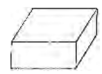
अध्याय–13

आयतन तथा क्षेत्रफल→ ठोस आकृतियाँ – समतल सतह

घनाभ



कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2(\ell b + bh + \ell h)$ वर्ग इकाई

आयतन $= \ell \times b \times h$ घन इकाई

विकर्ण की लम्बाई $= \sqrt{\ell^2 + b^2 + h^2}$ इकाई

घन

कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $= (6\,\text{भुजा}^2)$ वर्ग इकाई

आयतन $=$ भुजा^{3} घन इकाई

विकर्ण की लम्बाई $= \sqrt{3}$ भुजा इकाई

ठोस आकृतियाँ-वक्र सतह

बेलन

आधार का क्षेत्रफल $= \pi r^2$

वक्रपृष्ठ का क्षेत्रफल $= 2\pi rh$

सम्पूर्णपृष्ठ का क्षेत्रफल

$= 2\pi rh + 2\pi r^2$

$= 2\pi r(h + r)$

आधार की परिधि $= 2\pi r$

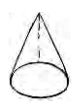
आयतन=

(आधार का क्षे0)× ऊँचाई

$= \pi r^2 \times h$

$= \pi r^2 h$

शंकु



आधार का क्षेत्रफल $= \pi r^2$

वक्रपृष्ठ का क्षेत्रफल $= \pi r\ell$

सम्पूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल

$= \pi rl + \pi r^2$

$= \pi r(\ell + r)$

आधार की परिधि $= 2\pi r$

आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

अर्द्ध गोला

आधार का क्षेत्रफल $= \pi r^2$

वक्रपृष्ठ का क्षेत्रफल

$= 2\pi r^2$

सम्पूर्णपृष्ठ का क्षेत्रफल

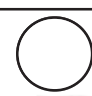
$= 2\pi r^2 + \pi r^2$

$= 3\pi r^2$

आधार की परिधि $= 2\pi r$

आयतन $= \frac{2}{3}\pi r^3$

गोला (Sphere)



सम्पूर्ण पृष्ठ का क्षे0 $= 4\pi r^2$

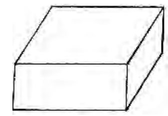
आयतन $= \frac{4}{3}\pi r^3$

ठोस आकृतियों के आयतन तथा क्षेत्रफल

(Volume and Surface area of Solid)

ठोस (Solid):- आधारभूत आकृतियाँ - घनाभ, घन, शंकु, बेलन और गोला

वे वस्तुएँ जिनकी आकार (Shape) एवं माप (Size) निश्चित होती है, ठोस वस्तुएँ कहलाती हैं।



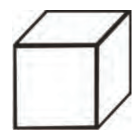
1. घनाभ:- जिनक फलक (Faces) आयताकार होते हैं।

सूत्र- (i) आयतन $= (\ell \times b \times h)$ घन इकाई जहाँ $\ell =$ लम्बाई, $b =$ चौड़ाई, $h =$ ऊँचाई

(ii) कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2(\ell b + bh + \ell h)$ वर्ग इकाई

(iii) विकर्ण की लम्बाई $= \sqrt{\ell^2 + b^2 + h^2}$ इकाई

2. घन:- जिसके सभी फलक वर्गाकार होते हैं। एक भुजा $= a$ इकाई



सूत्र- (i) आयतन $= a^3$ घन इकाई

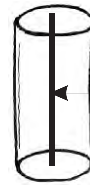
(ii) कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 6a^2$ वर्ग इकाई

(iii) विकर्ण की लम्बाई $= \sqrt{3}\, a$ इकाई

3. ठोस बेलन:- दोनो आधार (Base) सर्वागसम होते हैं तथा आकार वृत्ताकार होते हैं।

सूत्र- (i) आधार का क्षेत्रफल $= \pi r^2$

(ii) आधार का परिधि $= 2\pi r$



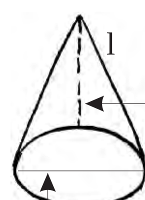
(iii) बेलन के वक्रपृष्ठ का क्षेत्रफल $= 2\pi rh$

(iv) बेलन के सम्पूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल $= 2\pi r^2 + 2\pi rh$

$= 2\pi r(r + h)$ वर्ग इकाई

(v) बेलन का आयतन $= \pi r^2 \times h = \pi r^2 h$

4. शंकु (Cone):-



सूत्र- (i) शंकु के आधार का क्षेत्रफल $= \pi r^2$ वर्ग इकाई

(ii) शंकु के वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल $= \pi r \ell$ वर्ग इकाई

(iii) शंकु के आधार की परिधि $= 2\pi r$ इकाई

(iv) शंकु के संपूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल वक्रपृष्ठ $= \pi r \ell + \pi r^2$

$= \pi r(\ell + r)$

(v) शंकु का आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$ घन इकाई

5. **गोला (Sphere):-** जैसे- कंचे की गोली, फुटबॉल, क्रिकेट बॉल।

सूत्र- (i) गोले के सम्पूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल $= 4\pi r^2$ वर्ग इकाई

(ii) गोले का आयतन $= \frac{4}{3}\pi r^3$ घन इकाई

6. **अर्द्धगोला (Hemispher):-** गोले के दो समान भाग में से प्रत्येक भाग अर्द्धगोला कहलाता है।

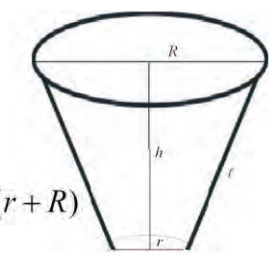
सूत्र- (i) वक्रपृष्ट का क्षेत्रफल $= 2\pi r^2$

(ii) अर्द्धगोले के सम्पूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल $= 2\pi r^2 + \pi r^2$

$= 3\pi r^2$

(ii) अर्द्धगोले का आयतन $= \frac{2}{3}\pi r^3$

7. **लम्बवृत्तीय शंकु के छिन्नक(Frustum of a Right Circular Cone):-** जैसे- बाल्टी।



सूत्र- (i) शंकु के छिन्नक या बाल्टी का आयतन

$$= \frac{1}{3}\pi h(R^2 + R.r + r^2)$$

(ii) बाल्टी (छिन्नक) के वक्रपृष्ठ का क्षेत्रफल $= \pi \ell(r + R)$

(iii) शंकु के छिन्नक के सम्पूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल

$$= \pi R^2 + \pi r^2 + \pi \ell(R + r)$$

$$= \pi[R^2 + r^2 + \ell(R + r)]$$

(iv) शंकु के छिन्नक की तिरछी ऊँचाई $= \sqrt{h^2 + (R - r)^2}$

उदाहरण:- (1) 45 cm उँची बाल्टी की सिरों की त्रिज्यायें 28 cm और 7 cm है। बाल्टी का आयतन ज्ञात करें।

हल : प्रश्न से, $h = 45cm$, $R = 28cm$, $r = 7cm$

सूत्र से, आयतन $= \frac{1}{3}\pi h(R^2 + r^2 + R.r)$ घन इकाई

$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 45(28^2 + 7^2 + 28 \times 7)$$ घन सेमी0

$= \frac{22\times15}{7}(784+49+196)$ घन सेमी0

$= \frac{22\times15}{7}\times1029$ घन सेमी0

$= 22\times15\times147$ घन सेमी0

$= 48510$ घन सेमी0

उदाहरणः- **(2)** उस गोले का पृष्ठ क्षेत्रफल निकालें जिसका व्यास 14 सेमी है।

प्रश्न से, गोले का व्यास $= 14cm$

त्रिज्या $= \frac{\text{व्यास}}{2} = \frac{14}{2} = 7cm$

सूत्र से, गोले का पृष्ठ क्षेत्रफल $= 4\pi r^2$

$= 4\times\frac{22}{7}(7)^2 cm^2$

$= 88\times7cm^2$

$= 616cm^2$

उदाहरणः- **(3)** $8\,cm$ त्रिज्या वाले एक गोले से $1cm$ त्रिज्या वाली कितनी ठोस गोलियाँ बनाई जा सकती हैं?

उत्तर- बड़ी गोली का आयतन $= \frac{4}{3}\pi.r^3 = \frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times8^3\,cm^3$

छोटी गोली का आयतन $= \frac{4}{3}\pi.r^3 = \frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times1^3\,cm^3$

$\therefore$ अभीष्ट गोलियों की संख्या $= \dfrac{\frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times8^3}{\frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times1^3} = 8^3 = 512$

उदाहरणः- **(4)** $12\,cm$ व्यास का एक वृत्तीय बेलन जल से अंशतः भरा हुआ है। यदि

उसमें $6cm$ व्यास का एक गोल पूर्णतः डुबा दिया जाता है, तो बेलन में जल की सतह कितनी ऊँचाई उठ जाएगी?

उत्तरः- प्रश्न से, गोले का व्यास $= 6cm$

$\therefore$ गोले की त्रिज्या $= 3cm$

गोले का आयतन $= \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \times 3^3$ घन सेमी0

$= 36\pi$ घन सेमी0

फिर, माना कि जल सतह h सेमी0 से उपर उठ जाती है।

तो उठे हुए जल का आयतन $= \pi(\frac{12}{2})^2 \times h$ घन सेमी**0**

प्रश्न से, उठे हुए जल का आयतन = गोले का आयतन

या, $\pi 36h = 36\pi$

$\therefore$ $h = 1$

अतः जल स्तर $1\,cm$ से उठ जाती है।