ગાણિતિક તર્ક

વિધાન : જો આપેલ વાક્ય સત્ય કે અસત્ય હોય પરંતુ બંને ન હોય અને એની સત્યાર્થતા કે અસત્યાર્થતા નિ:શંકપણે દર્શાવી શકાય, તો તેને **વિધાન** કહે છે.

સાદું વિધાન : જે વિધાન બે કે તેથી વધુ વિધાનોમાં વિભાજિત ન થઈ શકે, તેવા વિધાનને **સાદું વિધાન** કહે છે.

નિષેધ : જો આપેલ વિધાન સત્ય હોય, તો તેનું નિષેધ અસત્ય હોય તથા જો આપેલ વિધાન અસત્ય હોય, તો તેનું નિષેધ સત્ય હોય છે.

સાદા વિધાન તથા તેના નિષેધને કોષ્ટક સ્વરૂપે નીચે મુજબ દર્શાવી શકાય :

p	$\sim p$
T	F
F	T

પૂરકગણની ક્રિયા દર્શાવવા માટેનો સંકેત ′ છે અને તે ગાણિતિક તર્કમાં નિષેધને સમરૂપ ક્રિયા છે.

$\sim(\sim p) = p$

સંયુક્ત વિધાન : બે કે તેથી વધુ સાદાં વિધાનોને તાર્કિક કારકો વડે જોડવાથી મળતાં નવાં વિધાનોને **સંયુક્ત વિધાન** કહે છે.

તાર્કિક કારકો : કેટલીક વખત બે કે તેથી વધુ સાદાં વિધાનોને કારકો ‘અથવા’ કે ‘અને’ વડે જોડવામાં આવે છે. આ કારકોને તાર્કિક કારકો કહે છે.

વિધાનોનું સંયોજન : બે કે તેથી વધુ સાદાં વિધાનોને તાર્કિક કારક **અને** દ્વારા જોડવાથી મળતા સંયુક્ત વિધાનને વિધાનોનું **સંયોજન** કહે છે.

અહીં, આપેલાં સાદાં વિધાનોને **ઘટક વિધાન** કહે છે.

- બે સાદાં વિધાનો p તથા q ના સંયોજનને અથવા સંયોજિત વિધાનને $p \wedge q$ વડે દર્શાવવામાં આવે છે.

  જો આપેલ બંને સાદાં વિધાનોનું સત્યાર્થતા મૂલ્ય T હોય ત્યારે $p \wedge q$ નું (સંયોજિત વિધાનનું) સત્યાર્થતા મૂલ્ય T જ હોય અન્યથા સત્યાર્થતા મૂલ્ય F મળે.

  ઉપર્યુક્ત નોંધને કોષ્ટક સ્વરૂપે નીચે મુજબ દર્શાવી શકાય :

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

ગણ A તથા B માટે છેદક્રિયા દર્શાવવા માટેનો સંકેત $A \cap B$ છે અને તે ગાણિતિક તર્કમાં વિધાનોના સંયોજનને સમરૂપ ક્રિયા છે.

વિયોજન : જો આપેલ બે કે તેથી વધુ સાદાં વિધાનોને તાર્કિક કારક **અથવા** વડે જોડવામાં આવે તો, તેથી બનતા વિધાનને વિધાનોનું **વિયોજન** કહે છે.

બે સાદાં વિધાનો p તથા q ના વિયોજનને $p \vee q$ વડે દર્શાવવામાં આવે છે.

જો આપેલ બંને સાદાં વિધાનોનું સત્યાર્થતા મૂલ્ય F હોય, ત્યારે $p \vee q$ નું સત્યાર્થતા મૂલ્ય F જ હોય અન્યથા સત્યાર્થતા મૂલ્ય T મળે.

આ નોંધને કોષ્ટક સ્વરૂપે નીચે મુજબ દર્શાવી શકાય :

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

ગણ A તથા B માટે યોગક્રિયા દર્શાવવા માટેનો સંકેત $A \cup B$ છે અને તે ગાણિતિક તર્કમાં વિધાનોના વિયોજનને સમરૂપ ક્રિયા છે.

સંયુક્ત વિધાનોનું નિષેધ : બે સાદાં વિધાનનાં સંયોજનનું નિષેધ એ તે બે સાદાં વિધાનોનાં નિષેધનું વિયોજન છે. સંકેતમાં $\sim(p \wedge q) = (\sim p) \vee (\sim q)$ વડે દર્શાવાય.

બે સાદાં વિધાનો p તથા q સત્ય હોય, તો તેમનાં સંયોજનનું નિષેધ અસત્ય બને. અન્યથા સંયોજનનું નિષેધ સત્ય જ બને.

ઉપર્યુક્ત માહિતીને કોષ્ટક સ્વરૂપે નીચે મુજબ દર્શાવી શકાય :

p	q	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$
T	T	T	F
T	F	F	T
F	T	F	T
F	F	F	T

બે સાદાં વિધાનોનાં વિયોજનનું નિષેધ એ તે બે સાદાં વિધાનોનાં નિષેધનું સંયોજન છે. જેને સંકેતમાં

$\sim(p \vee q) = (\sim p) \wedge (\sim q)$ વડે દર્શાવાય.

બે સાદાં વિધાનો p તથા q અસત્ય હોય, તો જ તેમનાં વિયોજનનું નિષેધ સત્ય બને. અન્યથા વિયોજનનું નિષેધ અસત્ય જ હોય.

ઉપર્યુક્ત માહિતીને કોષ્ટક સ્વરૂપે નીચે મુજબ દર્શાવી શકાય :

p	q	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$
T	T	T	F
T	F	T	F
F	T	T	F
F	F	F	T

સંયુક્ત વિધાનના નિષેધનાં પરિણામો ગણક્રિયાના દ'મોર્ગનના નિયમોને સમરૂપ છે.

સમાવેશ/નિવારક વિકલ્પના સંદર્ભે કારક 'અથવા' નો ઉપયોગ :

જ્યારે બંને ઘટનાઓનું એક સાથે અસ્તિત્વ ન હોય, ત્યારે કારકનો **'નિવારક વિકલ્પ'**ના સંદર્ભમાં ઉપયોગ થયેલ હોય છે. પરંતુ જ્યારે બંને ઘટનાઓનું એક સાથે અસ્તિત્વ હોઈ શકે, ત્યારે કારકનો **'સમાવેશ વિકલ્પ'**ના સંદર્ભમાં ઉપયોગ થયેલ હોય છે.

કારક અને તેમનાં નિષેધ :

'કોઈક અસ્તિત્વ ધરાવે છે', 'બધા માટે' કે 'પ્રત્યેક માટે' જેવા શબ્દસમૂહોને પણ **કારક** કહે છે.

કોઈક અસ્તિત્વ ધરાવે છે, માટેનો સંકેત $\exists$ છે જેને **અસ્તિત્વકારક** કહે છે.

પ્રત્યેક માટેનો સંકેત $\forall$ છે જેને **વૈશ્વિક કારક** કહે છે. તેમનાં નિષેધોને સંકેતોમાં નીચે મુજબ દર્શાવાય :

$\sim$(કોઈક p) = બધા જ $\sim p$. ટૂંકમાં, $\sim(\exists p) = \forall(\sim p)$

$\sim$(બધા જ p) = કોઈક $\sim p$. ટૂંકમાં, $\sim(\forall p) = \exists(\sim p)$

પ્રેરણ અને દ્વિ-પ્રેરણ : 'જો અને તો' વડે જોડેલ બે વિધાનો p તથા q નું સ્વરૂપ 'જો p તો q' હોય, તો તેને પ્રેરણ કહે છે. તેને $p \Rightarrow q$ વડે દર્શાવવામાં આવે છે. આ પ્રકારના વિધાનને **શરતી વિધાન** કહે છે.

પ્રેરણને નીચેના પૈકી ગમે તે એક રીતે લખી શકાય છે :

(i) જો p તો q (ii) q, જો p, (iii) q તો જ p (iv) p એ q માટેની પર્યાપ્ત શરત છે. (v) q એ p માટેની આવશ્યક શરત છે.

$p \Rightarrow q$ માં p ને સિદ્ધાંત અથવા પૂર્વવિધાન કહે છે અને q ને તારણ અથવા ઉત્તર વિધાન કહે છે.

પ્રેરણમાં જો પૂર્વવિધાન સત્ય તથા ઉત્તર વિધાન અસત્ય હોય, તો પ્રેરણ અસત્ય બને. અન્યથા, પ્રેરણ સત્ય જ બને.

$(p \Rightarrow q) = (\sim p) \vee q$

ઉપર્યુક્ત નોંધને કોષ્ટક સ્વરૂપે નીચે મુજબ રજૂ કરી શકાય :

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim p$	$(\sim p) \vee q$
T	T	T	F	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

દ્વિ-પ્રેરણ : આપેલ વિધાન જો p તો અને તો જ q સ્વરૂપે હોય, તો તેવા વિધાનને **દ્વિ-પ્રેરણ** કહે છે. તેને સંકેતમાં $p \Leftrightarrow q$ વડે દર્શાવવામાં આવે છે.

દ્વિ-પ્રેરણમાં જો બંને વિધાન સત્ય કે અસત્ય હોય, તો જ તેમનું દ્વિ-પ્રેરણ સત્ય થાય, અન્યથા, દ્વિ-પ્રેરણ અસત્ય બને.

ઉપર્યુક્ત નોંધને કોષ્ટક સ્વરૂપે નીચે મુજબ લખાય :

p	q	$p \Leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

સમાનાર્થી પ્રેરણ :

$p \Rightarrow q$ નું સમાનાર્થી પ્રેરણ $\sim q \Rightarrow \sim p$ મળે, જુઓ $p \Rightarrow q = (\sim q) \Rightarrow (\sim p)$

કોષ્ટક :

p	q	$p \Rightarrow q$ **(a)**	$\sim q$	$\sim p$	$(\sim q) \Rightarrow (\sim p)$ **(b)**
T	T	T	F	F	T
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T
F	F	T	T	T	T

પ્રતીપ વિધાન : બે વિધાનો p તથા q માટે, જો ***p* તો *q*** નું પ્રતીપ જો ***q* તો *p*** મળે.

$p \Rightarrow q$ નું પ્રતીપ $q \Rightarrow p$ મળે.

દ્વિ-પ્રેરણ એ પ્રેરણ તથા તેના પ્રતીપ વિધાનનું સંયોજિત વિધાન છે.

$\sim(p \Rightarrow q) = p \wedge (\sim q)$

વિધાનોની યથાર્થતા : વિધાનોની યથાર્થતા નક્કી કરવા માટે બે પદ્ધતિઓનો ઉપયોગ થાય છે :

(i) પ્રત્યક્ષ પદ્ધતિ : જો p તો q પ્રકારનું વિધાન સાબિત કરવા માટે p સત્ય છે તેમ સ્વીકારી q સાબિત કરવામાં આવે, તેને **પ્રત્યક્ષ પદ્ધતિ** કહે છે.

(ii) વિરોધાભાસની રીત (અનિષ્ટાપત્તિની રીત) : આ રીતમાં આપણે જે સાબિત કરવાનું છે તે અશક્ય છે, તેમ ધારી પક્ષથી વિપરીત પરિણામ મેળવીએ છીએ.

નિત્ય સત્ય વિધાનનું સત્યાર્થતા મૂલ્ય T તથા નિત્ય મિથ્યા વિધાનનું સત્યાર્થતા મૂલ્ય F છે. નિત્ય સત્ય વિધાનને t વડે દર્શાવાય તથા નિત્ય મિથ્યા વિધાનને c વડે દર્શાવાય.

અગત્યનાં પરિણામો :

(1) $p \vee t = t$

(2) $p \wedge t = p$

(3) $p \vee (\sim p) = t$

(4) $(p \wedge (\sim p)) = c$

(5) $p \wedge c = c$

(6) $p \vee c = p$

(7) $[p \Rightarrow (p \vee q)] = t$

(8) $[q \Rightarrow (p \vee q)] = t$

(9) $[(p \wedge q) \Rightarrow p] = t$

(10) $[(p \wedge q) \Rightarrow q] = t$

(11) $[\{(p \vee q) \wedge (\sim p)\} \Rightarrow q] = t$

(12) $[\{(p \vee q) \wedge (\sim q)\} \Rightarrow p] = t$

(13) $[\{(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)\}] = t$

JEE માટે અગત્યના દાખલાઓ

(1) $x \in A \cap B \Rightarrow (x \in A$ અને $x \in B)$ નું નિષેધ ...... હોય.

(A) $x \in A \cup B \Rightarrow (x \in A$ અથવા $x \in B)$ (B) $x \in A \cap B$ અથવા $(x \in A$ અને $x \in B)$

(C) $x \in A \cap B$ અને $(x \notin A$ અથવા $x \notin B)$ (D) $x \notin A \cap B$ અને $(x \in A$ અને $x \in B)$

ઉકેલ : અહીં $p : x \in A \cap B$ તથા $q : x \in A$ અને $x \in B$ છે.

આથી, $p \Rightarrow q$ સ્વરૂપનું વિધાન છે. તેનું નિષેધ વિધાન

$\sim(p \Rightarrow q) = p \wedge (\sim q)$

$= x \in A \cap B$ અને $\sim(x \in A$ અને $x \in B)$

$= x \in A \cap B$ અને $(x \notin A$ અથવા $x \notin B)$ **જવાબ : (C)**

(2) 'જો $x \in R$ હોય, તો અને તો જ $|x| \geq 0$' નું નિષેધ ......

(A) $\{x \in R^+$ અને $|x| > 0\}$ અને $\{|x| > 0$ અને $x \in R\}$

(B) $\{x \in R$ અને $|x| \not> 0\}$ અને $\{|x| \geq 0$ અને $x \notin R\}$

(C) $\{x \in R$ અને $|x| \not\geq 0\}$ અથવા $\{|x| \geq 0$ અને $x \notin R\}$

(D) $\{x \in R^+$ અને $|x| \not> 0\}$ અથવા $\{|x| < 0$ અને $x \notin R\}$

ઉકેલ : અહીં $p : x \in R$ તથા $q : |x| \geq 0$ વિધાનો આપેલ છે.

આથી $p \Leftrightarrow q$ એ દ્વિપ્રેરણ સ્વરૂપનું વિધાન છે. તેનું નિષેધ

$\sim(p \Leftrightarrow q) = \sim[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$

$= \sim(p \Rightarrow q) \vee \sim(q \Rightarrow p)$

$= (p \wedge (\sim q)) \vee (q \wedge (\sim p))$

આપેલ વિધાનનું નિષેધ $= \{x \in R$ અને $|x| \not\geq 0\}$ અથવા $\{|x| \geq 0$ અને $x \notin R\}$ **જવાબ : (C)**

(3) બે વિધાનો p તથા q માટે, $p \vee \sim(p \Rightarrow \sim q) = ...$

(A) $\sim p \vee q$ (B) $p \wedge (\sim q)$ (C) p (D) q

ઉકેલ : $p \vee \sim(p \Rightarrow \sim q) = p \vee (p \wedge \sim(\sim q)) = p \vee (p \wedge q) = p$ **જવાબ : (C)**

(4) સાદાં વિધાનો p, q, r તથા s નાં સત્યાર્થતા મૂલ્ય અનુક્રમે T, F, F, T હોય, તો $((\sim p \wedge q) \vee r) \Rightarrow \sim s$ નું સત્યાર્થતા મૂલ્ય ...... મળે.

(A) F (B) T

(C) F, જો p અને q નું સત્યાર્થતા મૂલ્ય T હોય, તો (D) T જો s નું સત્યાર્થતા મૂલ્ય F હોય, તો

ઉકેલ :

p	q	r	s	$\sim p$	$\sim s$	$\sim p \wedge q$	$(\sim p \wedge q) \vee r$	$((\sim p \wedge q) \vee r) \Rightarrow \sim s$
T	F	F	T	F	F	F	F	T

જવાબ : (B)

(5) $\sim[\sim p \wedge (p \Leftrightarrow q)] = ...$

(A) $q \wedge p$ (B) $p \vee q$ (C) $\sim p$ (D) $\sim q$

ઉકેલ : $\sim[\sim p \wedge (p \Leftrightarrow q)] = \sim(\sim p) \vee \sim(p \Leftrightarrow q)$

$= p \vee \sim[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$

$= [p \vee (p \wedge \sim q)] \vee (q \wedge \sim p)$

$= p \vee (q \wedge \sim p)$

$= (p \vee q) \wedge (p \vee \sim p)$

$= p \vee q$ **જવાબ : (B)**

(6) 'જો $x^2 = 25$ હોય, તો ($x = 5$ અથવા $x = -5$)' નું સમાનાર્થી પ્રેરણ ...... હોય.

(A) જો $x^2 \neq 25$ હોય, તો $x \neq 5$ અને $x \neq -5$ (B) જો $x \neq 5$ અથવા $x \neq -5$ હોય, તો $x^2 = 25$

(C) જો $x \neq 5$ અને $x \neq -5$ હોય, તો $x^2 \neq 25$ (D) જો $x \neq 5$ અને $x \neq -5$ હોય, તો $x^2 = 25$

ઉકેલ : અહીં, $p : x^2 = 25$; $q : x = 5$, $r : x = -5$

આથી, આપેલ વિધાન $p \Rightarrow (q \vee r)$ સ્વરૂપ દર્શાવે છે. તેનું સમાનાર્થી પ્રેરણ $\sim(q \vee r) \Rightarrow \sim p$ થાય.

$\therefore$ આપેલ વિધાનનું સમાનાર્થી પ્રેરણ :

જો ($x \neq 5$ અને $x \neq -5$) હોય, તો $x^2 \neq 25$ **જવાબ : (C)**

(7) 'જો બિંદુઓ P, Q તથા R સમરેખ હોય, તો ΔPQR શક્ય નથી' નું સમાનાર્થી પ્રેરણ તથા પ્રતીપ વિધાન અનુક્રમે ...... તથા ...... હોય.

(A) **સમાનાર્થી પ્રેરણ :** જો ΔPQR શક્ય હોય, તો બિંદુઓ P, Q તથા R સમરેખ હોય.
પ્રતીપ : જો ΔPQR શક્ય ન હોય, તો બિંદુઓ P, Q તથા R સમરેખ હોય.

(B) **સમાનાર્થી પ્રેરણ :** જો ΔPQR શક્ય ન હોય, તો બિંદુઓ P, Q તથા R સમરેખ ન હોય.
પ્રતીપ : જો ΔPQR શક્ય હોય, તો બિંદુઓ P, Q તથા R સમરેખ ન હોય.

(C) **સમાનાર્થી પ્રેરણ :** જો ΔPQR શક્ય ન હોય, તો બિંદુઓ P, Q તથા R સમરેખ હોય.
પ્રતીપ : જો ΔPQR શક્ય ન હોય, તો બિંદુઓ P, Q તથા R સમરેખ ન હોય.

(D) **સમાનાર્થી પ્રેરણ :** જો ΔPQR શક્ય હોય, તો બિંદુઓ P, Q તથા R સમરેખ ન હોય.
પ્રતીપ : જો ΔPQR શક્ય ન હોય, તો બિંદુઓ P, Q તથા R સમરેખ હોય.

ઉકેલ : અહીં p : બિંદુઓ P, Q તથા R સમરેખ છે.

q : ΔPQR શક્ય નથી.

આથી, $p \Rightarrow q$ સ્વરૂપે વિધાન આપેલ છે. તેનું સમાનાર્થી પ્રેરણ $\sim q \Rightarrow \sim p$ મળે.

$\therefore$ **સમાનાર્થી પ્રેરણ :** જો ΔPQR શક્ય હોય, તો બિંદુઓ P, Q તથા R સમરેખ ન હોય.

વળી, $p \Rightarrow q$ નું પ્રતીપ વિધાન $q \Rightarrow p$ હોય.

$\therefore$ **પ્રતીપ :** જો ΔPQR શક્ય ન હોય, તો બિંદુઓ P, Q તથા R સમરેખ હોય. **જવાબ : (D)**

(8) $(p \wedge (\sim q)) \Rightarrow r$ નું પ્રતીપ વિધાન ...... છે.

(A) $\sim r \Rightarrow (\sim p \vee q)$ (B) $r \Rightarrow (\sim p \wedge \sim q)$ (C) $(\sim p \vee q) \Rightarrow \sim r$ (D) (A) (B) અને C

ઉકેલ : $(p \wedge (\sim q)) \Rightarrow r$ નું પ્રતીપ વિધાન $r \Rightarrow (p \wedge (\sim q))$ મળે.

$\therefore \ r \Rightarrow (p \wedge (\sim q))$

$= \sim r \vee (p \wedge \sim q)$ $(p \Rightarrow q = \sim p \vee q)$

$= (p \wedge \sim q) \vee (\sim r)$

$= [\sim(\sim p \vee q)] \vee (\sim r)$ $(p \wedge \sim q = \sim(\sim p \vee q))$

$= (\sim p \vee q) \Rightarrow (\sim r)$

$\therefore \ (p \wedge (\sim q)) \Rightarrow r$ નું પ્રતીપ વિધાન $(\sim p \vee q) \Rightarrow (\sim r)$ મળે. **જવાબ : (C)**

(9) p : આજે વરસાદ પડશે q : હું શાળાએ જાઉં છું.

r : હું મારા મિત્રને મળીશ. s : હું ચલચિત્ર જોવા જઈશ.

જો આજે વરસાદ નહિ હોય અથવા જો હું શાળાએ નહિ જાઉં તો હું મારા મિત્રને મળીશ અને ચલચિત્ર જોવા જઈશ. આ વિધાનને તર્કની ભાષામાં સાંકેતિક સ્વરૂપે ...... થી દર્શાવાય.

(A) $\sim(p \wedge q) \Rightarrow (r \wedge s)$ (B) $(\sim p \wedge \sim q) \Rightarrow (r \wedge s)$ (C) $\sim(p \vee q) \Rightarrow (r \vee s)$ (D) $(p \wedge q) \Rightarrow (r \vee s)$

ઉકેલ : અહીં જો આજે વરસાદ નહિ હોય એ p નું નિષેધ છે તથા હું શાળાએ નહિ જાઉં એ વિધાન q નું નિષેધ છે. વળી, વિધાન જો અને તો સ્વરૂપે છે.

$\therefore$ આપેલ વિધાન $(\sim p \vee \sim q) \Rightarrow (r \wedge s)$ સ્વરૂપે છે.

$\therefore \ (\sim p \vee \sim q) \Rightarrow (r \wedge s)$

$= \sim(p \wedge q) \Rightarrow (r \wedge s)$ **જવાબ : (A)**

(10) $\sim[p \Rightarrow (\sim p \vee q)] =$ ......

(A) $p \vee (p \vee \sim r)$ (B) $p \Rightarrow \sim(p \vee q)$ (C) $p \Leftrightarrow q$ (D) $p \wedge \sim q$

ઉકેલ : $p \Rightarrow (\sim p \vee q) = \sim p \vee (\sim p \vee q) = ((\sim p) \vee (\sim p)) \vee q$ $(p \Rightarrow q = \sim p \vee q)$

$= \sim p \vee q$

$\therefore \ \sim[p \Rightarrow (\sim p \vee q)] = \sim[\sim p \vee q] = p \wedge \sim q$ **જવાબ : (D)**

(11) $\sim(p \vee q) \vee (\sim p \wedge q)$ એ તાર્કિક રીતે ...... ને સમાન છે. [Online : 2014]

(A) p (B) q (C) $\sim p$ (D) $\sim q$

ઉકેલ : $\sim(p \vee q) \vee (\sim p \wedge q) = (\sim p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)$

$= \sim p \wedge (\sim q \vee q)$

$= \sim p \wedge t$ $(q \vee \sim q = t)$

$= \sim p$ **જવાબ : (C)**

(12) $\sim[p \wedge (q \Rightarrow \sim r)] =$ ......

(A) $p \vee (q \wedge r)$ (B) $\sim p \vee (q \wedge r)$ (C) $p \vee (q \vee r)$ (D) $\sim p \wedge (q \wedge r)$

ઉકેલ : $\sim[p \wedge (q \Rightarrow \sim r)] = (\sim p) \vee \sim(q \Rightarrow \sim r)$

$= \sim p \vee (q \wedge \sim(\sim r))$

$= \sim p \vee (q \wedge r)$ **જવાબ : (B)**

(13) p : 10 એ યુગ્મ પ્રાકૃતિક સંખ્યા છે. q : 12 એ 8 વડે વિભાજ્ય છે.

r : 6 તથા 8 નો લ.સા.અ. 24 છે. તો નીચેનામાંથી કયું સત્ય બને ?

(A) $(p \wedge r) \vee q$ (B) $(p \Rightarrow q) \vee r$ (C) માત્ર (A) (D) (A) અને (B)

ઉકેલ : અહીં વિધાન p તથા વિધાન r સત્ય છે જ્યારે વિધાન q અસત્ય છે.

$\therefore$ $(p \wedge r)$ સત્ય તથા q અસત્ય છે. તેથી તેમનું વિયોજન સત્ય બને.

$\therefore$ $(p \wedge r) \vee q$ નું સત્યાર્થતા મૂલ્ય T મળે.

વળી, $p \Rightarrow q$ માં p સત્ય તથા q અસત્ય હોવાથી, $p \Rightarrow q$ અસત્ય છે.

તેમજ r સત્ય હોવાથી, $(p \Rightarrow q) \vee r$ સત્ય થાય.

આમ, (A) અને (B) બંને વિધાન સત્ય છે.

ટૂંકી રીત : r સત્ય હોવાથી (B) સત્ય છે.

$p \wedge r$ સત્ય હોવાથી (A) સત્ય છે. **જવાબ : (A), (B), (D)**

(14) જો $[(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ તર્કસંગત હોય, તો આ વિધાન ...... છે.

(A) p (B) q (C) નિત્ય સત્ય (D) નિત્ય મિથ્યા

ઉકેલ :

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$p \Rightarrow r$	$(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)$	$[(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)] \Rightarrow p \Rightarrow r$
T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	T
T	F	T	F	T	F	T
T	F	F	F	F	F	T
F	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	T	T	T
F	F	T	T	T	T	T
F	F	F	T	T	T	T

અંતિમ સ્તંભ પરથી કહી શકાય કે આપેલ વિધાન નિત્ય સત્ય છે. **જવાબ : (C)**

(15) $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$ ને સમાન વિધાન ...... છે. (Online 2008 : 2013)

(A) $p \Rightarrow (p \Leftrightarrow q)$ (B) $p \Rightarrow (p \Rightarrow q)$ (C) $p \Rightarrow (p \vee q)$ (D) $p \Rightarrow (p \wedge q)$

ઉકેલ : $p \Rightarrow (q \Rightarrow p) = \sim p \vee (\sim q \vee p)$

$= \sim p \vee (p \vee \sim q)$ (ક્રમનો નિયમ)

$= (\sim p \vee p) \vee (\sim q)$ (જૂથનો નિયમ)

$= t \vee (\sim q)$

$= t$ (1)

હવે $p \Rightarrow (p \Leftrightarrow q) = (\sim p) \vee [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$

$= \sim p \vee [((\sim p) \vee q) \wedge (\sim q \vee p)]$

$= [(\sim p) \vee (\sim p \vee q)] \wedge [(\sim p) \vee (\sim q \vee p)]$

$= [(\sim p \vee \sim p) \vee q] \wedge [(\sim p) \vee (p \vee \sim q)]$

$= [\sim p \vee q] \wedge [(\sim p \vee p) \vee \sim q]$

$= (\sim p \vee q) \wedge (t \vee \sim q)$

$= (\sim p \vee q) \wedge t$

$= p \Rightarrow q \neq t$

$p \Rightarrow (p \Rightarrow q) = (\sim p) \vee (\sim p \vee q) = ((\sim p) \vee q) = (p \Rightarrow q) \neq t$

તથા $p \Rightarrow (p \vee q) = \sim p \vee (p \vee q)$

$= (\sim p \vee p) \vee q = t \vee q = t$ (જૂથનો નિયમ) (2)

(1) તથા (2) પરથી સ્પષ્ટ છે કે, આપેલ વિધાનને સમાન વિધાન $p \Rightarrow (p \vee q)$ છે.

$p \Rightarrow (p \wedge q) = (\sim p) \vee (p \wedge q) = ((\sim p) \vee p) \wedge (\sim p \vee q) = (\sim p) \vee q \neq t$ **જવાબ : (C)**

(16) $S \subset R$ જ્યાં $S \neq \emptyset$ માટે નીચે આપેલ વિધાન p નું નિષેધ વિધાન કયું છે ?

વિધાન p : કોઈ એક સંમેય સંખ્યા $x \in S$ એવી મળે કે જેથી $x > 0$

(A) કોઈ સંમેય સંખ્યા $x \in S$ એવી ન મળે કે જેથી $x \le 0$

(B) પ્રત્યેક સંમેય સંખ્યા $x \in S$ માટે $x \le 0$ થાય છે.

(C) $x \in S$ અને $x \le 0 \Rightarrow x$ અસંમેય સંખ્યા છે.

(D) કોઈ સંમેય સંખ્યા $x \in S$ એવી મળે, કે જેથી $x \le 0$

ઉકેલ : અહીં આપેલ વિધાન p : $\exists$ સંમેય સંખ્યા $x \in S$, જેથી $x > 0$ નું નિષેધ વિધાન

$\sim p$: $\forall$ સંમેય સંખ્યા $x \in S$, $x \le 0$

$\therefore$ $\sim p$: પ્રત્યેક સંમેય સંખ્યા $x \in S$ માટે $x \le 0$ સત્ય છે. **જવાબ : (B)**

(17) 'જો હું શિક્ષક બનીશ તો હું શાળા ખોલીશ'નું નિષેધ વિધાન ...... હોય. [AIEEE : 2012]

(A) હું શિક્ષક બનીશ અને શાળા નહિ ખોલું. (B) હું શિક્ષક બનીશ અથવા હું શાળા નહિ ખોલું.

(C) હું શિક્ષક નહિ બનું અને શાળા પણ નહિ ખોલું. (D) હું શિક્ષક નહિ બનું અથવા હું શાળા નહિ ખોલું.

ઉકેલ : p : હું શિક્ષક બનીશ.

q : હું શાળા ખોલીશ.

અહીં આપેલ વિધાન $p \Rightarrow q$ સ્વરૂપનું છે.

$p \Rightarrow q$ નું નિષેધ વિધાન $\sim(p \Rightarrow q) = \sim(\sim p \vee q) = p \wedge \sim q$ સ્વરૂપ થાય.

$\therefore$ $p \wedge \sim q$: હું શિક્ષક બનીશ અને હું શાળા નહિ ખોલું. **જવાબ : (A)**

(18) પૂર્ણાંક $m, n > 1$ માટે નીચેનાં ત્રણ વિધાનો આપેલ છે :

p : n એ m વડે વિભાજ્ય છે. q : n^2 એ m વડે વિભાજ્ય છે.

r : m અવિભાજ્ય છે. તો નીચેનામાંથી કયું સત્ય બને ? [Online : 2013]

(A) $(q \wedge r) \Rightarrow p$ (B) $(p \wedge q) \Rightarrow r$ (C) $q \Rightarrow r$ (D) $q \Rightarrow p$

ઉકેલ : જો m અવિભાજ્ય હોય અને n^2 એ m વડે વિભાજ્ય હોય તો n પણ m વડે વિભાજ્ય હોય,

$\therefore$ $(q \wedge r) \Rightarrow p$ સ્વરૂપનું વિધાન બને. **જવાબ : (A)**

(19) બે તાર્કિક વિધાનો p અને q તથા $r : p \Rightarrow (\sim p \vee q)$ માટે, જો r નું સત્યાર્થતા મૂલ્ય F હોય, તો p તથા q ના સત્યાર્થતા મૂલ્ય અનુક્રમે ...... તથા ...... હોય. [Online : 2013]

(A) F, F (B) T, T (C) T, F (D) F, T

ઉકેલ : $p \Rightarrow (\sim p) \vee q$ નું સત્યાર્થતા મૂલ્ય F છે.

$\therefore$ p નું સત્યાર્થતા મૂલ્ય T તથા $(\sim p) \vee q$ નું સત્યાર્થતા મૂલ્ય F છે.

$\therefore$ q નું સત્યાર્થતા મૂલ્ય F છે. **જવાબ : (C)**

(20) $\sim(p \Leftrightarrow \sim q)$ ને સમાન વિધાન ...... છે. [JEE : 2014]

(A) $p \Leftrightarrow q$ (B) $\sim p \Leftrightarrow \sim q$ (C) t (D) c

ઉકેલ :

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \Leftrightarrow \sim q$	$\sim(p \Leftrightarrow \sim q)$	$p \Leftrightarrow q$	$(\sim p) \Leftrightarrow (\sim q)$
T	T	F	F	F	T	T	T
T	F	F	T	T	F	F	F
F	T	T	F	T	F	F	F
F	F	T	T	F	T	T	T

અંતિમ બે કોષ્ટક પરથી સ્પષ્ટ છે કે, $\sim(p \Leftrightarrow \sim q) = p \Leftrightarrow q = (\sim p) \Leftrightarrow (\sim q)$ **જવાબ : (A), (B)**

(21) 'જો વરસાદ નહિ પડે, તો હું શાળાએ જઈશ'નું સમાનાર્થી પ્રેરણ ...... હોય. [Online : 2014]

(A) જો વરસાદ પડશે તો હું શાળાએ નહિ જાઉં. (B) જો હું શાળાએ નહિ જાઉં તો વરસાદ પડશે.

(C) જો વરસાદ પડશે તો હું શાળાએ જઈશ. (D) જો હું શાળાએ જઈશ તો વરસાદ પડશે.

ઉકેલ : અહીં p : વરસાદ નહિ પડે તથા q : હું શાળાએ જઈશ આપેલ વિધાનો છે.

અહીં જો વરસાદ નહિ પડે, તો હું શાળાએ જઈશ $p \Rightarrow q$ સ્વરૂપનું વિધાન છે. જેનું સમાનાર્થી પ્રેરણ $\sim q \Rightarrow \sim p$ થાય.

આથી, **સમાનાર્થી પ્રેરણ** : જો હું શાળાએ નહિ જાઉં તો વરસાદ પડશે. **જવાબ : (B)**

(22) ત્રણ સાદાં વિધાનો p, q તથા r માટે, $p \Rightarrow (q \vee r)$ ને તાર્કિક રીતે સમાન વિધાન ...... હોય. [Online : 2014]

(A) $(p \vee q) \Rightarrow r$ (B) $(p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r)$

(C) $(p \Rightarrow \sim q) \wedge (p \Rightarrow r)$ (D) $(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \sim r)$

ઉકેલ : $p \Rightarrow (q \vee r)$

$= \sim p \vee (q \vee r)$

$= (\sim p \vee q) \vee (\sim p \vee r)$

$= (p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r)$

અથવા

							(*a*)						(*b*)		
p	q	r	$\sim q$	$\sim r$	$p \vee q$	$q \vee r$	$p \Rightarrow (q \vee r)$	$p \Rightarrow q$	$p \Rightarrow r$	$p \Rightarrow \sim q$	$p \Rightarrow \sim r$	$(p \vee q) \Rightarrow r$	$(p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r)$	$(p \Rightarrow \sim q) \wedge (p \Rightarrow r)$	$(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \sim r)$
T	T	T	F	F	T	T	T	T	T	F	F	T	T	F	F
T	T	F	F	T	T	T	T	T	F	F	T	F	T	F	T
T	F	T	T	F	T	T	T	F	T	T	F	T	T	T	F
T	F	F	T	T	T	F	F	F	F	T	T	F	F	F	F
F	T	T	F	F	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	F	T	T	T	T	T	T	T	T	F	T	T	T
F	F	T	T	F	F	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T
F	F	F	T	T	F	F	T	T	T	T	T	T	T	T	T

કોષ્ટક (*a*) તથા (*b*) પરથી સ્પષ્ટ છે કે,

$p \Rightarrow (q \vee r) = (p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r)$ **જવાબ : (B)**

(23) 'જો મારી તબિયત સારી નહિ હોય, તો હું દાક્તરને ત્યાં જઈશ'નું સમાનાર્થી પ્રેરણ ...... હોય. [Online : 2014]

(A) જો મારી તબિયત સારી હશે તો હું દાક્તરને ત્યાં નહિ જાઉં.

(B) જો હું દાક્તરને ત્યાં જઈશ તો મારી તબિયત સારી હશે.

(C) જો હું દાક્તરને ત્યાં નહિ જાઉં તો મારી તબિયત સારી હશે.

(D) જો હું દાક્તરને ત્યાં જઈશ, તો મારી તબિયત સારી નહિ હોય.

ઉકેલ : અહીં p : મારી તબિયત સારી નહિ હોય. q : હું દાક્તરને ત્યાં જઈશ.

આપેલ વિધાન $p \Rightarrow q$ સ્વરૂપનું છે. જેનું સમાનાર્થી પ્રેરણ $\sim q \Rightarrow \sim p$ થાય.

આથી, 'જો મારી તબિયત સારી નહિ હોય, તો હું દાક્તરને ત્યાં જઈશ'નું સમાનાર્થી પ્રેરણ 'જો હું દાક્તરને ત્યાં નહિ જાઉં તો મારી તબિયત સારી હશે.' **જવાબ : (C)**

એક કરતાં વધુ સાચા વિકલ્પોવાળા પ્રશ્નો

(24) નીચેનામાંથી કયાં વિધાનો નિત્ય સત્ય છે ?

(A) $(p \wedge q) \Rightarrow p$ (B) $[(p \vee q) \wedge (\sim q)] \Rightarrow p$ (C) $p \wedge t$ (D) $p \vee (\sim p)$

ઉકેલ : અહીં વિધાનો p, q તથા t લેતાં, કોષ્ટક પરથી કયાં વિધાનો નિત્ય સત્ય છે તેનો ખ્યાલ મેળવી શકીશું.

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)
p	q	t	$\sim p$	$\sim q$	$p \vee (\sim p)$	$p \wedge t$	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \Rightarrow p$	$p \vee q$	$(p \vee q) \wedge (\sim q)$	$[(p \vee q) \wedge (\sim q)] \Rightarrow p$
T	T	T	F	F	T	T	T	T	T	F	T
T	F	T	F	T	T	T	F	T	T	T	T
F	T	T	T	F	T	F	F	T	T	F	T
F	F	T	T	T	T	F	F	T	F	F	T

સ્તંભ (6), (9) તથા (12) પરથી સ્પષ્ટ છે કે,

$p \vee (\sim p)$, $(p \wedge q) \Rightarrow p$ તથા $(p \vee q) \wedge (\sim q) \Rightarrow p$ નિત્ય સત્ય વિધાનો છે. **જવાબ : (A), (B), (D)**

બીજી રીત :

$(p \wedge q) \Rightarrow p = (\sim p) \vee (\sim q) \vee p$

$= [(\sim p) \vee (p)] \vee (\sim q)$

$= t$

$\therefore\ (p \wedge q) \Rightarrow p = (\sim p) \vee (\sim q) \vee p = ((\sim p) \vee p) \vee q = t \vee q = t$

$[(p \vee q) \wedge (\sim q)] \Rightarrow p = [(\sim p) \wedge (\sim q)] \vee q \vee p = \sim(p \vee q) \vee (p \vee q) = t$

$p \wedge t = p$

$p \vee (\sim p) \Rightarrow t$ **જવાબ : (A), (B), (D)**

(25) નીચેનામાંથી કયાં વિધાનો નિત્ય મિથ્યા છે ?

(A) $(p \wedge \sim q)$ (B) $(p \wedge \sim q) \wedge (\sim p \wedge q)$ (C) $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)$ (D) $p \wedge c$

ઉકેલ : વિધાનો p, q, r તથા c માટે

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)
p	q	r	c	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$\sim p$	$\sim p \wedge q$	$(p \wedge \sim q) \wedge (\sim p \wedge q)$	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow r$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)$	$p \wedge c$
T	T	T	F	F	F	F	F	F	T	T	T	F
T	T	F	F	F	F	F	F	F	T	F	F	F
T	F	T	F	T	T	F	F	F	F	T	F	F
T	F	F	F	T	T	F	F	F	F	T	F	F
F	T	T	F	F	F	T	T	F	T	T	T	F
F	T	F	F	F	F	T	T	F	T	F	F	F
F	F	T	F	T	F	T	F	F	T	T	T	F
F	F	F	F	T	F	T	F	F	T	T	T	F

ઉપર્યુક્ત સ્તંભો (9) તથા (13) પરથી સ્પષ્ટ છે કે,

$(p \wedge \sim q) \wedge (\sim p \wedge q)$ તેમજ $p \wedge c$ નિત્ય મિથ્યા વિધાનો છે. **જવાબ : (B), (D)**

બીજી રીત :

$(p \wedge (\sim q)) \wedge ((\sim p) \wedge q) = (p \wedge \sim p) \wedge (q \wedge (\sim q)) = c$

$p \wedge c = c$

બાકીના બે વિકલ્પ સ્પષ્ટ રીતે નિત્ય મિથ્યા નથી. **જવાબ : (B), (D)**

નિષ્કર્ષ તથા કારકના પ્રશ્નો

આ પ્રકારના પ્રશ્નોમાં ચાર વિકલ્પો અને બે વિધાનો હોય છે. **વિધાન 1** નિષ્કર્ષ તથા **વિધાન 2** કારક કહેવાય છે. વિકલ્પો (A), (B), (C) તથા (D) નીચે મુજબ હોય છે.

(A) વિધાન 1 તથા વિધાન 2 બંને સત્ય છે તથા વિધાન 2 એ વિધાન 1 ની યોગ્ય સમજૂતી માટે પર્યાપ્ત છે.

(B) વિધાન 1 તથા વિધાન 2 બંને સત્ય છે તથા વિધાન 2 એ વિધાન 1 ની યોગ્ય સમજૂતી માટે પર્યાપ્ત નથી.

(C) વિધાન 1 સત્ય તથા વિધાન 2 અસત્ય છે.

(D) વિધાન 1 અસત્ય છે તથા વિધાન 2 સત્ય છે.

(26) **વિધાન 1 :** $\sim(p \Leftrightarrow \sim q)$ એ $p \Leftrightarrow q$ ને તાર્કિક રીતે સમાન છે. [IIT : 2009]

વિધાન 2 : $\sim(p \Leftrightarrow \sim q)$ એ નિત્ય સત્ય છે.

ઉકેલ : $\sim(p \Leftrightarrow \sim q) = \sim(\sim(p \Leftrightarrow q)) = p \Leftrightarrow q$

(1) p	(2) q	(3) $\sim q$	(4) $p \Leftrightarrow q$	(5) $p \Leftrightarrow (\sim q)$	(6) $\sim(p \Leftrightarrow (\sim q)$
T	T	F	T	F	T
T	F	T	F	T	F
F	T	F	F	T	F
F	F	T	T	F	T

$\therefore$ વિધાન 1 સત્ય છે. (સ્તંભ (4) અને (6) સમાન છે.)

$\sim[p \Leftrightarrow \sim q] = \sim[[p \Rightarrow (\sim q)] \wedge [(\sim q) \Rightarrow p]]$

$= \sim[[(\sim p) \vee (\sim q)] \wedge [q \vee p]$

$= (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$

p સત્ય હોય, q સત્ય હોય અથવા બંને અસત્ય હોય, તો આ વિધાન સત્ય બને અન્યથા નહિ.

વિધાન 2 અસત્ય છે. **જવાબ : (C)**

(27) **વિધાન 1 :** $(p \wedge (\sim q)) \wedge ((\sim p) \wedge q)$ એ નિત્ય મિથ્યા છે.

વિધાન 2 : $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$ એ નિત્ય સત્ય છે. [JEE : 2013]

ઉકેલ : $(p \wedge (\sim q)) \wedge ((\sim p) \wedge q) = (p \wedge (\sim p)) \wedge ((\sim q) \wedge q) = c \wedge c = c$

$\therefore$ વિધાન 1 સત્ય છે.

વળી, $p \Rightarrow q$ ને સમાનાર્થી $\sim q \Rightarrow \sim p$ મળે.

$\therefore$ $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p) = t$ જ થાય.

$\therefore$ વિધાન 2 સત્ય છે પરંતુ તે વિધાન 1 ની સમજૂતી માટે પર્યાપ્ત નથી. **જવાબ : (B)**

(28) **વિધાન 1 :** $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$ એ $A \Rightarrow (A \vee B)$ ને તાર્કિક રીતે સમાન છે.

વિધાન 2 : $\sim[(A \wedge B) \Rightarrow (\sim A \vee B)]$ નિત્ય સત્ય છે. [Online : 2013]

ઉકેલ : $A \Rightarrow (B \Rightarrow A) = \sim A \vee (\sim B \vee A)$

$= (\sim A \vee A) \vee (\sim B)$ (જૂથનો નિયમ)

$= t \vee (\sim B) = t$

હવે, $A \Rightarrow (A \vee B) = \sim A \vee (A \vee B)$

$= (\sim A \vee A) \vee B$ (જૂથનો નિયમ)

$= t \vee B = t$

$\therefore$ $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$ તથા $A \Rightarrow (A \vee B)$ તાર્કિક રીતે સમાન છે.

$\therefore$ વિધાન 1 સત્ય છે.

વળી, $\sim[(A \wedge B)] \Rightarrow [(\sim A) \vee B]$

$= \sim[\sim(A \wedge B) \vee (\sim A \vee B)]$

$= (A \wedge B) \wedge (A \wedge \sim B)$

$= A \wedge (B \wedge (\sim B)) = A \wedge c = c$

$\therefore$ વિધાન 2 નિત્ય મિથ્યા બને.

આમ, વિધાન 2 અસત્ય છે.

$\therefore$ વિધાન 1 સત્ય છે તથા વિધાન 2 અસત્ય છે. **જવાબ : (C)**

●