3

त्रिकोणमितीय फलन
(Trigonometrical Functions)

3.01 प्रस्तावना (Introduction)

त्रिकोणमिति की जानकारी प्राचीन भारतीयों को थी। आर्यभट्ट (476 ई.), ब्रह्मगुप्त (598 ई.) भास्कर प्रथम (600 ई.) तथा भास्कर द्वितीय (1114 ई.) ने प्रमुख परिणामों को प्राप्त किया था। यह सम्पूर्ण ज्ञान भारत से मध्यपूर्व और पुनः वहाँ से यूरोप गया। यूनानियों ने भी त्रिकोणमिति का अध्ययन आरम्भ किया परन्तु उनकी कार्य विधि इतनी अनुपयुक्त थी, कि भारतीय विधि के ज्ञात हो जाने पर यह सम्पूर्ण विश्व द्वारा अपनाई गयी।

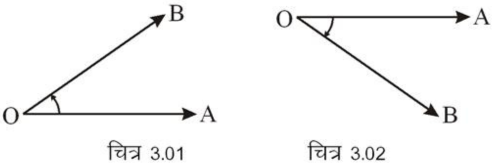
भारत में आधुनिक त्रिकोणमितीय फलन जैसे किसी कोण की ज्या (sine) और फलन के परिचय का पूर्व विवरण 'सिद्धान्त' (संस्कृत भाषा में लिखा गया ज्योतिषीय कार्य) में दिया गया है जिसका योगदान गणित के इतिहास में प्रमुख है।

भास्कर प्रथम (600 ई.) ने $90°$ से अधिक, कोणों के sine के मान के लिए सूत्र दिया था। सोलहवीं शताब्दी का मलयालम भाषा में कार्य युक्ति भाषा में $\sin(A+B)$ के प्रसार की एक उपपत्ति है। $18°, 36°, 54°, 72°,$ आदि के sine तथा cosine के विशुद्ध मान भास्कर द्वितीय द्वारा दिए गए है। भारतीय ज्या और कोटिज्या ही यूरोपीय भाषा में साइन (sine) एवं कोसाइन (cosine) बन गये। पाईथोगोरस से लगभग 2 शताब्दी पूर्व ही भारतीय पाईथोगोरस प्रमेय को जानते थे। बौधायन और कात्यायन ऋषियों ने इस प्रमेय की प्रमाणपूर्वक व्याख्या की है। साथ ही इनके अनुप्रयोग का विवरण भी मिलता है।

इस अध्याय में हम त्रिकोणमितीय फलनों की परिभाषा, इनके प्रान्त एवं परिसर तथा उनके आलेख, कोण θ के सम्बद्ध कोणों $(-\theta), \left(\frac{\pi}{2}\pm\theta\right), (\pi\pm\theta), \left(\frac{3\pi}{2}\pm\theta\right), (2\pi\pm\theta)$ इत्यादि के त्रिकोणमितीय फलनों को कोण θ के त्रिकोणमितीय फलनों में व्यक्त करना, संयुक्त कोणों (A+B), (A–B), (A+B+C) आदि के त्रिकोणमितीय फलनों को A,B,C आदि के त्रिकोणमितीय फलनों में व्यक्त करना, त्रिकोणमितीय समीकरणों के व्यापक हल के बारे में पढ़ेंगे। ज्या तथा कोज्या सूत्रों के प्रमाण तथा इनके सामान्य अनुप्रयोगों का अध्ययन करेंगे।

3.02 कोण (Angle):

एक किरण निम्नानुसार अपनी प्रारम्भिक स्थिति OA से घूमकर नयी स्थिति OB में आ जाती है, तो इस घुमाव को कोण से जाना जाता है। यह यदि घडी की विपरीत दिशा में हो तो इसे धनात्मक तथा घड़ी की दिशा में हो तो ऋणात्मक कोण कहलाता है।



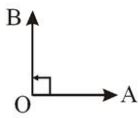
चित्र 3.01 चित्र 3.02

चित्र 3.01 में कोण धनात्मक तथा चित्र 3.02 में कोण ऋणात्मक है। बिन्दु O को कोण का शीर्ष तथा भुजा OA को प्रारम्भिक भुजा तथा भुजा OB को कोण की अंतिम भुजा कहा जाता है।

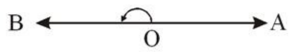
कोण को मापने की निम्न दो विधियाँ प्रचलित हैं–

(i) डिग्री माप (Degree measure) (ii) रेडियन माप (Radian measure)

डिग्री माप : यदि अंतिम भुजा की स्थिति प्रारम्भिक भुजा के लम्बवत् हो, तो यह $90°$ का कोण होता है तथा इस कोण को एक समकोण कहते हैं। इस प्रकार यदि अंतिम भुजा प्रारम्भिक भुजा से दो समकोण तक घूम जाएँ तो दोनों भुजाएँ एक सरल रेखा में हो जाती हैं अतः दो समकोण को ऋजु कोण या सरल कोण भी कहते हैं। यदि अंतिम भुजा घूमकर प्रारम्भिक अवस्था में आ जाए तो बनने वाला कोण $360°$ का होगा अर्थात् चार समकोण के बराबर।



चित्र 3.03

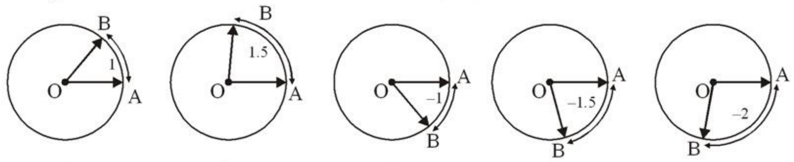


चित्र 3.04

चित्र 3.05

यदि एक समकोण के 90 भाग किए जाएँ तो एक भाग 1° के कोण को प्रदर्शित करेगा तथा 1° के पुनः 60 भाग करें तो एक भाग 1 मिनट के कोण को बताएगा। पुनः एक मिनट के 60 वें भाग को एक सैकण्ड कहते हैं।

रेडियन माप : इसमें इकाई त्रिज्या के वृत के केन्द्र पर एक इकाई लम्बाई के चाप द्वारा बने कोण को एक रेडियन माप कहते हैं। निम्न आकृतियों में विभिन्न नाप के कोण रेडियन में दिखाए गए है–



चित्र 3.06

क्योंकि इकाई त्रिज्या के वृत की परिधि 2π होती है अतः प्रारम्भिक भुजा की एक पूर्ण परिक्रमा केन्द्र पर 2π रेडियन का कोण अन्तरित करती है। अर्थात् 2π रेडियन बराबर होगा 360° या चार समकोण। अतः एक समकोण का मान $\pi/2$ रेडियन के बराबर होगा।

टिप्पणीः यहाँ वृत का इकाई त्रिज्या का होना आवश्यक नहीं है। यदि वृत की त्रिज्या r इकाई की है, तो r लम्बाई का चाप वृत के केन्द्र पर एक रेडियन का कोण अन्तरित करेगा। स्पष्टतः ℓ लम्बाई का चाप वृत के केन्द्र पर ℓ / r रेडियन का कोण अन्तरित करेगा।

डिग्री तथा रेडियन के मध्य सम्बन्ध : त्रिज्या के पूर्ण परिभ्रमण पर वृत के केन्द्र पर बनने वाला कोण 2π रेडियन का है जो कि 360° के बराबर होता है। अतः

2π रेडियन = 360 डिग्री या π रेडियन = 180 डिग्री

यदि कोण का माप डिग्री में D तथा रेडियन में R हो तो इनके मध्य निम्न सम्बन्ध होगाः

$$\frac{D}{360^\circ} = \frac{R}{2\pi} \qquad \text{या} \qquad \frac{D}{90^\circ} = \frac{2R}{\pi}$$

यदि $\pi = 22/7$ मान लिया जाए तो 1 रेडियन = $57^\circ 16'$ निकटतम मान

$1^\circ = \pi / 180$ रेडियन = 0.01746 रेडियन (निकटतम)

सारणी 3.01

डिग्री	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
रेडियन	$\pi / 6$	$\pi / 4$	$\pi / 3$	$\pi / 2$	π	$3\pi / 2$	2π

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण 1: $50^\circ 30'$ को रेडियन रूप में बदलिए।

हलः क्योंकि $180^\circ = \pi$ रेडियन

$$\text{अतः } 50^\circ 30' = 50\frac{1}{2} \text{ डिग्री} = \left(\frac{\pi}{180}\right) \times \left(\frac{101}{2}\right) \text{ रेडियन}$$

$$= \frac{101\pi}{360} \text{ रेडियन}$$

उदाहरण 2: 6 रेडियन को डिग्री माप में बदलिए।

हलः क्योंकि π रेडियन $=180°$

अतः 6 रेडियन $=\left(\frac{180}{\pi}\right)\times 6$ डिग्री $=\frac{1080\times 7}{22}=343\frac{7}{11}$ डिग्री

$=343°+\frac{7\times 60}{11}$ मिनट $[\because\ 1°=60']$

$=343°+38'+\frac{2}{11}$ मिनट

$=343°+38'+10.9''$ $[\because\ 1'=60'']$

$=343°38'11''$ निकटतम मान

प्रश्नमाला 3.1

1. निम्नलिखित डिग्री माप के संगत रेडियन माप ज्ञात कीजिएः
   (i) $25°$ (ii) $-47°30'$ (iii) $520°$
2. निम्नलिखित रेडियन माप के संगत डिग्री माप ज्ञात कीजिए ($\pi=22/7$ का प्रयोग करे):
   (i) $11/16$ (ii) -4 (iii) $5\pi/3$
3. एक पहिया एक मिनट में $360°$ परिक्रमण करता है तो एक सेकण्ड में कितने रेडियन माप का कोण बनाएगा?
4. एक वृत, जिसकी त्रिज्या 100 सेमी है, की 22 सेमी लम्बाई की चाप वृत के केन्द्र पर कितने डिग्री माप का कोण बनाएगी ($\pi=22/7$ का प्रयोग कीजिए)
5. एक वृत, जिसका व्यास 40 सेमी है, की एक जीवा 20 सेमी लम्बाई की है तो इसके संगत छोटे चाप की लम्बाई ज्ञात कीजिए।
6. यदि दो वृत्तों के समान लम्बाई वाले चाप अपने केन्द्रों पर क्रमशः $60°$ तथा $75°$ के कोण बनाते हों, तो उनकी त्रिज्याओं का अनुपात ज्ञात कीजिए।
7. 75 सेमी लम्बाई वाले एक दोलायमान दोलक का एक सिरे से दूसरे सिरे तक दोलन करने से जो कोण बनता है, उसका माप रेडियन में ज्ञात कीजिए, जबकि उसके नोक द्वारा बनाए गए चाप की लम्बाई निम्नलिखित हैः
   (i) 10 सेमी (ii) 21 सेमी

3.03 त्रिकोणमितीय फलनों के चिह्न (Signs of trigonometric functions)

माना कि O एक इकाई त्रिज्या वाले वृत का केन्द्र है। P (a,b) इस पर कोई बिन्दु हैं।

कोण $AOP=x$ रेडियन अर्थात् चाप की लम्बाई $AP=x$

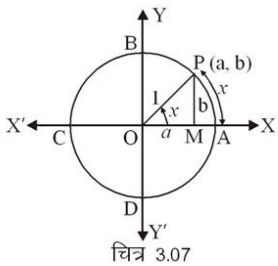
अतः $\sin x=b$ एवं $\cos x=a$

चूँकि ΔOMP समकोण त्रिभुज है अतः

$$OM^2+MP^2=OP^2$$

या $$a^2+b^2=1$$

या $$\cos^2 x+\sin^2 x=1$$



चित्र 3.07

क्योंकि एक पूर्ण परिक्रमा में वृत के केन्द्र पर 2π रेडियन का कोण अन्तरित होता है अतः $\pi/2$ गुणज वाले सभी कोणों को चतुर्थांशीय कोण (quadrantal angles) कहते हैं।

त्रिभुज के विभिन्न चतुर्थांश में बने होने पर स्थितियाँ निम्नानुसार होगी।

प्रथम पाद में : इस चतुर्थांश में आधार एवं लम्ब दोनों ही धनात्मक है अतः सभी त्रिकोणमितीय फलन प्रथम चतुर्थांश में धनात्मक होंगे। आधार का अधिकतम मान $x=0$ पर त्रिज्या के बराबर तथा न्यूनतम मान $x=\pi/2$ पर शून्य होगा, परिणामतः $\cos x$ का मान अधिकतम 1 से घटता हुआ शून्य तक आता है। इसी प्रकार $\sin x$ का मान शून्य से बढ़ता हुआ अधिकतम 1 हो जाता है। अतः $\tan x$ का मान $x=0$ पर शून्य से बढ़ता हुआ $x=\pi/2$ पर अनन्त तक बढ़ता है। $x=\pi/4$ पर यह मान 1 के बराबर होता है। इसी प्रकार विभिन्न त्रिकोणमितीय फलनों के मान अन्य चतुर्थांशों में निम्न सारणी में दर्शाये अनुसार रहेंगे।

सारणी : 3.02

	I चतुर्थांश	II चतुर्थांश	III चतुर्थांश	IV चतुर्थांश
$\sin x$	+	+	–	–
$\cos x$	+	–	–	+
$\tan x$	+	–	+	–
$\text{cosec}\, x$	+	+	–	–
$\sec x$	+	–	–	+
$\cot x$	+	–	+	–

3.04 त्रिकोणमितीय फलनों के प्रान्त तथा परिसर
(Domain and range of trignometrical functions)

sine तथा cosine की परिभाषा अनुसार हम जानते हैं कि प्रत्येक वास्तविक संख्या x के लिए $-1 \le \sin x \le 1$ तथा $-1 \le \cos x \le 1$

अतः $y = \sin x$ तथा $y = \cos x$ फलनों के प्रान्त वास्तविक संख्याओं का समुच्चय R है तथा परिसर अन्तराल $[-1, 1]$ अर्थात् $-1 \le y \le 1$ है। पुनः हम जानते हैं कि $y = \text{cosec}\, x = 1/\sin x$ का प्रान्त समुच्चय $\{x : x \in R, x \ne n\pi$ तथा $n \in Z\}$ तथा परिसर समुच्चय $\{y : y \in R, y \le -1$ या $1 \le y\}$. इसी प्रकार $y = \sec x = \dfrac{1}{\cos x}$ का प्रान्त समुच्चय $\{x : x \in R, x \ne (2n+1)\dfrac{\pi}{2}$ तथा $n \in Z\}$ तथा परिसर समुच्चय $\{y : y \in R, y \le -1$ या $1 \le y\}$ है। पुनः $y = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

अतः इसका प्रान्त समुच्चय $\{x : x \in R, x \ne (2n+1)\dfrac{\pi}{2}$ तथा $n \in Z\}$ तथा परिसर समुच्चय सभी वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है जबकि $y = \cot x$ का प्रान्त समुच्चय $\{x : x \in R, x \ne n\pi$ तथा $n \in Z\}$ तथा परिसर समुच्चय सभी वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है।

(उपर्युक्त तथ्यों को निम्न सारणी द्वारा समझा जा सकता है।

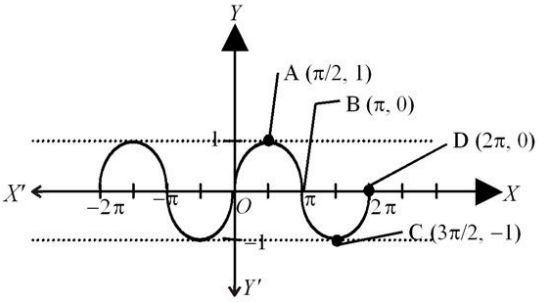
सारणी 3.03

	I चतुर्थांश	II चतुर्थांश	III चतुर्थांश	IV चतुर्थांश
sin	0 से 1 की ओर बढ़ता है	1 से 0 की ओर घटता है	0 से –1 की ओर घटता है	–1 से 0 की ओर बढ़ता है
cos	1 से 0 की ओर घटता है	0 से –1 की ओर घटता है	–1 से 0 की ओर बढ़ता है	0 से 1 की ओर बढ़ता है
tan	0 से ∞ की ओर बढ़ता है	$-\infty$ से 0 की ओर बढ़ता है	0 से ∞ की ओर बढ़ता है	$-\infty$ से 0 की ओर बढ़ता है
cot	∞ से 0 की ओर घटता है	0 से $-\infty$ की ओर घटता है	∞ से 0 की ओर घटता है	0 से $-\infty$ की ओर घटता है
sec	1 से ∞ की ओर बढ़ता है	$-\infty$ से –1 की ओर बढ़ता है	–1 से $-\infty$ की ओर घटता है	∞ से 1 की ओर घटता है
cosec	∞ से 1 की ओर घटता है	1 से ∞ की ओर बढ़ता है	$-\infty$ से –1 की ओर बढ़ता है	–1 से $-\infty$ की ओर घटता है

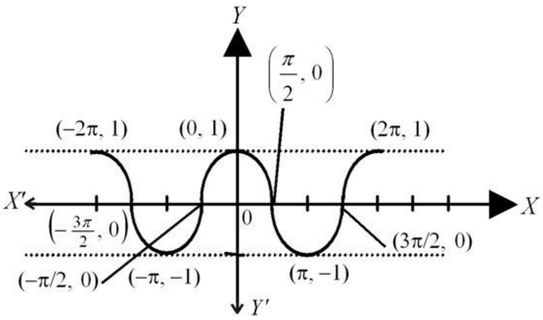
टिप्पणी : उपर्युक्त सारणी में, यह कथन कि अंतराल $0 < x < \pi/2$ में $\tan x$ का मान 0 से ∞ (अनंत) तक बढ़ता है का अर्थ है कि जैसे–जैसे x का मान $\pi/2$ की ओर बढ़ता है वैसे–वैसे $\tan x$ का मान बहुत अधिक हो जाता है। इसी प्रकार, जब हम यह कह सकते हैं कि चतुर्थ चतुर्थांश में $\text{cosec}\, x$ का मान –1 से $-\infty$ (ऋणात्मक अनंत) तक में घटता है तो इसका अर्थ है कि जब $x \in (3\pi/2, 2\pi)$ तब जैसे–जैसे $x, 2\pi$ की ओर अग्रसर होता है, $\text{cosec}\, x$ बहुत अधिक ऋणात्मक मान लेता है। साधारणतः चिह्न ∞ तथा $-\infty$ फलनों तथा चरों के विशेष प्रकार के व्यवहार को बताते हैं।)

3.05 त्रिकोणमितीय फलनों के आलेख (Graph of trignometrical functions)

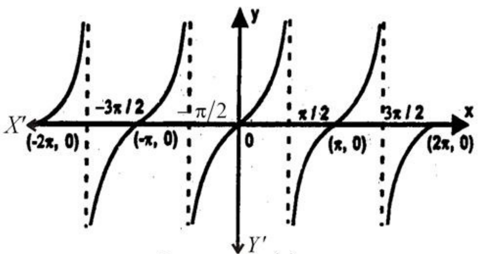
हमने देखा कि $\sin x$ तथा $\cos x$ के मानों का अंतराल 2π के पश्चात् पुनरावृत्ति होती है। जैसे, $\text{cosec}\, x$ तथा $\sec x$ के मानों की भी अंतराल 2π के बाद पुनरावृत्ति होती है। हम अगले अनुच्छेद में $\tan(\pi + x) = \tan x$ देखते हैं। जैसे, $\tan x$ के मानों में अंतराल π के पश्चात् पुनरावृत्ति होती है, क्योंकि $\cot x, \tan x$ का पूरक है, इसके मानों में भी अंतराल π के पश्चात् पुनरावृत्ति होती है। त्रिकोणमितीय फलनों में इस ज्ञान (गुणधर्म) तथा व्यवहार का उपयोग करने पर, हम फलनों का आलेख खींच सकते हैं। इन फलनों का आलेख नीचे दिए गए हैं।



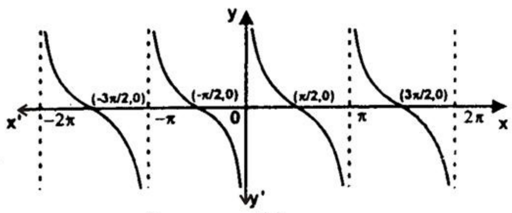
चित्र 3.08 : $f(x) = \sin x$



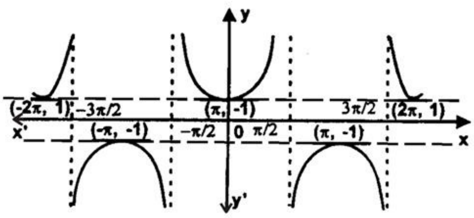
चित्र 3.09 : $f(x) = \cos x$



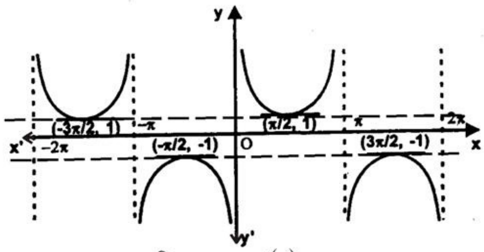
चित्र 3.10 : $f(x) = \tan x$



चित्र 3.11 : $f(x) = \text{cosec}\, x$



चित्र 3.12 : $f(x) = \sec x$



चित्र 3.13 : $f(x) = \cot x$

उदाहरण 3: यदि $\sin x = -4/5$ हो तथा x तृतीय चतुर्थांश में स्थित है, तो अन्य पाँच त्रिकोणमितीय फलनों के मान ज्ञात कीजिए

हल: क्योंकि $\sin x = -4/5$ अतः $\text{cosec}\, x = -5/4$

अब $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ या $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \dfrac{16}{25} = \dfrac{9}{25}$

अतः $\cos x = \pm 3/5$ परन्तु x तृतीय चतुर्थांश में है अतः $\cos x$ का मान ऋणात्मक होगा,

$\therefore$ $\cos x = -3/5$ इसी से $\sec x = -5/3$ पुनः $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{4}{3}$ तथा $\cot x = \dfrac{3}{4}$

उदाहरण 4: $\sin\frac{31\pi}{3}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हलः हम जानते हैं कि $\sin x$ के मानों में अंतराल 2π के पश्चात् पुनरावृत्ति होती है। इसलिए

$$\sin\frac{31\pi}{3} = \sin\left(10\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

उदाहरण 5: $\operatorname{cosec}(-1410°)$ का मान ज्ञात कीजिए।

हलः हम जानते हैं कि $\operatorname{cosec} x$ के मानों में अन्तराल 2π या $360°$ के पश्चात् पुनरावृत्ति होती है। इसलिए

$$\operatorname{cosec}(-1410°) = \operatorname{cosec}(-1410° + 4\times 360°) = \operatorname{cosec}(-1410° + 1440°) = \operatorname{cosec}(30°) = 2$$

प्रश्नमाला 3.2

निम्नलिखित प्रश्नों में पाँच अन्य त्रिकोणमितीय फलनों का मान ज्ञात कीजिए।

1. $\cos x = -1/2$, x तीसरे चतुर्थांश में स्थित है।
2. $\cot x = 3/4$, x तृतीय चतुर्थांश में स्थित है।
3. $\sec x = 13/5$, x चतुर्थ चतुर्थांश में स्थित है।

मान ज्ञात कीजिए।

4. $\sin 765°$
5. $\tan 19\pi/3$
6. $\sin\left(-\frac{11\pi}{3}\right)$
7. $\cot\left(-\frac{15\pi}{4}\right)$

3.06 दो कोणों के योग और अंतर के त्रिकोणमितीय फलन

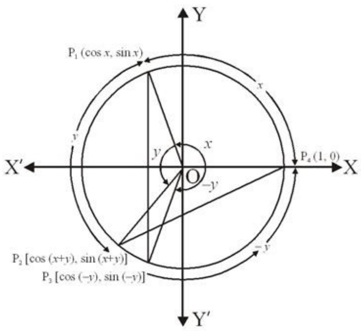
(Trigonometrical functions of sum and difference of two angles)

इस भाग में हम दो कोणों के योग एवं अंतर के लिए त्रिकोणमितीय फलनों तथा उनसे सम्बन्धित व्यंजकों को व्युत्पन्न करेंगे। इस संबंध में इन मूल परिणामों को हम त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाएँ कहेंगे। हम देखते हैं कि

1. $\sin(-x) = -\sin x$
2. $\cos(-x) = \cos x$
3. $\tan(-x) = -\tan x$

अब हम कुछ और परिणाम सिद्ध करेंगे :

4. $\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y$



चित्र 3.14

इकाई वृत्त चित्र 3.14 पर विचार कीजिए, जिसका केन्द्र मूल बिन्दु पर हो। माना कि कोण P_4OP_1, x तथा कोण P_1OP_2, y हैं तो कोण $P_4OP_2, (x+y)$ होगा। पुनः माना कोण $P_4OP_3, (-y)$ हैं। अतः P_1, P_2, P_3 तथा P_4 के निर्देशांक $P_1(\cos x, \sin x), P_2[\cos(x+y), \sin(x+y)],\ P_3[\cos(-y), \sin(-y)]$ और $P_4(1,0)$ होंगे।

त्रिभुजों P_1OP_3 तथा P_2OP_4 पर विचार कीजिए। सर्वांगसम हैं। इसलिए P_1P_3 और P_2P_4 बराबर हैं। दूरी सूत्र का उपयोग करने पर

$$P_1P_3^2 = \left[\cos x - \cos(-y)\right]^2 + \left[\sin x - \sin(-y)\right]^2$$

$$= (\cos x - \cos y)^2 + (\sin x + \sin y)^2$$

$$= \cos^2 x + \cos^2 y - 2\cos x\cos y + \sin^2 x + \sin^2 y + 2\sin x\sin y$$

$$= 2 - 2(\cos x\cos y - \sin x\sin y) \qquad [\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \text{ इत्यादि}]$$

पुनः $P_2P_4^2 = \left[1-\cos\left(x+y\right)\right]^2 + \left[0-\sin\left(x+y\right)\right]^2$

$$= 1-2\cos(x+y)+\cos^2(x+y)+\sin^2(x+y) = 2-2\cos(x+y)$$

क्योंकि $P_1P_3 = P_2P_4 \Rightarrow P_1P_3^2 = P_2P_4^2$

$\therefore \quad 2-2(\cos x\cos y - \sin x\sin y) = 2-2\cos(x+y)$

अतः $\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y$

5. $\cos(x-y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y$

सर्वसमिका 4 में y के स्थान पर –y रखने पर

$\cos(x+(-y)) = \cos x\cos(-y) - \sin x\sin(-y)$

या $\cos(x-y) = \cos x\cos y + \sin x\sin y$

6. $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin x$

सर्वसमिका 5 में x के स्थान पर $\pi/2$ तथा y के स्थान पर x रखने पर

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cos x + \sin\frac{\pi}{2}\sin x = \sin x$$

7. $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos x$

सर्वसमिका 6 का उपयोग करने पर हम पाते हैं

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right] = \cos x.$$

8. $\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y$

हम जानते हैं कि $\sin(x+y) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-(x+y)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-y\right)$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cos y + \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\sin y$$

$$= \sin x\cos y + \cos x\sin y$$

9. $\sin(x-y) = \sin x\cos y - \cos x\sin y$

यदि हम सर्वसमिका 8 में y के स्थान पर $-y$ रखें तो उपरोक्त परिणाम प्राप्त होता है।

10. x और y के उपर्युक्त मानों को सर्वसमिकाओं 4, 5, 8 और 9 में रखने पर हम निम्नलिखित परिणाम प्राप्त कर सकते हैं:

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -\sin x$ $\qquad$ $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \cos x$

$\cos(\pi-x) = -\cos x$ $\qquad$ $\sin(\pi-x) = \sin x$

$\cos(\pi+x) = -\cos x$ $\qquad$ $\sin(\pi+x) = -\sin x$

$\cos(2\pi-x) = \cos x$ $\qquad$ $\sin(2\pi-x) = -\sin x$

इसी प्रकार के संगत परिणाम $\tan x, \cot x, \sec x$ एवं $\text{cosec}\, x$ के लिए $\sin x$ और $\cos x$ के फलनों के परिणामों से आसानी से निकाले जा सकते हैं।

11. x, y और $(x+y)$ में से कोई $\pi/2$ का विषम गुणांक नहीं हैं तो,

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

क्योंकि x, y तथा $(x+y)$ में से कोई $\pi/2$ का विषम गुणांक नहीं है, इसलिए $\cos x, \cos y$ तथा $\cos(x+y)$ शून्य नहीं है। अब

$$\tan(x+y) = \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} = \frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\cos x \cos y - \sin x \sin y}$$

अंश और हर में $\cos x \cos y$, से विभाजित करने पर –

$$\tan(x+y) = \frac{\frac{\sin x \cos y}{\cos x \cos y} + \frac{\cos x \sin y}{\cos x \cos y}}{\frac{\cos x \cos y}{\cos x \cos y} - \frac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y}} = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

12. $\tan(x-y) = \dfrac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$

यदि सर्वसमिका 11 में y के स्थान पर –y रखने पर $\tan(x-y) = \tan[x+(-y)]$

$$= \frac{\tan x + \tan -(y)}{1 - \tan x \tan(-y)} = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$

13. यदि x, y तथा $(x+y)$ में से कोई भी कोण π, का गुणांक नहीं हैं, तो

$$\cot(x+y) = \frac{\cot x \cot y - 1}{\cot y + \cot x}$$

क्योंकि x,y तथा (x + y) कोणों में से कोई भी π, का गुणांक नहीं है, इसलिए $\sin x \sin y$ तथा $\sin(x+y)$ शून्य नहीं है। अब $\cot(x+y) = \dfrac{\cos(x+y)}{\sin(x+y)} = \dfrac{\cos x \cos y - \sin x \sin y}{\sin x \cos y + \cos x \sin y}$

अंश और हर को $\sin x \sin y$, से विभाजित करने पर $\cot(x+y) = \dfrac{\cot x \cot y - 1}{\cot y + \cot x}$

14. $\cot(x-y) = \dfrac{\cot x \cot y + 1}{\cot y - \cot x}$ जहाँ x,y तथा x – y; π के गुणांक नहीं है।

यदि सर्वसमिका 13 में y के स्थान पर $-y$ रखते हैं तो हम उपरोक्त परिणाम प्राप्त करते हैं।

15. $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x = \dfrac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$

हम जानते हैं कि $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

y के स्थान पर x रखने पर

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 2\cos^2 x - 1$$

पुनः $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - \sin^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x.$

अतः $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \dfrac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x}$

अंश और हर को $\cos^2 x$ से विभाजित करने पर–

$$\cos 2x = \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}, \quad x \neq n\pi + \frac{\pi}{2} \text{ जहां } n \text{ पूर्णांक है।}$$

16. $\sin 2x = 2\sin x \cos x = \dfrac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$

हम जानते है कि $\quad \sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$

y के स्थान पर x रखने पर, $\quad \sin 2x = 2\sin x \cos x.$

पुनः $\quad \sin 2x = \dfrac{2\sin x \cos x}{\cos^2 x + \sin^2 x}$

प्रत्येक पद को $\cos^2 x$ से विभाजित करने पर,

$$\sin 2x = \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$$

17. $\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}, \quad 2x \neq n\pi + \dfrac{\pi}{2}$ जहाँ n पूर्णांक है।

हम जानते हैं कि $\quad \tan(x+y) = \dfrac{\tan x + \tan y}{1-\tan x \tan y}$

y के स्थान पर x रखने पर, $\quad \tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$

18. $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$

$\because \quad \sin 3x = \sin(2x+x)$

$= \sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x$

$= 2\sin x \cos x \cos x + (1-2\sin^2 x)\sin x = 2\sin x(1-\sin^2 x) + \sin x - 2\sin^3 x$

$= 2\sin x - 2\sin^3 x + \sin x - 2\sin^3 x = 3\sin x - 4\sin^3 x$

19. $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

$\because \quad \cos 3x = \cos(2x+x)$

$= \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x$

$= (2\cos^2 x - 1)\cos x - 2\sin x \cos x \sin x = (2\cos^2 x - 1)\cos x - 2\cos x(1-\cos^2 x)$

$= 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x + 2\cos^3 x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

20. $\tan 3x = \dfrac{3\tan x - \tan^3 x}{1-3\tan^2 x}, \qquad 3x \neq n\pi + \dfrac{\pi}{2}$ जहाँ n पूर्णांक है।

$$\because \quad \tan 3x = \tan(2x+x) = \frac{\tan 2x + \tan x}{1-\tan 2x \tan x} = \frac{\dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x} + \tan x}{1 - \dfrac{2\tan x.\tan x}{1-\tan^2 x}}$$

$$= \frac{2\tan x + \tan x - \tan^3 x}{1-\tan^2 x - 2\tan^2 x} = \frac{3\tan x - \tan^3 x}{1-3\tan^2 x}$$

21. (i) $\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$

(ii) $\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$

(iii) $\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$

(iv) $\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$

हम जानते हैं कि

$$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y \qquad (1)$$

और $$\cos(x-y) = \cos x\cos y + \sin x\sin y \qquad (2)$$

(1) और (2) को जोड़ने एवं घटाने पर,

$$\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2\cos x\cos y \qquad (3)$$

और $$\cos(x+y) - \cos(x-y) = -2\sin x\sin y \qquad (4)$$

पुनः $$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y \qquad (5)$$

और $$\sin(x-y) = \sin x\cos y - \cos x\sin y \qquad (6)$$

(5) और (6) को जोड़ने एवं घटाने पर

$$\sin(x+y) + \sin(x-y) = 2\sin x\cos y \qquad (7)$$

$$\sin(x+y) - \sin(x-y) = 2\cos x\sin y \qquad (8)$$

माना कि $x+y=\theta$ तथा $x-y=\phi$, इसलिए

$$x = \left(\frac{\theta+\phi}{2}\right) \text{ तथा } y = \left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)$$

(3), (4), (7) तथा (8) में x और y के मान रखने पर

$$\cos\theta + \cos\phi = 2\cos\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)$$

$$\cos\theta - \cos\phi = -2\sin\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)$$

$$\sin\theta + \sin\phi = 2\sin\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)$$

$$\sin\theta - \sin\phi = 2\cos\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)$$

क्योंकि θ तथा ϕ को कोई वास्तविक संख्या मान सकते हैं। हम θ के स्थान पर x तथा ϕ के स्थान पर y रखने पर :

$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$; $\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$,

$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$; $\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$

टिप्पणी : सर्वसमिका 21 से हम निम्न परिणाम प्राप्त करते हैं:

22. (i) $2\cos x\cos y = \cos(x+y)+\cos(x-y)$

(ii) $-2\sin x\sin y = \cos(x+y)-\cos(x-y)$

(iii) $2\sin x\cos y = \sin(x+y)+\sin(x-y)$

(iv) $2\cos x\sin y = \sin(x+y)-\sin(x-y)$

23. **दो से अधिक कोणों के योग :** दो से अधिक कोणों के योग के त्रिकोणमितीय फलनों का मान ज्ञात करने के लिए हम योग को दो भागों में विभाजित करके दो कोणों के सूत्र का उपयोग करेंगे।

(i)
$$\begin{aligned}\sin(A+B+C) &= \sin[(A+B)+C]\\ &= \sin(A+B)\cos C+\cos(A+B)\sin C\\ &= [\sin A\cos B+\cos A\sin B]\cos C+[\cos A\cos B-\sin A\sin B]\sin C\\ &= \sin A\cos B\cos C+\cos A\sin B\cos C+\cos A\cos B\sin C-\sin A\sin B\sin C\end{aligned}$$

(ii)
$$\begin{aligned}\cos(A+B+C) &= \cos[(A+B)+C]\\ &= \cos(A+B)\cos C-\sin(A+B)\sin C\\ &= [\cos A\cos B-\sin A\sin B]\cos C-[\sin A\cos B+\cos A\sin B]\sin C\\ &= \cos A\cos B\cos C-\sin A\sin B\cos C-\sin A\cos B\sin C-\cos A\sin B\sin C\end{aligned}$$

(iii) इसी प्रकार

$\tan(A+B+C)=\dfrac{\sin(A+B+C)}{\cos(A+B+C)}$ अंश एवं हर में $\cos A\cos B\cos C$ का भाग देने पर

$$=\frac{\tan A+\tan B+\tan C-\tan A\tan B\tan C}{1-\tan A\tan B-\tan B\tan C-\tan C\tan A}$$

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण 6: सिद्ध कीजिए: $3\sin\frac{\pi}{6}\sec\frac{\pi}{3}-4\sin\frac{5\pi}{6}\cot\frac{\pi}{4}=1$

हल: बायाँ पक्ष $=3\sin\frac{\pi}{6}\sec\frac{\pi}{3}-4\sin\frac{5\pi}{6}\cot\frac{\pi}{4}$

$=3\times\frac{1}{2}\times 2-4\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)\times 1=3-4\sin\frac{\pi}{6}=3-4\times 1/2=1=$ दायाँ पक्ष इतिसिद्धम्

उदाहरण 7: $\cos 15^\circ$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $\cos 15^\circ=\cos(45^\circ-30^\circ)=\cos 45^\circ\cos 30^\circ+\sin 45^\circ\sin 30^\circ$

$=\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2\sqrt{2}}[\sqrt{3}+1]$ इतिसिद्धम्

उदाहरण 8: सिद्ध कीजिए:

$$\frac{\sin(x+y)}{\sin(x-y)}=\frac{\tan x+\tan y}{\tan x-\tan y}.$$

हल : यहाँ बायाँ पक्ष $=\dfrac{\sin(x+y)}{\sin(x-y)}=\dfrac{\sin x\cos y+\cos x\sin y}{\sin x\cos y-\cos x\sin y}$

अंश और हर को $\cos x\cos y$ से विभाजित करने पर,

बायाँ पक्ष $=\dfrac{\sin(x+y)}{\sin(x-y)}=\dfrac{\tan x+\tan y}{\tan x-\tan y}=$ दायाँ पक्ष इतिसिद्धम्

उदाहरण 9: दिखाइए $\tan x \tan 2x \tan 3x = \tan 3x - \tan 2x - \tan x$

हलः हम जानते हैं कि $3x = 2x + x$

इसलिए $\tan 3x = \tan(2x + x)$

या $$\tan 3x = \frac{\tan 2x + \tan x}{1 - \tan 2x \tan x}$$

या $\tan 3x - \tan 3x \tan 2x \tan x = \tan 2x + \tan x$

या $\tan 3x - \tan 2x - \tan x = \tan 3x \tan 2x \tan x$

या $\tan 3x \tan 2x \tan x = \tan 3x - \tan 2x - \tan x$ इतिसिद्धम्

उदाहरण 10: सिद्ध कीजिए $\dfrac{\cos 7x + \cos 5x}{\sin 7x - \sin 5x} = \cot x$

हल : सर्वसमिकाओं $21(i)$ तथा $21(iv)$ का उपयोग करने पर,

बायाँ पक्ष $= \dfrac{2\cos\frac{7x+5x}{2}\cos\frac{7x-5x}{2}}{2\cos\frac{7x+5x}{2}\sin\frac{7x-5x}{2}} = \dfrac{\cos x}{\sin x} = \cot x =$ दायाँ पक्ष इतिसिद्धम्

उदाहरण 11: सिद्ध कीजिए कि–

$\sin 20° \sin 40° \sin 60° \sin 80° = 3/16$

हल : बायाँ पक्ष $\sin 20° \sin 40° \sin 60° \sin 80° = \frac{1}{2}\sin 60°(2\sin 20° \sin 40°)\sin 80°$

$$= \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}[\cos 20° - \cos 60°]\sin 80°$$

[क्योंकि $2\sin A \sin B = \cos(A - B) - \cos(A + B)$]

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\left[\cos 20° \sin 80° - \left(\frac{1}{2}\right)\sin 80°\right]$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\left[\frac{1}{2}(2\cos 20° \sin 80°) - \left(\frac{1}{2}\right)\sin 80°\right]$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{8}[\sin 100° + \sin 60° - \sin 80°]$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{8}\left[\sin(180° - 80°) + \frac{\sqrt{3}}{2} - \sin 80°\right]$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{8}\left[\sin 80° + \frac{\sqrt{3}}{2} - \sin 80°\right]$$

$= 3/16$ इतिसिद्धम्

उदाहरण 12: सिद्ध कीजिए कि:

$$2\cos\frac{\pi}{13}\cos\frac{9\pi}{13}+\cos\frac{3\pi}{13}+\cos\frac{5\pi}{13}=0$$

हल : बायाँ पक्ष $2\cos\frac{\pi}{13}\cos\frac{9\pi}{13}+\cos\frac{3\pi}{13}+\cos\frac{5\pi}{13}$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{13}+\frac{9\pi}{13}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{13}-\frac{9\pi}{13}\right)+\cos\frac{3\pi}{13}+\cos\frac{5\pi}{13}$$

$$=\cos\frac{10\pi}{13}+\cos\frac{8\pi}{13}+\cos\frac{3\pi}{13}+\cos\frac{5\pi}{13} \qquad [\cos(-\theta)=\cos\theta]$$

$$=\cos\left(\pi-\frac{3\pi}{13}\right)+\cos\left(\pi-\frac{5\pi}{13}\right)+\cos\frac{3\pi}{13}+\cos\frac{5\pi}{13}$$

$$=-\cos\frac{3\pi}{13}-\cos\frac{5\pi}{13}+\cos\frac{3\pi}{13}+\cos\frac{5\pi}{13}$$

$$=0$$

इतिसिद्धम्

उदाहरण 13: यदि $A+B+C=180°$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि:

$$\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

हल: $\sin A+\sin B+\sin C=2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)+2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$

$$=2\sin\left(90°-\frac{C}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)+2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$$ [क्योंकि $A+B+C=180°$]

$$=2\cos\frac{C}{2}\left[\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)+\sin\frac{C}{2}\right]$$

$$=2\cos\frac{C}{2}\left[\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)+\sin\left\{90°-\left(\frac{A+B}{2}\right)\right\}\right]$$

$$=2\cos\frac{C}{2}\left[\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)+\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\right]$$

$$=2\cos\frac{C}{2}\left[2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\right]$$

$$=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

इतिसिद्धम्

प्रश्नमाला 3.3

सिद्ध कीजिए :

1. $\sin^2\frac{\pi}{6}+\cos^2\frac{\pi}{3}-\tan^2\frac{\pi}{4}=-\frac{1}{2}$

2. $2\sin^2\frac{\pi}{6}+\operatorname{cosec}^2\frac{7\pi}{6}\cos^2\frac{\pi}{3}=\frac{3}{2}$

3. $\cot^2\frac{\pi}{6}+\operatorname{cosec}\frac{5\pi}{6}+3\tan^2\frac{\pi}{6}=6$

4. $2\sin^2\frac{3\pi}{4}+2\cos^2\frac{\pi}{4}+2\sec^2\frac{\pi}{3}=10$

5. मान ज्ञात कीजिए: (i) $\sin 75^\circ$ (ii) $\tan 15^\circ$

सिद्ध कीजिए:

6. $\tan 225^\circ \cot 405^\circ + \tan 765^\circ \cot 675^\circ = 0$

7. $\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\sqrt{2}\cos x$

8. $\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-y\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-y\right)=\sin(x+y)$

9. $\dfrac{\tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}=\left(\dfrac{1+\tan x}{1-\tan x}\right)^2$

10. $\dfrac{\cos(\pi+x)\cos(-x)}{\sin(\pi-x)\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}=\cot^2 x$

11. $\sin(n+1)x\sin(n+2)x+\cos(n+1)x\cos(n+2)x=\cos x$

12. $\sin^2 6x-\sin^2 4x=\sin 2x\sin 10x$

13. $\sin 2x+2\sin 4x+\sin 6x=4\cos^2 x\sin 4x$

14. $\cot 4x(\sin 5x+\sin 3x)=\cot x(\sin 5x-\sin 3x)$

15. $\dfrac{\sin 5x-2\sin 3x+\sin x}{\cos 5x-\cos x}=\tan x$

16. $\dfrac{\sin x-\sin y}{\cos x+\cos y}=\tan\dfrac{x-y}{2}$

17. $\dfrac{\sin x+\sin 3x}{\cos x+\cos 3x}=\tan 2x$

18. $\dfrac{\cos 4x+\cos 3x+\cos 2x}{\sin 4x+\sin 3x+\sin 2x}=\cot 3x$

19. $\tan 4x=\dfrac{4\tan x(1-\tan^2 x)}{1-6\tan^2 x+\tan^4 x}$

20. $\cos 4x=1-8\sin^2 x\cos^2 x$

21. $\cos 6x=32\cos^6 x-48\cos^4 x+18\cos^2 x-1$

22. $[1+\cot\theta-\sec(\theta+\pi/2)][1+\cot\theta+\sec(\theta+\pi/2)]=2\cot\theta$

3.07 त्रिकोणमितीय समीकरण (Trigonometrical equations)

एक अज्ञात चर राशि (माना x) में त्रिकोणमितीय फलनों वाले समीकरण को त्रिकोणमितीय समीकरण कहते हैं। इस अनुच्छेद में, हम ऐसे ही समीकरणों के हल ज्ञात करेंगे। त्रिकोणमितीय समीकरण के ऐसे हल जहाँ $0 \le x < 2\pi$ होता है, **मुख्य हल** (Principal solutions) कहलाते हैं। पूर्णांक 'n' से युक्त व्यंजक जो किसी त्रिकोणमितीय समीकरण के सभी हल व्यक्त करता है, उसे व्यापक हल (General solution) कहते हैं। हम पूर्णांकों के समुच्चय को 'Z' से प्रदर्शित करेंगे।

निम्नलिखित उदाहरण त्रिकोणमितीय समीकरणों को हल करने में सहायक होंगे :

उदाहरण 14: समीकरण $\sin x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ का मुख्य हल ज्ञात कीजिए।

हल : हम जानते है कि $\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ तथा $\sin\dfrac{2\pi}{3}=\sin\left(\pi-\dfrac{\pi}{3}\right)=\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

इसलिए, मुख्य हल $x=\dfrac{\pi}{3}$ तथा $\dfrac{2\pi}{3}$ है।

उदाहरण 15: समीकरण $\tan x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ का मुख्य हल ज्ञात कीजिए।

हल : हम जानते हैं कि $\tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. इस प्रकार $\tan\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\tan\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

तथा $\tan\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right)$ तथा $-\tan\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

अतः $$\tan\frac{5\pi}{6} = \tan\frac{11\pi}{6} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

इसलिए, मुख्य हल $5\pi/6$ तथा $11\pi/6$ हैं।

अब, हम त्रिकोणमितीय समीकरणों का व्यापक हल ज्ञात करेंगे। हम देखते हैं कि $\sin x = 0$ तो $x = n\pi$, जहाँ $n \in \mathbf{Z}$

$\cos x = 0$ तो $x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$, जहाँ $n \in \mathbf{Z}$

प्रमेय 1: किन्हीं वास्तविक संख्याओं x तथा y के लिए

$\sin x = \sin y$ तो $x = n\pi + (-1)^n y$, जहाँ $n \in \mathbf{Z}$ से प्राप्त होता है।

प्रमाण यदि $\sin x = \sin y$, तो

$\sin x - \sin y = 0$ या $2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} = 0$

अर्थात् $\cos\frac{x+y}{2} = 0$ या $\sin\frac{x-y}{2} = 0$

इसलिए $\frac{x+y}{2} = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ या $\frac{x-y}{2} = n\pi$, जहाँ $n \in \mathbf{Z}$

अर्थात् $x = (2n+1)\pi - y$ या $x = 2n\pi + y$, जहाँ $n \in \mathbf{Z}$

अतः $x = (2n+1)\pi + (-1)^{2n+1} y$ या $x = 2n\pi + (-1)^{2n} y$, जहाँ $n \in \mathbf{Z}$

उपर्युक्त दोनों परिणामों को मिलाने पर, $x = n\pi + (-1)^n y$, जहाँ $n \in \mathbf{Z}$

प्रमेय 2: किन्हीं वास्तविक संख्याओ x तथा y के लिए, $\cos x = \cos y$ से $x = 2n\pi \pm y$, जहाँ $n \in \mathbf{Z}$ से प्राप्त होता है।

प्रमाण: यदि $\cos x = \cos y$, तो

$\cos x - \cos y = 0$ अर्थात् $-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} = 0$

इस प्रकार $\sin\frac{x+y}{2} = 0$ या $\sin\frac{x-y}{2} = 0$

इसलिए $\frac{x+y}{2} = n\pi$ या $\frac{x-y}{2} = n\pi$, जहाँ $n \in \mathbf{Z}$

अर्थात् $x = 2n\pi - y$ या $x = 2n\pi + y$, जहाँ $n \in \mathbf{Z}$

अतः $x = 2n\pi \pm y$, जहाँ $n \in \mathbf{Z}$

प्रमेय 3: सिद्ध कीजिए कि यदि x तथा y का $\pi/2$ विषम गुणज नहीं है तो $\tan x = \tan y$ से $x = n\pi + y$, जहाँ $n \in \mathbf{Z}$ प्राप्त होता है।

प्रमाण: यदि $\tan x = \tan y$, तो $\tan x - \tan y = 0$

या $$\frac{\sin x \cos y - \cos x \sin y}{\cos x \cos y} = 0$$

या $$\sin(x - y) = 0$$

इसलिए $x - y = n\pi$ अर्थात् $x = n\pi + y$, जहाँ $n \in \mathbf{Z}$

उदाहरण 16: समीकरण, $2\sin\theta + 1 = 0$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

हल : दिया हुआ है $2\sin\theta + 1 = 0$

$$\Rightarrow \quad \sin\theta = -\frac{1}{2} = -\sin\frac{\pi}{6} = \sin(-\frac{\pi}{6})$$

अतः व्यापक हल

$\theta = n\pi + (-1)^n \dfrac{\pi}{6}$, जहाँ $n \in Z$ होगा।

अब हम व्यापक हल ज्ञात करने हेतु निम्न परिणाम सिद्ध करेंगे :

उदाहरण 17: $\sin x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है $\sin x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} = -\sin\dfrac{\pi}{3} = \sin\left(\pi + \dfrac{\pi}{3}\right) = \sin\dfrac{4\pi}{3}$

अतः $\sin x = \sin\dfrac{4\pi}{3}$

इसलिए $x = n\pi + (-1)^n \dfrac{4\pi}{3}$, जहाँ $n \in \mathbf{Z}$ [1 से]

टिप्पणी : $4\pi/3$, x का एक ऐसा मान है जिसके संगत $\sin x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ है। x का कोई भी अन्य मान लेकर समीकरण हल किया जा सकता है, जिसके लिए $\sin x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ हो, यह सभी विधियों से प्राप्त हल एक ही होंगे यद्यपि वे प्रत्यक्षतःविभिन्न दिखाई पड़ सकते हैं।

उदाहरण 18: $\cos x = 1/2$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

हल : दिया हैं $\cos x = \dfrac{1}{2} = \cos\dfrac{\pi}{3}$

इसलिए $x = 2n\pi \pm \dfrac{\pi}{3}$, जहाँ $n \in \mathbf{Z}$. [प्रमेय 2 से]

उदाहरण 19: $\tan 2x = -\cot\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$ का व्यापक ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है $\tan 2x = -\cot\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) = \tan\left(\dfrac{\pi}{2} + x + \dfrac{\pi}{3}\right)$

या $\tan 2x = \tan\left(x + \frac{5\pi}{6}\right)$

इसलिए $2x = n\pi + x + \frac{5\pi}{6}$, जहाँ $n \in \mathbf{Z}$ [प्रमेय 3 से]

या $x = n\pi + \frac{5\pi}{6}$, जहाँ $n \in \mathbf{Z}$

उदाहरण 20: व्यापक हल ज्ञात कीजिए $\sin 2x - \sin 4x + \sin 6x = 0$

हलः समीकरण को लिख सकते हैं,

$\sin 6x + \sin 2x - \sin 4x = 0$

या $2\sin 4x \cos 2x - \sin 4x = 0$

अर्थात् $\sin 4x(2\cos 2x - 1) = 0$

इसलिए $\sin 4x = 0$ या $\cos 2x = 1/2$

अर्थात् $\sin 4x = \sin 0$ या $\cos 2x = \cos\frac{\pi}{3}$

अतः $4x = n\pi$ या $2x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$, जहाँ $n \in \mathbf{Z}$

अर्थात् $x = \frac{n\pi}{4}$ या $x = n\pi \pm \frac{\pi}{6}$, जहाँ $n \in \mathbf{Z}$

उदाहरण 21: हल कीजिए $2\cos^2 x + 3\sin x = 0$

हल : समीकरण को इस प्रकार लिख सकते हैं

$$2\left(1 - \sin^2 x\right) + 3\sin x = 0$$

या $2\sin^2 x - 3\sin x - 2 = 0$

या $(2\sin x + 1)(\sin x - 2) = 0$

अतः $\sin x = -1/2$ या $\sin x = 2$

परन्तु $\sin x = 2$ असंभव है $[\because -1 \le \sin x \le 1]$

इसलिए $\sin x = -\frac{1}{2} = \sin\frac{7\pi}{6}$

अतः हल : $x = n\pi + (-1)^n\left(7\pi/6\right)$ है, जहाँ $n \in \mathbf{Z}$

उदाहरण 22: समीकरण $\sin^2\theta - \cos\theta = 1/4$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

हल : दिये गये समीकरण से

$4\sin^2\theta - 4\cos\theta - 1 = 0$

$\Rightarrow 4\left(1 - \cos^2\theta\right) - 4\cos\theta - 1 = 0$

$\Rightarrow 4\cos^2\theta + 4\cos\theta - 3 = 0$

$\Rightarrow \left(2\cos\theta + 3\right)\left(2\cos\theta - 1\right) = 0$

यदि $2\cos\theta + 3 = 0 \Rightarrow \cos\theta = -3/2$ जो कि असत्य है। अतः

$2\cos\theta - 1 = 0 \quad \Rightarrow \cos\theta = 1/2 = \cos\pi/3$

अतः दिये गए समीकरण का व्यापक हल $\theta = 2n\pi \pm \pi/3$, जहाँ $n \in \mathbf{Z}$ होगा।

उदाहरण 23: समीकरण $\cos 3\theta - \sin\theta = \cos 5\theta$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

हलः दिए गए समीकरण से

$$\cos 3\theta - \cos 5\theta = \sin\theta$$

$$\Rightarrow \quad -2\sin\left(\frac{3\theta+5\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{3\theta-5\theta}{2}\right) - \sin\theta = 0 \qquad [\because \sin(-\theta) = -\sin\theta]$$

$$\Rightarrow \quad 2\sin 4\theta \sin\theta - \sin\theta = 0$$

$$\Rightarrow \quad (2\sin 4\theta - 1)\sin\theta = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2\sin 4\theta - 1 = 0 \quad \text{या} \quad \sin\theta = 0$$

$$\Rightarrow \quad \sin 4\theta = 1/2 = \sin \pi/6 \quad \text{या} \quad \sin\theta = \sin 0$$

$$\Rightarrow \quad 4\theta = n\pi + (-1)^n \pi/6 \quad \text{या} \quad \theta = n\pi$$

अतः दिये गये समीकरण का व्यापक हल $\theta = n\pi; \dfrac{n\pi}{4} + (-1)^n \dfrac{\pi}{24}$, जहाँ $n \in \mathbf{Z}$ होगा।

प्रश्नमाला 3.4

निम्नलिखित समीकरणों के मुख्य तथा व्यापक हल ज्ञात कीजिएः

1. $\tan x = \sqrt{3}$
2. $\sec x = 2$
3. $\cot x = -\sqrt{3}$
4. $\text{cosec}\, x = -2$

निम्नलिखित समीकरणों के व्यापक हल ज्ञात कीजिए :

5. $\cos 4x = \cos 2x$
6. $\cos 3x + \cos x - \cos 2x = 0$
7. $\sin 2x + \cos x = 0$
8. $\sec^2 2x = 1 - \tan 2x$
9. $\sin x + \sin 3x + \sin 5x = 0$

विविध उदाहरण

उदाहरण 24: यदि $\sin x = \dfrac{3}{5}, \cos y = -\dfrac{12}{13}$ है, जहाँ x तथा y दोनों द्वितीय चतुर्थांश में स्थित हों तो $\sin(x+y)$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : हम जानते हैं कि

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \qquad (1)$$

अब $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \dfrac{9}{25} = \dfrac{16}{25} \quad \Rightarrow \quad \cos x = \pm\dfrac{4}{5}$

क्योंकि x द्वितीय चतुर्थांश में स्थित है, अतः $\cos x$ ऋणात्मक होगा $\therefore$ $\cos x = -4/5$ है।

अब पुनः $\sin^2 y = 1 - \cos^2 y = 1 - \dfrac{144}{169} = \dfrac{25}{169} \quad \Rightarrow \quad \sin y = \pm 5/13$

क्योंकि y द्वितीय चतुर्थांश में स्थित है, $\sin y$ धनात्मक होगा $\therefore$ $\sin y = 5/13$ है। $\sin x, \sin y, \cos x$ तथा $\cos y$ का मान समीकरण (1) में रखने पर

$$\sin(x+y) = \frac{3}{5} \times \left(-\frac{12}{13}\right) + \left(-\frac{4}{5}\right) \times \frac{5}{13} = -\frac{36}{65} - \frac{20}{65} = -\frac{56}{65}$$

उदाहरण 25: सिद्ध कीजिए: $\cos 2x \cos \frac{x}{2} - \cos 3x \cos \frac{9x}{2} = \sin 5x \sin \frac{5x}{2}$

हल : बायाँ पक्ष $= \frac{1}{2}\left[2\cos 2x \cos\frac{x}{2} - 2\cos\frac{9x}{2}\cos 3x\right]$

$$= \frac{1}{2}\left[\cos\left(2x+\frac{x}{2}\right) + \cos\left(2x-\frac{x}{2}\right) - \cos\left(\frac{9x}{2}+3x\right) - \cos\left(\frac{9x}{2}-3x\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\cos\frac{5x}{2} + \cos\frac{3x}{2} - \cos\frac{15x}{2} - \cos\frac{3x}{2}\right] = \frac{1}{2}\left[\cos\frac{5x}{2} - \cos\frac{15x}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[-2\sin\left\{\frac{\frac{5x}{2}+\frac{15x}{2}}{2}\right\}\sin\left\{\frac{\frac{5x}{2}-\frac{15x}{2}}{2}\right\}\right]$$

$$= -\sin 5x \sin\left(-\frac{5x}{2}\right) = \sin 5x \sin\frac{5x}{2} =$$ दायाँ पक्ष

उदाहरण 26:. $\tan\frac{\pi}{8}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए $x = \pi/8$ हो तो $2x = \pi/4$

अब $\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$ से $\tan\frac{\pi}{4} = \frac{2\tan(\pi/8)}{1-\tan^2(\pi/8)}$

मान लीजिए $y = \tan\frac{\pi}{8}$ तो $1 = \frac{2y}{1-y^2}$

या $y^2 + 2y - 1 = 0$

इसलिए $y = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}$

क्योंकि $\pi/8$ प्रथम चतुर्थांश में स्थित है, $y = \tan(\pi/8)$ धनात्मक है। अतः $\tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$

उदाहरण 27: यदि $\tan x = 3/4, \pi < x < 3\pi/2$, तो $\sin(x/2), \cos(x/2)$ तथा $\tan(x/2)$ के मान ज्ञात कीजिए।

हल : क्योंकि $\pi < x < 3\pi/2$ है इसलिए $\cos x$ ऋणात्मक है।

पुनः $\frac{\pi}{2} < \frac{x}{2} < \frac{3\pi}{4}$.

इसलिए $\sin\frac{x}{2}$ धनात्मक होगा तथा $\cos\frac{x}{2}$ ऋणात्मक होगा।

अब $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x = 1 + (9/16) = 25/16$

इसलिए $\cos^2 x = 16/25$ या $\cos x = -4/5$ $\left[\pi < x < \frac{3\pi}{2}\right]$

अब $2\sin^2 \frac{x}{2} = 1 - \cos x = 1 + \frac{4}{5} = \frac{9}{5}$ $\left[\cos x = 1 - 2\sin^2 \frac{\pi}{2}\right]$

इसलिए $\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{9}{10}$ या $\sin \frac{x}{2} = \frac{3}{\sqrt{10}}$ $\left[\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} < \frac{3\pi}{4}\right]$

पुनः $2\cos^2 \frac{x}{2} = 1 + \cos x = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$

इसलिए $\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{10}$ या $\cos \frac{x}{2} = -\frac{1}{\sqrt{10}}$ $\left[\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} < \frac{3\pi}{4}\right]$

अतः $\tan \frac{x}{2} = \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} = \frac{3}{\sqrt{10}} \times \left(\frac{-\sqrt{10}}{1}\right) = -3$

उदाहरण 28: सिद्ध कीजिए: $\cos^2 x + \cos^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos^2\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{2}$

हल : हम पाते हैं,

$$\text{बायाँ पक्ष} = \frac{1+\cos 2x}{2} + \frac{1+\cos\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)}{2} + \frac{1+\cos\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right)}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left[3 + \cos 2x + \cos\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[3 + \cos 2x + 2\cos 2x \cos \frac{2\pi}{3}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[3 + \cos 2x + 2\cos 2x \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[3 + \cos 2x - 2\cos 2x \cos \frac{\pi}{3}\right]$$

$$= \frac{1}{2}[3 + \cos 2x - \cos 2x] = \frac{3}{2} = \text{दायाँ पक्ष}$$

विविध प्रश्नमाला–3

1. एक समकोण होता है–
(A) एक रेडियन के बराबर (B) 90 डिग्री के बराबर (C) एक डिग्री के बराबर (D) 90 रेडियन के बराबर

2. तृतीय चतुर्थांश में निम्न त्रिकोणमितीय फलन धनात्मक होता है–
(A) $\sin\theta$ (B) $\tan\theta$ (C) $\cos\theta$ (D) $\sec\theta$

3. $\operatorname{cosec}(-\theta)$ बराबर है
(A) $\sin\theta$ (B) $\tan\theta$ (C) $\cos\theta$ (D) $-\operatorname{cosec}\theta$

4. $\tan(90^\circ-\theta)$ बराबर है
(A) $-\tan\theta$ (B) $\cot\theta$ (C) $\tan\theta$ (D) $-\cot\theta$

5. $\cos\theta=-\frac{1}{2}$ हो, तो θ का मान होगा
(A) $\frac{2\pi}{3}$ (B) $\frac{\pi}{3}$ (C) $-\frac{2\pi}{3}$ (D) $\frac{3\pi}{4}$

6. यदि n एक सम पूर्णांक हो, तो $\sin(2n\pi\pm\theta)$ का मान होगा
(A) $\pm\cos\theta$ (B) $\pm\tan\theta$ (C) $\pm\sin\theta$ (D) $\pm\cot\theta$

7. $\cot 15^\circ$ का मान होगा
(A) $2+\sqrt{3}$ (B) $-2+\sqrt{3}$ (C) $2-\sqrt{3}$ (D) $-2-\sqrt{3}$

8. $\cos 15^\circ$ का मान होगा
(A) $\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ (B) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ (D) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

9. $2\sin\frac{5\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}$ का मान होगा
(A) 1 (B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{2}-1$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{2}+1$

10. $\cos\frac{\pi}{12}-\sin\frac{\pi}{12}$ का मान होगा
(A) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ (B) 0 (C) $-\frac{1}{2\sqrt{2}}$ (D) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

11. यदि $\sin A=\frac{3}{5}$ हो, तो $\sin 2A$ का मान होगा
(A) 4 / 25 (B) 5 / 25 (C) 24 / 25 (D) 4 / 5

12. यदि $\sin A=3/4$ हो, तो $\sin 3A$ का मान होगा
(A) 9 /16 (B) –9 / 16 (C) 9 / 32 (D) 7 / 16

13. यदि $\tan A=1/5$ हो, तो $\tan 3A$ का मान होगा
(A) 47 / 25 (B) 37 / 55 (C) 37 / 11 (D) 47 / 55

14. यदि $A+B=\pi/4$ हो, तो $(1+\tan A)(1+\tan B)$ का मान होगा

(A) 3 (B) 2 (C) 4 (D) 1

15. समीकरण $\sec^2\theta=2$ में θ का व्यापक मान होगा

(A) $2n\pi\pm\frac{\pi}{4}$ (B) $n\pi\pm\frac{\pi}{2}$ (C) $n\pi\pm(-1)^n\frac{\pi}{4}$ (D) $n\pi\pm\frac{\pi}{4}$

16. सिद्ध कीजिए कि–

(i) $\cos\theta+\sin(270^\circ+\theta)-\sin(270^\circ-\theta)+\cos(180^\circ+\theta)=0$

(ii) $\sec\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)\sec\left(\theta-\frac{5\pi}{2}\right)+\tan\left(\frac{5\pi}{2}+\theta\right)\tan\left(\theta-\frac{3\pi}{2}\right)=-1$

17. $\sin\left\{n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{4}\right\}$ का मान ज्ञात कीजिए जहाँ n एक पूर्णांक हो।

18. यदि $\sin A+\sin B=a$ तथा $\cos A+\cos B=b$ हो, तो सिद्ध कीजिए–

(i) $\sin(A+B)=(2ab)/(a^2+b^2)$ (ii) $\cos(A+B)=(b^2-a^2)/(a^2+b^2)$

19. यदि $A+B+C=180^\circ$ हो, तो सिद्ध कीजिए

(i) $\cos 2A+\cos 2B-\cos 2C=1-4\sin A\sin B\cos C$

(ii) $\sin A-\sin B+\sin C=4\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

20. यदि $A+B+C=2\pi$ हो, तो सिद्ध कीजिए

$\cos^2 B+\cos^2 C-\sin^2 A=2\cos A\cos B\cos C$

21. निम्न समीकरण का हल ज्ञात कीजिए

$2\tan\theta-\cot\theta+1=0$

महत्वपूर्ण बिन्दु

1. यदि एक वृत्त, जिसकी त्रिज्या r, चाप की लम्बाई ℓ तथा केन्द्र पर अंतरित कोण θ रेडियन हैं, तो $\ell=r\theta$
2. इकाई त्रिज्या के वृत्त के केन्द्र पर एक इकाई लम्बाई के चाप द्वारा बने कोण को एक रेडियन कहते हैं।
3. रेडियन माप $=\frac{\pi}{180}\times$ डिग्री माप
4. डिग्री माप $=\frac{180}{\pi}\times$ रेडियन माप
5. $\cos^2 x+\sin^2 x=1$
6. $1+\tan^2 x=\sec^2 x$
7. $1+\cot^2 x=\operatorname{cosec}^2 x$
8. $\cos(2n\pi+x)=\cos x$
9. $\sin(2n\pi+x)=\cos x$
10. $\sin(-x)=-\sin x$
11. $\cos(-x)=\cos x$
12. $\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$
13. $\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y$
14. $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$
15. $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$
16. $\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$

17. $\sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y$

18. $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x$

$\cos(\pi-x)=-\cos x \qquad \sin(\pi-x)=\sin x$

$\cos(\pi+x)=-\cos x \qquad \sin(\pi+x)=-\sin x$

$\cos(2\pi-x)=\cos x \qquad \sin(2\pi-x)=-\sin x$

19. यदि x, y और $(x\pm y)$ में से कोई कोण $\pi/2$ का विषम गुणांक नहीं हैं, तो

$$\tan(x+y)=\frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y} \text{ तथा } \tan(x-y)=\frac{\tan x-\tan y}{1+\tan x\tan y}$$

20. यदि x, y और $(x\pm y)$ में से कोई कोण π का विषम गुणांक नहीं हैं, तो

$$\cot(x+y)=\frac{\cot x\cot y-1}{\cot y+\cot x} \text{ तथा } \cot(x-y)=\frac{\cot x\cot y+1}{\cot y-\cot x}$$

21. $\sin 2x=2\sin x\cos x=\frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$, $\tan 2x=\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$

22. $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=2\cos^2 x-1=1-2\sin^2 x=\frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$

23. $\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x$, $\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x$

24. $\tan 3x=\frac{3\tan x-\tan^3 x}{1-3\tan^2 x}$

25. (i) $\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$ (ii) $\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$

(iii) $\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$ (iv) $\sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$

26. (i) $2\cos x\cos y=\cos(x+y)+\cos(x-y)$ (ii) $-2\sin x\sin y=\cos(x+y)-\cos(x-y)$

(iii) $2\sin x\cos y=\sin(x+y)+\sin(x-y)$ (iv) $2\cos x\sin y=\sin(x+y)-\sin(x-y)$

27. $\sin x=0$ हो तो $x=n\pi$, जहाँ $n\in \mathbf{Z}$

28. $\cos x=0$ हो तो $x=(2n+1)\frac{\pi}{2}$, जहाँ $n\in \mathbf{Z}$

29. $\sin x=\sin y$ हो तो $x=n\pi+(-1)^n y$, जहाँ $n\in \mathbf{Z}$

30. $\cos x=\cos y$, हो तो $x=2n\pi\pm y$, जहाँ $n\in \mathbf{Z}$

31. $\tan x=\tan y$ हो तो $x=n\pi+y$, जहाँ $n\in \mathbf{Z}$

उत्तरमाला

प्रश्नमाला 3.1

1. (i) $\frac{5\pi}{36}$; (ii) $-\frac{19\pi}{72}$; (iii) $\frac{26\pi}{9}$ 2. (i) $39^\circ 22' 30''$; (ii) $-229^\circ 5' 29''$; (iii) 300°

3. 12π 4. $12^\circ\ 36'$ 5. $\frac{20\pi}{3}$ 6. 5 : 4 7. (i) $\frac{2}{15}$; (ii) $\frac{7}{25}$

प्रश्नमाला 3.2

1. $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \operatorname{cosec} x = -\frac{2}{\sqrt{3}}, \sec x = -2, \tan x = \sqrt{3}, \cot x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

2. $\sin x = -\frac{4}{5}, \operatorname{cosec} x = -\frac{5}{4}, \cos x = -\frac{3}{5}, \sec x = -\frac{5}{3}, \sec x = -\frac{5}{3}, \tan x = \frac{4}{3}$

3. $\sin x = -\frac{12}{13}, \operatorname{cosec} x = -\frac{13}{12}, \cos x = \frac{5}{13}, \tan x = -\frac{12}{5}, \cot x = -\frac{5}{12}$

4. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 5. $\sqrt{3}$ 6. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 7.1

प्रश्नमाला 3.3

5. (i) $\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ (ii) $2-\sqrt{3}$

प्रश्नमाला 3.4

1. $\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, n\pi + \frac{\pi}{3}, n \in \mathbf{Z}$ 2. $\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}, n \in \mathbf{Z}$

3. $\frac{5\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, n\pi +, \frac{5\pi}{6}, n \in \mathbf{Z}$ 4. $\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, n\pi + (-1)^n \frac{7\pi}{6}, n \in \mathbf{Z}$

5. $x = \frac{n\pi}{3}$ or $x = n\pi, n \in \mathbf{Z}$ 6. $x = (2n+1)\frac{\pi}{4}$ or $2n\pi \pm \frac{\pi}{3}, n \in \mathbf{Z}$

7. $x = n\pi + (-1)^n \frac{7\pi}{6}$ or $(2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbf{Z}$

8. $x = \frac{n\pi}{2}$ or $\frac{n\pi}{2} + \frac{3\pi}{8}, n \in \mathbf{Z}$ 9. $x = \frac{n\pi}{3}$ or $n\pi \pm \frac{\pi}{3}, n \in \mathbf{Z}$

विविध प्रश्नमाला–3

1. B **2.** B **3.** D **4.** B **5.** A **6.** C
7. A **8.** A **9.** D **10.** D **11.** C **12.** A
13. B **14.** B **15.** A **17.** $1/\sqrt{2}$

21. $n\pi + \tan^{-1}\frac{1}{2}, n\pi + \frac{3\pi}{4}$ जहाँ $n \in \mathbf{Z}$