લક્ષ-સાતત્ય-વિકલન

અગત્યની વ્યાખ્યા અને જરૂરી સૂત્રો :

(1) માનાંક વિધેય : $f: R \to R, f(x) = |x| = \begin{cases} x; & x \geq 0 \\ -x; & x < 0 \end{cases}$ એ માનાંક વિધેય છે.

ગુણધર્મો : (i) $|x + y| \leq |x| + |y|$ (ii) $|x - y| \geq ||x| - |y||$ (iii) $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a, a \in R^+$

(2) પૂર્ણાંક ભાગ વિધેય : $f: R \to Z, f(x) = [x] = x$ થી અધિક નહિ તેવો મહત્તમ પૂર્ણાંક.

આ પૂર્ણાંક ભાગ વિધેય છે.

$f(3.2) = [3.2] = 3, \ f(1) = [1] = 1, \ f(-1\cdot3) = [-1.3] = -2$

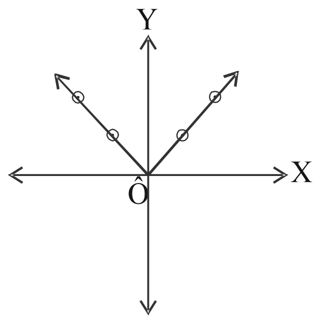
(3) ન્યૂનતમ પૂર્ણાંક વિધેય : $f: R \to Z, f(x) = \lceil x \rceil = x$ થી નાનો નહિ તેવો ન્યૂનતમ પૂર્ણાંક.

આ ન્યૂનતમ પૂર્ણાંક ભાગ વિધેય છે.

$f(5.3) = \lceil 5.3 \rceil = 6, \ f(-1.9) = \lceil -1.9 \rceil = -1, \ f(4) = \lceil 4 \rceil = 4, \ f(-2.3) = \lceil -2.3 \rceil = -2$

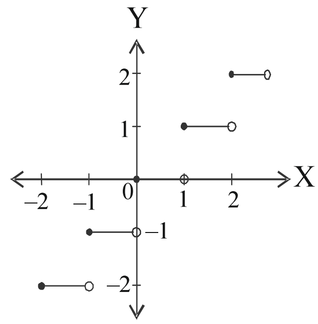
કેટલાંક વાસ્તવિક વિધેયોના આલેખ :

(1) માનાંક વિધેય : $f: R \to R, f(x) = |x|$



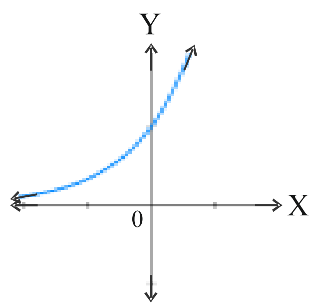
આકૃતિ 15.1

(2) પૂર્ણાંક ભાગ વિધેય : $f: R \to Z, f(x) = [x]$



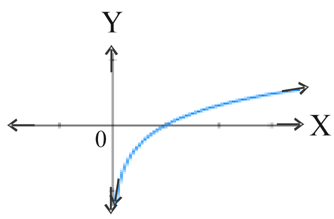
આકૃતિ 15.2

(3) ઘાતાંકીય વિધેય : $f: R \to R, f(x) = a^x$ જ્યાં $a > 0, a \neq 1 \ a > 1$



આકૃતિ 15.3

(4) **લઘુગુણકીય વિધેય :** $f: R^+ \to R, f(x) = \log_a x$ જ્યાં $a > 0, a \neq 1$



આકૃતિ 15.4

ડાબી બાજુનું લક્ષ : (c, a) પર વ્યાખ્યાયિત વિધેય f માટે જો યથેચ્છ $\varepsilon > 0$ ને અનુરૂપ $\delta > 0$ મળે કે જેથી $c < a - \delta$ અને $\forall x, x \in (a - \delta, a) \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$ તો વિધેય $f(x)$ નું ડાબી બાજુનું લક્ષ l છે તેમ કહેવાય. અને તેને $\lim\limits_{x \to a-} f(x) = l$ વડે દર્શાવાય છે.

જમણી બાજુનું લક્ષ : (a, b) પર વ્યાખ્યાયિત વિધેય f માટે જો યથેચ્છ $\varepsilon > 0$ માટે અનુરૂપ $\delta > 0$ મળે કે જેથી $a + \delta < b$ અને $\forall x, x \in (a, a + \delta) \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$ તો વિધેય $f(x)$ નું જમણી બાજુનું લક્ષ l છે તેમ કહેવાય, જે $\lim\limits_{x \to a_+} f(x) = l$ વડે દર્શાવાય છે.

- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a-} f(x) = l = \lim\limits_{x \to a_+} f(x)$
- $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ નું અસ્તિત્વ હોય, તો તે અનન્ય જ હોય.
- જો $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ થાય તો વિધેય f એ $x = a$ આગળ સતત છે તેમ કહેવાય.
- જો વિધેય $f(x)$, $x \in (a, b)$ હોય તેવા પ્રત્યેક બિંદુએ સતત હોય, તો તે (a, b) પર સતત છે તેમ કહેવાય.

  વળી, જો $\lim\limits_{x \to a_+} f(x) = f(a)$ અને $\lim\limits_{x \to b_-} f(x) = f(b)$ હોય, તો વિધેય f એ $[a, b]$ પર સતત છે તેમ કહેવાય.

લક્ષના કાર્યનિયમો :

જો $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ અને $\lim\limits_{x \to a} g(x) = m$ હોય તો,

(1) $\lim\limits_{x \to a} (f(x) \pm g(x)) = l \pm m$

(2) $\lim\limits_{x \to a} k\, f(x) = kl$

(3) $\lim\limits_{x \to a} f(x)\, g(x) = l \cdot m$

(4) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{l}{m}, m \neq 0$

- $\lim\limits_{x \to a} x^n = a^n, \quad n \in \mathrm{N}$
- જો $p(x)$ એ બહુપદી વિધેય હોય, તો $\lim\limits_{x \to a} p(x) = p(a)$
- બહુપદી વિધેય R પર સતત છે.
- સંમેય વિધેય તેના પ્રદેશના પ્રત્યેક ઘટક આગળ સતત છે.
- $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}, n \in \mathrm{N}, x \in \mathrm{R} - \{a\}$

સંયોજિત વિધેયના લક્ષનો નિયમ :

જો $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ હોય તથા $\lim\limits_{y \to b} g(y) = l$ હોય, તો $\lim\limits_{x \to a} g(f(x)) = l$ થાય.

- જો g એ b આગળ સતત હોય, તો

  $\lim\limits_{x \to a} g(f(x)) = g(b) = g\left(\lim\limits_{x \to a} f(x)\right)$

  આ રીતે બહારનું વિધેય સતત હોય, તો લક્ષ 'અંદર' લઈ શકાય.

- જો $f(x) < g(x)$ હોય તથા $\lim_{x \to a} f(x)$ અને $\lim_{x \to a} g(x)$ બંનેનાં લક્ષ અસ્તિત્વ ધરાવતા હોય, તો

  $\lim_{x \to a} f(x) \le \lim_{x \to a} g(x)$

  સેન્ડવિચ પ્રમેય : જો વિધેય f, g, h એવા હોય, જ્યાં $g \le f \le h$ તથા $\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} h(x) = l$, તો

  $\lim_{x \to a} f(x) = l$ થાય.

- $\lim_{x \to a} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \to a} |f(x)| = 0$
- $\lim_{x \to 0} \frac{sin\, x}{x} = 1$
- sin વિધેય સતત છે. તથા cos વિધેય સતત છે.
- $\lim_{x \to 0} \frac{tan\, x}{x} = 1$
- $\lim_{x \to 0} \frac{sin^{-1} x}{x} = 1$
- $\lim_{x \to 0} \frac{tan^{-1} x}{x} = 1$
- જો f તથા g એ $x = c$ આગળ સતત વિધેય હોય, તો $f \pm g$, fg તથા $g(c) \neq 0$ તો $\frac{f}{g}$ પણ $x = c$ આગળ સતત વિધેય છે.

  શ્રેણી લક્ષની વ્યાખ્યા : $\{a_n\}$ એક શ્રેણી છે અને l એક વાસ્તવિક સંખ્યા છે. જો પ્રત્યેક ધન વાસ્તવિક સંખ્યા ε ને અનુરૂપ $m \in$ N એવો મળે કે જેથી $n \ge m$, $n \in$ N $\Rightarrow |a_n - l| < \varepsilon$ તો $\{a_n\}$ નું લક્ષ l છે તેમ કહેવાય. સંકેતમાં

  $\lim_{n \to \infty} a_n = l$ લખાય છે.

- $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$
- જો $|r| < 1$, તો $\lim_{n \to \infty} r^n = 0$
- ધારો કે $S_n = a + ar + ar^2 + ... + ar^{n-1}$

  $\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{a}{1-r}$, $|r| < 1$

- $\lim_{n \to \infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$
- $\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$
- $\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = log_e\, a$
- $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
- $\lim_{x \to 0} \frac{\log_a (1+x)}{x} = \log_a e \qquad (a > 0)$
- $\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$

- જો $\lim_{x\to a} f(x)$નું અસ્તિત્વ હોય તથા લક્ષની કિંમત ધન સંખ્યા હોય, તો $\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x\to a} g(x) \log f(x)}$
- જો $\lim_{x\to a} f(x) = 1$ અને $g(x) \to \infty$ તો, $\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x\to a} (f(x) - 1)\, g(x)}$
- $\lim_{n\to\infty} (sin^n x + cos^n x)^{\frac{1}{n}} = \max \{|sin\ x|, |cos\ x|\}$

લક્ષનું મૂલ્ય શોધવા માટે ઉપયોગી અનંત શ્રેઢી વિસ્તરણ

નીચે દર્શાવેલ અનંત શ્રેઢી વિસ્તરણ લક્ષનું મૂલ્ય શોધવા માટે મદદરૂપ થાય છે :

(1) $(1 + x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \dots \infty \ (|x| < 1, m \in Q)$

(2) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \infty$

(3) $a^x = 1 + x\,(log_e a) + \frac{x^2}{2!}\,(log_e a)^2 + \dots \infty$

(4) $log_e (1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \infty$ $(|x| < 1)$

(5) $sin\ x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \infty$

(6) $cos\ x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \infty$

(7) $tan\ x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \dots \infty$

(8) $sin^{-1} x = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{x^5}{5} + \dots \infty$ $(|x| < 1)$

(9) $tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots \infty$ $(|x| < 1)$

(1) $\Sigma n = \frac{n(n+1)}{2}$

(2) $\Sigma n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(3) $\Sigma n^3 = \frac{n^2 (n+1)^2}{4}$

(4) $\Sigma n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$

વિકલન : ધારો કે $f : (a, b) \to R$ વિધેય છે. $x \in (a, b)$ નિશ્ચિત છે તથા $t \in (a, b)$ ચલ છે.

જો $\lim_{t\to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$ નું અસ્તિત્વ હોય, તો f એ x આગળ વિકલનીય છે તેમ કહેવાય. તેના માટે સંકેત $f'(x)$ અથવા $\frac{d}{dx} f(x)$ વપરાય છે. $y = f(x)$ માટે $\frac{d}{dx} f(x)$ ના સ્થાને $\frac{dy}{dx}$ પણ લખાય છે અથવા સંકેત y_1 નો પણ ઉપયોગ થાય છે.

વિધેયનો વિકલિત મેળવવાની ક્રિયાને વિકલન કહે છે.

- વક્રના $(x, f(x))$ બિંદુ આગળ સ્પર્શક શિરોલંબ ના હોય, તો તેના સ્પર્શકનો ઢાળ $f'(x)$ છે.
- જો વિધેય $f : (a, b) \to R$, $x \in (a, b)$ આગળ વિકલનીય હોય, તો તે x આગળ સતત છે.

આ વિધાનનું પ્રતીય સત્ય નથી. $f(x) = |x|$ એ $x = 0$ આગળ સતત છે પરંતુ વિકલનીય નથી.

લક્ષ મેળવવા માટેનો લ'પિતાનો નિયમ :

(1) ($\frac{0}{0}$ સ્વરૂપ) જો વિધેય f અને g વિકલનીય હોય તથા $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0 = \lim\limits_{x \to a} g(x)$ તો

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(2) ($\frac{\infty}{\infty}$ સ્વરૂપ) જો વિધેય f અને g વિકલનીય હોય તથા જો $x \to a$ માટે $f(x) \to \infty$, $g(x) \to \infty$, તો

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

વિકલનના કાર્યનિયમો

જો વિધેય f અને g વિકલનીય હોય અને $k \in$ R, તો

(1) $\frac{d}{dx}(f(x) \pm g(x)) = \frac{d}{dx} f(x) \pm \frac{d}{dx} g(x)$

(2) $\frac{d}{dx}(k\, f(x)) = k \frac{d}{dx} f(x)$

(3) $\frac{d}{dx}(f(x)\, g(x)) = g(x) \frac{d}{dx} f(x) + f(x) \frac{d}{dx} g(x)$

(4) જો $g(x) \neq 0$ તો $\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)\frac{d}{dx}f(x) - f(x)\frac{d}{dx}g(x)}{(g(x))^2}$

કેટલાંક પ્રમાણિત રૂપો

(1) $\frac{d}{dx} c = 0$ જ્યાં c અચળ છે.

(2) $\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$, $x \in \mathrm{R}^+$, $n \in \mathrm{R}$

(3) $\frac{d}{dx} a^x = a^x \log a$, $x \in \mathrm{R}$, $a \in \mathrm{R}^+ - \{1\}$

(4) $\frac{d}{dx} e^x = e^x$, $x \in \mathrm{R}$

(5) $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$, $x \in \mathrm{R}$

(6) $\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$, $x \in \mathrm{R}$

(7) $\frac{d}{dx} \tan x = \sec^2 x$, $x \in \mathrm{R} - \{(2k+1)\,|\frac{\pi}{2}|k \in Z\}$

(8) $\frac{d}{dx} \cot x = -\operatorname{cosec}^2 x$, $x \in \mathrm{R} - \{k\pi\,|k \in Z\}$

(9) $\frac{d}{dx} \sec x = \sec x \tan x$, $x \in \mathrm{R} - \{(2k+1)\frac{\pi}{2}|k \in Z\}$

(10) $\frac{d}{dx} \operatorname{cosec} x = -\operatorname{cosec} x \cot x$, $x \in \mathrm{R} - \{k\pi\,|k \in Z\}$

(11) $\frac{d}{dx} \log_e x = \frac{1}{x}$ $\qquad x \in \mathrm{R}^+$

(12) સંયોજિત વિધેયના વિકલનનો નિયમ (સાંકળ નિયમ) જો $f : (a, b) \to \mathrm{R}$ એ $x \in (a, b)$ આગળ વિકલનીય હોય તથા $f((a, b)) \subset (c, d)$ અને $g : (c, d) \to \mathrm{R}$ એ $f(x)$ આગળ વિકલનીય હોય, તો gof પણ x આગળ વિકલનીય હોય તથા $(gof)'(x) = g'(f(x))\, f'(x)$, $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$

(13) $\frac{d}{dx}\ sin^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $|x| < 1$

(14) $\frac{d}{dx}\ cos^{-1} x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$, $|x| < 1$

(15) $\frac{d}{dx}\ tan^{-1} x = \frac{1}{1+x^2}$, $x \in R$

(16) $\frac{d}{dx}\ cot^{-1} x = \frac{-1}{1+x^2}$, $x \in R$

(17) $\frac{d}{dx}\ sec^{-1} x = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$, $|x| > 1$

(18) $\frac{d}{dx}\ cosec^{-1} x = \frac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$, $|x| > 1$

(19) **પ્રચલ વિધેયનું વિકલિત :**

$x = f(t)$, $y = g(t)$, $t \in [a, b]$ એ પ્રચલ t નાં વિકલનીય વિધેયો છે.

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}\quad f'(t) \neq 0$

(20) **એક વિધેયનું બીજા વિધેય વિશે વિકલિત :** $u = f(x)$ તથા $v = g(x)$ એ x નાં વિકલનીય વિધેય હોય, તો u નો v વિશે વિકલિત $\frac{du}{dv} = \frac{du/dx}{dv/dx}$ થાય.

દ્વિતીય વિકલન

$y = f(x)$ એ દ્વિતીય વિકલન ધરાવે તો $\frac{d}{dx}\ f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}$ સંકેતમાં $f''(x)$ અથવા y_2 પણ લખાય છે.

વિકલિતના ઉપયોગો

- **દર માપક તરીકે વિકલિત :** કોઈ રાશિ y એ રાશિ x પર $y = f(x)$ દ્વારા આધારિત હોય, તો y નો x ને સાપેક્ષ દર $\frac{dy}{dx}$ અથવા $f'(x)$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત છે.

ભૂમિતિમાં વિકલનના ઉપયોગો

(1) વક્ર $y = f(x)$ પર $(x_0, f(x_0))$ બિંદુ આગળ વક્રના સ્પર્શકનું બિંદુ-ઢાળ સ્વરૂપ પ્રમાણે સમીકરણ
$y - y_0 = f'(x_0)\ (x - x_0)$ થાય.
સ્પર્શબિંદુમાંથી પસાર થતી સ્પર્શકને લંબ રેખાને અભિલંબ કહે છે. આમ, જો સ્પર્શક x અક્ષ કે તેને સમાંતર ના હોય, તો $(x_0, f(x_0))$ આગળ અભિલંબનું સમીકરણ $y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}\ (x - x_0)$ થાય.

- જો $x \to x_0$ ત્યારે $f'(x_0) \to \pm\infty$, તો $(x_0, f(x_0))$ આગળ $y = f(x)$ને શિરોલંબ સ્પર્શક $x = x_0$ છે તથા અભિલંબ $y = y_0$ છે.

(2) બે વક્રો વચ્ચેનો ખૂણો : જો બે વક્ર $y = f(x)$ તથા $y = g(x)$ એ (x_0, y_0) આગળ છેદે તથા (x_0, y_0) આગળ f, g વિકલનીય હોય, તો $tan^{-1}\left|\frac{f'(x_0) - g'(x_0)}{1 + f'(x_0)\,g'(x_0)}\right|$ (x_0, y_0) આગળ બે વક્રો $y = f(x)$ તથા $y = g(x)$ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ છે. જો $f'(x_0)\ g'(x_0) = -1$, તો વક્રો એકબીજાને કાટખૂણે છેદે છે કે લંબચ્છેદી છે તેમ કહેવાય.

રૉલનું પ્રમેય

જો (i) f એ $[a, b]$ પર સતત હોય. (ii) f એ (a, b) પર વિકલનીય હોય તથા (iii) $f(a) = f(b)$ તો કોઈક $c \in (a, b)$ મળે, જેથી $f'(c) = 0$ થાય.

ભૌમિતિક રીતે કોઈક $c \in (a, b)$ મળે છે, જેથી $(c, f(c))$ આગળ વક્રનો સ્પર્શક X-અક્ષ છે કે X-અક્ષને સમાંતર છે.

મધ્યકમાન પ્રમેય : જો f એ $[a, b]$ માં સતત હોય તથા (a, b) માં વિકલનીય હોય, તો $c \in (a, b)$ મળે,

જેથી $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$

ભૌમિતિક રીતે કોઈક $c \in (a, b)$ માટે $(c, f(c))$ આગળનો સ્પર્શક A $(a, f(a))$ તથા B $(b, f(b))$ ને જોડતી રેખાને સમાંતર છે.

$b = a + h$ લેતાં $f(a + h) - f(a) = h f'(c)$

આમ, $c = a + \theta h$ લઈ શકાય, જ્યાં $0 < \theta < 1$

$\therefore f(a + h) - f(a) = h f'(a + \theta h)$, $0 < \theta < 1$ એ મધ્યકમાન પ્રમેયનું બીજું સ્વરૂપ છે.

વધતાં તથા ઘટતાં વિધેયો

ધારો કે f અંતરાલ (a, b) પર વ્યાખ્યાયિત વિધેય છે.

જો (i) $x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$ તો f ને (a,b) પર વધતું વિધેય કહે છે. તેનો સંકેત $f \uparrow$ છે.

(ii) $x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ તો f ને (a,b) પર ચુસ્ત વધતું વિધેય કહે છે.

(iii) $x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$ તો f ને (a,b) પર ઘટતું વિધેય કહે છે. તેનો સંકેત $f \downarrow$ છે.

(iv) $x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ તો f ને (a,b) પર ચુસ્ત ઘટતું વિધેય કહે છે.

- $f : (a, b) \to R$ વિકલનીય વિધેય છે. જો (i) $f'(x) \ge 0, \forall x \in (a, b)$, તો f એ (a,b) પર વધતું વિધેય છે.

  (ii) $f'(x) \le 0, \forall x \in (a, b)$, તો f એ (a,b) પર ઘટતું વિધેય છે.

મહત્તમ તથા ન્યૂનતમ મૂલ્ય

(1) ધારો કે f એ $[a,b]$ પર વ્યાખ્યાયિત સતત વિધેય છે. જો $c \in [a, b]$ મળે, જેથી $f(x) \le f(c), \forall x \in [a, b]$ તો $f(c)$ ને $[a, b]$ પર f નું વૈશ્વિક મહત્તમ મૂલ્ય કહે છે. જો $f(x) \ge f(c)$ તો $f(c)$ એ $[a, b]$ પર f નું વૈશ્વિક ન્યૂનતમ મૂલ્ય છે.

(2) ધારો કે f એ $[a,b]$ પર વ્યાખ્યાયિત છે. જો $c \in (a, b)$ મળે અને $h > 0$ મળે જેથી

$(c - h, c + h) \subset (a, b)$ અને પ્રત્યેક $x \in (c - h, c + h)$ માટે $f(x) \le f(c)$ તો $f(c)$ ને f નું c આગળ સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય કહે છે. જો $f(x) \ge f(c), \forall x \in (c - h, c + h)$ તો $f(c)$ ને c આગળ f નું સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય કહે છે.

- જો f એ (a, b) પર વ્યાખ્યાયિત હોય તથા c આગળ તેને આત્યંતિક (ન્યૂનતમ અથવા મહત્તમ) મૂલ્ય હોય તથા f એ c આગળ વિકલનીય હોય, તો $f'(c) = 0$

(પ્રથમ વિકલિત કસોટી) જો f એ $[a, b]$ પર વ્યાખ્યાયિત વિધેય હોય અને $c \in (a, b)$ હોય તથા $h > 0$ મળે, જેથી $(c - h, c + h) \subset (a, b)$ અને

(*a*) (i) f એ $(c - h, c + h)$ માં વિકલનીય છે.

(ii) $c < x < c + h \Rightarrow f'(x) > 0$

(iii) $c - h < x < c \Rightarrow f'(x) < 0$

(iv) $f'(c) = 0$ તો f ને $x = c$ આગળ સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય છે. આ જ રીતે જો,

(*b*) (i) f એ $(c - h, c + h)$ માં વિકલનીય છે.

(ii) $c - h < x < c \Rightarrow f'(x) > 0$

(iii) $c < x < c + h \Rightarrow f'(x) < 0$

(iv) $f'(c) = 0$ તો f ને $x = c$ આગળ સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય છે.

(દ્વિતીય વિકલિત કસોટી)

f એ $[a, b]$ પર વ્યાખ્યાયિત વિધેય છે તથા $c \in (a, b)$ મળે છે, જેથી $h > 0$ તથા $(c - h, c + h) \subset (a, b)$ તથા $f'(c) = 0$ અને $f''(c) > 0$ તો f ને c આગળ સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય છે. $f'(c) = 0$ અને $f''(c) < 0$, તો f ને c આગળ સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય છે.

બહુવિકલ્પી પ્રશ્નો

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{tan\frac{x}{2}sec\,x+tan\frac{x}{2^2}sec\frac{x}{2}+...+tan\left(\frac{x}{2^n}\right)sec\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right)\right\}$

(A) $cot\ x$ (B) $sec\ x$ (C) $tan\ x$ (D) 0

ઉકેલ : $tan\ \frac{x}{2}\ sec\ x = \dfrac{sin\frac{x}{2}}{cos\frac{x}{2}cos\,x} = \dfrac{sin\left(x-\frac{x}{2}\right)}{cos\frac{x}{2}cos\,x} = tan\ x - tan\ \frac{x}{2}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\left\{tan\frac{x}{2}sec\,x+tan\frac{x}{2^2}sec\frac{x}{2}+...+tan\left(\frac{x}{2^n}\right)sec\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right)\right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left\{\left(tan\,x-tan\frac{x}{2}\right)+\left(tan\frac{x}{2}-tan\frac{x}{2^2}\right)+...+\left(tan\frac{x}{2^{n-1}}-tan\frac{x}{2^n}\right)\right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(tan\,x-tan\frac{x}{2^n}\right) = tan\ x \qquad \left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0\right)$$

જવાબ : (C)

(2) જો $f(x) = \begin{cases}\dfrac{sin(a+1)x+sin\,x}{x}, & x<0\\ c\ , & x=0\\ \dfrac{\sqrt{x+bx^2}-\sqrt{x}}{bx^{\frac{3}{2}}}\ , & x>0\end{cases}$ એ $x = 0$ આગળ સતત હોય તો ....

(A) $a = \frac{-3}{2}, b = 0, c = \frac{1}{2}$ (B) $a = -\frac{3}{2}, b = 1, c = \frac{1}{2}$

(C) $a = \frac{-3}{2}, b \in R, c = \frac{-1}{2}$ (D) $a = \frac{-3}{2}, b \in R, c = \frac{1}{2}$

ઉકેલ : $\lim\limits_{x\to0-}f(x) = \lim\limits_{x\to0-}\dfrac{sin(a+1)x+sin\,x}{x}$ $\left(\frac{0}{0}\text{ સ્વરૂપ}\right)$

$$= \lim_{x\to0-}\frac{(a+1)\,cos(a+1)x+cos\,x}{1}$$

$$= a + 2$$

$$\lim_{x\to0+} f(x) = \lim_{x\to0+} \frac{\sqrt{x+bx^2}-\sqrt{x}}{bx^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \lim_{x\to0+} \frac{\sqrt{1+bx}\ -1}{bx} \qquad \left(\frac{0}{0}\text{સ્વરૂપ}\right)$$

$$= \lim_{x\to0+} \frac{\frac{b}{2\sqrt{1+bx}} - 0}{b} = \frac{1}{2}$$

વિધેય $x = 0$ આગળ સતત હોવાથી, $a + 2 = c = \frac{1}{2}$. આથી $a = -\frac{3}{2}$, $c = \frac{1}{2}$ અને $b \in R$ **જવાબ :** (D)

(3) વિધેય f સતત છે. જો $f(x)\, f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right), \forall\ x \in D_f$ અને $f(1) > 0$ તો $\lim_{x\to1} f(x) = ...$.

(A) 2 (B) 1 (C) 3 (D) લક્ષનું અસ્તિત્વ નથી

ઉકેલ : વિધેય f સતત હોવાથી $\lim_{x\to1} f(x) = f(1)$

આપેલ સમીકરણમાં $x = 1$ મૂકતાં, $(f(1))^2 = 2f(1)$

$\therefore\ f(1) = 0$ અથવા $f(1) = 2$. પરંતુ $f(1) > 0$ હોવાથી, $f(1) = 2$

$\lim_{x\to1} f(x) = 2$ **જવાબ :** (A)

(4) $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\log(1+x+x^2)+\log(1-x+x^2)}{sec\,x - cosx}; & x \neq 0 \\ k & ; x = 0 \end{cases}$$

જો વિધેય f એ $x = 0$ આગળ સતત હોય, તો $k = ...$

(A) 1 (B) 0 (C) 2 (D) -1

ઉકેલ : જો વિધેય f એ $x = 0$ આગળ સતત હોય, તો

$$f(0) = k = \lim_{x\to0} \frac{\log(1+x+x^2)+\log(1-x+x^2)}{sec\,x - cosx}$$

$$= \lim_{x\to0} \frac{\log\left((1+x^2)^2 - x^2\right)}{1-cos^2x}\ cos\ x$$

$$= \lim_{x\to0} \frac{\log\left(1+(x^2+x^4)\right)}{sin^2x}\ cos\ x$$

$$= \lim_{x\to0} \frac{\log\left(1+(x^2+x^4)\right)}{x^2+x^4} \times \lim_{x\to0} \frac{x^2}{sin^2x} \times \lim_{x\to0} (1+x^2)\ cos\ x$$

$= 1$ **જવાબ :** (A)

(5) શૂન્યેતર સતત વિધેય f એ $f(x + y) = f(x)\, f(y), \forall\ x, y \in R$ નું પાલન કરે છે. જો $f(2) = 9$ તો $f(3) = ...$

(A) 1 (B) 27 (C) 9 (D) 3

ઉકેલ : આપેલ શરતનું પાલન કરતું વિધેય $f(x) = a^x$, $a > 0$ પ્રકારના સ્વરૂપનું છે.

$f(2) = 9$. આથી $a^2 = 9 \Rightarrow a = 3$

$f(x) = 3^x$ અને તેથી $f(3) = 3^3 = 27$ **જવાબ :**

(B)

(6) $n \in N$ ની કઈ કિંમત માટે $\lim_{x \to 0} \dfrac{(\cos x - 1)(\cos x - e^x)}{x^n}$ સાન્ત શૂન્યેતર સંખ્યા મળે ?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

ઉકેલ : $(\cos x - 1)(\cos x - e^x)$

$$= \left(\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \ldots\right) - 1\right) \left[\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \ldots\right) - \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\right)\right]$$

$$= x^2 \left(\frac{-1}{2} + \frac{x^2}{4!} + \ldots\right) \left(-x - x^2 - \frac{x^3}{3!} - \ldots\right)$$

$$= x^3 \left(\frac{-1}{2} + \frac{x^2}{4!} - \ldots\right) \left(-1 - x - \frac{x^2}{3!} - \ldots\right)$$

$$\therefore \lim_{x \to 0} \frac{(\cos x - 1)(\cos x - e^x)}{x^3} = \frac{1}{2} \neq 0$$

$\therefore n = 3$ **જવાબ :** (C)

નોંધ : $n = 1, 2$ માટે લક્ષ શૂન્ય થાય તથા $n > 3$ માટે સાન્ત લક્ષ ના મળે.

(7) ધારો કે $f(x) = g(x) \dfrac{e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{-1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}} + e^{\frac{-1}{x}}}$ જ્યાં, g સતત વિધેય છે. જો $\lim_{x \to 0} f(x)$ નું અસ્તિત્વ હોય, તો

(A) $g(x) = x + 2$ (B) $g(x) = x^2 + 4$

(C) $g(x) = xh(x)$ જ્યાં $h(x)$ બહુપદી વિધેય (D) $g(x)$ એ અચળ વિધેય છે.

ઉકેલ : $\lim_{x \to 0+} \dfrac{e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{-1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}} + e^{\frac{-1}{x}}} = \lim_{x \to 0+} \dfrac{1 - e^{\frac{-2}{x}}}{1 + e^{\frac{-2}{x}}} = 1$ $\left(e^{\frac{-2}{x}} \to 0\right)$

$\lim_{x \to 0-} \dfrac{e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{-1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}} + e^{\frac{-1}{x}}} = \lim_{x \to 0-} \dfrac{e^{\frac{2}{x}} - 1}{e^{\frac{2}{x}} + 1} = -1$ $\left(e^{\frac{-2}{x}} \to 0\right)$

$\therefore$ જો $g(x) = xh(x)$ હોય, તો $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$ મળે. **જવાબ :** (C)

(8) $\lim_{\alpha \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\alpha - \frac{\pi}{4}} = \ldots\ldots$ (AIEEE : 2002)

(A) $\sqrt{2}$ (B) 1 (C) 2 (D) 0

ઉકેલ : $\lim_{\alpha \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\alpha - \frac{\pi}{4}} = \lim_{\alpha \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos \alpha + \sin \alpha}{1} = \sqrt{2}$ $\left(\frac{0}{0}\text{ સ્વરૂપ}\right)$ **જવાબ :** (A)

(9) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 - \cos 2\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} = \ldots\ldots$ (AIEEE : 2002)

(A) 1 (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (D) લક્ષનું અસ્તિત્વ નથી

ઉકેલ : જો $x < 0$ હોય, તો $\sqrt{x}$ તથા $\sqrt{1-cos 2\sqrt{x}}$ વ્યાખ્યાયિત ન થાય.

$\therefore \lim_{x\to 0-} \frac{\sqrt{1-cos 2\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$ નું અસ્તિત્વ નથી **જવાબ :** (D)

(10) જો $\lim_{x\to 0} \frac{\log(3+x)-\log(3-x)}{x} = k$ તો $k = ...$ (AIEEE : 2003)

(A) $\frac{-1}{3}$ (B) $\frac{-2}{3}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) 0

ઉકેલ : $\lim_{x\to 0} \frac{\log(3+x)-\log(3-x)}{x} = k$ $\left(\frac{0}{0} \text{ સ્વરૂપ}\right)$

$\therefore \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{3+x}+\frac{1}{3-x}}{1} = k$

$\therefore \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = k$ આથી $k = \frac{2}{3}$ **જવાબ :** (C)

(11) જો α, β એ દ્વિઘાત સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ નાં ભિન્ન વાસ્તવિક બીજ હોય, તો

$\lim_{x\to\alpha} \frac{1-cos(ax^2+bx+c)}{(x-\alpha)^2} = ...$

(A) $\frac{b^2+4ac}{2}$ (B) 0 (C) $\frac{b^2-4ac}{2}$ (D) 1

ઉકેલ : $\lim_{x\to\alpha} \frac{1-cos(ax^2+bx+c)}{(x-\alpha)^2} = \lim_{x\to\alpha} \frac{2 sin^2\left(\frac{ax^2+bx+c}{2}\right)}{(x-\alpha)^2}$

$$= \lim_{x\to\alpha} \frac{2 sin^2\left(\frac{a(x-\alpha)(x-\beta)}{2}\right)}{\left(\frac{a(x-\alpha)(x-\beta)}{2}\right)^2} \cdot \frac{a^2}{4} (x-\beta)^2$$

$$= \frac{a^2(\alpha-\beta)^2}{2} = \frac{a^2}{2}[(\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta] = \frac{a^2}{2}\left[\frac{b^2}{a^2}-\frac{4c}{a}\right] = \frac{b^2-4ac}{2}$$ **જવાબ :** (C)

બીજી રીત :

$$\lim_{x\to\alpha} = \frac{1-cos\big(a(x-\alpha)(x-\beta)\big)}{(x-\alpha)^2}$$

$$= \frac{a sin\big(a(x-\alpha)(x-\beta)\big)(x-\alpha+x-\beta)}{2(x-\alpha)a(x-\beta)} \times a(x-\beta)$$

$$= \frac{a^2}{2}(\alpha-\beta)^2 = \frac{b^2-4ac}{2}$$ **જવાબ :** (C)

(12) $\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos 2x)(3+\cos x)}{x \tan 4x} = ...$ (JEE Main : 2015)

(A) 2 (B) $\frac{1}{2}$ (C) 4 (D) 3

ઉકેલ : $\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos 2x)(3+\cos x)}{x \tan 4x}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 x(3+\cos x)}{x\frac{\tan 4x}{4x}\cdot 4x}$

$= \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{\tan 4x}{4x}} \lim_{x\to 0} (3 + \cos x)$

$= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 4 = 2$ **જવાબ :** (A)

(13) જો વિધેય f એ a આગળ ડાબી બાજુ તથા જમણી બાજુ વિકલનીય હોય, તો f એ ....

(A) a આગળ સતત હોય. (B) a આગળ વિકલનીય હોય.

(C) 0 આગળ વિકલનીય હોય. (D) a આગળ સતત નથી.

ઉકેલ : $\lim_{h\to 0+} (f(a) - f(a-h)) = \lim_{h\to 0+} \frac{f(a)-f(a-h)}{h} h$

$= \lim_{h\to 0+} f'(a^-) \cdot h = 0$ ($f'(a^-)$ નું અસ્તિત્વ છે.)

તે જ રીતે $\lim_{h\to 0+} (f(a+h)) - f(a)) = 0$

$\therefore \lim_{h\to 0+} f(a-h)) = \lim_{h\to 0+} f(a+h) = f(a)$

$\therefore$ f એ a આગળ સતત છે. **જવાબ :** (A)

(14) જો $f(x) = (1+x)^n$, તો $f(0) + f'(0) + \frac{1}{2} f''(0) + ... + \frac{1}{n!} f^n(0) = ...$

(A) n (B) 2^n (C) 2^{n-1} (D) 1

ઉકેલ : $f(0) = 1, f'(x) = n(1+x)^{n-1}, f''(x) = n(n-1)(1+x)^{n-2} ... f^{(n)}(n) = n(n-1) ...1 (1+x)^{n-n} = n!$

$\therefore f'(0) = n, f''(0) = n(n-1), ...f^n(0) = n!$

માંગેલ કિંમત $= 1 + n + \frac{n(n-1)}{2!} + ... + \frac{n!}{n!} = 2^n$ **જવાબ :** (B)

ખરેખર $f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + ... \infty$

$\therefore (1+x)^n = f(0) + xf'(0) + ... + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0)$

$\therefore 2^n = f(0) + f'(0) + \frac{f''(0)}{2!} + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$

(15) $\lim_{n\to\infty} \frac{1+2^4+3^4+...+n^4}{n^5} - \lim_{n\to\infty} \frac{1+2^3+3^3+...+n^3}{n^5} = ...$ (AIEEE : 2003)

(A) 0 (B) $\frac{1}{5}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{30}$

ઉકેલ : આપેલ લક્ષ $= \lim_{n\to\infty} \frac{\Sigma n^4}{n^5} - \lim_{n\to\infty} \frac{\Sigma n^3}{n^5}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30n^5} - \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(n+1)^2}{4\cdot n^5}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^5\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)\left(3+\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}{30n^5} - \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}{4n} = \frac{1}{5} - 0 = \frac{1}{5}$ **જવાબ :** (B)

(16) જો $g(x) = \begin{cases} k\sqrt{x+1}, & 0 \le x \le 3 \\ mx+2, & 3 < x \le 5 \end{cases}$ વિકલનીય હોય, તો $k + m = ...$ (JEE Main : 2015)

(A) $\frac{10}{3}$ (B) 4 (C) 2 (D) $\frac{16}{5}$

ઉકેલ : જો $g(x)$ વિકલનીય હોય, તો g એ $x = 3$ આગળ સતત પણ હોય.

$\therefore \lim\limits_{x \to 3^+} g(x) = g(3)$

$\therefore 3m + 2 = 2k$ (1)

$g(x)$ વિકલનીય છે. $\therefore g'(3+) = g'(3-)$

$\therefore m = k \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$ $(x = 3)$

$\therefore m = \frac{k}{4}$. આથી $k = 4m$ આથી $3m + 2 = 8m$ (2)

$m = \frac{2}{5}, k = \frac{8}{5}$. આથી $k + m = 2$ **જવાબ :** (C)

(17) $f(x) = |3 - |3 - |x|||$ એ કેટલાં બિંદુ આગળ વિકલનીય નથી ?

(A) 2 (B) 3 (C) 5 (D) 6

ઉકેલ : આપણે જાણીએ છીએ કે $|x|$ એ $x = 0$ આગળ વિકલનીય નથી.
આપેલ વિધેય f એ $x = 0$, $|x| = 3$ તેમજ $|3 - |x|| = 3$ એટલે કે $x = 0$, $x = \pm 3$, $x = \pm 6$ એ 5 બિંદુઓ આગળ વિકલનીય નથી. **જવાબ :** (C)

(18) નીચેનામાંથી કયા બિંદુગણમાં $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$ વિકલનીય થશે ? (AIEEE : 2006)

(A) $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ (B) $(-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$ (C) $(-\infty, \infty)$ (D) $(0, \infty)$

ઉકેલ : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1-x}, & x < 0 \\ \dfrac{x}{1+x}, & x \ge 0 \end{cases}$

$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(1-x)^2}, & x < 0 \\ \dfrac{1}{(1+x)^2}, & x > 0 \end{cases}$ અહીં $f(0) = 0$

$$f'(0+) = \lim_{x \to 0+} \frac{\frac{x}{1+x}}{x} = 1$$

$$f'(0-) = \lim_{x \to 0-} \frac{\frac{x}{1-x}}{x} = 1$$

$\therefore f'(0) = 1$

$\therefore f'(x)$ નું અસ્તિત્વ $(-\infty, \infty)$ પર છે. વળી, **જવાબ :** (C)

(19) જો $x^m y^n = (x + y)^{m+n}$ તો $\dfrac{dy}{dx} = ...$ (AIEEE : 2006)

(A) $\frac{y}{x}$ (B) $\frac{x+y}{xy}$ (C) xy (D) $\frac{x}{y}$

ઉકેલ : $x^m y^n = (x + y)^{m+n}$ $\quad x > 0,\ y > 0$

બંને બાજુ *log* લેતાં,

$m \log x + n \log y = (m + n) \log (x + y)$

વિકલન કરતાં,

$$\frac{m}{x} + \frac{n}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{m+n}{x+y}\left(1+\frac{dy}{dx}\right)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}\left(\frac{n}{y}-\frac{m+n}{x+y}\right) = \frac{m+n}{x+y} - \frac{m}{x}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}\left(\frac{nx-my}{y(x+y)}\right) = \frac{nx-my}{x(x+y)}$$

$\therefore$ જો $nx \neq my$ તો $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x}$

જો $nx = my$ હોય, તોપણ

$$m\frac{dy}{dx} = n$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{n}{m} = \frac{y}{x}$$

જવાબ : (A)

(20) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt[3]{3x+2}-2}{\sqrt[5]{x+30}-2} = ...$

(A) 10 (B) 20 (C) 30 (D) 40

ઉકેલ : $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(3x+2)^{\frac{1}{3}}-2}{(x+30)^{\frac{1}{5}}-2}$ $\quad \left(\frac{0}{0}\right)$સ્વરૂપ

$$= \lim_{x \to 2} \frac{\frac{1}{3}(3x+2)^{\frac{-2}{3}}\cdot 3}{\frac{1}{5}(x+30)^{\frac{-4}{5}}} = \frac{\frac{1}{4}.5}{\left(\frac{1}{16}\right)} = 20$$

જવાબ : (B)

(21) $\lim\limits_{x \to \infty} x \sum\limits_{i=1}^{n}\left(e^{\frac{i}{x}}-1\right) = ...$

(A) $\dfrac{n+1}{2}$ (B) $\dfrac{n^2+1}{2}$ (C) $\dfrac{n(n+1)}{2}$ (D) $\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

ઉકેલ : માંગેલ લક્ષ $= \lim\limits_{x \to \infty} x\left[\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)+\left(e^{\frac{2}{x}}-1\right)+...+\left(e^{\frac{n}{x}}-1\right)\right]$

$$= \lim_{\frac{1}{x} \to 0}\left[\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}+2\frac{e^{\frac{2}{x}}-1}{\frac{2}{x}}+...+n\frac{e^{\frac{n}{x}}-1}{\frac{n}{x}}\right] = 1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

જવાબ : (C)

(22) $\lim\limits_{\theta\to 0} \dfrac{1-cos\{1-cos(1-cos\theta)\}}{\theta^8}$ = ...

(A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{16}$ (C) $\frac{1}{64}$ (D) $\frac{1}{128}$

ઉકેલ : આપણે નોંધીએ કે $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-cosx}{x^2} = \dfrac{1}{2}$ (1)

હવે માંગેલ લક્ષ= $\lim\limits_{\theta\to 0} \dfrac{1-cos\{1-cos(1-cos\theta)\}}{\{1-cos(1-cos\theta)\}^2} \times \dfrac{\{1-cos(1-cos\theta)\}^2}{(1-cos\theta)^4} \times \dfrac{(1-cos\theta)^4}{\theta^8}$

જેમ $\theta \to 0$ તેમ $1 - cos\,\theta \to 0$ અને $1 - cos\,(1 - cos\,\theta) \to 0$

(1)નો ઉપયોગ કરતાં, માંગેલ લક્ષ $= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{128}$ **જવાબ :** (D)

(23) $\lim\limits_{n\to\infty} cos\,\frac{x}{2}\ cos\,\frac{x}{4}\ cos\,\frac{x}{8}\ ...\ cos\,\frac{x}{2^n}$ = ...

(A) $sin\,x$ (B) $\frac{sinx}{x}$ (C) $\frac{cosx}{x}$ (D) $cos\,x$

ઉકેલ : $\lim\limits_{n\to\infty} cos\,\frac{x}{2}\ cos\,\frac{x}{4}\ cos\,\frac{x}{8}\ ...\ cos\,\frac{x}{2^n}$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n\ cos\frac{x}{2}cos\frac{x}{4}cos\frac{x}{8}...cos\frac{x}{2^n}\ sin\frac{x}{2^n}}{2^n\ sin\frac{x}{2^n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{sinx}{x}\ \dfrac{\frac{x}{2^n}}{sin\frac{x}{2^n}} = \dfrac{sinx}{x}$ **જવાબ :** (B)

(24) $x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x} = 0$ માટે $\frac{dy}{dx}$ = ... $(x \ne 0, -1)$

(A) $\frac{1}{(1+x)^2}$ (B) $\frac{-1}{(1+x)^2}$ (C) $\frac{1}{1+x^2}$ (D) $\frac{-1}{1+x^2}$

ઉકેલ : $x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x} = 0$

$\therefore x^2(1+y) = y^2(1+x)$

$\therefore x^2 - y^2 = xy(y-x)$

$\therefore x + y + xy = 0.$ આથી $y = \frac{-x}{1+x} = -1 + \frac{1}{1+x}$. આથી $\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{(1+x)^2}$ **જવાબ :** (B)

નોંધ : $x = y$ તો $x\sqrt{1+x} = 0$ પરંતુ $x \ne 0, -1$.

(25) જો $tan\,\frac{y}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\ tan\,\frac{x}{2}$ તો $\frac{dy}{dx}$ = ...

(A) $\frac{\sqrt{1-e^2}}{1+e\,cosx}$ (B) $\sqrt{\frac{1-e^2}{1+e\,cosx}}$ (C) $\frac{\sqrt{1+e^2}}{1+e\,cosx}$ (D) $\frac{\sqrt{1-e^2}}{1-e\,cosx}$

ઉકેલ : $tan\,\frac{y}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\ tan\,\frac{x}{2}$ (1)

x પ્રત્યે વિકલન કરતાં,

$sec^2\,\frac{y}{2}\cdot\frac{1}{2}\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\ sec^2\,\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{2}$

$$\left[1+tan^2\frac{y}{2}\right]\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\ sec^2\frac{x}{2}$$

$$\therefore \left[1+\frac{1-e}{1+e}tan^2\frac{x}{2}\right]\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\ sec^2\frac{x}{2}$$ ((1) પરથી)

બંને બાજુ $(1+e)\ cos^2\frac{x}{2}$ વડે ગુણતાં,

$$\left[(1+e)\ cos^2\frac{x}{2} + (1-e)\ sin^2\frac{x}{2}\right]\frac{dy}{dx} = \sqrt{1-e^2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{1+ecosx}$$ **જવાબ :** (A)

(26) જો $y = \frac{1}{\sqrt{cos\,2x}}$ તો $y_2 + y = ...$

(A) y^5 (B) $2y^5$ (C) $3y^5$ (D) $4y^5$

ઉકેલ : અહીં $cos\ 2x\ y^2 = 1$ (1)

$\therefore cos\ 2x\ 2yy_1 - 2\ sin\ 2x \cdot y^2 = 0$

$\therefore y_1 = y\ tan\ 2x$

$\therefore y_2 = y_1\ tan\ 2x + 2\ sec^2\ 2x \cdot y$

$= y\ tan^2\ 2x + 2\ sec^2\ 2x\ y$

$= 3\ sec^2\ 2x \cdot y - y = 3\ y^4 \cdot y - y$ ((1) પરથી)

$\therefore y_2 + y = 3y^5$ **જવાબ :** (C)

(27) જો $x = sec\ \theta - cos\ \theta$ અને $y = sec^n\ \theta - cos^n\ \theta$, તો $(x^2 + 4)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = ...\ (y^2 + 4)$

(A) n (B) n^2 (C) $2n$ (D) n^3

ઉકેલ : $x^2 = sec^2\ \theta - 2 + cos^2\ \theta$ અને $y^2 = sec^{2n}\ \theta - 2 + cos^{2n}\ \theta$

$\therefore x^2 + 4 = (sec\ \theta + cos\ \theta)^2,\ y^2 + 4 = (sec^n\ \theta + cos^n\ \theta)^2$

હવે, $x = sec\ \theta - cos\ \theta$

$$\therefore \frac{dx}{d\theta} = sec\ \theta\ tan\ \theta + sin\ \theta = sin\ \theta\ sec\ \theta\ (sec\ \theta + cos\ \theta)$$

$$\therefore \frac{dy}{d\theta} = n\ sec^{n-1}\ \theta\ sec\ \theta\ tan\ \theta + n\ cos^{n-1}\theta\ sin\ \theta$$

$$= n\ sin\ \theta\ sec\ \theta\ (sec^n\ \theta + cos^n\ \theta)$$

$$\therefore \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{n^2\,(sec^n\,\theta+cos^n\,\theta)^2}{(sec\,\theta+cos\,\theta)^2} = \frac{n^2\,(y^2+4)}{(x^2+4)}$$

$$\therefore (x^2+4)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = n^2\,(y^2+4)$$ **જવાબ :** (B)

(28) જો $f(x) = p\,|sin\,x| + qe^{|x|} + r|x|^3$ એ $x = 0$ આગળ વિકલનીય હોય તો ...... $\left(-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}\right)$

(A) $q + r = 0, p \in R$ (B) $p + q = 0, p \in R$

(C) $q = 0, r = 0, p \in R$ (D) $r = 0, p = 0, q \in R$

ઉકેલ : જો $x < 0$ તો $f(x) = -p\,sin\,x + qe^{-x} - rx^3$

$f'(x) = -p\,cos\,x - qe^{-x} - 3r\,x^2$

$\therefore\ f'(0-) = -p - q$

જો $x > 0$ તો $f(x) = p\,sin\,x + qe^{x} + rx^3$

$\therefore f'(x) = p\,cos\,x + qe^{x} + 3r\,x^2$ $x > 0$

$\therefore\ f'(0+) = p + q$

જો f એ $x = 0$ આગળ વિકલનીય હોય તો,

$-p - q = p + q$ આથી $2(p + q) = 0.$ આથી $p + q = 0$ **જવાબ :** (B)

(29) જો $y = tan^{-1}\left(\frac{\log e\,x^{-2}}{\log e\,x^2}\right) + tan^{-1}\left(\frac{3+2\log x}{1-6\log x}\right)$ તો $\frac{dy}{dx}$ = ...

(A) 2 (B) 1 (C) 0 (D) x

ઉકેલ : $y = tan^{-1}\left(\frac{\log e - 2\log x}{\log e + 2\log x}\right) + tan^{-1}\left(\frac{3+2\log x}{1-6\log x}\right)$

$= tan^{-1}\left(\frac{1-2\log x}{1+2\log x}\right) + tan^{-1}\left(\frac{3+2\log x}{1-6\log x}\right)$

$= \frac{\pi}{4} - tan^{-1}(2\log x) + tan^{-1}3 + tan^{-1}(2\log x)$

$y = \frac{\pi}{4} + tan^{-1}3$ આથી $\frac{dy}{dx} = 0$ **જવાબ :** (C)

($\log x > 0$ તથા $0 < 6\log x < 1$ તેમ સ્વીકારેલ છે. પરંતુ તેમ ના હોય તોપણ જવાબમાં ફેર નહિ પડે.)

(30) જો $3f(x) - 2f\left(\frac{1}{x}\right) = x$ હોય તો $f'(2)$ = ...

(A) $\frac{2}{7}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) 2 (D) $\frac{7}{2}$

ઉકેલ : $3f(x) - 2f\left(\frac{1}{x}\right) = x$

$\therefore 3f'(x) - 2f'\left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{-1}{x^2}\right) = 1$

$x = 2$ મૂકતાં, $3f'(2) + \frac{2}{4}f'\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ (1)

$x = \frac{1}{2}$ મૂકતાં, $3f'\left(\frac{1}{2}\right) + 8f'(2) = 1$ (2)

સમીકરણ (1) અને (2) ને ઉકેલતાં, $f'(2) = \frac{1}{2}$ **જવાબ :** (B)

(31) $f(x) = \dfrac{tan[e^2]x^3 - tan[-e^2]x^3}{sin^3 x}$, $x \neq 0$. જો f એ $x = 0$ આગળ સતત હોય તો $f(0) = ...$

(A) 15 (B) 12 (C) –12 (D) 14

ઉકેલ : $7 < e^2 < 8$. આથી $[e^2] = 7$. $[-e^2] = -8$

$$f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{tan 7x^3 - tan(-8)x^3}{sin^3 x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{tan 7x^3}{7x^3} \cdot 7 + \lim_{x\to 0} \frac{tan 8x^3}{8x^3} \cdot 8 \qquad \left(\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 = 1\right)$$

$$= 7 + 8 = 15$$

જવાબ : (A)

(32) $f(x) = \dfrac{1}{\log|x|}$ એ કેટલાં બિંદુઓએ અસતત થશે ?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

ઉકેલ : $x = 0, \pm 1$ ત્રણ બિંદુઓએ f વ્યાખ્યાયિત નથી. બીજા તમામ બિંદુઓએ સતત છે. **જવાબ :** (C)

(33) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$, $g(x) = f^{3n}(x)$ જ્યાં $f^n(x) = fofof...of$ (n વખત). વિધેય $g(x)$ કેટલા બિંદુએ અસતત થશે ?

(A) 2 (B) $2n$ (C) $3n$ (D) $2n + 1$

ઉકેલ : $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ f એ $x = 1$ આગળ અસતત થશે.

$(fof)(x) = \dfrac{x-1}{x}$ fof એ $x = 0$ આગળ અસતત છે.

$$(fofof)(x) = \frac{\frac{1}{1-x} - 1}{\frac{1}{1-x}} = x$$

$g(x) = f^{3n}(x) = x$

$\therefore$ g એ ફક્ત 0 અને 1 એમ બે બિંદુએ અસતત થશે. **જવાબ :** (A)

(34) f અને g વિકલનીય વિધેય છે. $g'(a) = 2$, $g(a) = b$ તથા $fog = I$. તો $f'(b) = ...$

(A) $\frac{1}{2}$ (B) 2 (C) $\frac{2}{3}$ (D) 1

ઉકેલ : $f(g(x)) = x$

$\therefore f'(g(x))\, g'(x) = 1$

$\therefore f'(g(a))\, g'(a) = 1$

$\therefore f'(b) \cdot 2 = 1$

$\therefore f'(b) = \frac{1}{2}$ **જવાબ :** (A)

(35) $y = x^n (a \cos(\log x) + b \sin(\log x))$. જો, y એ $x^2 y_2 + (1 - 2n) xy_1 + Ay = 0$ નું સમાધાન કરે તો A = ...

(A) n (B) $1 + n^2$ (C) $1 + \frac{1}{n}$ (D) $1 - n^2$

ઉકેલ : $y = x^n (a\ cos\ (log\ x) + b\ sin\ (\log x))$

$$y_1 = nx^{n-1} (a\ cos\ (log\ x) + b\ sin\ (\log x)) + x^n \left(-a sin(\log x)\frac{1}{x} + (b cos(\log x)\frac{1}{x}\right)$$

$\therefore xy_1 = ny + x^n (-a\ sin\ (\log x) + b\ cos\ (\log x))$

$\therefore xy_2 + y_1 = ny_1 + nx^{n-1}(-a\ sin\ (\log x) + b\ cos\ (\log x)) + x^n(-a\ cos(\log x)\frac{1}{x} - b\ sin(\log x)\ \frac{1}{x})$

$\therefore x^2y_2 + xy_1 = nxy_1 + n\ (xy_1 - ny) - y$

$\therefore x^2y_2 + (1 - 2n)\ xy_1 + (1 + n^2)y = 0$ જવાબ : (B)

(36) જો $x = f(t),\ y = g(t)$ તો $\frac{d^2y}{dx^2} =$ ......

(A) $\frac{f'g''-g'f''}{(f')^2}$ (B) $\frac{f'g''-g'f''}{(f')^3}$ (C) $\frac{f''}{g''}$ (D) $\frac{g''}{f''}$

ઉકેલ : $\frac{dy}{dx} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{g''(t)f'(t)-g'(t)f''(t)}{[f'(t)]^2}\ \frac{1}{f'(t)} = \frac{f'g''-g't''}{(f')^3}$$ જવાબ : (B)

(37) જો $f(x) = \begin{cases} (1+|sin\,x|)^{\frac{a}{|sin\,x|}}, & \frac{-\pi}{6}<x<0 \\ b & x=0 \\ e^{tan2x/tan3x} & 0<x<\frac{\pi}{6} \end{cases}$ એ $\left(\frac{-\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right)$ પર સતત હોય તો, = ...

(A) $a = \frac{2}{3},\ b = e^2$ (B) $a = \frac{1}{3},\ b = e^{\frac{1}{3}}$ (C) $a = \frac{2}{3},\ b = e^{\frac{2}{3}}$ (D) $a = e^{\frac{2}{3}},\ b = e^{\frac{2}{3}}$

ઉકેલ : $b = f(0) = \lim_{x\to 0_+} f(x) = \lim_{x\to 0} e^{\frac{tan2x}{tan3x}} = e^{\frac{2}{3}}$

વળી, $b = f(0) = \lim_{x\to 0-} f(x) = \left(1+|sin\,x|\right)^{\frac{a}{|sin\,x|}} = e^a = e^{\frac{2}{3}}$, આથી $a=\frac{2}{3}$ જવાબ : (C)

(38) જો $y = \frac{ax^2}{(x-a)(x-b)(x-c)} + \frac{bx}{(x-b)(x-c)} + \frac{c}{x-c} + 1$ તો $\frac{y'}{y} =$ ....

(A) $\frac{1}{x}\left(\frac{a}{a-x}+\frac{b}{b-x}+\frac{c}{c-x}\right)$ (B) $\frac{a}{a-x}+\frac{b}{b-x}+\frac{c}{c-x}$ (C) $\frac{1}{x}$ (D) $\frac{1}{x}\left(\frac{a}{x-a}+\frac{b}{x-b}+\frac{c}{x-c}\right)$

ઉકેલ : $y = \frac{ax^2+bx(x-a)+c(x-a)(x-b)+(x-a)(x-b)(x-c)}{(x-a)(x-b)(x-c)}$

$$y = \frac{x^3}{(x-a)(x-b)(x-c)}$$

$$\log y = 3\log x - \log (x-a) - \log (x-b) - \log (x-c)$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{3}{x} - \frac{1}{x-a} - \frac{1}{x-b} - \frac{1}{x-c}$$

$$= \frac{1}{x}\left[3 - \frac{x}{x-a} - \frac{x}{x-b} - \frac{x}{x-c}\right]$$

$$= \frac{1}{x}\left[3 - \frac{x-a+a}{x-a} - \frac{x-b+b}{x-b} - \frac{x-c+c}{x-c}\right]$$

$$= \frac{1}{x}\left[\frac{a}{a-x} + \frac{b}{b-x} + \frac{c}{c-x}\right]$$

જવાબ : (A)

(39) જો વિધેય f એ R પર સતત છે તથા $f\left(\frac{1}{4n}\right) = (\sin e^n)\, e^{-n^2} + \frac{n^2}{n^2+1}$ તો $f(0)$ ની કિંમત ......

(A) 1 (B) $\frac{1}{2}$ (C) 0 (D) –1

ઉકેલ : વિધેય f એ $x = 0$ આગળ સતત છે.

$$\therefore f(0) = \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{4n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left[(\sin e^n)e^{-n^2} + \frac{n^2}{n^2+1}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{(\sin e^n)}{e^{n^2}} + \frac{1}{1+\frac{1}{n^2}}\right] = 1$$

જવાબ : (A)

(40) જો $f(x) = \frac{x}{2} - 1$ તો અંતરાલ $[0, \pi]$ પર

(A) $\tan(f(x))$ અને $\frac{1}{f(x)}$ બંને સતત થશે.

(B) $\tan(f(x))$ અને $\frac{1}{f(x)}$ બંને અસતત થશે.

(C) $\tan(f(x))$ અને $f^{-1}(x)$ બંને સતત થશે.

(D) $\tan(f(x))$ અને $f^{-1}(x)$ બંને અસતત થશે.

ઉકેલ : $f(x) = \frac{x}{2} - 1$ એ $[0, \pi]$ પર સતત છે.

$y = \tan f(x)$ એ $\left[-1, \frac{\pi}{2}-1\right]$ (= f નો વિસ્તાર) પર સતત છે.

$\therefore \tan f(x)$ એ $[0, \pi]$ પર સતત થશે તથા $\frac{1}{f(x)}$ એ $x = 2$ પર વ્યાખ્યાયિત ન થવાથી $[0, \pi]$ પર અસતત થશે.

$\therefore f^{-1}(x) = 2(x+1)$ એ તેના પ્રદેશ $[0, \pi]$ પર સતત થશે.

$\therefore \tan f(x)$ અને $f^{-1}(x)$ બંને $[0, \pi]$ પર સતત થશે.

જવાબ : (C)