પ્રકરણ 12

પૃષ્ઠફળ અને ઘનફળ

વિહંગાવલોકન

મુખ્ય સંકલ્પના અને પરિણામો

- બે ઘનને જોડતાં બનતા પદાર્થની સપાટીનું ક્ષેત્રફળ જેમ કે, લંબઘન, શંકુ, નળાકાર, ગોળો અને અર્ધગોળો.
- બે ઘનને જોડતાં બનતા પદાર્થનું ઘનફળ જેમ કે, લંબઘન, શંકુ, નળાકાર, ગોળો અને અર્ધગોળો.
- શંકુના આડછેદમાં વપરાતાં સૂત્રો :

  (i) શંકુના આડછેદનું ઘનફળ $= \frac{1}{3}\pi h[r_1^2 + r_2^2 + r_1r_2]$

  (ii) શંકુના આડછેદની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ $= \pi(r_1+r_2)l$, જ્યાં $l = \sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2}$

  (iii) ઘન શંકુના આડછેદની સપાટીનું કુલ ક્ષેત્રફળ $= \pi l(r_1+r_2) + \pi r_1^2 + \pi r_2^2$,

  h = આડછેદની ઊંચાઈ, l = આડછેદની તિર્યક ઊંચાઈ અને

  r_1 અને r_2 એ આડછેદના બે પાયાઓની ત્રિજ્યાઓ

- ઘન અર્ધગોળો : જો r એ અર્ધગોળાની ત્રિજ્યા હોય, તો

  વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ $= 2\pi r^2$

  સપાટીનું કુલ ક્ષેત્રફળ $= 3\pi r^2$ અને ઘનફળ $= \frac{2}{3}\pi r^3$

- પોલા ગોળાનું ઘનફળ $= \frac{4}{3}\pi(r_1^3 - r_2^3)$, જ્યાં r_1 અને r_2 અનુક્રમે તેની બહારની અને અંદરની ત્રિજ્યાઓ છે.

  આ સમગ્ર પ્રકરણમાં, જો π ની બીજી કોઈ કિંમત આપી ન હોય, તો $\pi = \frac{22}{7}$ લો.

વિધાન સત્ય બને તે રીતે આપેલા ચાર વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી ક્રમાંક 1 થી 5 વાળા પ્રશ્નોના ઉત્તર આપો :

આકૃતિ 12.1

ઉદાહરણ 1 : એક ગળણી (જુઓ આકૃતિ 12.1.) .... નું સંયોજન છે.

(A) શંકુ અને નળાકાર (B) શંકુનો આડછેદ અને નળાકાર

(C) અર્ધગોળો અને નળાકાર (D) અર્ધગોળો અને શંકુ

ઉકેલ : ઉત્તર (B)

ઉદાહરણ 2 : 2.1 સેમી ત્રિજ્યાની એક લખોટીને, 5 સેમી ત્રિજ્યા અને 6 સેમી ઊંચાઈના પાણીથી સંપૂર્ણ ભરેલા નળાકાર પ્યાલામાં મૂકવામાં આવે, તો નળાકાર પ્યાલામાંથી કેટલું પાણી બહાર આવશે ?

(A) 38.8 સેમી^{3} (B) 55.4 સેમી^{3} (C) 19.4 સેમી^{3} (D) 471.4 સેમી^{3}

ઉકેલ : નળાકાર પ્યાલામાંથી બહાર આવતાં પાણીનું ઘનફળ = લખોટીનું ઘનફળ

$$= \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times (2.1)^3$$

= 38.8 સેમી^{3}

ઉત્તર (A)

ઉદાહરણ 3 : એક ઘનાકાર આઇસક્રીમ પેટીની અંદરની ધાર 22 સેમી છે. તે પેટીમાંના આઇસક્રીમને 2 સેમી ત્રિજ્યા અને 7 સેમી ઊંચાઈના આઇસક્રીમ કોનમાં ધાર સુધી ભરીને કેટલાંક બાળકોને વહેંચવામાં આવે છે. કેટલાં બાળકોને આઈસ્ક્રીમ કોન મળી શકે ?

(A) 163 (B) 263 (C) 363 (D) 463

ઉકેલ : ઘનાકાર પેટીનું ઘનફળ = (22 × 22 × 22) સેમી^{3}

આઇસક્રીમ કોનનું ઘનફળ $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 2 \times 2 \times 7$$

= $\frac{88}{3}$ સેમી^{3}

∴ આઇસક્રીમ કોન મેળવનાર બાળકોની સંખ્યા $= \left(\frac{22 \times 22 \times 22 \times 3}{88}\right) = 363$

ઉત્તર (C)

ઉદાહરણ 4 : h સેમી ઊંચાઈના શંકુના આડછેદના બે અંત્યતલની ત્રિજ્યાઓ r_1 સેમી અને r_2 સેમી છે. શંકુના આડછેદનું ઘનફળ સેમી^{3} માં

(A) $\frac{1}{3}\pi h\,[r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2]$ (B) $\frac{1}{3}\pi h\,[r_1^2 + r_2^2 - r_1 r_2]$

(C) $\frac{1}{3}\pi h\,[r_1^2 - r_2^2 + r_1 r_2]$ (D) $\frac{1}{3}\pi h\,[r_1^2 - r_2^2 - r_1 r_2]$

ઉકેલ : ઉત્તર (A)

ઉદાહરણ 5 : 4.2 સેમી ધારના એક ઘનમાંથી મોટામાં મોટો લંબવૃત્તીય શંકુ કાપતાં, શંકુનું ઘનફળ

(A) 9.7 સેમી^{3} (B) 77.6 સેમી^{3} (C) 58.2 સેમી^{3} (D) 19.4 સેમી^{3}

ઉકેલ : ઘનની ધારની લંબાઈ = શંકુનો વ્યાસ = 4.2 સેમી

∴ શંકુની ત્રિજ્યા = 2.1 સેમી

શંકુની ઊંચાઈ = 4.2 સેમી

∴ શંકુનું ઘનફળ $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 2.1 \times 2.1 \times 4.2$

= 19.4 સેમી^{3}

ઉત્તર (D)

સ્વાધ્યાય 12.1

વિધાન સત્ય બને તે રીતે આપેલા ચાર વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી ક્રમાંક 1 થી 20 વાળા પ્રશ્નોના ઉત્તર આપો :

1. એક છેડેથી છોલેલી નળાકાર પેન્સિલ કોનું સંયોજન છે ?

(A) શંકુ અને નળાકાર (B) શંકુનો આડછેદ અને નળાકાર

(C) અર્ધગોળો અને નળાકાર (D) બે નળાકાર

2. *સુરાહી* કોનું સંયોજન છે ?

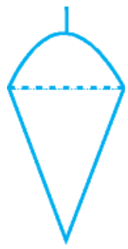
(A) ગોળો અને નળાકાર (B) અર્ધગોળો અને નળાકાર

(C) બે અર્ધગોળાઓ (D) નળાકાર અને શંકુ

3. એક *ઓળંબો* કોનું સંયોજન છે ? (આકૃતિ 12.2 જુઓ.)

(A) શંકુ અને નળાકાર (B) અર્ધગોળો અને શંકુ

(C) શંકુનો આડછેદ અને નળાકાર (D) ગોળો અને નળાકાર

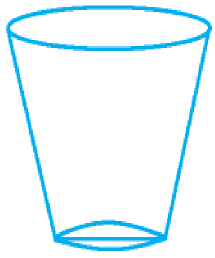


આકૃતિ 12.2

4. સામાન્ય રીતે ગ્લાસનો આકાર (આકૃતિ 12.3 જુઓ.) .... સ્વરૂપમાં હોય છે.

(A) શંકુ (B) શંકુનો આડછેદ

(C) નળાકાર (D) ગોળો



આકૃતિ 12.3

5. ગીલ્લી દંડાની રમતમાં ગીલ્લીનો આકાર (જુઓ આકૃતિ 12.4.), ... નું સંયોજન છે.

(A) બે નળાકાર (B) શંકુ અને નળાકાર

(C) બે શંકુ અને એક નળાકાર (D) બે નળાકાર અને એક શંકુ

આકૃતિ 12.4

6. બેડમિન્ટન રમવા માટેના ફૂલ (શટલકોક)નો આકાર .... નું સંયોજન છે.

(A) નળાકાર અને ગોળો (B) નળાકાર અને અર્ધગોળો

(C) ગોળો અને શંકુ (D) શંકુનો આડછેદ અને અર્ધગોળો

7. એક શંકુને તેના પાયાને સમાંતર સમતલથી કાપવામાં આવે છે અને આ રીતે બનેલા સમતલની એક બાજુના શંકુને દૂર કરવામાં આવે છે. સમતલની બીજી બાજુ બાકી રહેલા નવા ભાગને ...... કહે છે.

(A) શંકુનો આડછેદ (B) શંકુ (C) નળાકાર (D) ગોળો

8. અંદરની ધાર 22 સેમી હોય, તેવો એક પોલો ઘન, જેનો વ્યાસ 0.5 સેમી હોય તેવી ગોળાકાર લખોટીઓથી ભરેલો છે. આથી ઘનની $\frac{1}{8}$ જગ્યા ખાલી રહે છે, તો ઘનમાં સમાતી લખોટીઓની સંખ્યા ....

(A) 142296 (B) 142396 (C) 142496 (D) 142596

9. જેનો અંદરનો અને બહારનો વ્યાસ અનુક્રમે 4 સેમી અને 8 સેમી હોય તેવા ધાતુના ગોળાને ઓગાળી તેમાંથી પાયાનો વ્યાસ 8 સેમી હોય, તેવા શંકુમાં રૂપાંતરિત કરવામાં આવે છે. આ શંકુની ઊંચાઈ .... છે.

(A) 12 સેમી (B) 14 સેમી (C) 15 સેમી (D) 18 સેમી

10. લોખંડનો એક ઘન ટુકડો લંબઘનાકાર સ્વરૂપમાં છે. તેનાં પરિમાણ 49 સેમી × 33 સેમી × 24 સેમી છે. તેને ગોળાના સ્વરૂપમાં ઢાળવામાં આવે છે. આ ગોળાની ત્રિજ્યા .... થાય.

(A) 21 સેમી (B) 23 સેમી (C) 25 સેમી (D) 19 સેમી

11. એક કડિયો 22.5 સેમી × 11.25 સેમી × 8.75 સેમી માપની દરેક ઈંટ વડે 270 સેમી × 300 સેમી × 350 સેમી પરિમાણવાળી દીવાલ ચણે છે. એમ ધારવામાં આવે છે કે $\frac{1}{8}$ જગ્યા સિમેન્ટ દ્વારા રોકાયેલી છે, તો દીવાલ ચણવા માટે વપરાયેલી ઈંટોની સંખ્યા .... થાય.

(A) 11100 (B) 11200 (C) 11000 (D) 11300

12. પાયાનો વ્યાસ 2 સેમી અને ઊંચાઈ 16 સેમી હોય તેવા સખત ધાતુના નળાકારને ઓગાળીને સમાન માપના 12 નક્કર ગોળાઓ બનાવવામાં આવે છે, તો દરેક ગોળાનો વ્યાસ .... છે.

(A) 4 સેમી (B) 3 સેમી (C) 2 સેમી (D) 6 સેમી

13. 45 સેમી ત્રાંસી ઊંચાઈવાળી ડોલની ઉપરની અને તળિયાની ત્રિજ્યાઓ અનુક્રમે 28 સેમી અને 7 સેમી છે. ડોલની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ .... હોય.

(A) 4950 સેમી^{2} (B) 4951 સેમી^{2} (C) 4952 સેમી^{2} (D) 4953 સેમી^{2}

14. એક દવાની કૅપ્સ્યુલ, 0.5 સેમી વ્યાસના નળાકાર અને બંને છેડે બે અર્ધગોળાઓ લગાડીને બનાવેલી છે. આખી કૅપ્સ્યુલની લંબાઈ 2 સેમી છે. કૅપ્સ્યુલની ક્ષમતા .... થાય.

(A) 0.36 સેમી^{3} (B) 0.35 સેમી^{3} (C) 0.34 સેમી^{3} (D) 0.33 સેમી^{3}

15. સમાન પાયાની ત્રિજ્યા r વાળા બે નક્કર અર્ધગોળાઓ એકબીજાને પાયા સાથે જોડેલા છે. આ નવા ગોળાની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ .... થાય.

(A) $4\pi r^2$ (B) $6\pi r^2$ (C) $3\pi r^2$ (D) $8\pi r^2$

16. r સેમી ત્રિજ્યા અને h સેમી ઊંચાઈ ($h > 2r$) ના એક લંબવૃત્તીય નળાકારમાં .... મહત્તમ વ્યાસનો એક ગોળો આવી શકે.

(A) r સેમી (B) $2r$ સેમી (C) h સેમી (D) $2h$ સેમી

17. એક આકારમાંથી બીજા આકારમાં ઘનનું રૂપાંતર કરતાં, નવા આકારનું ઘનફળ ....

(A) વધે છે (B) ઘટે છે (C) એમ જ રહે છે (D) બમણું થાય

18. ડોલની બે વર્તુળાકાર ધારનો વ્યાસ 44 સેમી અને 24 સેમી છે. ડોલની ઊંચાઈ 35 સેમી છે. ડોલની ક્ષમતા .... છે.

(A) 32.7 લિટર (B) 33.7 લિટર (C) 34.7 લિટર (D) 31.7 લિટર

19. એક લંબવૃત્તીય શંકુમાં પાયાના સમતલને સમાંતર બનાવેલો આડછેદ .... છે.

(A) વર્તુળ (B) શંકુનો આડછેદ (C) ગોળો (D) અર્ધગોળો

20. બે ગોળાના ઘનફળનો ગુણોત્તર 64 : 27 છે. તેમની વક્રસપાટીના ક્ષેત્રફળનો ગુણોત્તર

(A) 3 : 4 (B) 4 : 3 (C) 9 : 16 (D) 16 : 9

કારણ સહિત ટૂંક જવાબી પ્રશ્નો

નીચેનાં વિધાન સત્ય છે કે અસત્ય તે કહો અને તમારા ઉત્તરની યથાર્થતા જણાવો :

ઉદાહરણ 1 : જો પાયાની ત્રિજ્યા r અને ઊંચાઈ h વાળા શંકુને, શંકુ જેટલી જ સમાન પાયાની ત્રિજ્યા અને ઊંચાઈવાળા નળાકાર પર મૂકવામાં આવે, તો બનતી આકૃતિની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ $\pi r\sqrt{h^2+r^2}+2\pi rh$.

ઉકેલ : સત્ય. વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ એક સાથે લેતાં, તે અલગથી લીધેલા વક્રસપાટીના ક્ષેત્રફળના સરવાળા જેટલું થાય.

ઉદાહરણ 2 : એક ગોળાકાર ધાતુના દડાને ઓગાળીને, આઠ નવા એકસરખા દડા બનાવવામાં આવે છે, તો દરેક નવા દડાની ત્રિજ્યા, મૂળ દડાની ત્રિજ્યાના $\frac{1}{8}$ મા ભાગ જેટલી હોય.

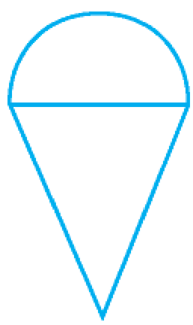
ઉકેલ : અસત્ય. મૂળ ધાતુના દડાની ત્રિજ્યા r છે અને ઓગાળ્યા પછી બનતા નવા દડાની ત્રિજ્યા r_1 છે.

તેથી, $\frac{4}{3}\pi r^3 = 8 \times \frac{4}{3}\pi r_1^3$. તેથી $r_1 = \frac{r}{2}$.

ઉદાહરણ 3 : બે એકસમાન, a બાજુવાળા નક્કર ઘન એકબીજા સાથે જોડાયેલા છે, તો પરિણામી લંબઘનની કુલ સપાટીનું ક્ષેત્રફળ $12a^2$ છે.

ઉકેલ : અસત્ય. a બાજુવાળા ઘનની સપાટીનું કુલ ક્ષેત્રફળ $6a^2$ છે. જો a બાજુવાળી બે સમાન બાજુઓ એકબીજા સાથે જોડવામાં આવે, તો તેથી બનતા લંબઘનની કુલ સપાટીનું ક્ષેત્રફળ $10a^2$ છે.

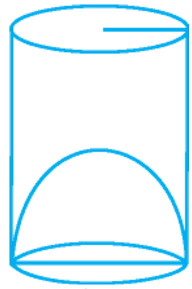
ઉદાહરણ 4 : આકૃતિ 12.5 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે, એક ભમરડાની સપાટીનું કુલ ક્ષેત્રફળ, એ અર્ધગોળાની સપાટીના કુલ ક્ષેત્રફળ અને શંકુની સપાટીના કુલ ક્ષેત્રફળના સરવાળા જેટલું હોય છે.


આકૃતિ 12.5

ઉકેલ : અસત્ય. ભમરડાની સપાટીનું કુલ ક્ષેત્રફળ એ અર્ધગોળાની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ અને શંકુની વક્રસપાટીના ક્ષેત્રફળનાં સરવાળા જેટલું હોય છે.

ઉદાહરણ 5 : આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે પાત્રની ખરેખર ક્ષમતા એ નળાકારના ઘનફળ અને અર્ધગોળાના ઘનફળના તફાવત જેટલી છે.

ઉકેલ : સત્ય. પાત્રની ખરેખર ક્ષમતા, એ પાત્રની અંદરની ખાલી જગ્યા છે, તેમાં કંઈક પ્રવાહી ઉમેરતાં તેટલી જગ્યા એ રોકે છે.



આકૃતિ 12.6

સ્વાધ્યાય 12.2

નીચેનાં વિધાન સત્ય છે કે અસત્ય તે કહો અને તમારા ઉત્તરની યથાર્થતા જણાવો :

1. બે સમાન ઘન અર્ધગોળાઓ તેમના સમાન પાયાની ત્રિજ્યા r સેમીથી જોડાયેલા છે. સંયોજનની સપાટીનું કુલ ક્ષેત્રફળ $6\pi r^2$ છે.

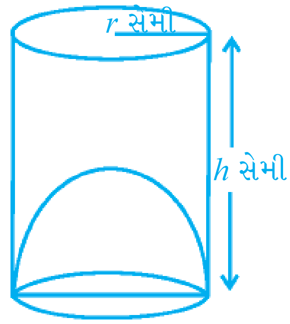
2. r ત્રિજ્યા અને h ઊંચાઈના એક ઘન નળાકારને તેના જેટલી જ ઊંચાઈ અને ત્રિજ્યાવાળા નળાકાર પર મૂકવામાં આવે છે. આ રીતે બનતા આકારની સપાટીનું કુલ ક્ષેત્રફળ $4\pi rh + 4\pi r^2$ છે.

3. r ત્રિજ્યા અને h ઊંચાઈના એક ઘન શંકુને તેના જેટલી જ ત્રિજ્યા અને ઊંચાઈના ઘન નળાકાર પર મૂકવામાં આવે છે. આ સંયોજિત ઘનની સપાટીનું કુલ ક્ષેત્રફળ $\pi r\left[\sqrt{r^2+h^2}+3r+2h\right]$.

4. a બાજુવાળા એક ઘનાકાર ખોખામાં એક ઘન દડો બરાબર બંધબેસતો આવે તેમ મૂકેલો છે. દડાનું ઘનફળ $\frac{4}{3}\pi a^3$ છે.

5. શંકુના આડછેદનું ઘનફળ $\frac{1}{3}\pi h[r_1^2 + r_2^2 - r_1r_2]$ છે, જ્યાં h એ આડછેદની સીધી ઊંચાઈ છે અને r_1 અને r_2 તેના બે છેડાની ત્રિજ્યાઓ છે.

6. આકૃતિ 12.7 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે, તળિયેથી ઉપરની તરફ આવેલા અર્ધગોળાકાર ભાગ સાથે નળાકાર પાત્રની ક્ષમતા $\frac{\pi r^2}{3}(3h - 2r)$.



આકૃતિ 12.7

7. શંકુના આડછેદની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ $\pi l\ (r_1+r_2)$, છે જ્યાં $l=\sqrt{h^2+(r_1+r_2)^2}$, આડછેદના બે છેડાઓની ત્રિજ્યા r_1 અને r_2 છે અને h એ ઊંચાઈ છે.

8. એક જ ધાતુના પતરામાંથી બનેલા એક પોલા નળાકાર પાયાની ઉપર શંકુના આડછેદ આકારની ધાતુની ખુલ્લી ડોલ આવેલી છે. ઉપયોગમાં લીધેલા શંકુના આડછેદની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ + વર્તુળાકાર પાયાનું ક્ષેત્રફળ + નળાકારની વક્રસપાટીના ક્ષેત્રફળ ધાતુના પતરાની સપાટીના ક્ષેત્રફળને સમાન હોય છે.

કારણ સહિત ટૂંક જવાબી પ્રશ્નો

ઉદાહરણ 1 : 14 સેમી ધારના ઘનમાંથી એક મહત્તમ માપનો શંકુ કાપવામાં આવેલો છે. શંકુની સપાટીનું ક્ષેત્રફળ શોધો અને શંકુને કાપ્યા પછી ઘનની બાકી વધેલી સપાટીનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

ઉકેલ : 14 સેમી ધારના ઘનમાંથી એક મહત્તમ માપનો શંકુ કાપતા તેની પાયાની ત્રિજ્યા 7 સેમી અને ઊંચાઈ 14 સેમી થશે.

શંકુની સપાટીનું કુલ ક્ષેત્રફળ $= \pi rl + \pi r^2$

$$= \frac{22}{7} \times 7 \times \sqrt{7^2+14^2} + \frac{22}{7}(7)^2$$

$$= \frac{22}{7} \times 7 \times \sqrt{245} + 154$$

$$= (154\sqrt{5} + 154) \text{ સેમી}^2$$

$$= 154\left(\sqrt{5}+1\right) \text{ સેમી}^2$$

ઘનની સપાટીનું ક્ષેત્રફળ $= 6 \times (14)^2 = 6 \times 196 = 1176$ સેમી^{2}

તેથી, શંકુને કાપ્યા પછી ઘનની બાકી વધેલી સપાટીનું ક્ષેત્રફળ $= \left(1176 - 154 - 154\sqrt{5}\right)$ સેમી^{2}

$= (1022 - 154\sqrt{5})$ સેમી^{2}.

ઉદાહરણ 2 : 10.5 સેમી ત્રિજ્યાના એક ધાતુના ગોળાને ઓગાળીને 3.5 સેમી ત્રિજ્યા અને 3 સેમી ઊંચાઈના શંકુ બનાવ્યા છે. આ રીતે બનતા શંકુની સંખ્યા શોધો.

ઉકેલ : ધાતુના ગોળાનું ઘનફળ $= \frac{4}{3}\pi(10.5)^3$ સેમી^{3}

3.5 સેમી ત્રિજ્યા અને 3 સેમી ઊંચાઈના શંકુનું ઘનફળ $= \frac{1}{3}\pi(3.5)^2 \times 3$ સેમી^{3}

આ રીતે બનતા શંકુની સંખ્યા $= \dfrac{\frac{4}{3}\pi \times 10.5 \times 10.5 \times 10.5}{\frac{1}{3}\pi \times 3.5 \times 3.5 \times 3} = 126$

ઉદાહરણ 3 : એક નહેર 300 સેમી પહોળી અને 120 સેમી ઊંડી છે. નહેરમાં પાણી 20 કિમી/કલાકની ઝડપથી વહે છે. જો 8 સેમી ઊંચાઈનું પાણી રાખવું હોય, તો 20 મિનિટમાં કેટલા ક્ષેત્રફળમાં પાણી પીવડાવી શકાય ?

ઉકેલ : એક કલાકમાં નહેરમાં વહેતા પાણીનું ઘનફળ = નહેરની પહોળાઈ × નહેરની ઊંડાઈ × નહેરના પાણીની ઝડપ

$= 3 \times 1.2 \times 20 \times 1000$ મી^{3} $= 72000$ મી^{3}.

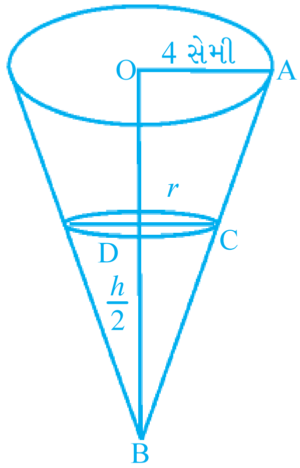
20 મિનિટમાં વહેતા પાણીનું ઘનફળ $= \frac{72000 \times 20}{60}$ મી^{3} $= 24000$ મી^{3}

8 સેમી એટલે કે 0.08 મી ઊંચાઈનું પાણી રાખવા માટે, જરૂરી ક્ષેત્રફળ

$= \frac{24000}{0.08}$ મી^{2} $= 300000$ મી^{2} $= 30$ હેક્ટર.

ઉદાહરણ 4 : 4 સેમી ત્રિજ્યાના એક શંકુને, તેની ધરીના મધ્યબિંદુ અને પાયાને સમાંતર દોરેલા સમતલ દ્વારા બે ભાગમાં વિભાજિત કરવામાં આવે છે. બંને ભાગના ઘનફળની સરખામણી કરો.

ઉકેલ : ધારો કે આપેલા શંકુની ઊંચાઈ h છે. શંકુનું તેની ધરીના મધ્યબિંદુ અને પાયાને સમાંતર દોરેલા સમતલ દ્વારા બે ભાગમાં વિભાજન કરતાં આપણને નીચે પ્રમાણેની માહિતી મળે (જુઓ આકૃતિ 12.8.) :



આકૃતિ 12.8

બે સમરૂપ ત્રિકોણો OAB અને DCBમાં, આપણી પાસે

$\frac{OA}{CD} = \frac{OB}{BD}$. તેથી $\frac{4}{r} = \frac{h}{\frac{h}{2}}$. તેથી, $r = 2$.

તેથી, $\frac{\text{નાના શંકુનું ઘનફળ}}{\text{શંકુના આડછેદના ઘનફળ}} = \frac{\frac{1}{3}\pi \times (2)^2 \times \left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{1}{3}\pi \times \left(\frac{h}{2}\right)[4^2 + 2^2 + 4 \times 2]} = \frac{1}{7}$

તેથી, નાના શંકુના ઘનફળ અને શંકુના આડછેદના ઘનફળનો ગુણોત્તર 1: 7 છે.

ઉદાહરણ 5 : ધાતુના ત્રણ ઘનની ધારનો ગુણોત્તર 3 : 4 : 5 છે. તેમને ઓગાળીને એક જ ઘનમાં રૂપાંતરિત કરવામાં આવે છે. તેનો વિકર્ણ $12\sqrt{3}$ સેમી છે. આ ત્રણ ઘનની ધાર શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે ત્રણ ઘનની ધાર (સેમીમાં) અનુક્રમે $3x$, $4x$ અને $5x$ છે.

ઓગાળ્યા પછી ઘનનું ઘનફળ $= (3x)^3 + (4x)^3 + (5x)^3 = 216x^3$ સેમી^{3}

ધારો કે ઓગાળ્યા પછી બનતા નવા ઘનની બાજુ a છે.

તેથી, $a^3 = 216x^3$

તેથી, $a = 6x$, વિકર્ણ $= \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = a\sqrt{3}$

પણ નવા ઘનનો વિકર્ણ $12\sqrt{3}$ સેમી આપેલો છે. માટે $a\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$, એટલે કે $a = 12$.

તેથી $x = 2$. માટે ત્રણ ઘનની ધાર અનુક્રમે 6 સેમી, 8 સેમી અને 10 સેમી છે.

સ્વાધ્યાય 12.3

1. જેની ધાર 3 સેમી, 4 સેમી અને 5 સેમી હોય તેવા ધાતુના ત્રણ ઘનને ઓગાળીને એક ઘન બનાવેલ છે. આ રીતે બનતા ઘનની ધાર શોધો.

2. એક લંબઘન સીસાનાં પરિમાણ 9 સેમી × 11 સેમી × 12 સેમી છે. આ લંબઘન સીસામાંથી 3 સેમી વ્યાસની કેટલી ગોળીઓ બને ?

3. એક ડોલ શંકુના આડછેદના આકારની છે અને 28.490 લિટર પાણી ધરાવે છે. તેના મથાળા અને તળિયાની ત્રિજ્યાઓ અનુક્રમે 28 સેમી અને 21 સેમી છે. ડોલની ઊંચાઈ શોધો.

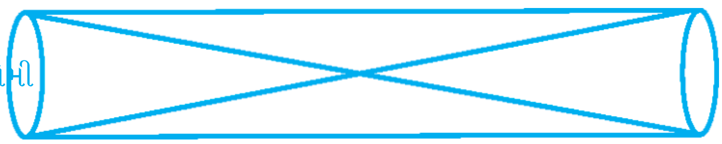
4. 8 સેમી ત્રિજ્યા અને 12 સેમી ઊંચાઈના એક શંકુનું, તેના ધરીના મધ્યબિંદુ અને પાયાને સમાંતર દોરેલા સમતલ દ્વારા બે ભાગમાં વિભાજન કરવામાં આવે છે. આ બે ભાગના ઘનફળનો ગુણોત્તર શોધો.

5. બે સમાન ઘન પૈકી પ્રત્યેકનું ઘનફળ 64 સેમી^{3} છે. તેમને બંને બાજુથી જોડેલા છે. બનતા પરિણામી લંબઘનની સપાટીનું ક્ષેત્રફળ શું થશે ?

6. 7 સેમી બાજુવાળા એક નક્કર ઘનમાંથી 7 સેમી ઊંચાઈ અને 3 સેમી ત્રિજ્યાનો એક શંકુ કોતરવામાં આવે છે. ઘનના બાકી રહેલા ભાગનું ઘનફળ શોધો.

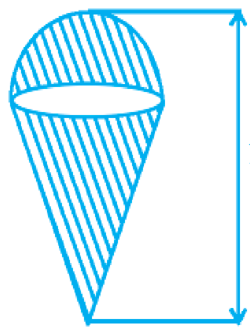
7. બે સમાન શંકુઓની પાયાની ત્રિજ્યા 8 સેમી અને ઊંચાઈ 15 સેમી છે. આ બે શંકુઓ એકબીજા સાથે પાયા દ્વારા જોડાયેલા છે. આ રીતે બનતા આકારની સપાટીનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

8. આકૃતિ 12.9 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે બે નક્કર શંકુઓ A અને B એક નળાકાર નળીમાં મૂકેલા છે. તેમની ક્ષમતાઓનો ગુણોત્તર 2:1 છે. શંકુની ઊંચાઈ અને ક્ષમતા શોધો. નળાકારના બાકી રહેલા ભાગનું ઘનફળ પણ શોધો.



આકૃતિ 12.9

9. આકૃતિ 12.10 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે 5 સેમી ત્રિજ્યા અને 10 સેમી ઊંચાઈનો એક આઇસક્રીમ કોન આઈસ્ક્રીમથી પૂરેપૂરો ભરેલો છે. આઇસક્રીમનું ઘનફળ શોધો. આપેલ છે કે $\frac{1}{6}$ ભાગમાં આઇસક્રીમ ભરેલો નથી.



આકૃતિ 12.10

10. થોડું પાણી ભરેલા 7 સેમી વ્યાસના નળાકાર પાત્રમાં 1.4 સેમી વ્યાસની લખોટીઓ નાંખવામાં આવે છે. પાણીનું સ્તર 5.6 સેમી ઊંચું આવે તે માટે નાખવી જોઈતી લખોટીઓની સંખ્યા શોધો.

11. એક નક્કર લંબઘનાકાર સીસાના ટુકડાનાં પરિમાણ 66 સેમી, 42 સેમી અને 21 સેમી છે. તેમાંથી 4.2 સેમી વ્યાસની કેટલી સીસાની ગોળાકાર ગોળીઓ પ્રાપ્ત થાય ?

12. એક સીસાના નક્કર ઘનની ધારનું માપ 44 સેમી છે. તેમાંથી 4 સેમી વ્યાસની કેટલી સીસાની ગોળાકાર ગોળીઓ બનાવી શકાય ?

13. 25 સેમી × 16 સેમી × 10 સેમી પરિમાણની દરેક ઇંટથી એક 24 મી લાંબી, 0.4 મી જાડી અને 6 મી ઊંચાઈની દીવાલ બનાવેલી છે. જો દીવાલના ઘનફળના $\frac{1}{10}$ મા ભાગ સિમેન્ટ ભરેલો હોય, તો દીવાલ બનાવવા માટે કેટલી ઇંટોનો ઉપયોગ કરવો પડે ?

14. 10 સેમી ઊંચાઈ અને 4.5 સેમી વ્યાસના લંબવૃત્તીય નળાકાર બનાવવા માટે 1.5 સેમી પાયાનો વ્યાસ અને 0.2 સેમી ઊંચાઈની કેટલી ધાતુની ગોળાકાર તકતીઓ ઓગાળવી પડે ?

વિસ્તૃત જવાબી પ્રશ્નો

ઉદાહરણ 1 : એક ડોલની ઊંચાઈ 30 સેમી અને તેના નીચેના અને ઉપરના છેડાની ત્રિજ્યા અનુક્રમે 10 સેમી અને 20 સેમી હોય તેવા શંકુના આડછેદ આકારની ડોલની ક્ષમતા અને સપાટીનું ક્ષેત્રફળ શોધો. ₹ 25 પ્રતિ લિટરના દરે પાત્રમાં પૂરેપૂરાં ભરેલા દૂધની કિંમત પણ શોધો. ($\pi = 3.14$ લો.)

ઉકેલ : ડોલની ક્ષમતા (કે ઘનફળ) = $\frac{\pi h}{3}[r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2]$

અહીં, $h = 30$ સેમી, $r_1 = 20$ સેમી અને $r_2 = 10$ સેમી.

તેથી ડોલની ક્ષમતા $= \frac{3.14 \times 30}{3}$ $[20^2 + 10^2 + 20 \times 10]$ સેમી^{3} = 21.980 લિટર

1 લિટર દૂધની કિંમત = ₹ 25

21.980 લિટર દૂધની કિંમત = ₹ 21.980 × 25 = ₹ 549.50

ડોલની સપાટીનું ક્ષેત્રફળ = ડોલની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ + તળિયાની સપાટીનું ક્ષેત્રફળ

$= \pi l\,(r_1 + r_2) + \pi r_2^2$ $\qquad l = \sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2}$

હવે, $l = \sqrt{900+100}$ સેમી = 31.62 સેમી

માટે, ડોલની સપાટીનું ક્ષેત્રફળ $= 3.14 \times 31.62\,(20 + 10) + 3.14\,(10)^2$

= 3.14 [948.6 + 100] સેમી^{2}

= 3.14 [1048.6] સેમી^{2} = 3292.6 સેમી^{2} (આશરે)

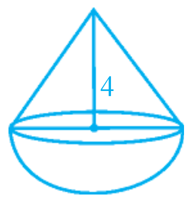
ઉદાહરણ 2 : એક નક્કર રમકડું, અર્ધગોળાની ઉપર લંબવૃત્તીય શંકુ લગાવેલ હોય તેવા સ્વરૂપમાં છે. શંકુની ઊંચાઈ 4 સેમી છે અને તેના પાયાનો વ્યાસ 8 સેમી છે. રમકડાનું ઘનફળ નક્કી કરો. જો એક ઘન રમકડાને બહિર્ગત હોય, તો ઘન અને રમકડાનાં ઘનફળનો તફાવત શોધો. રમકડાની કુલ સપાટીનું ક્ષેત્રફળ પણ શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે અર્ધગોળા અને શંકુની ત્રિજ્યા r છે અને શંકુની ઊંચાઈ h છે. (જુઓ આકૃતિ 12.11.) અહીં $h = r = 4$

રમકડાનું ઘનફળ = અર્ધગોળાનું ઘનફળ + શંકુનું ઘનફળ

$$= \frac{2}{3}\pi r^3 + \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$= \left(\frac{2}{3} \times \frac{22}{7} \times 4^3 + \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 4^2 \times 4\right) \text{ સેમી}^3 = \frac{1408}{7} \text{ સેમી}^3.$$



આકૃતિ 12.11

એક ઘન આપેલા નક્કર પદાર્થને પરિગત છે. માટે ઘનની ધાર 8 સેમી થવી જોઈએ.

ઘનનું ઘનફળ = 8^3 સેમી^{3} = 512 સેમી^{3}.

ઘન અને રમકડાના ઘનફળનો તફાવત = $\left(512-\frac{1408}{7}\right)$ સેમી^{3} = 310.86 સેમી^{3}

રમકડાની સપાટીનું કુલ ક્ષેત્રફળ = શંકુની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ + અર્ધગોળાની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ

$= \pi r l + 2\pi r^2$, જ્યાં $l = \sqrt{h^2+r^2}$

$= \pi r\ (\ l + 2r)$

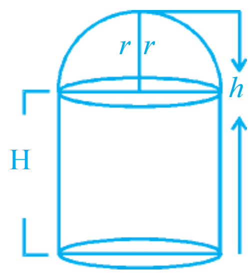
$= \frac{22}{7} \times 4 \left[\sqrt{4^2+4^2}+2\times 4\right]$ સેમી^{2}

$= \frac{22}{7} \times 4\left[4\sqrt{2}+8\right]$સેમી^{2}

$= \frac{88\times 4}{7}\left[\sqrt{2}+2\right]$સેમી^{2}

= 171.68 સેમી^{2}

ઉદાહરણ 3 : એક મકાન નળાકાર સ્વરૂપમાં છે તેની ઉપર અર્ધગોળાકાર ગુંબજ આવેલો છે. (આકૃતિ 12.12 જુઓ.) ગુંબજનો પાયાનો વ્યાસ, મકાનની ઊંચાઈના $\frac{2}{3}$ મા ભાગ જેટલો છે. જો મકાનમાં $67\frac{1}{21}$ મી^{3} હવા હોય, તો મકાનની ઊંચાઈ શોધો.



આકૃતિ 12.12

ઉકેલ : ધારો કે, અર્ધગોળાકાર ગુંબજની ત્રિજ્યા r મીટર અને મકાનની કુલ ઊંચાઈ h મીટર છે.

ગુંબજના પાયાનો વ્યાસ ઊંચાઈના $\frac{2}{3}$મા ભાગ જેટલો હોવાથી, $2r = \frac{2}{3}h$. એટલે કે $r = \frac{h}{3}$. ધારો કે નળાકાર ભાગની ઊંચાઈ H મીટર છે. તેથી $H = h - \frac{h}{3} = \frac{2}{3}h$ મીટર

મકાનની અંદરની હવાનું ઘનફળ = ગુંબજની અંદરની હવાનું ઘનફળ + નળાકારની અંદરની હવાનું ઘનફળ

$= \frac{2}{3}\pi r^3 + \pi r^2 H$, જ્યાં H એ નળાકાર ભાગની ઊંચાઈ છે.

$= \frac{2}{3}\pi\left(\frac{h}{3}\right)^3 + \pi\left(\frac{h}{3}\right)^2 \cdot \frac{2}{3}h = \frac{8}{81}\pi h^3$ ઘન મીટર

મકાનની અંદરની હવાનું ઘનફળ $67\frac{1}{21}$ મી^{3} છે. માટે $\frac{8}{81}\pi h^3 = \frac{1408}{21}$. એટલે કે $h = 6$ મીટર

સ્વાધ્યાય 12.4

1. 8 સેમી ત્રિજ્યાના ધાતુના એક નક્કર અર્ધગોળાને ઓગાળીને પાયાની ત્રિજ્યા 6 સેમી હોય, તેવા લંબવૃત્તીય શંકુમાં ઢાળવામાં આવે છે, તો તેથી બનતા શંકુની ઊંચાઈ નક્કી કરો.

2. એક લંબઘન પાણીની ટાંકીનો પાયો 11 મી × 6 મી છે. તેમાં 5 મી ઊંચાઈ સુધી પાણી ભરેલું છે. જો ટાંકીમાંના પાણીને 3.5 મી ત્રિજ્યાવાળી નળાકાર ટાંકીમાં નાખવામાં આવે, તો ટાંકીમાં પાણીની ઊંચાઈ શોધો.

3. જેનું બહારનાં પરિમાણ 36 સેમી, 25 સેમી અને 16.5 સેમી હોય અને લોખંડની જાડાઈ 1.5 સેમીની આપેલી હોય તેવા ખુલ્લા ખોખાંને બાંધવા માટે કેટલા ઘન સેમી લોખંડની જરૂર પડે ? જો એક ઘન સેમી લોખંડનું વજન 7.5 ગ્રામ હોય, તો ખોખાંનું વજન શોધો.

4. નળાકાર આકારની શાહી પેનની નળી (રીફિલ) 7 સેમી લાંબી અને 5 મીમી વ્યાસની છે. આખી ભરેલી શાહીવાળી પેનની રીફિલથી સરેરાશ 3300 શબ્દો લખાય છે. એક લિટરના પાંચમા ભાગની શાહીભરેલી શીશીમાંથી કેટલા શબ્દો લખી શકાય ?

5. 5 મિમી વ્યાસની નળાકાર નળીમાંથી 10 મી/મિનિટના દરે પાણી બહાર નીકળે છે. જેના પાયાનો વ્યાસ 40 સેમી અને ઊંડાઈ 24 સેમી છે. તેવા શંકુ આકારના પાત્રને ભરાતાં કેટલો સમય લાગે ?

6. એક ચોખાનો ઢગલો 9 મી વ્યાસ અને 3.5 મી ઊંચાઈ હોય તેવા શંકુ આકારનો છે. આ ઢગલામાં રહેલા ચોખાનું ઘનફળ શોધો. આ ઢગલાને ઢાંકવા માટે કેટલું કાપડ જરૂરી છે ?

7. એક કારખાનામાં દરરોજ 1,20,000 પેન્સિલોનું ઉત્પાદન થાય છે. પેન્સિલનો આકાર નળાકાર છે અને દરેકની લંબાઈ 25 સેમી અને પાયાનો પરિઘ 1.5 સેમી છે. એક દિવસમાં ઉત્પાદિત થયેલ પેન્સિલની વક્રસપાટીને રંગ કરવાનો ખર્ચ ₹ 0.05 પ્રતિ ડેસિમી^{2}ના દરે કેટલો થશે ?

8. 50 મી લંબાઈના અને 44 મી પહોળાઈના લંબઘન તળાવમાં 14 સેમી વ્યાસની નળી દ્વારા 15 કિમી/કલાકના દરથી પાણી વહે છે. કેટલા સમયમાં તળાવમાંના પાણીની ઊંચાઈ 21 સેમી વધે ?

9. 4.4 મી × 2.6 મી × 1મી પરિમાણના લોખંડના નક્કર લંબઘન ટુકડાને ઓગાળીને અંદરની ત્રિજ્યા 30 સેમી અને જાડાઈ 5 સેમી હોય તેવા પોલા નળાકારમાં રૂપાંતરિત કરવામાં આવે છે, તો નળાકાર નળીની લંબાઈ શોધો.

10. 500 માણસો એક 80 મી લાંબા અને 50 મી પહોળા લંબઘન તળાવમાં ડૂબકી મારે છે. જો એક માણસથી સરેરાશ 0.04 મી^{3} પાણી ઊંચે જતું હોય, તો તળાવમાં પાણી કેટલું ઊંચું જશે ?

11. અંદરનાં પરિમાણ 16 સેમી × 8 સેમી × 8 સેમી હોય, તેવા લંબઘન ખોખામાં 2 સેમી ત્રિજ્યાવાળા 16 કાચના ગોળાઓ ભરવામાં આવે છે અને પછી ખોખાંમાં પાણી ભરવામાં આવે છે. ખોખાંમાં ભરાયેલા પાણીનું ઘનફળ શોધો.

12. 16 સેમી ઊંચાઈવાળા દૂધના એક પાત્રને ધાતુના પતરામાંથી બનાવવામાં આવે છે. પતરું શંકુના આડછેદના સ્વરૂપમાં છે અને તેની નીચેના તથા ઉપરના છેડાની ત્રિજ્યા અનુક્રમે 8 સેમી અને 20 સેમી છે. પાત્રમાં ભરી શકાય તેટલા દૂધનો ભાવ ₹ 22 પ્રતિ લિટરના દરે શોધો.

13. એક 32 સેમી ઊંચાઈની અને પાયાની ત્રિજ્યા 18 સેમીની રેતીથી ભરેલી નળાકાર ડોલ છે. આ ડોલને જમીન પર ખાલી કરવામાં આવે છે અને રેતીના શંકુ આકારના ઢગલાની ઊંચાઈ 24 સેમી હોય, તો ઢગલાની ત્રિજ્યા અને ત્રાંસી ઊંચાઈ શોધો.

14. એક રૉકેટ લંબવૃત્તીય નળાકાર સ્વરૂપમાં છે. તે નીચેના છેડેથી બંધ છે અને તેની ઉપર નળાકાર જેટલી જ ત્રિજ્યાનો શંકુ લાગેલો છે. નળાકારનો વ્યાસ અને ઊંચાઈ અનુક્રમે 6 સેમી અને 12 સેમી છે. જો શંકુ આકારની ત્રાંસી ઊંચાઈ 5 સેમી હોય, તો રૉકેટનું સપાટીનું કુલ ક્ષેત્રફળ અને ઘનફળ શોધો. [$\pi = 3.14$ લો.]

15. એક મકાન નળાકાર સ્વરૂપમાં છે અને તેના ઉપર અર્ધગોળાકાર ગુંબજ છે. તેમાં $41\frac{19}{21}$ મી^{3} હવા છે. જો ગુંબજનો અંદરનો વ્યાસ, તેની ભોંયતળિયાની કુલ ઊંચાઈ જેટલો હોય, તો મકાનની ઊંચાઈ શોધો.

16. એક અર્ધગોળાકાર વાટકીની અંદરની ત્રિજ્યા 9 સેમી છે અને તે પ્રવાહીથી પૂરેપૂરી ભરેલી છે. આ પ્રવાહીને દરેકની ત્રિજ્યા 1.5 સેમી અને ઊંચાઈ 4 સેમી હોય તેવી નળાકાર આકારની શીશીઓમાં ભરવામાં આવે છે. વાટકીને ખાલી કરવા કેટલી શીશીઓની જરૂર પડે ?

17. એક નક્કર લંબવૃત્તીય શંકુની ઊંચાઈ 120 સેમી અને ત્રિજ્યા 60 સેમી છે. તેને 180 સેમી ઊંચાઈવાળી પાણી ભરેલા લંબવૃત્તીય નળાકારમાં મૂકવામાં આવે છે કે જેથી તે તળિયાને સ્પર્શે. જો નળાકારની ત્રિજ્યા શંકુની ત્રિજ્યા જેટલી જ હોય, તો નળાકારમાં બાકી રહેલા પાણીનું ઘનફળ શોધો.

18. જેની અંદરની ત્રિજ્યા 1 સેમી હોય, તેવી એક નળાકાર નળીમાંથી પાણી 40 સેમી/સે ના દરે એક ખાલી નળાકાર ટાંકીમાં વહી રહ્યું છે. ટાંકીના પાયાની ત્રિજ્યા 40 સેમી છે, તો અડધા કલાકમાં ટાંકીમાં પાણી કેટલું ઊંચું આવશે?

19. 22 મી × 20 મી પરિમાણના છાપરાં પરથી વરસાદનું પાણી, પાયાનો વ્યાસ 2 મી અને ઊંચાઈ 3.5 મી હોય તેવા નળાકાર પાત્રમાં પડે છે. જો છાપરાં પરથી ભેગું થયેલું પાણી આ નળાકાર પાત્રમાં જ પડતું હોય, તો વરસાદી પાણીની ઊંચાઈ સેમીમાં શોધો.

20. લાકડાંનું બનેલું એક પેન સ્ટૅન્ડ લંબઘનાકાર છે. તેમાં અનુક્રમે શંકુ આકારના અને ઘનાકારના ચાર અવસેધો પેન અને પિનને જકડવા માટે રાખેલા છે. લંબઘનનાં પરિમાણ 10 સેમી, 5 સેમી અને 4 સેમી છે. દરેક શંકુ આકારના અવસેધની ત્રિજ્યા 0.5 સેમી અને ઊંડાઈ 2.1 સેમી છે. ઘનાકાર અવસેધની ધાર 3 સેમી છે. સમગ્ર સ્ટૅન્ડમાંના લાકડાંનું ઘનફળ શોધો.