(133) અવકાશમાં આવેલી રેખાના અક્ષો સાથેના પ્રક્ષેપનાં માપ અનુક્રમે 3, 4, 12 હોય, તો તેની દિક્કોસાઇન ......

(A) $\frac{-3}{13}, \frac{-4}{13}, \frac{-12}{13}$ (B) $\frac{3}{13}, \frac{-4}{13}, \frac{12}{13}$ (C) $\frac{3}{13}, \frac{4}{13}, \frac{12}{13}$ (D) $\frac{3}{13}, \frac{-4}{13}, \frac{-12}{13}$

ઉકેલ : પ્રક્ષેપનાં માપ અનુક્રમે 3, 4, 12 છે.

અક્ષો પરના પ્રક્ષેપનાં માપ $|\vec{l} \cdot \hat{i}|, |\vec{l} \cdot \hat{j}|, |\vec{l} \cdot \hat{k}| = (|l_1|, |l_2|, |l_3|)$ થાય.

$\therefore \vec{l} = (l_1, l_2, l_3)$ તો $(|l_1|, |l_2|, |l_3|) = (3, 4, 12)$

$\therefore l_1 = \pm 3, l_2 = \pm 4, l_3 = \pm 12$. આથી, $|\vec{l}| = 13$

$\therefore$ દિક્કોસાઇન $\frac{-3}{13}, \frac{-4}{13}, \frac{-12}{13}$ અથવા $\frac{3}{13}, \frac{4}{13}, \frac{12}{13}$ અથવા $\frac{3}{13}, \frac{-4}{13}, \frac{12}{13}$, $\frac{3}{13}, \frac{-4}{13}, \frac{-12}{13}$

જવાબ : (A), (B), (C), (D)

(134) સમતલ $2x + y - 3z + 4 = 0$ ના અભિલંબની દિક્કોસાઇન અનુક્રમે ......

(A) $\frac{-1}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{-2}{\sqrt{14}}$ (B) $\frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{-3}{\sqrt{14}}$ (C) $\frac{-2}{\sqrt{14}}, \frac{-1}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}$ (D) $\frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}$

ઉકેલ : સમતલનો અભિલંબ સદિશ $\vec{n} = (2, 1, -3)$

$\therefore |\vec{n}| = \sqrt{4+1+9} = \sqrt{14}$

$\therefore \vec{n}$ ની દિક્કોસાઇન $\frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{-3}{\sqrt{14}}$ અથવા $\frac{-2}{\sqrt{14}}, \frac{-1}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}$

(સમતલનું સમીકરણ $-2x - y + 3z = 4$ પણ લઈ શકાય.)

જવાબ : (B), (C)

(135) રેખાઓ $\frac{x+1}{0} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{-1}$ અને $\frac{x+1}{3} = \frac{y-4}{2} = \frac{z}{0}$ ......

(A) એકબીજીને છેદશે નહિ. (B) એકબીજીને છેદશે.

(C) (–1, 4, 0) બિંદુએ છેદશે. (D) (–1, 1, 1) બિંદુએ છેદશે.

ઉકેલ : રેખાઓ માટે $\vec{a} = (-1, 1, 1)$, $\vec{l} = (0, 3, -1)$

અને $\vec{b} = (-1, 4, 0)$, $\vec{m} = (3, 2, 0)$

હવે, $[\vec{b} - \vec{a}\ \vec{l}\ \vec{m}] = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$

વળી, $\vec{l} \times \vec{m} \neq \vec{0}$

$\therefore$ રેખાઓ એકબીજીને છેદે છે.

વિકલ્પ (A) અસત્ય છે અને વિકલ્પ (B) સત્ય છે.

પ્રથમ રેખા પરનું કોઈ પણ બિંદુ $(-1, 3k_1 + 1, -k_1 + 1)$

અને બીજી રેખા પરનું કોઈ પણ બિંદુ $(3k_2 - 1, 2k_2 + 4, 0)$

રેખાઓ એકબીજાને છેદે છે.

કોઈક k_2 તથા k_1 માટે, $-1 = 3k_2 - 1$, $3k_1 + 1 = 2k_2 + 4$, $-k_1 + 1 = 0$

$\therefore$ $k_2 = 0$ અને $k_1 = 1$

આ કિંમતો સમીકરણ $3k_1 + 1 = 2k_2 + 4$ નું સમાધાન પણ કરે છે તથા છેદબિંદુ (–1, 4, 0) છે.

વિકલ્પ (C) સત્ય છે અને (D) અસત્ય છે. **જવાબ : (B), (C)**

(136) જો રેખા અક્ષો સાથે અનુક્રમે α, β, γ માપના ખૂણા બનાવે તો ......

(A) $cos^2\alpha = cos^2\beta + cos^2\gamma$ (B) $sin^2\alpha + sin^2\beta + sin^2\gamma = 2$

(C) $sin^2\beta + sin^2\gamma = 1 + cos^2\alpha$ (D) $cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma = 2$

ઉકેલ : રેખાની દિક્કોસાઈન $cos\alpha$, $cos\beta$, $cos\gamma$ થશે.

$\therefore$ $cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma = 1$

વિકલ્પ (A) અસત્ય છે તથા વિકલ્પ (D) અસત્ય છે.

હવે, $cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma = 1$

$\therefore$ $1 - sin^2\alpha + 1 - sin^2\beta + 1 - sin^2\gamma = 1$

$\therefore$ $sin^2\alpha + sin^2\beta + sin^2\gamma = 2$

વિકલ્પ (B) સત્ય છે.

તથા $sin^2\beta + sin^2\gamma = 1 + 1 - sin^2\alpha$

$\therefore$ $sin^2\beta + sin^2\gamma = 1 + cos^2\alpha$

વિકલ્પ (C) સત્ય છે. **જવાબ : (B), (C)**

(137) રેખા $\frac{x}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-3}{2}$ સાથે $\frac{\pi}{3}$ માપનો ખૂણો બનાવતી તથા તેને છેદતી અને ઊગમબિંદુમાંથી પસાર થતી રેખાનું સમીકરણ ......

(A) $\frac{x}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$ (B) $\frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{1}$ (C) $\frac{x}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1}$ (D) $\frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$

ઉકેલ : રેખા $\frac{x}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-3}{2}$ માટે $\vec{a} = (0, 3, 3)$, $\vec{l} = (1, 1, 2)$ અને રેખા પરનું કોઈ પણ બિંદુ P$(k, k + 3, 2k + 3)$ છે.

$\overleftrightarrow{OP}$ ની દિશાનો સદિશ $\overrightarrow{\mathbf{OP}} = (k, k + 3, 2k + 3)$

$\overleftrightarrow{OP}$ એ આપેલ રેખા સાથે $\frac{\pi}{3}$ માપનો ખૂણો બનાવે છે.

$$\therefore \; cos\frac{\pi}{3} = \frac{|1(k) + 1(k+3) + 2(2k+3)|}{\sqrt{1+1+4} \cdot \sqrt{k^2 + (k+3)^2 + (2k+3)^2}}$$

$$\therefore \; \frac{1}{2} = \frac{|6k+9|}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6k^2 + 18k + 18}} = \frac{3|2k+3|}{6\sqrt{k^2 + 3k + 3}}$$

$\therefore$ $k^2 + 3k + 3 = 4k^2 + 12k + 9$

$\therefore$ $3k^2 + 9k + 6 = 0$

$\therefore$ $k^2 + 3k + 2 = 0$

$\therefore$ $(k + 2)(k + 1) = 0$

$\therefore\ k = -2$ અથવા $k = -1$

$\overleftrightarrow{OP}$ ની દિશાનો સદિશ $\overrightarrow{\mathbf{OP}} = (-2, 1, -1)$ અથવા $\overrightarrow{\mathbf{OP}} = (-1, 2, 1)$ અને $\overleftrightarrow{OP}$ બિંદુ O(0, 0, 0)માંથી પસાર થાય છે.

$\overleftrightarrow{OP}$ નાં સમીકરણ $\frac{x}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1}$ તથા $\frac{x}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$ **જવાબ : (A), (C)**

(138) બે સમતલો $x + y + z - 1 = 0$ અને $x - 2y + 4z + 2 = 0$ ની છેદરેખાના સમીકરણનું સંમિત સ્વરૂપ ......

(A) $\frac{x-2}{-2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{1}$ (B) $\frac{x}{-2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1}$

(C) $\frac{1-x}{2} = \frac{2y-1}{2} = \frac{2z+1}{2}$ (D) $\frac{x+2}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{2}$

ઉકેલ : સમતલોના અભિલંબ સદિશ $\vec{n_1} = (1, 1, 1)$, $\vec{n_2} = (1, -2, 4)$ છે.

છેદરેખાની દિશાનું સદિશ $\vec{l} = \vec{n_1} \times \vec{n_2} = (6, -3, -3)$ એટલે કે $\vec{l} = (-2, 1, 1)$

સમતલોનાં સમીકરણોમાં $z = 0$ લેતાં છેદરેખા પરનું એક બિંદુ (0, 1, 0) થશે. કારણ કે સમીકરણો $x + y = 1$, $x - 2y = -2$ બને.

તેથી રેખાનું સમીકરણ $\frac{x}{-2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1}$

$\therefore$ વિકલ્પ (B) સત્ય છે.

$z = -1$ લેતાં, બિંદુ (2, 0, –1) મળશે.

કારણ કે સમીકરણો $x + y = 2$, $x - 2y = 2$ બને.

$\therefore$ રેખાનું સમીકરણ $\frac{x-2}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{1}$ થશે.

$\therefore$ વિકલ્પ (A) અસત્ય છે.

અથવા (2, 1, –1) સમતલ $x + y + z = 1$ પર નથી.

$\therefore$ વિકલ્પ (A) અસત્ય છે.

વિકલ્પ (C) માં રેખાનું સમીકરણ $\frac{x-1}{-2} = \frac{y-\frac{1}{2}}{1} = \frac{z+\frac{1}{2}}{1}$ છે.

$\left(1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ બંને સમતલો $x + y + z - 1 = 0$ તથા $x - 2y + 4z + 2 = 0$ પર છે.

દિશા તો (–2, 1, 1) છે જ.

$\therefore$ વિકલ્પ (C) સત્ય છે.

વિકલ્પ (D) પરથી રેખાની દિશા (–1, 2, 2) છે પરંતુ (–2, 1, 1) હોવી જોઈએ.

$\therefore$ વિકલ્પ (D) અસત્ય છે. **જવાબ : (B), (C)**

(139) સમતલ $2x + 3y + 5z = 0$ માટે ......

(A) $2x - 3y + z - 7 = 0$ એ લંબ સમતલ છે. (B) (2, 2, –2)માંથી પસાર થતું નથી.

(C) (–2, –2, 2)માંથી પસાર થાય છે. (D) $\frac{x-3}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+7}{5}$ સમતલને લંબ રેખા છે.

ઉકેલ : સમતલ $2x + 3y + 5z = 0$ નો અભિલંબ સદિશ $\vec{n_1} = (2, 3, 5)$

સમતલ $2x - 3y + z - 7 = 0$ નો અભિલંબ સદિશ $\vec{n_2} = (2, -3, 1)$

હવે, $\vec{n_1} \cdot \vec{n_2} = 4 - 9 + 5 = 0$. આથી, $\vec{n_1} \perp \vec{n_2}$

$\therefore$ સમતલ $2x - 3y + z - 7 = 0$ આપેલ સમતલને લંબ સમતલ છે.

$\therefore$ વિકલ્પ (A) સત્ય છે.

$2x + 3y + 5z = 0$ માં બિંદુના યામ $(2, 2, -2)$ મૂકતાં, $2(2) + 3(2) + 5(-2) = 4 + 6 - 10 = 0$.

$\therefore$ બિંદુ $(2, 2, -2)$ સમતલનો સભ્ય છે.

$\therefore$ વિકલ્પ (B) અસત્ય છે.

બિંદુ $(-2, -2, 2)$ માટે $2(-2) + 3(-2) + 5(2) = -4 - 6 + 10 = 0$

$\therefore$ સમતલ બિંદુ $(-2, -2, 2)$માંથી પસાર થાય છે.

$\therefore$ વિકલ્પ (C) સત્ય છે.

રેખા $\frac{x-3}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+7}{5}$ ની દિશાનો સદિશ $\vec{l} = (2, 3, 5) = \vec{n_1}$

$\therefore$ રેખા સમતલને લંબ છે.

$\therefore$ વિકલ્પ (D) સત્ય છે. **જવાબ : (A), (C), (D)**

(140) બિંદુ $(0, 1, -1)$થી $2\sqrt{14}$ અંતરે આવેલું રેખા $x = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-3}$ પરનું બિંદુ ...... છે.

(A) $(4, 9, -13)$ (B) $(-4, -7, 13)$ (C) $(-2, -3, 5)$ (D) $(2, 5, -7)$

ઉકેલ : આપેલ રેખા પરનું કોઈ પણ બિંદુ $P(k, 2k + 1, -3k - 1)$ છે.

ધારો કે બિંદુ P નું $(0, 1, -1)$થી અંતર $2\sqrt{14}$ છે.

$\therefore k^2 + (2k + 1 - 1)^2 + (-3k - 1 + 1)^2 = 4(14)$

$\therefore 14k^2 = 4(14)$. આથી, $k^2 = 4$

$\therefore k = 2$ અથવા $k = -2$

$\therefore$ રેખા પર $(0, 1, -1)$થી $2\sqrt{14}$ અંતરે આવેલાં બિંદુઓ $(2, 5, -7)$ તથા $(-2, -3, 5)$

જવાબ : (C), (D)

(141) સમતલ $6x - 2y + 3z + 18 = 0$ અને $2x - y + 2z + 13 = 0$ વચ્ચેના ખૂણાના દુભાજક સમતલનું સમીકરણ ......

(A) $4x + y - 5z - 37 = 0$ (B) $4x + y - 5z + 37 = 0$

(C) $32x - 13y + 23z - 145 = 0$ (D) $32x - 13y + 23z + 145 = 0$

ઉકેલ : આપેલાં સમતલોની વચ્ચેના ખૂણાના દુભાજકનાં સમીકરણ

$$\frac{6x - 2y + 3z + 18}{\sqrt{36 + 4 + 9}} = \pm \frac{2x - y + 2z + 13}{\sqrt{4 + 1 + 4}}$$

$\therefore 3(6x - 2y + 3z + 18) = \pm\ 7(2x - y + 2z + 13)$

$\therefore 18x - 6y + 9z + 54 = \pm\ (14x - 7y + 14z + 91)$

$\therefore 4x + y - 5z - 37 = 0$ તથા $32x - 13y + 23z + 145 = 0$ **જવાબ : (A), (D)**

નિષ્કર્ષ અને કારક પ્રકારના પ્રશ્નો

આ પ્રકારના પ્રશ્નોમાં બે વિધાન હોય છે :

વિધાન 1 : નિષ્કર્ષ

વિધાન 2 : કારક

આ પ્રકારના પ્રશ્નોમાં ચાર વિકલ્પો હોય છે. તે નીચે પ્રમાણે :

(A) વિધાન 1 અને વિધાન 2 બંને સત્ય છે અને વિધાન 2 એ વિધાન 1 ની યોગ્ય સમજૂતી માટે પર્યાપ્ત છે.

(B) વિધાન 1 અને વિધાન 2 બંને સત્ય છે અને વિધાન 2 એ વિધાન 1 ની યોગ્ય સમજૂતી માટે પર્યાપ્ત નથી.

(C) વિધાન 1 સત્ય છે અને વિધાન 2 અસત્ય છે.

(D) વિધાન 1 અસત્ય છે અને વિધાન 2 સત્ય છે.

(142) **વિધાન 1 :** રેખા L : $\frac{x}{4} = \frac{y}{-5} = \frac{z}{3}$ એ સમતલ $4x - 5y + 3z = 20$ ને લંબ છે.

વિધાન 2 : રેખા L ની દિક્કોસાઈન $\frac{4}{5\sqrt{2}}, \frac{-5}{5\sqrt{2}}, \frac{3}{5\sqrt{2}}$ છે.

ઉકેલ : સમતલ $4x - 5y + 3z = 20$ નો અભિલંબ સદિશ $\vec{n} = (4, -5, 3)$. રેખા L સમતલને લંબ હોય, તો રેખા L ની દિશાનો સદિશ $\vec{l} = k\vec{n}$, $k \in R$ થશે.

હવે $\vec{l} = \vec{n}$ લેતાં રેખા L ની દિક્કોસાઈન $\frac{4}{|\vec{l}|}, \frac{-5}{|\vec{l}|}, \frac{3}{|\vec{l}|}$

જ્યાં $|\vec{l}| = \sqrt{16 + 25 + 9} = 5\sqrt{2}$

∴ રેખા L ની દિક્કોસાઈન $\frac{4}{5\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{3}{5\sqrt{2}}$ થશે.

∴ વિધાન **1** અને વિધાન **2** બંને સત્ય છે તથા વિધાન **2** એ વિધાન **1** ની યોગ્ય સમજૂતી માટે પર્યાપ્ત છે.

જવાબ : (A)

(143) **વિધાન 1 :** બે સમતલો $5x - 12y + 13z = 40$ અને $5x - 12y + 13z = 20$ વચ્ચેનું અંતર $\frac{10\sqrt{2}}{13}$

વિધાન 2 : બે સમાંતર સમતલો $ax + by + cz + d_1 = 0$ અને $ax + by + cz = d_2$ વચ્ચેનું લંબઅંતર $\frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ થાય.

ઉકેલ : સમતલો $5x - 12y + 13z - 40 = 0$ અને $5x - 12y + 13z - 20 = 0$ માટે $\vec{n_1} = \vec{n_2}$ હોવાથી તે સમાંતર સમતલો છે.

બે સમતલો વચ્ચેનું લંબઅંતર $= \frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|-40 - (-20)|}{\sqrt{25 + 144 + 169}} = \frac{20}{13\sqrt{2}} = \frac{10\sqrt{2}}{13}$

∴ વિધાન 1 સત્ય છે.

હવે સમાંતર સમતલો $ax + by + cz + d_1 = 0$ અને $ax + by + cz - d_2 = 0$ વચ્ચેનું લંબઅંતર

$\frac{|d_1 - (-d_2)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|d_1 + d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ થશે.

∴ વિધાન 2 અસત્ય છે. **જવાબ : (C)**

(144) રેખા : $\frac{x-3}{-1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+1}{2}$ અને સમતલ $\pi : x - y + 2z = 0$ છે.

વિધાન 1 : L એ π માં આવેલી છે.

વિધાન 2 : L એ π ને સમાંતર છે.

ઉકેલ : રેખા L માટે $\vec{a} = (3, -1, -1)$, $\vec{l} = (-1, 3, 2)$ અને $(-k + 3, 3k - 1, 2k - 1)$ એ રેખા L નું કોઈ પણ બિંદુ છે.

સમતલ π માટે $\vec{n} = (1, -1, 2)$

હવે, $\vec{l} \cdot \vec{n} = (-1, 3, 2) \cdot (1, -1, 2) = -1 -3 + 4 = 0$

$\therefore \vec{l} \perp \vec{n}$

$\therefore$ L એ π માં આવેલી છે અથવા L એ π ને સમાંતર છે.

હવે રેખા પરના કોઈ પણ બિંદુના યામ $(-k + 3, 3k - 1, 2k - 1)$ સમતલના સમીકરણમાં મૂકતાં,

$$(-k + 3) - (3k - 1) + 2(2k - 1) = 2 \neq 0$$

$\therefore$ L એ π માં આવેલી નથી.

$\therefore$ વિધાન 1 અસત્ય છે અને વિધાન 2 સત્ય છે. **જવાબ : (D)**

(145) બે રેખાઓનાં સમીકરણ L : $\frac{x+3}{1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-1}{2}$ અને M : $\frac{x-1}{-3} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-2}{1}$ છે.

વિધાન 1 : L અને M સમતલીય છે.

વિધાન 2 : સમીકરણો $x_1 + 3y_1 = 4$, $3x_1 + 2y_1 = 5$ અને $2x_1 - y_1 = 1$ સુસંગત છે.

ઉકેલ : રેખા L માટે $\vec{a} = (-3, 2, 1)$, $\vec{l} = (1, -3, 2)$ અને રેખા M માટે $\vec{b} = (1, -3, 2)$, $\vec{m} = (-3, 2, 1)$

$$(\vec{b} - \vec{a}) \cdot (\vec{l} \times \vec{m}) = \begin{vmatrix} 4 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 4(-7) + 5(7) + 1\,(-7) = 0$$

$\therefore$ L અને M સમતલીય છે.

$\therefore$ વિધાન 1 સત્ય છે. વળી $\vec{l} \times \vec{m} \neq \vec{0}$

આથી રેખાઓ સમાંતર ન હોવાથી પરસ્પર છેદે છે.

L પરનું કોઈ પણ બિંદુ $(x_1 - 3, -3x_1 + 2, 2x_1 + 1)$

અને M પરનું કોઈ પણ બિંદુ $(-3y_1 + 1, 2y_1 - 3, y_1 + 2)$

હવે છેદબિંદુ માટે $x_1 - 3 = -3y_1 + 1$, $\quad -3x_1 + 2 = 2y_1 - 3$, $\quad 2x_1 + 1 = y_1 + 2$

$\therefore x_1 + 3y_1 = 4 \qquad 3x_1 + 2y_1 = 5 \qquad 2x_1 - y_1 = 1$

આપેલ સમીકરણો સુસંગત છે. $x_1 = 1, y_1 = 1$ તેમનો ઉકેલ છે.

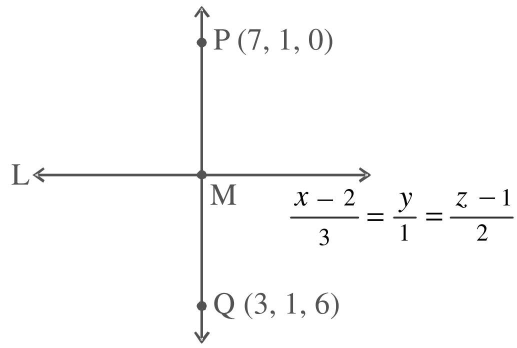
$\therefore$ વિધાન 2 સત્ય છે.

વિધાન 2 એ વિધાન 1 ની યોગ્ય સમજૂતી માટે પર્યાપ્ત છે. **જવાબ : (A)**

(146) **વિધાન 1 :** રેખા L : $\frac{x-2}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2}$ માં બિંદુ P(7, 1, 0)નું પ્રતિબિંબ Q(3, 1, 6) છે.

વિધાન 2 : રેખા $\frac{x-2}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2}$ બિંદુઓ (7, 1, 0) અને (3, 1, 6)ને જોડતા રેખાખંડને દુભાગે છે.

ઉકેલ : $\overline{PQ}$ નું મધ્યબિંદુ M(5, 1, 3) છે.



આકૃતિ 21.10

રેખા L પરનું કોઈ પણ બિંદુ $(3k + 2, k, 2k + 1)$ છે,

હવે $3k + 2 = 5$, $k = 1$, $2k + 1 = 3$ લેતાં,

$k = 1$ બધાં જ સમીકરણનું સમાધાન કરે છે.

$\therefore$ M $\in$ L તથા $\overleftrightarrow{PQ}$ ની દિશાનો સદિશ $\vec{m} = (-4, 0, 6)$

અને રેખા L નો સદિશ $\vec{l} = (3, 1, 2)$

$\vec{l} \cdot \vec{m} = 0$

$\therefore \overleftrightarrow{PQ} \perp L$

$\therefore$ P નું રેખા L માં પ્રતિબિંબ Q છે.

$\therefore$ વિધાન 1 સત્ય છે.

તથા (7, 1, 0) અને (3, 1, 6)ને જોડતાં રેખાખંડને આપેલ રેખા દુભાગે છે.

$\therefore$ વિધાન 2 સત્ય છે.

પરંતુ જો રેખા કોઈ પણ રેખાખંડને કાટખૂણે દુભાગે, તો જ રેખાખંડનાં અંત્યબિંદુઓ એકબીજાનાં પ્રતિબિંબ થાય.

$\therefore$ વિધાન 2 એ વિધાન 1 ની યોગ્ય સમજૂતી માટે પર્યાપ્ત નથી. **જવાબ : (B)**

(147) **વિધાન 1 :** બિંદુ (4, 3, 1)નું સમતલ $x - y + z = 5$ માં પ્રતિબિંબ (6, 1, 3) છે.

વિધાન 2 : (4, 3, 1) અને (6, 1, 3)ને જોડતા રેખાખંડને સમતલ $x - y + z = 5$ દુભાગે છે.

ઉકેલ : (4, 3, 1) નું સમતલ $x - y + z - 5 = 0$ માં પ્રતિબિંબ મેળવવા,

$$\frac{x-4}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-1}{1} = -2\ \frac{1(4) - 1(3) + 1(1) - 5}{(1)(1) + (-1)(-1) + (1)(1)}$$

$$= -2\ \frac{(4 - 3 + 1 - 5)}{3} = 2$$

$\therefore x = 2 + 4 = 6, y = -2 + 3 = 1, z = 2 + 1 = 3$

$\therefore$ (4, 3, 1)નું પ્રતિબિંબ (6, 1, 3) છે.

$\therefore$ વિધાન 1 સત્ય છે.

વિધાન 1 પરથી પ્રશ્ન જોતાં વિધાન 2 સત્ય છે એમ લાગે. મધ્યબિંદુ (5, 2, 2) એ સમતલ $x - y + z = 5$ પર છે તે વિધાન 2 સત્ય છે. પરંતુ રેખાખંડને સમતલ દુભાગે છે. આ સમતલ લંબદ્વિભાજક સમતલ આપ્યું નથી. તેથી વિધાન 2 એ વિધાન 1 ની યોગ્ય સમજૂતી માટે પર્યાપ્ત નથી. **જવાબ : (B)**

(148) ધારો કે $\pi_1 : x - y + z = 1$, $\pi_2 : x + y - z = -1$ અને $\pi_3 : x - 3y + 3z = 2$ ત્રણ સમતલો છે. L_1 એ π_2 અને π_3, L_2 એ π_3 તથા π_1 ની અને L_3 એ π_1 અને π_2 ની છેદરેખાઓ છે. [IIT : 2008]

વિધાન 1 : L_1, L_2 અને L_3 પૈકી ઓછામાં ઓછી બે રેખાઓ સમાંતર નથી.

વિધાન 2 : ત્રણેય સમતલોને સામાન્ય છેદબિંદુ નથી.

ઉકેલ : $\pi_1 : x - y + z = 1$ નો અભિલંબ $\vec{n_1} = (1, -1, 1)$

$\pi_2 : x + y - z = -1$ નો અભિલંબ $\vec{n_2} = (1, 1, -1)$

$\pi_3 : x - 3y + 3z = 2$ નો અભિલંબ $\vec{n_3} = (1, -3, 3)$

હવે, L_1 ની દિશાનો સદિશ $\vec{l} = \vec{n_2} \times \vec{n_3} = (1, 1, -1) \times (1, -3, 3) = (0, -4, -4)$

એટલે કે $\vec{l} = (0, 1, 1)$

L_2 ની દિશાનો સદિશ $\vec{m} = \vec{n_3} \times \vec{n_1} = (1, -3, 3) \times (1, -1, 1) = (0, 2, 2)$ એટલે કે $\vec{m} = (0, 1, 1)$

L_3 ની દિશાનો સદિશ $\vec{n} = \vec{n_1} \times \vec{n_2} = (1, -1, 1) \times (1, 1, -1) = (0, 2, 2)$ એટલે કે $\vec{n} = (0, 1, 1)$

$\therefore \vec{l} = \vec{m} = \vec{n}$

ત્રણેય રેખાની દિશા સમાન છે.

$L_1 = \pi_2 \cap \pi_3$ માં $\left(-\frac{1}{4}, -\frac{3}{4}, 0\right)$ છે, તે π_1 માં નથી.

$L_2 = \pi_1 \cap \pi_3$ માં $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$ છે, તે π_2 માં નથી.

$L_3 = \pi_1 \cap \pi_2$ માં $(0, -1, 0)$ છે, તે π_3 માં નથી.

$\therefore L_1, L_2, L_3$ ત્રણેય સમાંતર રેખાઓ છે.

$\therefore$ ત્રણેય સમતલોનું સામાન્ય છેદબિંદુ નથી.

$\therefore$ **વિધાન 1 :** અસત્ય છે અને **વિધાન 2** સત્ય છે. **જવાબ : (D)**

(149) ધારો કે $3x - 6y - 2z = 15$ અને $2x + y - 2z = 5$ બે સમતલનાં સમીકરણ છે.

વિધાન 1 : આપેલાં સમતલોની છેદરેખાનાં પ્રચલ સમીકરણ, $x = 3 + 14t$, $y = 1 + 2t$, $z = 15t$ છે.

વિધાન 2 : સદિશ $14\hat{i} + 2\hat{j} + 15\hat{k}$ એ આપેલાં સમતલોની છેદરેખાને સમાંતર છે. [IIT : 2007]

ઉકેલ : સમતલો $3x - 6y - 2z = 15$ અને $2x + y - 2z = 5$ ના અભિલંબ અનુક્રમે

$\vec{n_1} = (3, -6, -2)$ અને $\vec{n_2} = (2, 1, -2)$ છે

$\therefore$ સમતલોની છેદરેખાની દિશાનો સદિશ $\vec{n} = \vec{n_1} \times \vec{n_2} = (3, -6, -2) \times (2, 1, -2) = (14, 2, 15)$

સમતલોના સમીકરણમાં $z = 0$ લેતાં, $3x - 6y = 15$, $2x + y = 5$

આથી, $x = 3$, $y = -1$. સમતલોનું એક છેદબિંદુ $(3, -1, 0)$ છે.

$\therefore$ સમતલોની છેદરેખાનું સમીકરણ $\vec{r} = \vec{a} + t\vec{n}$, $t \in R$

$\therefore$ તેનાં પ્રચલ સમીકરણો $x = 3 + 14t$, $y = -1 + 2t$, $z = 15t$

$\therefore$ **વિધાન 1 :** અસત્ય છે.

સદિશ $14\hat{i} + 2\hat{j} + 15\hat{k} = \vec{n}$ એ સમતલોની છેદરેખાને સમાંતર દિશામાં છે.

$\therefore$ **વિધાન 2 :** સત્ય છે.

ટૂંકી રીત : $t = 0$ લેતાં (3, 1, 0) મળે.

તે એક પણ સમતલ પર નથી. આથી, વિધાન 1 અસત્ય છે.

વિકલ્પ (D) જ બાકી રહે છે. **જવાબ : (D)**

(150) **વિધાન 1 :** (1, 2, 3) અને (2, 3, 5)ને જોડતી રેખા એ બિંદુઓ (–2, 1, –1) અને (1, 4, 5)ને જોડતી રેખાને સમાંતર છે.

વિધાન 2 : બે રેખાઓના દિક્ગુણોત્તર a_1, b_1, c_1 અને a_2, b_2, c_2 માટે જો $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{c_3}$, તો તેઓ એકબીજાને સમાંતર અથવા સંપાતી છે.

ઉકેલ : (1, 2, 3) અને (2, 3, 5)માંથી પસાર થતી રેખાના દિક્ગુણોત્તર 1, 1, 2 છે તથા (–2, 1, –1) અને (1, 4, 5)માંથી પસાર થતી રેખાના દિક્ગુણોત્તર 3, 3, 6 છે. અહીં $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{1}{3} = \frac{2}{6}$ એટલે કે $\frac{1}{3} = \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

તથા બિંદુ (1, 2, 3)એ બીજી રેખા $\frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{2}$ પર નથી.

$\therefore$ આપેલ રેખાઓ સમાંતર રેખાઓ છે.

$\therefore$ વિધાન 1 સત્ય છે.

વિધાન 2 પણ સત્ય છે પરંતુ વિધાન 2 એ વિધાન 1 ની યોગ્ય સમજૂતી માટે પર્યાપ્ત નથી.

રેખાઓ સંપાતી પણ હોઈ શકે. **જવાબ : (B)**

(151) **વિધાન 1 :** બિંદુઓ (4, 0, 4), (3, 2, 1) અને (2, 4, –2) સમરેખ છે.

વિધાન 2 : ભિન્ન બિંદુઓ A, B અને C માટે જો AB + BC = AC તો A, B, C સમરેખ છે.

ઉકેલ : ધારો કે P(4, 0, 4), Q (3, 2, 1), R (2, 4, –2)

$$PQ = \sqrt{(3-4)^2 + (2-0)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$$

$$QR = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$$

$$PR = \sqrt{4+16+36} = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}$$

$\therefore$ PQ + QR = PR

$\therefore$ P – Q – R

$\therefore$ P, Q, R સમરેખ છે.

$\therefore$ **વિધાન 1** સત્ય છે.

વિધાન 2 પણ સત્ય છે તથા વિધાન 2 એ વિધાન 1 ની યોગ્ય સમજૂતી માટે પર્યાપ્ત છે. **જવાબ : (A)**

(152) **વિધાન 1 :** સમતલો $3x + 2y - z - 4 = 0$ અને $x + y + z - 2 = 0$ ની છેદરેખામાંથી તથા (2, 1, 2) માંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ $7x + 4y - 5z - 8 = 0$ છે.

વિધાન 2 : બે સમતલો $\pi_1 = 0$ અને $\pi_2 = 0$ ની છેદરેખાને સમાવતું સમતલ જો $\pi_2 = 0$ ન હોય, તો તેનું સમીકરણ $\pi_1 + \lambda \pi_2 = 0$ થાય, $\lambda \in R$.

ઉકેલ : (2, 1, 2) એ $x + y + z - 2 = 0$ પર નથી.

સમતલો $3x + 2y - z - 4 = 0$ અને $x + y + z - 2 = 0$ ની છેદરેખામાંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ

$3x + 2y - z - 4 + \lambda (x + y + z - 2) = 0$ છે. $\lambda \in R$.

સમતલ (2, 1, 2)માંથી પસાર થાય છે.

$\therefore$ $6 + 2 - 2 - 4 + \lambda (2 + 1 + 2 - 2) = 0$

$\therefore$ $2 + 3\lambda = 0$. આથી, $\lambda = \frac{-2}{3}$

$\therefore$ સમતલનું સમીકરણ $3x + 2y - z - 4 - \frac{2}{3} (x + y + z - 2) = 0$

$\therefore$ $7x + 4y - 5z - 8 = 0$

$\therefore$ વિધાન 1 સત્ય છે.

વિધાન 2 પણ સત્ય છે તથા વિધાન 2 એ વિધાન 1 ની યોગ્ય સમજૂતી માટે પર્યાપ્ત છે.

જવાબ : (A)

(153) **વિધાન 1 :** વિષમતલીય રેખાઓ $\vec{n} = (1, 1, 0) + k (2, -1, 1), k \in R$ અને $\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-5} = \frac{z+1}{2}$ વચ્ચેનું લઘુતમ અંતર $\frac{10}{\sqrt{59}}$ છે.

વિધાન 2 : જો બે રેખાઓમાંથી એક પણ સમતલ પસાર ન થાય, તો તે બે રેખાઓ વિષમતલીય છે.

ઉકેલ : રેખાઓ માટે $\vec{a} = (1, 1, 0)$, $\vec{l} = (2, -1, 1)$ અને $\vec{b} = (2, 1, -1)$, $\vec{m} = (3, -5, 2)$,

$\vec{l} \times \vec{m} = (3, -1, -7)$. $(\vec{b} - \vec{a}) (\vec{l} \times \vec{m}) \neq 0$. આથી, રેખાઓ વિષમતલીય છે.

વિષમતલીય રેખાઓ વચ્ચેનું લઘુતમ અંતર $= \frac{|(\vec{b} - \vec{a}) \cdot (\vec{l} \times \vec{m})|}{|\vec{l} \times \vec{m}|}$

$= \frac{|(1, 0, -1) \cdot (3, -1, -7)|}{\sqrt{9 + 1 + 49}} = \frac{10}{\sqrt{59}}$

$\therefore$ વિધાન 1 સત્ય છે.

વિધાન 2 પણ સત્ય છે, પરંતુ વિધાન 2 એ વિધાન 1 ની યોગ્ય સમજૂતી માટે પર્યાપ્ત નથી.

જવાબ : (B)

(154) **વિધાન 1 :** રેખા $\frac{x+3}{13} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z-4}{-7}$ એ સમતલ $x + 5y - z - 8 = 0$ માં આવેલી છે.

વિધાન 2 : જો રેખા $\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n}$ પરનું બિંદુ (x_1, y_1, z_1) સમતલ $ax + by + cz + d = 0$ નું સમાધાન કરે, તો રેખા સમતલમાં આવેલી છે.

ઉકેલ : રેખા માટે $\vec{a} = (-3, 3, 4)$, $\vec{l} = (13, -4, -7)$ તથા $(-3 + 13k, 3 - 4k, 4 - 7k)$ રેખા પરનું કોઈ પણ બિંદુ છે.

સમતલનો અભિલંબ $\vec{n} = (1, 5, -1)$. વળી $\vec{l} \cdot \vec{n} = 13 - 20 + 7 = 0$

$\therefore$ $\vec{l} \perp \vec{n}$ તથા રેખા પરના કોઈ પણ બિંદુ માટે $-3 + 13k + 5 (3 - 4k) - (4 - 7k) - 8 = 0$

$\therefore$ રેખા પરના બધા જ બિંદુઓ સમતલમાં આવેલાં છે, તેથી રેખા સમતલમાં આવેલી છે.

$\therefore$ વિધાન 1 સત્ય છે.

વિધાન 2 અસત્ય છે, કારણ કે (x_1, y_1, z_1) એ રેખા અને સમતલનું છેદબિંદુ પણ હોઈ શકે.

જવાબ : (C)

(155) **વિધાન 1 :** રેખાઓ $\frac{x+1}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z-1}{1}$ અને $\frac{x}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{1}$ સમતલીય છે અને બંને રેખાઓને સમાવતા સમતલનું સમીકરણ $3x - 2y - 5z + 8 = 0$ છે.

વિધાન 2 : રેખા $\frac{x}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{1}$ એ સમતલ $9x + 6y + 3z - 8 = 0$ ને લંબ અને $x - y - z = 0$ ને સમાંતર છે.

ઉકેલ : રેખા $\frac{x+1}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z-1}{1}$ માટે $\vec{a} = (-1, 0, 1)$ અને $\vec{l} = (1, -1, 1)$ તથા રેખા $\frac{x}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{1}$

માટે $\vec{b} = (0 -1, 2)$ અને $\vec{m} = (3\ 2, 1)$.

$$(\vec{b} - \vec{a})\cdot(\vec{l} \times \vec{m}) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$\therefore$ રેખાઓ સમતલીય છે.

તેમને સમાવતા સમતલનું સમીકરણ,

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{vmatrix} = 0 \text{ છે.}$$

$$\begin{vmatrix} x+1 & y & z-1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$\therefore -3(x + 1) - y(-2) + (z - 1)(5) = 0$

$\therefore -3x + 2y + 5z - 8 = 0$

$\therefore 3x - 2y - 5z + 8 = 0$ તેમને સમાવતા સમતલનું સમીકરણ છે.

$\therefore$ વિધાન 1 સત્ય છે.

રેખા $\frac{x}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{1}$ માટે $\vec{l} = (3, 2, 1)$ અને સમતલ $9x + 6y + 3z - 8 = 0$ માટે $\vec{n} = (9, 6, 3)$

હવે, $\vec{l} \times \vec{n} = \vec{0}$. આથી, રેખા સમતલ $9x + 6y + 3z - 8 = 0$ ને લંબ છે.

સમતલ $x - y - z = 0$ માટે $\vec{n_1} = (1, -1, -1)$

$\vec{l} \cdot \vec{n_1} = 3(1) + 2(-1) + 1(-1) = 0$

$\vec{l} \perp \vec{n_1}$

વળી, રેખા પરનું બિંદુ $(0, -1, 2)$એ સમતલ $x - y - z = 0$ પર નથી.

$\therefore$ રેખા સમતલ $x - y - z = 0$ ને સમાંતર છે.

વિધાન 2 સત્ય છે પરંતુ વિધાન 2 એ વિધાન 1 ની યોગ્ય સમજૂતી માટે પર્યાપ્ત નથી. **જવાબ : (B)**

(156) **વિધાન 1 :** સમતલો $2x - y + z - 3 = 0$ અને $3x + y + z = 5$ ની છેદરેખામાંથી સમતલ $5x + 2z - 8 = 0$ પસાર થાય છે અને સમતલ $2x - 2y - 5z - 9 = 0$ ને લંબ છે.

વિધાન 2 : સમતલ $x + y + 3z = 5$ એ રેખા $x - 1 = y + 1 = z - 1$ ને (1, 1, 1)માં છેદે છે.

ઉકેલ : સમતલો $2x - y + z - 3 = 0$ અને $3x + y + z = 5$ ની છેદરેખામાંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ $2x - y + z - 3 + \lambda\,(3x + y + z - 5) = 0,\ \lambda \in R$.

$\lambda = 1$ લેતાં, સમતલનું સમીકરણ $5x + 2z - 8 = 0$ થશે.

સમતલ $5x + 2z - 8 = 0$ નો અભિલંબ $\vec{n_1} = (5, 0, 2)$ અને સમતલ $2x - 2y - 5z - 9 = 0$ નો અભિલંબ $\vec{n_2} = (2, -2, -5)$

હવે, $\vec{n_1} \cdot \vec{n_2} = 5(2) + 0\,(-2) + 2\,(-5) = 0$

$\therefore$ સમતલ $5x + 2z - 8 = 0$ એ સમતલ $2x - 2y - 5z - 9 = 0$ ને લંબ છે.

$\therefore$ વિધાન 1 સત્ય છે.

રેખા $x - 1 = y + 1 = z - 1$ પર બિંદુ (1, 1, 1) આવેલું નથી. તેથી સમતલ રેખાને (1, 1, 1) માં છેદશે નહિ.

$\therefore$ વિધાન 2 અસત્ય છે. **જવાબ : (C)**

(157) ધારો કે $L_1 : \frac{x+2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+1}{3}$ અને $L_2 : \frac{x+2}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-2}{1}$ બે રેખાઓનાં સમીકરણ છે.

વિધાન 1 : (–2, –1, –1)માંથી પસાર થતા અને જેનો અભિલંબ રેખાઓ L_1 અને L_2 બંનેને લંબ હોય તેવા સમતલનું (1, 1, 1)થી લંબઅંતર $\frac{13}{5\sqrt{3}}$ છે.

વિધાન 2 : રેખાઓ L_1 અને L_2 બંનેને લંબ હોય તેવો એકમ સદિશ $\frac{7\hat{i} - 5\hat{j} - \hat{k}}{5\sqrt{3}}$ છે.

ઉકેલ : રેખાઓની દિશાના સદિશ $\vec{l} = (1, 2, 3)$ અને $\vec{m} = (2, 3, 1)$,

$\vec{l}$ અને $\vec{m}$ બંનેને લંબ સદિશ $= \pm(\vec{l} \times \vec{m}) = \pm\,[(1, 2, 3) \times (2, 3, 1)] = \pm\,(-7, 5, -1)$

સમતલનો અભિલંબ $= -7\hat{i} + 5\hat{j} - \hat{k}$

$\therefore$ (–2, –1, –1)માંથી પસાર થતા આ અભિલંબવાળા સમતલનું સમીકરણ

$-7(x + 2) + 5(y + 1) - 1\,(z + 1) = 0$

$\therefore$ $-7x + 5y - z - 10 = 0$ અથવા $7x - 5y + z + 10 = 0$

આ સમતલનું (1, 1, 1)થી અંતર $= \frac{|7(1) - 5(1) + 1(1) + 10|}{\sqrt{49 + 25 + 1}} = \frac{13}{5\sqrt{3}}$

$\therefore$ વિધાન 1 સત્ય છે.

રેખાઓ L_1 અને L_2 ને લંબ એકમ સદિશ $= \pm \dfrac{(\vec{l} \times \vec{m})}{|\vec{l} \times \vec{m}|}$

$$= \pm \frac{\left(-7\hat{i} + 5\hat{j} - \hat{k}\right)}{5\sqrt{3}}$$

$$= \frac{-7\hat{i} + 5\hat{j} - \hat{k}}{5\sqrt{3}} \text{ અથવા } \frac{7\hat{i} - 5\hat{j} + \hat{k}}{5\sqrt{3}}$$

$\therefore$ વિધાન 2 અસત્ય છે. **જવાબ : (C)**

જોડકાં જોડવાના પ્રશ્નો

(158) વિભાગ I નાં વિધાનોને વિભાગ II ની યોગ્ય વિગત સાથે જોડો :

વિભાગ I	વિભાગ II
(P) રેખાઓ $x = 1 + k$, $y = 1 + \lambda k$, $z = -3 - \lambda k$, $k \in R$ અને $\{(\frac{t}{2}, 2 - t, 1 + t) / t \in R\}$ સમતલીય હોય, તો λ નું મૂલ્ય, ...	(1) 1
(Q) (3, 3, 2), (0, 4, 3), (6, 4, 1), (6, 2, 3) શિરોબિંદુવાળા ચતુષ્ફલકનું ઘનફળ	(2) 2
(R) બિંદુ (–5, –3, –4)નું સમતલ $x + y + z = -3$ માં પ્રતિબિંબ (x_1, y_1, z_1) હોય, તો y_1 નું મૂલ્ય	(3) –2
(S) બિંદુ (5, 8, 15)નું રેખા $x = 6 + 3k$, $y = 7 + 2k$, $z = 7 - 2k$, $k \in R$ને સાપેક્ષ પ્રતિબિંબ (x_1, y_1, z_1) હોય, તો x_1 નું મૂલ્ય	(4) 3

(A) (P) → (3) (Q) → (2) (R) → (1) (S) → (4)

(B) (P) → (3) (Q) → (1) (R) → (4) (S) → (2)

(C) (P) → (3) (Q) → (2) (R) → (4) (S) → (1)

(D) (P) → (1) (Q) → (2) (R) → (4) (S) → (3)

ઉકેલ : (P) રેખાઓ માટે $\vec{a} = (1, 1, -3)$, $\vec{l} = (1, \lambda, -\lambda)$

અને $\vec{b} = (0, 2, 1)$, $\vec{m} = \left(\frac{1}{2}, -1, 1\right)$.

રેખાઓ સમતલીય છે.

$$\therefore \begin{vmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 1 & \lambda & -\lambda \\ \frac{1}{2} & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore -1(\lambda - \lambda) - 1\left(1 + \frac{\lambda}{2}\right) + 4\left(-1 - \frac{\lambda}{2}\right) = 0$$

$$\therefore -1 - \frac{\lambda}{2} - 4 - \frac{4\lambda}{2} = 0$$

$\therefore\ -5 = \frac{5\lambda}{2}$

$\therefore\ \lambda = -2$

(P) $\rightarrow$ (3)

(Q) ચતુષ્ફલક V – ABC નાં શિરોબિંદુઓ V(3, 3, 2), A(0, 4, 3), B(6, 4, 1) C(6, 2, 3) લેતાં, તેની ધારો

$\overrightarrow{\mathbf{VA}} = (-3, 1, 1),\ \overrightarrow{\mathbf{VB}} = (3, 1, -1),\ \overrightarrow{\mathbf{VC}} = (3, -1, 1)$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -3(1-1) - 1(3+3) + 1(-3-3) = -12$$

ચતુષ્ફલકનું ઘનફળ $= \frac{1}{6}\ |\ \Delta\ | = 2$

(Q) $\rightarrow$ (2)

(R) (–5, –3, –4)માંથી સમતલ $x + y + z = -3$ ને લંબરેખાનું સમીકરણ $\frac{x+5}{1} = \frac{y+3}{1} = \frac{z+4}{1}$

(–5, –3, –4)નું સમતલમાં પ્રતિબિંબ (x_1, y_1, z_1) લેતાં,

$$\frac{x_1+5}{1} = \frac{y_1+3}{1} = \frac{z_1+4}{1} = \frac{-2\,(1\,(-5)+1\,(-3)+1\,(-4)+3)}{1(1)+1(1)+1(1)} = 6$$

$\therefore\ x_1 = 1,\ y_1 = 3,\ z_1 = 2$

$\therefore\ y_1 = 3$

(R) $\rightarrow$ (4)

(S) ધારો કે બિંદુ P(5, 8, 15)થી રેખા પરનો લંબપાદ M($6 + 3k$, $7 + 2k$, $7 - 2k$) છે.

$\therefore\ \overrightarrow{\mathbf{PM}} \perp \vec{l}$ જ્યાં $\vec{l} = (3, 2, -2)$

$\therefore\ (3k + 1, 2k - 1, -2k - 8) \cdot (3, 2, -2) = 0$

$\therefore\ 9k + 3 + 4k - 2 + 4k + 16 = 0$

$\therefore\ k = -1$

$\therefore$ લંબપાદ M (3, 5, 9)

ધારો કે P નું પ્રતિબિંબ Q(x_1, y_1, z_1) છે. આથી, M એ $\overline{PQ}$ નું મધ્યબિંદુ થશે.

$\therefore\ 3 = \frac{x_1+5}{2},\ 5 = \frac{y_1+8}{2},\ 9 = \frac{z_1+15}{2}$

$\therefore\ x_1 = 1,\ y_1 = 2,\ z_1 = 3$. આથી, $x_1 = 1$

$\therefore$ (S) $\rightarrow$ (1)

ટૂંકી રીત : S માં તમામ વિકલ્પો ભિન્ન છે. માટે માત્ર S ગણતા (S) $\rightarrow$ (1), જે વિકલ્પ (C) છે.

જવાબ : (C)

(159)

વિભાગ I	વિભાગ II
(1) રેખાઓ $2x = 3y = -z$ અને $6x = -y = -4z$ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ	(P) 0
(2) સમતલો $x - y + 2z + 8 = 0$ અને $2x + y + z - 5 = 0$ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ	(Q) $\frac{\pi}{6}$
(3) રેખા $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$ અને સમતલ $3x + 2y - 3z = 4$ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ	(R) $\frac{\pi}{2}$
(4) સમતલો $2x + 3y + z - 11 = 0$ અને $x + y - z - 8 = 0$ ની છેદરેખા અને સમતલ $x - 4y - 3z + 9 = 0$ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ	(S) $\frac{\pi}{3}$

(A) (1) → (R) (2) → (Q) (3) → (P) (4) → (S)

(B) (1) → (R) (2) → (S) (3) → (P) (4) → (Q)

(C) (1) → (R) (2) → (P) (3) → (Q) (4) → (S)

(D) (1) → (R) (2) → (S) (3) → (Q) (4) → (P)

ઉકેલ : (1) રેખા $2x = 3y = -z$ અને $6x = -y = -4z$ માટે $\frac{x}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-6}$ અને $\frac{x}{2} = \frac{y}{-12} = \frac{z}{-3}$

$\therefore \vec{l} = (3, 2, -6)$ અને $\vec{m} = (2, -12, -3)$

રેખાઓ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ θ હોય, તો $cos\theta = \frac{|(3, 2, -6) \cdot (2, -12, -3)|}{\sqrt{9+4+36}\sqrt{4+144+9}} = 0$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{2}$

$\therefore$ (1) → (R)

(2) અભિલંબ $\vec{n_1} = (1, -1, 2)$, $\vec{n_2} = (2, 1, 1)$

સમતલો વચ્ચેના ખૂણાનું માપ θ હોય, તો $cos\theta = \frac{|(1, -1, 2) \cdot (2, 1, 1)|}{\sqrt{1+1+4}\sqrt{4+1+1}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{3}$

$\therefore$ (2) → (S)

(3) $\vec{l} = (2, 3, 4)$ $\vec{n} = (3, 2, -3)$

રેખા અને સમતલ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ θ હોય, તો $sin\theta = \frac{|(2, 3, 4) \cdot (3, 2, -3)|}{\sqrt{4+9+16}\sqrt{9+4+9}} = 0$

$\therefore \theta = 0$

$\therefore$ (3) → (P)

(4) આપેલા સમતલોની છેદરેખાની દિશાનો સદિશ, $\vec{l} = \vec{n_1} \times \vec{n_2} = (2, 3, 1) \times (1, 1, -1) = (-4, 3, -1)$

સમતલ $x - 4y - 3z + 9 = 0$ નો અભિલંબ, $\vec{n} = (1, -4, -3)$

રેખા અને સમતલ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ θ હોય, તો $sin\theta = \frac{|(-4, 3, -1) \cdot (1, -4, -3)|}{\sqrt{16+9+1}\sqrt{1+16+9}} = \frac{13}{26} = \frac{1}{2}$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{6}$

$\therefore$ (4) $\rightarrow$ (Q) **જવાબ : (B)**

ટૂંકી રીત :

(1) ના બધા જ વિકલ્પ R છે. આથી (1) નહિ ગણીએ.

(2) વિકલ્પ S મળ્યો.

હવે (B) કે (D) જ જવાબ હોઈ શકે.

(3) $\rightarrow$ (P).

હવે માત્ર વિકલ્પ (B) જ શેષ છે.

(4) ગણવાની જરૂર નથી. **જવાબ : (B)**

(160) ધારો કે $ax + by + cz = 0$, $bx + cy + az = 0$ અને $cx + ay + bz = 0$ ત્રણ સુરેખ સમીકરણો આપેલાં છે. સ્તંભ I ની અભિવ્યક્તિઓને સ્તંભ II નાં યોગ્ય વિધાનો સાથે જોડી, જોડકાં બનાવો. [IIT : 2007]

સ્તંભ I	સ્તંભ II
(A) $a + b + c \neq 0$ અને $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$	(P) સમીકરણો ફક્ત એક જ બિંદુએ છેદતાં સમતલો દર્શાવે છે.
(B) $a + b + c = 0$ અને $a^2 \neq bc$, $b^2 \neq ca$, $c^2 \neq ab$	(Q) સમીકરણો, રેખા $x = y = z$ દર્શાવે છે.
(C) $a + b + c \neq 0$ અને $a^2 \neq bc$, $b^2 \neq ca$, $c^2 \neq ab$ $a^2 + b^2 + c^2 \neq ab + bc + ca$	(R) સમીકરણો એકરૂપ સમતલો દર્શાવે છે.
(D) $a + b + c = 0$ અને $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$	(S) સમીકરણો ત્રિ-પરિમાણ અવકાશનું નિરૂપણ કરે છે.

યોગ્ય જોડકાં બનાવી નીચેના યોગ્ય ખાનાનાં વર્તુળ ઘટ્ટ કરો :

	P	Q	R	S
A				
B				
C				
D				

ઉકેલ : $ax + by + cz = 0$ (1)

$bx + cy + az = 0$ (2)

$cx + ay + bz = 0$ (3)

$\therefore$ નિશ્ચાયક $D = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$

$= a(bc - a^2) - b(b^2 - ac) + c(ab - c^2)$

$= 3abc - a^3 - b^3 - c^3$

$= -(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$

$= -\frac{1}{2}(a + b + c)[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2]$

(A) $a + b + c \neq 0$ અને $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$

$\therefore (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 0$

$\therefore a = b = c$ તથા $a + b + c \neq 0$

$\therefore a, b, c$ શૂન્યેતર સમાન છે.

તેથી બધાં જ સમીકરણોનું સ્વરૂપ $x + y + z = 0$ થશે.

$\therefore$ સમીકરણો એકરૂપ સમતલો દર્શાવે છે.

$\therefore$ (A) $\rightarrow$ (R)

(B) $a + b + c = 0$ અને $a^2 \neq bc$, $b^2 \neq ca$, $c^2 \neq ab$

સમીકરણ (1)માં $a = -(b + c)$ લેતાં

$by + cz = (b + c)x$ (4)

અને સમીકરણ (2)માં $b = -(a + c)$ લેતાં

$cy + az = (c + a)x$ (5)

સમીકરણ (4) અને (5)માં y નો લોપ કરતાં,

$(c^2 - ab)z = (c^2 - ab)x$

$\therefore z = x$

તે જ પ્રમાણે $x = y = z$

$\therefore$ આપેલાં સમીકરણો રેખા $x = y = z$ દર્શાવે છે.

$\therefore$ (B) $\rightarrow$ (Q)

(C) $a + b + c \neq 0$ અને $a^2 + b^2 + c^2 \neq ab + bc + ca$

$\therefore D \neq 0$

$\therefore$ સમીકરણોનો અનન્ય ઉકેલ $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$ છે.

$\therefore$ ત્રણ સમીકરણો દ્વારા દર્શાવાતાં ત્રણ સમતલો એક જ બિંદુ ઊગમબિંદુમાં છેદે છે.

$\therefore$ (C) $\rightarrow$ (P)

(D) $a + b + c = 0$ અને $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$

$\therefore$ $a + b + c = 0$ અને $a = b = c$ ...[(A) પરથી]

$\therefore$ $a = b = c = 0$

$\therefore$ સમીકરણો ત્રિ-પરિમાણ અવકાશનું નિરૂપણ કરે છે.

$\therefore$ (D) $\rightarrow$ (S)

જવાબ :

	P	Q	R	S
A	○	○	●	○
B	○	●	○	○
C	●	○	○	○
D	○	○	○	●

(161) વિભાગ I માં રેખાઓનાં સમીકરણ આપ્યાં છે જ્યારે વિભાગ II માં રેખાઓના પ્રકાર આપ્યા છે. વિભાગ I ની રેખાઓને વિભાગ II ના તેમના યોગ્ય પ્રકાર સાથે જોડો.

વિભાગ I	વિભાગ II
(1) $\frac{x-3}{3} = \frac{y-8}{-1} = \frac{z-3}{1}$ અને $\frac{x+3}{-3} = \frac{y+7}{2} = \frac{z-6}{4}$	(p) સમાંતર
(2) $\frac{x-4}{5} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$ અને $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$	(q) વિષમતલીય
(3) $\frac{x}{1} = \frac{2y-4}{1} = \frac{3-z}{3}$ અને $\{2k - 1, k + 1, -6k + 1 / k \in R\}$	(r) સંપાતી
(4) $x = -k, y = -4 - 2k, z = 4 + k, k \in R$ અને $\vec{r} = (1, -2, 3) + k(-1, -2, 1), k \in R$	(s) છેદક

(A) (1) $\rightarrow$ (q) (2) $\rightarrow$ (s) (3) $\rightarrow$ (r) (4) $\rightarrow$ (p)

(B) (1) $\rightarrow$ (q) (2) $\rightarrow$ (r) (3) $\rightarrow$ (p) (4) $\rightarrow$ (s)

(C) (1) $\rightarrow$ (q) (2) $\rightarrow$ (p) (3) $\rightarrow$ (r) (4) $\rightarrow$ (s)

(D) (1) $\rightarrow$ (q) (2) $\rightarrow$ (s) (3) $\rightarrow$ (p) (4) $\rightarrow$ (r)

ઉકેલ : (1) $\vec{a} = (3, 8, 3)$, $\vec{l} = (3, -1, 1)$

$\vec{b} = (-3, -7, 6)$, $\vec{m} = (-3, 2, 4)$

હવે, $\vec{l} \times \vec{m} = (-6, -15, 3) \neq \vec{0}$

તથા $(\vec{b} - \vec{a}) \cdot (\vec{l} \times \vec{m}) = (-6, -15, 3) \cdot (-6, -15, 3) = 36 + 225 + 9 = 270 \neq 0$

$\therefore$ આપેલ રેખાઓ વિષમતલીય છે.

$\therefore$ (1) $\rightarrow$ (q)

(2) $\vec{a} = (4, 1, 0)$, $\vec{l} = (5, 2, 1)$

$\vec{b} = (1, 2, 3)$, $\vec{m} = (2, 3, 4)$

હવે, $\vec{l} \times \vec{m} = (5, -18, 11) \neq \vec{0}$

તથા $(\vec{b} - \vec{a}) \cdot (\vec{l} \times \vec{m}) = (-3, 1, 3) \cdot (5, -18, 11) = -15 - 18 + 33 = 0$

$\therefore$ આપેલ રેખાઓ છેદક રેખાઓ છે. $(\vec{l} \times \vec{m} \neq \vec{0})$

$\therefore$ (2) $\rightarrow$ (s)

(3) $\vec{a} = (0, 2, 3)$, $\vec{l} = \left(1, \frac{1}{2}, -3\right)$

$\vec{b} = (-1, 1, 1)$, $\vec{m} = (2, 1, -6)$

હવે, $\vec{l} \times \vec{m} = (0, 0, 0) = \vec{0}$

તથા $(\vec{b} - \vec{a}) \times \vec{m} = (-1, -1, -2) \times (2, 1, -6) = (8, -10, 1) \neq \vec{0}$

$\therefore$ આપેલ રેખાઓ સમાંતર છે.

$\therefore$ (3) $\rightarrow$ (p)

(4) $\vec{a} = (0, -4, 4)$, $\vec{l} = (-1, -2, 1)$

$\vec{b} = (1, -2, 3)$, $\vec{m} = (-1, -2, 1)$

હવે, $\vec{l} \times \vec{m} = \vec{0}$ $(\vec{l} = \vec{m})$

તથા $(\vec{b} - \vec{a}) \times \vec{l} = (1, 2, -1) \times (-1, -2, 1) = -(1, 2, -1) \times (1, 2, -1) = \vec{0}$

$\therefore$ આપેલ રેખાઓ સંપાતી રેખાઓ છે.

$\therefore$ (4) $\rightarrow$ (r) **જવાબ : (D)**

ટૂંકી રીત :

(1) ના તમામ વિકલ્પ સમાન હોવાથી આપણે (1) નહિ ગણીએ.

(2) $\rightarrow$ (s)

(3) $\rightarrow$ (p)

હવે માત્ર વિકલ્પ (D) જ શેષ રહે છે.

(4) ગણવાની જરૂર નથી. **જવાબ : (D)**

હજી ટૂંકી રીત :

સૌપ્રથમ (4) ગણીએ તો (4) $\rightarrow$ (r)

એક જ વિકલ્પ (D) છે. **જવાબ : (D)**

(162) વિભાગ I માં આપેલી શરતોને વિભાગ II ના યોગ્ય વિધાન સાથે જોડો : [IIT : 2006]

વિભાગ I	**વિભાગ II**
(P) સમતલ $x + 2y + 2z = 0$ ને લંબ અને (0, 1, 0)માંથી પસાર થતી રેખાનું ઊગમબિંદુથી લંબઅંતર	(1) $2\sqrt{2}$
(Q) (1, –2, 1)માંથી પસાર થતા અને $2x - 2y + z = 0$ તથા $x - y + 2z = 4$ બંનેને લંબ સમતલનું બિંદુ (1, 2, 2)થી અંતર	(2) $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{26}}$
(R) સમતલો $2x + 3y - z - 4 = 0$ અને $x + y + z - 2 = 0$ ની છેદરેખાનું રેખા $\frac{x}{4} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-1}{-1}$ થી લંબઅંતર	(3) $\sqrt{29}$
(S) સમતલો $2x + 3y - 4z + 44 = 0$ અને $2x + 3y - 4z + 15 = 0$ વચ્ચેનું લંબ અંતર	(4) $\frac{\sqrt{5}}{3}$

(A) (P) → (4) (Q) → (1) (R) → (2) (S) → (3)

(B) (P) → (4) (Q) → (1) (R) → (3) (S) → (2)

(C) (P) → (4) (Q) → (2) (R) → (3) (S) → (1)

(D) (P) → (4) (Q) → (2) (R) → (1) (S) → (3)

ઉકેલ : (P) રેખા સમતલ $x + 2y + 2z = 0$ ને લંબ છે.

તેથી $\vec{l} = \vec{n} = (1, 2, 2)$ અને તે $\vec{a} = (0, 1, 0)$ માંથી પસાર થાય છે.

∴ રેખાનું સમીકરણ : $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{2}$.

બિંદુ P($\vec{p}$) = (0, 0, 0)થી રેખાનું લંબ અંતર $= \frac{|(\vec{p} - \vec{a}) \times \vec{l}|}{|\vec{l}|}$

$$= \frac{|(0, -1, 0) \times (1, 2, 2)|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = \frac{|(-2, 0, 1)|}{3} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

∴ (P) → (4)

(Q) સમતલ $2x - 2y + z = 0$ નો અભિલંબ $\vec{n_1} = (2, -2, 1)$ અને સમતલ $x - y + 2z = 4$ નો અભિલંબ $\vec{n_2} = (1, -1, 2)$.

બંને સમતલોને લંબ સમતલનો અભિલંબ $\vec{n} = \vec{n_1} \times \vec{n_2}$

$= (-3, -3, 0)$

સમતલનું સમીકરણ $-3(x - 1) -3 (y + 2) = 0$ એટલે કે $x + y + 1 = 0$

$\therefore$ $x + y + 1 = 0$ નું બિંદુ (1, 2, 2)થી લંબઅંતર

$$= \frac{|(1) + 2(1) + 1|}{\sqrt{1+1}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

$\therefore$ (Q) $\rightarrow$ (1)

(R) સમતલો $2x + 3y - z - 4 = 0$ અને $x + y + z - 2 = 0$ ની છેદરેખાની દિશાનો સદિશ

$$\vec{l} = \vec{n_1} \times \vec{n_2}$$

$$= (2, 3, -1) \times (1, 1, 1)$$

$$= (4, -3, -1)$$

સમતલોના સમીકરણમાં $z = 0$ લેતાં,

$2x + 3y = 4$ અને $x + y = 2$

સમીકરણો ઉકેલતાં $x = 2, y = 0$

$\therefore$ છેદરેખા $\vec{a} = (2, 0, 0)$ માંથી પસાર થાય છે.

$\therefore$ છેદરેખા $\frac{x-2}{4} = \frac{y}{-3} = \frac{z}{-1}$ એ આપેલ રેખાને સમાંતર છે. (શા માટે સંપાતી નથી ?)

હવે રેખા $\frac{x}{4} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-1}{-1}$ માટે $\vec{b} = (0, 1, 1)$ અને $\vec{m} = (4, -3, -1)$

$\therefore$ આ રેખાઓ વચ્ચેનું લંબ અંતર $= \frac{|(\vec{b} - \vec{a}) \times \vec{l}|}{|\vec{l}|}$

$$= \frac{|(-2, 1, 1) \times (4, -3, -1)|}{\sqrt{16 + 9 + 1}} = \frac{|(2, 2, 2)|}{\sqrt{26}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{26}}$$

$\therefore$ (R) $\rightarrow$ (2)

(S) સમતલો $2x + 3y - 4z + 44 = 0$ અને $2x + 3y - 4z + 15 = 0$ વચ્ચેનું લંબઅંતર $= \frac{|d_1 - d_2|}{|\vec{n}|}$

$$= \frac{|44 - 15|}{\sqrt{4 + 9 + 16}} = \frac{29}{\sqrt{29}} = \sqrt{29}$$

$\therefore$ (S) $\rightarrow$ (3) **જવાબ : (A)**

ટૂંકી રીત :

(P) ના તમામ વિકલ્પ સમાન છે. આપણે તે નહીં ગણીએ.

(S) ની ગણતરી અતિ સરળ છે, તે ગણતાં

(S) $\rightarrow$ (3)

હવે બે જ પ્રશ્ન (Q) તથા (R) નિર્ણાયક છે, (Q) સરળ છે, તે ગણતાં,

આ માત્ર વિકલ્પ (A) માં જ શક્ય છે. **જવાબ : (A)**

માહિતી આધારિત પ્રશ્નો

(163) ધારો કે સમતલનાં બે બિંદુઓ A(2, 3, –2) અને B(–3, 13, 13) છે અને રેખા L એ A માંથી પસાર થાય છે તથા સમતલ π બિંદુ B માંથી પસાર થાય છે. આ માહિતી પરથી નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

(1) $\overline{AB}$ ને લંબરેખા L નું સમીકરણ

(A) $\frac{x-2}{-5} = \frac{y-3}{10} = \frac{x+2}{15}$ (B) $\frac{x-2}{13} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+2}{3}$

(C) $\frac{x+2}{13} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-2}{3}$ (D) $\frac{x-2}{15} = \frac{y-3}{-5} = \frac{z+2}{10}$

(2) $\overline{AB}$ ને લંબસમતલ π નું સમીકરણ

(A) $-5x + 10y + 15z + 10 = 0$ (B) $x + 2y - 3z + 16 = 0$

(C) $x - 2y - 3z + 68 = 0$ (D) $x - 2y - 3z - 68 = 0$

ઉકેલ (1) $\overleftrightarrow{AB}$ના દિક્‌ગુણોત્તર –5, 10, 15 એટલે કે –1, 2, 3 છે.

$\therefore$ $\overleftrightarrow{AB}$ ને લંબરેખા L ની દિશાનો સદિશ $\vec{l} = l_1\hat{i} + l_2\hat{j} + l_3\hat{k}$ હોય,

તો રેખા L નું સમીકરણ : $\frac{x-2}{l_1} = \frac{y-3}{l_2} = \frac{z+2}{l_3}$ થશે. $\overleftrightarrow{AB} \perp L$

$\therefore$ $-l_1 + 2l_2 + 3l_3 = 0$

વિકલ્પ (B) આ સમીકરણનું સમાધાન કરે છે.

(વિકલ્પ (C) વાળી રેખા પણ આ સમીકરણનું સમાધાન કરે છે, પરંતુ તે A માંથી પસાર થતી નથી.)

જવાબ : (B)

(2) $\overleftrightarrow{AB}$ના દિક્‌ગુણોત્તર –1, 2, 3 છે.

$\therefore$ $\overleftrightarrow{AB}$ ને લંબસમતલ π નો અભિલંબ $\vec{n} = (-1, 2, 3)$

$\therefore$ સમતલ π નું સમીકરણ $-1(x + 3) + 2(y - 13) + 3(z - 13) = 0$

$\therefore$ $-x + 2y + 3z - 68 = 0$

$\therefore$ $x - 2y - 3z + 68 = 0$

(વિકલ્પ (A)ના સમતલનો અભિલંબ પણ (–1, 2, 3) છે, પરંતુ તે (B)માંથી પસાર થતો નથી.)

જવાબ : (C)

(164) ધારો કે બે રેખાઓ L : $\frac{x-5}{2} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z-3}{3}$ અને M : $\frac{x-2}{4} = \frac{y-5}{-8} = \frac{z}{6}$ છે. તે પરથી નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

(1) L અને M વચ્ચેનું લંબઅંતર

(A) $\frac{109}{29}$ (B) $\sqrt{\frac{109}{29}}$ (C) $\frac{\sqrt{109}}{29}$ (D) $\frac{109}{\sqrt{29}}$

(2) L અને M માંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ

(A) $6x - 3y - 8z + 3 = 0$ (B) $6x - 3y - 8z - 3 = 0$

(C) $8x + 3y - 6z - 31 = 0$ (D) $8x - 3y - 6z - 13 = 0$

(3) રેખા L અને રેખા M માંથી પસાર થતા સમતલનું બિંદુ (1, –1, 1)થી અંતર

(A) $\frac{4}{109}$ (B) $\frac{2}{\sqrt{109}}$ (C) $\frac{4}{\sqrt{109}}$ (D) $\frac{2}{109}$

ઉકેલ (1) રેખા L માટે $\vec{a} = (5, 3, 3)$, $\vec{l} = (2, -4, 3)$

અને રેખા M માટે $\vec{b} = (2, 5, 0)$, $\vec{m} = (4, -8, 6)$ અથવા $(2, -4, 3)$

અહીં, $\vec{l} \times \vec{m} = \vec{0}$. વળી, (5, 3, 3) માટે $\frac{5-2}{4} = \frac{3-5}{-8} = \frac{3}{6}$ સત્ય નથી.

∴ રેખા L નું બિંદુ $(5, 3, 3) \notin M$

∴ $L \parallel M$

બે સમાંતર રેખાઓ વચ્ચેનું લંબઅંતર $= \frac{|(\vec{a} - \vec{b}) \times \vec{l}|}{|\vec{l}|}$

$$= \frac{|(3, -2, 3) \times (2, -4, 3)|}{\sqrt{4+16+9}} = \frac{|(6, -3, -8)|}{\sqrt{29}} = \sqrt{\frac{109}{29}}$$ **જવાબ : (B)**

(2) રેખા L અને રેખા M માંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ $(\bar{r} - \bar{a}) \cdot [(\bar{b} - \bar{a}) \times \bar{l}] = 0$

$$\begin{vmatrix} x-5 & y-3 & z-3 \\ 2-5 & 5-3 & 0-3 \\ 2 & -4 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore \begin{vmatrix} x-5 & y-3 & z-3 \\ -3 & 2 & -3 \\ 2 & -4 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

∴ $(x - 5)(-6) - (y - 3)(-3) + (z - 3)(8) = 0$

∴ $-6x + 30 + 3y - 9 + 8z - 24 = 0$

$6x - 3y - 8z + 3 = 0$ **જવાબ : (A)**

(3) સમતલ $6x - 3y - 8z + 3 = 0$ નું $(1, -1, 1)$થી અંતર

$$= \frac{|6(1) - 3(-1) - 8(1) + 3|}{\sqrt{36+9+64}} = \frac{4}{\sqrt{109}}$$ **જવાબ : (C)**

(165) ધારો કે બે રેખાઓની દિક્કોસાઈન l, m, n છે તથા a, b, c, p, q, r સ્વૈર અચળ છે. દિક્કોસાઈન માટે $pl + qm + rn = 0$ અને $al^2 + bm^2 + cn^2 = 0$ છે.

ઉપરની માહિતી પરથી નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

(1) $p = q = r = 1$ લેતાં બંને રેખાઓ નીચેનામાંથી કયા સંબંધોને સંતોષે છે.

(A) $(a + b)\left(\frac{m}{n}\right)^2 + 2a\left(\frac{m}{n}\right) + (c + a) = 0$ (B) $(b + c)\left(\frac{n}{l}\right)^2 + b\left(\frac{n}{l}\right) + (a + b) = 0$

(C) $(c + a)\left(\frac{l}{m}\right)^2 + 2c\left(\frac{l}{m}\right) + (b + c) = 0$ (D) $(c + a)\left(\frac{l}{m}\right)^2 + c\left(\frac{l}{m}\right) + (b + c) = 0$

(2) જો $p = q = r = 1$ તથા $\left(\frac{a+b}{b+c}\right) = \frac{n_1 n_2}{l_1 l_2}$, તો

(A) $\frac{m_1 m_2}{l_1 l_2} = \frac{b+c}{c+a}$ (B) $\frac{m_1 m_2}{l_1 l_2} = \frac{c+a}{a+b}$ (C) $\frac{m_1 m_2}{l_1 l_2} = \frac{a+b}{c+a}$ (D) $\frac{c+a}{b+c} = \frac{m_1 m_2}{l_1 l_2}$

(3) રેખાઓ એકબીજીને સમાંતર હોય, તો

(A) $\sum\frac{p^2}{a}=0$ (B) $\sum\frac{(b+c)}{p^2}=0$ (C) $\sum p^2\ (b+c)=0$ (D) $\sum\frac{a^2}{p}=0$

(4) રેખાઓ એકબીજાને લંબ હોય, તો

(A) $\Sigma p^2(a+b)=0$ (B) $\Sigma p^2\ (a-b)=0$ (C) $\Sigma p^2\ (b+c)=0$ (D) $\Sigma p^2\ (b-c)=0$

(5) જો $p=q=r=1$ અને રેખાઓ પરસ્પર લંબ હોય, તો

(A) $a+b+c=0$ (B) $ab+bc+ca=3abc$

(C) $ab+bc+ca=0$ (D) $ab+bc+ca=abc$

(6) $p=q=r=1$ અને રેખાઓ એકબીજીને સમાંતર હોય, તો

(A) $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=1$ (B) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$ (C) $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=0$ (D) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$

ઉકેલ રેખાઓની દિક્‌કોસાઇન સમીકરણો $pl+qm+rn=0$ અને $al^2+bm^2+cn^2=0$નું સમાધાન કરે છે.

હવે, $pl+qm+rn=0$

$\therefore\ l=-\frac{(qm+rn)}{p}$ નું મૂલ્ય $al^2+bm^2+cn^2=0$ માં મૂકતાં,

$$a\left\{-\frac{qm+rn}{p}\right\}^2+bm^2+cn^2=0$$

$\therefore\ (aq^2+bp^2)\ m^2+2aqrmn+(ar^2+cp^2)\ n^2=0$

$\therefore\ (aq^2+bp^2)\left(\frac{m}{n}\right)^2+2aqr\left(\frac{m}{n}\right)+(ar^2+cp^2)=0$

(1) $p=q=r=1$ લેતાં,

$$(a+b)\left(\frac{m}{n}\right)^2+2a\left(\frac{m}{n}\right)+(a+c)=0 \quad \text{(i)}$$

તે જ પ્રમાણે, $(c+a)\left(\frac{l}{m}\right)^2+2c\left(\frac{l}{m}\right)+(b+c)=0$ (ii)

અને $(b+c)\left(\frac{n}{l}\right)^2+2b\left(\frac{n}{l}\right)+(a+b)=0$ (iii)

જવાબ : (A), (C)

(2) જો સમીકરણ (ii)નાં બીજ $\frac{l_1}{m_1}$ અને $\frac{l_2}{m_2}$ હોય, તો $\frac{l_1l_2}{m_1m_2}=\frac{b+c}{c+a}$

$\therefore\ \frac{m_1m_2}{l_1l_2}=\frac{c+a}{b+c}$ **જવાબ : (D)**

(3) રેખાઓ એકબીજીને સમાંતર છે. તેથી બંનેના દિક્‌કોસાઇન સમાન થશે.

$\therefore$ સમીકરણ $(aq^2+bp^2)\left(\frac{m}{n}\right)^2+2aqr\left(\frac{m}{n}\right)+(ar^2+cp^2)=0$ નાં બીજ સમાન થશે.

$\therefore$ વિવેચક $\Delta=B^2-4AC=0$ એટલે કે $B^2=4AC$

$\therefore\ (2aqr)^2=4(aq^2+bp^2)(ar^2+cp^2)$

$\therefore\ a^2q^2r^2=a^2q^2r^2+acp^2q^2+abp^2r^2+bcp^4$

$\therefore \quad acq^2 + abr^2 + bcp^2 = 0$

$\therefore \quad \frac{p^2}{a} + \frac{q^2}{b} + \frac{r^2}{c} = 0$ (iv)

$\therefore \quad \sum \frac{p^2}{a} = 0$ **જવાબ : (A)**

(4) સમીકરણ $(aq^2 + bp^2)\left(\frac{m}{n}\right)^2 + 2aqr\left(\frac{m}{n}\right) + (ar^2 + cp^2) = 0$ નાં બે બીજ $\frac{m_1}{n_1}$ અને $\frac{m_2}{n_2}$ હોય, તો

$\frac{m_1 m_2}{n_1 n_2} = \frac{ar^2 + cp^2}{aq^2 + bp^2}$

$\therefore \quad \frac{l_1 l_2}{br^2 + cq^2} = \frac{m_1 m_2}{ar^2 + cp^2} = \frac{n_1 n_2}{aq^2 + bp^2}$ **(સંમિતતાને આધારે)**

રેખાઓ એકબીજાને લંબ છે.

$\therefore \quad l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$

$\therefore \quad (br^2 + cq^2) + (ar^2 + cp^2) + (aq^2 + bp^2) = 0$

$\therefore \quad p^2(b + c) + q^2(c + a) + r^2(a + b) = 0$ (v)

$\therefore \quad \sum p^2 (b + c) = 0$ **જવાબ : (C)**

(5) રેખાઓ પરસ્પર લંબ છે તથા $p = q = r = 1$

$\therefore$ સમીકરણ (v)માં $p = q = r = 1$ લેતાં,

$2a + 2b + 2c = 0$

$\therefore \quad a + b + c = 0$ **જવાબ : (A)**

(6) રેખાઓ સમાંતર છે તથા $p = q = r = 1$

$\therefore$ સમીકરણ (iv)માં $p = q = r = 1$ લેતાં,

$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$ **જવાબ : (D)**

(166) ધારો કે A(3, 2, 1) એ R^3 નું બિંદુ છે. રેખા L : $\frac{x-7}{2} = \frac{y-12}{-2} = \frac{z+1}{1}$ અને સમતલ $\pi : x + y + z = 11$ છે.

ઉપરની માહિતી પરથી નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

(1) બિંદુ A માંથી પસાર થતી L ને સમાંતર રેખા સમતલ π ને બિંદુ B માં મળે છે. B ના યામ ......

(A) (–13, 8, 6) (B) (13, 8, –6) (C) (13, 8, 6) (D) (13, –8, 6)

(2) સમતલ π થી બિંદુ A નું રેખા L ને સમાંતર અંતર ......

(A) $\sqrt{30}$ (B) 15 (C) 30 (D) $2\sqrt{30}$

(3) A માંથી સમતલ π પરના લંબપાદ M ના યામ ......

(A) $\left(\frac{8}{3}, \frac{11}{3}, \frac{14}{3}\right)$ (B) $\left(\frac{14}{3}, \frac{-11}{3}, \frac{8}{3}\right)$ (C) $\left(\frac{-14}{3}, \frac{-11}{3}, \frac{8}{3}\right)$ (D) $\left(\frac{14}{3}, \frac{11}{3}, \frac{8}{3}\right)$

(4) બિંદુ A માંથી L ને સમાંતર રેખા, સમતલ π ને B માં મળે છે અને સમતલ π પરના A માંથી દોરેલ લંબનો લંબપાદ M હોય તો BM = ...

(A) $\frac{5}{3}\sqrt{78}$ (B) $5\sqrt{78}$ (C) $\sqrt{78}$ (D) $3\sqrt{78}$

(5) રેખા L અને સમતલ π ના છેદબિંદુથી બિંદુ A નું અંતર ......

(A) $\sqrt{641}$ (B) $\sqrt{849}$ (C) $\sqrt{757}$ (D) $\sqrt{477}$

ઉકેલ (1) રેખા L : $\frac{x-7}{2}=\frac{y-12}{-2}=\frac{z-1}{1}$ ને સમાંતર અને A(3, 2, 1)માંથી

પસાર થતી રેખાનું સમીકરણ $\frac{x-3}{2}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-1}{1}$. આ રેખા

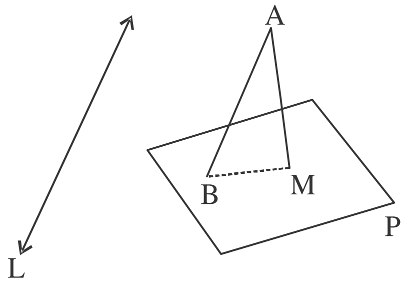
પરનું કોઈપણ બિંદુ $(2k + 3, -2k + 2, k + 1)$ છે.

આ બિંદુ સમતલ $\pi : x + y + z = 11$ પર આવેલું છે.

$\therefore\ 2k + 3 - 2k + 2 + k + 1 = 11$

$\therefore\ k = 5$

$\therefore$ બિંદુ B ના યામ (13, –8, 6) છે.



આકૃતિ 21.11

જવાબ : (D)

(2) સમતલ π થી બિંદુ A નું રેખા L ને સમાંતર અંતર AB થશે.

$\therefore\ AB = \sqrt{(13-3)^2+(-8-2)^2+(6-1)^2} = \sqrt{100+100+25} = 15$ **જવાબ : (B)**

(3) A(3, 2, 1)માંથી પસાર થતી અને સમતલ π ને લંબરેખાનું સમીકરણ $\frac{x-3}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{1}=r$

જ્યાં, $r = -\frac{ax_1+by_1+cx_1+d}{al+bm+cn}$

$= -\frac{3+2+1-11}{1(1)+1(1)+1(1)} = \frac{5}{3}$

$\therefore$ લંબપાદ $M(x, y, z) = \left(\frac{14}{3}, \frac{11}{3}, \frac{8}{3}\right)$ **જવાબ : (D)**

(4) બિંદુ B(13, –8, 6) અને $M\left(\frac{14}{3}, \frac{11}{3}, \frac{8}{3}\right)$

$\therefore$ અંતર $BM = \sqrt{\left(13-\frac{14}{3}\right)^2+\left(-8-\frac{11}{3}\right)^2+\left(6-\frac{8}{3}\right)^2}$

$= \sqrt{\left(\frac{25}{3}\right)^2+\left(\frac{-35}{3}\right)^2+\left(\frac{10}{3}\right)^2} = \frac{5}{3}\sqrt{25+49+4} = \frac{5}{3}\sqrt{78}$ **જવાબ : (A)**

(5) કોઈક $k \in R$ માટે રેખા L પરનું કોઈપણ બિંદુ $(2k + 7, -2k + 12, k - 1)$

આ બિંદુ સમતલ $\pi : x + y + z = 11$ પર છે

$\therefore\ 2k + 7 - 2k + 12 + k - 1 = 11$

$\therefore\ k = -7$

$\therefore$ રેખા L અને સમતલ π નું છેદબિંદુ C(–7, 26, –8)

$\therefore$ અંતર $AC = \sqrt{(-7-3)^2+(26-2)^2+(-8-1)^2} = \sqrt{100+576+81} = \sqrt{757}$ **જવાબ : (C)**

(167) ધારો કે વાસ્તવિક સંખ્યાઓ a, b, c એ શ્રેણિક સમીકરણ $[a\ \ b\ \ c]\begin{bmatrix}1 & 9 & 7\\ 8 & 2 & 7\\ 7 & 3 & 7\end{bmatrix} = [0\ \ 0\ \ 0]$ ...(i) નું સમાધાન કરે છે.

[IIT : 2011]

તે પરથી નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

(1) જો બિંદુ $P(a, b, c)$ એ સમતલ $2x + y + z = 1$ પર આવેલું હોય, તો $7a + b + c$ નું મૂલ્ય ......

(A) 0 (B) 12 (C) 7 (D) 6

(2) $x^3 - 1 = 0$ નો ઉકેલ ω હોય અને $Im(\omega) > 0$ છે. જો $a = 2$ હોય અને b તથા c સમીકરણ (i)નું સમાધાન કરે તો $\frac{3}{\omega^a} + \frac{1}{\omega^b} + \frac{3}{\omega^c}$ = ...

(A) –2 (B) 2 (C) 3 (D) –3

(3) $b = 6$ અને a અને c સમીકરણ (i)નું સમાધાન કરે છે. જો α, β એ સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ નાં બીજ હોય, તો $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)^n$ = ...

(A) 6 (B) 7 (C) $\frac{6}{7}$ (D) ∞

ઉકેલ $[a \quad b \quad c]\begin{bmatrix}1 & 9 & 7\\ 8 & 2 & 7\\ 7 & 3 & 7\end{bmatrix} = [0 \quad 0 \quad 0]$

$\therefore\ a + 8b + 7c = 0$ (1)

$9a + 2b + 3c = 0$ (2)

$7a + 7b + 7c = 0$

એટલે કે $a + b + c = 0$ (3)

$\therefore\ \frac{a}{10} = \frac{b}{60} = \frac{c}{-70} = \frac{k}{10}$ જ્યાં $k \in$ R

$\therefore\ (a, b, c) = (k, 6k, -7k)$

(1) બિંદુ P(a, b, c) એ સમતલ $2x + y + z = 1$ પર છે.

$\therefore\ 2k + 6k - 7k = 1$

$\therefore\ k = 1$

$\therefore\ a = 1, \quad b = 6, \quad c = -7$

હવે, $7a + b + c = 7 + 6 - 7 = 6$ **જવાબ : (D)**

(2) $a = 2$ લેતાં, $k = 2$. આથી, $b = 12$, $c = -14$

હવે, $\frac{3}{\omega^a} + \frac{1}{\omega^b} + \frac{3}{\omega^c} = \frac{3}{\omega^2} + \frac{1}{\omega^{12}} + 3\omega^{14}$

$= \frac{3\omega}{\omega^3} + \frac{1}{(\omega^3)^4} + 3\omega^2 \cdot (\omega^3)^4$

$= 3\omega + 1 + 3\omega^2$ $(\omega^3 = 1)$

$= 3(\omega + \omega^2) + 1 = 3(-1) + 1 = -2$ $(1 + \omega + \omega^2 = 0)$

જવાબ : (A)

(3) $b = 6$ લેતાં, $k = 1$. તેથી $a = 1$ અને $c = -7$

હવે, $ax^2 + bx + c = 0$

$\therefore\ x^2 + 6x - 7 = 0$

$\therefore\ x = -7$ તથા $x = 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{-7}+1\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{6}{7}\right)^n = 1 + \frac{6}{7} + \left(\frac{6}{7}\right)^2 + ...\infty = \frac{1}{1-\frac{6}{7}} = 7$$

જવાબ : (B)

●