ઉકેલ : અહીં $x^2 + y^2 = 25$ તથા $9x^2 + y^2 = 144$ આપેલ છે.

$\therefore\ 9x^2 + y^2 = 144$ તથા $9x^2 + 9y^2 = 225$

$\therefore\ 8y^2 = 81$

$\therefore\ y^2 = \frac{81}{8}$ આથી, $y = \pm\frac{9}{2\sqrt{2}}$

સમીકરણ $x^2 + y^2 = 25$ માં $y^2 = \frac{81}{8}$ મૂકતાં, $x^2 + \frac{81}{8} = 25$

$\therefore\ x^2 = 25 - \frac{81}{8} = \frac{119}{8}$ આથી, $x = \pm \frac{\sqrt{119}}{2\sqrt{2}}$

આથી $\left(\frac{\sqrt{119}}{2\sqrt{2}}, \frac{9}{2\sqrt{2}}\right), \left(\frac{-\sqrt{119}}{2\sqrt{2}}, \frac{9}{2\sqrt{2}}\right), \left(\frac{-\sqrt{119}}{2\sqrt{2}}, \frac{-9}{2\sqrt{2}}\right), \left(\frac{\sqrt{119}}{2\sqrt{2}}, \frac{-9}{2\sqrt{2}}\right)$ એમ ચાર ઘટક છેદગણમાં મળે.

જવાબ : (C)

(7) બે અરિક્ત ગણ A તથા B માટે, $4n(A) = 3n(B) = 2n(A \cup B)$ તથા $n(A \cap B) = 15$ હોય, તો $n(A \cup B) = ...$

(A) 45 (B) 90 (C) 135 (D) 180

ઉકેલ : ધારો કે $4n(A) = 3n(B) = 2n(A \cup B) = 12x$

$\therefore n(A) = 3x;\ n(B) = 4x$ તથા $n(A \cup B) = 6x$ મળે.

હવે, $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

$\therefore 6x = 3x + 4x - 15$

$\therefore x = 15$

$\therefore n(A \cup B) = 6x = 6(15) = 90$ **જવાબ : (B)**

(8) જો $\{x \mid x + \frac{1}{x} \le -2;\ x \in Z - \{0\}\}$ નો ઉકેલ ગણ એ કોઈ ગણ A હોય, તો $A' = ...$ જ્યાં, $U = Z$

(A) Z (B) Z^- (C) $Z^+ \cup \{0\}$ (D) N

ઉકેલ : $x + \frac{1}{x} \le -2$

$\therefore \frac{x^2+1}{x} \le -2$

$\therefore \frac{x^2+1}{x} + 2 \le 0$

$\therefore \frac{x^2+1+2x}{x} \le 0$

$\therefore \frac{(x+1)^2}{x} \le 0$

આ $x < 0$ માટે જ સત્ય બને. $((x+1)^2 \ge 0)$

$\therefore A = Z^-$ સત્ય બને. આથી, $A' = Z^+ \cup \{0\}$ **જવાબ : (C)**

(9) ગણ A ના n ઘટકોનો સરવાળો $S_n = n^2$ થાય, જ્યાં $n \in N$ અને ગણ Bના ઘટકો કોઈ સમાંતર શ્રેણીનાં ત્રણ ક્રમિક પદો $k + 2, 2k + 5, 4k + 6$ હોય તો $A' \cup B' = ...$ જ્યાં $U = N$

(A) $N - \{9\}$ (B) N (C) $N \cup \{0\}$ (D) $\{1, 3, 4, 5, 7, 9, 14\}$

ઉકેલ : $S_n = n^2$, જ્યાં $n \in N$ છે.

$\therefore t_n = S_n - S_{n-1}$ પરથી, $t_n = n^2 - (n-1)^2$

$= n^2 - (n^2 - 2n + 1)$

$= -1 + 2n$ મળે.

$\therefore$ A = {1, 3, 5, 7,...}

વળી, $k + 2$, $2k + 5$ તથા $4k + 6$ એ ગણ B માટે, કોઈ સમાંતર શ્રેણીનાં ત્રણ ક્રમિક પદો હોય તો,

$2(2k + 5) = k + 2 + 4k + 6$

$\therefore\ 4k + 10 = 5k + 8$

$\therefore\ k = 2$

$\therefore$ B = {4, 9, 14}

આથી, A ∩ B = {9}

$\therefore\ A' \cup B' = (A \cap B)' = N - \{9\}$ **જવાબ :** (A)

(10) 10000 કુટુંબની વસતિ ધરાવતા એક શહેરમાં સર્વેક્ષણ પરથી માલૂમ પડ્યું કે 40 % કુટુંબ વર્તમાનપત્ર P વાંચે છે, 20 % કુટુંબ વર્તમાનપત્ર Q વાંચે છે તથા 10 % કુટુંબ વર્તમાનપત્ર R વાંચે છે તેમજ 5 % કુટુંબ વર્તમાનપત્ર P તથા Q વાંચે છે, 3 % કુટુંબ વર્તમાનપત્ર Q તથા R વાંચે છે તેમજ 4 % કુટુંબ વર્તમાનપત્ર P તથા R વાંચે છે. જ્યારે 2 % કુટુંબ ત્રણેય વર્તમાનપત્ર વાંચે છે તો માત્ર વર્તમાનપત્ર P વાંચતા હોય તેવાં કુટુંબની સંખ્યા ...... હોય.

(A) 3000 (B) 3100 (C) 3200 (D) 3300

ઉકેલ : ધારો કે A = વર્તમાનપત્ર P વાંચનાર કુટુંબોની સંખ્યા

B = વર્તમાનપત્ર Q વાંચનાર કુટુંબોની સંખ્યા

C = વર્તમાનપત્ર R વાંચનાર કુટુંબોની સંખ્યા

A ∩ B = વર્તમાનપત્ર P તથા Q વાંચનાર કુટુંબોની સંખ્યા

B ∩ C = વર્તમાનપત્ર Q તથા R વાંચનાર કુટુંબોની સંખ્યા

C ∩ A = વર્તમાનપત્ર R તથા P વાંચનાર કુટુંબોની સંખ્યા

A ∩ B ∩ C = ત્રણેય વર્તમાનપત્ર વાંચનાર કુટુંબોની સંખ્યા

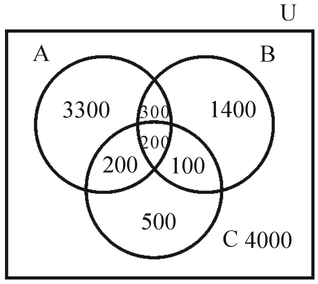
અહીં, $n(U) = 10000$ છે. આથી $n(A) = \dfrac{40 \times 10000}{100} = 4000$

$n(B) = \dfrac{20 \times 10000}{100} = 2000$; $n(C) = \dfrac{10 \times 10000}{100} = 1000$

$n(A \cap B) = \dfrac{5 \times 10000}{100} = 500$; $n(B \cap C) = \dfrac{3 \times 10000}{100} = 300$

$n(C \cap A) = \dfrac{4 \times 10000}{100} = 400$; $n(A \cap B \cap C) = \dfrac{2 \times 10000}{100} = 200$

આથી, નીચેની વેન આકૃતિ પરથી સ્પષ્ટ છે કે માત્ર વર્તમાનપત્ર P વાંચતા હોય તેવાં કુટુંબોની સંખ્યા 3300 છે.



જવાબ : (D)

આકૃતિ 1.16

બીજી રીત :

વેન આકૃતિની મદદ વગર દાખલો નીચે મુજબ ગણી શકાય :

$n(A \cap B' \cap C') = n[A \cap (B \cup C)'] = n\,[A - (A \cap (B \cup C)] = n(A) - n\,(A \cap (B \cup C))$

$= n(A) - n(A \cap B) - n\,(A \cap C) + n\,(A \cap B \cap C)$

$= 4000 - 500 - 400 + 200 = 3300$ **જવાબ :** (D)

(11) ત્રણ અરિક્ત ગણ A, B તથા C માટે, $A \cap B = A \cap C$ તેમજ $A \cup B = A \cup C$ છે, તો નીચેનામાંથી કયું સત્ય બને ? (IIT : 2009)

(A) $A \cap B = \emptyset$ (B) $A = B$ (C) $A = C$ (D) $B = C$

ઉકેલ : ધારો કે $x \in B$ છે.

વિકલ્પ (i) : $x \in A$		**વિકલ્પ (ii) :** $x \notin A$	
$\therefore x \in A \cap B$	$(x \in B)$	$\therefore x \in A \cup B$	$(x \in B)$
$\therefore x \in A \cap C$	$(A \cap B = A \cap C)$	$\therefore x \in A \cup C$	$(A \cup B = A \cup C)$
$\therefore x \in A$ અને $x \in C$		$\therefore x \in A$ અથવા $x \in C$	
		પરંતુ $x \notin A$ હોવાથી $x \in C$ મળે.	

આમ, $x \in B \Rightarrow x \in C$

$\therefore B \subset C$ (i)

આ જ રીતે, $C \subset B$ મળે. (ii)

પરિણામ (i) તથા (ii) પરથી $B = C$ મળે. **જવાબ :** (D)

(12) જો $X = \{4^n - 3n - 1, n \in N\}$ અને $Y = \{9(n-1); n \in N\}$ જ્યાં N = પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો ગણ હોય તો $X \cup Y = ...$ (JEE : 2014)

(A) N (B) Y – X (C) X (D) Y

ઉકેલ : $4^n - 3n - 1 = (1 + 3)^n - 3n - 1$

$$= 1 + 3n + \binom{n}{2} 9 + ... + 3^n - 3n - 1$$

$$= 9\left[\binom{n}{2} + \binom{n}{3}3 + ...\right] = 9 \text{ નો ગુણક છે.} \qquad (n \geq 2)$$

$\therefore X \subset Y$ ($n = 1$ માટે શૂન્ય છે, પરિણામ સત્ય છે.)

$\therefore X \cup Y = Y$ **જવાબ :** (D)