1. સમતલ $\vec{r} \cdot (6\hat{i} - 3\hat{j} - 2\hat{k}) + 1 = 0$ ના ઊગમબિંદુમાંથી દોરેલ લંબના દિક્કોસાઈન મેળવો.

➠ $\frac{6}{7}, \frac{-3}{7}, \frac{-2}{7}$

2. ઊગમબિંદુથી 11 એકમ અંતરે આવેલ અને જેનો અભિલંબ સદિશ $2\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ હોય તેવા સમતલનું સદિશ સમીકરણ મેળવો.

➠ $\vec{r} \cdot (2\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}) = 33$

3. સમતલ $\vec{r} = \hat{i} - \hat{j} + \lambda(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) + \mu(\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k})$ નું સદિશ સ્વરૂપ મેળવો. સમતલનું અભિલંબ સ્વરૂપનું સમીકરણ પણ મેળવો.

➠ $\vec{r} \cdot (5\hat{i} - 2\hat{j} - 3\hat{k}) = 7$, $\vec{r} \cdot \left(\frac{5}{\sqrt{38}}\hat{i} - \frac{2}{\sqrt{38}}\hat{j} - \frac{3}{\sqrt{38}}\hat{k}\right) = \frac{7}{\sqrt{38}}$

4. બિંદુ (2, –1, 1) માંથી પસાર થતા તથા જેનો અભિલંબ સદિશ $4\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ હોય તેવા સમતલનું કાર્તેઝિય સમીકરણ મેળવો.

➠ $4x + 2y - 3z = 3$

5. બિંદુઓ (1, –2, 5) (0, –5, –1) અને (–3, 5, 0) માંથી પસાર થતા સમતલનું સદિશ સમીકરણ તથા કાર્તેઝિય સમીકરણ મેળવો.

➠ $\vec{r} \cdot (3\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}) + 4 = 0$, $3x + y - z + 4 = 0$

6. જેમના સ્થાન સદિશો $-\hat{j} + \hat{k}$, $2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}$, $\hat{i} + \lambda\hat{j} + \hat{k}$ અને $3\hat{j} + 3\hat{k}$ હોય તેવા ચાર બિંદુઓ સમતલીય હોય તો λ નું મૂલ્ય મેળવો.

➠ $\lambda = 1$

7. એક સમતલ અક્ષોને અનુક્રમે A, B અને C બિંદુમાં છેદે છે. Δ ABC નું મધ્યકેન્દ્ર (3, 4, –6) હોય તો સમતલનું સમીકરણ મેળવો.

➠ $4x + 3y - 2z = 36$

8. બતાવો કે (1, 1, 1), (1, –1, 1) અને (–7, 3, –5) બિંદુઓમાંથી પસાર થતું સમતલ XZ–સમતલને લંબ છે.

➠ સ્વપ્રયત્ને

9. ઊગમબિંદુમાંથી સમતલ પર દોરેલ લંબનો લંબપાદ (4, –2, –5) છે તો સમતલનું કાર્તેઝિય સમીકરણ મેળવો.

➠ $4x - 2y - 5z = 45$

10. બિંદુઓ (–3, 1, 2) અને (2, 3, 4) ને જોડતી રેખાને લંબ તથા (–1, 2, 1) બિંદુમાંથી પસાર થતા સમતલનું સદિશ સમીકરણ મેળવો. આ સમતલનું ઊગમબિંદુથી લંબ અંતર શોધો.

➠ $\vec{r} \cdot (5\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}) = 1$, $\frac{1}{\sqrt{33}}$

11. સમતલો $x + y + z - 6 = 0$ અને $2x + 3y + 4z + 5 = 0$ ના છેદબિંદુમાંથી તથા બિંદુ (1, 1, 1) માંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ શોધો.

➠ $20x + 23y + 26z - 69 = 0$

12. સમતલો $\vec{r} \cdot (2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}) = 1$ અને $\vec{r} \cdot (\hat{i} - \hat{j}) + 4 = 0$ ના છેદ રેખામાંથી પસાર થતા અને સમતલ $\vec{r} \cdot (2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) + 8 = 0$ ને લંબ સમતલનું સમીકરણ મેળવો.

➠ $5x - 2y - 12z + 47 = 0$

13. સમતલો $x + 2y + 3z - 4 = 0$ અને $2x + y - z + 5 = 0$ ની છેદરેખામાંથી પસાર થતા અને સમતલ $5x + 3y + 6z + 8 = 0$ ને લંબ સમતલનું સમીકરણ મેળવો.

➠ $51x + 15y - 50z + 173 = 0$

14. સમતલો $\vec{r}\cdot(2\hat{i}+6\hat{j})+12=0$ અને $\vec{r}\cdot(3\hat{i}-\hat{j}+4\hat{k})=0$ ની છેદરેખામાંથી પસાર થતા તથા ઊગમબિંદુમાંથી એકમ અંતરે આવેલ સમતલનું સમીકરણ મેળવો.

➠ $x - 2y + 2z - 3 = 0$

15. સમતલો $2x - 3y + z - 4 = 0$ અને $x - y + z + 1 = 0$ ની છેદરેખામાંથી પસાર થતા અને સમતલ $x + 2y - 3z + 6 = 0$ ને લંબ સમતલનું સમીકરણ મેળવો.

➠ $x - 5y - 3z - 23 = 0$

16. સમતલ સમાંતર છે કે પરસ્પર લંબ છે તે નક્કી કરો અને જો આ પૈકી એક પણ ન હોય તો તેમની વચ્ચેનો ખૂણો શોધો :
$2x - y + z = 6$ અને $x + y + 2z = 7$

➠ $\frac{\pi}{3}$

17. સમતલ સમાંતર છે કે પરસ્પર લંબ છે તે નક્કી કરો અને જો આ પૈકી એક પણ ન હોય તો તેમની વચ્ચેનો ખૂણો શોધો :
$\vec{r}\cdot(\hat{i}-\hat{j}+\hat{k})=4$ અને $\vec{r}\cdot(3\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k})-11=0$

➠ $\frac{\pi}{2}$

18. સમતલ સમાંતર છે કે પરસ્પર લંબ છે તે નક્કી કરો અને જો આ પૈકી એક પણ ન હોય તો તેમની વચ્ચેનો ખૂણો શોધો :
$x + y - 2z = 3$ અને $2x - 2y + z = 5$

➠ $\cos^{-1}\left(\frac{2}{3\sqrt{6}}\right)$

19. સમતલ સમાંતર છે કે પરસ્પર લંબ છે તે નક્કી કરો અને જો આ પૈકી એક પણ ન હોય તો તેમની વચ્ચેનો ખૂણો શોધો :
$2x - 3y + 4z = 1$ અને $-x + y = 4$

➠ $\cos^{-1}\left(\frac{5}{\sqrt{58}}\right)$

20. સમતલ સમાંતર છે કે પરસ્પર લંબ છે તે નક્કી કરો અને જો આ પૈકી એક પણ ન હોય તો તેમની વચ્ચેનો ખૂણો શોધો :
$\vec{r}\cdot(2\hat{i}+3\hat{j}-6\hat{k})=5$ અને $\vec{r}\cdot(\hat{i}-2\hat{j}+2\hat{k})=9$

➠ $\cos^{-1}\left(\frac{16}{21}\right)$

21. સમતલો $\vec{r}\cdot(\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k})=7$ અને $\vec{r}\cdot(\lambda\hat{i}+2\hat{j}-7\hat{k})=26$ પરસ્પર લંબ હોય તો λ નું મૂલ્ય શોધો.

➠ $\lambda = 17$

22. બિંદુ (2, 1, 0) નું સમતલ $2x + y + 2z + 5 = 0$ થી અંતર મેળવો.

➠ $\frac{10}{3}$

23. બિંદુઓ $(1, 1, \lambda)$ અને $(-3, 0, 1)$ નું સમતલ $\vec{r}\cdot(3\hat{i}+4\hat{j}-12\hat{k})+13=0$ થી અંતર સમાન હોય તો λ નું મૂલ્ય મેળવો.

➠ $\lambda = 1$ અથવા $\lambda = \frac{7}{3}$

24. બે સમાંતર સમતલો $x + y - z + 4 = 0$ તથા $x + y - z + 5 = 0$ વચ્ચેનું અંતર મેળવો.

➠ $\frac{1}{\sqrt{3}}$

25. **સમાંતર સમતલો $\vec{r} \cdot (2\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k}) = 5$ તથા $\vec{r} \cdot (6\hat{i} - 9\hat{j} + 18\hat{k}) + 20 = 0$ વચ્ચેનું અંતર મેળવો.**

➡ $\frac{5}{3}$

26. **બિંદુ (1, 1, 1) નું સમતલ $x - y + z + \lambda = 0$ થી અંતર d_1 છે તથા આ બિંદુનું ઊગમબિંદુથી અંતર d_2 છે. જો $d_1 d_2 = 5$ હોય તો λ નું મૂલ્ય મેળવો.**

➡ $\lambda = 4$

27. **ઊગમબિંદુથી 7 એકમ અંતરે આવેલા અને જેનો અભિલંબ સદિશ $3\hat{i} + 5\hat{j} - 6\hat{k}$ હોય તેવા સમતલનું સદિશ સમીકરણ શોધો.**

➡ અભિલંબનો સદિશ $\vec{n} = 3\hat{i} + 5\hat{j} - 6\hat{k}$

$$\therefore \hat{n} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{3\hat{i} + 5\hat{j} - 6\hat{k}}{\sqrt{9 + 25 + 36}} = \frac{3\hat{i} + 5\hat{j} - 6\hat{j}}{\sqrt{70}}$$

સમતલનું ઊગમબિંદુથી અંતર $d = 7$ એકમ

$\therefore$ સમતલનું સમીકરણ : $\vec{r} \cdot \hat{n} = d$

$$\Rightarrow \vec{r} \cdot \left(\frac{3\hat{i} + 5\hat{j} - 6\hat{k}}{\sqrt{70}} \right) = 7$$

28. **સમતલ $2x + y - z = 5$ દ્વારા અક્ષો પર કપાતા અંતઃખંડ શોધો.**

➡ સમતલનું સમીકરણ : $2x + y - z = 5$

આપેલ સમતલનાં સમીકરણને અંતઃખંડ સ્વરૂપમાં લખતાં,

$$\frac{2x}{5} + \frac{y}{5} - \frac{z}{5} = 1$$

$$\therefore \frac{x}{\frac{5}{2}} + \frac{y}{5} - \frac{z}{5} = 1$$

જે $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ સ્વરૂપનું સમીકરણ છે.

$\therefore$ અક્ષો પર કપાતાં અંતઃખંડો અનુક્રમે $\frac{5}{2}$, 5, −5 છે.

29. **Y–અક્ષ પર 3 અંતઃખંડવાળા અને ZOX સમતલને સમાંતર સમતલનું સમીકરણ શોધો.**

➡ ZOX સમતલને સમાંતર સમતલનું સમીકરણ :

$y = b$ છે. જ્યાં b એ સમતલનો Y-અક્ષ પરનો અંતઃખંડ છે.

$\therefore$ માંગેલ સમતલનું સમીકરણ : $y = 3$ છે.

30. **સમતલો $3x - y + 2z - 4 = 0$ અને $x + y + z - 2 = 0$ ના છેદમાંથી તથા બિંદુ (2, 2, 1) માંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ શોધો.**

➡ સમતલો $3x - y + 2z - 4 = 0$ અને $x + y + z - 2 = 0$ ના છેદબિંદુમાંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ,

$(3x - y + 2z - 4) + \lambda (x + y + z - 2) = 0$ છે. ....(i) હવે આ સમતલ બિંદુ (2, 2, 1) માંથી પસાર થાય છે.

$\therefore$ સમીકરણ (i) પરથી,

$[3(2) - 2 + 2(1) - 4] + \lambda (2 + 2 + 1 - 2) = 0$

$\therefore 2 + 3\lambda = 0$

$\therefore \lambda = -\frac{2}{3}$

$(3x - y + 2z - 4) - \frac{2}{3}(x + y + z - 2) = 0$

$\therefore\ 9x - 3y + 6z - 12 - 2x - 2y - 2z + 4 = 0$

$\therefore\ 7x - 5y + 4z - 8 = 0$ જે માંગેલ સમતલનું સમીકરણ છે.

31. નીચેના પૈકી પ્રત્યેક સમતલનું કાર્તેઝિય સમીકરણ શોધો :

(a) $\vec{r} \cdot (\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}) = 2$

(b) $\vec{r} \cdot (2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}) = 1$

(c) $\vec{r} \cdot ((s - 2t)\hat{i} + (3 - t)\hat{j} + (2s + t)\hat{k}) = 15$

➥ (a) $r \cdot (\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}) = 2$

ધારો કે $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

$\therefore\ (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) \cdot (\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}) = 2$

$\therefore\ x + y - z = 2$

જે આપેલ સમતલનું કાર્તેઝિય સમીકરણ છે.

(b) $\vec{r} \cdot (2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}) = 1$

ધારો કે P(x, y, z) નો સ્થાન સદિશ $\vec{r}$ છે.

$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

$\therefore (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) \cdot (2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}) = 1$

$\therefore\ 2x + 3y - 4z = 1$

જે આપેલ સમતલનું કાર્તેઝિય સમીકરણ છે.

(c) $\vec{r} \cdot ((s - 2t)\hat{i} + (3 - t)\hat{j} + (2s + t)\hat{k}) = 15$

ધારો કે P(x, y, z) નો સ્થાન સદિશ $\vec{r}$ છે.

$\therefore \vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

$\therefore (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) \cdot ((s - 2t)\hat{i} + (3 - t)\hat{j} + (2s + t)\hat{k}) = 15$

$\therefore\ (s - 2t)x + (3 - t)y + (2s + t)z = 15$

જે આપેલ સમતલનું કાર્તેઝિય સ્વરૂપ છે.

32. સમતલો $x + y + z = 1$ અને $2x + 3y + 4z = 5$ ની છેદરેખામાંથી પસાર થતા તથા સમતલ $x - y + z = 0$ ને લંબ હોય તેવા સમતલનું સમીકરણ શોધો.

➥ સમતલો $x + y + z = 1$ અને $2x + 3y + 4z = 5$ ની છેદરેખામાંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ

$(x + y + z - 1) + \lambda(2x + 3y + 4z - 5) = 0$

$\therefore\ (1 + 2\lambda)x + (1 + 3\lambda)y + (1 + 4\lambda)z - 1 - 5\lambda = 0$ ....(i)

આ સમતલનો અભિલંબ સદિશ

$\vec{n_1} = (1 + 2\lambda)i + (1 + 3\lambda)j + (1 + 4\lambda)\hat{k}$ છે.

માંગેલ સમતલ એ $x + y + z = 0$ ને લંબ છે.

$x + y + z = 0$ સમતલનો અભિલંબ સદિશ $\vec{n_2} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ છે. અહીં બંને સમતલો પરસ્પર લંબ હોવાથી તેમના અભિલંબો પણ પરસ્પર લંબ થાય.

$\therefore\ \vec{n_1} \cdot \vec{n_2} = 0$

$\therefore\ 1 + 2\lambda + 1 + 3\lambda + 1 + 4\lambda = 0$

$\therefore\ 9\lambda + 3 = 0$

$\therefore\ \lambda = -\frac{1}{3}$

λ ની આ કિંમત સમીકરણ (i) માં મૂકતાં,

$$\left(1 - \frac{2}{3}\right)x + \left(1 - \frac{3}{3}\right)y + \left(1 - \frac{4}{3}\right)z - 1 + \frac{5}{3} = 0$$

$\therefore\ x - z + 2 = 0$ જે માંગેલ સમતલનું સમીકરણ છે.

33. સમતલના સદિશ સમીકરણ $\vec{r}\cdot(2\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k})=5$ અને $\vec{r}\cdot(3\hat{i}-3\hat{j}+5\hat{k})=3$ છે. તેમની વચ્ચેનો ખૂણો શોધો.

➡ સમતલનું સમીકરણ $\pi_1 : \vec{r}\cdot(2\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}) = 5$ સમતલના અભિલંબનો સદિશ $\vec{n_1} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$

સમતલ $\pi_2 : \vec{r}\cdot(3\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}) = 3$

સમતલના અભિલંબનો સદિશ $\vec{n_2} = 3\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$

$$\vec{n_1}\cdot\vec{n_2} = (2\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k})\cdot(3\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k})$$
$$= 6 - 6 - 15 = -15$$

$|\vec{n_1}| = \sqrt{(2)^2 + (2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{4 + 4 + 9} = \sqrt{17}$ $|\vec{n_2}| = \sqrt{(3)^2 + (-3)^2 + (5)^2} = \sqrt{9 + 9 + 25} = \sqrt{43}$

જો બંને સમતલો વચ્ચેનો ખૂણો θ હોય તો,

$$\cos\theta = \frac{|\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}|}{|\vec{n_1}||\vec{n_2}|}$$ જ્યાં θ લઘુકોણ છે.

$$\therefore\ \cos\theta = \frac{15}{\sqrt{17}\ \sqrt{43}}$$

$$\therefore\ \theta = \cos^{-1}\left(\frac{15}{\sqrt{17}\ \sqrt{43}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{15}{\sqrt{731}}\right)$$

34. નીચેના પૈકી દરેક પ્રશ્નમાં સમતલના અભિલંબની દિક્કોસાઈન અને સમતલનું ઊગમબિંદુથી અંતર મેળવો.

(a) $z = 2$ (b) $x + y + z = 1$ (c) $2x + 3y - z = 5$ (d) $5y + 8 = 0$

➡ (a) $z = 2$

$\therefore\ 0x + 0y + z - 2 = 0$

સમીકરણને $ax + by + cz + d = 0$ સાથે સરખાવતાં, $a = 0,\ b = 0,\ c = 1$.

સમતલના અભિલંબની દિક્કોસાઈન l, m, n હોય, તો

$$l = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 0$$

$$m = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 0$$

અને $n = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 1$

આમ, સમતલના અભિલંબની દિક્કોસાઈન 0, 0, 1 છે. સમતલનું ઊગમબિંદુ O(0, 0, 0) થી

$$\text{લંબઅંતર} = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$= \frac{|0 - 2|}{\sqrt{0 + 0 + 1}} = 2$$

➡ (b) $x + y + z = 1$

$x + y + z - 1 = 0$

સમીકરણને $ax + by + cz + d = 0$ સાથે સરખાવતાં $a = 1, b = 1, c = 1$

સમતલના અભિલંબના દિક્કોસાઇન l, m, n હોય, તો

$$l = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 1 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$m = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 1 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$n = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 1 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

આમ, સમતલના અભિલંબના દિક્કોસાઇન $\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}$ છે. સમતલનું ઊગમબિંદુ O(0, 0, 0) થી

$$\text{અંતર} = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$= \frac{|0 - 1|}{\sqrt{1 + 1 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

➥ (a) $z = 2$

$\therefore\ 0x + 0y + z - 2 = 0$

સમીકરણને $ax + by + cz + d = 0$ સાથે સરખાવતાં, $a = 0, b = 0, c = 1.$

સમતલના અભિલંબની દિક્કોસાઇન l, m, n હોય, તો

$$l = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 0$$

$$m = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 0$$

અને $n = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 1$

આમ, સમતલના અભિલંબની દિક્કોસાઇન 0, 0, 1 છે. સમતલનું ઊગમબિંદુ O(0, 0, 0) થી

$$\text{લંબઅંતર} = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$= \frac{|0 - 2|}{\sqrt{0 + 0 + 1}} = 2$$

➥ (b) $x + y + z = 1$

$x + y + z - 1 = 0$

સમીકરણને $ax + by + cz + d = 0$ સાથે સરખાવતાં $a = 1, b = 1, c = 1$

સમતલના અભિલંબના દિક્કોસાઇન l, m, n હોય, તો

$$l = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 1 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$m = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 1 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$n = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 1 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

આમ, સમતલના અભિલંબના દિક્કોસાઇન $\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}$ છે. સમતલનું ઊગમબિંદુ O(0, 0, 0) થી

અંતર = $\dfrac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

$= \dfrac{|0 - 1|}{\sqrt{1 + 1 + 1}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

➥ (a) $z = 2$

$\therefore 0x + 0y + z - 2 = 0$

સમીકરણને $ax + by + cz + d = 0$ સાથે સરખાવતાં, $a = 0,\ b = 0,\ c = 1.$

સમતલના અભિલંબની દિક્કોસાઇન l, m, n હોય, તો

$l = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 0$

$m = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 0$

અને $n = \dfrac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 1$

આમ, સમતલના અભિલંબની દિક્કોસાઇન 0, 0, 1 છે. સમતલનું ઊગમબિંદુ O(0, 0, 0) થી

લંબઅંતર $= \dfrac{|ax_1 + by_1 + cz_1 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

$= \dfrac{|0 - 2|}{\sqrt{0 + 0 + 1}} = 2$

➥ (b) $x + y + z = 1$

$x + y + z - 1 = 0$

સમીકરણને $ax + by + cz + d = 0$ સાથે સરખાવતાં $a = 1,\ b = 1,\ c = 1$

સમતલના અભિલંબના દિક્કોસાઇન l, m, n હોય, તો

$l = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1 + 1 + 1}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$m = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1 + 1 + 1}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$n = \dfrac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1 + 1 + 1}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

આમ, સમતલના અભિલંબના દિક્કોસાઇન $\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ છે. સમતલનું ઊગમબિંદુ O(0, 0, 0) થી

અંતર = $\dfrac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

$= \dfrac{|0 - 1|}{\sqrt{1 + 1 + 1}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

35. નીચેના પૈકી પ્રત્યેક પ્રશ્નમાં ઊગમબિંદુથી સમતલ પર દોરેલા લંબના લંબપાદના યામ શોધો :

(a) $2x + 3y + 4z - 12 = 0$ **(b) $3y + 4z - 6 = 0$**

(c) $x + y + z = 1$ **(d) $5y + 8 = 0$**

➥ (a) $2x + 3y + 4z - 12 = 0$

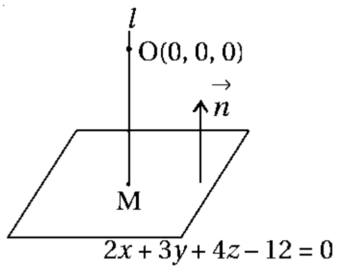
આપેલ સમતલના અભિલંબનો દિક્ગુણોત્તર 2, 3, 4 છે.

હવે ઊગમબિંદુ O(0, 0, 0) માંથી પસાર થતી અને 2, 3, 4 દિશાને સમાંતર હોય તેવી રેખા L નું

સમીકરણ : $\dfrac{x - 0}{2} = \dfrac{y - 0}{3} = \dfrac{z - 0}{4}$

$\therefore \dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z}{4} = \lambda$

∴ $x = 2\lambda,\ y = 3\lambda,\ z = 4\lambda$



ધારો કે ઊગમબિંદુ O માંથી સમતલ પર દોરેલ લંબનો લંબપાદ M છે.

∴ કોઈક $\lambda \in R$ માટે M ના યામ = $(2\lambda, 3\lambda, 4\lambda)$ મળે બિંદુ M એ સમતલ $2x + 3y + 4z - 12 = 0$ પર આવેલ હોવાથી તેના સમીકરણને સંતોષે.

∴ $2(2\lambda) + 3(3\lambda) + 4(4\lambda) - 12 = 0$

∴ $4\lambda + 9\lambda + 16\lambda = 12$

∴ $\lambda = \frac{12}{29}$

∴ લંબપાદ M ના યામ = $(2\lambda, 3\lambda, 4\lambda)$

$$= \left(\frac{24}{29}, \frac{36}{29}, \frac{48}{29}\right)$$

➥ (a) $2x + 3y + 4z - 12 = 0$

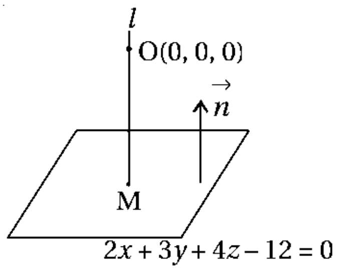
આપેલ સમતલના અભિલંબનો દિક્‌ગુણોત્તર 2, 3, 4 છે.

હવે ઊગમબિંદુ O(0, 0, 0) માંથી પસાર થતી અને 2, 3, 4 દિશાને સમાંતર હોય તેવી રેખા L નું

સમીકરણ : $\frac{x - 0}{2} = \frac{y - 0}{3} = \frac{z - 0}{4}$

∴ $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} = \lambda$

∴ $x = 2\lambda,\ y = 3\lambda,\ z = 4\lambda$



ધારો કે ઊગમબિંદુ O માંથી સમતલ પર દોરેલ લંબનો લંબપાદ M છે.

∴ કોઈક $\lambda \in R$ માટે M ના યામ = $(2\lambda, 3\lambda, 4\lambda)$ મળે બિંદુ M એ સમતલ $2x + 3y + 4z - 12 = 0$ પર આવેલ હોવાથી તેના સમીકરણને સંતોષે.

∴ $2(2\lambda) + 3(3\lambda) + 4(4\lambda) - 12 = 0$

∴ $4\lambda + 9\lambda + 16\lambda = 12$

∴ $\lambda = \frac{12}{29}$

∴ લંબપાદ M ના યામ = $(2\lambda, 3\lambda, 4\lambda)$

$$= \left(\frac{24}{29}, \frac{36}{29}, \frac{48}{29}\right)$$

➥ (a) $2x + 3y + 4z - 12 = 0$

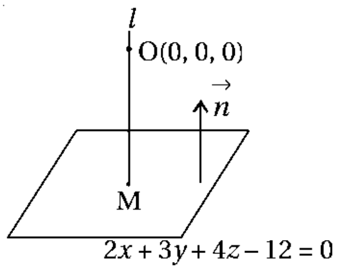
આપેલ સમતલના અભિલંબનો દિક્‌ગુણોત્તર 2, 3, 4 છે.

હવે ઊગમબિંદુ O(0, 0, 0) માંથી પસાર થતી અને 2, 3, 4 દિશાને સમાંતર હોય તેવી રેખા L નું

સમીકરણ : $\frac{x - 0}{2} = \frac{y - 0}{3} = \frac{z - 0}{4}$

$\therefore \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} = \lambda$

$\therefore x = 2\lambda, y = 3\lambda, z = 4\lambda$



ધારો કે ઊગમબિંદુ O માંથી સમતલ પર દોરેલ લંબનો લંબપાદ M છે.

$\therefore$ કોઈક $\lambda \in R$ માટે M ના યામ = $(2\lambda, 3\lambda, 4\lambda)$ મળે બિંદુ M એ સમતલ $2x + 3y + 4z - 12 = 0$ પર આવેલ હોવાથી તેના સમીકરણને સંતોષે.

$\therefore 2(2\lambda) + 3(3\lambda) + 4(4\lambda) - 12 = 0$

$\therefore 4\lambda + 9\lambda + 16\lambda = 12$

$\therefore \lambda = \frac{12}{29}$

$\therefore$ લંબપાદ M ના યામ = $(2\lambda, 3\lambda, 4\lambda)$

$= \left(\frac{24}{29}, \frac{36}{29}, \frac{48}{29}\right)$

➥ (a) $2x + 3y + 4z - 12 = 0$

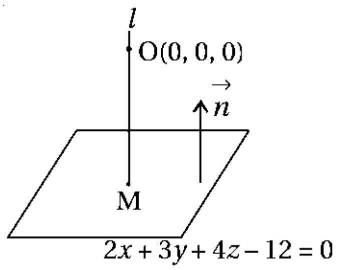
આપેલ સમતલના અભિલંબનો દિક્‌ગુણોત્તર 2, 3, 4 છે.

હવે ઊગમબિંદુ O(0, 0, 0) માંથી પસાર થતી અને 2, 3, 4 દિશાને સમાંતર હોય તેવી રેખા L નું

સમીકરણ : $\frac{x-0}{2} = \frac{y-0}{3} = \frac{z-0}{4}$

$\therefore \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} = \lambda$

$\therefore x = 2\lambda, y = 3\lambda, z = 4\lambda$



ધારો કે ઊગમબિંદુ O માંથી સમતલ પર દોરેલ લંબનો લંબપાદ M છે.

$\therefore$ કોઈક $\lambda \in R$ માટે M ના યામ = $(2\lambda, 3\lambda, 4\lambda)$ મળે બિંદુ M એ સમતલ $2x + 3y + 4z - 12 = 0$ પર આવેલ હોવાથી તેના સમીકરણને સંતોષે.

$\therefore 2(2\lambda) + 3(3\lambda) + 4(4\lambda) - 12 = 0$

$\therefore 4\lambda + 9\lambda + 16\lambda = 12$

$\therefore \lambda = \frac{12}{29}$

$\therefore$ લંબપાદ M ના યામ = $(2\lambda, 3\lambda, 4\lambda)$

$= \left(\frac{24}{29}, \frac{36}{29}, \frac{48}{29}\right)$

36. નીચેના પૈકી પ્રત્યેક સમતલનાં સદિશ અને કાર્તેઝિય સમીકરણ શોધો :

(a) જે (1, 0, –2) માંથી પસાર થાય અને જેનો અભિલંબ સદિશ $\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ હોય.

(b) જે (1, 4, 6) માંથી પસાર થાય અને જેનો અભિલંબ સદિશ $\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$ હોય.

➥ જે (1, 0, –2) માંથી પસાર થાય અને જેનો અભિલંબ સદિશ $\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$ હોય.

આપેલ છે કે $\vec{a} = \hat{i} - 2\hat{k}$

તથા $\vec{n}$ = અભિલંબ સદિશ = $\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$

સમતલનું સદિશ સમીકરણ :

$(\vec{r} - \vec{a}) \cdot \vec{n} = 0$

$\Rightarrow \left(\vec{r} - (\hat{i} - 2\hat{k})\right) \cdot (\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}) = 0$ ....(i)

સમતલનું કાર્તેઝિય સમીકરણ :

સમીકરણ (i) માં $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ લેતાં,

$((x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) - (\hat{i} - 2\hat{k}) \cdot (\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}) = 0$

$\Rightarrow ((x-1)\hat{i} + y\hat{j} + (z+2)\hat{k}) \cdot (\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}) = 0$

$\Rightarrow x - 1 + y - z - 2 = 0$

$\Rightarrow x + y - z = 3$

(b) જે (1, 4, 6) માંથી પસાર થાય અને જેનો અભિલંબ સદિશ $\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ હોય.

આપેલ છે કે $\vec{a} = \hat{i} + 4\hat{j} + 6\hat{k}$

તથા અભિલંબ સદિશ $\vec{n} = \hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$

સમતલનું સદિશ સમીકરણ :

$(\vec{r} - \vec{a}) \cdot \vec{n} = 0$

$\therefore (\vec{r} - (\hat{i} + 4\hat{j} + 6\hat{k})) \cdot (\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}) = 0$ ....(i)

સમતલનું કાર્તેઝિય સમીકરણ :

સમીકરણ (i) માં $\hat{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ મૂકતાં,

$((x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k})-(\hat{i}+4\hat{j}+6\hat{k})) \cdot (\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}) = 0$

$\therefore \left((x-1)\hat{i} + (y-4)\hat{j} + (z-6)\hat{k}\right) \cdot (\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}) = 0$

$\therefore 1(x-1) - 2(y-4) + 1(z-6) = 0$

$\therefore x - 1 - 2y + 8 + z - 6 = 0$

$\therefore x - 2y + z + 1 = 0$

37. નીચેના પૈકી આપેલ પ્રત્યેક પ્રશ્નમાં આપેલાં ત્રણ બિંદુઓમાંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ મેળવો :
(a) (1, 1, –1), (6, 4, –5), (–4, –2, 3), (b) (1, 1, 0), (1, 2, 1), (–2, 2, –1)

➥ (a) (1, 1, –1) (6, 4, –5) (–4, –2, 3)

આપેલ છે કે બિંદુ $A(x_1, y_1, z_1) = (1, 1, -1)$

બિંદુ $B(x_2, y_2, z_2) = (6, 4, -5)$

બિંદુ $C(x_3, y_3, z_3) = (-4, -2, 3)$

ત્રણ બિંદુઓ A, B, C માંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ :

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z+1 \\ 6-1 & 4-1 & -5+1 \\ -4-1 & -2-1 & 3+1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore \begin{vmatrix} x-1 & z-1 & z+1 \\ 5 & 3 & -4 \\ -5 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$\therefore$ $(x - 1)(12 - 12) - (z - 1)(20 - 20) + (z + 1)$
$(-15 + 15) = 0$

$\therefore$ $0 = 0$

$\therefore$ આપેલ બિંદુઓ A, B, C સમરેખ બિંદુઓ છે.

$\therefore$ બિંદુઓ A, B, C માંથી અનંત સમતલો પસાર થાય છે.

(b) (1, 1, 0), (1, 2, 1), (–2, 2, –1)

આપેલ બિંદુઓ $A(x_1, y_1, z_1) = (1, 1, 0)$
$B(x_2, y_2, z_2) = (1, 2, 1)$
$C(x_3, y_3, z_3) = (-2, 2, -1)$ છે.

બિંદુઓ A, B, C માંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ :

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-0 \\ 1-1 & 2-1 & 1-0 \\ -2-1 & 2-1 & -1-0 \end{vmatrix} = 0$$

➥ (a) (1, 1, –1) (6, 4, –5) (–4, –2, 3)

આપેલ છે કે બિંદુ $A(x_1, y_1, z_1) = (1, 1, -1)$
બિંદુ $B(x_2, y_2, z_2) = (6, 4, -5)$
બિંદુ $C(x_3, y_3, z_3) = (-4, -2, 3)$

ત્રણ બિંદુઓ A, B, C માંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ :

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z+1 \\ 6-1 & 4-1 & -5+1 \\ -4-1 & -2-1 & 3+1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore \begin{vmatrix} x-1 & z-1 & z+1 \\ 5 & 3 & -4 \\ -5 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$\therefore$ $(x - 1)(12 - 12) - (z - 1)(20 - 20) + (z + 1)$
$(-15 + 15) = 0$

$\therefore$ $0 = 0$

$\therefore$ આપેલ બિંદુઓ A, B, C સમરેખ બિંદુઓ છે.

$\therefore$ બિંદુઓ A, B, C માંથી અનંત સમતલો પસાર થાય છે.

(b) (1, 1, 0), (1, 2, 1), (–2, 2, –1)

આપેલ બિંદુઓ $A(x_1, y_1, z_1) = (1, 1, 0)$
$B(x_2, y_2, z_2) = (1, 2, 1)$

$C(x_3, y_3, z_3) = (-2, 2, -1)$ છે.

બિંદુઓ A, B, C માંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ :

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-0 \\ 1-1 & 2-1 & 1-0 \\ -2-1 & 2-1 & -1-0 \end{vmatrix} = 0$$

38. સમતલો $\vec{r}\cdot(2\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k})=7$ અને $\vec{r}\cdot(2\hat{i}+5\hat{j}+3\hat{k})=9$ ના છેદમાંથી તથા બિંદુ (2, 1, 3) માંથી પસાર થતા સમતલનું સદિશ સમીકરણ શોધો.

➡ સમતલો $\vec{r}\cdot(2\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}) = 7$ અને

$\vec{r}\cdot(2\hat{i} + 5\hat{j} - 3\hat{k}) = 9$ ના છેદબિંદુમાંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ

$\vec{r}\cdot(2\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}) - 7 + \lambda$

$[\vec{r}\cdot(2\hat{i} + 5\hat{j} + 3\hat{k}) - 9] = 0$ ...(i)

સમતલ બિંદુ (2, 1, 3) એટલે કે $2\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}$ માંથી પસાર થાય છે.

સમીકરણ (i) માં $\vec{r} = 2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$ મૂકતાં,

$[(2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k})\cdot(2\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}) - 7] + \lambda\,[(2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k})\cdot(2\hat{i} + 5\hat{j} + 3\hat{k}) - 9] = 0$

$\therefore\ (4 + 2 - 9 - 7) + \lambda\,(4 + 5 + 9 - 9) = 0$

$\therefore\ -10 + 9\lambda = 0$

$\therefore\ \lambda = \frac{10}{9}$

λ ની આ કિંમત સમીકરણ (i) માં મૂકતાં,

$\vec{r}\cdot(2\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}) - 7 + \frac{10}{9}\quad [\vec{r}\cdot(2\hat{i} + 5\hat{j} + 3\hat{k}) - 9] = 0$

$\therefore\ 9\vec{r}\cdot(2\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}) - 63 + 10\vec{r}\cdot(2\hat{i} + 5\hat{j} + 3\hat{k}) - 90 = 0$

$\therefore\ \vec{r}\cdot(18\hat{i} + 18\hat{j} - 27\hat{k}) - 63 + \vec{r}$

$\cdot(20\hat{i} + 55\hat{j} + 30\hat{k}) - 90 = 0$

$\therefore\ \vec{r}\cdot(38\hat{i} + 73\hat{j} + 3\hat{k}) - 153 = 0$

$\therefore\ \vec{r}\cdot(38\hat{i} + 73\hat{j} + 3\hat{k}) = 153$

જે માંગેલ સમતલનું સમીકરણ છે.

39. નીચેના પૈકી પ્રત્યેક પ્રશ્નમાં આપેલા સમતલ સમાંતર છે કે પરસ્પર લંબ છે તે નક્કી કરો અને જો આ પૈકી એક પણ ન હોય, તો તેમની વચ્ચેનો ખૂણો શોધો :

(a) $7x + 5y + 6z + 30 = 0$ અને $3x - y - 10z + 4 = 0$

(b) $2x + y + 3z - 2 = 0$ અને $x - 2y + 5 = 0$

(c) $2x - 2y + 4z + 5 = 0$ અને $3x - 3y + 6z - 1 = 0$

(d) $2x - y + 3z - 1 = 0$ અને $2x - y + 3z + 3 = 0$

(e) $4x + 8y + z - 8 = 0$ અને $y + z - 4 = 0$

➡ (a) $7x + 5y + 6z + 30 = 0$ અને $3x - y - 10z + 4 = 0$

સમતલ $\pi_1 : 7x + 5y + 6z + 30 = 0$

સમતલના અભિલંબનો સદિશ $\vec{n_1} = 7\hat{i} + 5\hat{j} + 6\hat{k}$

સમતલ $\pi_2 : 3x - y - 10z + 4 = 0$

સમતલના અભિલંબનો સદિશ $\vec{n_2} = 3\hat{i} - \hat{j} - 10\hat{k}$

$\therefore \vec{n_1} \cdot \vec{n_2} = (7\hat{i} + 5\hat{j} + 6\hat{k}) \cdot (3\hat{i} - \hat{j} - 10\hat{k})$

$= 21 - 5 - 60 = -44$

$|\vec{n_1}| = \sqrt{(7)^2 + (5)^2 + (6)^2} = \sqrt{49 + 25 + 36} = \sqrt{110}$

$|\vec{n_2}| = \sqrt{(3)^2 + (-1)^2 + (-10)^2} = \sqrt{9 + 1 + 100} = \sqrt{110}$

જો બંને સમતલો વચ્ચેનો લઘુકોણ θ હોય તો

$$\cos\theta = \frac{|\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}|}{|\vec{n_1}||\vec{n_2}|}$$

$$= \frac{|-44|}{\sqrt{110}\ \sqrt{110}}$$

$$= \frac{44}{110}$$

$$= \frac{2}{5}$$

$\therefore \theta = \cos^{-1}\left(\frac{2}{5}\right)$

➡ (b) $2x + y + 3z - 2 = 0$ અને $x - 2y + 5 = 0$

સમતલ $\pi_1 : 2x + y + 3z - 2 = 0$

સમતલના અભિલંબનો સદિશ $\vec{n_1} = 2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$

સમતલ $\pi_2 : x - 2y + 5 = 0$

સમતલના અભિલંબનો સદિશ $\vec{n_2} = \hat{i} - 2\hat{j}$

હવે $\vec{n_1} \cdot \vec{n_2} = (2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}) \cdot (\hat{i} - 2\hat{j} + 0\hat{k})$

$= 2 - 2 = 0$

∴ આપેલ સમતલો પરસ્પર લંબ છે.

➡ (a) $7x + 5y + 6z + 30 = 0$ અને $3x - y - 10z + 4 = 0$

સમતલ $\pi_1 : 7x + 5y + 6z + 30 = 0$

સમતલના અભિલંબનો સદિશ $\vec{n_1} = 7\hat{i} + 5\hat{j} + 6\hat{k}$

સમતલ $\pi_2 : 3x - y - 10z + 4 = 0$

સમતલના અભિલંબનો સદિશ $\vec{n_2} = 3\hat{i} - \hat{j} - 10\hat{k}$

$\therefore \vec{n_1} \cdot \vec{n_2} = (7\hat{i} + 5\hat{j} + 6\hat{k}) \cdot (3\hat{i} - \hat{j} - 10\hat{k})$

$= 21 - 5 - 60 = -44$

$|\vec{n_1}| = \sqrt{(7)^2 + (5)^2 + (6)^2} = \sqrt{49 + 25 + 36} = \sqrt{110}$

$|\vec{n_2}| = \sqrt{(3)^2 + (-1)^2 + (-10)^2} = \sqrt{9 + 1 + 100} = \sqrt{110}$

જો બંને સમતલો વચ્ચેનો લઘુકોણ θ હોય તો

$$\cos\theta = \frac{|\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}|}{|\vec{n_1}||\vec{n_2}|}$$

$$= \frac{|-44|}{\sqrt{110}\ \sqrt{110}}$$

$$= \frac{44}{110}$$

$$= \frac{2}{}$$

5

$\therefore\ \theta = \cos^{-1}\left(\frac{2}{5}\right)$

➡ (b) $2x + y + 3z - 2 = 0$ અને $x - 2y + 5 = 0$

સમતલ $\pi_1 : 2x + y + 3z - 2 = 0$

સમતલના અભિલંબનો સદિશ $\vec{n_1} = 2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$

સમતલ $\pi_2 : x - 2y + 5 = 0$

સમતલના અભિલંબનો સદિશ $\vec{n_2} = \hat{i} - 2\hat{j}$

હવે $\vec{n_1} \cdot \vec{n_2} = (2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}) \cdot (\hat{i} - 2\hat{j} + 0\hat{k})$

$= 2 - 2 = 0$

$\therefore$ આપેલ સમતલો પરસ્પર લંબ છે.

➡ (a) $7x + 5y + 6z + 30 = 0$ અને $3x - y - 10z + 4 = 0$

સમતલ $\pi_1 : 7x + 5y + 6z + 30 = 0$

સમતલના અભિલંબનો સદિશ $\vec{n_1} = 7\hat{i} + 5\hat{j} + 6\hat{k}$

સમતલ $\pi_2 : 3x - y - 10z + 4 = 0$

સમતલના અભિલંબનો સદિશ $\vec{n_2} = 3\hat{i} - \hat{j} - 10\hat{k}$

$\therefore \vec{n_1} \cdot \vec{n_2} = (7\hat{i} + 5\hat{j} + 6\hat{k}) \cdot (3\hat{i} - \hat{j} - 10\hat{k})$

$= 21 - 5 - 60 = -44$

$|\vec{n_1}| = \sqrt{(7)^2 + (5)^2 + (6)^2} = \sqrt{49 + 25 + 36} = \sqrt{110}$

$|\vec{n_2}| = \sqrt{(3)^2 + (-1)^2 + (-10)^2} = \sqrt{9 + 1 + 100} = \sqrt{110}$

જો બંને સમતલો વચ્ચેનો લઘુકોણ θ હોય તો

$$\cos\theta = \frac{|\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}|}{|\vec{n_1}|\,|\vec{n_2}|}$$

$$= \frac{|-44|}{\sqrt{110}\ \sqrt{110}}$$

$$= \frac{44}{110}$$

$$= \frac{2}{5}$$

$\therefore\ \theta = \cos^{-1}\left(\frac{2}{5}\right)$

➡ (b) $2x + y + 3z - 2 = 0$ અને $x - 2y + 5 = 0$

સમતલ $\pi_1 : 2x + y + 3z - 2 = 0$

સમતલના અભિલંબનો સદિશ $\vec{n_1} = 2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$

સમતલ $\pi_2 : x - 2y + 5 = 0$

સમતલના અભિલંબનો સદિશ $\vec{n_2} = \hat{i} - 2\hat{j}$

હવે $\vec{n_1} \cdot \vec{n_2} = (2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}) \cdot (\hat{i} - 2\hat{j} + 0\hat{k})$

$= 2 - 2 = 0$

$\therefore$ આપેલ સમતલો પરસ્પર લંબ છે.

40. નીચેના પૈકી પ્રત્યેક પ્રશ્નમાં આપેલા બિંદુનું તેમને અનુરૂપ આપેલા સમતલથી અંતર શોધો :

	બિંદુ	સમતલ
(a)	(0, 0, 0)	$3x - 4y + 12z = 3$
(b)	(3, –2, 1)	$2x - y + 2z + 3 = 0$

(c) (2, 3, –5) $x + 2y - 2z = 9$

(d) (–6, 0, 0) $2x - 3y + 6z - 2 = 0$

➥ (a) બિંદુ (0, 0, 0) સમતલ : $3x - 4y + 12z = 3$

આપેલ સમતલનું સમીકરણ $3x - 4y + 12z - 3 = 0$ છે. સમતલનું બિંદુ (0, 0, 0) થી લંબ અંતર

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$= \frac{|3(0) - 4(0) + 12(0) - 3|}{\sqrt{9 + 16 + 144}}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{169}}$$

$$= \frac{3}{13}$$

➥ (b) બિંદુ (3, –2, 1) સમતલ : $2x - y + 2z + 3 = 0$

આપેલ સમતલનું સમીકરણ $2x - y + 2z + 3 = 0$ છે.

બિંદુ (3, –2, 1) નું આપેલ સમતલથી લંબ અંતર

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$= \frac{|2(3) - (-2) + 2(1) + 3|}{\sqrt{4 + 1 + 4}}$$

$$= \frac{|6 + 2 + 2 + 3|}{\sqrt{9}}$$

$$= \frac{13}{3}$$

➥ (c) બિંદુ (2, 3, –5) સમતલ $x + 2y - 2z = 9$

આપેલ સમતલનું સમીકરણ $x + 2y - 2z - 9 = 0$ છે.

બિંદુ (2, 3, –5) નું આપેલ સમતલથી લંબ અંતર

$$d = \frac{|2 + 2(3) - 2(-5) - 9|}{\sqrt{(1)^2 + (2)^2 + (-2)^2}}$$

$$= \frac{|2 + 6 + 10 - 9|}{\sqrt{9}}$$

$$= \frac{9}{3} = 3$$

➥ (a) બિંદુ (0, 0, 0) સમતલ : $3x - 4y + 12z = 3$

આપેલ સમતલનું સમીકરણ $3x - 4y + 12z - 3 = 0$ છે. સમતલનું બિંદુ (0, 0, 0) થી લંબ અંતર

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$= \frac{|3(0) - 4(0) + 12(0) - 3|}{\sqrt{9 + 16 + 144}}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{169}}$$

$$= \frac{3}{13}$$

➥ (b) બિંદુ (3, –2, 1) સમતલ : $2x - y + 2z + 3 = 0$

આપેલ સમતલનું સમીકરણ $2x - y + 2z + 3 = 0$ છે.

બિંદુ (3, –2, 1) નું આપેલ સમતલથી લંબ અંતર

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$= \frac{|2(3) - (-2) + 2(1) + 3|}{\sqrt{4 + 1 + 4}}$$

$$= \frac{|6 + 2 + 2 + 3|}{\sqrt{9}}$$

$$= \frac{13}{3}$$

➥ (c) બિંદુ (2, 3, –5) સમતલ $x + 2y - 2z = 9$

આપેલ સમતલનું સમીકરણ $x + 2y - 2z - 9 = 0$ છે.

બિંદુ (2, 3, –5) નું આપેલ સમતલથી લંબ અંતર

$$d = \frac{|2 + 2(3) - 2(-5) - 9|}{\sqrt{(1)^2 + (2)^2 + (-2)^2}}$$

$$= \frac{|2 + 6 + 10 - 9|}{\sqrt{9}}$$

$$= \frac{9}{3} = 3$$