அத்தியாயம் **10**

வகை நுண்கணிதம்

வகைமை மற்றும் வகையிடல் முறைகள்

DIFFERENTIABILITY AND METHODS OF DIFFERENTIATION

B10C2

"தேவையானதை எடுத்துக் கொள், செய்வன செய்,
அடையவேண்டியதை அடைவாய்"

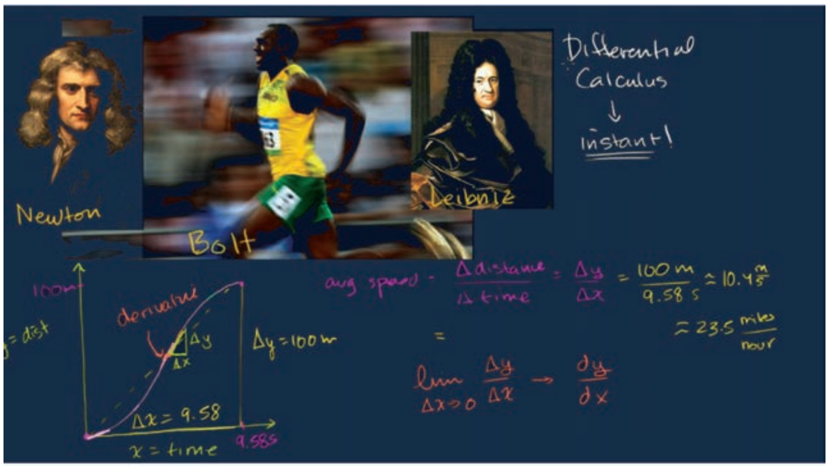
- லிபினிட்ஸ்

10.1 அறிமுகம் (Introduction)

இப்பாடப்பகுதியில் வகைக்கெழுக் கருத்தியலைப் பற்றியும், அதன் தொடர்பான இதர கருத்துகளையும் ஆராய்வதன் மூலம் அன்றாட வாழ்க்கையில் சந்திக்கும் சவால்களுக்குத் தீர்வுக் காண இயலும். இதன் தொடர்ச்சியாக திசைவேகத்தின் சராசரியைக் கீழ்க்காணும் உதாரணத்தின் மூலம் காண்போம்.

ஒரு குறிப்பிட்ட தூரத்தினைக் கடக்க உள்ளுணர்வு மூலம் திசைவேகம் அல்லது வேக வீதத்தினைப் பயன்படுத்தும் இயல்பு பொதுவாக அனைவரிடமும் உள்ளது. சான்றாக ஒரு மணி நேரத்தில் ஒரு பேருந்து 60 கி.மீ. தூரத்தினைக் கடந்தால் அப்பேருந்தின் சராசரித் திசைவேகம் மணிக்கு 60 கி.மீ. என அமையும். ஆனால் பயணத் தூரம் முழுவதும் 60 கி.மீ. எனச் சீரான வேகத்திலேயே பேருந்தினை இயக்க இயலாது. ஏனெனில் நகர்ப்புறங்களில் சற்றே வேகத்தினை குறைக்கவும் பிற வாகனங்களைக் கடக்கும்போது வேகத்தினைக் கூட்டவும் வேண்டும். வேறு சொற்களில் சொல்வதென்றால், நேரத்தினைப் பொறுத்துத் திசைவேகம் மாறும் எனலாம்.

ஒரு போக்குவரத்து நிறுவனத்தின் அட்டவணைப்படி ஒரு பேருந்து ஓர் ஊரிலிருந்து மற்றோர் ஊருக்குச் செல்ல ஒரு மணி நேரத்தில் 60 கி.மீ. கடக்க வேண்டுமெனில் பேருந்தின் பயணப்பாதையில் ஆங்காங்கே ஏற்படும் நேர விரயத்தினையும், வேகக் குறைவினையும் ஏனைய இடங்களில் ஈடுசெய்ய வேண்டும் என்பதனை ஓட்டுநர் உணர்ந்தே பேருந்தினை இயக்குகிறார். சராசரித் திசைவேகம் மணிக்கு 60 கி.மீ. என்று அறிந்திருந்தாலும், ஒரு குறிப்பிட்ட தருணத்தில் பேருந்தின் திசைவேகம் என்னவென்பதற்கு விடையாக அமையாது.



உசேன் போல்ட்டின் சராசரி வேகம்

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{100\text{மீ}}{9.58\text{வி}} = 10.4 \text{ மீ/வி}$$

உசேன் போல்ட்டின் தற்போதைய வேகம் என்ன? → நுண்கணிதம்

பொதுவாக, சராசரித் திசைவேகம் அல்லது நகரும் பொருளின் சராசரி வேகம் என்பது இடப்பெயர்ச்சியின் நேர வீதம் என்பது கீழ்க்காணுமாறு வரையறுக்கப்படுகிறது.

$$v_{ave} = \frac{\text{பயண தூரம்}}{\text{பயண நேரம்}}$$

04_10 Differential Calculus 2.indd 145 30-05-2022 15:12:35

ஒரு 10 கி.மீ பந்தயத் தூரத்தினை ஓர் ஓட்டப் பந்தய வீரர் நிறைவு செய்ய எடுத்துக் கொண்ட நேரம் 1 மணி 15 நிமிடங்கள் (1.25 மணி) எனக் கருதுவோம்.

காட்ஃபிரைட் வில்ஹெலம் லிபினிட்ஸ் (1646 - 1716)

இந்த ஓட்டப் பந்தயத்தில் அவருடைய சராசரித் திசைவேகம் அல்லது சராசரி வேகம்

$$v_{ave} = \frac{10}{1.25} = 8 \text{ கி.மீ. / மணி என்பதாகும்.}$$

பந்தயத்தூரத்தின் பாதித்தூரத்தினைக் கடக்கும் தருணத்தில் ஓடுபவரின் வேகம் v-யினைத் துல்லியமாகக் கணக்கிட வேண்டும் எனக் கருதுவோம். 0 மணியிலிருந்து 0.5 மணிக்குள் உள்ள நேர இடைவெளியில் உள்ள தூரம் 5 கி.மீ. எனில், $v_{ave} = \frac{5}{0.5} = 10$ கி.மீ/மணி ஆகும்.

அதே சமயம், அரை மணி நேரத்தில் ஓடுபவரின் வேக வீதத்திற்கான கணநேர வீதம் v–ஐ சிறந்த குறியீடாக மேற்கண்ட விடையை எடுத்துக் கொள்ள இயலாது. தொடக்க இடத்திலிருந்து 5.7 கி.மீ தூரத்தில் 0.6 மணியில் இருக்கிறார் எனத் தீர்மானித்தால், 0 மணியிலிருந்து 0.6 மணி வரையுள்ள சராசரி வேகம் $v_{ave} = \frac{5.7-5}{0.6-0.5} = 7$ கி.மீ./மணி ஆகும்.

கடைசியாகப் பெறப்பட்ட v–ன் மதிப்பை சற்றேறக்குறையச் சரியான மதிப்பீடாகக் கருதலாம். இக்கால இடைவெளியை 0.5 மணிக்குள் 'குறைப்பதன் மூலமும்' அதற்கேற்ப 5 கி.மீ. தூரத்திற்கு ஒப்ப நேர அளவீட்டையும் கணக்கிடும்போது ஓடுபவரின் வேகத்தினை அரைமணியில் மேலும் சிறப்பான தோராய மதிப்பீடுகளைத் தர இயலும்.

திசைவேகத்தினைக் கணக்கிடுவது என்பது $y = f(x)$ எனும் பொதுவான பகுமுறைச் சார்பினது கணித மாதிரியின் வகையிடுதலைக் கணக்கிடுவதற்கு இட்டுச் செல்கிறது. அதன் விளைவாக கீழ்க்காணும் குறிக்கோள்களையும், தொடர்ச்சியாக வகையிடுதலின் பகுப்பாய்வினைப் பற்றியும் காண்போம்.

கற்றலின் நோக்கங்கள்

இப்பாடப்பகுதி நிறைவுறும்போது மாணவர்கள் அறிந்திருக்க வேண்டியவைகளாக

- பின்னங்களின் எல்லையாக வகையீட்டினை அறிதல்
- வடிவியல் ரீதியாக வகையீட்டினைக் காணுதல்
- மாற்றங்களின் அளவீட்டுச் செயலாக வகையீட்டினைப் புரிந்து கொள்ளுதல்
- வளைவரைகளின் மீதான தொடுகோடுகளின் சாய்வாகவும்/மாறுவீதம் ஆகவும் வகையீட்டினை உணர்ந்து கொள்ளுதல்
- வகையிடுதலின் பல்வேறு முறைகளை அறிந்து கொள்ளுதல்
- அன்றாட நிகழ்வுகளின் தீர்வுகளுக்குக் கருவியாக வகை நுண்கணிதத்தைப் பயன்படுத்துதல்.

ஆகியவை எதிர்பார்க்கப்படுகின்றன.

10.2 வகையிடுதலின் கருத்தாக்கம் (The concept of derivative)

பதினேழாம் நூற்றாண்டில் கணிதவியலாளர்கள் தீர்வு காண முயன்ற நான்கு முக்கியமான கணக்குகளிலிருந்து வகைநுண் கணிதம் தோன்றி வளர்ச்சி பெற்றது. அவை

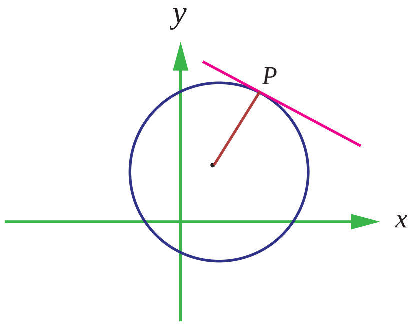
(1) தொடுகோடுக் கணக்கு
(2) திசைவேகம் மற்றும் முடுக்கக் கணக்கு
(3) சிறுமம் மற்றும் பெருமக் கணக்கு
(4) பரப்பளவுக் கணக்கு.

முதலிரண்டு கணக்குகளைப் பற்றி இப்பாடப்பகுதியில் காண்போம். ஏனைய இரண்டினைப் பின்னர் வரும் பாடப்பகுதியில் காணலாம்.

04_10 Differential Calculus 2.indd 146 30-05-2022 15:12:38

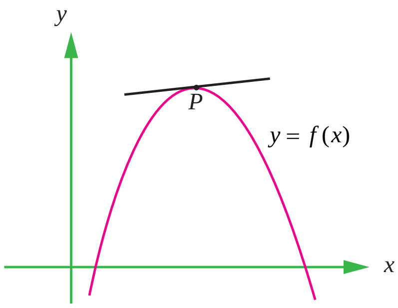
10.2.1. தொடுகோடுக் கணக்கு(The tangent line problem)

ஒரு வளைவரையில் குறிப்பிட்ட ஒரு புள்ளியில் ஒரு நேர்க்கோடு தொடுகோடாக அமைகின்றது என்பதன் பொருள் என்ன? ஒரு வட்டத்தில் 'P' எனும் புள்ளியின் மீது தொட்டுச் செல்லும் தொடுகோடு என்பது படம் 10.1–ல் கண்டுள்ளவாறு 'P' எனும் புள்ளியைச் சந்திக்கும் ஆரக்கோட்டிற்குச் செங்குத்துக் கோடாக (radial line) அமையும்.

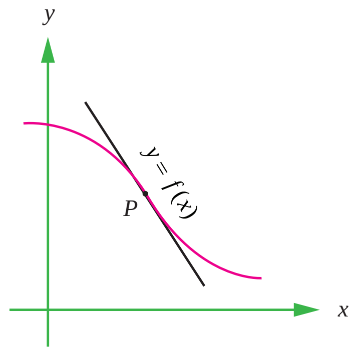


படம் 10.1

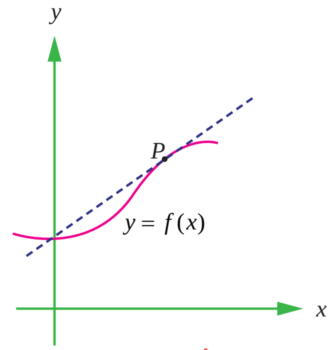
ஆனால் பொதுவான வளைவரையாக இருந்தால் தொடுகோட்டைக் கண்டறிவது மிகக் கடினமான செயலாகும். எடுத்துக்காட்டாக கீழ்க்காணும் 10.2–லிருந்து 10.4 வரையிலான படங்களில் உள்ளவற்றிற்குத் தொடுகோடுகளை எவ்வாறு வரையறுக்க இயலும்?



படம் 10.2



படம் 10.3



படம் 10.4

'P' எனும் புள்ளியில் வளைவரையை வெட்டிச் செல்லாமல் தொட்டுச் செல்லும் கோடுதான் தொடுகோடாக அமையும் எனக் கூற முனையலாம். இந்த வரையறை படம் 10.2–ல் உள்ளது போன்ற வளைவரைக்குப் பொருந்தும், ஆனால் 10.3–ல் உள்ள வளைவரைக்குப் பொருந்தாது, அல்லது ஒரு வளைவரைக்கு ஒரு கோடு தொடுகோடாக அமைய வேண்டுமெனில், கோடும் வளைவரையும் ஒரே ஒரு புள்ளியில் தொட்டுச் செல்லவோ அல்லது சந்திக்கவோ வேண்டும். ஆனால் இந்த வரையறை வட்டத்திற்குப் பொருந்தக் கூடும். ஆனால் படம் 10.4–ல் உள்ளது போன்ற பொதுவான வளைவரைகளுக்கு இந்த வரையறை பொருந்தாது.

அடிப்படையில் 'P' எனும் புள்ளியில் உள்ள தொடுகோட்டைக் கண்டறிய முயல்வது 'P' எனும் புள்ளியில் தொடுகோட்டின் சாய்வினைக் கண்டறிவதாக மாறுகிறது.

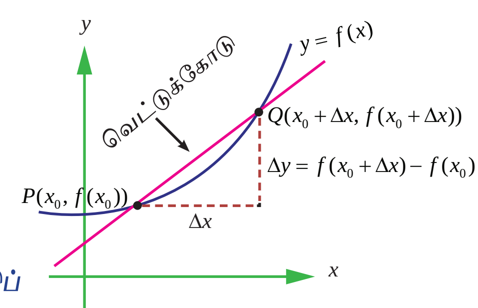
இச்சாய்வினை, தொடுவரைப்புள்ளி (point of tangency) மற்றும் வளைவரையின் மீதான மற்றொரு புள்ளி வழியாகச் செல்லும் வெட்டுக் கோட்டின் சாய்வுக்குத் தோராயமாகப் படம் 10.5ல் காண்பதுபோல் காணலாம்.

தொடுவரைப்புள்ளியாக $P(x_0, f(x_0))$ எனவும் இரண்டாவது புள்ளியாக $Q(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$ எனவும் கருதுவோம்.

$m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ எனும் சாய்வு விதியில் பிரதியிடுவதன் மூலம் இரு புள்ளிகள் வழியாகச் செல்லும் வெட்டுக் கோட்டின் சாய்வைப் பெற இயலும்.

$$m_{sec} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{(x_0 + \Delta x) - x_0} = \frac{y\text{-ன் மாற்றம்}}{x\text{-ன் மாற்றம்}} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

அதாவது, $m_{\text{sec}} = \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ என்பது வெட்டுக்கோட்டின் சாய்வாக அமையும்.



படம் 10.5

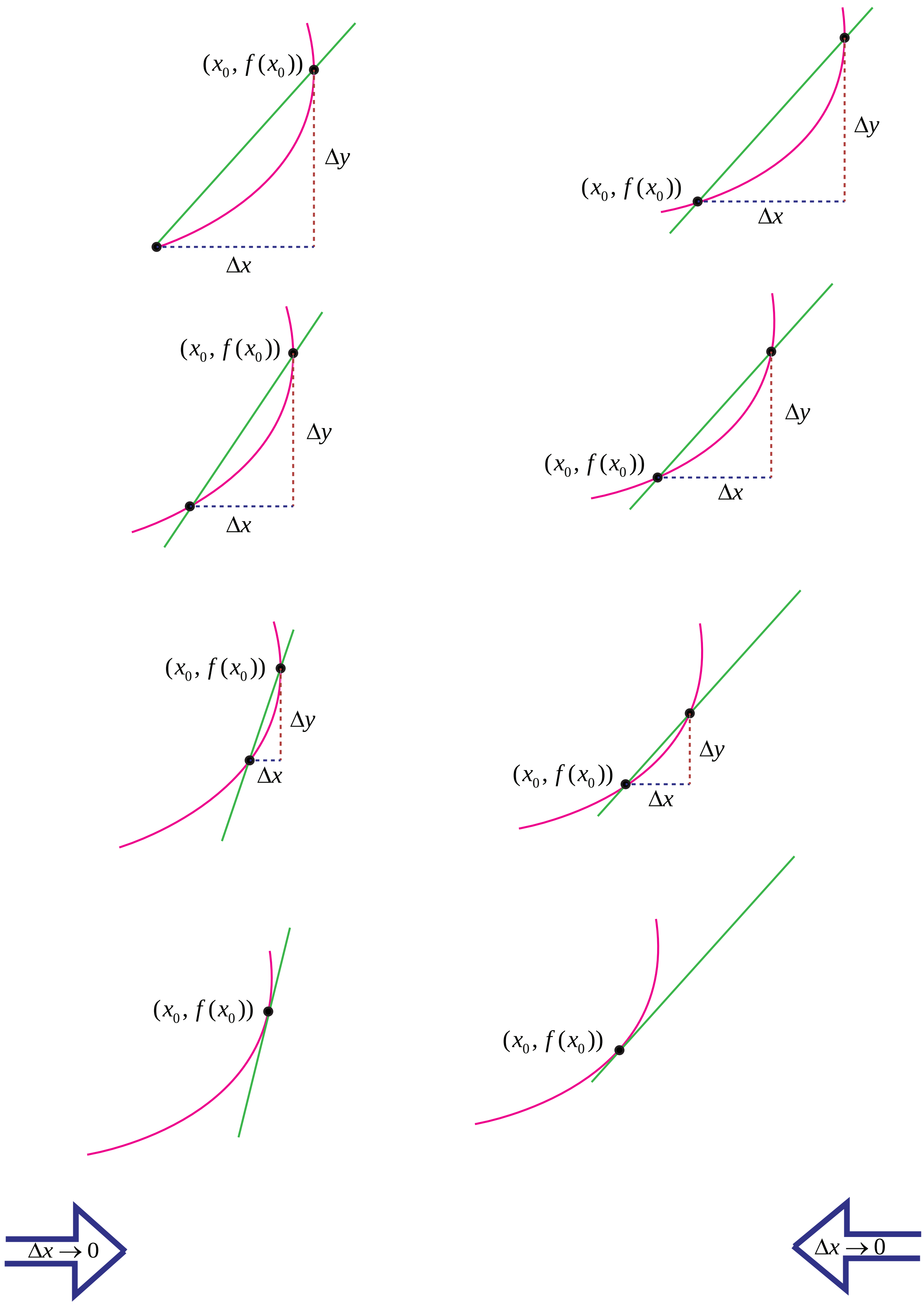
இந்தச் சமன்பாட்டின் வலப்பக்கம் இருப்பது வேறுபாட்டுப் பின்னம் (Difference quotient) ஆகும்.

பகுதி Δx என்பது **x–ன் மாற்றம்** (x–ன் அதிகரிப்பு) மற்றும் தொகுதி $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ என்பது **y–ன் மாற்றம்** ஆகும்.

தொடுவரைப்புள்ளிக்கு மிக அருகே புள்ளிகளைத் தேர்ந்தெடுப்பதன் மூலம் தொடுகோட்டின் சாய்விற்கான சிறந்த தோராய மதிப்பினைப் பெற இயலும் என்பதே இம்முறையின் சிறப்பம்சம் ஆகும்.

04_10 Differential Calculus 2.indd 147
30-05-2022 15:12:41

தொடுகோட்டின் தோராயம்



படம் 10.6 முதல் 10.13 வரை

04_10 Differential Calculus 2.indd 148
30-05-2022 15:12:41

விளக்க எடுத்துக்காட்டு 10.1

$f(x) = x^2$ எனும் வளைவரைக்கு (1, 1) என்ற புள்ளியில் தொடுகோட்டின் சாய்வினைக் கண்டறிவோம்.

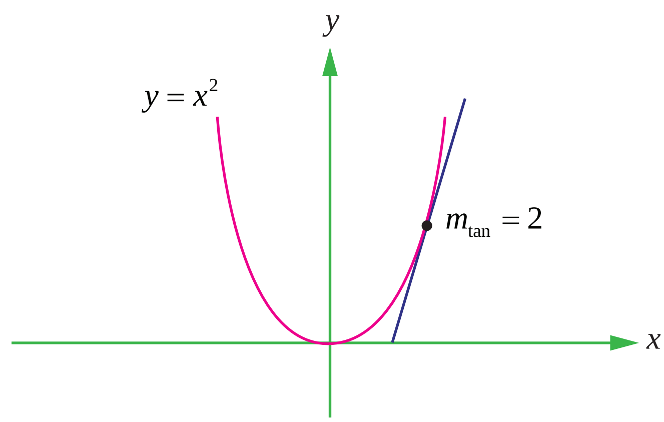
முதலில் $\Delta x = 0.1$ எனக் கருதுவோம். (1, 1) மற்றும் $(1.1, (1.1)^2)$ புள்ளிகள் வழியாகச் செல்லும் வெட்டுக்கோட்டின் சாய்வினைக் கண்டறிவோம்.

(i) $f(1.1) = (1.1)^2 = 1.21$

(ii) $\Delta y = f(1.1) - f(1)$

$= 1.21 - 1 = 0.21$

(iii) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{0.21}{0.1} = 2.1$



படம் 10.14

1–க்கு வலப்பக்கமும் இடப்பக்கமும் அமையும் அடுத்தடுத்த மதிப்புகளைக் கீழ்க்காணும் வகையில் அட்டவணைப்படுத்துவோம்.

Δx	$1 + \Delta x$	$f(1)$	$f(1 + \Delta x)$	Δy	$\Delta y / \Delta x$
0.1	1.1	1	1.21	0.21	2.1
0.01	1.01	1	1.0201	1.0201	2.01
0.001	1.001	1	1.002001	0.002001	2.001
– 0.1	0.9	1	0.81	– 0.19	1.9
– 0.01	0.99	1	0.9801	– 0.0199	1.99
– 0.001	0.999	1	0.998001	– 0.001999	1.999

தெளிவாக, $\lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 2$; $\lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 2$

இவற்றின் மூலம் $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 2$ எனக் காணலாம்.

எனவே, $y = x^2$ எனும் வளைவரையின் தொடுகோட்டின் சாய்வு (1, 1) எனும் புள்ளியில் $m_{tan} = 2$ என அமையும்.

படங்கள் 10.6 முதல் 10.13, விளக்க எடுத்துக்காட்டு 10.1 மற்றும் நமது உள்ளுணர்வின் வாயிலாக, "P எனும் புள்ளியில் $y = f(x)$ எனும் வளைவரையின் 'L' எனும் தொடுகோடு, $Q \to P$ $(\Delta x \to 0)$ எனுமாறு P மற்றும் Q–ன் வழியாகச் செல்லும் வெட்டுக்கோடு PQ –ன் எல்லை என எடுத்துரைக்க இயலும்'. மேலும் L–ன் சாய்வு m_{tan} என்பது $\Delta x \to 0$ எனும்போது m_{sec} –ன் **எல்லை மதிப்பாக** அமையும். இதனையே பின்வருமாறு தொகுத்துக் கூறலாம்:

வரையறை 10.1 (சாய்வு m உள்ள தொடுகோடு) (Tangent line with slope m)

x_0 என்ற புள்ளி அமைந்துள்ள திறந்த இடைவெளியில் f என்ற சார்பினை வரையறுப்போம்.

மேலும், $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = m_{tan}$ கிடைக்கப்பெற்றால், m எனும் சாய்வுடன் $(x_0, f(x_0))$ புள்ளி வழியாகச் செல்லும் கோடு, $(x_0, f(x_0))$ எனும் புள்ளியில் f எனும் வளைவரையின் **தொடுகோடாக** அமையும்.

04_10 Differential Calculus 2.indd 149 30-05-2022 15:12:45

$(x_0, f(x_0))$ என்ற புள்ளியில் வரையப்பட்ட **தொடுகோட்டின் சாய்வு**, அப்புள்ளியில் வளைவரையின் சாய்வு எனவும் அழைக்கப்படுகிறது,

வரையறையின் மூலம் ஒரு வளைவரை $(x_0, f(x_0))$ என்ற புள்ளியில் ஒரு தொடுகோட்டினைத் தருமாயின் அது தனித்ததாக இருக்கும். ஏனெனில் கொடுக்கப்பட்ட ஒரு புள்ளி மற்றும் சாய்வு வழியாக ஒரே ஒரு கோட்டினையே வரைய இயலும்.

வளைவரையின் சாய்வைக் காண்பதற்கான நிபந்தனைகளை 4 படி நிலைகளாக எழுதலாம்.

(i) x_0 மற்றும் $x_0 + \Delta x$ என்ற புள்ளிகளில் f–ன் மதிப்புகளைக் காண்க. அதாவது, $f(x_0)$ மற்றும் $f(x_0 + \Delta x)$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

(ii) Δy கணக்கிடுக: அதாவது $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$–ஐ காண்க.

(iii) Δy–ஐ $\Delta x \neq 0$ஆல் வகுக்க : அதாவது, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ –ஐ காண்க.

(iv) $\Delta x \to 0$ $(\Delta x \neq 0)$ எனும்போது : $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ –ன் எல்லையைக் காண்க. அதாவது, $m_{\tan} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

விளக்கஎடுத்துக்காட்டு 10.1–ல் உள்ள வளைவரையின் சாய்வினைக் காண்பதை எளிமைப்படுத்த வரையறைகள் பயன்படுவதைக் காணலாம்.

(i) $f(1) = 1^2 = 1$.

எந்தவொரு $\Delta x \neq 0$–க்கும் $f(1 + \Delta x) = (1 + \Delta x)^2 = 1 + 2\Delta x + (\Delta x)^2$

(ii) $\Delta y = f(1 + \Delta x) - f(1) = 2\Delta x + (\Delta x)^2 = \Delta x\,(2 + \Delta x)$

(iii) $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x(2 + \Delta x)}{\Delta x}$$

$$= 2 + \Delta x.$$

(iv) $$m_{\tan} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}(2 + \Delta x) = 2 + 0 = 2 \quad .$$

எடுத்துக்காட்டு 10.1

$f(x) = 7x + 5$ எனும் வளைவரைக்கு $(x_0, f(x_0))$ எனும் புள்ளியில் தொடுகோட்டின் சாய்வினைக் காண்க.

தீர்வு

படிநிலை (i) $f(x_0) = 7x_0 + 5$.

எந்தவொரு $\Delta x \neq 0$–க்கும்,

$$f(x_0 + \Delta x) = 7(x_0 + \Delta x) + 5$$
$$= 7x_0 + 7\Delta x + 5$$

படிநிலை (ii) $$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$
$$= (7x_0 + 7\Delta x + 5) - (7x_0 + 5)$$

$$= 7\Delta x$$

படிநிலை (iii) $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 7$$

எனவே, $f(x) = 7x + 5$ எனும் வளைவரையில் உள்ள எந்தவொரு புள்ளிக்கும்,

04_10 Differential Calculus 2.indd 150 30-05-2022 15:12:49

படிநிலை (iv) $m_{\tan} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} (7)$

$= 7$

ஒரு நேரிய வளைவரைக்கு, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ என்பது x_0 மற்றும் ஏற்ற மதிப்பான Δx ஆகியவற்றை சாராமல் ஒரு மாறிலியாக இருக்கும் என்பதனைக் கவனத்தில் கொள்ளவும்.

எடுத்துக்காட்டு 10.2

$f(x) = -5x^2 + 7x$ எனும் வளைவரைக்கு $(5, f(5))$ என்ற புள்ளியில் தொடுகோட்டின் சாய்வினைக் காண்க.

தீர்வு

படிநிலை (i) $f(5) = -5(5)^2 + 7 \times 5 = -125 + 35 = -90.$

எந்தவொரு $\Delta x \neq 0$-க்கும்

$f(5 + \Delta x) = -5(5 + \Delta x)^2 + 7(5 + \Delta x) = -90 - 43\Delta x - 5(\Delta x)^2.$

படிநிலை (ii) $\Delta y = f(5 + \Delta x) - f(5)$

$= -90 - 43\Delta x - 5(\Delta x)^2 + 90 = -43\Delta x - 5(\Delta x)^2$

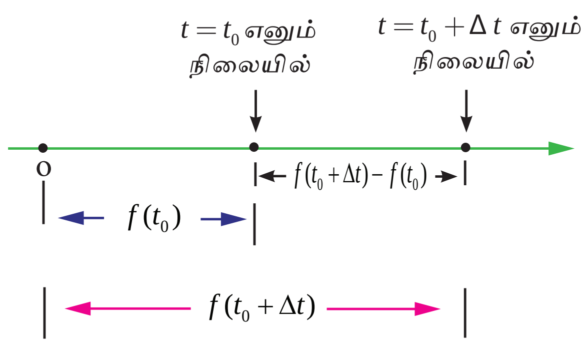
$= \Delta x\,[-43 - 5\Delta x].$

படிநிலை (iii) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = -43 - 5\Delta x$

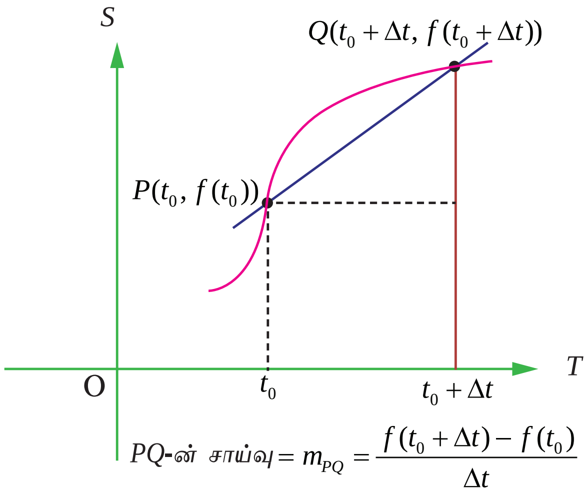
படிநிலை (iv) $m_{\tan} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = -43.$

10.2.2 நேர்க்கோட்டியக்கத்தில் திசைவேகம் (Velocity of Rectilinear motion)

ஆதியிலிருந்து 't' நேரத்தில் ஒரு பொருளின் நகர்வு (இயக்கப்பட்ட தூரம்) s என்க. $s = f(t)$ எனும் இயக்கச் சமன்பாட்டின்படி அப்பொருள் நேர்க்கோட்டில் நகர்வதாகக் கொள்வோம். இங்கு இயக்கத்தை விவரிக்கும் 'f' எனும் சார்புப் பொருளின் '**நிலைச்சார்பு**' (position function) என அழைக்கப்படுகிறது. $t = t_0$-லிருந்து $t = t_0 + \Delta t$ எனும் நேர இடைவெளியில் நிலை மாற்றம் $f(t_0 + \Delta t) - fs(t_0)$ ஆகும். இந்த நேர இடைவெளியில் சராசரி திசைவேகம்



படம் 10.15



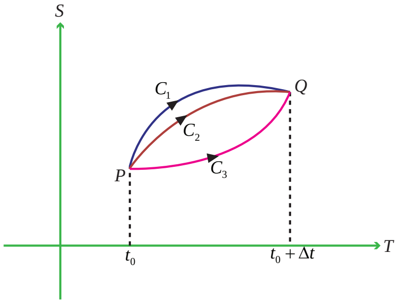
படம் 10.16

04_10 Differential Calculus 2.indd 151 30-05-2022 15:12:51

$$v_{avg} = \frac{\text{நிலை மாற்றத் தொலைவு}}{\text{நேரம்}} = \frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t} = \frac{s\text{-ல் உள்ள மாற்றம்}}{t\text{-ல் உள்ள மாற்றம்}} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

இது படம் 10.16–ல் உள்ளபடி *PQ* எனும் வெட்டுக்கோட்டின் சாய்வு ஆகும்.

நேர இடைவெளி Δt –ல் (t_0–லிருந்து $t_0 + \Delta t$ வரை) தூரத்தை நிறைவு செய்தல் (செல்லும் தூரம்) ஒன்றாக இருந்தாலும் இயக்கம் பல வகையாக அமையலாம். இது ஒரு தளத்திலுள்ள *P* மற்றும் *Q* புள்ளிகளுக்கிடையே முற்றிலும் வெவ்வேறான C_1, C_2, C_3 … வளைவரைகள் மூலம் விளக்கப்பட்டுள்ளது. (படம் 10.17) இந்த வரைபடத்தில் உள்ள வளைவரைகள் கொடுக்கப்பட்ட நேர இடைவெளிகளில், அனைத்து இயக்கங்களுக்கும் $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ எனும் ஒரே சராசரித் திசைவேகம் கொண்டதாகவும் ஆனால், முற்றிலும் வெவ்வேறான இயக்கங்களாகவும் அமைகின்றது.



படம் 10.17

[t_0, $t_0 + \Delta t$] எனும் குறுகிய மற்றும் மேலும் தொடர்ந்து குறுகிய நேர இடைவெளிகளில் சராசரித் திசைவேகங்களை இப்போது கணக்கிடுவோம். வேறு விதமாகக் கூறுவதென்றால், Δt என்பது 0–வை அணுகுவதாக கொள்வோம். இப்போது $t = t_0$ என்ற நேரத்தில் திசைவேகத்தினை $v(t_0)$ (கணநேர திசைவேகம்) சராசரித் திசைவேகங்களின் எல்லையாகக் காணலாம்.

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

இதிலிருந்து $t = t_0$ என்ற நேரத்தில் திசைவேகம் என்பதும் *P* என்ற புள்ளியில் தொடுகோட்டின் சாய்வும் சமமாக இருக்கிறது என்பது தெளிவாகிறது.

விளக்க எடுத்துக்காட்டு 10.2

வெற்றிட வெளியில் தடையின்றி விழும் ஒரு பொருள் கடந்த தூரம் *s* என்க. அதற்கு எடுத்துக்கொள்ளும் நேரம் *t* என்க. இவை இரண்டும் மாறிகளாகவும் ஒன்றையொன்று சார்ந்ததாகவும் இருக்கும். தடையற்று விழும் விதிப்படி மேற்கண்ட சார்ந்த தன்மையைக் கீழ்க்காணுமாறு விவரிக்கலாம்:

$$s = \frac{1}{2}gt^2 \text{ (தொடக்கத் திசைவேகம் இல்லாதபோது),}$$

இங்கு *g* புவியீர்ப்பு மாறிலியாகும்.

படிநிலை (i) $\quad f(t_0 + \Delta t) = \frac{1}{2}g(t_0+\Delta t)^2 = \frac{1}{2}g\left(t_0^2+2t_0\Delta t+(\Delta t)^2\right)$

படிநிலை (ii)

$$\begin{aligned}\Delta s &= f(t_0+\Delta t)-f(t_0)\\ &= \frac{1}{2}g\left[(t_0^2+2t_0\Delta t+(\Delta t)^2\right]-\frac{1}{2}gt_0^2\\ &= g\,\Delta t\left[t_0+\frac{1}{2}\Delta t\right]\end{aligned}$$

படிநிலை (iii) $\quad \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{g\,\Delta t\left[t_0+\frac{1}{2}\Delta t\right]}{\Delta t} = g\left[t_0+\frac{1}{2}\Delta t\right]$

படிநிலை (iv) $\quad v(t_0) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t} = gt_0.$

இதிலிருந்து, t_0 கணநேரத்தில் முழுமையாகத் திசைவேகம் வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது என்பது தெளிவாகிறது. மேலும் இது இயக்க நேரத்திற்கு விகித சமமாக அமைகின்றது.

04_10 Differential Calculus 2.indd 152
30-05-2022 15:12:57

10.2-3. சார்பின் வகைக்கெழு அல்லது வகையிடல் (The derivative of a Function)

இப்போது நாம் நுண் கணிதத்தின் மிக முக்கியமான தருணத்திற்கு வந்துள்ளோம். எல்லை மூலமாகத் தொடுகோட்டின் சாய்வை வரையறுத்தல் அல்லது எல்லை மூலமாகத் தடையின்றி விழும் பொருளின் கணநேரத் திசைவேகத்தினைக் காணுதல், என்பது வகை நுண்கணிதத்தில் உள்ள இரு அடிப்படைச் செயல்பாடுகளில் ஒன்றான **வகையிடல்** ஆகும்.

வரையறை 10.2

x_0 என்ற புள்ளி அமைந்துள்ள ஒரு திறந்த இடைவெளியான $I \subseteq \mathbb{R}$-ல் f என்ற சார்பு வரையறுக்கப்படுகிறது. மேலும் $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ என்பது கிடைக்கப்பெறும் என்க.

இப்போது f என்பது x_0–ல் **வகையிடத்தக்கது** எனவும், x_0–ல் f –ன் **வகைக்கெழு** என்பது $f'(x_0)$ எனக் குறிக்கப்பட்டு பின்வருமாறு அமைகிறது.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

இந்த எல்லையானது கிடைக்கப்பெறும் அனைத்து x-ன் மதிப்புகளுக்கும்

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$ என்பது x-ன் சார்பாக அமையும்.

x–ஆல் ஆன சார்பின் வகைக்கெழுவும் x–ஆல் ஆன சார்பாக அமைவதை உறுதி செய்ய முடியும். இந்தப் "புதிய சார்பு" $(x, f(x))$, எனும் புள்ளியில் f என்ற வளைவரையின் தொடுகோட்டின் சாய்வினைக் கொடுப்பதாக அறியலாம். (அந்தப் புள்ளியில் தொடுகோட்டை வரைய முடியுமெனில்)

ஒரு சார்பின் வகைக்கெழுவைக் காணும் முறையினை **வகையிடல்** என அழைக்கிறோம். ஒரு சார்பு x–ல் வகையிடத்தக்கதாக (வகைமையாக) இருக்க, x–ல் அதன் வகைக்கெழு இருத்தல் வேண்டும். மேலும் **திறந்த இடைவெளியான (a, b)–ல் வகைமையாக இருக்க வேண்டுமாயின் (a, b)–ல் உள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் வகைமையாக இருத்தல் வேண்டும்.**

$y = f(x)$–ன் வகைக்கெழுவைக் குறிக்க, $f'(x)$ "f prime of x" அல்லது "f dash of x" என்பது மட்டுமன்றி பிற குறியீடுகளும் பயன்படுத்தப்படுகின்றன. அவற்றில் சில,

$f'(x), \dfrac{dy}{dx}, y', \dfrac{d}{dx}[f(x)], D_x[y]$ அல்லது Dy அல்லது y_1. இங்கு $\dfrac{d}{dx}$ அல்லது D என்பது வகையிடல் செயலி ஆகும்.

இங்கு $\dfrac{dy}{dx}$ என்பதை "$dy - dx$", அல்லது "Dee y Dee x" அல்லது "Dee Dee x of y" எனவும் படிக்கலாம். இக்குறியீடு ஒரு பின்னத்தை குறிக்காது என்பதை நினைவில் நிறுத்தவும்.

$\dfrac{dy}{dx}$ என்ற குறியீட்டினை **லிபினிட்ஸ் குறியீடு** என்பர்.

10.2.4 ஒரு பக்க வகைக்கெழுக்கள் (இடப்பக்க மற்றும் வலப்பக்க வகைக்கெழு) One sided derivatives (left hand and right hand derivatives)

x_0 எனும் புள்ளியினை உடைய திறந்த இடைவெளியான (a, b)–ல் $y = f(x)$ எனும் சார்பு வரையறுக்கப்படுகிறது. $x = x_0$–ல் f–ன் **இடப்பக்க வகைக்கெழு**வும் **வலப்பக்க வகைக்கெழு**வும் முறையே $f'(x_0^-)$ மற்றும் $f'(x_0^+)$, எனக் குறிக்கப்பட்டுக் கீழ்க்காணுமாறு வரையறுக்கப்படுகிறது.

04_10 Differential Calculus 2.indd 153 30-05-2022 15:13:04

எல்லைகள் கிடைக்கும் பட்சத்தில்

$$f'(x_0^-) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \text{ எனவும்}$$

$$f'(x_0^+) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \text{ எனவும் வரையறுக்கப்படுகின்றன.}$$

அதாவது, வலப்பக்கமாகவும் இடப்பக்கமாகவும் சார்பு வகைமையானதாக அமைகிறது, x_0–ல் சார்பின் எல்லை வரையறையில் கண்டது போல், $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ என்ற வகைக்கெழு கிடைக்கத் தேவையானதும் மற்றும் போதுமானதுமான நிபந்தனை என்னவெனில், $f'(x_0^-) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ மற்றும் $f'(x_0^+) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ ஆகியவை கிடைக்கப்பெற்று, மேலும் $f'(x_0^-) = f'(x_0^+)$ ஆக இருத்தல் வேண்டும் என்பதாகும்.

எனவே, $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \Leftrightarrow f'(x_0^-) = f'(x_0^+)$.

இவற்றில் ஏதேனும் ஒரு நிபந்தனை மீறப்பட்டாலும் f ஆனது x_0 –ல் வகைமையாகாது.

இதனையே $h = \Delta x > 0$ என்ற வகையில்,

$$f'(x_0^+) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \text{ மற்றும்}$$

$$f'(x_0^-) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{h} \text{ ஆகும்.}$$

வரையறை 10.3

$[a, b]$ என்ற மூடிய இடைவெளியில் சார்பு f வகைமையானது எனக்கூற வேண்டுமானால், சார்பு f ஆனது (a, b) எனும் திறந்த இடைவெளியில் வகைமையானதாகவும், மேலும் இறுதிப்புள்ளியான a மற்றும் b–ல்

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}, \quad h > 0$$

$$f'(b) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(b + \Delta x) - f(b)}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(b - h) - f(b)}{h}, \quad h > 0.$$

$x = x_0$ என்ற புள்ளியில் f வகையிடத்தக்கதாக இருப்பின் $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, இங்கு $x = x_0 + \Delta x$ மற்றும் $\Delta x \to 0$ என்பது $x \to x_0$–க்கு சமானம் ஆகும். இத்தகைய மாற்று முறை சில நேரங்களில் வகைமையைக் கணக்கிட எளிதாக அமையும்.

வசதிக்கேற்ப, $h = \Delta x$, என எடுத்துக்கொண்டால் எல்லை கிடைக்கப்பெறின்,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \text{ ஆகும்.}$$

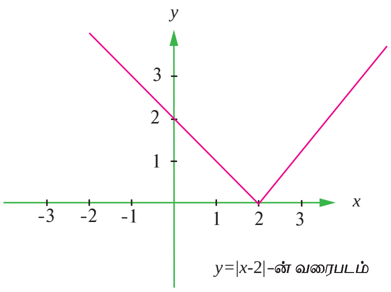
04_10 Differential Calculus 2.indd 154 30-05-2022 15:13:19

10.3 வகைமை (வகையிடல் தன்மை) மற்றும் தொடர்ச்சி (Differentiability and Continuity)

விளக்க எடுத்துக்காட்டு 10.3

$x = 2$ என்ற புள்ளியில் $f(x) = |x - 2|$ எனும் சார்பின் வகைமைத் தன்மையைச் சோதிக்க.

தீர்வு



படம் 10.18

இச்சார்பு $x = 2$-ல் தொடர்ச்சியானது என்பதை அறிவோம்.

ஆனால்,
$$f'(2^-) = \lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$
$$= \lim_{x\to 2^-}\frac{|x-2|-0}{x-2}$$
$$= \lim_{x\to 2^-}\frac{|x-2|}{x-2} = \lim_{x\to 2^-}\frac{-(x-2)}{(x-2)} = -1 \text{ மற்றும்}$$
$$f'(2^+) = \lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$
$$= \lim_{x\to 2^+}\frac{|x-2|-0}{x-2} = \lim_{x\to 2^+}\frac{(x-2)}{(x-2)} = 1 \text{ ஆகும்.}$$

இங்கு இடப்பக்க மற்றும் வலப்பக்க வகைக்கெழுக்களான $f'(2^-)$ மற்றும் $f'(2^+)$ ஆகியவை சமமற்றவை என்பதால், $f'(2)$ கிடைக்கப்பெறாது. அதாவது, $x = 2$-ல் f என்ற சார்பு வகையிடத் தக்கதல்ல. ஏனைய புள்ளிகளில் சார்பு வகைமையானது (வகையிடத்தக்கது) ஆகும்.

மேலும் $x_0 \neq 2$ எனும் மற்ற புள்ளிகளில்

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{|x-x_0|}{x-x_0} = \begin{cases} 1 & x > x_0 \text{ எனில்} \\ -1 & x < x_0 \text{ எனில்} \end{cases}$$

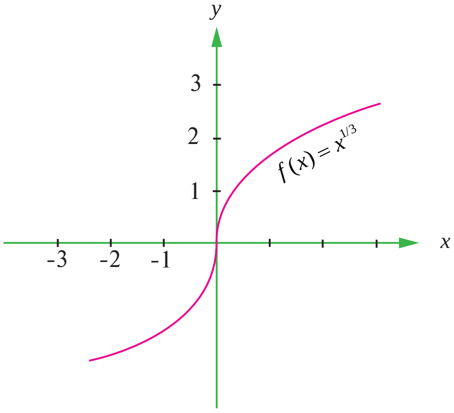
$$\text{Thus} \quad f'(2) = \begin{cases} 1 & x > 2 \text{ எனில்} \\ -1 & x < 2 \text{ எனில்} \end{cases}$$

உண்மையில், $f'(2)$ கிடைக்கப் பெறாது எனும் கருத்து வடிவியல் ரீதியாக வளைவரை $y = |x - 2|$-க்கு $(2, 0)$ என்ற புள்ளியில் தொடுகோடு இல்லை என்பதன் மூலம் புலனாகிறது. மேலும் $(2, 0)$ புள்ளியில் வளைவரை கூர்முனை கொண்டுள்ளதைக் கவனிக்க.

விளக்க எடுத்துக்காட்டு 10.4

$x = 0$ என்ற புள்ளியில் $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ -ன் வகைமைத் தன்மையைக் காண்க.

தீர்வு



படம் 10.19

$f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ என்க. இச்சார்பின் வளைவரையில் எவ்வித துவாரமோ (அல்லது) உடைப்போ இல்லை என்பதால் சார்பகத்தில் உள்ள அனைத்துப் புள்ளிகளிலும் சார்பு தொடர்ச்சியாக இருக்கும்.

$f'(0)$ கிடைக்கப் பெறுமா எனச் சோதித்துப் பார்ப்போம்.

04_10 Differential Calculus 2.indd 155 30-05-2022 15:13:28

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^{\frac{1}{3}} - 0}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} x^{\frac{-2}{3}} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} \to \infty$$

எனவே, $x = 0$–ல், $f(x)$–க்கு வகைமை இல்லை, மேலும் $x = 0$–ல் தொடுகோடு செங்குத்துக் கோடாக உள்ளது (படம் 10.19). எனவே, $x = 0$–ல் f–க்கு வகைமை இல்லை.

ஒரு சார்புக்கு ஒரு புள்ளியில் தொடர்ச்சித் தன்மை உள்ளதாலேயே அச்சார்பு அப்புள்ளியில் வகைமையாக இருக்கும் எனக் கூற இயலாது.

எடுத்துக்காட்டு 10.3

மீப்பெரு முழு எண் சார்பான $f(x) = \lfloor x \rfloor$ என்பது எந்த ஒரு முழு எண்ணிற்க்கும் ஒரு வகைமையாகாது என நிரூபிக்கவும்.

தீர்வு

மீப்பெரு முழு எண் சார்பான $f(x) = \lfloor x \rfloor$ ஆனது ஒவ்வொரு முழு எண் n–க்கும் தொடர்ச்சியற்றது. ஏனெனில் $\lim_{x \to n^-} \lfloor x \rfloor = n - 1$ மற்றும் $\lim_{x \to n^+} \lfloor x \rfloor = n$. எனவே, $f'(n)$ கிடைக்கப்பெறாது.

ஏனைய புள்ளிகளில் சார்பின் வகைமையைப் பற்றி என்ன கூற இயலும்?

விளக்க எடுத்துக்காட்டு 10.5

$$f(x) = \begin{cases} x & x \le 0 \\ 1 + x & x > 0 \end{cases}$$ என்க.

$f'(0)$ கிடைக்கப்பெறின் அதனைக் காண்க.

தீர்வு

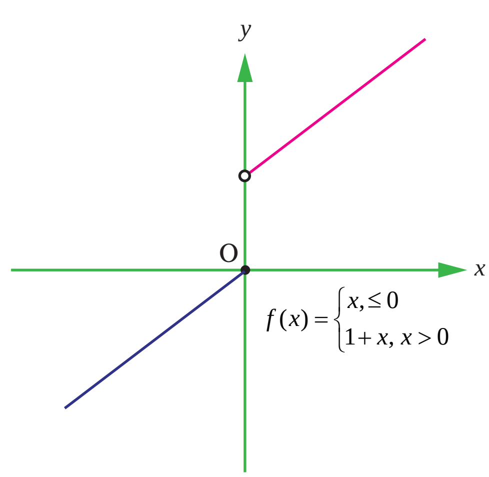
$$f'(0^-) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(\Delta x)}{\Delta x}$$

$$f'(0^-) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

$$f'(0^+) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{1 + \Delta x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^+} \left(1 + \frac{1}{\Delta x}\right) \to \infty$$



படம் 10.20

எனவே $f'(0)$ கிடைக்கப்பெறாது.

இங்கு $x = 0$–ல் f –க்கு ஒரு துள்ளல் (jump) உள்ளது. அதாவது $x = 0$ என்பது ஒரு துள்ளல் தொடர்ச்சியின்மையாகும்.

04_10 Differential Calculus 2.indd 156 30-05-2022 15:13:37

மேற்கண்ட விளக்க எடுத்துக்காட்டுகள் மற்றும் உதாரணங்கள் ஆகியவற்றிலிருந்து பின்வரும் முடிவகளைத் தொகுக்கலாம்.

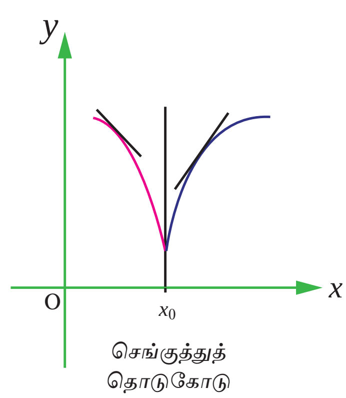
ஒரு சார்பு f ஆனது சார்பகத்திலுள்ள ஒரு புள்ளி x_0–ல் கீழ்க்காணும் ஏதாவது ஒரு நிகழ்வு மெய் எனில், f அப்புள்ளியில் வகைமையாகாது.

(i) $x = x_0$ என்ற புள்ளியில் f –க்கு செங்குத்துத் தொடுகோடு அமைகிறது.

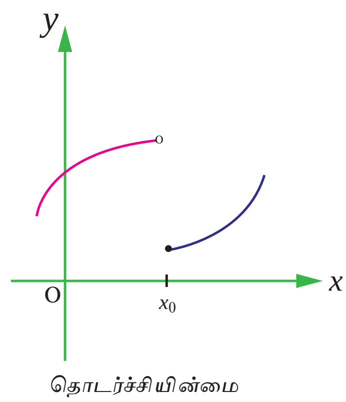
(ii) $x = x_0$ என்ற ஒரு கூர்முனைப்புள்ளியில் சந்திக்கிறது. (கூர்மையான $\vee$ வடிவம் அல்லது கூர்மையான உச்சி $\wedge$)

(iii) $x = x_0$ என்ற புள்ளியில் f ஆனது தொடர்ச்சியற்றது.

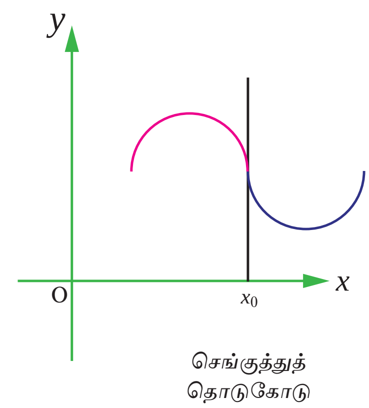
கீழ்க்காணும் நிகழ்வுகளில் ஒரு சார்பு வகைமை ஆகாது :



படம் 10.21



படம் 10.22



படம் 10.23

விளக்க எடுத்துக்காட்டு 10.3 மற்றும் 10.4–ல் சார்பு $f(x) = |x-2|$ மற்றும் $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ முறையே $x = 2$ மற்றும் $x = 0$–ல் தொடர்ச்சியாகவும் ஆனால் அந்த இடங்களில் f வகைமையற்றதாகவும் உள்ளது.

அதே நேரத்தில் 10.3 உதாரணத்திலும் 10.5 விளக்க எடுத்துக்காட்டிலும் உள்ள சார்புகள் $f(x) = \lfloor x \rfloor$ மற்றும் $f(x) = \begin{cases} x & x \le 0 \\ 1+x & x > 0 \end{cases}$ ஆகும். முறையே எந்தவொரு முழு எண் $x = n$–க்கும் மற்றும் $x = 0$ –ல் தொடர்ச்சியற்றும் வகைமையில்லாமலும் அமைகின்றது. மேற்கண்ட ஆய்வைப் பின்வரும் வகையில் சுருக்கமாகக் கூறலாம் : தொடர்ச்சியின்மை வகைமையின்மையை கொடுக்கிறது.

தேற்றம் 10.1 (வகைமைத் தொடர்ச்சியை கொடுக்கிறது)

(Differentiability implies continuity)

$x = x_0$ என்ற புள்ளியில் f வகைமையானால் அப்புள்ளியில் f தொடர்ச்சியானதாக இருக்கும்.

நிரூபணம்

x_0 எனும் புள்ளியைக் கொண்ட (a, b) என்ற இடைவெளியில் $f(x)$ வகைமையானது என்க. எனவே, $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ கிடைக்கப்பெற்று $f'(x_0)$ என்பது ஒரு முடிவுறு எண் என்பது புலனாகிறது.

$$\text{இப்போது } \lim_{\Delta x \to 0}\left[f(x_0+\Delta x) - f(x_0)\right] = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \times \Delta x$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}\right] \times \lim_{\Delta x \to 0}(\Delta x)$$

$$= f'(x_0) \times 0 = 0.$$

இதிலிருந்து $x = x_0$–ல் f தொடர்ச்சியாக இருக்கிறது என்பது உண்மையாகிறது. ◻

04_10 Differential Calculus 2.indd 157 30-05-2022 15:13:41

முதல் கொள்கையிலிருந்து வகைக்கெழு காணல் (Derivatives from first principle)

வகைக்கெழு வரையறைகளில் எடுத்துரைக்கப்பட்ட நிபந்தனைகளைப் பயன்படுத்தி ஒரு சார்பின் வகைக்கெழு காணும் வழிமுறையே முதல் கொள்கையிலிருந்து வகைக்கெழு காணல் என அழைக்கப்படுகிறது.

பயிற்சி 10.1

(1) முதல் கொள்கையினைப் பயன்படுத்திப் பின்வரும் சார்புகளின் வகைக்கெழுக்களைக் காண்க.

(i) $f(x) = 6$ (ii) $f(x) = -4x + 7$ (iii) $f(x) = -x^2 + 2$

(2) கீழ்க்காணும் சார்புகளுக்கு $x = 1$ல் இடப்பக்க மற்றும் வலப்பக்க வகைக்கெழு (கிடைக்கப்பெறின்) காண்க. $x = 1$–ல் சார்புகளுக்கு வகைமைத்தன்மை உள்ளதா என்பதனையும் காண்க.

(i) $f(x) = |x-1|$ (ii) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ (iii) $f(x) = \begin{cases} x, & x \le 1 \\ x^2, & x > 1 \end{cases}$

(3) கொடுக்கப்பட்டுள்ள புள்ளிகளில் கீழ்க்காணும் சார்புகள் வகைமையானதா என்பதைத் தீர்மானிக்கவும்.

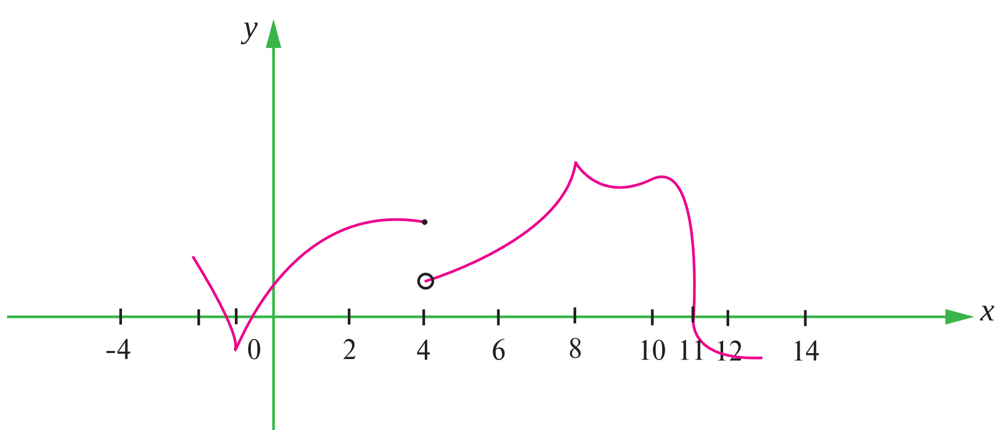
(i) $f(x) = x\,|x|\,;\ x = 0$ (ii) $f(x) = |x^2 - 1|;\ x = 1$

(iii) $f(x) = |x| + |x-1|\ ;\ x = 0, 1$ (iv) $f(x) = \sin|x|\ ;\ x = 0$

(4) கீழ்க்காணும் சார்புகளுக்குக் குறிப்பிடப்பட்டுள்ள புள்ளிகளில் வகைமை இல்லை என்பதை நிறுவுக.

(i) $f(x) = \begin{cases} -x+2, & x \le 2 \\ 2x-4, & x > 2 \end{cases}\ ;\ x = 2$ (ii) $f(x) = \begin{cases} 3x, & x < 0 \\ -4x, & x \ge 0 \end{cases}\ ,\ x = 0$

(5) தரப்பட்டுள்ள f–ன் வரைபடத்தில் எந்தெந்த x–ன் மதிப்புகளுக்கு (எண்களுக்கு) f வகைமை இல்லை என்பதனையும் அதற்கான காரணங்களையும் கூறுக.



படம் 10.24

(6) $f(x) = |x + 100| + x^2$ எனில், $f'(-100)$ கிடைக்கப்பெறுமா எனச் சோதித்துப் பார்க்கவும்.

(7) கீழ்க்காணும் சார்புகளின் வகைமைத் தன்மையைப் படங்கள் வரைந்து $\mathbb{R}$ –ல் பரிசோதிக்கவும்.

(i) $|\sin x|$ (ii) $|\cos x|$

10.4 வகையிடல் விதிகள் (Differentiation Rules)

I எனும் திறந்த இடைவெளியில் மெய்மாறிக்கு வரையறுக்கப்படும் மெய் மதிப்புடைய சார்பு f மற்றும் $y = f(x)$ என்பது x–ன் வகைமைச் சார்பு எனில், $\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ ஆகும்.

04_10 Differential Calculus 2.indd 158 30-05-2022 15:13:45

பொதுவாக முதல் கொள்கையைப் பயன்படுத்தி வகையிடல் காணும் முறை பல இடங்களில் கடினமாகவும் நேர விரயத்தை ஏற்படுத்துவதாகவும் உள்ளது. ஆனால் அனைத்து அடிப்படையான மூலச்சார்புகளுக்கான வகையிடலை அறிந்து, மேலும் சார்புகளின் கணிதச் செயல்பாடுகளைக் கொண்டு வகையிடல் முறையையும், சார்பின் மீதான சார்புகள் முறையையும் அறிந்திருந்தால் ஒவ்வொரு முறையும் எல்லைச் செயலைப் பயன்படுத்தாமல் அனைத்திற்கும் வகையிடல் கண்டறிய இயலும். எனவே வகையிடல் மீதான செயல்பாடுகளை நேரடியாகவே செய்து விடலாம். இப்போது சார்புகளின் கூடுதல், பெருக்கல் மற்றும் வகுத்தலுக்கான வகையிடல் விதிகளின் மீது கவனத்தைச் செலுத்துவோம்.

தேற்றம் 10.2

இரண்டு (அல்லது இரண்டிற்கு மேற்பட்ட) வகைமையான சார்புகளின் கூடுதலின் வகையிடலும் அச்சார்புகளின் தனித்தனியான வகையிடலின் கூடுதலும் சமமாக இருக்கும். அதாவது u மற்றும் v என்பவை இரு வகையிடத்தக்க சார்புகள் எனில் $\frac{d}{dx}(u+v)=\frac{d}{dx}u+\frac{d}{dx}v$.

நிரூபணம்

$I \subseteq \mathbb{R}$ எனும் திறந்த இடைவெளியில் வரையறுக்கப்பட்ட வகைமையான இரு மெய் மதிப்புடைய சார்புகள் u மற்றும் v என்க. $y = u + v$ எனில் $y = f(x)$ என்பது I-ல் வரையறுக்கப்பட்ட சார்பாகும். அனுமானத்தின்படி,

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}$$

$$v'(x) = \frac{dv}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}$$ இருத்தலாகும்.

இப்போது,

$$f(x+\Delta x) = u(x+\Delta x)+v(x+\Delta x)$$

$$f(x+\Delta x)-f(x) = u(x+\Delta x)-u(x)+v(x+\Delta x)-v(x).$$

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}+\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}.$$

இதிலிருந்து, $$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x \to 0}\frac{(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}.$$

அதாவது, $$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = u'(x)+v'(x).$$

அதாவது, $$f'(x) = u'(x)+v'(x).$$

அல்லது $$(u+v)'(x) = u'(x)+v'(x).$$

எனவே, $$\boxed{\frac{d}{dx}(u+v)=\frac{d}{dx}u+\frac{d}{dx}v}.$$

இதனை முடிவுறு எண்ணிக்கையிலான வகைமையான $u_1, u_2, \ldots, u_n$ ஆகிய சார்புகளுக்கும் விரிவுபடுத்தலாம். $(u_1+u_2+\cdots+u_n)'=u_1'+u_2'+\cdots+u_n'$.

தேற்றம் 10.3

u மற்றும் v என்பவை இரு வகையிடத்தக்க சார்புகள் எனில் $\frac{d}{dx}(uv)=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}$

04_10 Differential Calculus 2.indd 159 30-05-2022 15:13:55

நிரூபணம்

u மற்றும் v என்பன கொடுக்கப்பட்ட இரு வகைமையான சார்புகள் ஆதலால்,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x} = \frac{du}{dx} \text{ மற்றும் } \lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x} = \frac{dv}{dx}.$$

$y = f(x) = u.v$ என்க.

எனவே, $f(x + \Delta x) = u(x + \Delta x)\, v(x + \Delta x)$, மற்றும்

$$f(x + \Delta x) - f(x) = u(x + \Delta x)\, v(x + \Delta x) - u(x).v(x)$$

$$= v(x + \Delta x)\left[u(x+\Delta x)-u(x)\right]+u(x)\left[v(x+\Delta x)-v(x)\right].$$

இதிலிருந்து ,
$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = u(x)\frac{\left[v(x+\Delta x)-v(x)\right]}{\Delta x}+v(x+\Delta x)\frac{\left[u(x+\Delta x)-u(x)\right]}{\Delta x}.$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = u(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}v(x+\Delta x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}$$

$$= u(x)v'(x)+v(x)u'(x) \quad (v \text{ தொடர்ச்சியானது, } \lim_{\Delta x\to 0}v(x+\Delta x)=v(x))$$

அதாவது, $f'(x) = u(x)\frac{dv}{dx}+v(x)\frac{du}{dx}$ அல்லது

$$\boxed{\frac{d}{dx}(uv)=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}}$$

அல்லது $\boxed{(uv)'=uv'+vu'}$

இதேபோன்று $(uvw)'=uvw'+uv'w+u'vw$.

மேலும் இதனை முடிவுறு எண்ணிக்கையிலான வகைமையான $u_1, u_2 \ldots u_n$ சார்புகளுக்கு நீட்டித்து, கணிதத் தொகுத்தறிதல் மூலம் கீழ்வருமாறு பெறலாம் :

$$(u_1.u_2,\ldots,u_n)' = u_1u_2\ldots u_{n-1}u_n' + u_1u_2\ldots u_{n-1}'u_n + \ldots + u_1'u_2\ldots u_n.$$

தேற்றம் 10.4 (வகுத்தல் விதி) (Quotient Rule)

u மற்றும் v வகைமையான இரு சார்புகள், $v(x)\neq 0$ எனில் $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\frac{du}{dx}-u\frac{dv}{dx}}{v^2}$.

நிரூபணம்

$y = f(x) = \frac{u}{v}$ என்க. மேலும் $v(x)\neq 0$.

இப்போது $f(x+\Delta x) = \frac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)}$

இதிலிருந்து, $f(x+\Delta x)-f(x) = \frac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)}-\frac{u(x)}{v(x)}$

04_10 Differential Calculus 2.indd 160 30-05-2022 15:14:06

$$= \frac{v(x)u(x+\Delta x)-u(x)v(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)v(x)}.$$

இதிலிருந்து, $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{\frac{v(x)\left[u(x+\Delta x)-u(x)\right]}{\Delta x}-\frac{u(x)\left[v(x+\Delta x-v(x)\right]}{\Delta x}}{v(x+\Delta x)v(x)}$

இதிலிருந்து $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{v(x)\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}-u(x)\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}}{v(x)\lim\limits_{\Delta x\to 0}v(x+\Delta x)}$

$$= \frac{v(x)u'(x)-u(x)v'(x)}{v(x)v(x)} \qquad \left(\because \lim_{\Delta x\to 0}v(x+\Delta x)=v(x)\right)$$

இதிலிருந்து, $f'(x) = \frac{v(x)u'(x)-u(x)v'(x)}{\left[v(x)\right]^2}.$

அதாவது, $\frac{d}{dx}(f) = \frac{vu'-uv'}{v^2}$

அல்லது $\boxed{\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\frac{du}{dx}-u\frac{dv}{dx}}{v^2}}.$

தேற்றம் 10.5 (இணைப்பு விதி / சார்புகளின் சேர்ப்பின் விதி / சார்பின் சார்பு விதி)

(Chain Rule / Composite Function Rule or Function of a Function Rule)

$y = f(u)$ என்பது u-ன் சார்பாகவும் மேலும் $u = g(x)$ என்பது x-ன் சார்பாகவும் இருப்பின்

$y = f\left(g(x)\right)=(fog)(x)$. இப்போது $\frac{d}{dx}(f(g(x)) = f'(g(x))g'(x).$

நிரூபணம்

$y = f\left(g(x)\right)=(fog)(x)$

மேற்கண்ட சார்பில் $u = g(x)$ என்பது உட்சார்பு எனவும், f என்பது வெளிப்புறச் சார்பு எனவும் அழைக்கப்படுகிறது.

முத்தாய்ப்பாக y என்பது x-ன் சார்பாகும்.

இப்போது $\Delta u = g(x+\Delta x)-g(x)$

எனவே $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta u}\times\frac{\Delta u}{\Delta x}=\frac{f(u+\Delta u)-f(u)}{\Delta u}\times\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}$

$\Delta x\to 0$ எனில் $\Delta u\to 0$ ஆகும்.

எனவே, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta u}\times\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$

$$= \lim_{\Delta u\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta u}\right).\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$$

04_10 Differential Calculus 2.indd 161 30-05-2022 15:14:15

$$= \lim_{\Delta u \to 0} \frac{f(u+\Delta u)-f(u)}{\Delta u} \times \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}$$

$$= f'(u) \times u'(x)$$

$$= f'\left(g(x)\right)g'(x) \text{ அல்லது } \boxed{\frac{d}{dx}\left(f(g(x)\right) = f'\left(g(x)\right)g'(x)}$$

எனவே $y = f\left(g(x)\right)$ எனும் சார்பினை வகையிட $g(x) = u$ என்பதைப் பொறுத்து வெளிப்புறச்சார்பு f-ன் வகையிடலைச் சாரா மாறி x-ஐ பொறுத்து உட்புறச் சார்பின் வகையிடலுடன் பெருக்க வேண்டும். இங்கு u என்பது இடைப்பட்ட மாறி என அழைக்கப்படுகிறது. ◻

தேற்றம் 10.6

$f(x)$ என்ற சார்பு வகைமையானதாகவும், $y = kf(x), k \neq 0$ எனில் $\frac{d}{dx}\left(kf(x)\right) = k\frac{d}{dx}f(x)$

நிரூபணம்

$f(x)$ என்பது வகைமையான சார்பு என்க. $y = kf(x)$, $k \neq 0$ என்க.

f என்பது வகைமையானதால் $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = f'(x)$

$y = h(x) = kf(x)$ என்க.

$$h(x+\Delta x) = kf(x+\Delta x)$$

$$h(x+\Delta x) - h(x) = kf(x+\Delta x) - kf(x)$$

$$= k\left[f(x+\Delta x) - f(x)\right]$$

$$\frac{h(x+\Delta x)-h(x)}{\Delta x} = k\frac{\left[f(x+\Delta x)-f(x)\right]}{\Delta x}$$

இதிலிருந்து, $$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{h(x+\Delta x)-h(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} k\frac{\left[f(x+\Delta x)-f(x)\right]}{\Delta x}$$

$$= k\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\left[f(x+\Delta x)-f(x)\right]}{\Delta x}$$

$$= kf'(x) = k\frac{d}{dx}f(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left(h(x)\right) = k\frac{d}{dx}f(x)$$

அதாவது, $$\boxed{\frac{d}{dx}\left(kf(x)\right) = k\frac{d}{dx}f(x)}$$

10.4.1 அடிப்படைச் சார்புகளின் வகைக்கெழு

(Derivatives of basic elementary functions)

அனைத்து அடிப்படைச் சார்புகளின் வகையிடல் முறையை காண்போம். முதலில் மாறிலிச் சார்பினை எடுத்துக் கொள்வோம்.

04_10 Differential Calculus 2.indd 162 30-05-2022 15:14:24

(1) மாறிலிச் சார்பின் வகையிடல் பூஜ்ஜியமாகும்

$y = f(x) = k$ என்க, k ஒரு மாறிலி

எனவே $f(x + \Delta x) = k$ மற்றும்

$f(x + \Delta x) - f(x) = k - k = 0$

இதிலிருந்து, $\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = 0$

எனவே, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = 0$

That is, $f'(x) = 0$

or $\boxed{\dfrac{d}{dx}(k) = 0}$

(2) $y = x^n$ எனும் அடுக்குச் சார்பு, $n > 0$ என்பது ஒரு முழு எண்

$f(x) = x^n$ என்க.

எனவே, $f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^n$ மற்றும்

$f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^n - x^n$

இதிலிருந்து, $\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \dfrac{(x+\Delta x)^n - x^n}{(x+\Delta x)-x}$

ஆகையால் $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{(x+\Delta x)^n - x^n}{(x+\Delta x)-x}$

$= \lim\limits_{y \to x} \dfrac{y^n - x^n}{y - x} = nx^{n-1}$ இங்கு $y = x + \Delta x$ என்க மற்றும்

$\Delta x \to 0$ எனில் $y \to x$

அதாவது $\dfrac{d}{dx} f(x) = nx^{n-1}$ அல்லது $\boxed{\dfrac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}}$

கிளைத்தேற்றம் 10.1

$n = \dfrac{p}{q}, (p, q) = 1$ எனில், $\dfrac{d}{dx}\left(x^{\frac{p}{q}}\right) = \dfrac{p}{q} x^{\frac{p}{q}-1}$

கிளைத்தேற்றம் 10.2

α என்பது ஏதேனும் ஒரு மெய்யெண் எனில், $\dfrac{d}{dx}(x^{\alpha}) = \alpha x^{\alpha - 1}$

சில உதாரணங்கள்

(1) $\dfrac{d}{dx}(5) = 0$ ஏனெனில் 5 ஒரு மாறிலியாகும்

(2) $\dfrac{d}{dx}(x^3) = 3x^2$, அடுக்குச் சார்பு விதியின்படி

(3) $\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1} = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}},$ அடுக்குச் சார்பு விதியின்படி

(4) $\frac{d}{dx}\left(x^{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}x^{\sqrt{2}-1},$ அடுக்குச் சார்பு விதியின்படி

(5) $\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{2}{3}}\right) = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}}, (x \neq 0),$ அடுக்குச் சார்பு விதியின்படி

(6) $\frac{d}{dx}(100x^9) = 100\frac{d}{dx}(x^9) = 100 \times 9x^{9-1} = 900x^8$ தேற்றம் 10.6–ன் படி

(3) மடக்கைச் சார்பின் வகைக்கெழு

x-ன் இயற்கை மடக்கையை $\log_e x$ அல்லது $\log x$ அல்லது $ln\, x$ என எழுதலாம்

$y = f(x) = \log x$ என்க.

இப்போது $f(x+\Delta x) = \log(x+\Delta x)$ மற்றும்

$$f(x+\Delta x) - f(x) = \log(x+\Delta x) - \log x$$

$$= \log\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right)$$

$$= \log\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)$$

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{\log\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}$$

$\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\log(1+\alpha k)}{\alpha} = k\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\log(1+k\alpha)}{k\alpha} = k$ என நாம் அறிவோம்

எனவே, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\log\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \frac{1}{x}$

அதாவது, $\boxed{\frac{d}{dx}(\log x) = \frac{1}{x}}$

கிளைத்தேற்றம் 10.3

$y = f(x) = \log_a x$ எனில், $f'(x) = \frac{1}{(\log a)x}$ ஆகும்.

$$f(x) = \log_a x = \log_a e \times \log_e x = (\log_a e)\log x$$

எனவே, $\frac{d}{dx}(f(x)) = \frac{d}{dx}(\log_a e \times \log x)$

04_10 Differential Calculus 2.indd 164 30-05-2022 15:14:42

$$= (\log_a e)\frac{d}{dx}(\log x) \qquad \text{(மாறிலிப் பெருக்கல் விதிப்படி)}$$

$$= \log_a e.\frac{1}{x} \quad \text{(அல்லது)} \quad \frac{1}{(\log a)x}$$

(4) படிக்குறிச் சார்பு (அடுக்குச் சார்பின் வகைக்கெழு)

$y = a^x$ என்க.

$$\text{எனவே, } f(x+\Delta x) - f(x) = a^{x+\Delta x} - a^x$$

$$= a^x(a^{\Delta x} - 1) \text{ மற்றும்}$$

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = a^x\left(\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}\right)$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x} = \log a \text{ என அறிவோம்}$$

$$\text{எனவே, } \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}\right)$$

$$= a^x \times \log a$$

$$\text{அல்லது } \boxed{\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \log a}$$

$$\text{குறிப்பாக, } \frac{d}{dx}(e^x) = e^x \log e$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}(e^x) = e^x}$$

(5) முக்கோணவியல் சார்புகளின் வகைக்கெழு

(i) sine சார்பு sin x

$y = f(x) = \sin x$ என்க.

$$\text{எனவே } f(x+\Delta x) = \sin(x+\Delta x) \text{ மற்றும்}$$

$$f(x+\Delta x) - f(x) = \sin(x+\Delta x) - \sin x = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$$

$$\text{எனவே} \quad \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$$

$$\text{இதனால், } \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}.\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$$

$$= 1 \times \cos x \quad \begin{cases} \cos x \text{ தொடர்ச்சியானது என்பதால்} \\ \lim_{\Delta x \to 0} \cos(x + \Delta x) = \cos x \end{cases}$$

$$= \cos x$$

அதாவது, $\boxed{\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x}$

(ii) cosine சார்பு, cos *x*

$y = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ என்க.

எனவே, $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

$u = x + \frac{\pi}{2}$ என்க.

$\frac{du}{dx} = 1 + 0 = 1$

எனவே, $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\sin u) = \frac{d}{dx}(\sin u)\frac{du}{dx}$ (இணைப்பு விதிப்படி)

$$= \cos u \times 1 = \cos u = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$$

அதாவது, $\boxed{\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x}$

(iii) tangent சார்பு, tan *x*

$y = f(x) = \tan x$ என்க.

$$= \frac{\sin x}{\cos x}$$

எனவே $\frac{d}{dx}(\tan x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)$

$$= \frac{\cos x \frac{d}{dx}(\sin x) - \sin x \frac{d}{dx}(\cos x)}{\cos^2 x} \quad \text{(வகுத்தல் விதிப்படி)}$$

$$= \frac{\cos x(\cos x) - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x}$$

அதாவது, $\boxed{\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x}$

(iv) Secant சார்பு, sec *x*

$y = \sec x = \frac{1}{\cos x} = (\cos x)^{-1}$ என்க.

04_10 Differential Calculus 2.indd 166 30-05-2022 15:15:01

$$\frac{dy}{dx} = (-1)(\cos x)^{-2}(-\sin x) \quad \text{(இணைப்பு விதிப்படி)}$$

$$= \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x} . \frac{\sin x}{\cos x} = \sec x . \tan x$$

அதாவது, $\boxed{\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x}$

(v) Cosecant சார்பு, cosec x

$$y = \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x} = (\sin x)^{-1} \text{ என்க.}$$

$$\frac{dy}{dx} = (-1)(\sin x)^{-2}(\cos x) \quad \text{(இணைப்பு விதிப்படி)}$$

$$= -\frac{\cos x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin x} . \frac{\cos x}{\sin x} = -\operatorname{cosec} x \cot x$$

அதாவது, $\boxed{\frac{d}{dx}(\operatorname{cosec} x) = -\operatorname{cosec} x \cot x}$

(vi) Cotangent சார்பு, cot x

$$y = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \text{ என்க.}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)$$

$$= \frac{\sin x \frac{d}{dx}(\cos x) - \cos x \frac{d}{dx}(\sin x)}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{\sin x(-\sin x) - \cos x(\cos x)}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x$$

அதாவது, $\boxed{\frac{d}{dx}(\cot x) = -\operatorname{cosec}^2 x}$

(6) நேர்மாறு முக்கோணவியல் சார்புகளின் கெழுக்கள்
The derivatives of the inverse trigonometric functions

(i) arc sin x அதாவது $\sin^{-1} x$

$$y = f(x) = \sin^{-1} x \text{ என்க.}$$

எனவே $y + \Delta y = f(x + \Delta x) = \sin^{-1}(x + \Delta x)$

இதிலிருந்து, $x = \sin y$ மற்றும்

$x + \Delta x = \sin(y + \Delta y)$.

எனவே, $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\sin(y + \Delta y) - \sin y} = \frac{1}{\frac{\sin(y+\Delta y) - \sin y}{\Delta y}}$$

$\Delta x \to 0$ எனும்போது $\Delta y \to 0$ ஆதலால்

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{1}{\frac{\sin(y+\Delta y)-\sin y}{\Delta y}}$$

$$= \frac{1}{\cos y}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

அதாவது, $$\boxed{\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

(ii) arc cos x அதாவது $\cos^{-1} x$

$\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}$ என்ற முற்றொருமையை அறிவோம்

இதிலிருந்து, $$\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x + \cos^{-1} x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

இதனால், $$\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) + \frac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = 0$$

எனவே, $$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = 0$$

அல்லது $$\boxed{\frac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

(iii) arc tan x அதாவது $\tan^{-1} x$

$y = f(x) = \tan^{-1} x$ என்க. … (1)

இதிலிருந்து, $y + \Delta y = f(x + \Delta x) = \tan^{-1} (x + \Delta x)$ … (2)

$x = \tan y$ மற்றும்

$x + \Delta x = \tan (y + \Delta y)$

இதிலிருந்து, $\Delta x = \tan (y + \Delta y) - \tan y$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\tan(y+\Delta y)-\tan y}$$

$$= \frac{1}{\frac{\tan(y+\Delta y)-\tan y}{\Delta y}}$$

$\Delta x \to 0$ எனும்போது $\Delta y \to 0$ ஆதலால்

04_10 Differential Calculus 2.indd 168 30-05-2022 15:15:16

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\dfrac{\lim\limits_{\Delta y\to 0}\tan(y+\Delta y)-\tan y}{\Delta y}} = \frac{1}{\dfrac{d}{dy}(\tan y)}$$

$$= \frac{1}{\sec^2 y}$$

$$= \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$$

அதாவது, $\boxed{\dfrac{d}{dx}(\tan^{-1}x) = \dfrac{1}{1+x^2}}$ ■

(iv) arc cot x அதாவது $\cot^{-1}x$

$\tan^{-1}x + \cot^{-1}x = \dfrac{\pi}{2}$ என்ற முற்றொருமையை அறிவோம்

இதிலிருந்து, $\dfrac{d}{dx}(\tan^{-1}x+\cot^{-1}x) = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$

இதிலிருந்து, $\dfrac{d}{dx}(\tan^{-1}x)+\dfrac{d}{dx}(\cot^{-1}x) = 0$

அதாவது, $\dfrac{d}{dx}(\cot^{-1}x) = -\dfrac{d}{dx}(\tan^{-1}x) = -\dfrac{1}{1+x^2}$

அதாவது, $\boxed{\dfrac{d}{dx}(\cot^{-1}x) = -\dfrac{1}{1+x^2}}$ ■

(v) arc sec x அதாவது $\sec^{-1}x$ –ன் வகைக்கெழு $\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ ஆகும்

(vi) arc cosec x அதாவது $\operatorname{cosec}^{-1}x$ –ன் வகைக்கெழு $\dfrac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$ ஆகும்

(v) மற்றும் (vi) நிரூபணங்கள் பயிற்சிக்காக ஒதுக்கப்பட்டுள்ளன.

எடுத்துக்காட்டு 10.7

x–ஐ பொறுத்து வகைக்கெழுவைக் காண்க. :

(i) $y = x^3+5x^2+3x+7$ (ii) $y = e^x+\sin x+2$

(iii) $y = 4\operatorname{cosec} x-\log x-2e^x$ (iv) $y = \left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2$ (v) $y = xe^x\log x$

(vi) $y = \dfrac{\cos x}{x^3}$ (vii) $y = \dfrac{\log x}{e^x}$

(viii) $f(x) = |x-4|$ எனில் $f'(3)$ மற்றும் $f'(5)$ ஐ காண்க.

தீர்வு

(i) $\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 10x + 3$

(ii) $\frac{dy}{dx} = e^x + \cos x$

(iii) $\frac{dy}{dx} = -4 \text{ cosec } x.\cot x - \frac{1}{x} - 2e^x$

(iv) $y = x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 = x^2 + x^{-2} - 2$

$$\frac{dy}{dx} = 2x - 2x^{-2-1} = 2x - \frac{2}{x^3}$$

(v) $\frac{dy}{dx} = xe^x\left(\frac{1}{x}\right) + e^x.\log x(1) + x\log x(e^x)$

$$= e^x + e^x \log x + xe^x \log x = e^x(1 + \log x + x\log x)$$

(vi) $y = \frac{\cos x}{x^3}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^3(-\sin x) - \cos x(3x^2)}{x^6} = \frac{-x^2(x\sin x + 3\cos x)}{x^6}$$

$$= -\frac{(x\sin x + 3\cos x)}{x^4}$$

(vii) $y = \frac{\log x}{e^x} = e^{-x}.\log x$

$$\frac{dy}{dx} = e^{-x}\left(\frac{1}{x}\right) + \log x(e^{-x})(-1)$$

$$= e^{-x}\left[\frac{1}{x} - \log x\right]$$

(viii) $f(x) = |x-4| = \begin{cases} -(x-4) & ; \; x < 4 \\ (x-4) & ; \; x \geq 4 \end{cases}$

$$f'(x) = \begin{cases} -1 \;, & x < 4 \\ +1 \;, & x \geq 4 \end{cases}$$

எனவே, $f'(3) = -1$

$f'(5) = 1$

பயிற்சி 10.2

பின்வரும் சார்புகளைத் தொடர்புடைய சாராமாறிகளைப் பொறுத்து வகையிடுக.

(1) $f(x) = x - 3 \sin x$

(2) $y = \sin x + \cos x$

(3) $f(x) = x \sin x$

(4) $y = \cos x - 2 \tan x$

04_10 Differential Calculus 2.indd 170 30-05-2022 15:15:35

(5) $g(t) = t^3 \cos t$

(6) $g(t) = 4 \sec t + \tan t$

(7) $y = e^x \sin x$

(8) $y = \dfrac{\tan x}{x}$

(9) $y = \dfrac{\sin x}{1+\cos x}$

(10) $y = \dfrac{x}{\sin x + \cos x}$

(11) $y = \dfrac{\tan x - 1}{\sec x}$

(12) $y = \dfrac{\sin x}{x^2}$

(13) $y = \tan\theta(\sin\theta + \cos\theta)$

(14) $y = \operatorname{cosec} x \, . \cot x$

(15) $y = x \sin x \cos x$

(16) $y = e^{-x}. \log x$

(17) $y = (x^2+5)\ln(1+x)e^{-3x}$

(18) $y = \sin x°$

(19) $y = \log_{10} x$

(20) $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$ எனில் $f'(x)$ என்ற சார்பின் வரைபடம் வரைக.

10.4.2 சார்பின் சார்பினது வகைக்கெழு (இணைப்பு விதி) எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 10.8

$F(x) = \sqrt{x^2+1}$ எனில் $F'(x)$ காண்க.

தீர்வு

$$u = g(x) = x^2 + 1 \text{ மற்றும் } f(u) = \sqrt{u}$$

$$F(x) = (fog)(x) = f(g(x))$$

$$f'(u) = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{u}} \text{ மற்றும்}$$

$$g'(x) = 2x, \text{ என்பதனால்}$$

$$F'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}.2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} .$$

எடுத்துக்காட்டு 10.9

வகையிடுக : (i) $y = \sin(x^2)$ (ii) $y = \sin^2 x$

தீர்வு

(i) இங்கு sine சார்பு வெளிப்புறச் சார்பாகவும் வர்க்க சார்பு உட்சார்பாகவும் உள்ளது.

$u = x^2$ என்க.

அதாவது, $y = \sin u$.

எனவே, $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

$$= \cos u \times (2x)$$

$$= \cos(x^2).2x$$

$$= 2x \cos(x^2).$$

(ii) $u = \sin x$

எனவே, $y = u^2$

மற்றும் $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$

$= 2u \times \cos x$

$= 2 \sin x . \cos x$

$= \sin 2x.$

எடுத்துக்காட்டு 10.10

வகையிடுக : $y = (x^3 - 1)^{100}$

தீர்வு

$u = x^3 - 1$ என்க.

$y = u^{100}$

மற்றும் $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$

$= 100u^{100-1} \times (3x^2 - 0)$

$= 100(x^3 - 1)^{99} \times 3x^2$

$= 300x^2 (x^3 - 1)^{99}$.

எடுத்துக்காட்டு 10.11

$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 + x + 1}}$ எனில், $f'(x)$ -ஐ காண்க.

தீர்வு

முதலில் $f(x) = (x^2 + x + 1)^{\frac{-1}{3}}$ என எழுதுவோம்.

எனவே, $f'(x) = -\frac{1}{3}(x^2 + x + 1)^{\frac{-1}{3}-1} \frac{d}{dx}(x^2 + x + 1)$

$= -\frac{1}{3}(x^2 + x + 1)^{\frac{-4}{3}} \times (2x + 1)$

$= -\frac{1}{3}(2x + 1)(x^2 + x + 1)^{\frac{-4}{3}}$.

எடுத்துக்காட்டு 10.12

$g(t) = \left(\frac{t-2}{2t+1}\right)^9$ என்ற சார்பின் வகைக்கெழுவைக் காண்க.

தீர்வு

$g'(t) = 9\left(\frac{t-2}{2t+1}\right)^{9-1} \frac{d}{dt}\left(\frac{t-2}{2t+1}\right)$

04_10 Differential Calculus 2.indd 172 30-05-2022 15:15:52

$$= 9\left(\frac{t-2}{2t+1}\right)^8 \left[\frac{(2t+1)\frac{d}{dt}(t-2)-(t-2)\frac{d}{dt}(2t+1)}{(2t+1)^2}\right]$$

$$= 9\left(\frac{t-2}{2t+1}\right)^8 \left[\frac{(2t+1)\times 1-(t-2)\times 2}{(2t+1)^2}\right]$$

$$= 9\left(\frac{t-2}{2t+1}\right)^8 \left[\frac{2t+1-2t+4}{(2t+1)^2}\right]$$

$$= \frac{45(t-2)^8}{(2t+1)^{10}}$$

எடுத்துக்காட்டு 10.13

$(2x + 1)^5 \ (x^3 - x + 1)^4$-ஐ வகையிடுக.

தீர்வு

$y = (2x + 1)^5 \ (x^3 - x + 1)^4$ என்க.

$u = 2x + 1 \ ; v = x^3 - x + 1$ என எடுத்துக்கொண்டால்

$y = u^5 . v^4$

$$\frac{dy}{dx} = u^5 . \frac{d}{dx}(v^4) + v^4 \frac{d}{dx}(u^5) \qquad \text{(பெருக்கல் விதிப்படி)}$$

$$= u^5 .4v^{4-1}\frac{dv}{dx} + v^4 .5u^{5-1}\frac{du}{dx} \qquad \text{(இணைப்பு விதிப்படி)}$$

$$= 4u^5 .v^3 \times (3x^2 - 1) + 5v^4 u^4 \times 2$$

$$= 4(2x+1)^5 (x^3 - x + 1)^3 (3x^2 - 1) + 10(x^3 - x + 1)^4 (2x+1)^4$$

$$= (2x+1)^4 (x^3 - x + 1)^3 \left[4(2x+1)(3x^2-1) + 10(x^3 - x + 1)\right]$$

$$= 2(2x+1)^4 (x^3 - x + 1)^3 (17x^3 + 6x^2 - 9x + 3).$$

எடுத்துக்காட்டு 10.14

வகையிடுக : $y = e^{\sin x}$.

தீர்வு

$u = \sin x$ என எடுத்துக்கொண்டால்

$y = e^u$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(e^u)}{du} \times \frac{du}{dx} = e^u \times \cos x = \cos x \ e^{\sin x}.$$

04_10 Differential Calculus 2.indd 173 30-05-2022 15:15:57

எடுத்துக்காட்டு 10.15

வகையிடுக : 2^x.

தீர்வு

$$y = 2^x = e^{x \log 2} \text{ என்க}$$

$$u = x\,(\log 2) \text{ என எடுத்துக்கொண்டால்}$$

$$y = e^u \text{ ஆகும்.}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = e^u \times \log 2 = \log 2\, e^{x \log 2}$$

$$= (\log 2) 2^x.$$

a^x –ன் வகைக்கெழுவைச் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி நேரடியாகவும் எழுதலாம்

எடுத்துக்காட்டு 10.16

$y = \tan^{-1}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ எனில் y' காண்க.

தீர்வு

$$y = \tan^{-1}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

$$\frac{1+x}{1-x} = t \text{ என்க.}$$

$$\text{எனவே,} \quad y = \tan^{-1} t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dt}(\tan^{-1} t) . \frac{dt}{dx}$$

$$= \frac{1}{1+t^2} . \frac{(1-x).1-(1+x)(-1)}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{1}{1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2} . \frac{(1-x)+(1+x)}{(1-x)^2} = \frac{1}{1+x^2} .$$

பயிற்சி 10.3

கீழ்க்காணும் சார்புகளுக்கு வகைக்கெழுக்களைக் காண்க :

(1) $y = (x^2+4x+6)^5$ (2) $y = \tan 3x$ (3) $y = \cos(\tan x)$

(4) $y = \sqrt[3]{1+x^3}$ (5) $y = e^{\sqrt{x}}$ (6) $y = \sin(e^x)$

(7) $F(x) = (x^3+4x)^7$ (8) $h(t) = \left(t - \frac{1}{t}\right)^{\frac{3}{2}}$ (9) $f(t) = \sqrt[3]{1+\tan t}$

(10) $y = \cos(a^3+x^3)$ (11) $y = e^{-mx}$ (12) $y = 4 \sec 5x$

04_10 Differential Calculus 2.indd 174 30-05-2022 15:16:04

(13) $y=(2x-5)^4(8x^2-5)^{-3}$ (14) $y=(x^2+1)\sqrt[3]{x^2+2}$ (15) $y=xe^{-x^2}$

(16) $s(t)=\sqrt[4]{\dfrac{t^3+1}{t^3-1}}$ (17) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{7-3x}}$ (18) $y=\tan(\cos x)$

(19) $y=\dfrac{\sin^2 x}{\cos x}$ (20) $y=5^{\frac{-1}{x}}$ (21) $y=\sqrt{1+2\tan x}$

(22) $y=\sin^3 x+\cos^3 x$ (23) $y=\sin^2(\cos kx)$ (24) $y=(1+\cos^2 x)^6$

(25) $y=\dfrac{e^{3x}}{1+e^x}$ (26) $y=\sqrt{x+\sqrt{x}}$ (27) $y=e^{x\cos x}$

(28) $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$ (29) $y=\sin\left(\tan\left(\sqrt{\sin x}\right)\right)$ (30) $\sin^{-1}\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)$

10.4.3 உட்படு சார்புகளை வகையிடல் (Implicit Differentiation)

ஒரு சார்பின் சார்ந்த மாறியின் மூலம் வெளிப்படையாகத் தரப்பட்டு $y = f(x)$ என்ற வடிவில் இருந்தால் அதனை **வெளிப்படு சார்பு** (explicit function) எனக் கூறலாம். எடுத்துக்காட்டாக $y=\dfrac{1}{2}x^3-1$ என்பது ஒரு வெளிப்படு சார்பாகும். அதே சமயம் அதற்குச் சமானமான சமன்பாடாக $2y-x^3+2=0$ என்று x, y ஆகிய மாறிகளை உட்படுத்தி வரையறை செய்தால் அதனை **உட்படு சார்பு** எனலாம் அல்லது y ஆனது $x-$ஆல் ஆன உட்படு சார்பு எனலாம்.

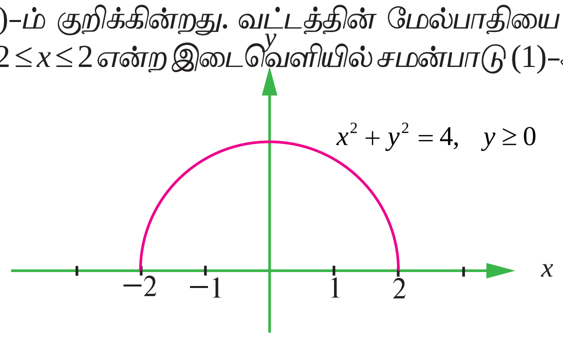
$$x^2+y^2 = 4 \qquad \ldots (1)$$

என்ற சமன்பாடு ஆதிப்புள்ளியை மையமாகவும் ஆரம் 2 ஆகவும் உடைய ஒரு வட்டத்தைக் குறிக்கிறது என்பதை அறிவோம். சமன்பாடு (1) சார்பு அல்ல. ஏனெனில் $-2 < x < 2$ என்ற இடைவெளியில் உள்ள ஒவ்வொரு x மதிப்பிற்கும் y-க்கு இருமதிப்புகள் இருக்கும். அவை

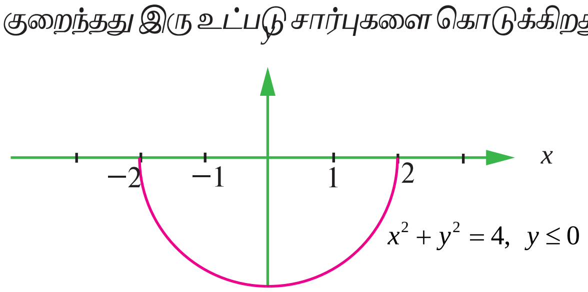
$$f(x) = \sqrt{4-x^2}, -2\le x\le 2 \qquad \ldots (2)$$

$$g(x) = -\sqrt{4-x^2}, -2\le x\le 2 \qquad \ldots (3)$$

இரு மதிப்புகள் இருக்கும். (1)-ல் குறிப்பிட்டுள்ள வட்டத்தின் மேல் பாதியை (2)-ம், கீழ்ப்பாதியை (3)-ம் குறிக்கின்றது. வட்டத்தின் மேல்பாதியை அல்லது கீழ்ப்பாதியைச் சார்பாகக் கருதலாம். எனவே, $-2\le x\le 2$ என்ற இடைவெளியில் சமன்பாடு (1)-ஆனது குறைந்தது இரு உட்படு சார்புகளை கொடுக்கிறது.



படம் 10.25



படம் 10.26

$x^2+\left[f(x)\right]^2=4$ மற்றும் $x^2+\left[g(x)\right]^2=4$ ஆகிய இரு சமன்பாடுகளும் $-2\le x\le 2$ இடைவெளியில் முற்றொருமையாகிறது என்பது குறிப்பிடத்தக்கது.

04_10 Differential Calculus 2.indd 175 30-05-2022 15:16:16

பொதுவாக, ஏதோ ஒரு இடைவெளியில் $F(x,y)=0$ என்ற சமன்பாடு f சார்பினை ஒரு உட்படு சார்பாக வரையறை செய்தால் $F(x,f(x))=0$ ஆனது அந்த இடைவெளியில் முற்றொருமையாக அமையும். f என்ற சார்பின் வரைபடம் $F(x,y)=0$ சமன்பாட்டின் வரைபடத்தின் ஒரு பகுதியை அல்லது அனைத்தையும் குறிக்கின்றது.

$x^4+x^2y^3-y^5=2x+1$ போன்ற மிகச் சிக்கலான சமன்பாடு x-அச்சில் குறிப்பிட்ட இடைவெளியில் உட்படு சார்புகளைத் தீர்மானிக்கும். மேலும் y-ஐ x–ஆல் ஆன கோவையில் எழுத இயலாமல் இருக்கலாம். எனினும், சில சமயங்களில் $\frac{dy}{dx}$ -ஐ காண பயன்படுத்தும் முறையினை உட்படு வகையிடல் எனலாம். இம்முறையின்படி சமன்பாட்டின் இருபுறமும் வகையிடல் விதிகளைப் பயன்படுத்தி x-ஐ பொறுத்து வகைக்கெழு கண்டு $\frac{dy}{dx}$ பெறலாம். சமன்பாட்டில் தீர்மானிக்கப்படும் y ஒரு வகைமைச் சார்பாக அமையும்போது சார்பின் சார்புகளுக்கான இணைப்பு விதியினைப் பயன்படுத்திக் கீழ்க்காணுமாறு காணலாம்.

$$\frac{d}{dx}y^n = ny^{n-1}\frac{dy}{dx}$$

இங்கு n ஒரு முழு எண்ணாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 10.17

$x^2+y^2=1$ எனில், $\frac{dy}{dx}$ காண்க.

தீர்வு

சமன்பாட்டின் இருமருங்கும் வகையிடுக.

$$\frac{d}{dx}x^2+\frac{d}{dx}y^2 = \frac{d}{dx}(1)$$

$$2x+2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \text{ ஆகும்.}$$

எடுத்துக்காட்டு 10.18

$x = 1$ என்ற மதிப்பில் அமையும் புள்ளிகளில், வளைவரை $x^2+y^2=4$ –க்கு வரையப்படும் தொடுகோடுகளின் சாய்வுகளைக் காண்க.

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டில் $x = 1$ எனப் பிரதியிட $y^2=3$ அல்லது $y=\pm\sqrt{3}$ எனப் பெறலாம். எனவே, $\left(1,\sqrt{3}\right)$ மற்றும் $\left(1,-\sqrt{3}\right)$–ல் தொடுகோடுகள் அமையும். இரண்டு வெவ்வேறு உட்படு சார்புகளுக்கான வரைபடங்களில் உள்ள புள்ளிகளாக $\left(1,\sqrt{3}\right)$ மற்றும் $\left(1,-\sqrt{3}\right)$

04_10 Differential Calculus 2.indd 176 30-05-2022 15:16:23

அமைந்தாலும் ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் சரியான சாய்வு கிடைக்கும். எனவே,

$$\left(1,\sqrt{3}\right)\text{ல் } \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ மற்றும் } \left(1,-\sqrt{3}\right)\text{ல் } \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{-\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

எடுத்துக்காட்டு 10.19

$x^4+x^2y^3-y^5=2x+1$ எனில், $\frac{dy}{dx}$ காண்க.

தீர்வு

உட்படு வகையிடலின்படி

$$\frac{d}{dx}(x^4)+\frac{d}{dx}(x^2y^3)-\frac{d}{dx}(y^5) = \frac{d}{dx}(2x+1)$$

இதிலிருந்து, $$4x^3+x^2\left(3y^2\frac{dy}{dx}\right)+(2x)y^3-5y^4\frac{dy}{dx} = 2+0$$

அதாவது, $$4x^3+3x^2y^2\frac{dy}{dx}+2xy^3-5y^4\frac{dy}{dx} = 2$$

எனவே, $$\left(3x^2y^2-5y^4\right)\frac{dy}{dx} = 2-4x^3-2xy^3$$

அல்லது $$\frac{dy}{dx} = \frac{2-4x^3-2xy^3}{3x^2y^2-5y^4}$$

எடுத்துக்காட்டு 10.20

$\sin y = y\cos 2x$ எனில் $\frac{dy}{dx}$ காண்க.

தீர்வு

$\sin y = y\cos 2x$.

வகையீடு செய்ய, $$\frac{d}{dx}\sin y = \frac{d}{dx}(y\cos 2x)$$

அதாவது, $$\cos y\frac{dy}{dx} = y(-2\sin 2x)+\cos 2x\frac{dy}{dx}$$

இதிலிருந்து, $$(\cos y-\cos 2x)\frac{dy}{dx} = -2y\sin 2x$$

அல்லது $$\frac{dy}{dx} = \frac{-2y\sin 2x}{\cos y-\cos 2x}$$

10.4.4 மடக்கை வகையிடல் (Logarithmic Differentiation)

$y=x^x$ போன்ற சார்பினைத் தவிர, வகையிடல் விதிகளையும், அடிப்படைச் சார்புகளின் வகையிடல் அட்டவணையையும் பயன்படுத்துவதன் மூலம் தொடக்கத்தில் பயன்படுத்தப்படும் எந்தவொரு சார்பிற்கும் எளிதாக வகையிடல் காண இயலும். இத்தகைய சார்புகள் அடுக்கு/படிக்குறி சார்புகளாக குறிப்பிடப்படுகின்றன. இவற்றில் பொதுவாக அந்த சார்பின் அடிமானமும், படியும் சாரா மாறியைப் பொறுத்ததாக அமையும்.

அடுக்குப் படிக்குறிச் சார்பான $y = x^x$ –க்கு வகையிடல் காண இரு பக்கமும் மடக்கையினை பயன்படுத்த வேண்டும்.

$\log y = x \log x,\ x > 0$ எனக் கிடைக்கும்.

இது ஒரு முற்றொருமையாதலால் இடப்பக்க வகைக்கெழுவும் வலப்பக்க வகைக்கெழுவும் சமமாக இருத்தல் வேண்டும். x–ஐப் பொறுத்து வகையிடலின்போது (இடப்பக்கத்தில் உள்ள சார்பு, சார்பின் சார்பு என்பதை நினைவில் கொள்க)

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \log x + 1$$

எனவே, $$\frac{dy}{dx} = y(\log x + 1) = x^x(\log x + 1)$$

$f(x)$ என்ற சார்பினுக்கு மடக்கை கண்டு (e அடிமானம்) பின்னர் வகையிடலைப் பயன்படுத்தும் முறை மடக்கை வகையிடல் என்று அழைக்கப்படுகிறது.

$$\frac{d}{dx}(\log f(x)) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

இம்முறையின் மூலம் பெருக்கல், வகுத்தல் அல்லது அடுக்குகள் கொண்ட கடினமான சார்புகளின் வகையீடுகளை மடக்கை வகையிடலைப் பயன்படுத்தி எளிதாகக் காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 10.21

$y = \sqrt{x^2+4}\ .\sin^2 x\ .2^x$ எனில், y–ன் வகைக்கெழுவைக் காண்க.

தீர்வு

இருபக்கமும் மடக்கையை எடுக்க,

$\log y = \frac{1}{2}\log(x^2+4) + 2\log(\sin x) + x\log(2)$ எனக் கிடைக்கிறது.

இதிலிருந்து $$\frac{y'}{y} = \frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+4} + 2.\frac{\cos x}{\sin x} + \log 2$$

$$= \frac{x}{x^2+4} + 2\cot x + \log 2$$

எனவே, $$y' = \frac{dy}{dx} = y\left(\frac{x}{x^2+4} + 2\cot x + \log 2\right).$$

எடுத்துக்காட்டு 10.22

வகையிடுக : $y = \dfrac{x^{\frac{3}{4}}\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5}$.

தீர்வு

இருபக்கமும் மடக்கையை எடுக்க,

$\log y = \frac{3}{4}\log x + \frac{1}{2}\log(x^2+1) - 5\log(3x+2)$

உட்படு வகையிடலின்படி.

04_10 Differential Calculus 2.indd 178 30-05-2022 15:16:38

$$\frac{y'}{y} = \frac{3}{4x} + \frac{1}{2}\frac{2x}{(x^2+1)} - \frac{5}{3x+2}(3)$$

$$= \frac{3}{4x} + \frac{x}{(x^2+1)} - \frac{15}{3x+2}$$

எனவே, $$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{x^{\frac{3}{4}}\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5}\left[\frac{3}{4x} + \frac{x}{x^2+1} - \frac{15}{3x+2}\right]$$

மடக்கை வகையிடலில் படிநிலைகள் (Steps in Logarithmic Differentiation)

(1) $y = f(x)$ என்ற சமன்பாட்டின் இருமருங்கும் இயற்கை மடக்கை எடுத்து மடக்கை விதிகளைப் பயன்படுத்தி எளிமையாக்குதல் வேண்டும்.

(2) x-ஐப் பொறுத்து உட்படு வகையிடல் காணவேண்டும்.

(3) y'-க்காகத் தீர்வு காணுதல் வேண்டும்.

பொதுவாக, படிக்குறி மற்றும் அடிமானம் பொறுத்து நான்கு வகைகள் உள்ளன.

(1) $\frac{d}{dx}(a^b) = 0$ (a, b ஆகியவை மாறிலிகள்).

(2) $\frac{d}{dx}[f(x)]^b = b[f(x)]^{b-1} f'(x)$

(3) $\frac{d}{dx}[a^{g(x)}] = a^{g(x)}(\log a)g'(x)$

(4) $\frac{d}{dx}[f(x)]^{g(x)} = [f(x)]^{g(x)}\left[\frac{g(x)f'(x)}{f(x)} + \log f(x).g'(x)\right]$

எடுத்துக்காட்டு 10.23

வகையிடுக : $y = x^{\sqrt{x}}$

தீர்வு

இருபுறமும் மடக்கை எடுக்க :

$$\log y = \sqrt{x}\log x$$

உட்படு வகையிடலின்படி,

$$\frac{y'}{y} = \sqrt{x}.\frac{1}{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}.\log x$$

$$= \frac{\log x + 2}{2\sqrt{x}}$$

எனவே, $$\frac{d}{dx}(x^{\sqrt{x}}) = y' = x^{\sqrt{x}}\left(\frac{\log x + 2}{2\sqrt{x}}\right)$$

10.4.5. பிரதியிடல் முறை (Substitution method)

பிரதியிடல் முறையானது, சில விதமான வகையிடலின் போது குறிப்பாக நேர்மாறு முக்கோணவியல் சார்புகளின் வகையிடலின்போது மிகவும் பயனுள்ளதாக அமையும்.

$f(x) = \tan^{-1}\left(\dfrac{2x}{1-x^2}\right)$ என்ற சார்பினைக் கருதுக.

இந்தச் சார்பிற்கு, சார்பின் சார்பு விதியைப் பயன்படுத்தி $f'(x)$ காணலாம். ஆனால், அது சற்றுக் கடினமானது. அதற்குப் பதிலாகப் பிரதியிடல் முறையினைப் பயன்படுத்தினால் எளிதாக அமையும். அதாவது,

$$x = \tan\theta \text{ என்க.}$$

$$\text{எனவே, } \frac{2x}{1-x^2} = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \tan 2\theta \text{ மற்றும்}$$

$$f(x) = \tan^{-1}(\tan 2\theta) = 2\theta$$

$$= 2\tan^{-1}x$$

$$f'(x) = \frac{2}{1+x^2} \text{ என எளிதாகக் காணலாம்.}$$

எடுத்துக்காட்டு 10.24

$y = \tan^{-1}\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ எனில், y' காண்க.

தீர்வு

$x = \tan\theta$ என்க.

$$\text{எனவே, } \frac{1+x}{1-x} = \frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta} = \tan\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right).$$

$$\tan^{-1}\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \tan^{-1}\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)\right] = \frac{\pi}{4}+\theta = \frac{\pi}{4}+\tan^{-1}x$$

$$y = \frac{\pi}{4}+\tan^{-1}x$$

$$y' = \frac{1}{1+x^2}.$$

எடுத்துக்காட்டு 10.25

$f(x) = \cos^{-1}(4x^3-3x)$ எனில் $f'(x)$ -ஐக் காண்க.

தீர்வு

$$x = \cos\theta \text{ என்க.}$$

$$\text{எனவே, } 4x^3-3x = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta = \cos 3\theta \text{ மற்றும்}$$

$$f(x) = \cos^{-1}(\cos 3\theta) = 3\theta = 3\cos^{-1}x$$

$$\text{ஆகையால், } f'(x) = 3\left(\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \frac{-3}{\sqrt{1-x^2}}.$$

04_10 Differential Calculus 2.indd 180 30-05-2022 15:16:52

10.4.6 துணையலகுச் சமன்பாடுகளால் வரையறுக்கப்பட்ட மாறிகளை வகையிடல்
(Derivatives of variables defined by parametric equations)

$x = f(t)$, $y = g(t)$ என்ற சமன்பாடுகளைக் கருதுவோம்.

இச்சமன்பாடுகள் x மற்றும் y மாறிகளுக்கிடையே உள்ள சார்பு உறவைத் தருகின்றன. $[a, b]$ எனும் ஏதேனும் ஒரு சார்பகத்தில் உள்ள 't' மதிப்பிற்கு x மற்றும் y கண்டறியலாம்.

x மற்றும் y என இரு சார்புகள் தனித்தனியாக 't' எனும் பிறிதொரு மாறி மூலம் வரையறுக்கப்பட்டால் x மற்றும் y-க்கு உள்ள சார்புத் தொடர்பு **துணையலகுத் தொடர்பு** என்றும் பிறிதொரு மாறி **துணையலகு** எனவும் அழைக்கப்படுகிறது.

x மற்றும் y க்கு உள்ள நேரடித் தொடர்பைத் துணையலகு 't' இன்றிக் காண்பது **துணையலகு நீக்கல்** என்பதாகும்.

எடுத்துக்காட்டாக, மையம் $(0, 0)$ எனவும். ஆரம் r எனவும் உள்ள வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2 + y^2 = r^2$ ஆகும். இந்தச் சமன்பாடு x மற்றும் y இரண்டிற்குமிடையே உள்ள தொடர்பை விவரிக்கிறது. மற்றும் இதன் துணையலகுச் சமன்பாடுகள் $x = r\cos t$; $y = r\sin t$ எனக் கிடைக்கும். மறுதலையாக t-ஐ நீக்கும்போது $x^2 + y^2 = r^2$ எனப்பெறலாம்.

y -ஐ x -இன் சார்பாகக் கருதினால், $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \dfrac{g'(t)}{f'(t)}$.

x-ஐ y-இன் சார்பாகக் கொண்டால் y-ஐ பொறுத்து x-இன் வகையிடல்

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{dy}{dt}} = \frac{f'(t)}{g'(t)}$$ ஆகும்.

வட்டத்தைப் பொறுத்தவரை $\dfrac{dy}{dx}$ என்பது வட்டத்தின் தொடுகோட்டின் சாய்வாக,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{r\cos t}{-r\sin t} = -\cot t$$ ஆக அமையும்.

எடுத்துக்காட்டு 10.26

$x = at^2$; $y = 2at$, $t \neq 0$ எனில், $\dfrac{dy}{dx}$ காண்க.

தீர்வு

$x = at^2$; $y = 2at$ என்பதால்

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{2a}{2at} = \frac{1}{t}.$$

எடுத்துக்காட்டு 10.27

$x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ எனில், $\dfrac{dy}{dx}$ காண்க.

04_10 Differential Calculus 2.indd 181 30-05-2022 15:16:56

தீர்வு

$$x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t).$$

இப்போது $\dfrac{dx}{dt} = a(1 - \cos t)$; $\dfrac{dy}{dt} = a \sin t$

எனவே, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \dfrac{a\sin t}{a(1-\cos t)} = \dfrac{\sin t}{(1-\cos t)}$

10.4.7 ஒரு சார்பினைப் பொறுத்து மற்றொரு சார்பினை வகையிடல் (Differentiation of one function with respect of another function)

$y = f(x)$ என்ற சார்பு வகைமையானால், x–ஐப் பொறுத்து y–ன் வகைக்கெழு

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} .$$

f மற்றும் g ஆகியவை x–ன் வகைமையான சார்புகள் மற்றும் $\dfrac{dg}{dx} = g'(x) \neq 0$ எனில்

$$\frac{df}{dg} = \frac{\frac{df}{dx}}{\frac{dg}{dx}} = \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

எடுத்துக்காட்டு 10.28

$x \log x$ –ஐ பொறுத்து x^x –ன் வகையீடு காண்க.

தீர்வு

$$u = x^x, v = x\log x$$

$$\log u = x \log x$$

$$\frac{1}{u}\frac{du}{dx} = x.\frac{1}{x} + 1.\log x = 1 + \log x$$

$$\frac{du}{dx} = u(1+\log x) = x^x(1+\log x)$$

$$\frac{dv}{dx} = 1 + \log x$$

$$\frac{d(x^x)}{d(x\log x)} = \frac{du}{dv} = \frac{\frac{du}{dx}}{\frac{dv}{dx}} = x^x$$

இங்கு ஒரு சமனிச் சார்பாக இருந்தால் $g(x) = x$ எனவே $\dfrac{df}{dg}$ என்பது $\dfrac{df}{dx} = f'(x)$ என மாறும்.

எடுத்துக்காட்டு 10.29

$x^2 + x + 1$ -ஐப் பொறுத்து $\tan^{-1}(1 + x^2)$ -ஐ வகையிடுக.

04_10 Differential Calculus 2.indd 182 30-05-2022 15:17:05

தீர்வு

$$f(x) = \tan^{-1}(1+x^2) \text{ என்க}$$

$$g(x) = x^2 + x + 1$$

$$\frac{df}{dg} = \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$f'(x) = \frac{2x}{(x^4+2x^2+2)}$$

$$g'(x) = 2x+1$$

$$\frac{df}{dg} = \frac{\frac{2x}{1+x^2}}{2x+1} = \frac{2x}{(2x+1)(x^4+2x^2+2)}$$

எடுத்துக்காட்டு 10.30

$\cos(lx^2+mx+n)$-ஐ பொறுத்து $\sin(ax^2+bx+c)$ வகையிடுக.

தீர்வு

$$u = \sin(ax^2+bx+c) \text{ மற்றும்}$$

$$v = \cos(lx^2+mx+n) \text{ என்க.}$$

$$\frac{du}{dv} = \frac{u'(x)}{v'(x)}$$

$$u'(x) = \cos(ax^2+bx+c)(2ax+b)$$

$$v'(x) = -\sin(lx^2+mx+n)(2lx+m)$$

$$\frac{du}{dv} = \frac{u'(x)}{v'(x)} = \frac{(2ax+b)\cos(ax^2+bx+c)}{-(2lx+m)\sin(lx^2+mx+n)}$$

10.4.8 உயர் வரிசை வகைக்கெழுக்கள் (Higher order Derivatives)

ஒரு நேர்க்கோட்டில் நகரும் பொருளின் நிலைச்சார்பு (இடப்பெயர்ச்சி) $s = s(t)$ என்க. அதன் முதல் வகைக்கெழு, பொருளின் திசைவேகம் நேரத்தின் சார்பாக $v(t)$ அமையும் என்பது இயற்பியலில் எளிமையாக அறிந்துள்ளோம்.

$$v(t) = s'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} \,.$$

மேலும், நேரத்தினைப் பொறுத்துத் திசைவேகத்தின் கணநேர வீத மாற்றம் அப்பொருளின் முடுக்கம் $a(t)$ ஆகும். எனவே முடுக்கச் சார்பு ஆனது திசைவேகத்தின் முதல் வகைக்கெழுவாகும் என்பதனால் முடுக்கச் சார்பு, நிலைச்சார்பின் இரண்டாவது வகைக்கெழுவாகும்.

$$a(t) = v'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t}$$

$$= \frac{d}{dt}(v(t))$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right) = \frac{d^2 s}{dt^2} = s''(t)$$

04_10 Differential Calculus 2.indd 183 30-05-2022 15:17:17

இவ்வாறாக, f என்பது x–ன் வகைமையான சார்பு எனில், அதன் முதல் வகையிடல் $f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ என்பது $y = f(x)$ என்ற சார்பின் வரைபடத்தின் தொடுகோட்டின் சாய்வு என மிக எளிய வடிவியல் விளக்கமாக அமைகிறது. f' என்பது x–ன் சார்பாகவும் இருப்பதால், f' –க்கும் வகைமை இருக்க முடியும். அவ்வாறு இருந்தால், $(f')' = f''$ எனக் குறிப்பிடப்பட்டு

$$f''(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x+\Delta x)-f'(x)}{\Delta x}$$

$$= \frac{d}{dx}\left(f'(x)\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}f(x)\right)$$

$$= \frac{d^2 f}{dx^2}=\frac{d^2 y}{dx^2} \text{ என அமைகின்றது}$$

இதனை மற்றொரு குறியீடாக $D^2 f(x) = D^2 y = y_2 = y''$ என எழுதலாம்.

இரண்டாம் வகைக்கெழு என்பது மாறு வீதத்தின் மாறு வீதமாகக் கருதினாலும் வடிவியல் விளக்கம் எளிதாக இல்லை. இருப்பினும் $y = f(x)$ என்ற சார்பின் வரைபடத்தின் வளை ஆரத்திற்கும். இரண்டாம் வகையிடலுக்கும் நெருங்கியத் தொடர்பு உள்ளது என்பதனை உயர் வகுப்புகளில் காணலாம்.

அதேபோன்று $f''(x)$ கிடைக்கப்பெறினும்,அது வகைமையாகவோ அல்லது வகைமையின்றியோ அமையலாம். வகைமையாக அமைந்தால் f''' **மூன்றாம் வகையிடல்** என்றும்

$$f'''(x) = \frac{d^3 y}{dx^3} = y''' = y_3 \text{ எனவும் குறிப்பிடப்படுகிறது}$$

மூன்றாம் வகையீட்டினை இயற்பியல் ரீதியாக, ஒரு நேர்க்கோட்டில் நகரும் பொருளின் நிலைச்சார்பின் மூலம் விளக்கலாம். $s''' = (s'')' = a'(t)$ என்பதால், நிலைச்சார்பின் மூன்றாம் வகையிடல் என்பது முடுக்கச் சார்பின் வகைக்கெழு ஆகும். மற்றும் அதனை ‘குலுக்கம்’ (jerk) என்றும்

$$j = \frac{da}{dt}=\frac{d^3 s}{dt^3} \text{ எனவும் எழுதலாம்.}$$

எனவே, ‘குலுக்கம்’ என்பது முடுக்கத்தில் திடீரென ஏற்படும் மாற்றம் என்பதால் மிகச் சரியாகவே முடுக்கத்தின் மாறு வீதத்திற்கு குலுக்கம் எனப் பெயரிடப்பட்டுள்ளது. பெரிய குலுக்கம் ஏற்பட்டால் வாகனத்தின் நகர்வில் அதிர்வு ஏற்படும்.

எடுத்துக்காட்டு 10.31

$y = x^3-6x^2-5x+3$ எனில், y', y'' மற்றும் y''' ஆகியவற்றைக் காண்க.

தீர்வு

$$y = x^3-6x^2-5x+3 \text{ மற்றும்}$$

$$y' = 3x^2-12x-5$$

$$y'' = 6x-12$$

$$y''' = 6$$

04_10 Differential Calculus 2.indd 184 30-05-2022 15:17:24

எடுத்துக்காட்டு 10.32

$y = \frac{1}{x}$ எனில், y''' காண்க.

தீர்வு

$$y = \frac{1}{x} = x^{-1}$$

$$y' = -1x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$y'' = (-1)(-2)x^{-3} = \frac{(-1)^2 2!}{x^3}$$

மற்றும் $$y''' = (-1)(-2)(-3)x^{-4} = \frac{(-1)^3 3!}{x^4}$$

எடுத்துக்காட்டு 10.33

$f(x) = x \cos x$ எனில், f'' காண்க.

தீர்வு

$$f(x) = x \cos x.$$

இப்போது $f'(x) = -x \sin x + \cos x$, மற்றும்

$$f''(x) = -(x \cos x + \sin x) - \sin x$$

$$= -x \cos x - 2 \sin x$$

எடுத்துக்காட்டு 10.34

$x^4 + y^4 = 16$ எனில், y'' காண்க.

தீர்வு

$$x^4 + y^4 = 16$$

உட்படு வகைக்கெழுவின்படி $4x^3 + 4y^3 y' = 0$

$$y' = -\frac{x^3}{y^3}$$

y'' கண்டறிய y' மீது வகுத்தல் விதியினைப் பயன்படுத்த வேண்டும். x–ன் சார்பாக y உள்ளது என்பது கவனத்தில் கொள்ளத்தக்கது.

$$y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{-x^3}{y^3}\right) = \frac{-\left[y^3 \frac{d}{dx}(x^3) - x^3 \frac{d}{dx}(y^3)\right]}{(y^3)^2}$$

$$= -\frac{\left[y^3 . 3x^2 - x^3(3y^2 y')\right]}{y^6} = -\frac{3x^2 y^3 - 3x^3 y^2\left(-\frac{x^3}{y^3}\right)}{y^6}$$

$$= -\frac{3(x^2 y^4 + x^6)}{y^7} = \frac{-3x^2[x^4 + y^4]}{y^7}$$

$$= \frac{-3x^2(16)}{y^7} = \frac{-48x^2}{y^7}$$

04_10 Differential Calculus 2.indd 185 30-05-2022 15:17:32

எடுத்துக்காட்டு 10.35

$$x = a\cos t$$

$y = a\sin t$ எனில் இரண்டாம் வகையீட்டைக் காண்க.

தீர்வு

x-ஐப் பொறுத்து உட்படு வகைக்கெழுவின்படி,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{a\cos t}{-a\sin t} = -\frac{\cos t}{\sin t}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{-\cos t}{\sin t}\right)$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{-\cos t}{\sin t}\right)\frac{dt}{dx} = -[-\text{cosec}^2 t]\times\frac{1}{x'(t)}$$

$$= \text{cosec}^2 t \times \frac{1}{-a\sin t}$$

$$= -\frac{\cos ec^3 t}{a}$$

எடுத்துக்காட்டு 10.36

$x^2 + y^2 = 4$ எனில், $\frac{d^2y}{dx^2}$ காண்க.

தீர்வு

$$x^2 + y^2 = 4$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$= -\frac{y.1 - x.\frac{dy}{dx}}{y^2} \quad \text{(வகுத்தல் விதிப்படி)}$$

$$= -\frac{y - x\left(-\frac{x}{y}\right)}{y^2}$$

$$= -\frac{x^2+y^2}{y^3} = -\frac{4}{y^3}$$

பயிற்சி 10.4

கீழ்க்காண்பவற்றை வகையிடுக (1 – 18) :

(1) $y = x^{\cos x}$

(2) $y = x^{\log x} + (\log x)^x$

(3) $\sqrt{xy} = e^{(x-y)}$

(4) $x^y = y^x$

(5) $(\cos x)^{\log x}$

(6) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

(7) $\sqrt{x^2+y^2} = \tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right)$

(8) $\tan(x+y) + \tan(x-y) = x$

(9) $\cos(xy) = x$ எனில், $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-(1+y\sin(xy))}{x\sin xy}$ எனக்காட்டுக.

(10) $\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}$

(11) $\tan^{-1}\left(\dfrac{6x}{1-9x^2}\right)$

(12) $\cos\left(2\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\right)$

(13) $x = a\cos^3 t$; $y = a\sin^3 t$

(14) $x = a(\cos t + t\sin t)$; $y = a(\sin t - t\cos t)$

(15) $x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}, y = \dfrac{2t}{1+t^2}$

(16) $\cos^{-1}\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)$

(17) $\sin^{-1}(3x-4x^3)$

(18) $\tan^{-1}\left(\dfrac{\cos x+\sin x}{\cos x-\sin x}\right)$

(19) x^2 -ஐ பொறுத்து $\sin x^2$ -ன் வகைக்கெழுவைக் காண்க.

(20) $\tan^{-1} x$ -ஐ பொறுத்து $\sin^{-1}\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$ -ன் வகைக்கெழுவைக் காண்க.

(21) $u = \tan^{-1}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}, v = \tan^{-1} x$ எனில் $\dfrac{du}{dv}$ காண்க.

(22) $\tan^{-1}\left(\dfrac{\cos x}{1+\sin x}\right)$ -ஐ பொறுத்து $\tan^{-1}\left(\dfrac{\sin x}{1+\cos x}\right)$ -ன் வகைக்கெழுவைக் காண்க.

(23) $y = \sin^{-1} x$ எனில், y'' காண்க.

(24) $y = e^{\tan^{-1} x}$ எனில், $(1+x^2)y'' + (2x-1)y' = 0$ எனக்காட்டுக.

(25) $y = \dfrac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}$ எனில், $(1-x^2)y_2 - 3xy_1 - y = 0$ எனக்காட்டுக.

(26) $x = a(\theta + \sin\theta), y = a(1-\cos\theta)$ எனில், $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ எனும்போது $y'' = \dfrac{1}{a}$ என நிரூபிக்க.

(27) $\sin y = x\sin(a+y)$ எனில், $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sin^2(a+y)}{\sin a}$ என நிரூபிக்க. இங்கு $a \neq n\pi$.

(28) $y = (\cos^{-1} x)^2$ எனில், $(1-x^2)\dfrac{d^2y}{dx^2} - x\dfrac{dy}{dx} - 2 = 0$ என நிரூபிக்க. மேலும், $x = 0$ -ன்போது y_2 மதிப்பைக் காண்க.

பயிற்சி 10.5

சரியான அல்லது மிகவும் ஏற்புடைய விடையினைக் கொடுக்கப்பட்ட நான்கு மாற்று விடைகளிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கவும்.

(1) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{2}{\pi}\sin x^\circ\right)$

(1) $\dfrac{\pi}{180}\cos x^\circ$ (2) $\dfrac{1}{90}\cos x^\circ$ (3) $\dfrac{\pi}{90}\cos x^\circ$ (4) $\dfrac{2}{\pi}\cos x^\circ$

(2) $y = f(x^2+2)$ மற்றும் $f'(3) = 5$ எனில், $x = 1$ -ல் $\dfrac{dy}{dx}$ என்பது

(1) 5 (2) 25 (3) 15 (4) 10

(3) $y = \dfrac{1}{4}u^4$, $u = \dfrac{2}{3}x^3 + 5$ எனில், $\dfrac{dy}{dx}$ என்பது

(1) $\dfrac{1}{27}x^2(2x^3+15)^3$ (2) $\dfrac{2}{27}x(2x^3+5)^3$

(3) $\dfrac{2}{27}x^2(2x^3+15)^3$ (4) $-\dfrac{2}{27}x(2x^3+5)^3$

(4) $f(x) = x^2 - 3x$ எனில், $f(x) = f'(x)$ என அமையும் புள்ளிகள்

(1) இரண்டும் மிகை முழு எண்களாகும்

(2) இரண்டும் குறை முழு எண்களாகும்

(3) இரண்டுமே விகிதமுறா எண்களாகும்

(4) ஒன்று விகிதமுறு எண்ணாகவும் மற்றொன்று விகிதமுறா எண்ணாகவும் இருக்கும்

(5) $y = \dfrac{1}{a-z}$ எனில், $\dfrac{dz}{dy}$ -ன் மதிப்பு

(1) $(a-z)^2$ (2) $-(z-a)^2$ (3) $(z+a)^2$ ` (4) $-(z+a)^2$

(6) $y = \cos(\sin x^2)$ எனில், $x = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$ -ல் $\dfrac{dy}{dx}$ -ன் மதிப்பு

(1) – 2 (2) 2 (3) $-2\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$ (4) 0

(7) $y = mx + c$ மற்றும் $f(0) = f'(0) = 1$ எனில், $f(2)$ என்பது

(1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) – 3

(8) $f(x) = x\tan^{-1} x$ எனில், $f'(1)$ என்பது

(1) $1+\dfrac{\pi}{4}$ (2) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{\pi}{4}$ (3) $\dfrac{1}{2}-\dfrac{\pi}{4}$ (4) 2

04_10 Differential Calculus 2.indd 188 30-05-2022 15:18:34

(9) $\frac{d}{dx}(e^{x+5\log x})$ என்பது

(1) $e^x.x^4(x+5)$ (2) $e^x.x(x+5)$ (3) $e^x+\frac{5}{x}$ (4) $e^x-\frac{5}{x}$

(10) $x=0$ -ல், $(ax-5)e^{3x}$ –ன் வகைக்கெழு – 13 எனில், 'a'–ன் மதிப்பு

(1) 8 (2) – 2 (3) 5 (4) 2

(11) $x=\frac{1-t^2}{1+t^2}, y=\frac{2t}{1+t^2}$ எனில், $\frac{dy}{dx}$ என்பது

(1) $-\frac{y}{x}$ (2) $\frac{y}{x}$ (3) $-\frac{x}{y}$ (4) $\frac{x}{y}$

(12) $x=a\sin\theta$ மற்றும் $y=b\cos\theta$ எனில், $\frac{d^2y}{dx^2}$ என்பது

(1) $\frac{a}{b^2}\sec^2\theta$ (2) $-\frac{b}{a}\sec^2\theta$ (3) $-\frac{b}{a^2}\sec^3\theta$ (4) $-\frac{b^2}{a^2}\sec^3\theta$

(13) $\log_x 10$ –ஐ பொறுத்து $\log_{10} x$ –ன் வகைக்கெழு

(1) 1 (2) $-(\log_{10} x)^2$ (3) $(\log_x 10)^2$ ` (4) $\frac{x^2}{100}$

(14) $f(x)=x+2$ எனில், $x=4$ -ல் $f'(f(x))$ -ன் மதிப்பு

(1) 8 (2) 1 (3) 4` (4) 5

(15) $y=\frac{(1-x)^2}{x^2}$ எனில், $\frac{dy}{dx}$ –ன் மதிப்பு

(1) $\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^3}$ (2) $-\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^3}$ (3) $-\frac{2}{x^2}-\frac{2}{x^3}$ (4) $-\frac{2}{x^3}+\frac{2}{x^2}$

(16) $pv=81$ எனில், $v=9$ -ல் $\frac{dp}{dv}$ –ன் மதிப்பு

(1) 1 (2) – 1 (3) 2 (4) -2

(17) $f(x)=\begin{cases} x-5 & , x\le 1 \\ 4x^2-9 & , 1<x<2 \\ 3x+4 & , x\ge 2 \end{cases}$ எனில், x = 2–ல் $f(x)$–ன் வலப்பக்க வகைக்கெழு

(1) 0 (2) 2 (3) 3 (4) 4

(18) $f'(a)$ உள்ளது எனில், $\lim_{x\to a}\frac{xf(a)-af(x)}{x-a}$ என்பது

(1) $f(a)-af'(a)$ (2) $f'(a)$ (3) $-f'(a)$ (4) $f(a)+af'(a)$

(19) $f(x)=\begin{cases} x+1, & x<2 \\ 2x-1, & x\ge 2 \end{cases}$ எனில், $f'(2)$ என்பது

(1) 0 (2) 1 (3) 2 (4) கிடைக்கப்பெறாது

(20) $g(x) = (x^2 + 2x + 1)f(x)$, $f(0) = 5$ மற்றும் $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-5}{x} = 4$ எனில், $g'(0)$ என்பது

(1) 20 (2) 14 (3) 18 (4) 12

(21) $f(x) = \begin{cases} x+2, & -1 < x < 3 \\ 5, & x = 3 \\ 8-x, & x > 3 \end{cases}$, $x = 3$ல் $f'(x)$ என்பது

(1) 1 (2) – 1 (3) 0 (4) கிடைக்கப்பெறாது

(22) $x = -3$-ல் $f(x) = x|x|$-ன் வகையிடலின் மதிப்பு

(1) 6 (2) – 6 (3) கிடைக்கப்பெறாது (4) 0

(23) $f(x) = \begin{cases} 2a - x, & , -a < x < a \\ 3x - 2a & , x \geq a \end{cases}$ எனில் கீழ்க்காணும் கூற்றுகளில் எது மெய்யானது?

(1) $x = a$–ல் $f(x)$ வகைமை இல்லை

(2) $x = a$–ல் $f(x)$ தொடர்ச்சியற்று உள்ளது

(3) $\mathbb{R}$ -ல் உள்ள அனைத்து x–க்கும் $f(x)$ தொடர்ச்சியானது

(4) அனைத்து $x \geq a$ –க்கும் $f(x)$ வகைமையாகிறது

(24) $f(x) = \begin{cases} ax^2 - b, & -1 < x < 1 \\ \frac{1}{|x|}, & \text{பிற} \end{cases}$, $x = 1$–ல் வகைமையானது எனில்

(1) $a = \frac{1}{2}, \ b = \frac{-3}{2}$ (2) $a = \frac{-1}{2}, \ b = \frac{3}{2}$ (3) $a = -\frac{1}{2}, \ b = -\frac{3}{2}$ (4) $a = \frac{1}{2}, \ b = \frac{3}{2}$

(25) $f(x) = |x-1| + |x-3| + \sin x$ எனும் சார்பு $\mathbb{R}$ -ல் வகைமையாகாத புள்ளிகளின் எண்ணிக்கை

(1) 3 (2) 2 (3) 1 (4) 4

பாடத் தொகுப்பு

இப்பாடத்தில் நாம் கற்றுத் தெளிந்தவை

- வகையிடல் என்பது மாறு வீதம் ஆகும் எல்லை கிடைக்கப்பெறின், $y = f(x)$ எனில், x_0 -ல் x–ஐ பொறுத்து y–ன் வகையிடல் என்பது $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$. இங்கு எல்லை இருக்க வேண்டும் என்றால், $f'(x_0^+) = \lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0^-)$ என்பது ஒரு தனித்த மெய்யெண்ணாக இருக்க வேண்டும்.
- $x = x_0$ என்ற புள்ளியில் $y = f(x)$ என்ற சார்பின் வகைக்கெழு

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0} = f'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

04_10 Differential Calculus 2.indd 190 30-05-2022 15:19:32

- $(x, f(x))$ என்ற புள்ளியில் $y = f(x)$ –ன் வகைக்கெழு $y = f(x)$ என்ற வளைவரையில் தொடுகோட்டின் சாய்வு என்பதன் வடிவியல் விளக்கமாகும்.
- $s = f(t)$ –ன் முதல் வகைக்கெழு t-ஐ பொறுத்து இடமாற்றத்தின் மாறு வீதமாகும். அது திசைவேகம் ஆகும். இரண்டாம் வகைக்கெழு முடுக்கமாகும். மூன்றாவது வகைக்கெழு குலுக்கமாகும்.
- $x = x_0$ –ல் $y = f(x)$ தொடர்ச்சியற்று இருந்தால் $x = x_0$ –ல் $f(x)$ வகைமையற்றது.
- $x = x_0$ –ல் $y = f(x)$ வகைமைஇல்லையெனில் $(x_0, f(x_0))$ –ல் $y = f(x)$ என்றவளைவரைக்குத் தொடுகோடு இல்லை என்பதாக பொருள்.
- $y = f(x)$ என்ற வளைவரைக்கு $x = x_0$ –ல் வளைவரை வடிவம் $(\vee)$ அல்லது $(\wedge)$ வடிவில் இருந்தால் $x = x_0$ –ல் வகைமை இல்லை.
- வகையிடல் என்பது ஒரு செயலே அன்றி விதிகளின் தொகுப்பு எனப் புரிந்து கொள்ளல்.
- வகைமைத் தன்மையானது தொடர்ச்சித் தன்மையைக் கொடுக்கும். ஆனால் தொடர்ச்சித்தன்மையானது வகைமைத்தன்மையைக் கொடுக்க வேண்டிய அவசியமில்லை.
- வகைமைத்தன்மை வாய்ந்த சார்புகளின் வேறுபாடு, பெருக்கல், வகுத்தல்

(i) $\frac{d}{dx}(f(x) \pm g(x)) = \frac{d}{dx} f(x) \pm \frac{d}{dx} g(x)$

(ii) $\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f(x)\frac{dg}{dx} + g(x)\frac{df}{dx}$

(iii) $\frac{d}{dx}((fog)(x)) = f'(g(x))g'(x)$

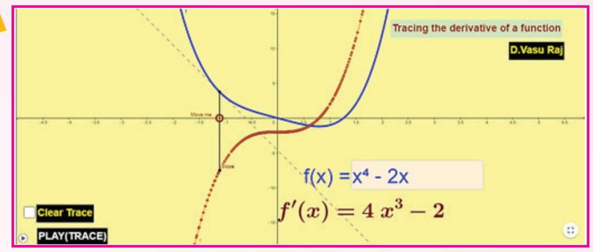
(iv) $\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$ இங்கு $g(x) \neq 0$ ஆகும்.

04_10 Differential Calculus 2.indd 191 30-05-2022 15:19:48

இணையச் செயல்பாடு 10 (a)

வகை நுண்கணிதம்-வகைமை மற்றும் வகையிடல் முறைகள்

செயல்பாட்டின் இறுதியில் கிடைக்கப் பெறுவது

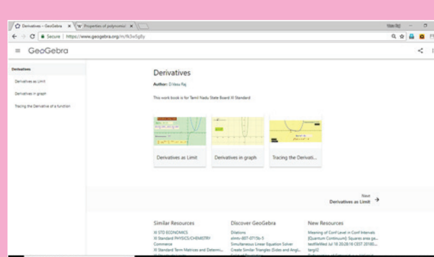


படி – 1

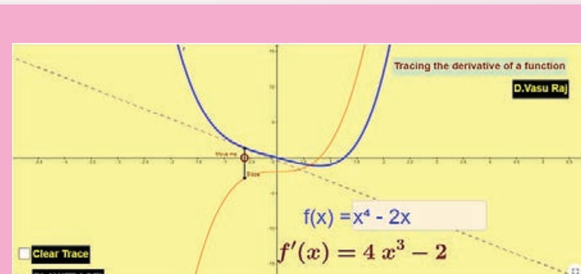
கீழ்க்காணும் உரலி / விரைவுக் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி *GeoGebra* –வின் "*Derivatives*" பக்கத்திற்குச் செல்க. உங்கள் பாடம் சார்ந்த பல பயற்சித்தாள்கள் இப்பக்கத்தில் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும்.

படி – 2

"*Tracing the derivative of a function*" என்ற பயிற்சித் தாளைத் தேர்வு செய்க. நீங்கள் ஏதேனும் சார்பு மதிப்பினை f(x) பெட்டியில் பதியவும். சார்பு நீல நிறத்திலும், வகைகெழு ஆரஞ்சு நிறத்திலும் நீங்கள் காணலாம். *Play trace button*–ஐச் சொடுக்கி வகைக்கெழுவின் நியமபாதையின் அசைவூட்டத்தைப் பெறலாம் (*x*, *x*–ல் சாய்வு). f(x)–ன் ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் வகைகெழு சறிவின் பாதை என்பதை காணலாம்.



படி – 1



படி – 2

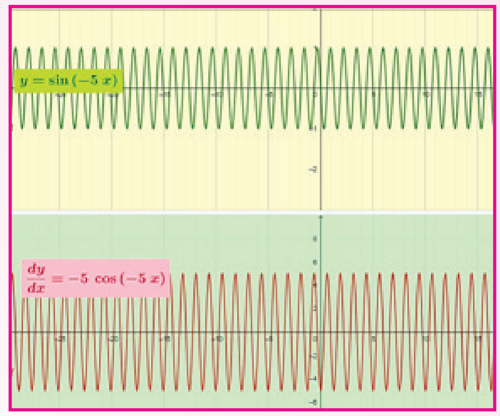
உரலி :
https://ggbm.at/fk3w5g8y
*படங்கள் அடையாளத்திற்கு மட்டும்.

04_10 Differential Calculus 2.indd 192 30-05-2022 15:19:50

இணையச் செயல்பாடு 10 (b)

வகை நுண்கணிதம்-வகைமை மற்றும் வகையிடல் முறைகள்

செயல்பாட்டின் இறுதியில் கிடைக்கப் பெறுவது

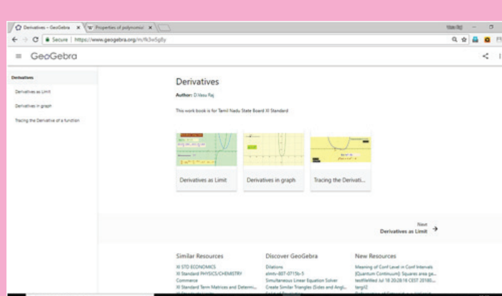


படி – 1

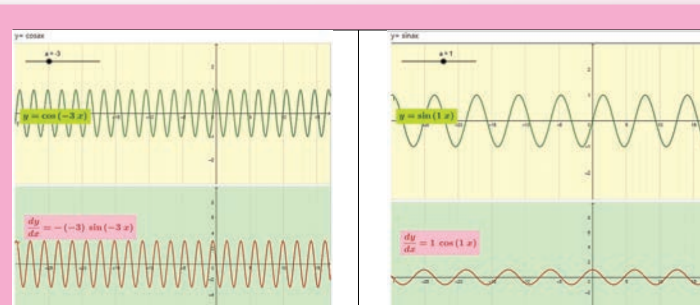
கீழ்க்காணும் உரலி / விரைவுக் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி GeoGebra –வின் "Derivatives" பக்கத்திற்குச் செல்க. உங்கள் பாடம் சார்ந்த பல பணித்தாள்கள் இப்பக்கத்தில் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும்.

படி – 2

"Derivatives in graph" என்பதைத் தேர்வு செய்க. சில அடிப்படை செயல்பாடுகளும் பங்குகளும் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும். நழுவலை நகர்த்தி "a"–ன் மதிப்புகளை மாற்ற முடியும்.மேலும் ஒவ்வொரு செயல்பாடு மற்றும் பங்குகளில் ஏற்படும் மாற்றங்களை உற்றுநோக்குக.



படி – 1



படி – 2

உரலி :

https://ggbm.at/fk3w5g8y

*படங்கள் அடையாளத்திற்கு மட்டும்.

04_10 Differential Calculus 2.indd 193 30-05-2022 15:19:51