7.10.1 સમાંતર અક્ષોનો પ્રમેય (Theorem of parallel axes)

આ પ્રમેય કોઈ પણ આકારના પદાર્થને લાગુ પડે છે. જો પદાર્થના દ્રવ્યમાન કેન્દ્રમાંથી પસાર થતી અક્ષને અનુલક્ષીને પદાર્થની જડત્વની ચાકમાત્રા આપેલ હોય, તો આ અક્ષને સમાંતર કોઈ પણ અક્ષને અનુલક્ષીને આપણે જડત્વની ચાકમાત્રા શોધી શકીએ છીએ. આપણે ફક્ત આ પ્રમેયનું વિધાન જ લઈશું અને તેને સાબિત નહિ કરીએ. તેમ છતાં, આપણે તેને થોડીક સરળ પરિસ્થિતિઓમાં લાગુ કરીશું. જે આપણને આ પ્રમેયની ઉપયોગિતા વિશે સમજાવવા માટે પૂરતી હશે. આ પ્રમેયનું કથન નીચે પ્રમાણે છે :

કોઈ પણ અક્ષને અનુલક્ષીને પદાર્થની જડત્વની ચાકમાત્રા એ પદાર્થના દ્રવ્યમાન કેન્દ્રમાંથી પસાર થતી સમાંતર અક્ષને અનુલક્ષીને લીધેલ પદાર્થની જડત્વની ચાકમાત્રા અને તેના દ્રવ્યમાન અને બે સમાંતર અક્ષો વચ્ચેના લંબ અંતરના વર્ગના ગુણાકારના સરવાળા જેટલી છે. આકૃતિ 7.31માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે, Z અને Z′ એ બે સમાંતર અક્ષો છે કે જે બે વચ્ચેનું અંતર a છે. Z-અક્ષ એ પદાર્થના દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર O માંથી પસાર થાય છે. સમાંતર અક્ષોના પ્રમેય અનુસાર,

$$I_{z'} = I_z + Ma^2 \qquad (7.37)$$

જ્યાં I_z અને $I_{z'}$ એ પદાર્થની અનુક્રમે Z અને Z′ અક્ષને અનુલક્ષીને જડત્વની ચાકમાત્રાઓ છે. M એ પદાર્થનું કુલ દળ અને a એ બે અક્ષો વચ્ચેનું લંબઅંતર છે.

▶ *ઉદાહરણ 7.11* M દ્રવ્યમાન અને l લંબાઈના એક સળિયાની તેને લંબ હોય અને તેના કોઈ એક છેડામાંથી પસાર થતી હોય તેવી અક્ષને અનુલક્ષીને જડત્વની ચાકમાત્રા કેટલી હશે ?

ઉકેલ M દ્રવ્યમાન અને l લંબાઈના એક સળિયા માટે, $I = Ml^2/12$. સમાંતર અક્ષોના પ્રમેયનો ઉપયોગ કરતાં $I' = I + Ma^2$. હવે $a = l/2$ લેતા આપણને,

$$I' = M\frac{l^2}{12} + M\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{Ml^2}{3}$$

મળે.

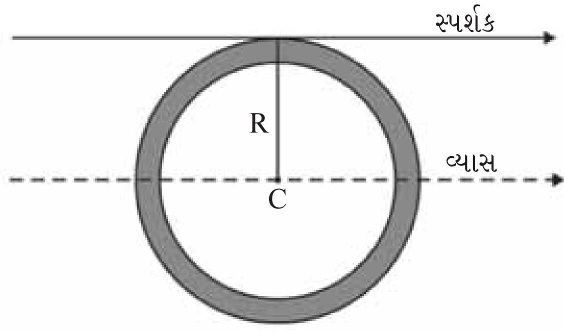
આ આપણે સ્વતંત્ર રીતે પણ ચકાસી શકીએ છીએ, કારણ કે I એ $2M$ દળ અને $2l$ લંબાઈના સળિયાની તેના મધ્યબિંદુને અનુલક્ષીને મળતી જડત્વની ચાકમાત્રા કરતાં અડધા મૂલ્યની છે.

$$I' = 2M.\frac{4l^2}{12}\times\frac{1}{2} = \frac{Ml^2}{3}$$ ◀

▶ *ઉદાહરણ 7.12* કોઈ એક પાતળી રિંગની તેના વલયના સ્પર્શકને અનુલક્ષીને જડત્વની ચાકમાત્રા કેટલી હશે ?

ઉકેલ

આ રિંગના સમતલમાં, રિંગનો સ્પર્શક એ રિંગના કોઈ એક વ્યાસને સમાંતર છે. આ બે સમાંતર અક્ષો વચ્ચેનું અંતર R એ રિંગની ત્રિજ્યા બને છે. સમાંતર અક્ષના પ્રમેયનો ઉપયોગ કરીને,



આકૃતિ 7.32

$$I_{tangent} = I_{dia} + MR^2 = \frac{MR^2}{2} + MR^2 = \frac{3}{2}MR^2.$$ ◀

7.11 સ્થિર અક્ષને અનુલક્ષીને ચાકગતિની શુદ્ધ ગતિકી (KINEMATICS OF ROTATIONAL MOTION ABOUT A FIXED AXIS)

આપણે અગાઉ પણ ચાકગતિ અને સ્થાનાંતરીય ગતિ વચ્ચે સામ્યતાનો ઉલ્લેખ કર્યો છે. ઉદાહરણ તરીકે, કોણીય વેગ ω એ ચાકગતિમાં એવી જ સમાન ભૂમિકા ભજવે છે જે સ્થાનાંતરણમાં રેખીય વેગ $\mathbf{v}$ ભજવે છે. અમે આ સામ્યતાને વધુ આગળ લઈ જવા માંગીએ છીએ. આમ કરતાં આપણે માત્ર સ્થિર અક્ષને અનુલક્ષીને થતી ચાકગતિ માટે ચર્ચાને સીમિત કરીશું. આવી ગતિના આ કિસ્સામાં માત્ર એક મુક્તતાના અંશનો (degree of freedom) સમાવેશ થાય છે, એટલે કે ગતિનું વર્ણન કરવા માટે માત્ર એક જ સ્વતંત્ર ચલની જરૂર પડે છે. સ્થનાંતરીયમાં આ રેખીય ગતિને અનુરૂપ છે. આ પરિચ્છેદ માત્ર શુદ્ધ ગતિકી પૂરતો મર્યાદિત છે. આપણે પછીના પરિચ્છેદમાં ગતિશાસ્ત્ર (ડાયનામિક્સ) તરફ જઈશું.

આપણે યાદ કરીએ કે ચાકગતિ કરતાં પદાર્થના કોણીય સ્થાનાંતરને સ્પષ્ટ કરવા માટે આપણે પદાર્થનો P જેવો કોઈ પણ કણ લઈએ છીએ (આકૃતિ 7.33). તે જે સમતલમાં ગતિ કરે છે તેમાં તેનું કોણીય સ્થાનાંતર θ આ સમગ્ર પદાર્થનું કોણીય સ્થાનાંતર છે; θ એ Pની ગતિના સમતલમાં એક નિશ્ચિત દિશાથી માપવામાં આવે છે, જેને આપણે X′-અક્ષ તરીકે લઈએ છીએ, જે X-અક્ષને સમાંતર પસંદ કરેલ છે. નોંધો કે દર્શાવ્યા પ્રમાણે, પરિભ્રમણ અક્ષ એ z-અક્ષ છે અને કણની ગતિનું સમતલ એ x–y સમતલ છે. આકૃતિ 7.33 એ θ_0 પણ બતાવે છે જે $t = 0$ સમયે કોણીય સ્થાનાંતર છે.

આપણે એ પણ યાદ કરીએ કે કોણીય વેગ એ કોણીય સ્થાનાંતરના ફેરફારનો સમય-દર છે, $\omega = d\theta/dt$. નોંધ કરો કે ભ્રમણાક્ષ સ્થિર છે, તેથી કોણીય વેગને સદિશ

તરીકે લેવાની જરૂર નથી. વધુમાં, કોણીય પ્રવેગ, $\alpha = d\omega/dt$.

શુદ્ધ ચાકગતિમાં વપરાતી રાશિઓ, કોણીય સ્થાનાંતર (θ), કોણીય વેગ (ω) અને કોણીય પ્રવેગ (α) એ રેખીય ગતિમાં વપરાતી રાશિઓ અનુક્રમે સ્થાનાંતર (x), વેગ (υ) અને પ્રવેગ (a)ને અનુરૂપ છે. આપણે નિયમિત (એટલે કે અચળ) પ્રવેગ સાથે શુદ્ધ રેખીય ગતિનાં સમીકરણો જાણીએ છીએ :

$$\upsilon = \upsilon_0 + at \qquad \text{(a)}$$

$$x = x_0 + \upsilon_0 t + \frac{1}{2}at^2 \qquad \text{(b)}$$

$$\upsilon^2 = \upsilon_0^2 + 2a(x - x_0) \qquad \text{(c)}$$

જ્યાં x_0 = પ્રારંભિક સ્થાનાંતર અને υ_0 = પ્રારંભિક વેગ છે. 'પ્રારંભિક' શબ્દનો અર્થ $t = 0$ સમયે છે.

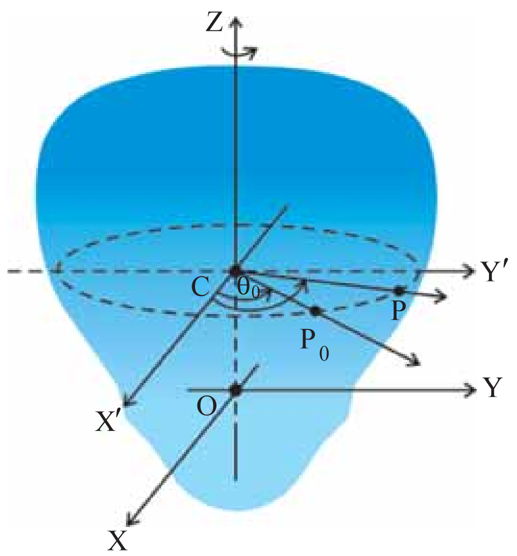
શુદ્ધ રેખીય ગતિના સમીકરણોને અનુરૂપ નિયમિત કોણીય પ્રવેગ સાથેના ચાકગતિના સમીકરણો આ પ્રમાણે છે :

$$\omega = \omega_0 + \alpha t \qquad (7.38)$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \qquad (7.39)$$

$$\text{અને } \omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0) \qquad (7.40)$$

જ્યાં θ_0 ચાકગતિ કરતાં પદાર્થનું પ્રારંભિક કોણીય સ્થાનાંતર, અને ω_0 = પદાર્થનો પ્રારંભિક કોણીય વેગ છે.



આકૃતિ 7.33 એક દૃઢ પદાર્થનું કોણીય સ્થાન દર્શાવવું

ઉદાહરણ 7.13 પ્રાથમિક સિદ્ધાંતોના આધારે સમીકરણ (7.38) મેળવો.

ઉકેલ કોણીય પ્રવેગ નિયમિત છે, તેથી

$$\frac{d\omega}{dt} = \alpha = \text{અચળ} \qquad \therefore\ d\omega = \alpha\, dt$$

આ સમીકરણનું સંકલન કરતાં,

$\omega = \alpha t + c$ (α અચળ હોવાથી)

$t = 0$ પર $\omega = \omega_0$ (આપેલ છે.)

પરથી $t = 0$ પર $\omega = c = \omega_0$ મળે છે.

આમ, $\omega = \alpha t + \omega_0$ જે માંગેલ સમીકરણ છે. $\omega = d\theta/dt$ વ્યાખ્યા સાથે આપણે સમીકરણ (7.38)નું સંકલન કરીને સમીકરણ (7.39) મેળવી શકીએ. આ તારવણી અને સમીકરણ (7.40)ની તારવણી સ્વાધ્યાય તરીકે છોડેલ છે.

ઉદાહરણ 7.14 એક મોટરના પૈડાંની કોણીય ઝડપ 16 સેકન્ડમાં 1200 rpm થી 3120 rpm સુધી વધે છે. (i) કોણીય પ્રવેગ નિયમિત છે તેમ ધારતાં તેનો કોણીય પ્રવેગ કેટલો હશે ? (ii) આ સમય દરમિયાન ઍન્જિન કેટલા પરિભ્રમણ (ચાકગતિ) કરે છે ?

ઉકેલ

(i) આપણે $\omega = \omega_0 + \alpha t$નો ઉપયોગ કરીશું.

ω_0 = rad/sમાં પ્રારંભિક કોણીય ઝડપ

$= 2\pi \times$ rev/sમાં કોણીય ઝડપ

$$= \frac{2\pi \times \text{rev / min માં કોણીય ઝડપ}}{60 \text{ s / min}}$$

$$= \frac{2\pi \times 1200}{60} \text{ rad/s}$$

$= 40\pi$ rad/s

તે જ રીતે ω = rad/sમાં અંતિમ કોણીય ઝડપ

$$= \frac{2\pi \times 3120}{60} \text{ rad/s}$$

$= 2\pi \times 52$ rad/s

$= 104\pi$ rad/s

$\therefore$ કોણીય પ્રવેગ

$$\alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t} = 4\pi \text{ rad/s}^2$$

ઍન્જિનનો કોણીય પ્રવેગ = 4π rad/s^2

(ii) t સમયમાં કોણીય સ્થાનાંતર

$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$ પરથી મળે.

$$= (40\pi \times 16 + \frac{1}{2} \times 4\pi \times 16^2) \text{ rad}$$

$$= (640\pi + 512\pi) \text{ rad}$$

$$= 1152\pi \text{ rad}$$

પરિભ્રમણોની સંખ્યા $= \frac{1152\pi}{2\pi} = 576$ ◀

7.12 સ્થિર અક્ષને અનુલક્ષીને ચાકગતિનું ગતિશાસ્ત્ર (DYNAMICS OF ROTATIONAL MOTION ABOUT A FIXED AXIS)

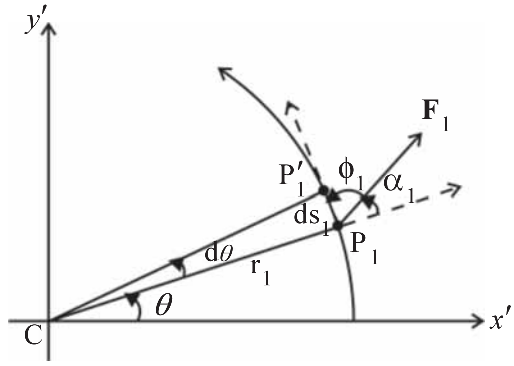
કોષ્ટક 7.2માં રેખીય ગતિ સાથે સંકળાયેલ રાશિઓ અને ચાકગતિમાં તેમની સાથે સામ્યતા ધરાવતી રાશિઓની યાદી આપેલ છે. આપણે આ પહેલાં પણ બે ગતિઓની શુદ્ધ ગતિકીની સરખામણી કરી છે. ઉપરાંત, આપણે જાણીએ છીએ કે ચાકગતિમાં જડત્વની ચાકમાત્રા અને ટૉર્ક એ રેખીય ગતિમાં તેને સમતુલ્ય એવા અનુક્રમે દ્રવ્યમાન અને બળની જેમ સમાન ભૂમિકા ભજવે છે. આને જોતાં આપણે ધારી શકીએ કે કોષ્ટકમાં દર્શાવેલ અન્ય સમતુલ્યો શું છે. દાખલા તરીકે, આપણે જાણીએ છીએ કે રેખીય ગતિમાં, થયેલ કાર્યને $F\,dx$ દ્વારા આપવામાં આવે છે. એક ચોક્કસ અક્ષને અનુલક્ષીને ચાકગતિમાં, તે $\tau\, d\theta$ હોવું જોઈએ, કારણ કે $dx \to d\theta$ અને $F \to \tau$ને સમતુલ્ય છે જે આપણે પહેલાથી જ જાણીએ છીએ. તેમ છતાં, જરૂરી છે કે આ સંગતતા નક્કર ગતિશીલ વિચારણાઓ પર સ્થાપિત થયેલ હોય. આપણે હવે આમ જ કરવા જઈ રહ્યા છીએ.

પ્રારંભ કરીએ તે પહેલાં, આપણે **એક સરળીકરણ નોંધીએ કે જે સ્થિર અક્ષને અનુલક્ષીને ચાકગતિના કિસ્સામાં ઉદ્ભવે છે.** અક્ષ સ્થિર હોવાથી આપણી ચર્ચામાં ટૉર્કના માત્ર જે ઘટકો, સ્થિર અક્ષની દિશામાં છે, તેને જ ધ્યાનમાં લેવાની જરૂર છે. ફક્ત આ ઘટકો જ પદાર્થને અક્ષની સાપેક્ષે ભ્રમણ કરાવવા માટે જવાબદાર છે. પરિભ્રમણના અક્ષને લંબ રહેલો ટૉર્કનો ઘટક અક્ષને તેના સ્થાનેથી ફેરવશે. આપણે વિશેષ રૂપે ધારીએ છીએ કે (બાહ્ય) ટૉર્કના આ લંબરૂપ ઘટકોની અસર નાબૂદ (સમતુલિત) કરવા માટે જરૂરી બળોની ચાકમાત્રા સર્જાશે, જેથી અક્ષની સ્થિર સ્થિતિ જળવાઈ રહેશે. ટૉર્કનાં લંબ ઘટકોને, તેથી ધ્યાનમાં લેવાની જરૂર નથી. આનો અર્થ એ થાય કે દૃઢ પદાર્થ પર ટૉર્કની આપણી ગણતરી માટે :

(1) આપણે માત્ર તે બળોને ધ્યાનમાં લેવાની જરૂર છે જે અક્ષના લંબ સમતલમાં આવેલા છે. જે બળો અક્ષને સમાંતર હોય છે તે અક્ષને લંબ ટૉર્ક આપશે અને તેમને ધ્યાનમાં લેવાની જરૂર નથી.

(2) આપણે સ્થાનસદિશોનાં માત્ર તે ઘટકોને જ ધ્યાનમાં લેવાની જરૂર છે જે અક્ષને લંબ છે. સ્થાનસદિશોનાં અક્ષની દિશામાનાં ઘટકો અક્ષને લંબરૂપે ટૉર્ક આપે છે અને તેને ધ્યાનમાં લેવાની જરૂર નથી.

ટૉર્ક દ્વારા કરવામાં આવેલું કાર્ય



આકૃતિ 7.34 એક સ્થિર અક્ષને અનુલક્ષીને ભ્રમણ કરતા એક દૃઢ પદાર્થ પર લાગતાં બળ $\mathbf{F}_1$ વડે થતું કાર્ય. આ કણ એ વર્તુળાકાર પથ બનાવે છે કે જેનું કેન્દ્ર C એ અક્ષ પર છે. ચાપ $P_1P'_1$ (ds_1) એ આ કણનું સ્થાનાંતર આપે છે.

આકૃતિ 7.34 એ એક સ્થિર અક્ષ, જેને Z-અક્ષ તરીકે લેવામાં આવે છે (પૃષ્ઠના સમતલને લંબ, જુઓ આકૃતિ 7.33), તેને અનુલક્ષીને ચાકગતિ કરતાં એક દૃઢ પદાર્થનો આડછેદ બતાવે છે. ઉપર જણાવ્યા મુજબ આપણે માત્ર તે જ બળોને ધ્યાનમાં લેવાની જરૂર છે જે અક્ષના લંબ સમતલમાં હોય. ધારો કે $\mathbf{F}_1$ એ આવું કોઈ એક બળ છે, જે દર્શાવ્યા પ્રમાણે આ પદાર્થના બિંદુ P_1 પરના કણ પર લાગે છે જેની કાર્યરેખાએ અક્ષના લંબ સમતલમાં છે. સરળતા ખાતર આપણે તેને $X'-Y'$ સમતલ કહીશું. (તે પૃષ્ઠના સમતલ સાથે સંપાતી છે.) P_1 પરનો કણ એ r_1 ત્રિજ્યાનો વર્તુળાકાર પથ બનાવે છે કે જેનું કેન્દ્ર C એ અક્ષ પર છે; $CP_1 = r_1$

આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે Δt સમયમાં આ બિંદુ, P'_1 પર પહોંચે છે. આમ આ કણનું સ્થાનાંતર ds_1નું માન $ds_1 = r_1 d\theta$ અને વર્તુળાકાર પથને P_1 પરના સ્પર્શકની દિશામાં છે. અહીં $d\theta$ એ આ કણનું કોણીય સ્થાનાંતર $d\theta = \angle P_1CP_1'$ છે. કણ ઉપર આ બળ વડે થતું કાર્ય.

$dW_1 = \mathbf{F}_1 . \mathbf{ds}_1 = F_1 ds_1 \cos\phi_1 = F_1(r_1 d\theta) \sin\alpha_1$ છે, જ્યાં ϕ_1 એ $\mathbf{F}_1$ અને P_1 આગળના સ્પર્શક વચ્ચેનો ખૂણો,

કોષ્ટક 7.2 સ્થાનાંતરીય ગતિ અને ચાકગતિની સરખામણી

	રેખીય ગતિ (Linear Motion)	સ્થિર અક્ષને અનુલક્ષીને ચાકગતિ (Rotational Motion about a Fixed Axis)
1.	સ્થાનાંતર (Displacement) x	કોણીય સ્થાનાંતર (Angular displacement) θ
2.	વેગ (Velocity) $\upsilon = dx/dt$	કોણીય વેગ (Angular velocity) $\omega = d\theta/dt$
3.	પ્રવેગ (Acceleration) $a = d\upsilon/dt$	કોણીય પ્રવેગ (Angular acceleration) $\alpha = d\omega/dt$
4.	દ્રવ્યમાન (Mass) M	જડત્વની ચાકમાત્રા (Moment of inertia) I
5.	બળ (Force) $F = Ma$	ટૉર્ક (બળની ચાકમાત્રા) (Torque) $\tau = I\alpha$
6.	કાર્ય (Work) $dW = F\ ds$	કાર્ય (Work) $W = \tau d\theta$
7.	ગતિઊર્જા (Kinetic energy) $K = M\upsilon^2/2$	ગતિઊર્જા (Kinetic energy) $K = I\omega^2/2$
8.	પાવર (Power) $P = F\ \upsilon$	પાવર (Power) $P = \tau\omega$
9.	રેખીય વેગમાન (Linear momentum) $p = M\upsilon$	કોણીય વેગમાન (Angular momentum) $L = I\omega$

α_1 એ $\mathbf{F}_1$ અને ત્રિજ્યા સદિશ $\mathbf{OP}_1$ વચ્ચેનો ખૂણો છે; $\phi_1 + \alpha_1 = 90°$.

ઉદ્‌ગમબિંદુની સાપેક્ષે $\mathbf{F}_1$ને કારણે ટૉર્ક $\mathbf{OP}_1 \times \mathbf{F}_1$ છે. હવે $\mathbf{OP}_1 = \mathbf{OC} + \mathbf{CP}_1$ (આકૃતિ 7.17 (b)નો સંદર્ભ લો.) કારણ કે $\mathbf{OC}$ એ અક્ષની દિશામાં છે, તેનાથી પરિણમતા ટૉર્કને આપણી ચર્ચામાંથી બાકાત રાખવામાં આવે છે. $\mathbf{F}_1$ના કારણે અસરકારક ટૉર્ક $\boldsymbol{\tau}_1 = \mathbf{CP}_1 \times \mathbf{F}_1$ છે; તે પરિભ્રમણ અક્ષની દિશામાં છે અને તેનું માન $\tau_1 = r_1 F_1 \sin\alpha_1$ છે. તેથી,

$$dW_1 = \tau_1 d\theta$$

જો પદાર્થ પર એક કરતાં વધુ બળો કાર્યરત હોય, તો તે બધાં દ્વારા કરવામાં આવેલ કાર્યને ઉમેરતાં પદાર્થ પર થતું કુલ કાર્ય મળે છે. વિવિધ બળોને કારણે લાગતાં ટૉર્કના માનને τ_1, τ_2, ... વગેરે દ્વારા દર્શાવતાં,

$$dW = (\tau_1 + \tau_2 + ...)d\theta$$

યાદ રાખો કે, ટૉર્કને ઉત્પન્ન કરતાં બળો અલગ અલગ કણો પર લાગે છે, પરંતુ કોણીય સ્થાનાંતરણ $d\theta$ એ બધા જ કણો માટે સમાન છે. સ્થિર અક્ષને સમાંતર બધા ટૉર્ક ગણેલા હોવાથી કુલ ટૉર્ક τનું માન એ દરેક ટૉર્કના માનનો બૈજિક સરવાળો છે, એટલે કે, $\tau = \tau_1 + \tau_2 + ...$

તેથી, આપણને

$$dW = \tau d\theta \qquad (7.41)$$

મળે છે.

આ સૂત્ર સ્થિર અક્ષને અનુલક્ષીને ચાકગતિ કરતાં પદાર્થ પર લાગતાં કુલ (બાહ્ય) ટૉર્ક τ વડે થતું કાર્ય આપે છે. જે રેખીય ગતિના સમીકરણ $dW = F\ ds$ સાથે સામ્યતા ધરાવે છે તે સ્વાભાવિક છે.

સમીકરણ (7.41)ને બંને બાજુએ dt દ્વારા ભાગતાં,

$$P = \frac{dW}{dt} = \tau\frac{d\theta}{dt} = \tau\omega$$

અથવા $P = \tau\omega$ (7.42)

આ તાત્ક્ષણિક પાવર છે. રેખીય ગતિના કિસ્સામાં પાવર માટેના સૂત્ર $P = Fv$ સાથે સ્થિર અક્ષને અનુલક્ષીને ચાકગતિના કિસ્સામાં પાવર માટેના આ સૂત્રની તુલના કરો.

એક સંપૂર્ણ દૃઢ પદાર્થમાં કોઈ આંતરિક ગતિ નથી. આથી બાહ્ય ટૉર્ક દ્વારા કરવામાં આવતું કાર્ય વ્યય પામતું નથી અને તેથી પદાર્થની ગતિઊર્જા વધારવામાં વપરાય છે. પદાર્થ પર જે દરથી કાર્ય થાય છે તેને સમીકરણ (7.42) દ્વારા આપવામાં આવે છે. આને જે દરથી ગતિઊર્જા વધે છે તેની સાથે સરખાવી શકાય છે. ગતિઊર્જાનો વૃદ્ધિનો દર

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{I\omega^2}{2}\right) = I\frac{(2\omega)}{2}\frac{d\omega}{dt}$$

આપણે ધાર્યું છે કે જડત્વની ચાકમાત્રા સમય સાથે બદલાતી નથી. આનો અર્થ એ છે કે પદાર્થનું દળ બદલાતું નથી. પદાર્થ દૃઢ જ રહે છે અને અક્ષ પણ પદાર્થના સંદર્ભમાં તેનું સ્થાન બદલતી નથી.

$\alpha = d\omega/dt$ હોવાથી,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{I\omega^2}{2}\right) = I\ \omega\ \alpha \text{ મળે છે.}$$

કાર્ય થવાનો દર અને ગતિઊર્જામાં વધારાના દરને સરખાવતાં,

$$\tau\omega = I\ \omega\ \alpha$$

$$\tau = I\alpha \qquad (7.43)$$

સમીકરણ (7.43) એ રેખીય ગતિ માટેના ન્યૂટનના બીજા નિયમ જેવું હોવાથી તેને સંજ્ઞા સ્વરૂપે

$F = ma$ તરીકે લખાય છે,

જેમ બળ પ્રવેગ ઉત્પન્ન કરે છે, તેમ ટૉર્ક પદાર્થમાં કોણીય પ્રવેગ ઉત્પન્ન કરે છે. કોણીય પ્રવેગ એ લાગુ પડતા ટૉર્કના સમપ્રમાણમાં અને તે પદાર્થના જડત્વની ચાકમાત્રાના વ્યસ્ત પ્રમાણમાં છે. સમીકરણ (7.43)ને સ્થિર અક્ષને અનુલક્ષીને ચાકગતિ માટે ન્યૂટનનો બીજો નિયમ કહી શકાય છે.

▶ *ઉદાહરણ 7.15* અવગણ્ય દ્રવ્યમાનની એક દોરીને 20 kg દળ અને 20 cm ત્રિજ્યાના ફ્લાયવ્હીલની કોર (rim) પર વિંટાળેલ છે. આકૃતિ 7.35માં બતાવ્યા પ્રમાણે દોરી પર 25 N જેટલું અચળ ખેંચાણબળ (pull) લગાડેલ છે. આ ફ્લાયવ્હીલ ઘર્ષણરહિત બેરિંગ્સ સાથે એક સમક્ષિતિજ અક્ષ પર જડેલ છે.

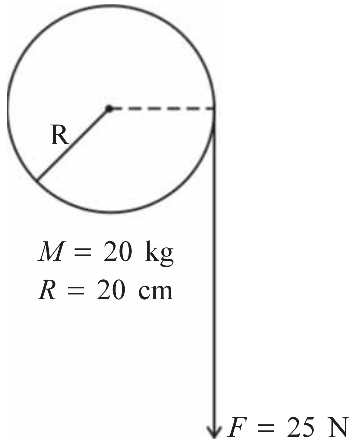
(a) વ્હીલના કોણીય પ્રવેગની ગણતરી કરો.

(b) જ્યારે દોરી 2m ખૂલશે ત્યાં સુધી ખેંચાણબળ (pull) દ્વારા કરવામાં આવેલ કાર્ય શોધો.

(c) આ બિંદુ એ વ્હીલની ગતિઊર્જા પણ શોધો. વ્હીલ તેની સ્થિર સ્થિતિમાંથી ગતિ શરૂ કરે છે, તેમ ધારો.

(d) વિભાગો (b) અને (c)ના જવાબોની સરખામણી કરો.

ઉકેલ



આકૃતિ 7.35

(a) આપણે $I\alpha = \tau$નો ઉપયોગ કરીશું.

ટૉર્ક $\tau = FR$

$= 25 \times 0.20$ Nm (કારણ કે $R = 0.20$ m)

$= 5.0$ Nm

I = ફ્લાયવ્હીલની તેની અક્ષને અનુલક્ષીને જડત્વની ચાકમાત્રા

$$(\text{M.I.}) = \frac{MR^2}{2}$$

$$= \frac{20.0 \times (0.2)^2}{2} = 0.4 \text{ kg m}^2$$

α = કોણીય પ્રવેગ

$= 5.0$ N m/0.4 kg m^2 = 12.5 s^{-2}

(b) દોરી 2m ઉકેલાતાં, ખેંચાણબળ (pull) વડે થતું કાર્ય

$= 25 \text{ N} \times 2\text{m} = 50$ J

(c) ધારો કે, ω અંતિમ કોણીય વેગ છે.

ગતિઊર્જાનો વધારો $= \frac{1}{2}I\omega^2$

કારણ કે વ્હીલ સ્થિર સ્થિતિમાંથી ગતિ શરૂ કરે છે. હવે,

$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta, \quad \omega_0 = 0$

કોણીય સ્થાનાંતર θ = ઉકેલાયેલ દોરીની લંબાઈ / વ્હીલની ત્રિજ્યા

$= 2\text{m}/0.2\text{m} = 10$ rad

$\omega^2 = 2 \times 12.5 \times 10.0 = 250(\text{rad/s})^2$

ગતિઊર્જામાં વધારો (પ્રાપ્ત કરેલી ગતિઊર્જા)

$= \frac{1}{2} \times 0.4 \times 250 = 50$ J

(d) આ બધાં જવાબો એક સમાન જ છે. એટલે કે વ્હીલે પ્રાપ્ત કરેલી ગતિઊર્જા = બળે કરેલું કાર્ય. ઘર્ષણને લીધે કોઈ ઊર્જાનો વ્યય થતો નથી. ◀

7.13 સ્થિર અક્ષને અનુલક્ષીને ચાકગતિના કિસ્સામાં કોણીય વેગમાન (ANGULAR MOMENTUM IN CASE OF ROTATION ABOUT A FIXED AXIS)

કણોના તંત્રના કોણીય વેગમાનનો આપણે પરિચ્છેદ 7.7માં અભ્યાસ કર્યો છે. તે પરથી આપણે એ જાણીએ છીએ કે, એક બિંદુને અનુલક્ષીને કણોના તંત્રના કોણીય વેગમાનનો સમય દર એ તે જ બિંદુને અનુલક્ષીને લેવામાં આવેલ તંત્ર પરના કુલ બાહ્ય ટૉર્ક જેટલો છે. જ્યારે કુલ બાહ્ય ટૉર્ક શૂન્ય હોય ત્યારે તે તંત્રનું કુલ કોણીય વેગમાન સંરક્ષિત (અચળ) છે.

હવે આપણે એક સ્થિર અક્ષને અનુલક્ષીને ચાકગતિના વિશેષ કિસ્સામાં કોણીય વેગમાનનો અભ્યાસ કરવા માગીએ છીએ. તંત્રના કુલ કોણીય વેગમાન માટેનું વ્યાપક સમીકરણ

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i \text{ છે.} \qquad (7.25\text{b})$$

આપણે સૌપ્રથમ ભ્રમણ કરતા દૃઢ પદાર્થના કોઈ એક લાક્ષણિક કણના કોણીય વેગમાનને ધ્યાનમાં લઈશું. ત્યાર બાદ આપણે સમગ્ર પદાર્થનું **L** મેળવવા માટે પ્રત્યેક કણોના યોગદાનનો સરવાળો કરીશું.

કોઈ એક લાક્ષણિક કણ માટે $\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$. છેલ્લા પરિચ્છેદમાં જે જોયું તે $\mathbf{r} = \mathbf{OP} = \mathbf{OC} + \mathbf{CP}$ (આકૃતિ 7.17(b)) $\mathbf{p} = m\,\boldsymbol{\upsilon}$ સાથે

$$\mathbf{l} = (\mathbf{OC} \times m\,\boldsymbol{\upsilon}) + (\mathbf{CP} \times m\,\boldsymbol{\upsilon})$$

P પરના કણના રેખીય વેગ $\boldsymbol{\upsilon}$નું માન $\upsilon = \omega\, r_\perp$ છે, જ્યાં $r_\perp$ એ CPની લંબાઈ કે કણનું પરિભ્રમણ અક્ષથી લંબઅંતર છે. વધુમાં, $\boldsymbol{\upsilon}$ એ આ કણ જે વર્તુળ બનાવે છે તેને P પરના સ્પર્શકની દિશામાં છે. જમણા હાથના નિયમનો ઉપયોગ કરીને એ ચકાસી શકાય છે કે, $\mathbf{CP} \times \boldsymbol{\upsilon}$ એ સ્થિર અક્ષને સમાંતર છે. $\hat{\mathbf{k}}$ એ સ્થિર અક્ષને (Z-અક્ષને પસંદ કરેલ છે.) અનુલક્ષીને એકમ સદિશ છે. આમ,

$$\mathbf{CP} \times m\boldsymbol{\upsilon} = r_\perp (m\upsilon)\hat{\mathbf{k}}$$
$$= m r_\perp^2 \omega \hat{\mathbf{k}} \quad (\text{કારણ કે } v = \omega\, r_\perp)$$

આ જ રીતે આપણે ચકાસી શકીએ છીએ કે $\mathbf{OC} \times \boldsymbol{\upsilon}$ એ સ્થિર અક્ષને લંબ છે. સ્થિર અક્ષ (એટલે કે z-અક્ષ)ને અનુલક્ષીને $\mathbf{l}$ના ઘટકને $\mathbf{l}_z$ વડે દર્શાવતાં,

$$\mathbf{l}_z = \mathbf{CP} \times m\,\boldsymbol{\upsilon} = m r_\perp^2 \omega \hat{\mathbf{k}}$$

અને $\mathbf{l} = \mathbf{l}_z + \mathrm{OC} \times m\,\boldsymbol{\upsilon}$

આપણે એ નોંધવું રહ્યું કે $\mathbf{l}_z$ એ સ્થિર અક્ષને સમાંતર છે પણ $\mathbf{l}$ તેને સમાંતર નથી. વ્યાપક રૂપે કોઈ પણ કણ માટે કોણીય વેગમાન એ પરિભ્રમણ અક્ષની દિશામાં નથી હોતું, એટલે કે કોઈ કણ માટે $\mathbf{l}$ અને $\boldsymbol{\omega}$ એ સમાંતર જ હોય તે જરૂરી નથી. રેખીય ગતિમાં આને સમતુલ્ય તથ્યની સાથે સરખામણી કરો. કોઈ પણ કણ માટે $\mathbf{p}$ અને $\boldsymbol{\upsilon}$ એ હંમેશાં એકબીજાને સમાંતર જ હોય છે.

સમગ્ર દૃઢ પદાર્થનું કુલ કોણીય વેગમાન ગણવા માટે, આપણે આ પદાર્થના દરેક કણના ફાળાનો સરવાળો કરીશું.

આમ, $\mathbf{L} = \sum \mathbf{l}_i = \sum \mathbf{l}_{iz} + \sum \mathbf{OC}_i \times m_i \boldsymbol{\upsilon}_i$

આપણે, $\mathbf{L}$ના z-અક્ષને લંબ અને z-અક્ષની દિશામાંનાં ઘટકોને અનુક્રમે $\mathbf{L}_\perp$ અને $\mathbf{L}_z$ વડે દર્શાવીશું.

$$\mathbf{L}_\perp = \sum \mathbf{OC}_i \times m_i \boldsymbol{\upsilon}_i \qquad (7.44a)$$

જ્યાં, m_i અને $\boldsymbol{\upsilon}_i$એ i માં કણનું અનુક્રમે દળ અને વેગ છે તથા $\mathrm{C_i}$ એ કણ દ્વારા રચાતાં વર્તુળનું કેન્દ્ર છે.

$$\text{અને } \mathbf{L}_z = \sum \mathbf{l}_{iz} = \left(\sum_i m_i r_i^2\right)\omega\hat{\mathbf{k}}$$

$$\text{અથવા } \mathbf{L}_z = I\omega\hat{\mathbf{k}} \qquad (7.44b)$$

છેલ્લું પદ આવું મળે છે કારણ કે iમા કણનું અક્ષથી લંબઅંતર એ r_i છે અને વ્યાખ્યા મુજબ પરિભ્રમણ અક્ષને અનુલક્ષીને પદાર્થની જડત્વની ચાકમાત્રા $I = \sum m_i r_i^2$ છે.

$$\text{નોંધો, } \mathbf{L} = \mathbf{L}_z + \mathbf{L}_\perp \qquad (7.44c)$$

આ પ્રકરણમાં આપણે મુખ્યત્વે જે દૃઢ પદાર્થોનો વિચાર કર્યો છે તેઓ પરિભ્રમણ અક્ષને અનુલક્ષીને સંમિત છે. એટલે કે, ભ્રમણ અક્ષ તેમની કોઈ એક સંમિતિ અક્ષ છે. આવા પદાર્થો માટે કોઈ એક આપેલ OC_i માટે $\boldsymbol{\upsilon}_i$ વેગ ધરાવતા દરેક કણ માટેના, એક બીજો $-\boldsymbol{\upsilon}_i$ વેગ ધરાવતો કણ હોય છે જે C_i કેન્દ્રવાળા વર્તુળ પર વ્યાસના સામેના છેડે આવેલો હોય છે. $\mathbf{L}_\perp$માં આવી જોડીઓનો કુલ ફાળો શૂન્ય હશે અને પરિણામે સંમિત પદાર્થો માટે $\mathbf{L}_\perp$ શૂન્ય છે અને તેથી

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_z = I\omega\hat{\mathbf{k}} \qquad (7.44d)$$

જે પદાર્થો ભ્રમણ અક્ષને અનુલક્ષીને સંમિત નથી હોતા તેમને માટે $\mathbf{L}$ એ $\mathbf{L}_z$ જેટલા મૂલ્યના સમાન હોતા નથી અને તેથી $\mathbf{L}$ ભ્રમણ અક્ષને સમાંતર હોતા નથી.

કોષ્ટક 7.1નો સંદર્ભ લઈ તમે કહી શકશો કે કયા કિસ્સાઓમાં $\mathbf{L} = \mathbf{L}_z$ લાગુ પડશે નહિ ?

ચાલો સમીકરણ (7.44b)નું વિકલન કરીએ. $\hat{\mathbf{k}}$ એ નિશ્ચિત (અચળ) સદિશ હોવાથી, આપણને

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{L}_z) = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(I\omega)\right)\hat{\mathbf{k}} \text{ મળે.}$$

હવે, સમીકરણ (7.28b) જણાવે છે કે,

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{L}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\tau}$$

છેલ્લા પરિચ્છેદમાં આપણે જોયું છે કે, જ્યારે આપણે નિશ્ચિત અક્ષની આસપાસ ચાકગતિની ચર્ચા કરીએ ત્યારે બાહ્ય ટૉર્કના માત્ર જે ઘટકો ભ્રમણ અક્ષને સમાંતર હોય તેમને જ ધ્યાનમાં લેવાની જરૂર છે. એટલે કે આપણે $\boldsymbol{\tau} = \tau\hat{\mathbf{k}}$ લઈ શકીએ.

$\mathbf{L} = \mathbf{L}_z + \mathbf{L}_\perp$ હોવાથી અને $\mathbf{L}_z$ (સદિશ $\hat{\mathbf{k}}$)ની દિશા નિશ્ચિત હોવાથી, સ્થિર ભ્રમણ અક્ષની આસપાસ ચાકગતિ માટે

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{L}_z}{\mathrm{d}t} = \tau\hat{\mathbf{k}} \qquad (7.45a)$$

$$\text{અને } \frac{\mathrm{d}\mathbf{L}_\perp}{\mathrm{d}t} = 0 \qquad (7.45b)$$

આમ, સ્થિર ભ્રમણ અક્ષને અનુલક્ષીને ચાકગતિ માટે કોણીય વેગમાનનો સ્થિર અક્ષને લંબ ઘટક અચળ રહે છે.

$\mathbf{L}_z = I\omega\hat{\mathbf{k}}$ હોવાથી, સમીકરણ (7.45a) પરથી

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(I\omega) = \tau \qquad (7.45c)$$

જો જડત્વની ચાકમાત્રા સમય સાથે બદલાતી ન હોય તો,

$$\frac{d}{dt}(I\omega) = I\frac{d\omega}{dt} = I\alpha$$

અને આપણને સમીકરણ (7.45c) પરથી

$\tau = I\alpha$ મળે છે. (7.43)

આપણે આ સમીકરણ કાર્ય-ગતિઊર્જાના માર્ગે અગાઉ મેળવેલું જ છે.

7.13.1 કોણીય વેગમાનનું સંરક્ષણ (Conservation of angular momentum)

આપણે હવે એ સ્થિતિમાં છીએ કે કોઈ એક સ્થિર અક્ષને અનુલક્ષીને ચાકગતિના સંદર્ભમાં કોણીય વેગમાનના સંરક્ષણના સિદ્ધાંતનું પુનરાવર્તન કરી શકીએ. સમીકરણ (7.45c) પરથી, જો બાહ્ય ટૉર્ક શૂન્ય હોય તો,

$L_z = I\omega =$ અચળ (7.46)

સંમિત પદાર્થ માટે સમીકરણ (7.44d) પરથી L_zને સ્થાને L મૂકી શકાય છે. (L અને L_z અનુક્રમે $\mathbf{L}$ અને $\mathbf{L}_z$ના માન છે.)

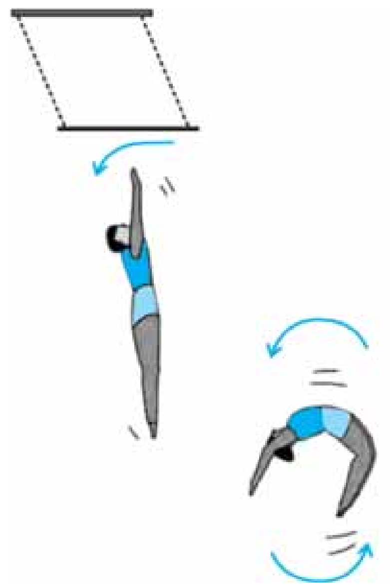
સમીકરણ (7.29a), જે કણોના તંત્રના કોણીય વેગમાનના સંરક્ષણના વ્યાપક નિયમને વ્યક્ત કરે છે. તેનું આ સ્થિર અક્ષને અનુલક્ષીને ચાકગતિ માટે વ્યાપક સ્વરૂપ છે. સમીકરણ (7.46) એ આપણા દૈનિક જીવનમાં આવતી ઘણી પરિસ્થિતિઓને લાગુ પડે છે. તમે તમારા મિત્ર સાથે આ પ્રયોગ કરી શકો છો. તમારા હાથ વાળીને અને પગ નીચે ટેકવેલ ન હોય એટલે કે, જમીનથી દૂર હોય તે રીતે, ભ્રમણ કરી શકતી ખુરશી (Swivel Chair) પર બેસી જાઓ. તમારા મિત્રને આ ખુરશી ઝડપથી ફેરવવા માટે કહો. જ્યારે ખુરશી પર્યાપ્ત કોણીય ઝડપે ફરતી હોય ત્યારે તમારા હાથોને સમક્ષિતિજ ફેલાવો. શું થયું ? તમારી કોણીય ઝડપમાં ઘટાડો થાય છે. જો તમે તમારા હાથોને તમારા શરીરની નજીક લાવો, તો કોણીય ઝડપ ફરીથી વધે છે. આ એવી પરિસ્થિતિ છે કે જ્યાં કોણીય વેગમાનના સંરક્ષણનો સિદ્ધાંત લાગુ પડે છે. જો ચાકગતિની પ્રક્રિયામાં ઘર્ષણ અવગણવામાં આવે, તો ખુરશીના પરિભ્રમણની અક્ષને અનુલક્ષીને કોઈ બાહ્ય ટૉર્ક નથી અને તેથી $I\omega$ એ અચળ રહે છે. ફેલાયેલા હાથોએ પરિભ્રમણના અક્ષને અનુલક્ષીને Iમાં વધારો કરે છે. પરિણામે કોણીય ઝડપ ω ઘટે છે. હાથને શરીરની નજીક લાવવાથી વિરુદ્ધ અસર જોવા મળે છે.

કોઈ સર્કસમાં નટ કલાકાર (ઍક્રોબેટ) અને મરજીવા આ સિદ્ધાંતનો લાભ લે છે. ઉપરાંત, સ્કેટર અને શાસ્ત્રીય, ભારતીય અથવા એક પગના અંગૂઠા પર ચક્રીય પશ્ચિમી નૃત્ય કરતા નૃત્યકારોના પ્રદર્શનમાં આ સિદ્ધાંત પરની તેમની 'નિપુણતા' જોવા મળે છે. શું તમે આ સમજાવી શકો ?

7.14 ગબડતી ગતિ (ROLLING MOTION)

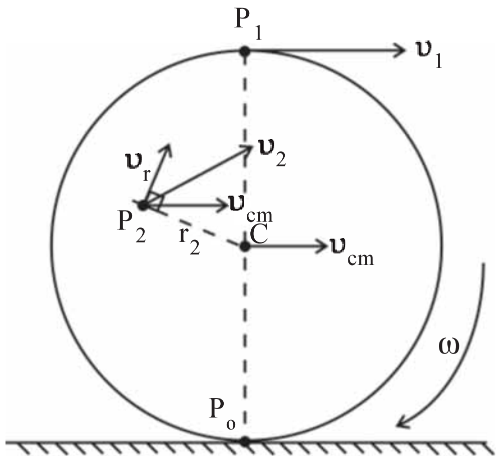
રોજિંદા જીવનમાં જોવા મળતી બહુ સામાન્ય ગતિઓમાંની એક એ ગબડતા પદાર્થની ગતિ છે. પરિવહનમાં વપરાતાં બધાં પૈડાં (Wheels)ની ગતિ એ ગબડતા પદાર્થની ગતિ છે. ખાસ કરીને આપણે એક તક્તીથી આરંભ કરીશું, પરંતુ પરિણામ એક સમતલ સપાટી પર ગબડતા કોઈ પણ પદાર્થને લાગુ પડશે. આપણે એવું ધારી લઈશું કે તક્તી સરક્યા (લપસ્યા-Slipping) વિના ગબડે છે. આનો અર્થ એ છે કે કોઈ પણ ક્ષણે, સપાટી સાથે સંપર્કમાં રહેલું તક્તીનું તળિયું સ્થિર રહે છે.

આકૃતિ. 7.36 (a) કોણીય વેગમાનના સંરક્ષણનું નિદર્શન. એક છોકરી રીવોલ્વિંગ ખુરશી પર બેસે છે અને તેના હાથોને સમક્ષિતિજ લંબાવે છે/તેના હાથોને શરીરની નજીક લાવે છે.



આકૃતિ 7.36 (b) એક નટ કલાકાર (Acrobat) તેના કાર્યમાં કોણીય વેગમાનના સંરક્ષણના સિદ્ધાંતને કામે લગાડે છે.

અગાઉ આપણે નોંધ્યું છે કે, ગબડવાની ગતિ એ ચાકગતિ અને સ્થાનાંતરણ ગતિનું સંયોજન છે. આપણે એ પણ જાણીએ છીએ કે કણોના તંત્રની સ્થાનાંતરણ ગતિ તેના દ્રવ્યમાન કેન્દ્રની ગતિ છે.



આકૃતિ **7.37** *સમતલ સપાટી પર તક્તીની (સરક્યા વિના) ગબડવાની ગતિ. નોંધો કે કોઈ પણ ક્ષણે તક્તીનું સપાટી સાથેનું સંપર્ક બિંદુ P_o સ્થિર રહે છે. તક્તીનું દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર υ_{cm} વેગથી ગતિ કરે છે. તક્તી Cમાંથી પસાર થતી તેની અક્ષને અનુલક્ષીને કોણીય વેગ ωથી ભ્રમણ કરે છે. $\upsilon_{cm} = R\omega$, જ્યાં R એ તક્તીની ત્રિજ્યા છે.*

ધારો કે, υ_{cm} એ દ્રવ્યમાન કેન્દ્રનો વેગ અને તેથી તક્તીની સ્થાનાંતરણ ગતિનો વેગ છે. ગબડતી તક્તીનું દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર તેના ભૌમિતિક કેન્દ્ર C પર હોવાથી (આકૃતિ 7.37)માં υ_{cm} એ Cનો વેગ છે. તે સમતલ સપાટીને સમાંતર છે. તક્તીની ચાકગતિ Cમાંથી પસાર થતી સંમિતિ અક્ષની આસપાસ છે. તક્તીના P_o, P_1 અને P_2 જેવા કોઈ પણ બિંદુનો વેગ બે ભાગનો બનેલો છે. એક સ્થાનાંતરણ વેગ υ_{cm} અને બીજો ચાકગતિને લીધે રેખીય વેગ υ_r . υ_rનું માન $\upsilon_r = r\omega$, જ્યાં ω એ તક્તીની અક્ષને અનુલક્ષીને ચાકગતિનો કોણીય વેગ છે અને r તે બિંદુનું અક્ષથી (એટલે કે Cથી) અંતર છે. વેગ υ_r આપેલ બિંદુના Cને અનુલક્ષીને સ્થાનસદિશને લંબ છે. આકૃતિ 7.37માં P_2 બિંદુનો વેગ υ_2 અને તેનાં ઘટકો υ_r અને υ_{cm} દર્શાવ્યા છે. અહીં υ_r એ CP_2ને લંબ છે. એવું સહેલાઈથી દર્શાવી શકાય કે υ_2 એ P_oP_2 રેખાને લંબ છે. આથી P_oમાંથી પસાર થતી અને ωને સમાંતર રેખાને તાત્ક્ષણિક ભ્રમણાક્ષ કહે છે.

P_o પર ચાકગતિને લીધે રેખીય વેગ υ_r સ્થાનાંતર વેગ υ_{cm}ની બરાબર વિરુદ્ધ દિશામાં છે. વળી, અત્રે υ_rનું માન $R\omega$ છે. જ્યાં R એ તક્તીની ત્રિજ્યા છે. P_o ક્ષણિક રીતે સ્થિર રહે તે માટે જરૂરી છે કે $\upsilon_{cm} = R\omega$ આમ તક્તી માટે સરક્યા વિના ગબડવાની શરત

$$\upsilon_{cm} = R\omega \text{ છે.} \tag{7.47}$$

સાહજિક રીતે જ આનો અર્થ એ થાય કે તક્તીની ટોચ પરના બિંદુ P_1ના વેગ υ_1નું માન $\upsilon_{cm} + R\omega$ અથવા $2\,\upsilon_{cm}$ છે અને સમતલ સપાટીને સમાંતર છે. સમીકરણ (7.47) વડે મળતી શરત દરેક ગબડતા પદાર્થને લાગુ પડે છે.

7.14.1 ગબડતી ગતિની ગતિઊર્જા (Kinetic Energy of Rolling Motion)

આપણું આગામી કાર્ય ગબડતા પદાર્થની ગતિઊર્જા માટેનું સૂત્ર પ્રાપ્ત કરવાનું છે. ગબડતા પદાર્થની ગતિઊર્જાને સ્થાનાંતર ગતિઊર્જા અને ભ્રમણની ગતિઊર્જામાં અલગ કરી શકાય છે. આ કણોના એવા તંત્ર માટે વ્યાપક પરિણામનો વિશિષ્ટ કિસ્સો છે, જે મુજબ કણોના તંત્રની ગતિઊર્જા (K)ને દ્રવ્યમાન કેન્દ્રની ગતિઊર્જા (સ્થાનાંતરણ) ($MV^2/2$) અને કણોના તંત્રના દ્રવ્યમાન કેન્દ્રને અનુલક્ષીને ચાકગતિની ઊર્જા (K')માં અલગ કરી શકાય છે. આમ,

$$K = K' + MV^2/2 \tag{7.48}$$

આપણે આ વ્યાપક પરિણામ ધારી લઈએ છીએ (સ્વાધ્યાય 7.31 જુઓ) અને ગબડતી ગતિના કિસ્સામાં તેને લાગુ કરીએ છીએ. આપણા સંકેતમાં, ગબડતા પદાર્થ માટે, દ્રવ્યમાન કેન્દ્રની ગતિઊર્જા એટલે કે સ્થાનાંતરની ગતિઊર્જાએ $m\upsilon_{cm}^2/2$ છે. જ્યાં m એ પદાર્થનું દળ છે અને υ_{cm} એ દ્રવ્યમાન કેન્દ્રનો વેગ છે. દ્રવ્યમાન કેન્દ્રને અનુલક્ષીને ગબડતા પદાર્થની ગતિ એ ચાકગતિ હોવાથી K' એ પદાર્થની ચાકગતિની ગતિઊર્જા રજૂ કરે છે. $K' = I\omega^2/2$ જ્યાં I એ સુયોગ્ય અક્ષ જે ગબડતા પદાર્થની સંમિત અક્ષ છે. તેને અનુલક્ષીને જડત્વની ચાકમાત્રા છે. આમ, ગબડતા પદાર્થની ગતિઊર્જાને નીચેના સમીકરણ દ્વારા આપવામાં આવે છે :

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}m\upsilon_{cm}^2 \tag{7.49a}$$

$I = mk^2$ જ્યાં k = પદાર્થની ચક્રાવર્તનની ત્રિજ્યા અને $v_{cm} = R\omega$ મૂકતાં,

$$K = \frac{1}{2}\frac{mk^2\upsilon_{cm}^2}{R^2} + \frac{1}{2}m\upsilon_{cm}^2$$

$$\text{અથવા } K = \frac{1}{2}m\upsilon_{cm}^2\left(1+\frac{k^2}{R^2}\right) \tag{7.49b}$$

સમીકરણ (7.49b) એ કોઈ પણ ગબડતા પદાર્થ (રોલિંગ બોડી) પર લાગુ પાડી શકાય છે. જેમકે તક્તી, નળાકાર, વલય અથવા ગોળો.

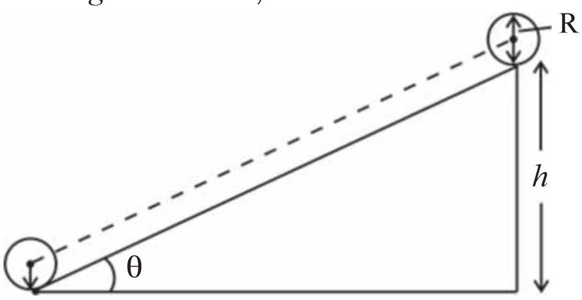
ઉદાહરણ 7.16 ત્રણ પદાર્થો, એક રિંગ, એક ઘન નળાકાર અને એક ઘન ગોળો એક જ ઢળતાં પાટિયા (Inclined Plane) પર સરક્યા વગર નીચે તરફ ગબડે છે. તેઓ સ્થિર અવસ્થામાંથી ગતિ શરૂ કરે છે. બધા જ પદાર્થોની ત્રિજ્યાઓ એક સમાન છે. કયો પદાર્થ મહત્તમ વેગ સાથે જમીન પર પહોંચશે ?

ઉકેલ આપણે ગબડતા પદાર્થ માટે ઊર્જા-સંરક્ષણ માની લઈએ છીએ, એટલે કે ઘર્ષણ વગેરેને લીધે ઊર્જામાં કોઈ વ્યય થતો નથી. આથી ઢળતા પાટિયા પરથી નીચે ગબડતા પદાર્થ દ્વારા ગુમાવાતી સ્થિતિઊર્જા (= mgh) તેની ગતિઊર્જામાં થતાં વધારા બરાબર થવી જ જોઈએ. (આકૃતિ 7.38 જુઓ.) પદાર્થ સ્થિર સ્થિતિથી ગતિ શરૂ કરે છે તેથી ગતિઊર્જામાં થતો વધારો એ પદાર્થની અંતિમ ગતિઊર્જા બરાબર છે. તેથી

સમીકરણ (7.49b) પરથી,

$$K = \frac{1}{2}m\upsilon^2\left(1+\frac{k^2}{R^2}\right)$$

જ્યાં, υ એ પદાર્થનો (દ્રવ્યમાન કેન્દ્રનો) અંતિમ વેગ છે. K અને mghને સરખાવતાં,



આકૃતિ 7.38

$$mgh = \frac{1}{2}m\upsilon^2\left(1+\frac{k^2}{R^2}\right)$$

$$\text{અથવા } \upsilon^2 = \left(\frac{2gh}{1+k^2/R^2}\right)$$

નોંધો કે υનું મૂલ્ય એ ગબડતા પદાર્થના દ્રવ્યમાન પર આધાર રાખતો નથી.

રિંગ માટે, $k^2 = R^2$

$$\upsilon_{ring} = \sqrt{\frac{2gh}{1+1}}$$

$$= \sqrt{gh}$$

નક્કર નળાકાર માટે $k^2 = R^2/2$

$$\upsilon_{disc} = \sqrt{\frac{2gh}{1+1/2}}$$

$$= \sqrt{\frac{4gh}{3}}$$

નક્કર ગોળા માટે $k^2 = 2R^2/5$

$$\upsilon_{sphere} = \sqrt{\frac{2gh}{1+2/5}}$$

$$= \sqrt{\frac{10gh}{7}}$$

પ્રાપ્ત પરિણામો પરથી એ સ્પષ્ટ છે કે ઢળતા પાટિયાના તળિયે ત્રણેય પદાર્થોમાં ગોળામાં દ્રવ્યમાન કેન્દ્રનો વેગ સૌથી મહત્તમ અને રિંગનો સૌથી ઓછો હોય છે.

ધારો કે, આ પદાર્થોના દ્રવ્યમાન સમાન છે. ઢળતા સમતલના તળિયે આ પદાર્થો પહોંચે છે ત્યારે કયા પદાર્થની ચાકગતિય ગતિઊર્જા મહત્તમ હશે ?

સારાંશ

1. આદર્શ રીતે એક દૃઢ પદાર્થ એ છે કે જેનાં પર બળો લાગવા છતાં પદાર્થના જુદા જુદા કણો વચ્ચેનું અંતર બદલાતું નથી.
2. એક બિંદુ અથવા એક રેખા સાથે જડેલ એક દૃઢ પદાર્થ માત્ર ચાકગતિ કરી શકે છે. દૃઢ પદાર્થ કે જે કોઈ રીતે જડેલ ન હોય, તો તેની ગતિ કાં તો શુદ્ધ સ્થાનાંતરણ અથવા સ્થાનાંતરણ અને ચાકગતિનું સંયોજન હોઈ શકે છે.
3. સ્થિર અક્ષને અનુલક્ષીને ચાકગતિમાં, દૃઢ પદાર્થના દરેક કણ એ અક્ષને લંબ સમતલમાંના એક વર્તુળાકાર ગતિ કરે છે અને તેનું કેન્દ્ર આ અક્ષ પર છે. ચાકગતિ કરતા દૃઢ પદાર્થના દરેક બિંદુ કોઈ પણ સમયે સમાન કોણીય વેગ ધરાવે છે.
4. શુદ્ધ સ્થાનાંતરણ ગતિમાં પદાર્થનો દરેક કણ કોઈ પણ સમયે એક જ વેગ સાથે ગતિ કરે છે.
5. કોણીય વેગ એક સદિશ છે. તેનું માન $\omega = d\theta/dt$ છે અને તે ભ્રમણાક્ષની દિશામાં છે. સ્થિર અક્ષને અનુલક્ષીને પરિભ્રમણ માટે આ સદિશ $\boldsymbol{\omega}$ ને એક નિશ્ચિત દિશા ધરાવે છે.

6. બે સદિશો **a** અને **b**નો સદિશ ગુણાકાર અથવા ક્રોસ પ્રોડક્ટ એ સદિશ $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ વડે લખાય છે. આ સદિશનું માન $ab\sin\theta$ છે અને તેની દિશા ને જમણા હાથના સ્ક્રૂ અથવા જમણા હાથના નિયમ વડે આપવામાં આવે છે.
7. કોઈ એક સ્થિર અક્ષને અનુલક્ષીને ચાકગતિ કરતાં એક દૃઢ પદાર્થના એક કણના રેખીય વેગને $\boldsymbol{\upsilon} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ વડે આપવામાં આવે છે. જ્યાં **r** એ ઉદ્‌ગમબિંદુના સંદર્ભમાં અક્ષની સાપેક્ષે કણનો સ્થાનસદિશ છે. દૃઢ પદાર્થ માટે ચાકગતિના વધુ વ્યાપક કિસ્સાઓ કે જ્યાં એક જ બિંદુ સ્થિર હોય ત્યાં પણ આ સંબંધ લાગુ પડે છે. આવા કિસ્સામાં ઉદ્‌ગમબિંદુ તરીકે લીધેલ સ્થિર બિંદુની સાપેક્ષે **r** એ કણનો સ્થાનસદિશ છે.
8. જે બિંદુનો સ્થાનસદિશ $\mathbf{R} = \dfrac{\sum m_i r_i}{M}$ હોય તેને કણોના તંત્રના દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર તરીકે વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે છે.
9. કણોના તંત્રના દ્રવ્યમાન કેન્દ્રનો વેગ $\mathbf{V} = \mathbf{P}/M$ દ્વારા આપવામાં આવે છે. જ્યાં **P** એ તંત્રનું રેખીય વેગમાન છે. તંત્રનું દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર એ રીતે ગતિ કરે છે કે જાણે તંત્રનું સમગ્ર દ્રવ્યમાન તેના દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર પર કેન્દ્રિત હોય તથા બધાં બાહ્ય બળો તેના પર જ લગતાં હોય. જો તંત્ર પરનું કુલ બાહ્ય બળ શૂન્ય હોય, તો આ તંત્રનું કુલ રેખીય વેગમાન અચળ રહે છે.
10. ઉદ્‌ગમબિંદુની સાપેક્ષે n કણોના તંત્રનું કોણીય વેગમાન,

    $\mathbf{L} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i$ છે.

    ઉદ્‌ગમબિંદુની સાપેક્ષે n કણોના તંત્ર પર લાગતું ટૉર્ક અથવા બળની ચાકમાત્રા

    $\boldsymbol{\tau} = \sum_{i} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i$ છે.

    iમાં કણ પર લાગતા બળ $\mathbf{F}_i$માં બાહ્ય અને આંતરિક બળો પણ સામેલ છે. ન્યૂટનના ત્રીજા નિયમ અને કોઈ પણ બે કણો વચ્ચે લાગતાં બળો તેમને જોડતી રેખા પર લાગે છે તેમ લેતાં, આપણે એમ દર્શાવી શકીએ છીએ કે, $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{int}} = \mathbf{0}$ અને

    $$\frac{\mathrm{d}\mathbf{L}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\tau}_{ext}$$
11. એક દૃઢ પદાર્થ યાંત્રિક સંતુલનમાં હોય જો,
    (1) તે સ્થાનાંતરિય સંતુલનમાં હોય એટલે કે તેના પરનું કુલ બાહ્ય બળ શૂન્ય હોય તેથી $\sum \mathbf{F}_i = \mathbf{0}$, અને
    (2) તે ચાકગતિય સંતુલનમાં હોય એટલે કે તેના પરનું કુલ બાહ્ય ટૉર્ક શૂન્ય હોય.

    $$\sum \boldsymbol{\tau}_i = \sum \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = 0$$
12. કોઈ વિસ્તરિત પદાર્થનું ગુરુત્વ કેન્દ્ર તે એવું બિંદુ છે કે જ્યાં પદાર્થ પર લાગતું કુલ ગુરુત્વીય ટૉર્ક શૂન્ય હોય.
13. કોઈ એક અક્ષને અનુલક્ષીને દૃઢ પદાર્થની જડત્વની ચાકમાત્રાને સૂત્ર $I = \sum m_i r_i^2$ વડે વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે છે, જ્યાં r_i એ પદાર્થના iમાં કણનું આ અક્ષથી લંબઅંતર છે. આ ચાક ગતિઊર્જા $K = \frac{1}{2} I\omega^2$ છે.
14. સમાંતર અક્ષોના પ્રમેય : $I_z' = I_z + Ma^2$ લાગુ કરીને આપણે દૃઢ પદાર્થની કોઈ એક અક્ષને અનુલક્ષીને જડત્વની ચાકમાત્રા, આ અક્ષને સમાંતર ગુરુત્વકેન્દ્રમાંથી પસાર થતી અક્ષને અનુલક્ષીને જડત્વની ચાકમાત્રા અને પદાર્થનું દ્રવ્યમાન તથા આ બંને અક્ષો વચ્ચેનાં લંબઅંતરના વર્ગના ગુણાકારના સરવાળાથી શોધી શકીએ છીએ.

15. કાયનેમેટિક્સ અને ડાયનેમિક્સના સંદર્ભમાં કોઈ એક ચોક્કસ અક્ષને અનુલક્ષીને ચાકગતિ એ સુરેખીય ગતિ સાથે સીધી સામ્યતા ધરાવે છે.
16. કોઈ એક સ્થિર ભ્રમણાક્ષને (ધારો કે z-અક્ષ) અનુલક્ષીને ચાકગતિ કરતાં કોઈ એક પદાર્થ માટે $L_z = I\omega$ જ્યાં I એ z-અક્ષને અનુલક્ષીને જડત્વની ચાકમાત્રા છે. સામાન્યતઃ આવા પદાર્થ માટે **L** એ ભ્રમણાક્ષની દિશામાં હોતું નથી. જ્યારે પદાર્થ એ ભ્રમણાક્ષને અનુલક્ષીને સંમિત હોય ફક્ત ત્યારે જ **L** એ ભ્રમણાક્ષની દિશામાં હોય છે. આ કિસ્સામાં $|\mathbf{L}| = L_z = I\omega$ કોઈ એક સ્થિર અક્ષને અનુલક્ષીને ચાકગતિ કરતાં પદાર્થના કોણીય પ્રવેગને $I\alpha = \tau$ વડે આપવામાં આવે છે. જો પદાર્થ પર લાગતું બાહ્ય ટૉર્ક શૂન્ય હોય, તો સ્થિર ભ્રમણાક્ષને (ધારો કે z-અક્ષ) અનુલક્ષીને ચાકગતિ કરતાં આવા પદાર્થના કોણીય વેગમાનનો ઘટક L_z $(=I\omega)$ અચળ હોય છે.
17. સરક્યા વિના ગબડતી ગતિ કરતાં પદાર્થ માટે $\upsilon_{cm} = R\omega$ જ્યાં υ_{cm} એ સ્થાનાંતરીય વેગ (એટલે કે પદાર્થના દ્રવ્યમાન કેન્દ્રનો) છે, R એ આ પદાર્થની ત્રિજ્યા અને m દળ છે. આવા ગબડતા પદાર્થની ગતિઊર્જા એ સ્થાનાંતરણ અને પરિભ્રમણની ગતિઊર્જાઓનો સરવાળો છે :

$$K = \frac{1}{2} m\upsilon_{cm}^2 + \frac{1}{2} I\omega^2$$

રાશિ (Quantity)	સંજ્ઞા (Symbols)	પરિમાણ (Dimensions)	એકમો (Units)	નોંધ (Remark)
કોણીય વેગ (Angular Velocity)	ω	$[T^{-1}]$	rad s	$\upsilon = \omega \times r$
કોણીય વેગમાન (Angular Momentum)	L	$[ML^2T^{-1}]$	J s	$L = r \times p$
ટૉર્ક (Torque)	τ	$[ML^2T^{-2}]$	N m	$\tau = r \times F$
જડત્વની ચાકમાત્રા (Moment of Intertia)	I	$[ML^2]$	kg m^2	$I = \sum m_i r_i^2$

ગહન વિચારણાના મુદ્દાઓ

1. કોઈ તંત્રના દ્રવ્યમાન કેન્દ્રની ગતિ જાણવા માટે, તંત્રનાં આંતરિક બળોની જાણકારી જરૂરી નથી. આ હેતુ માટે આપણે ફક્ત પદાર્થ પરનાં બાહ્ય બળો જ જાણવાની જરૂર છે.
2. કણોના તંત્રના ગતિશાસ્ત્રમાં, કણોના તંત્રના દ્રવ્યમાન કેન્દ્રની ગતિ (એટલે તંત્રની રેખીય ગતિ) અને દ્રવ્યમાન કેન્દ્રને અનુલક્ષીને (એટલે કે તેની સાપેક્ષે) થતી ગતિને અલગ કરવી એ એક ઉપયોગી તકનિક છે. આ તકનિકના એક ઉદાહરણ તરીકે કણોના તંત્રની ગતિઊર્જા Kને દ્રવ્યમાન કેન્દ્રને અનુલક્ષીને તેની ગતિઊર્જા K' અને દ્રવ્યમાન કેન્દ્રની ગતિઊર્જા $MV^2/2$ને અલગ કરવી તે છે.
   $K = K' + MV^2/2$.
3. પરિમિત પરિમાણના પદાર્થો (કે કણોના તંત્રો) માટે ન્યૂટનનો બીજો નિયમ; ન્યૂટનના બીજા નિયમ ઉપરાંત કણો માટેના ન્યૂટનના ત્રીજા નિયમ પર પણ આધારિત છે.
4. કણોના તંત્રના કુલ કોણીય વેગમાનના ફેરફારનો સમય-દર, તંત્ર પરના કુલ બાહ્ય ટૉર્ક જેટલો હોય છે. તેમ સ્થાપિત કરવામાં આપણે કણો માટે ન્યૂટનના બીજા નિયમ ઉપરાંત ન્યૂટનના ત્રીજા નિયમની પણ જરૂર પડે છે. જેમાં બે કણો વચ્ચે લાગતાં બળો તેમને જોડતી રેખા પર હોવાં જરૂરી છે.
5. કુલ બાહ્ય બળ શૂન્ય હોવું અને કુલ બાહ્ય ટૉર્ક શૂન્ય હોવું એ બે સ્વતંત્ર શરતો છે. એક વિના બીજું હોઈ શકે છે. બળયુગ્મમાં કુલ બાહ્ય બળ શૂન્ય છે પણ કુલ ટૉર્ક અશૂન્ય છે.
6. જો કુલ બાહ્ય બળ શૂન્ય હોય તો તંત્ર પરનું કુલ ટૉર્ક ઉગમબિંદુ પર આધારિત નથી.
7. જો પદાર્થના એક ખંડથી બીજા ખંડ પરનું ગુરુત્વક્ષેત્ર બદલાતું ન હોય તો જ, પદાર્થનું ગુરુત્વકેન્દ્ર તેના દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર સાથે સંપાત થાય છે.
8. કોણીય વેગમાન **L** અને કોણીય વેગ **ω**, સમાંતર સદિશો હોવા જરૂરી નથી. જોકે આ પ્રકરણમાં ચર્ચેલ સરળ પરિસ્થિતિઓમાં, જ્યારે, કોઈ સ્થિર અક્ષ કે જે દૃઢ વસ્તુની સંમિતિ અક્ષ છે તેની આસપાસ ચાકગતિ થતી હોય, તો $\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$ સંબંધ યથાર્થ છે, જ્યાં I ભ્રમણ અક્ષની દિશામાં પદાર્થની જડત્વની ચાકમાત્રા છે.

સ્વાધ્યાય

7.1 એક સમાન દળ ઘનતા ધરાવતાં (i) ગોળા (ii) નળાકાર (iii) રિંગ અને (iv) સમઘનના આ દરેક પદાર્થના દ્રવ્યમાન કેન્દ્રનું સ્થાન જણાવો. શું પદાર્થનું દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર પદાર્થની અંદરના ભાગમાં જ હોય તે જરૂરી છે ?

7.2 HCl અણુમાં, બે પરમાણુઓના ન્યુક્લિયસો વચ્ચેનું અંતર લગભગ 1.27 Å (1 Å $= 10^{-10}$m) છે. ક્લોરિન અણુ એ હાઇડ્રોજન પરમાણુથી લગભગ 35.5 ગણો દળદાર છે અને આ અણુનું લગભગ તમામ દળ તેના ન્યુક્લિયસમાં કેન્દ્રિત છે તેમ આપેલ છે, તો અણુના CMનું આશરે સ્થાન શોધો.

7.3 એક બાળક એક લાંબી ટ્રૉલીના એક છેડે સ્થિર બેઠો છે, જે એક લીસી સમક્ષિતિજ સપાટી પર એક નિયમિત V ઝડપથી આગળ વધી રહી છે. જો આ બાળક ટ્રૉલી પર ઊભો થઈને કોઈ પણ રીતે દોડે, તો (ટ્રૉલી + બાળક) તંત્રના CMની ઝડપ કેટલી હશે ?

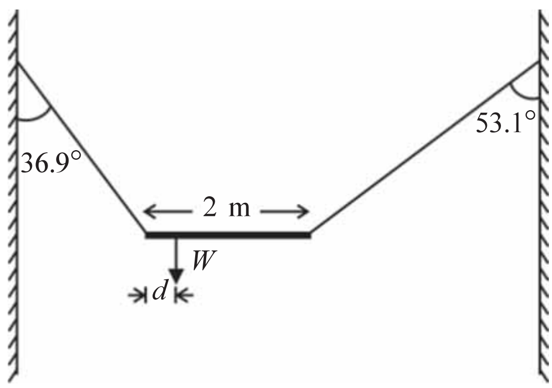
7.4 દર્શાવો કે સદિશો **a** અને **b**થી બનેલ ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ એ **a** × **b**ના મૂલ્યથી અડધું હોય છે.

7.5 દર્શાવો કે **a** · (**b** × **c**) એ ત્રણ સદિશો **a**, **b** અને **c**થી બનતા સમાંતરબાજુ ચતુષ્ફલકના કદના મૂલ્ય બરાબર હોય છે.

7.6 x, y, z ઘટકો સાથે જેનો સ્થાનસદિશ **r** અને p_x, p_y, p_z ઘટકો સાથે વેગમાન **p** હોય તે કણના કોણીય વેગમાન **l** ના X, Y, Z અક્ષો પરનાં ઘટકો શોધો કે જો કણ ફક્ત x-y સમતલમાં જ ગતિ કરે તો કોણીય વેગમાનને માત્ર z-ઘટક જ હોય છે.

7.7 દરેકનું દળ m અને ઝડપ υ હોય તેવા બે કણો એકબીજાથી d અંતરે રહેલ બે સમાંતર રેખાઓ પર વિરુદ્ધ દિશામાં ગતિ કરે છે. દર્શાવો કે કોઈ પણ બિંદુની સાપેક્ષે કોણીય વેગમાન લેવામાં આવે તોપણ આ બે કણોના તંત્રનું સદિશ કોણીય વેગમાન સમાન જ રહે છે.

7.8 આકૃતિ 7.39માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે W વજનના એક અનિયમિત સળિયાને અવગણ્ય વજનની બે દોરીઓ દ્વારા લટકાવીને સ્થિર રાખવામાં આવેલ છે. ઊર્ધ્વદિશા (શિરોલંબ) સાથે દોરીઓ દ્વારા બનાવવામાં આવેલા ખૂણા અનુક્રમે 36.9° અને 53.1° છે. આ સળિયાની લંબાઈ 2 m છે. આ સળિયાની ડાબી બાજુના છેડાથી તેના ગુરુત્વકેન્દ્રના અંતર d ની ગણતરી કરો.



આકૃતિ 7.39

7.9 એક કારનું વજન 1800 kg છે. તેની આગળ અને પાછળની એક્સેલ્સ (ધરીઓ) વચ્ચેનું અંતર 1.8 m છે. તેનું ગુરુત્વકેન્દ્ર આગળની એક્સલથી 1.05 m પાછળ છે. સમતલ જમીન દ્વારા આગળના દરેક પૈડા (વ્હીલ) અને પાછળના દરેક પૈડાં (વ્હીલ) પર લાગતું બળ શોધો.

7.10 (a) ગોળાના સ્પર્શકને અનુલક્ષીને ગોળાની જડત્વની ચાકમાત્ર શોધો. ગોળાના કોઈ પણ વ્યાસને અનુલક્ષીને ગોળાની જડત્વની ચાકમાત્રા 2 $MR^2/5$ છે તેમ આપેલ છે, જ્યાં M એ ગોળાનું દળ અને R એ ગોળાની ત્રિજ્યા છે.

(b) M દળ અને R ત્રિજ્યાની એક તક્તીની તેના કોઈ પણ વ્યાસને અનુલક્ષીને જડત્વની ચાકમાત્રા $MR^2/4$ છે. તક્તીને લંબ અને તેની ધાર પરના બિંદુમાંથી પસાર થતી અક્ષને અનુલક્ષીને તક્તીની જડત્વની ચાકમાત્રા શોધો.

7.11 સમાન દળ અને સમાન ત્રિજ્યા ધરાવતા એક પોલા નળાકાર અને ઘન ગોળા પર સમાન મૂલ્યનું ટૉર્ક લાગુ પાડેલ છે. નળાકાર તેના પ્રમાણભૂત સંમિતિ અક્ષને અનુલક્ષીને ચાકગતિ કરવા માટે મુક્ત છે અને ગોળો એ તેના કેન્દ્રમાંથી પસાર થતી અક્ષને અનુલક્ષીને ચાકગતિ કરવા માટે મુક્ત છે. આપેલ સમય પછી બંનેમાંથી કોણ વધુ કોણીય ઝડપ પ્રાપ્ત કરશે ?

7.12 20 kg દળનો એક નક્કર નળાકાર તેની અક્ષને અનુલક્ષીને 100 rad s^{-1} કોણીય ઝડપથી પરિભ્રમણ કરે છે. આ નળાકારની ત્રિજ્યા 0.25 m છે. આ નળાકારની ચાકગતિ સાથે સંકળાયેલ ગતિઊર્જા કેટલી હશે ? તેની અક્ષને અનુલક્ષીને આ નળાકારના કોણીય વેગમાનનું માન કેટલું હશે ?

7.13 (a) એક બાળક તેના બે હાથ પહોળા કરીને ટર્નટેબલના કેન્દ્ર પર ઊભો છે. ટર્નટેબલ એ 40 rev/minની કોણીય ઝડપથી ભ્રમણ કરે છે. જો આ બાળક તેના હાથોને પાછા વાળે અને તેનાથી તે તેની જડત્વની ચાકમાત્રાનું મૂલ્ય ઘટાડીને તે તેની પ્રારંભિક જડત્વની ચાકમાત્રાના મૂલ્યના 2/5 ગણું કરે તો તેની કોણીય ઝડપ કેટલી થશે ? ટર્નટેબલ ઘર્ષણરહિત ફરે છે એમ ધારો.

(b) દર્શાવો કે બાળકના પરિભ્રમણની નવી ગતિઊર્જા તેના પ્રારંભિક પરિભ્રમણની ગતિઊર્જા કરતાં વધુ છે. ગતિઊર્જામાં થતો આ વધારો તમે કેવી રીતે સમજાવશો ?

7.14 3 kg દળ અને 40 cm ત્રિજ્યાના એક પોલા નળાકાર ફરતે અવગણ્ય દળનું એક દોરડું વીંટાળેલ છે. જો આ દોરડાને 30 N બળથી ખેંચવામાં આવે, તો આ નળાકારનો કોણીય પ્રવેગ કેટલો હશે ? દોરડાનો રેખીય પ્રવેગ કેટલો હશે ? એમ ધારો કે અહીં દોરડું સરકતું નથી.

7.15 એક રોટરને 200 rad s^{-1} એક સમાન કોણીય ઝડપ જાળવવા, માટે એન્જિન 180 N m ટૉર્ક પ્રસ્થાપિત કરવું આવશ્યક છે. આ માટે ઍન્જિનને કેટલો પાવર આવશ્યક છે ? (નોંધ : ઘર્ષણની ગેરહાજરીમાં એક સમાન કોણીય વેગ એટલે શૂન્ય ટૉર્ક, વ્યવહારમાં, ઘર્ષણવાળા ટૉર્કનો સામનો કરવા માટે લગાડવા પડતાં ટૉર્કની જરૂરિયાત છે.) એમ ધારો કે ઍન્જિન 100 % કાર્યક્ષમ છે.

7.16 R ત્રિજ્યાની એક સમાન તક્તીમાંથી, $R/2$ ત્રિજ્યાના ગોળાકાર છિદ્રને કાપવામાં આવે છે. આ છિદ્રનું કેન્દ્ર મૂળ ડિસ્કના કેન્દ્રથી $R/2$ અંતરે છે. પરિણામી સપાટ પદાર્થનું ગુરુત્વ કેન્દ્ર શોધો.

7.17 એક મીટર-પટ્ટી તેના મધ્યે છરીની ધાર પર સંતુલિત છે. જ્યારે એવા બે સિક્કા કે જે દરેકનું દળ 5 gm છે તેમને 12 cmના નિશાન પર એકબીજાની ઉપર મૂકવામાં આવે છે, ત્યારે આ પટ્ટી 45.0 cm પર સંતુલિત થાય છે. આ મીટર-પટ્ટીનું દળ શું હશે ?

7.18 એક ઘન ગોળો એક જ ઊંચાઈના અલગ અલગ નમન કોણ ધરાવતા બે ઢળતા સમતલ પરથી ગબડે છે. (a) શું તે દરેક કિસ્સામાં સમાન ઝડપ સાથે નીચે પહોંચશે ? (b) શું એક સમતલ કરતાં બીજા સમતલ પર વધુ સમય લેશે ? (c) જો એમ હોય તો કયા સમતલ પર અને શા માટે ?

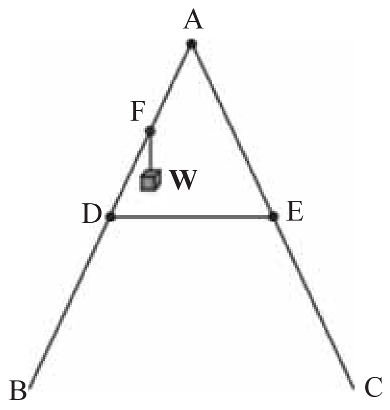
7.19 2 m ત્રિજ્યાના એક વલયનું દળ 100 kg છે. તે એક સમક્ષિતિજ સપાટી પર એવી રીતે ગબડે છે કે જેથી તેના દ્રવ્યમાન કેન્દ્રની ઝડપ 20 cm/s હોય, તેને રોકવા માટે કેટલું કાર્ય કરવું પડે ?

7.20 ઑક્સિજન અણુનું દ્રવ્યમાન 5.30×10^{-26} kg અને તેના કેન્દ્રમાંથી પસાર થતી તેના બે અણુઓને જોડતી રેખાને લંબ એવી અક્ષને અનુલક્ષીને તેની જડત્વની ચાકમાત્ર 1.94×10^{-46} kg m^2 છે. ધારો કે કોઈ ગૅસમાં આવા અણુની સરેરાશ ઝડપ 500 m/s છે અને તેના પરિભ્રમણની ગતિઊર્જા એ તેના સ્થાનાંતરણની ગતિઊર્જાથી બે તૃતીયાંશ છે તો અણુનો સરેરાશ કોણીય વેગ શોધો.

7.21 30^oના ખૂણે નમેલા એક ઢળતા પાટિયા ઉપર એક નક્કર નળાકાર ગબડીને ઉપર તરફ જાય છે. આ ઢળતા પાટિયાના તળિયે નળાકારનું દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર 5 m/sની ગતિ ધરાવે છે. (a) નળાકાર આ ઢળતા પાટિયા પર કેટલો ઉપર જશે ? (b) તળિયે પાછા આવવા માટે તેને કેટલો સમય લાગશે ?

વધારાનું સ્વાધ્યાય

7.22 આકૃતિ 7.40માં બતાવ્યા પ્રમાણે BA અને CA બે બાજુઓ કે જેની લંબાઈ 1.6 મીટર છે તેવી એક નિસરણીને A પર લટકાવેલ છે. 0.5 mના એક દોરડા DEને નિસરણીની અધવચ્ચે બાંધેલ છે. BA બાજુ સાથે Bથી 1.2 m પર 40 kg વજન એક બિંદુ Fથી લટકાવવામાં આવેલ છે. ભોંયતળિયાને ઘર્ષણરહિત ધારીને અને નિસરણીના વજનની અવગણના કરીને, દોરડામાંનો તણાવ અને નિસરણી પર ભોંયતળિયા દ્વારા લગાડવામાં આવેલાં બળ શોધો. (g = 9.8 m/s^2 લો.)
(**સૂચના :** નિસરણીની દરેક બાજુનું સંતુલન અલગ અલગ ધ્યાનમાં લો.)



આકૃતિ **7.40**

7.23 એક વ્યક્તિ ઘૂમતા પ્લૅટફૉર્મ પર ઊભો છે. તેના સમક્ષિતિજ ટટ્ટાર રાખેલ દરેક હાથમાં 5 kg વજન ધરાવે છે. પ્લૅટફૉર્મની કોણીય ઝડપ 30 પરિભ્રમણ પ્રતિ મિનિટ છે. આ વ્યક્તિ તેના બંને હાથ તેના શરીરની નજીક લાવે છે. જેમાં દરેક વજનનું અક્ષથી અંતર 90 cmથી બદલાઈને 20 cm થાય છે. આ વ્યક્તિની પ્લૅટફૉર્મ સાથેની જડત્વની ચાકમાત્રા 7.6 kg m^2 જેટલી અને અચળ લેવામાં આવે છે.

(a) તેમની નવી કોણીય ઝડપ કેટલી હશે ? (ઘર્ષણ અવગણો.)

(b) શું ગતિઊર્જા આ પ્રક્રિયામાં સંરક્ષિત છે ? જો ના, તો આ પરિવર્તન ક્યાંથી આવે છે ?

7.24 10 g દળ અને 500 m/s ઝડપની એક બંદૂકની ગોળી (બુલિટ)ને બારણા પર છોડવામાં આવે છે અને તે બારણાંની બરાબર મધ્યમાં જડાઈ જાય છે. બારણું 1.0 m પહોળું છે અને તેનું વજન 12 kg છે. તે એક છેડેથી લટકાવેલ છે અને તે લગભગ ઘર્ષણ વિના એક શિરોલંબ અક્ષ ફરતે ભ્રમણ કરે છે. તેમાં બુલિટ જડિત થયા પછી બારણાંની તત્કાલીન કોણીય ઝડપ શોધો.

(**સૂચના :** એક છેડાની ઊર્ધ્વ અક્ષને અનુલક્ષીને બારણાંની જડત્વતાની ચાકમાત્રા $ML^2/3$ છે.)

7.25 બે તક્તી કે જેમની તેમની સંબંધિત અક્ષો (તક્તીને લંબ અને કેન્દ્રમાંથી પસાર થતાં હોય છે)ને અનુલક્ષીને જડત્વની ચાકમાત્રા I_1 અને I_2 છે અને તે ω_1 અને ω_2 કોણીય ઝડપે ભ્રમણ કરે છે. તેમને તેમના પરિભ્રમણ અક્ષો સંપાત થાય તેમ એકબીજાના સંપર્કમાં લાવવામાં આવે છે. (a) આ બે-તક્તી તંત્રની કોણીય ઝડપ શું છે ? (b) દર્શાવો કે સંયુક્ત તંત્રની ગતિઊર્જા એ બે તક્તીની પ્રારંભિક ગતિઊર્જાના સરવાળા કરતાં ઓછી છે. ઊર્જામાં થતાં આ ઘટાડાને તમે કેવી રીતે સમજાવશો ? $\omega_1 \neq \omega_2$ લો.

7.26 (a) લંબ અક્ષોનો પ્રમેય સાબિત કરો.

(**સૂચના :** x-y સમતલને લંબરૂપે અને ઉદ્‌ગમબિંદુમાંથી પસાર થતી અક્ષથી કોઈ એક બિંદુ (x, y)ના અંતરનો વર્ગ એ $x^2 + y^2$ છે.)

(b) સમાંતર અક્ષોનો પ્રમેય સાબિત કરો.

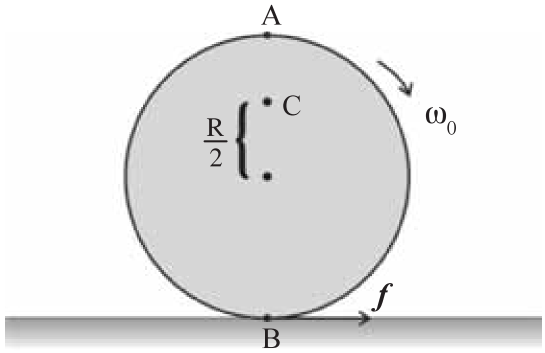
(**સૂચના :** જો દ્રવ્યમાન કેન્દ્રને ઉદ્‌ગમબિંદુ તરીકે પસંદ કરવામાં આવે તો $\sum m_i \mathbf{r}_i = 0$)

7.27 ગતિશાસ્ત્રની વિચારધારાનો ઉપયોગ કરીને (એટલે કે બળો અને ટૉર્કના વિચાર દ્વારા) સાબિત કરો કે h ઊંચાઈના ઢળતા પાટિયાના તળિયે તેના પરથી ગબડતા પદાર્થ (જેમકે રિંગ, તક્તી, નળાકાર અથવા ગોળા જેવા)નો સ્થાનાંતરણ વેગ υનું મૂલ્ય

$$\upsilon^2 = \frac{2gh}{(1+k^2/R^2)}$$ દ્વારા આપવામાં આવે છે.

નોંધો k એ પદાર્થની સંમિત અક્ષને અનુલક્ષીને ચક્રાવર્તન ત્રિજ્યા છે અને R પદાર્થની ત્રિજ્યા છે. પદાર્થ તેની ગતિ પાટિયાની ટોચ પરથી સ્થિર અવસ્થામાંથી શરૂ કરે છે.

7.28 ω_0 કોણીય ઝડપ સાથે તેની અક્ષને અનુલક્ષીને ભ્રમણ કરતી એક તક્તીને સંપૂર્ણ ઘર્ષણરહિત ટેબલ પર હળવેથી (કોઈ પણ સ્થાનાતરિત બળ વગર) મૂકવામાં આવે છે. તક્તીની ત્રિજ્યા R છે. તક્તી પર દર્શાવેલ બિંદુઓ A, B અને Cના રેખીય વેગો કેટલા હશે ?



આકૃતિ 7.41

7.29 સમજાવો કે આકૃતિ 7.41માંની તક્તીને દર્શાવેલ દિશામાં ગબડવા માટે ઘર્ષણ શા માટે જરૂરી છે.

(a) સંપૂર્ણ રોલિંગ શરૂ થાય તે પહેલાં B આગળ ઘર્ષણ બળની દિશા અને ઘર્ષણથી ઉદ્ભવતા ટૉર્કની દિશા આપો.

(b) સંપૂર્ણ રોલિંગ શરૂ થયા પછી ઘર્ષણ બળ કેટલું હશે ?

7.30 એક નક્કર તકતી અને રિંગ જે બંનેની ત્રિજ્યા 10 cm છે તે બંનેને જેની પ્રારંભિક કોણીય ઝડપ 10π rad s^{-1} જેટલી છે. તેવા એક સમક્ષિતિજ કોષ્ટક પર એક સાથે મૂકવામાં આવે છે. આ બંનેમાંથી કોણ વહેલું રોલિંગ શરૂ કરશે ? સ્થિત ઘર્ષણાંક μ_s = 0.2 છે.

7.31 10 kg દળ અને 15 cm ત્રિજ્યાનો એક નળાકાર 30^oથી ઢળતા પાટિયા પર સંપૂર્ણપણે ગબડે છે. સ્થિર ઘર્ષણાંક μ_s = 0.25.

(a) નળાકાર પર લાગતું ઘર્ષણ બળ કેટલું હશે ?

(b) રોલિંગ દરમિયાન ઘર્ષણ સામે કેટલું કાર્ય કરવામાં આવ્યું હશે ?

(c) જો આ પાટિયાનો ઢોળાવ θ વધારવામાં આવે, તો θ ના કયા મૂલ્ય માટે આ નળાકાર સંપૂર્ણતઃ ગબડવાને બદલે સરકવાનું શરૂ કરશે ?

7.32 નીચેનું દરેક વિધાન કાળજીપૂર્વક વાંચો અને તે સાચું છે કે ખોટું તે કારણ સાથે જણાવો :

(a) રોલિંગ દરમિયાન ઘર્ષણ બળ એ તે દિશામાં લાગે છે કે જે દિશામાં પદાર્થના CMની ગતિ હોય.

(b) રોલિંગ દરમિયાન સંપર્ક બિંદુની તાત્ક્ષણિક ઝડપ શૂન્ય છે.

(c) રોલિંગ દરમિયાન સંપર્ક બિંદુનો તાત્ક્ષણિક પ્રવેગ શૂન્ય છે.

(d) શુદ્ધ (સંપૂર્ણ) રોલિંગ ગતિ માટે, ઘર્ષણ વિરુદ્ધ થતું કાર્ય શૂન્ય છે.

(e) એક સંપૂર્ણ ઘર્ષણરહિત ઢળતા પાટિયા પરથી નીચે તરફ ગતિ કરતાં એક વ્હીલ સરકતી (રોલિંગ નહિ) ગતિ કરશે.

7.33 કણોના તંત્રની ગતિનું દ્રવ્યમાન કેન્દ્રની ગતિ અને દ્રવ્યમાન કેન્દ્રને અનુલક્ષીને ગતિમાં વિભાજન :

(a) બતાવો કે $\mathbf{p} = \mathbf{p}'_i + m_i\mathbf{V}$

જ્યાં $\mathbf{p}_i$ એ iમા કણ (m_i દળના)નું વેગમાન અને $\mathbf{p}'_i = m_i\mathbf{\upsilon}'_i$. નોંધ $\mathbf{\upsilon}'_i$ દ્રવ્યમાન કેન્દ્રની સાપેક્ષે iમા કણનો વેગ છે.

આ ઉપરાંત દ્રવ્યમાન કેન્દ્રની વ્યાખ્યાનો ઉપયોગ કરીને સાબિત કરો કે $\Sigma \mathbf{p}'_i = 0$

(b) બતાવો કે $K = K' + \frac{1}{2}MV^2$

જ્યાં K એ કણોના તંત્રની કુલ ગતિઊર્જા છે. K' એ જ્યારે કણોના વેગોને દ્રવ્યમાન કેન્દ્રના સંદર્ભમાં લેવામાં આવે છે ત્યારની અને $MV^2/2$ એ સમગ્ર તંત્રની સ્થાનાંતરણની ગતિ ઊર્જા છે. (એટલે કે તંત્રના દ્રવ્યમાન કેન્દ્રની ગતિ). આ પરિણામ પરિચ્છેદ 7.14માં ઉપયોગમાં લીધેલ છે.

(c) દર્શાવો કે $\mathbf{L} = \mathbf{L}' + \mathbf{R} \times M\mathbf{V}$ છે. જ્યાં $\mathbf{L}' = \Sigma \mathbf{r}'_i \times \mathbf{p}'_i$ એ તંત્રના દ્રવ્યમાન કેન્દ્રની સાપેક્ષે તંત્રનું કોણીય વેગમાન છે. જ્યાં વેગોને દ્રવ્યમાન કેન્દ્રની સાપેક્ષે લીધેલ છે. યાદ રાખો $\mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{R}$;

બાકીની બધી સંજ્ઞાઓ એ પ્રકરણમાં ઉપયોગમાં લેવાયેલ પ્રમાણભૂત સંજ્ઞાઓ છે. નોંધો $\mathbf{L}'$ અને $M\mathbf{R} \times \mathbf{V}$ એ અનુક્રમે દ્રવ્યમાન કેન્દ્રને અનુલક્ષીને તંત્રનું કોણીય વેગમાન અને કણોના તંત્રના દ્રવ્યમાન કેન્દ્રનું કોણીય વેગમાન કહેવામાં આવે છે.

(d) બતાવો કે $\dfrac{d\mathbf{L}'}{dt} = \Sigma \mathbf{r}_i' \times \dfrac{d\mathbf{p}'}{dt}$

વધુમાં, દર્શાવો કે $\dfrac{d\mathbf{L}'}{dt} = \tau'_{ext}$

જ્યાં τ'_{ext} એ આ તંત્ર પર દ્રવ્યમાન કેન્દ્રને અનુલક્ષીને લાગતા તમામ બાહ્ય ટૉર્કનો સરવાળો છે.

(**સૂચના :** દ્રવ્યમાન કેન્દ્રની વ્યાખ્યા અને ન્યૂટનના ત્રીજા નિયમનો ઉપયોગ કરો. એમ ધારો કે કોઈ પણ બે કણો વચ્ચે લાગતું આંતરિક બળ આ બે કણોને જોડતી રેખાની દિશામાં લાગે છે.)

પ્લુટો – એક અવિકસિત ગ્રહ (Pluto - A Dwarf Planet)

ઝેક પ્રજાસત્તાકમાંના પ્રેગ (Prague)માં ઑગસ્ટ 24, 2006માં મળેલી The International Astronomical Union (IAU) એ IAU-2006ની સામાન્યસભામાં આપણા સૂર્યમંડળમાંના ગ્રહો માટે એક નવી વ્યાખ્યા અપનાવી. નવી વ્યાખ્યા મુજબ પ્લુટો એ હવે ગ્રહ નથી. આનો અર્થ એ કે સૂર્યમંડળ આઠ ગ્રહોનું બનેલું છે : બુધ, શુક્ર, પૃથ્વી, મંગળ, ગુરુ, શનિ, યુરેનસ અને નેપ્ચૂન. IAU પ્રણાલિકા મુજબ આપણા સૂર્યમંડળમાં ઉપગ્રહો સિવાય 'ગ્રહો' અને 'અન્ય પદાર્થો'ને અવકાશીય પદાર્થોના ત્રણ સ્પષ્ટ વર્ગોમાં વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે છે.

1. 'ગ્રહ' એવો અવકાશીય પદાર્થ છે કે જે (a) સૂર્યની ફરતે કક્ષામાં છે (b) દઢ પદાર્થનાં બળોને પહોંચી વળવા (હરાવવા) માટેના પોતાના ગુરુત્વાકર્ષણ માટે પૂરતું દળ ધરાવે છે, જેથી તે દ્વસ્થિત (Hydrostatic) સંતુલન (લગભગ ગોળ) આકાર પ્રાપ્ત કરે છે અને (c) કક્ષાની નજીકના વિસ્તારની સાફસૂફી કરેલી છે.

2. અવિકસિત ગ્રહ એ એવો અવકાશીય પદાર્થ છે કે જે (a) જે સૂર્યની ફરતે કક્ષામાં છે. (b) જે દઢ પદાર્થનાં બળોને પહોંચી વળવા (હરાવવા) માટેના પોતાના ગુરુત્વાકર્ષણ માટે પૂરતું દળ ધરાવે છે. જેથી તે દ્વસ્થિત (Hydrostatic) સંતુલન (લગભગ ગોળ) આકાર પ્રાપ્ત કરે છે (c) તેવી કક્ષાની નજીકના વિસ્તારની સાફસૂફી કરેલી હોતી નથી અને જે પોતે ઉપગ્રહ નથી.

3. ઉપગ્રહો સિવાયના સૂર્યની આસપાસ ફરતા બધા 'અન્ય પદાર્થો' સામૂહિક રીતે 'સૂર્યમંડળના નાના પદાર્થો' તરીકે ઓળખાશે.

સૂર્યમંડળમાં બીજા આઠ ગ્રહોથી વિપરીત, પ્લુટોનો કક્ષીય માર્ગ 'અન્ય પદાર્થો'ના અને નૅપ્ચૂન ગ્રહના માર્ગ સાથે સંપાત થાય છે. હાલમાં 'અન્ય પદાર્થો'માં ઉલ્કાઓ, મોટા ભાગના ટ્રાન્સ-નૅપ્ચૂનિયન પદાર્થો (TNOs), ધૂમકેતુઓ અને અન્ય નાના પદાર્થોનો સમાવેશ થાય છે.

ઉપરની વ્યાખ્યા અનુસાર પ્લુટો 'અવિકસિત ગ્રહ' છે અને તેને ટ્રાન્સ-નૅપ્ચૂનિયન પદાર્થોની નવી શ્રેણીના મૂળ સ્વરૂપ (Prototype) તરીકે ઓળખવામાં આવે છે.

પ્રકરણ 8

ગુરુત્વાકર્ષણ (GRAVITATION)

8.1 પ્રસ્તાવના (INTRODUCTION)

આપણે આપણા જીવનના પ્રારંભિક તબક્કાથી બધા પદાર્થોના પૃથ્વી તરફ આકર્ષાવાના વલણથી સભાન છીએ. કંઈક પણ ઉપર તરફ ફેંકીએ તો તે (છેવટે તો) પૃથ્વી તરફ પાછું ફરે છે. ટેકરી પર ચઢવાનું, ટેકરી પરથી ઊતરવા કરતાં ઘણું વધારે થકવી દે તેવું છે. ઊંચે રહેલા વાદળોમાંથી વર્ષાબિંદુઓ પૃથ્વી તરફ પડે છે અને આવી બીજી ઘણી ઘટનાઓ છે. ઐતિહાસિક રીતે, ઇટાલિયન ભૌતિકવિજ્ઞાની ગૅલિલિયોએ (1564-1642) એ હકીકત જાણી લીધી હતી કે, કોઈપણ દળ ધરાવતા હોય તેવા બધા પદાર્થો અચળ પ્રવેગથી પૃથ્વી તરફ પ્રવેગિત થાય છે. એવું કહેવાય છે કે તેણે આ હકીકતનું સાર્વજનિક નિર્દેશન કર્યું હતું. સત્ય શોધવા માટે તેણે ઢોળાવવાળાં સમતલો પરથી ગબડતા પદાર્થો અંગે ખાસ પ્રયોગો કર્યા અને તે પરથી તેણે ગુરુત્વપ્રવેગનું જે મૂલ્ય મેળવ્યું તે ત્યાર પછીથી, વધારે ચોકસાઈપૂર્વક મેળવાયેલ મૂલ્યની નજીક હતું.

તારાઓ, ગ્રહો અને તેમની ગતિનું અવલોકન આની સાથે સંબંધ ધરાવતી ન હોય તેવી ઘટના લાગે છે પણ છેક આદિકાળથી ઘણા દેશોમાં તે ધ્યાન આકર્ષક વિષય રહ્યો છે. આદિકાળથી અવલોકનોમાં વર્ષોનાં વર્ષો સુધી આકાશમાં જેમનું સ્થાન બદલાતું દેખાતું ન હોય તેવા તારાઓની ઓળખ થઈ હતી. વધુ રસપ્રદ પદાર્થો તો તે ગ્રહો છે જે તારાઓની પૃષ્ઠભૂમિમાં પોતાની નિયમિત ગતિ ધરાવે છે. ગ્રહોની ગતિ અંગે સૌથી પ્રથમ નોંધાયેલ મોડેલ, લગભગ 2000 વર્ષ પહેલાં ટૉલેમી (Ptolemy)એ રજૂ કરેલું 'પૃથ્વી કેન્દ્રિય' (Geo-Centric) મોડેલ હતું, જેમાં તારાઓ, સૂર્ય અને ગ્રહો એ બધા આકાશી પદાર્થો પૃથ્વીની આસપાસ ભ્રમણ કરે છે. અવકાશી પદાર્થો માટે વિચારી શકાય તેવી શક્ય ગતિ એ વર્તુળાકાર ગતિ હતી. ગ્રહોની દેખાતી ગતિને રજૂ કરવા માટે ટૉલેમીએ ગતિની ગૂંચવણભરી (જટિલ) યોજનાઓ રજૂ કરી હતી. તેણે ગ્રહોને વર્તુળમાં ગતિ કરતા જણાવ્યા હતા અને આ વર્તુળના કેન્દ્ર વધુ મોટા વર્તુળમાં ગતિ કરતા હતા. ભારતીય ખગોળશાસ્ત્રીઓએ પણ લગભગ 400 વર્ષ પછી આવા સિદ્ધાંતો રજૂ કર્યા હતા. જોકે આર્યભટ્ટ (ઈશુની પાંચમી સદી) દ્વારા તેના પુસ્તકમાં એક વધારે સુંદર મોડેલ-'સૂર્યકેન્દ્રી' (Helio-Centric) મોડેલનો ઉલ્લેખ કરાયેલો હતો જેમાં સૂર્ય કેન્દ્રમાં હતો, જેની આસપાસ બધા ગ્રહો ભ્રમણ કરતા હતા. એક હજાર વર્ષ પછી નિકોલસ કૉપરનિક્સ (1473-1543) નામના પોલૅન્ડના એક સાધુએ એક નિર્ણાયક મોડેલ રજૂ કર્યું જેમાં સૂર્ય કેન્દ્રમાં સ્થિર હોય તેવાં વર્તુળોમાં, ગ્રહો ગતિ કરતા હતા. તેના સિદ્ધાંતને ચર્ચ દ્વારા અમાન્ય કરવામાં

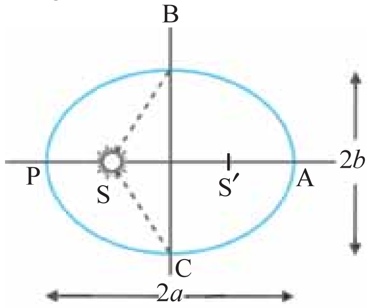
આવ્યું હતું, પરંતુ તેના ટેકેદારોમાં ગૅલિલિયો નોંધપાત્ર હતો જેને પોતાની માન્યતા માટે રાજસત્તા તરફથી કાયદાકીય કાર્યવાહીનો સામનો કરવો પડ્યો હતો.

લગભગ ગૅલિલિયોના સમય દરમિયાન ડેન્માર્કના એક ઉમદા વ્યક્તિ ટાઈકો બ્રાહે (1546-1601)એ પોતાનું સમગ્ર જીવન નરી આંખે ગ્રહોનાં અવલોકનો નોંધવામાં વિતાવ્યું હતું. તેણે એકઠી કરેલી વિગતોનું પાછળથી તેના મદદનીશ જોહનસ કૅપ્લર (1571-1640) દ્વારા વિશ્લેષણ કરવામાં આવ્યું. એ વિગતો પરથી તેણે ત્રણ અદ્‌ભુત નિયમો તારવ્યા જે કૅપ્લરના નિયમો તરીકે ઓળખાય છે. આ નિયમોની ન્યૂટનને ખબર હતી અને તેથી વૈજ્ઞાનિક હરણફાળ લગાવતા ગુરુત્વાકર્ષણના સાર્વત્રિક નિયમને રજૂ કરવામાં તેનાથી તેને મદદ મળી હતી.

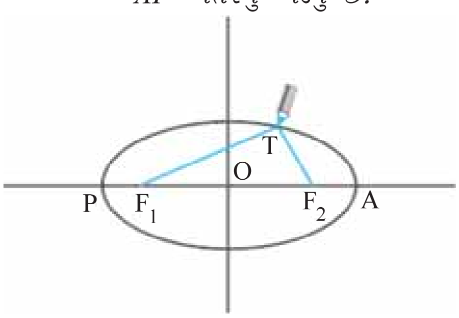
8.2 કૅપ્લરના નિયમો (KEPLER'S LAWS)

કૅપ્લરના ત્રણ નિયમો નીચે મુજબ લખી શકાય છે :

1. કક્ષાઓનો નિયમ (Law of Orbits) : બધા ગ્રહો એવી દીર્ઘવૃત્તિય કક્ષાઓમાં ભ્રમણ કરે છે કે જેના એક કેન્દ્ર પર સૂર્ય રહેલો હોય. (આકૃતિ 8.1(a))



આકૃતિ 8.1(a) *ગ્રહ વડે સૂર્યની આસપાસ રચાયેલું દીર્ઘવૃત્ત. સૌથી નજીકનું બિંદુ P છે અને સૌથી દૂરનું બિંદુ A છે. Pને સૂર્યનીચ બિંદુ (Perihelion) અને Aને સૂર્યોચ્ચ બિંદુ (Aphelion) કહે છે. અર્ધદીર્ઘ અક્ષ એ AP અંતરનું અડધું છે.*



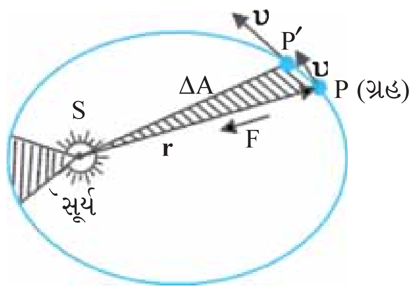
આકૃતિ 8.1(b) *દીર્ઘવૃત્ત દોરવું. એક દોરીના છેડાઓને F_1 અને F_2 આગળ જડી દીધેલ છે. પેન્સિલની અણી વડે દોરીને કડક રાખી અણીને ફેરવવામાં આવે છે.*

* પૃ. 182 પર બૉક્સમાં આપેલ માહિતીનો સંદર્ભ લો.

આ નિયમ કૉપરનિક્સના મોડેલ કે જેમાં માત્ર વર્તુળાકાર કક્ષાઓ માન્ય હતી તેના કરતાં જુદો પડે છે. દીર્ઘવૃત્ત એ એક બંધ વક્ર છે જેનો એક વિશિષ્ટ કિસ્સો એ વર્તુળ છે. આવું દીર્ઘવૃત્ત સહેલાઈથી નીચે મુજબ દોરી શકાય :

બે બિંદુઓ F_1 અને F_2 પસંદ કરો. અમુક લંબાઈની દોરી લઈને તેના છેડાઓને ટાંકણીની મદદથી F_1 અને F_2 આગળ જડી દો. પેન્સિલની અણી વડે દોરીને કડક ખેંચેલી રાખી પેન્સિલને ફેરવતા જઈ એક વક્ર દોરો. (આકૃતિ 8.1(b)) આ રીતે મળેલો બંધ વક્ર દીર્ઘવૃત્ત કહેવાય છે. સ્પષ્ટ જ છે કે દીર્ઘવૃત્ત પરના કોઈ પણ બિંદુ T માટે F_1 અને F_2થી અંતરોનો સરવાળો અચળ રહે છે. F_1 અને F_2ને કેન્દ્રો કહે છે. F_1 અને F_2 બિંદુઓને જોડી તે રેખાને લંબાવો જે દીર્ઘવૃત્તને આકૃતિ 8.1(b)માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે P અને A બિંદુએ છેદે. PA રેખાનું મધ્યબિંદુ O દીર્ઘવૃત્તનું મધ્યબિંદુ છે અને PO = AO લંબાઈને દીર્ઘવૃત્તની અર્ધદીર્ઘ અક્ષ કહે છે. વર્તુળ માટે બે કેન્દ્રો ભળી જઈને એક બને અને અર્ધદીર્ઘઅક્ષ એ વર્તુળની ત્રિજ્યા બને છે.

2. ક્ષેત્રફળોનો નિયમ (Law of Areas) : કોઈ પણ ગ્રહને સૂર્ય સાથે જોડતી રેખા સમાન સમયગાળામાં સમાન ક્ષેત્રફળ આંતરે છે (આકૃતિ 8.2). આ નિયમ એવાં અવલોકનો પરથી મળેલ છે કે જ્યારે ગ્રહો સૂર્યથી દૂર હોય ત્યારે તે નજીક હતા તેના કરતાં ધીમા ફરતા જણાય છે.



આકૃતિ 8.2 *ગ્રહ P સૂર્યની આસપાસ દીર્ઘવૃત્તિય કક્ષામાં ગતિ કરે છે. છાયાંકિત ક્ષેત્રફળ એ નાના સમયગાળા Δtમાં આંતરાતું ક્ષેત્રફળ ΔA છે.*

(3) આવર્તકાળનો નિયમ (Law of Periods) : ગ્રહના પરિભ્રમણના આવર્તકાળનો વર્ગ તેણે રચેલા દીર્ઘવૃત્તની અર્ધદીર્ઘ અક્ષના ઘનના સમપ્રમાણમાં હોય છે.

કોષ્ટક 8.1 આઠ* ગ્રહોના સૂર્યની ફરતે પરિભ્રમણના આવર્તકાળ (લગભગ) તેમજ તેમની અર્ધદીર્ઘઅક્ષનાં મૂલ્યો આપે છે.

કોષ્ટક 8.1 નીચે આપેલ ગ્રહોની ગતિની માપણીની વિગતો કૅપ્લરના આવર્તકાળના નિયમની પુષ્ટિ કરે છે.

(a = અર્ધદીર્ઘ અક્ષ, 10^{10}mના એકમોમાં
T = ગ્રહના પરિભ્રમણનો આવર્તકાળ, વર્ષમાં (y)
Q = (T^2/a^3) આંક, $10^{-34}y^2m^{-3}$ના એકમોમાં

ગ્રહ	a	T	Q
બુધ	5.79	0.24	2.95
શુક્ર	10.8	0.615	3.00
પૃથ્વી	15.0	1	2.96
મંગળ	22.8	1.88	2.98
ગુરુ	77.8	11.9	3.01
શનિ	143	29.5	2.98
યુરેનસ	287	84	2.98
નૅપ્ચ્યૂન	450	165	2.99
પ્લુટો*	590	248	2.99

ક્ષેત્રફળોનો નિયમ કે જે કોઈ પણ કેન્દ્રિય બળ માટે સાચો છે તે કોણીય વેગમાનના સંરક્ષણના પરિણામ તરીકે સમજી શકાય છે. કેન્દ્રિય બળ એવું છે કે ગ્રહ પર લાગતું બળ, સૂર્ય અને ગ્રહને જોડતા સદિશ પર હોય છે. સૂર્યને ઉદ્‌ગમ તરીકે લઈ ગ્રહનાં સ્થાન અને વેગમાન અનુક્રમે ધારો કે **r** અને **P** વડે દર્શાવાય છે. m દળના ગ્રહ દ્વારા Δt સમયગાળામાં આંતરાતું ક્ષેત્રફળ ΔA છે. (આકૃતિ 8.2), જ્યાં

$$\Delta A = \frac{1}{2}(\mathbf{r} \times \boldsymbol{\upsilon}\Delta t) \qquad (8.1)$$

તેથી,

$$\Delta A/\Delta t = \frac{1}{2}(\mathbf{r} \times \mathbf{p})/m, \text{ (કારણ કે, } \boldsymbol{\upsilon} = \mathbf{p}/m)$$

$$= \mathbf{L} / (2m) \qquad (8.2)$$

જ્યાં **υ** વેગ છે, **L** કોણીય વેગમાન છે, જે (**r** × **p**) બરાબર છે. સ્થાનસદિશ **r**ની દિશા પર લાગતા કેન્દ્રિય બળ

જોહનસ કૅપ્લર (1571-1630) એ જર્મન મૂળનો વિજ્ઞાની હતો. તેણે ટાઇકો બ્રાહે અને તેના સહકાર્યકરોએ કાળજીપૂર્વક લીધેલાં અવલોકનો પરથી ગ્રહોની ગતિ અંગેના ત્રણ નિયમોની રચના કરી. કૅપ્લર પોતે બ્રાહેનો મદદનીશ હતો અને તેને ગ્રહો અંગેના ત્રણ નિયમો પર પહોંચતાં સોળ વર્ષ જેટલો લાંબો સમય લાગ્યો હતો. ટેલિસ્કોપમાં દાખલ થયા પછી પ્રકાશનું શું થાય છે તે જણાવનાર તે પ્રથમ હોવાથી તેને ભૌમિતિક પ્રકાશશાસ્ત્રનો પ્રણેતા ગણવામાં આવે છે.

* પૃ. 182 પર બૉક્સમાં આપેલ માહિતીનો સંદર્ભ લો.

માટે, ગ્રહ પરિભ્રમણ કરતો જાય તે દરમિયાન **L** અચળ રહે છે. તેથી છેલ્લા સમીકરણ મુજબ **ΔA/Δt** એ અચળાંક છે. આ ક્ષેત્રફળોનો નિયમ જ છે. ગુરુત્વ બળ એ કેન્દ્રિય બળ છે અને તેથી ક્ષેત્રફળોનો નિયમ પળાય છે.

ઉદાહરણ 8.1 ધારો કે આકૃતિ 8.1(a)માં સૂર્યનીચ (Perihelion) બિંદુ P આગળ ગ્રહની ઝડપ υ_p અને સૂર્યથી ગ્રહનું SP અંતર r_p છે. $\{r_p, \upsilon_p\}$નો, સૂર્યોચ્ચ (Aphetion) બિંદુ A આગળની અનુરૂપ રાશિઓ સાથે સંબંધ મેળવો. ગ્રહને BAC અને CPB અંતર કાપતાં સરખો સમય લાગશે ?

ઉકેલ P આગળ કોણીય વેગમાનનું માન $L_p = m_p \upsilon_p r_p$ છે કારણ કે આકૃતિ જોતાં જ $\mathbf{r}_p$ અને $\boldsymbol{\upsilon}_p$ પરસ્પર લંબ દેખાય છે. તે જ પ્રમાણે $L_A = m_p \upsilon_A r_A$. કોણીય વેગમાનના સંરક્ષણ પરથી,

$$m_p \upsilon_p r_p = m_p \upsilon_A r_A$$

$$\text{અથવા} \quad \frac{\upsilon_p}{\upsilon_A} = \frac{r_A}{r_p}$$

અહીં, $r_A > r_p$ હોવાથી $\upsilon_p > \upsilon_A$

આકૃતિ 8.1માં ત્રિજ્યા સદિશો SB અને SC સાથે દીર્ઘવૃત્ત વડે ઘેરાયેલું ક્ષેત્રફળ SBAC, SBPC કરતાં વધુ છે. કૅપ્લરના બીજા નિયમ પરથી એકસમાન સમયમાં એકસરખું ક્ષેત્રફળ આંતરાય છે. આથી, ગ્રહને CPB અંતર કરતાં BAC અંતર કાપતાં વધુ સમય લાગશે.

8.3 ગુરુત્વાકર્ષણનો સાર્વત્રિક નિયમ (UNIVERSAL LAW OF GRAVITATION)

એક એવી દંતકથા છે કે, ઝાડ પરથી પડતા સફરજનને જોઈને ન્યૂટનને પ્રેરણા થઈ અને ગુરુત્વાકર્ષણનો સાર્વત્રિક નિયમ મેળવ્યો, જેના પરથી પૃથ્વીના ગુરુત્વાકર્ષણ તેમજ કૅપ્લરના નિયમોની સમજૂતી આપી શકાઈ. ન્યૂટનનો તર્ક એવો હતો કે, R_m ત્રિજ્યાની કક્ષામાં ભ્રમણ કરતા ચંદ્ર પર, પૃથ્વીના ગુરુત્વને લીધે કેન્દ્રગામી પ્રવેગ હોય છે જેનું માન

$$a_m = \frac{V^2}{R_m} = \frac{4\pi^2 R_m}{T^2} \qquad (8.3)$$

છે, જ્યાં V એ ચંદ્રની ઝડપ છે જે આવર્તકાળ T સાથે $V = 2\pi R_m/T$ સંબંધ ધરાવે છે. આવર્તકાળ T લગભગ 27.3 દિવસ છે અને R_mનું મૂલ્ય, તે સમયે પણ લગભગ 3.84×10^8m હોવાનું જાણીતું હતું. જો આપણે આ મૂલ્યો સમીકરણ (8.3)માં અવેજ કરીએ, તો આપણને a_mનું મૂલ્ય, પૃથ્વીની સપાટી પર પૃથ્વીના ગુરુત્વાકર્ષણથી ઉદ્‌ભવતા ગુરુત્વપ્રવેગ gના મૂલ્ય કરતાં ઘણું નાનું મળે છે.

કેન્દ્રિય બળો (Central Forces)

આપણે જાણીએ છીએ કે, ઊગમબિંદુને અનુલક્ષીને કોઈ એક કણના કોણીય વેગમાનના ફેરફારનો સમય-દર $\frac{d\mathbf{l}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ છે.

જો તેની પરના બળ **F**ને લીધે લાગતું ટૉર્ક $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ શૂન્ય બને તો કણના કોણીય વેગમાનનું સંરક્ષણ થાય છે. જ્યારે **F** શૂન્ય હોય અથવા **F** એ **r**ની દિશામાં હોય ત્યારે આવું થાય છે. આપણને એવાં બળોમાં રસ છે જેઓ બીજી શરતનું પાલન કરતા હોય. કેન્દ્રિય બળો આ બીજી શરતનું પાલન કરે છે.

'કેન્દ્રિય' બળ હંમેશાં એક નિશ્ચિત બિંદુ તરફની દિશામાં અથવા તેનાથી દૂરની દિશામાં હોય છે. એટલે કે નિશ્ચિત બિંદુને અનુલક્ષીને બળના લાગબિંદુના સ્થાનસદિશની દિશામાં હોય છે (નીચેની આકૃતિ જુઓ). ઉપરાંત કેન્દ્રિય બળનું માન નિશ્ચિત બિંદુથી બળના લાગબિંદુના અંતર **r** પર આધાર રાખે છે. $F = F(r)$.

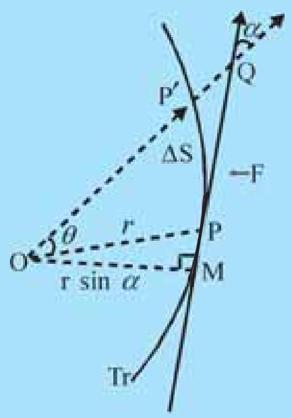
કેન્દ્રિય બળની અસર હેઠળ થતી ગતિમાં, કોણીય વેગમાનનું હંમેશાં સંરક્ષણ થાય છે. આ પરથી બે મહત્ત્વનાં પરિણામ મળે :

(1) કેન્દ્રિય બળની અસર હેઠળ કણની ગતિ હંમેશાં એક સમતલમાં સીમિત હોય છે.

(2) બળના કેન્દ્ર (નિશ્ચિત બિંદુ)ને અનુલક્ષીને કણના સ્થાનસદિશને અચળ ક્ષેત્રીય વેગ હોય છે. બીજા શબ્દોમાં કેન્દ્રિય બળની અસર હેઠળ કણ ગતિ કરતો હોય ત્યારે તેનો સ્થાન સદિશ એક સમાન સમયમાં એક સમાન ક્ષેત્રફળ આંતરે છે.

આ બંને પરિણામો સાબિત કરવાનો પ્રયત્ન કરો. તમારે એ જાણવું જરૂરી છે કે ક્ષેત્રીય વેગ,
$dA/dt = \frac{1}{2} r\, \upsilon \sin\alpha$ વડે અપાય છે.

ઉપર્યુક્ત ચર્ચાનો ત્વરિત ઉપયોગ, સૂર્યના ગુરુત્વબળની અસર હેઠળ ગ્રહની ગતિ પર કરી શકાય છે. સરળતા ખાતર આપણે સૂર્યને એટલો ભારે ગણી લઈએ કે તે સ્થિર રહે છે. સૂર્યનું ગ્રહ પરનું ગુરુત્વબળ, સૂર્ય તરફની દિશામાં છે. આ બળ, $F = F(r)$ આવશ્યકતાનું પણ પાલન કરે છે. કારણ કે $F = G\, m_1 m_2/r^2$ જ્યાં m_1 અને m_2 એ અનુક્રમે ગ્રહ અને સૂર્યના દળ છે અને G એ ગુરુત્વાકર્ષણનો સાર્વત્રિક અચળાંક છે. આથી ઉપર દર્શાવેલાં બે પરિણામો, (1) અને (2), ગ્રહની ગતિને લાગુ પાડી શકાય છે. વાસ્તવમાં, પરિણામ (2)એ ખૂબ જાણીતો એવો કૅપ્લરનો બીજો નિયમ છે.



Tr એ કેન્દ્રિય બળની અસર હેઠળ કણનો ગતિપથ છે. *P* સ્થાને બળ **OP** પર (**PO** દિશામાં) છે, *O* બળનું કેન્દ્ર છે, તેને ઊગમબિંદુ તરીકે લીધેલ છે. Δt સમયમાં, કણ *P* થી *P'* પર ગતિ કરે છે. ચાપ $PP' = \Delta s = \upsilon \Delta t$. *P* આગળ ગતિપથને દોરેલો સ્પર્શક *PQ*, *P* આગળના વેગની દિશા આપે છે. Δt સમયમાં આંતરાતું ક્ષેત્રફળ; $POP' \approx (r \sin\alpha)\, PP'/2 = (r\, \upsilon \sin\alpha)\, \Delta t/2$ છે.

આ સ્પષ્ટ દર્શાવે છે કે, પૃથ્વીનું ગુરુત્વબળ અંતર સાથે ઘટે છે. જો પૃથ્વીનું ગુરુત્વબળ, પૃથ્વીના કેન્દ્રથી અંતરના વર્ગના વ્યસ્ત પ્રમાણમાં ઘટતું જાય તો, $a_m \propto R_m^{-2}$ મળે, વળી $g \propto R_E^{-2}$ અને આમ,

$$\frac{g}{a_m} = \frac{R_m^2}{R_E^2} = 3600 \qquad (8.4)$$

જે, $g \approx 9.8$ m s^{-2} અને સમીકરણ (8.3) પરથી મળતા a_mના મૂલ્ય સાથે સુસંગત છે. આ અવલોકનો પરથી ન્યૂટને ગુરુત્વાકર્ષણનો સાર્વત્રિક નિયમ નીચે મુજબ આપ્યો :

વિશ્વમાંનો દરેક પદાર્થ બીજા દરેક પદાર્થને બળ દ્વારા આકર્ષે છે કે જે તેમના દળના ગુણાકારના સમપ્રમાણમાં અને તેમની વચ્ચેના અંતરના વર્ગના વ્યસ્ત પ્રમાણમાં હોય છે.

આ અવતરણ ન્યૂટનના પ્રખ્યાત ગ્રંથ 'Mathematical Principles of Natural Philosophy' (ટૂંકમાં Principia)માંથી છે.

ન્યૂટનના ગુરુત્વાકર્ષણના નિયમને ગાણિતીક રીતે આમ રજૂ કરાય : એક બિંદુવત્ દળ m_1ને લીધે બીજા બિંદુવત્ દળ m_2 પર લાગતા બળ **F**નું માન

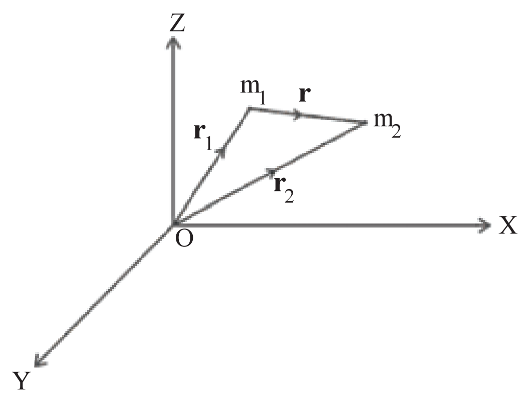
$$|\mathbf{F}| = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \qquad (8.5)$$

છે. સમીકરણ (8.5)ને સદિશ સ્વરૂપમાં નીચે મુજબ રજૂ કરી શકાય :

$$\mathbf{F} = G\frac{m_1 m_2}{r^2}(-\hat{\mathbf{r}}) = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$$

$$= -G\frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r}|^3}\mathbf{r}$$

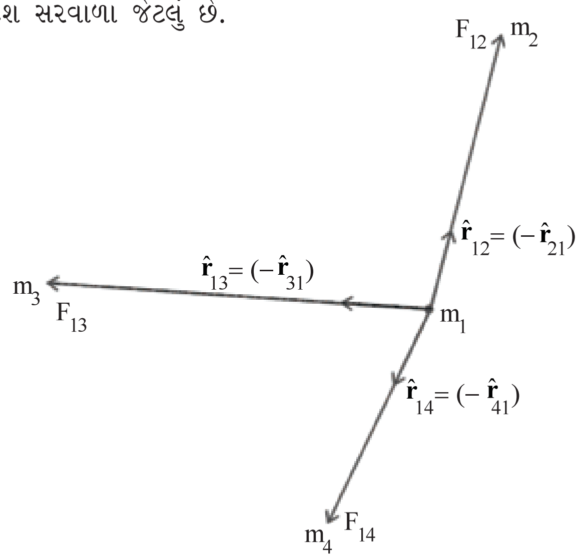
જ્યાં G એ ગુરુત્વાકર્ષણનો સાર્વત્રિક અચળાંક છે. $\hat{\mathbf{r}}$ એ m_1થી m_2ની દિશામાંનો એકમ સદિશ છે અને આકૃતિ 8.3માં દર્શાવ્યા મુજબ $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ છે.



આકૃતિ **8.3** *m_1 પર m_2 વડે લાગતું બળ **r** પર છે. જ્યાં સદિશ $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ છે.*

ગુરુત્વાકર્ષણ બળ એ આકર્ષી બળ છે. એટલે કે બળ **F**, −**r**ની દિશામાં છે. બિંદુવત્ દળ m_1 પર m_2ને લીધે લાગતું બળ, ન્યૂટનના ત્રીજા નિયમ મુજબ −**F** છે. આમ, પદાર્થ 1 પર 2ને લીધે લાગતું ગુરુત્વબળ $\mathbf{F}_{12}$ અને પદાર્થ 2 પર 1ને લીધે લાગતું ગુરુત્વબળ $\mathbf{F}_{21}$ વચ્ચેનો સંબંધ $\mathbf{F}_{12} = -\boldsymbol{F}_{21}$ છે.

સમીકરણ (8.5)ને આપણી વિચારણા હેઠળના પદાર્થો પર લાગુ પાડતાં પહેલાં આપણે ધ્યાન રાખવું પડે, કારણ કે નિયમ તો બિંદુવત્ દળો અંગે છે જ્યારે આપણે જેમને પરિમિત પરિમાણ હોય તેવા વિસ્તારીત પદાર્થો સાથે કામ પાડવાનું છે. જો આપણી પાસે બિંદુવત્ દળોનો સમૂહ હોય, તો તેમાંના કોઈ પણ એક પર લાગતું બળ, આકૃતિ 8.4માં દર્શાવ્યા મુજબ, બીજા બધા બિંદુવત્ દળો વડે તેના પર લાગતાં બળોના સદિશ સરવાળા જેટલું છે.



આકૃતિ **8.4** *બિંદુવત્ દળ m_1 પર લાગતું ગુરુત્વબળ, m_2, m_3 અને m_4 વડે લાગતાં ગુરુત્વબળોના સદિશ સરવાળા જેટલું હોય છે.*

m_1 પર લાગતું કુલ બળ

$$\mathbf{F}_1 = -\left(\frac{Gm_2 m_1}{r_{21}^2}\hat{\mathbf{r}}_{21} + \frac{Gm_3 m_1}{r_{31}^2}\hat{\mathbf{r}}_{31} + \frac{Gm_4 m_1}{r_{41}^2}\hat{\mathbf{r}}_{41}\right)$$

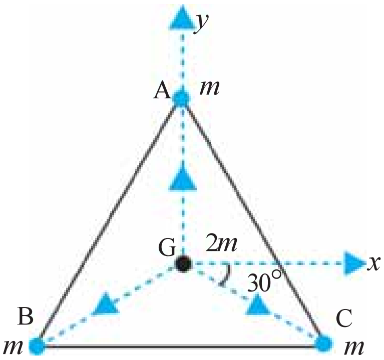
અહીં, $\hat{\mathbf{r}}_{21}$ = m_2 થી m_1 તરફનો એકમ સદિશ, વગેરે.

આપેલા બિંદુએ એકમ દળ દીઠ લાગતા ગુરુત્વબળને તે બિંદુ આગળની ગુરુત્વ તીવ્રતા (અથવા ગુરુત્વક્ષેત્ર) કહે છે. તેનો એકમ N/kg છે.

▶ *ઉદાહરણ 8.2* સમબાજુ ત્રિકોણ ABCના દરેક શિરોબિંદુ પર m kg જેટલું દળ ધરાવતાં પદાર્થ રાખેલ છે.

(a) ત્રિકોણના મધ્યકેન્દ્ર G પર મૂકેલા $2m$ દળ પર કેટલું બળ લાગશે ? (b) જો શિરોબિંદુ A પરનું દળ બમણું કરવામાં આવે તો કેટલું બળ લાગે ?

AG = BG = CG = 1m લો. (જુઓ આકૃતિ 8.5.)



આકૃતિ 8.5 *ત્રિકોણ ABCનાં ત્રણ શિરોબિંદુએ સમાન દળ મૂકેલ છે. 2m દળ મધ્યકેન્દ્ર G પર મૂકેલ છે.*

ઉકેલ (a) GC અને ધન x-અક્ષ વચ્ચેનો કોણ 30^o છે, તેટલા જ કોણ GB અને ઋણ x-અક્ષ વચ્ચે છે. સદિશ રૂપમાં વ્યક્તિગત બળો આ પ્રમાણે છે :

$$\mathbf{F}_{GA} = \frac{Gm(2m)}{1}\,\hat{\mathbf{j}}$$

$$\mathbf{F}_{GB} = \frac{Gm(2m)}{1}(-\hat{\mathbf{i}}\cos 30^o - \hat{\mathbf{j}}\sin 30^o)$$

$$\mathbf{F}_{GC} = \frac{Gm(2m)}{1}(\hat{\mathbf{i}}\cos 30^o - \hat{\mathbf{j}}\sin 30^o)$$

સંપાતપણાના સિદ્ધાંત અને સદિશ સરવાળાના નિયમ પરથી $(2m)$ પર પરિણામી ગુરુત્વબળ $\mathbf{F}_R$ હોય, તો

$$\mathbf{F}_G = \mathbf{F}_{GA} + \mathbf{F}_{GB} + \mathbf{F}_{GC}$$
$$= 2Gm^2\hat{\mathbf{j}} + 2Gm^2(-\hat{\mathbf{i}}\cos 30^o - \hat{\mathbf{j}}\sin 30^o)$$
$$+ 2Gm^2(\hat{\mathbf{i}}\cos 30^o - \hat{\mathbf{j}}\sin 30^o) = 0$$

વૈકલ્પિક રીતે સંમિતિ પરથી પણ પરિણામી બળ શૂન્ય બનવું જોઈએ તેવી કોઈ અપેક્ષા રાખી શકે.

(b) સંમિતિ પરથી બળનો x-ઘટક નાબૂદ થાય છે અને y-ઘટક બાકી રહે છે.

$$\mathbf{F}_R = 4Gm^2\hat{\mathbf{j}} - 2Gm^2\hat{\mathbf{j}} = 2Gm^2\hat{\mathbf{j}}$$ ◀

પૃથ્વી જેવા વિસ્તારીત પદાર્થ અને બીજા એક બિંદુવત્ દળ વચ્ચેના ગુરુત્વબળ માટે સમીકરણ (8.5) સીધેસીધું વાપરી શકાતું નથી. વિસ્તૃત પદાર્થની અંદરનું દરેક બિંદુવત્ દળ આપેલા બિંદુવત્ દળ પર બળ લગાડશે અને આવાં બધાં બળો એક જ દિશામાં નહિ હોય. કુલ બળ મેળવવા માટે આપણે વિસ્તૃત પદાર્થમાંના દરેક બિંદુવત્ દળ વડે લાગતું બળ મેળવી એ બધાં બળોનો સદિશ સરવાળો કરવો પડશે. કલનશાસ્ત્રની મદદથી આ સહેલાઈથી થઈ શકે છે. આમ કરતાં, બે ખાસ કિસ્સાઓમાં સાદો નિયમ મળે છે.

(1) **એક નિયમિત ઘનતા ધરાવતી પોલી ગોળાકાર કવચ અને તેની બહાર રહેલા બિંદુવત્ દળ વચ્ચેનું ગુરુત્વબળ, કવચનું સમગ્ર દળ જાણે કવચના કેન્દ્ર પર કેન્દ્રિત થયું હોય ત્યારે મળતા બળ જેટલું જ હોય છે.** ગુણાત્મક રીતે આને આ રીતે સમજી શકાય : કવચના વિવિધ વિસ્તારો દ્વારા ઉદ્ભવતાં બળોનાં ઘટકો બિંદુવત્ દળ અને કેન્દ્રને જોડતી રેખા પર પણ હોય છે અને આ રેખાને લંબ દિશામાં પણ હોય છે. જ્યારે બધા વિસ્તારો માટેનો સરવાળો કરીએ ત્યારે આ રેખાને લંબ ઘટકો નાબૂદ થાય છે અને માત્ર તે બિંદુને કેન્દ્ર સાથે જોડતી રેખા પરનાં ઘટકો જ બાકી બચે છે. બળનું માન ઉપર જણાવ્યા જેટલું હોય છે.

ન્યૂટનનું પ્રિન્સિપિયા

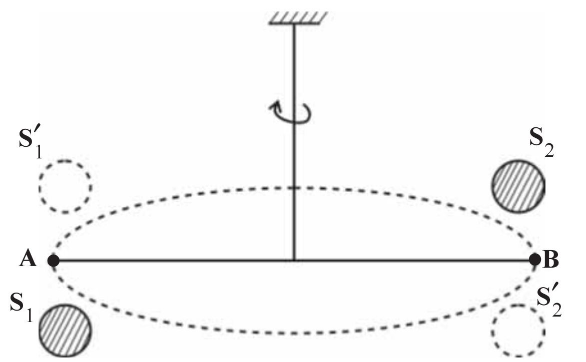
1619 સુધીમાં કેપ્લરે તેનો ત્રીજો નિયમ રચી દીધો હતો. તેમાં કાર્યરત એવા ગુરુત્વાકર્ષણના સાર્વત્રિક નિયમની જાહેરાત લગભગ સિત્તેર વર્ષ પછી 1687માં ન્યૂટનના અદ્ભુત ગ્રંથ **"Philosophiae Naturalis Principia Mathematica"** ઘણી વાર ટૂંકમાં **Principia** કહેવાય છે તેના પ્રકાશન સાથે થઈ.

1685 આસપાસ, ઍડમંડ હેલી (હેલીના ધૂમકેતુનું નામ જેના પરથી પડ્યું તે) ન્યૂટનને મળવા કેમ્બ્રિજ આવ્યો અને વ્યસ્ત વર્ગના નિયમની અસર હેઠળ ગતિ કરતા પદાર્થના ગતિપથ વિશે પૂછ્યું. જરાય આનાકાની વગર ન્યૂટને જવાબ આપ્યો કે તે દીર્ઘવૃત્ત જ હોય, અને વધારામાં પ્લેગ ફાટી નીકળવાથી તેને કેમ્બ્રિજથી પોતાના ફાર્મ હાઉસ પર નિવૃત્તિ ગાળવી પડી ત્યારે, લગભગ 1665માં આ ગણતરી કરેલ હતી તેમ જણાવ્યું. દુર્ભાગ્યે ન્યૂટનના કાગળો ખોવાઈ ગયા હતા. હેલીએ ન્યૂટનને તેનું કાર્ય પુસ્તકરૂપે રજૂ કરવાનું સમજાવ્યું અને પ્રકાશનનો ખર્ચ ઉપાડી લેવા સંમતિ આપી. અઢાર માસના અતિમાનવ સમા પ્રયત્નથી ન્યૂટને આ પરાક્રમ સંપન્ન કર્યું. **પ્રિન્સિપિયા** એ અજોડ, વૈજ્ઞાનિક કૌશલ્ય છે. લાગ્રાન્જના શબ્દોમાં "માનવીય માનસની મહાનતમ નીપજ" છે. ભારતમાં જન્મેલ ખગોળ-ભૌતિકવિજ્ઞાની અને નૉબેલ ઇનામ વિજેતા એસ. ચંદ્રશેખરે **'પ્રિન્સિપિયા'** પર વિવરણ લખવામાં દસ વર્ષ ગાળ્યાં હતાં. તેનું પુસ્તક **Principia for the Common Reader** ન્યૂટનની પદ્ધતિઓમાં રહેલ સુંદરતા, સ્પષ્ટતા અને શ્વાસ થંભાવતી કરકસર પર ધ્યાન કેન્દ્રિત કરે છે.

(2) એક નિયમિત ઘનતા ધરાવતી પોલી ગોળાકાર કવચને લીધે તેની અંદર રહેલા બિંદુવત્ દળ પર લાગતું ગુરુત્વબળ શૂન્ય છે. વળી પાછા, ગુણાત્મક રીતે આપણે આ પરિણામ સમજી શકીએ. ગોળાકાર કવચના વિવિધ વિસ્તારો તે બિંદુવત્ દળને જુદી જુદી દિશાઓમાં આકર્ષે છે. આ બળો સંપૂર્ણ નાબૂદ થાય છે.

8.4 ગુરુત્વાકર્ષી અચળાંક (THE GRAVITATIONAL CONSTANT)

ગુરુત્વાકર્ષણના સાર્વત્રિક નિયમમાં આવતો ગુરુત્વાકર્ષી અચળાંક પ્રયોગ પરથી નક્કી કરી શકાય છે અને આવું સૌપ્રથમ ઇંગ્લિશ વિજ્ઞાની હૅન્રી કૅવેન્ડિશે 1798માં કર્યું હતું. તેણે વાપરેલા સાધનને સંજ્ઞાત્મક રીતે આકૃતિ 8.6માં દર્શાવ્યું છે.



આકૃતિ 8.6 કૅવેન્ડિશના પ્રયોગની સંજ્ઞાત્મક આકૃતિ. S_1 અને S_2 બે મોટા ગોળાઓ છે જેમને A અને B દળો (છાયાંકિત દર્શાવેલ છે)ની એક-એક બાજુએ દર્શાવેલ છે. જ્યારે મોટા ગોળાઓને દળોની બીજી બાજુ (ત્રુટક વર્તુળથી દર્શાવેલ) લઈ જવામાં આવે છે ત્યારે ટૉર્કની દિશા ઉલટાવાથી સળિયો AB થોડું ભ્રમણ કરે છે. ભ્રમણ કોણ પ્રયોગ પરથી માપી શકાય છે.

AB સળિયાના છેડાઓ પર બે નાના સીસાના ગોળા લગાડેલા છે. સળિયાને એક દૃઢ આધાર પરથી પાતળા તાર વડે લટકાવેલ છે. આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ બે મોટા સીસાના ગોળાઓને નાના ગોળાઓની નજીક પરંતુ સામસામી બાજુએ લાવવામાં આવે છે. મોટા ગોળાઓ નાના ગોળાઓને સમાન અને વિરુદ્ધ દિશામાંનાં બળો વડે આકર્ષે છે. સળિયા પર કોઈ ચોખ્ખું (પરિણામી) બળ લાગતું નથી પણ F અને સળિયાની લંબાઈના ગુણનફળ જેટલું ટૉર્ક લાગે છે, જ્યાં F એ મોટા ગોળા અને તેની નજીકના નાના ગોળા વચ્ચે લાગતું આકર્ષણ બળ છે. આ ટૉર્કને લીધે લટકાવેલ તારમાં ત્યાં સુધી વળ ચઢે છે કે જ્યારે તારમાનું પુનઃસ્થાપક ટૉર્ક, ગુરુત્વાકર્ષી ટૉર્ક જેટલું બને. જો લટકાવેલ તારમાં વળ ચઢ્યાનો કોણ θ હોય તો પુનઃસ્થાપક ટૉર્ક θ ના સમપ્રમાણમાં અને $\tau\theta$ જેટલું હોય છે. જ્યાં, τ એ વળના એકમ કોણ દીઠ ઉદ્ભવતું પુનઃસ્થાપક બળ યુગ્મ (Couple) છે. τ ને બીજા સ્વતંત્ર પ્રયોગથી માપી શકાય છે. દા.ત., જ્ઞાત મૂલ્યનું ટૉર્ક લગાડી વળ ચઢ્યાનો કોણ માપીને. ગોળાઓ વચ્ચે લાગતું ગુરુત્વ બળ જાણે તેમનાં દળો તેમનાં કેન્દ્રો પર કેન્દ્રિત થયેલાં હોય ત્યારે લાગતા બળ જેટલું જ છે. આમ જો મોટા અને તેની નજીકના નાના ગોળાનાં કેન્દ્રો વચ્ચેનું અંતર d હોય, M અને m તેમનાં દળ હોય તો મોટા ગોળા અને તેની નજીકના નાના ગોળા વચ્ચે લાગતું ગુરુત્વબળ

$$F = G\frac{Mm}{d^2} \tag{8.6}$$

જેટલું છે. જો સળિયા ABની લંબાઈ L હોય તો F વડે ઉદ્ભવતું ટૉર્ક, F અને Lના ગુણનફળ જેટલું છે. સંતુલન સ્થિતિમાં આ પુનઃસ્થાપક ટૉર્ક જેટલું હોય છે અને તેથી

$$G\frac{Mm}{d^2}L = \tau\,\theta \tag{8.7}$$

આમ, θ ના અવલોકન પરથી આ સમીકરણ વડે Gની ગણતરી કરી શકાય છે.

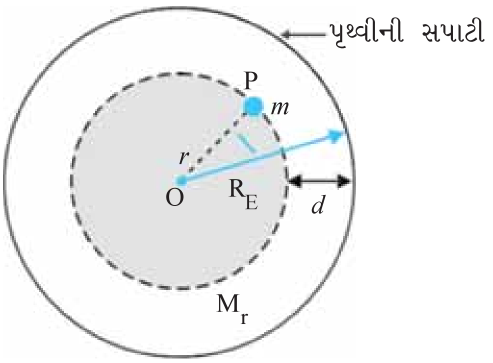
કૅવેન્ડિશના સમયથી Gના માપનમાં સુધારા થતા ગયા છે અને હાલમાં સ્વીકૃત મૂલ્ય

$$G = 6.67 \times 10^{-11}\ \text{N m}^2/\text{kg}^2 \text{ છે.} \tag{8.8}$$

8.5 પૃથ્વીના ગુરુત્વથી ઉદ્ભવતો પ્રવેગ (ACCELERATION DUE TO GRAVITY OF THE EARTH)

પૃથ્વીને એક ગોળા તરીકે કલ્પી લઈને તેને ખૂબ મોટી સંખ્યાના સમકેન્દ્રિય ગોળાકાર કવચોનો બનેલો ગણી શકીએ કે, જેમાં સૌથી નાની કવચ કેન્દ્ર પર અને સૌથી મોટી કવચ સપાટી પર હોય. પૃથ્વીની બહાર રહેલું બિંદુ સ્વાભાવિક રીતે જ બધી કવચોની બહાર છે. આમ બધી કવચો બહારના બિંદુએ એટલું ગુરુત્વબળ લગાડે કે જાણે તેમનાં દળો તેમનાં સામાન્ય કેન્દ્ર પર કેન્દ્રિત થયેલાં હોય ત્યારે મળે. પરિચ્છેદ 8.3માં જણાવેલ પરિણામ મુજબ બધી કવચોનું સંયુક્ત કુલ દળ પૃથ્વીના દળ જેટલું જ છે. આથી, પૃથ્વીની બહારના બિંદુએ ગુરુત્વબળ, જાણે પૃથ્વીનું સમગ્ર દળ તેના કેન્દ્ર પર કેન્દ્રિત થયેલું હોય ત્યારે મળતા બળ જેટલું હોય.

પૃથ્વીની અંદરના બિંદુ માટે પરિસ્થિતિ જુદી છે. આ બાબત આકૃતિ 8.7માં દર્શાવેલ છે.



આકૃતિ 8.7 M_E દળ અને R_E ત્રિજ્યા ધરાવતી પૃથ્વીની સપાટીથી d ઊંડાઈ પર આવેલ ખીણમાં દળ m રહેલ છે. આપણે પૃથ્વીને ગોળીય સંમિતિ ધરાવતી ગણી છે.

વળી પાછા, પૃથ્વીને અગાઉની જેમ સમકેન્દ્રિય કવચોની બનેલી ગણો. તેના કેન્દ્રથી r અંતરે એક બિંદુવત્ દળ m રહેલ છે. P બિંદુ r ત્રિજ્યાના ગોળાની બહાર છે. r કરતાં વધુ ત્રિજ્યા ધરાવતી કવચો માટે P બિંદુ અંદર રહેલું છે. આથી છેલ્લા પરિચ્છેદમાં જણાવેલ પરિણામ મુજબ, P આગળ રાખેલ m દળ પર તેઓ કોઈ બળ લગાડતા નથી. ત્રિજ્યા $\leq r$ ધરાવતી કવચો r ત્રિજ્યાનો ગોળો રચે છે, જેને માટે P બિંદુ સપાટી પર રહેલું છે. આ નાનો ગોળો P આગળ રાખેલા દળ m પર જાણે તેનું દળ M_r કેન્દ્ર પર કેન્દ્રિત થયેલું હોય તે રીતે વર્તીને બળ લગાડે છે. આમ P આગળના દળ m પર લાગતા બળનું માન

$$F = \frac{Gm(M_r)}{r^2} \text{ છે.} \tag{8.9}$$

આપણે સમગ્ર પૃથ્વીને નિયમિત ઘનતા ધરાવતી ધારી છે તેથી તેનું દળ $M_E = \frac{4\pi}{3} R_E^3 \rho$, જ્યાં M_E પૃથ્વીનું દળ, R_E તેની ત્રિજ્યા અને ρ ઘનતા છે. બીજી બાજુ r ત્રિજ્યાના M_r ગોળાનું દળ, $\frac{4\pi}{3}\rho r^3$ છે અને તેથી

$$F = Gm\left(\frac{4\pi}{3}\rho\right)\frac{r^3}{r^2} = Gm\left(\frac{M_E}{R_E^3}\right)\frac{r^3}{r^2}$$

$$= \frac{GmM_E}{R_E^3} r \tag{8.10}$$

જો દળ m પૃથ્વીની સપાટી પર રહેલ હોય, તો $r = R_E$ અને તેના પરનું ગુરુત્વબળ, સમીકરણ (8.10) પરથી

$$F = G\frac{M_E m}{R_E^2} \tag{8.11}$$

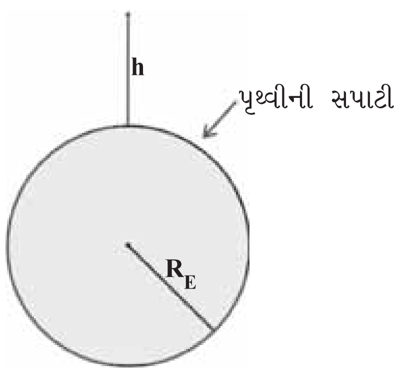
m દળ વડે અનુભવાતા પ્રવેગને સામાન્યતઃ સંજ્ઞા g વડે દર્શાવવામાં આવે છે અને તે F સાથે ન્યૂટનના બીજા નિયમ F = mg દ્વારા સંબંધ ધરાવે છે. આમ

$$g = \frac{F}{m} = \frac{GM_E}{R_E^2} \tag{8.12}$$

પ્રવેગ g સહેલાઈથી માપી શકાય તેવો છે. R_E એ જ્ઞાત રાશિ છે. કેવેન્ડિશના પ્રયોગ (અથવા બીજી રીતે) Gની માપણી કરીને g અને R_Eની જાણકારી પરથી સમીકરણ (8.12) પરથી M_Eનો અંદાજ મેળવી શકાય છે. આ કારણથી કેવેન્ડિશ અંગે એક પ્રખ્યાત કથન છે : ''કેવેન્ડિશે પૃથ્વીનું વજન કર્યું''.

8.6 પૃથ્વીની સપાટીથી નીચે અને ઉપર ગુરુત્વપ્રવેગ (ACCELERATION DUE TO GRAVITY BELOW AND ABOVE THE SURFACE OF EARTH)

આકૃતિ 8.8(a)માં દર્શાવ્યા મુજબ પૃથ્વીની સપાટીથી h ઊંચાઈએ રહેલા એક બિંદુવત્ દળ mનો વિચાર કરો. પૃથ્વીની ત્રિજ્યા R_E વડે દર્શાવેલ છે.



આકૃતિ 8.8(a) પૃથ્વીની સપાટીથી h ઊંચાઈએ g

આ બિંદુ પૃથ્વીની બહાર હોવાથી પૃથ્વીના કેન્દ્રથી તેનું અંતર $(R_E + h)$ છે. આ બિંદુવત્ દળ m પર લાગતું બળ $F(h)$ વડે દર્શાવીએ, તો સમીકરણ (8.5) પરથી

$$F(h) = \frac{GM_E m}{(R_E + h)^2} \tag{8.13}$$

આ બિંદુવત્ દળ વડે અનુભવાતો પ્રવેગ $F(h)/m \equiv g(h)$ છે. આમ

$$g(h) = \frac{F(h)}{m} = \frac{GM_E}{(R_E + h)^2} \qquad (8.14)$$

સ્પષ્ટ રીતે, આ મૂલ્ય gના પૃથ્વીની સપાટી પરના મૂલ્ય $g = \frac{GM_E}{R_E^2}$ કરતાં ઓછું છે. $h << R_E$ માટે આપણે સમીકરણ (8.14)નું વિસ્તરણ કરી શકીએ.

$$g(h) = \frac{GM_E}{R_E^2(1+h/R_E)^2} = g(1 + h / R_E)^{-2}$$

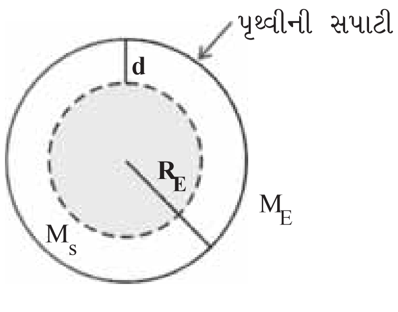
$\frac{h}{R_E} << 1$ માટે, દ્વિપદી પ્રમેયનો ઉપયોગ કરતાં,

$$g(h) \cong g\left(1-\frac{2h}{R_E}\right) \qquad (8.15)$$

સમીકરણ 8.15 જણાવે છે કે સપાટીથી ઉપર નાની ઊંચાઈ h માટે g એ $(1 - 2h / R_E)$ના ગુણાંક મુજબ ઘટે છે.

હવે, પૃથ્વીની સપાટીથી નીચે d ઊંડાઈએ એક બિંદુવત્ દળ mનો વિચાર કરો (આકૃતિ 8.8 (b)), આથી પૃથ્વીના કેન્દ્રથી તેનું અંતર, આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ $(R_E - d)$ છે. પૃથ્વીને $(R_E - d)$ ત્રિજ્યાના નાના ગોળા અને d જાડાઈની ગોળાકાર કવચની બનેલી ગણી શકાય. અગાઉના પરિચ્છેદમાં જણાવેલ પરિણામ મુજબ d જાડાઈની બહારની કવચને લીધે m પર લાગતું બળ શૂન્ય છે. જ્યાં સુધી $(R_E - d)$ ત્રિજ્યાના નાના ગોળાને સંબંધ છે ત્યાં સુધી બિંદુવત્ દળ તેની બહાર છે અને અગાઉ જણાવેલ પરિણામ મુજબ આ નાના ગોળા વડે લાગતું બળ જાણે કે તેનું બધું દળ કેન્દ્ર પર કેન્દ્રિત થયેલું હોય તે પરથી મળે. જો નાના ગોળાનું દળ M_s હોય તો ગોળાનું દળ તેની ત્રિજ્યાના ઘનના સમપ્રમાણમાં હોવાથી

$$M_s / M_E = (R_E - d)^3 / R_E^3 \qquad (8.16)$$



(b)

આકૃતિ 8.8(*b*) d ઊંડાઈએ g. આ કિસ્સામાં ફક્ત $(R_E - d)$ ત્રિજ્યાનો નાનો ગોળો gમાં ફાળો આપે છે.

આમ બિંદુવત્ દળ m પર લાગતું બળ

$$F(d) = G\ M_s\ m / (R_E - d)^2 \qquad (8.17)$$

ઉપરના સમીકરણમાં M_sનું મૂલ્ય અવેજ કરતાં,

$$F(d) = G\ M_E\ m\ (R_E - d) / R_E^3 \qquad (8.18)$$

આથી d ઊંડાઈએ ગુરુત્વપ્રવેગ

$g(d) = \frac{F(d)}{m}$ પરથી

$$g(d) = \frac{F(d)}{m} = \left(\frac{GM_E}{R_E^3}\right)(R_E - d)$$

$$= g\frac{R_E - d}{R_E} = g(1 - d / R_E) \qquad (8.19)$$

આમ, આપણે પૃથ્વીની સપાટીથી જેમ નીચે ને નીચે જઈએ તેમ ગુરુત્વપ્રવેગ $(1 - d / R_E)$ના ગુણાંક મુજબ ઘટે છે. પૃથ્વીના ગુરુત્વને લીધે મળતા પ્રવેગ અંગે નોંધનીય બાબત એ છે કે તેની સપાટી પર મહત્તમ છે અને તમે ઉપર કે નીચે તરફ જાઓ તેમ ઘટતો જાય છે.

8.7 ગુરુત્વસ્થિતિ ઊર્જા (GRAVITATIONAL POTENTIAL ENERGY)

અગાઉ આપણે સ્થિતિઊર્જાના ખ્યાલની, આપેલા સ્થાને પદાર્થમાં સંગ્રહ પામેલી ઊર્જા તરીકે ચર્ચા કરી છે. જો પદાર્થનું સ્થાન તેનાં પર બળો લાગવાથી બદલાતું હોય તો તેની સ્થિતિઊર્જામાં થતો ફેરફાર એ બળ વડે પદાર્થ પર થયેલા કાર્ય જેટલો જ હોય. આપણે અગાઉ ચર્ચા કરી છે કે જે બળો વડે કરવામાં આવતું કાર્ય પથ (માર્ગ) પર આધારિત ન હોય તેવાં બળોને સંરક્ષી બળો કહે છે.

ગુરુત્વાકર્ષણ બળ એ સંરક્ષી બળ છે અને આ બળ દ્વારા ઉદ્ભવતી પદાર્થની સ્થિતિઊર્જા આપણે ગણી શકીએ, જેને ગુરુત્વ સ્થિતિઊર્જા કહે છે. પૃથ્વીની સપાટીની નજીક સપાટીથી પૃથ્વીથી ત્રિજ્યા કરતાં ઘણાં નાનાં અંતરોએ રહેલાં બિંદુઓનો વિચાર કરો. આવા કિસ્સાઓમાં ગુરુત્વ બળ વ્યવહારિક હેતુઓ પૂરતું mg જેટલું લગભગ અચળ અને પૃથ્વીના કેન્દ્ર તરફ લાગતું હોય છે. જો આપણે પૃથ્વીની સપાટીથી h_1 ઊંચાઈએ એક બિંદુ અને તેનાથી ઊર્ધ્વદિશામાં ઉપર બીજું એક બિંદુ પૃથ્વીની સપાટીથી h_2 ઊંચાઈએ વિચારીએ તો, m દળના કણને પ્રથમથી બીજા બિંદુએ લઈ જવામાં થતું કાર્ય W_{12} વડે દર્શાવતાં

$$W_{12} = \text{બળ} \times \text{સ્થાનાંતર}$$

$$= mg(h_2 - h_1) \qquad (8.20)$$

જો આપણે સપાટીથી h ઊંચાઈએ રહેલા બિંદુ સાથે સ્થિતિઊર્જા $W(h)$ સાંકળીએ કે જેથી

$$W(h) = mgh + W_0 \tag{8.21}$$

(જ્યાં W_0 = અચળ)

તો એ સ્પષ્ટ છે કે

$$W_{12} = W(h_2) - W(h_1) \tag{8.22}$$

પદાર્થને ખસેડવા માટે કરાતું કાર્ય તેનાં અંતિમ અને પ્રારંભિક સ્થાનો આગળની સ્થિતિઊર્જાના તફાવત જેટલું જ હોય છે. સમીકરણ (8.22)માં અચળ પદ W_0 નાબૂદ થાય છે તે જુઓ. આ અંતિમ સમીકરણમાં $h = 0$ મૂકતાં આપણને $W(h = 0) = W_0$ મળે. $h = 0$ એટલે પૃથ્વીની સપાટી પરનાં બિંદુઓ. આમ, W_0 એ પૃથ્વીની સપાટી પર સ્થિતિઊર્જા છે.

જો આપણે પૃથ્વીની સપાટીથી યાદચ્છિક અંતરે આવેલાં બિંદુઓ વિચારીએ તો હમણાં જ મળેલું પરિણામ યથાર્થ (valid) નથી કારણ કે ગુરુત્વબળ mg અચળ છે એવી ધારણા યથાર્થ નથી. આમ છતાં આપણી ચર્ચા પરથી આપણે જાણીએ છીએ કે પૃથ્વીની સપાટીની બહારના બિંદુએ રહેલ કણ પર, પૃથ્વીના કેન્દ્ર તરફ લાગતું બળ

$$F = \frac{G M_E m}{r^2} \tag{8.23}$$

છે, જ્યાં M_E પૃથ્વીનું દળ, m = કણનું દળ અને r = તેનું પૃથ્વીના કેન્દ્રથી અંતર. હવે જો આપણે કણને $r = r_1$ થી $r = r_2$ $(r_1 > r_2)$ સુધી ઊર્ધ્વ પથ પર લઈ જવા માટે કરવું પડતું કાર્ય ગણીએ તો સમીકરણ (8.20)ને બદલે,

$W_{12} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{GM_E}{r^2} \mathrm{d}r$ લખાય.

$$W_{12} = -G\, M_E\, m \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) \tag{8.24}$$

સમીકરણ (8.21)ની જગ્યાએ, હવે આપણે r અંતરે સ્થિતિઊર્જા $W(r)$ સાંકળી શકીએ, જ્યાં

$$W(r) = -\frac{G M_E m}{r} + W_1 \tag{8.25}$$

જે $r > R$ માટે યથાર્થ રહે છે.

આમ, ફરીથી આપણને $W_{12} = W(r_2) - W(r_1)$ મળે. સમીકરણ 8.25માં r = અનંત મૂકતાં, $W(r =$ અનંત$) = W_1$ મળે. આમ, W_1 એ અનંત અંતરે સ્થિતિઊર્જા છે. સમીકરણ (8.22) અને (8.24) પરથી આપણે નોંધવું જોઈએ કે સ્થિતિઊર્જાના માત્ર તફાવતને જ કંઈક નિશ્ચિત અર્થ છે. રૂઢિગત રીતે W_1 ને શૂન્ય લેવામાં આવે છે. આથી, આપેલા બિંદુએ સ્થિતિઊર્જા એ કણને અનંત અંતરેથી ખસેડીને તે બિંદુને લાવવામાં કરવું પડતું કાર્ય છે.

આપણે આપેલા બિંદુએ કણ પર પૃથ્વીના ગુરુત્વબળને લીધે ઉદ્ભવતી સ્થિતિઊર્જા ગણી છે, તે કણના દળના સમપ્રમાણમાં છે. પૃથ્વીના ગુરુત્વબળને લીધે આપેલા બિંદુએ ગુરુત્વ સ્થિતિમાનને તે બિંદુએ એકમ દળના કણની સ્થિતિઊર્જા તરીકે વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે છે. અગાઉની ચર્ચા પરથી, આપણે જાણી શકીએ કે m_1 અને m_2 દળના બે કણો વચ્ચે અંતર r હોય, તો તેમની સાથે સંકળાયેલ સ્થિતિઊર્જા

$V = -\frac{G m_1 m_2}{r}$ (જો $r \to \infty$ માટે $V = 0$ પસંદ કરીએ તો)

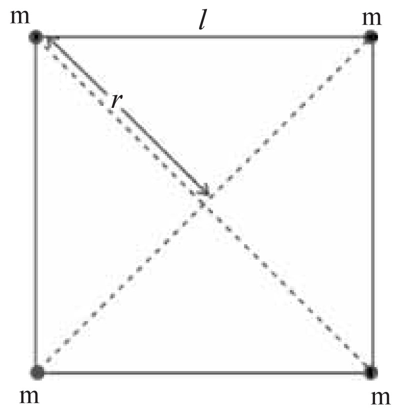
પરથી મળે છે. એ નોંધવું જોઈએ કે કણોના અલગ કરેલા તંત્રની કુલ સ્થિતિઊર્જા (ઉપરના સમીકરણ પરથી મળતી), તેના ઘટક કણોની દરેક શક્ય જોડ માટેની ઊર્જાઓના સરવાળા જેટલી હોય છે. આ સંપાતપણાના સિદ્ધાંતના ઉપયોગનું ઉદાહરણ છે.

ઉદાહરણ 8.3 l લંબાઈની બાજુઓ ધરાવતા ચોરસનાં શિરોબિંદુઓ પર મૂકેલા ચાર કણના તંત્રની સ્થિતિઊર્જા શોધો. ચોરસના કેન્દ્ર પર સ્થિતિમાન શોધો.

ઉકેલ l લંબાઈની બાજુઓ ધરાવતા ચોરસના દરેક શિરોબિંદુ પર m દળ વિચારો. (જુઓ આકૃતિ 8.9.) આપણને l અંતર ધરાવતી દળની ચાર જોડ અને $\sqrt{2}\,l$ અંતર ધરાવતી દળની બે વિકર્ણ જોડ મળે છે.

તેથી,

$$W(r) = -4\frac{G m^2}{l} - 2\frac{G m^2}{\sqrt{2}\, l}$$



આકૃતિ 8.9

$$= -\frac{2Gm^2}{l}\left(2+\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -5.41\frac{Gm^2}{l}$$

ચોરસના કેન્દ્ર આગળ ($r = \sqrt{2}\,l/2$) ગુરુત્વીય સ્થિતિમાન

$$U(r) = -4\sqrt{2}\,\frac{Gm}{l}$$ ◀

8.8 નિષ્ક્રમણ ઝડપ (ESCAPE SPEED)

જો એક પથ્થરને હાથથી ઉપર ફેંકવામાં આવે તો આપણે જોઈએ છીએ કે તે છેવટે તો પાછો પૃથ્વી પર પડે છે. અલબત્ત, આપણે યંત્રનો ઉપયોગ કરીને પદાર્થને વધુ ને વધુ પ્રારંભિક ઝડપે ઉપર ફેંકી શકીએ અને આવી વધુ ને વધુ ઝડપ સાથે પદાર્થ વધુ ને વધુ ઊંચાઈ સર કરી શકે. આ પરથી આપણા મનમાં એક જે સ્વાભાવિક પ્રશ્ન ઉદ્ભવે તે આ છે : શું આપણે પદાર્થને એટલી પ્રારંભિક ઝડપથી ફેંકી શકીએ કે જેથી તે પાછો પૃથ્વી પર પડે જ નહિ ?

ઊર્જા-સંરક્ષણનો નિયમ આ પ્રશ્નનો ઉત્તર મેળવવામાં આપણને મદદરૂપ થાય છે. ધારો કે પદાર્થ અનંત અંતરે પહોંચ્યો અને ત્યાં તેની ઝડપ V_f છે. પદાર્થની ઊર્જા એ સ્થિતિઊર્જા અને ગતિઊર્જાના સરવાળા જેટલી છે. અગાઉની જેમજ W_1 અનંત અંતરે પદાર્થની સ્થિતિઊર્જા દર્શાવે છે. આમ, આ પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થની કુલ ઊર્જા

$$E(\infty) = W_1 + \frac{mV_f^2}{2} \tag{8.26}$$

જો આ પદાર્થને પ્રારંભિક ઝડપ V_i વડે, પૃથ્વીના કેન્દ્રથી ($h + R_E$) અંતરે આવેલા બિંદુએથી ફેંકવામાં આવ્યો હોય, (R_E = પૃથ્વીની ત્રિજ્યા) તો પ્રારંભમાં તેની ઊર્જા

$$E(h + R_E) = \frac{1}{2}mV_i^2 - \frac{GmM_E}{(h+R_E)} + W_1 \tag{8.27}$$

ઊર્જા-સંરક્ષણના સિદ્ધાંત મુજબ સમીકરણો (8.26) અને (8.27) સમાન થવા જોઈએ. તેથી,

$$\frac{mV_i^2}{2} - \frac{GmM_E}{(h+R_E)} = \frac{mV_f^2}{2} \tag{8.28}$$

સમીકરણની જમણી બાજુ એ ધન રાશિ છે અને તેનું લઘુતમ મૂલ્ય શૂન્ય છે. આથી ડાબી બાજુ પણ તેમજ થવી જોઈએ. આમ, જ્યાં સુધી V_iનું મૂલ્ય નીચેની શરતનું પાલન કરે ત્યાં સુધી જ પદાર્થ અનંત અંતરે પહોંચી શકે :

$$\frac{mV_i^2}{2} - \frac{GmM_E}{(h+R_E)} \geq 0 \tag{8.29}$$

V_iના લઘુતમ મૂલ્ય માટે સમીકરણ (8.29)ની ડાબી બાજુ શૂન્ય બરાબર થવી જોઈએ. આમ, કોઈ પદાર્થને અનંત અંતરે પહોંચવા (એટલે કે પૃથ્વીથી મુક્ત થવા) માટેની જરૂરી ઝડપ $(V_i)_{\min}$ લખીએ તો,

$$\frac{1}{2}m(V_i^2)_{\min} = \frac{GmM_E}{(h+R_E)} \tag{8.30}$$

જો પદાર્થને પૃથ્વીની સપાટી પરથી ફેંકવામાં આવેલો હોય, તો $h = 0$ અને તેથી

$$(V_i)_{\min} = \sqrt{\frac{2GM_E}{R_E}} \tag{8.31}$$

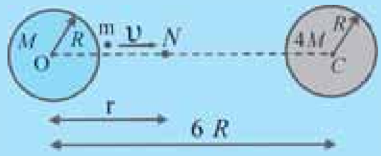
$g = GM_E / R_E^2$, સંબંધનો ઉપયોગ કરતાં, આપણને

$$(V_i)_{\min} = \sqrt{2gR_E} \tag{8.32}$$

મળે. g અને R_Eનાં મૂલ્યોનો ઉપયોગ કરતાં $(V_i)_{\min} \approx 11.2$ km/s મળે છે. આને નિષ્ક્રમણ ઝડપ કહે છે. તેને કેટલીકવાર નિષ્ક્રમણ વેગ પણ કહે છે.

આ સમીકરણ (8.32) ચંદ્રની સપાટી પરથી ફેંકેલા પદાર્થ માટે પણ લાગુ પડે છે, જ્યાં g ચંદ્રની સપાટી પરનો ગુરુત્વપ્રવેગ, R_Eને સ્થાને ચંદ્રની ત્રિજ્યા r મુકાય. આ બંને મૂલ્યો પૃથ્વી માટેનાં મૂલ્યો કરતાં નાનાં છે અને ચંદ્ર માટે નિષ્ક્રમણ ઝડપ 2.3 km/s મળે છે, જે પૃથ્વી માટેના મૂલ્યના લગભગ પાંચમા ભાગનું છે. આ કારણથી જ ચંદ્રને વાતાવરણ નથી. વાયુના અણુઓ ચંદ્રની સપાટી પર રચાય તોપણ ચંદ્રના ગુરુત્વાકર્ષણમાંથી તેઓ છટકી જાય છે.

▶ *ઉદાહરણ 8.4* આકૃતિ 8.10માં દર્શાવ્યા મુજબ R ત્રિજ્યાના બે નિયમિત ઘન ગોળાઓનાં દળ M અને $4M$ છે અને તેમનાં કેન્દ્રો વચ્ચેનું અંતર $6R$ છે. બંને ગોળાઓને સ્થિર જકડી રાખેલ છે. M દળના ગોળાની સપાટી પરથી m દળનો એક પદાર્થ સીધો બીજા ગોળાના કેન્દ્ર તરફ ફેંકવામાં આવે છે. આ પદાર્થ બીજા ગોળાની સપાટી પર પહોંચે તે માટે જરૂરી લઘુતમ ઝડપનું સૂત્ર મેળવો.



આકૃતિ **8.10**

ઉકેલ અહીં, ફેંકાયેલા પદાર્થ પર બે ગોળાઓને લીધે, બે ગુરુત્વબળો પરસ્પર વિરુદ્ધ લાગે છે. આ બે બળો જે બિંદુએ

એકબીજાને બરાબર નાબૂદ કરે તે બિંદુ N (જુઓ આકૃતિ 8.10)ને તટસ્થ બિંદુ તરીકે વ્યાખ્યાયિત કરવામાં છે. જો ON = r હોય તો,

$$\frac{G\,M\,m}{r^2} = \frac{4\,G\,M\,m}{(6R-r)^2}$$

$$(6R - r)^2 = 4r^2$$

$$6R - r = \pm 2r$$

$$r = 2R \text{ અથવા } -6R$$

$r = -6R$ તટસ્થબિંદુની આ ઉદાહરણમાં આપણે ચિંતા કરવાની નથી. આમ, ON = r = 2R આથી પદાર્થને N બિંદુ સુધી પહોંચવા માટે જરૂરી હોય તેટલી ઝડપથી ફેંકવાનું પૂરતું છે. ત્યાર બાદ $4M$ વડે લાગતું ગુરુત્વબળ મોટું હોવાથી પદાર્થને તેની સપાટી પર ખેંચી જશે.

Mની સપાટી પર યાંત્રિકઊર્જા,

$$E_i = \frac{1}{2}m\upsilon^2 - \frac{G\,M\,m}{R} - \frac{4\,G\,M\,m}{5R}$$

તટસ્થબિંદુએ ઝડપ શૂન્ય બને છે અને N આગળ યાંત્રિકઊર્જા માત્ર સ્થિતિઊર્જા છે.

$$E_N = -\frac{G\,M\,m}{2R} - \frac{4\,G\,M\,m}{4R}$$

યાંત્રિકઊર્જાના સંરક્ષણના નિયમ પરથી,

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{GM}{R} - \frac{4GM}{5R} = -\frac{GM}{2R} - \frac{GM}{R}$$

અથવા

$$v^2 = \frac{2GM}{R}\left(\frac{4}{5}-\frac{1}{2}\right)$$

$$v = \left(\frac{3GM}{5R}\right)^{1/2}$$

◀

એક નોંધપાત્ર મુદ્દો એ છે કે ફેંકેલા પદાર્થની ઝડપ N બિંદુએ શૂન્ય છે પરંતુ ભારે ગોળા $4\,M$ને અથડાય ત્યારે શૂન્ય નથી. આ ઝડપની ગણતરી વિદ્યાર્થી પર સ્વાધ્યાય તરીકે છોડેલ છે.

8.9 પૃથ્વીના ઉપગ્રહો (EARTH SATELLITES)

પૃથ્વીના ઉપગ્રહો એ પૃથ્વીની આસપાસ પરિભ્રમણ કરતા પદાર્થો છે. તેમની ગતિ, સૂર્યની આસપાસ ગ્રહોની ગતિ જેવી જ છે અને તેથી ગ્રહોની ગતિના કેપ્લરના નિયમો તેમને પણ સમાન રીતે લાગુ પડે છે. વિશેષ કરીને પૃથ્વીની આસપાસની તેમની કક્ષાઓ વર્તુળાકાર અથવા દીર્ઘવૃત્તિય હોય છે. ચંદ્ર એ પૃથ્વીનો એકમાત્ર કુદરતી ઉપગ્રહ છે. તેની કક્ષા લગભગ વર્તુળાકાર અને આવર્તકાળ લગભગ 27.3 દિવસ છે જે આશરે ચંદ્રની પોતાની અક્ષની આસપાસના તેના ભ્રમણના આવર્તકાળ જેટલો છે. 1957થી ટેક્નોલૉજીમાંના વિકાસને લીધે, ભારત સહિત ઘણા દેશોએ દૂરસંચાર, જીઓફિઝિક્સ અને હવામાનશાસ્ત્ર જેવાં ક્ષેત્રોમાંના વ્યાવહારિક ઉપયોગ માટે કૃત્રિમ ઉપગ્રહો પૃથ્વીની ફરતે તરતા મૂક્યા છે.

આપણે પૃથ્વીના કેન્દ્રથી $(R_E + h)$ અંતરે આવેલી વર્તુળકક્ષામાંના ઉપગ્રહનો વિચાર કરીએ, જ્યાં R_E = પૃથ્વીની ત્રિજ્યા. જો m એ ઉપગ્રહનું દળ અને V તેની ઝડપ હોય, તો કક્ષા માટે જરૂરી કેન્દ્રગામી બળ

$$\text{F(કેન્દ્રગામી)} = \frac{mV^2}{(R_E+h)} \tag{8.33}$$

છે અને તે પૃથ્વીના કેન્દ્ર તરફ હોવું જોઈએ. આ કેન્દ્રગામી બળ ગુરુત્વબળ દ્વારા પૂરું પાડવામાં આવે છે જે

$$\text{F(ગુરુત્વાકર્ષણ)} = \frac{G\,m\,M_E}{(R_E+h)^2} \tag{8.32}$$

છે, જ્યાં M_E એ પૃથ્વીનું દળ છે. સમીકરણો (8.33) અને (8.34)ની જમણી બાજુઓને સરખાવતાં અને mનો છેદ ઉડાડતાં,

$$V^2 = \frac{G\,M_E}{(R_E+h)} \tag{8.35}$$

આમ, જેમ h વધે છે તેમ V ઘટે છે. આ સમીકરણ પરથી h = 0 માટે ઝડપ Vનું મૂલ્ય

$$V^2(h = 0) = GM / R_E = gR_E \tag{8.36}$$

પરથી મળે, જ્યાં આપણે $g = GM / R_E^2$ સંબંધનો ઉપયોગ કર્યો છે. દરેક કક્ષામાં ઉપગ્રહ $2\pi(R_E + h)$ અંતર V ઝડપથી કાપે છે. આથી તેનો આવર્તકાળ T

$$T = \frac{2\pi(R_E+h)}{V} = \frac{2\pi(R_E+h)^{3/2}}{\sqrt{G\,M_E}} \tag{8.37}$$

છે. સમીકરણ (8.35)માંથી Vનું મૂલ્ય અવેજ કરેલ છે. સમીકરણની બંને બાજુનો વર્ગ કરતાં

$$T^2 = k(R_E + h)^3 \text{ (જ્યાં } k = 4\pi^2/GM_E) \tag{8.38}$$

જે પૃથ્વીની આસપાસના ઉપગ્રહને લાગુ પાડેલ કેપ્લરનો આવર્તકાળનો નિયમ છે. પૃથ્વીની સપાટીની ખૂબ નજીકના ઉપગ્રહ માટે સમીકરણ (8.38)માં R_Eની સરખામણીએ hને અવગણી શકાય છે. આથી આવા ઉપગ્રહ માટે Tને T_0 કહીએ તો,

$$T_0 = 2\pi\sqrt{R_E / g} \tag{8.39}$$

મળે. જો આપણે સંખ્યાત્મક મૂલ્યો $g \approx 9.8$ m s^{-2} અને R_E = 6400 km અવેજ કરીએ તો,

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{6.4\times10^6}{9.8}}\ \text{s}$$

મળે. જે લગભગ 85 મિનિટ મળે છે.

ઉદાહરણ 8.5 મંગળ ગ્રહને બે ચંદ્રો છે. ફોબોસ અને ડેલ્મોસ. (i) ફોબોસનો આવર્તકાળ 7 કલાક 39 મિનિટ છે અને કક્ષીય ત્રિજ્યા 9.4×10^3 km છે. મંગળનું દળ શોધો. (ii) પૃથ્વી અને મંગળ સૂર્યની આસપાસ વર્તુળાકારમાં ભ્રમણ કરતા ધારો. પૃથ્વીની કક્ષીય ત્રિજ્યા કરતાં મંગળની કક્ષા 1.52 ગણી છે. મંગળના વર્ષની લંબાઈ કેટલા દિવસની હશે ?

ઉકેલ (i) આપણે સમીકરણ (8.38) લગાડીએ. સૂર્યના દળની જગ્યાએ મંગળનું દળ M_m લઈએ.

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_m} R^3$$

$$M_m = \frac{4\pi^2}{G}\frac{R^3}{T^2}$$

$$= \frac{4 \times (3.14)^2 \times (9.4)^3 \times 10^{18}}{6.67 \times 10^{-11} \times (459 \times 60)^2}$$

$$M_m = \frac{4 \times (3.14)^2 \times (9.4)^3 \times 10^{18}}{6.67 \times (4.59 \times 6)^2 \times 10^{-5}}$$

$$= 6.48 \times 10^{23} \text{ kg}$$

(ii) વળી પાછા આપણે કેપ્લરના ત્રીજા નિયમની મદદ લઈએ.

$$\frac{T_M^2}{T_E^2} = \frac{R_{MS}^3}{R_{ES}^3}$$

જ્યાં R_{MS} એ મંગળ અને સૂર્ય વચ્ચેનું અંતર છે તથા R_{ES} એ પૃથ્વી અને સૂર્ય વચ્ચેનું અંતર છે.

$\therefore\ T_M = (1.52)^{3/2} \times 365$

$= 684$ દિવસ

આપણે નોંધીએ કે બુધ, મંગળ અને પ્લુટો* સિવાયના બધા ગ્રહોની કક્ષા વર્તુળાકારની ખૂબ નજીક જેવી છે. દાખલા તરીકે આપણી પૃથ્વી માટે અર્ધલઘુ અક્ષ અને અર્ધદીર્ઘ અક્ષનો ગુણોત્તર $b/a = 0.99986$ છે. ◀

ઉદાહરણ 8.6 પૃથ્વીનું વજન કરવું : તમને નીચેની વિગતો આપી છે : $g = 9.81$ m s^{-2}, $R_E = 6.37 \times 10^6$ m ચંદ્રનું, અંતર $R = 3.84 \times 10^8$ m અને ચંદ્રના પરિભ્રમણનો આવર્તકાળ 27.3 દિવસ છે. બે જુદી-જુદી રીતોથી પૃથ્વીનું દળ M_E મેળવો.

ઉકેલ સમીકરણ (8.12) પરથી

$$M_E = \frac{gR_E^2}{G}$$

$$= \frac{9.81 \times (6.37 \times 10^6)^2}{6.67 \times 10^{-11}}$$

$$= 5.97 \times 10^{24} \text{ kg}$$

ચંદ્ર, પૃથ્વીનો ઉપગ્રહ છે. કેપ્લરના ત્રીજા નિયમ (સમીકરણ 8.38) પરથી

$$T^2 = \frac{4\pi^2 R^3}{GM_E}$$

$$M_E = \frac{4\pi^2 R^3}{GT^2}$$

$$= \frac{4 \times 3.14 \times 3.14 \times (3.84)^3 \times 10^{24}}{6.67 \times 10^{-11} \times (27.3 \times 24 \times 60 \times 60)^2}$$

$$= 6.02 \times 10^{24} \text{ kg}$$

બંને રીતોથી લગભગ સરખો જવાબ મળે છે. તેમની વચ્ચેનો તફાવત 1 % કરતાં ઓછો છે. ◀

ઉદાહરણ 8.7 સમીકરણ (8.38)માંના અચળાંક kને દિવસ અને કિલોમીટરમાં દર્શાવો. k = 10^{-13} s^{2}m^{-3} આપેલ છે. ચંદ્ર, પૃથ્વીથી 3.8×10^5 km અંતરે છે. તેના પરિભ્રમણનો આવર્તકાળ કેટલા દિવસ છે તે શોધો.

ઉકેલ અહીં આપેલ છે, k = 10^{-13} s^{2}m^{-3}

$$= 10^{-13}\left[\frac{1}{(24 \times 60 \times 60)^2}\text{d}^2\right]\left[\frac{1}{(1/1000)^3\text{km}^3}\right]$$

$$= 1.33 \times 10^{-14} \text{d}^2 \text{ km}^{-3}$$

સમીકરણ (8.38) અને kના આપેલ મૂલ્યનો ઉપયોગ કરતાં, ચંદ્રનો આવર્તકાળ T હોય તો

$T^2 = (1.33 \times 10^{-14})(3.84 \times 10^5)^3$

$T = 27.3$ d ◀

એ નોંધપાત્ર છે કે સમીકરણ (8.38), દીર્ઘવૃત્તિય કક્ષા માટે પણ સાચું છે. જો આપણે $(R_E + h)$ની જગ્યાએ દીર્ઘવૃત્તની અર્ધદીર્ઘ અક્ષ લઈએ તો તે કિસ્સામાં પૃથ્વી દીર્ઘવૃત્તના એક કેન્દ્ર પર હશે.

8.10 કક્ષીય ગતિમાંના ઉપગ્રહની ઊર્જા (ENERGY OF AN ORBITING SATELLITE)

સમીકરણ (8.35)નો ઉપયોગ કરતાં, વર્તુળકક્ષામાં υ ઝડપથી ભ્રમણ કરતા ઉપગ્રહની ગતિઊર્જા

$$\text{ગતિઊર્જા} = \frac{1}{2}m\upsilon^2$$

$$= \frac{GmM_E}{2(R_E + h)} \qquad (8.40)$$

* પૃ. 182 પર બૉક્સમાં આપેલ માહિતીનો સંદર્ભ લો.

અનંત અંતરે ગુરુત્વ સ્થિતિઊર્જા શૂન્ય ગણતાં, પૃથ્વીના કેન્દ્રથી $(R_E + h)$ અંતરે

$$\text{સ્થિતિઊર્જા} = -\frac{GmM_E}{(R_E+h)} \tag{8.41}$$

ગતિઊર્જા ધન છે જ્યારે સ્થિતિઊર્જા ઋણ છે. વળી, ગતિઊર્જા સ્થિતિઊર્જાથી અડધી છે. આથી કુલ ઊર્જા E,

$$E = \text{ગતિઊર્જા} + \text{સ્થિતિઊર્જા} = -\frac{GmM_E}{2(R_E+h)} \tag{8.42}$$

આમ, વર્તુળાકાર કક્ષામાંના ઉપગ્રહની કુલ ઊર્જા ઋણ છે કારણ કે ધન ગતિઊર્જા કરતાં ઋણ સ્થિતિઊર્જા બમણી છે.

જ્યારે ઉપગ્રહની કક્ષા દીર્ઘવૃત્તિય બને છે ત્યારે ગતિઊર્જા અને સ્થિતિઊર્જા બિંદુએ બિંદુએ બદલાય છે. વર્તુળાકાર કક્ષાના કિસ્સાની જેમ જ, કુલ ઊર્જા કે જે અચળ છે તે ઋણ છે. આ આપણી અપેક્ષા મુજબનું જ છે કારણ કે આપણે અગાઉ ચર્ચા કરી તેમ જો કુલ ઊર્જા ધન હોય કે શૂન્ય હોય તો પદાર્થ અનંત અંતરે છટકી જાય છે. ઉપગ્રહો હંમેશાં પૃથ્વીથી નિશ્ચિત અંતરે હોય છે અને તેથી તેમની ઊર્જા ધન કે શૂન્ય ન હોઈ શકે.

▶ *ઉદાહરણ 8.8* એક 400 kgનો ઉપગ્રહ પૃથ્વીની આસપાસ $2R_E$ ત્રિજ્યાની વર્તુળાકાર કક્ષામાં છે. તેને બદલીને $4R_E$ ત્રિજ્યાની વર્તુળાકાર કક્ષામાં લઈ જવા માટે કેટલી ઊર્જાની જરૂર પડે ? તેની ગતિઊર્જા અને સ્થિતિઊર્જામાં શું ફેરફાર થાય ?

ઉકેલ પ્રારંભમાં,

$$E_i = -\frac{GM_E m}{4R_E}$$

જ્યારે અંતમાં,

$$E_f = -\frac{GM_E m}{8R_E}$$

કુલ ઊર્જામાં તફાવત, $\Delta E = E_f - E_i$

$$= \frac{GM_E m}{8R_E} = \left(\frac{GM_E}{R_E^2}\right)\frac{mR_E}{8}$$

$$\Delta E = \frac{g\,m R_E}{8} = \frac{9.81\times400\times6.37\times10^6}{8} = 3.13\times10^9 \text{ J}$$

ગતિઊર્જામાં, ΔE જેટલા મૂલ્યનો ઘટાડો થાય છે.

$\Delta K = K_f - K_i = -3.13 \times 10^9$ J

સ્થિતિઊર્જામાં ફેરફાર, કુલ ઊર્જામાંના ફેરફાર કરતાં બમણો થાય છે.

$\Delta V = V_f - V_i = -6.25 \times 10^9$ J ◀

8.11 ભૂસ્થિર અને ધ્રુવીય ઉપગ્રહો (GEOSTATIONARY AND POLAR SATELLITES)

જો આપણે $(R_E + h)$નું મૂલ્ય એવું યોગ્ય ગોઠવીએ કે જેથી સમીકરણ (8.37)માં Tનું મૂલ્ય 24 કલાક મળે તો એક રસપ્રદ ઘટના ઉદ્ભવે છે. જો વર્તુળાકાર કક્ષા પૃથ્વીના વિષુવવૃત્તીય સમતલમાં હોય તો આવા ઉપગ્રહ માટે આવર્તકાળ, પૃથ્વીના પોતાની ધરીની આસપાસના ભ્રમણના આવર્તકાળ જેટલો થવાથી, પૃથ્વી પરના કોઈ બિંદુએથી જોતાં આવો ઉપગ્રહ સ્થિર દેખાશે. આ હેતુ માટે $(R_E + h)$નું મૂલ્ય R_Eની સરખામણીમાં મોટું મળે છે.

$$(R_E + h) = \left(\frac{T^2 GM_E}{4\pi^2}\right)^{1/3} \tag{8.43}$$

ભારતની અવકાશમાં હરણફાળ

ભારતે 1975માં લઘુ અંતરીય કક્ષકોના ઉપગ્રહ આર્યભટ્ટને તરતો મૂકીને અવકાશયુગમાં પ્રવેશ કર્યો. એ કાર્યક્રમના શરૂઆતના થોડાં વર્ષો લૉંચ વેહિકલ, અગાઉના સોવિયેટ યુનિયન દ્વારા પૂરા પાડવામાં આવ્યા હતા. સ્વદેશી લૉંચ વેહિકલનો ઉપયોગ 1980ના દશકના પ્રારંભમાં રોહિણી શ્રેણીના ઉપગ્રહોને અવકાશમાં મોકલવા માટે થયો હતો. ધ્રુવીય ઉપગ્રહોને અવકાશમાં મોકલવાનો કાર્યક્રમ 1980ના દશકના પાછળના ભાગમાં શરૂ થયો. IRS (Indian Remote Sensing Satellites) શ્રેણીના સંખ્યાબંધ ઉપગ્રહો તરતા મૂકવામાં આવ્યા છે અને આ કાર્યક્રમ ભવિષ્યમાં ચાલુ રહેવાની અપેક્ષા છે. ઉપગ્રહોનો ઉપયોગ મોજણી (Surveying) કરવા, હવામાનની આગાહી કરવા અને અવકાશમાં પ્રયોગો કરવા માટે થાય છે. છેક 1982થી માહિતીની આપ-લે તથા હવામાનની આગાહીના હેતુઓ માટે INSAT (Indian National Satellite) શ્રેણીના ગ્રહોની રચના અને કાર્યાન્વિત કરવામાં આવ્યા છે. INSAT શ્રેણીમાં યુરોપિયન લૉંચ વેહિકલનો ઉપયોગ થયેલ છે. ભારતે તેના ભૂસ્થિર ઉપગ્રહને તરતો મૂકવાની ક્ષમતાનું 2009માં પરીક્ષણ કરી લીધું, જ્યારે તેણે પ્રાયોગિક કમ્યુનિકેશન સેટેલાઇટ (GSAT-1) અવકાશમાં મૂક્યો. 1984માં રાકેશ શર્મા ભારતનો પ્રથમ અવકાશયાત્રી બન્યો. Indian Space Research Organisation (ISRO) એ એક સરકારી સંગઠન તરીકે ઘણાં કેન્દ્રો ચલાવે છે. તેનું મુખ્ય લૉંચ કેન્દ્ર શ્રીહરિકોટા (SHAR) ચેન્નઈથી 100 km ઉત્તરમાં છે. National Remote Sensing Agency (NRSA) હૈદરાબાદની નજીક છે. તેનું અવકાશ સંશોધન કેન્દ્ર, અમદાવાદમાં Physical Research Laboratory (PRL) ખાતે છે.