కర్నాటక ప్రభుత్వం

గణితం

Mathematics

తెలుగు మాధ్యమం

Telugu Medium

9

తొమ్మిదవ తరగతి

భాగం – 1

©KTBS Not to be republished

National Council For Education and Research

Sri Arbindo Marg New Delhi - 110016

Karnataka Textbook Society (R.)

100 Feet Ring Road, Banashankari 3rd Stage,

Bengaluru - 560 085

THE CONSTITUTION OF INDIA

PREAMBLE

WE, THE PEOPLE OF INDIA, having solemnly resolved to constitute India into a [1]**[SOVEREIGN SOCIALIST SECULAR DEMOCRATIC REPUBLIC]** and to secure to all its citizens :

JUSTICE, social, economic and political;

LIBERTY of thought, expression, belief, faith and worship;

EQUALITY of status and of opportunity and to promote among them all;

FRATERNITY assuring the dignity of the individual and the [2][unity and integrity of the Nation];

IN OUR CONSTITUENT ASSEMBLY this twenty-sixth day of November, 1949 do **HEREBY ADOPT, ENACT AND GIVE TO OURSELVES THIS CONSTITUTION.**

1. Subs. by the Constitution (Forty-second Amendment) Act, 1976, Sec.2, for "Sovereign Democratic Republic" (w.e.f. 3.1.1977)
2. Subs. by the Constitution (Forty-second Amendment) Act, 1976, Sec.2, for "Unity of the Nation" (w.e.f. 3.1.1977)

©KTBS Not to be republished

Foreword

The National Curriculum Framework (NCF), 2005, recommends that children's life at school must be linked to their life outside the school. This principle marks a departure from the legacy of bookish learning which continues to shape our system and causes a gap between the school, home and community. The syllabi and textbooks developed on the basis of NCF signify an attempt to implement this basic idea. They also attempt to discourage rote learning and the maintenance of sharp boundaries between different subject areas. We hope these measures will take us significantly further in the direction of a child-centred system of education outlined in the national Policy on Education (1986).

The success of this effort depends on the steps that school principals and teachers will take to encourage children to reflect on their own learning and to pursue imaginative activities and questions. We must recognize that, given space, time and freedom, children generate new knowledge by engaging with the information passed on to them by adults. Treating the prescribed textbook as the sole basis of examination is one of the key reasons why other resources and sites of learning are ignored. Inculcating creativity and initiative is possible if we perceive and treat children as participants in learning, not as receivers of a fixed body of knowledge.

This aims imply considerable change is school routines and mode of functioning. Flexibility in the daily time-table is as necessary as rigour in implementing the annual calendar so that the required number of teaching days are actually devoted to teaching. The methods used for teaching and evaluation will also determine how effective this textbook proves for making children's life at school a happy experience, rather then a source of stress or boredom. Syllabus designers have tried to address the problem of curricular burden by restructuring and reorienting knowledge at different stages with greater consideration for child psychology and the time available for teaching. The textbook attempts to enhance this endeavour by giving higher priority and space to opportunities for contemplation and wondering, discussion in small groups, and activities requiring hands-on experience.

The National Council of Educational Research and Training (NCERT) appreciates the hard work done by the textbook development committee responsible for this book. We wish to thank the Chairperson of the advisory group in science and mathematics, Professor J.V. Narlikar and the Chief Advisor for this book, Professor P. Sinclair of IGNOU, New Delhi for guiding the work of this committee. Several teachers

©KTBS Not to be republished

contributed to the development of this textbook; we are grateful to their principals for making this possible. We are indebted to the institutions and organizations which have generously permitted us to draw upon their resources, material and personnel. We are especially grateful to the members of the National Monitoring Committee, appointed by the Department of Secondary and Higher Education, Ministry of Human Resource Development under the Chairpersonship of Professor Mrinal Miri and Professor G.P. Deshpande, for their valuable time and contribution. As an organisation committed to systemic reform and continuous improvement in the quality of its products, NCERT welcomes comments and suggestions which will enable us to undertake further revision and refinement.

Director
National Council of Educational
Research and Training

New Delhi
20 December 2005

©KTBS
Not to be republished

TEXTBOOK DEVELOPMENT COMMITTEE

CHAIRPERSON, ADVISORY GROUP IN SCIENCE AND MATHEMATICS

J.V. Narlikar, *Emeritus Professor*, *Chairman*, Advisory Committee, Inter University Centre for Astronomy & Astrophysics (IUCAA), Ganeshkhind, Pune University, Pune

CHIEF ADVISOR

P. Sinclair, Director, NCERT and *Professor of Mathematics* , IGNOU, New Delhi

CHIEF COORDINATOR

Hukum Singh, *Professor* (Retd.), DESM, NCERT

MEMBERS

A.K. Wazalwar, *Professor and Head*, DESM, NCERT

Anjali Lal, *PGT*, DAV Public School, Sector-14, Gurgaon

Anju Nirula, *PGT*, DAV Public School, Pushpanjali Enclave, Pitampura, Delhi

G.P. Dikshit, *Professor* (Retd.), Department of Mathematics & Astronomy, Lucknow University, Lucknow

K.A.S.S.V. Kameswara Rao, *Associate Professor*, Regional Institute of Education, Bhubaneswar

Mahendra R. Gajare, *TGT*, Atul Vidyalya, Atul, Dist. Valsad

Mahendra Shanker, *Lecturer* (S.G.) (Retd.), NCERT

Rama Balaji, *TGT*, K.V., MEG & Centre, ST. John's Road, Bangalore

Sanjay Mudgal, *Lecturer*, CIET, NCERT

Shashidhar Jagadeeshan, *Teacher and Member*, Governing Council, Centre for Learning, Bangalore

S. Venkataraman, *Lecturer*, School of Sciences, IGNOU, New Delhi

Uaday Singh, *Lecturer*, DESM, NCERT

Ved Dudeja, *Vice-Principal* (Retd.), Govt. Girls Sec. School, Sainik Vihar, Delhi

MEMBER-COORDINATOR

Ram Avtar, *Professor* (Retd.), DESM, NCERT (till December 2005)
R.P. Maurya, *Professor*, DESM, NCERT (Since January 2006)

©KTBS
Not to be republished

ACKNOWLEDGEMENTS

The Council gratefully acknowledges the valuable contributions of the following participants of the Textbook Review Workshop: A.K. Saxena, *Professor* (Retd.), Lucknow University, Lucknow; Sunil Bajaj, *HOD*, SCERT, Gurgaon; K.L. Arya, *Professor* (Retd.), DESM, NCERT; Vandita Kalra, *Lecturer,* Sarvodaya Kanya Vidyalya, Vikas Puri, District Centre, New Delhi; Jagdish Singh, *PGT,* Sainik School, Kapurthala; P.K. Bagga, *TGT,* S.B.V. Subhash Nagar, New Delhi; R.C. Mahana, *TGT,* Kendriya Vidyalya, Sambalpur; D.R. Khandave, *TGT,* JNV, Dudhnoi, Goalpara; S.S. Chattopadhyay, *Assistant Master,* Bidhan Nagar Government High School, Kolkata; V.A. Sujatha, *TGT,* K.V. Vasco No. 1, Goa; Akila Sahadevan, *TGT,* K.V., Meenambakkam, Chennai; S.C. Rauto, *TGT,* Central School for Tibetans, Mussoorie; Sunil P. Xavier, *TGT,* JNV, Neriyamangalam, Ernakulam; Amit Bajaj, *TGT,* CRPF Public School, Rohini, Delhi; R.K. Pande, *TGT,* D.M. School, RIE, Bhopal; V. Madhavi, *TGT,* Sanskriti School, Chanakyapuri, New Delhi; G. Sri Hari Babu, *TGT,* JNV, Sirpur Kagaznagar, Adilabad; and R.K. Mishra, *TGT,* A.E.C. School, Narora.

Special thanks are due to M. Chandra, *Professor* and *Head* (Retd.), DESM, NCERT for her support during the development of this book.

The Council acknowledges the efforts of *Computer Incharge,* Deepak Kapoor; *D.T.P. Operator,* Naresh Kumar; *Copy Editor,* Pragati Bhardwaj; and *Proof Reader,* Yogita Sharma.

Contribution of APC–Office, administration of DESM, Publication Department and Secretariat of NCERT is also duly acknowledged.

©KTBS Not to be republished

ಮುನ್ನುಡಿ

2005ನೇ ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಪಠ್ಯಕ್ರಮದ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ ರಚಿತವಾದ ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಪಠ್ಯವಸ್ತುವಿನ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ ರಚಿತವಾದ ಎನ್.ಸಿ.ಇ.ಆರ್.ಟಿ 9ನೆಯ ತರಗತಿಯ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕವನ್ನು ಯಥಾವತ್ತಾಗಿ ತೆಲುಗು ಭಾಷೆಗೆ ಅನುವಾದ ಮಾಡಿ 2017–18ನೇ ಸಾಲಿನಿಂದ ಜಾರಿಗೊಳಿಸಲಾಗಿದೆ. ಈ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕವನ್ನು ಒಟ್ಟು 7 ಮಾಧ್ಯಮಗಳಲ್ಲಿ ಹೊರತರಲಾಗಿದೆ. NCF–2005ರ ಪಠ್ಯಕ್ರಮದ ಎಲ್ಲ ವೈಶಿಷ್ಟ್ಯಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ.

2005ರ ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಪಠ್ಯಕ್ರಮವು ಈ ಕೆಳಗಿನ ವೈಶಿಷ್ಟ್ಯಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ.

- ಕಲಿಕೆಯನ್ನು ಜೀವನದ ಅವಶ್ಯಕತೆಗಳೊಂದಿಗೆ ಜೋಡಿಸುವುದು.
- ಕಂಠಪಾಠ ವಿಧಾನದಿಂದ ಕಲಿಕೆಯನ್ನು ಮುಕ್ತಗೊಳಿಸುವುದು.
- ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳ ಹೊರತಾಗಿ ಪಠ್ಯಕ್ರಮವನ್ನು ಶ್ರೀಮಂತಗೊಳಿಸುವುದು.
- ಜ್ಞಾನದ ಅಭಿವೃದ್ಧಿಗೆ ಕಲಿಕಾ ಅನುಭವಗಳನ್ನು ಬಳಸುವುದು.
- ಭಾರತದ ಪ್ರಜಾಸತ್ತಾತ್ಮಕ ನೀತಿಯನ್ವಯ ಮಕ್ಕಳ ಅವಶ್ಯಕತೆಗಳಿಗೆ ತಕ್ಕಂತೆ ಸ್ಪಂದಿಸುವುದು.
- ಶಿಕ್ಷಣವನ್ನು ಇಂದಿನ ಹಾಗೂ ಭವಿಷ್ಯದ ಜೀವನಾವಶ್ಯಕತೆಗಳಿಗೆ ಹೊಂದುವಂತೆ ಮಾಡುವುದು.
- ವಿಷಯಗಳ ಮೇರೆಗಳನ್ನು ಮೀರಿ ಅವುಗಳಿಗೆ ಸಮಗ್ರ ದೃಷ್ಟಿಯ ಬೋಧನೆಯನ್ನು ಅಳವಡಿಸುವುದು.
- ಶಾಲೆಯ ಹೊರಗಿನ ಬದುಕಿಗೆ ಜ್ಞಾನ ಸಂಯೋಜನೆ.
- ಮಕ್ಕಳಿಂದಲೇ ಜ್ಞಾನವನ್ನು ಅಭಿವೃದ್ಧಿಪಡಿಸುವುದು.

9ನೇ ತರಗತಿಯ ಗಣಿತ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಅಂತರ್ಗತ ವಿಧಾನ (Integrated Approach), ರಚನಾತ್ಮಕ ವಿಧಾನ (Constructive Approach) ಹಾಗೂ ಸುರುಳಿಯಾಕಾರದ ವಿಧಾನ (Spiral Approach) ಗಳನ್ನು ಅಳವಡಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳ ವಿಷಯ ಹಾಗೂ ಅಭ್ಯಾಸಗಳು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳನ್ನು ಯೋಚನೆ ಮಾಡುವಂತೆ ಮಾಡಿ, ಚಟುವಟಿಕೆಗಳ ಮೂಲಕ ಜ್ಞಾನ ಹಾಗೂ ಸಾಮರ್ಥ್ಯಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುವಂತೆ ಮಾಡುವ ಪ್ರಯತ್ನ ಮಾಡಲಾಗಿದೆ. ಪಠ್ಯವಸ್ತುಗಳೊಂದಿಗೆ ಅತ್ಯಂತ ಅವಶ್ಯಕ ಜೀವನ ಮೌಲ್ಯಗಳನ್ನು ಅಂತರ್ಗತವಾಗಿ ಬಳಸಲಾಗಿದೆ. ಈ ನೂತನ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳು ಪರೀಕ್ಷಾ ದೃಷ್ಟಿಯಿಂದ ರಚಿತವಾಗಿಲ್ಲ. ಬದಲಾಗಿ ಅವುಗಳು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸರ್ವಾಂಗೀಣ ವ್ಯಕ್ತಿತ್ವ ವಿಕಸನಕ್ಕೆ ಪೂರಕವಾಗಿವೆ. ತನ್ಮೂಲಕ ಅವರನ್ನು ಸ್ವತಂತ್ರ ಭಾರತದ ಸ್ವಸ್ಥಸಮಾಜದ ಉತ್ತಮ ಪ್ರಜೆಗಳನ್ನಾಗಿ ಮಾಡುವ ಪ್ರಯತ್ನ ನಡೆದಿದೆ.

©KTBS Not to be republished

ನಿತ್ಯ ಜೀವನದಲ್ಲಿ ಗಣಿತವು ಎಲ್ಲಾ ಹಂತಗಳಲ್ಲೂ ಯಶಸ್ಸಿಗೆ ಅತ್ಯವಶ್ಯಕವಾಗಿದೆ. ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಪಠ್ಯಕ್ರಮ–2005ರಂತೆ ಗಣಿತವು ಕೆಲವು ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳನ್ನು ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಂಡು ಸಿದ್ಧಾಂತಗಳನ್ನು ನಿರೂಪಿಸಿ, ಪ್ರಮೇಯಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಿ, ಲೆಕ್ಕಗಳನ್ನು ಮಾಡಿ ಪರೀಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಉತ್ತಮ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುವುದರ ಜೊತೆಗೆ ಗಣಿತವನ್ನು ಜೀವನದ ಸಕಲ ಕ್ಷೇತ್ರಗಳಲ್ಲೂ ಬಳಸುವ ಸಾಮರ್ಥ್ಯವನ್ನು ಬೆಳೆಸಿಕೊಂಡು ಜೀವನದಲ್ಲಿ ಯಶಸ್ಸನ್ನು ಗಳಿಸುವಂತೆ ಮಾಡಬೇಕು. ಅದು ಸಹಕಾರಿ ಕಲಿಕೆಗೂ ಪೂರಕವಾಗಿರಬೇಕು.

ಪ್ರಾಚೀನ ಭಾರತದ ಶ್ರೇಷ್ಠ ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರ ಕೊಡುಗೆಗಳನ್ನು ಸೂಕ್ತ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. 9ನೇ ತರಗತಿಯ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳು ಶೈಕ್ಷಣಿಕವಾಗಿ ವೈಶಿಷ್ಟ್ಯಪೂರ್ಣವಾಗಿವೆ. ಇತರ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳಂತೆಯೇ ಈ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ/ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿನಿಯರಿಗೆ ಸಾಮರ್ಥ್ಯ ಹಾಗೂ ಕೌಶಲ್ಯಗಳನ್ನು ಬೆಳೆಸಿಕೊಳ್ಳಲು ಸಹಾಯ ಮಾಡುತ್ತವೆ.

ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಮಟ್ಟದ ಶೈಕ್ಷಣಿಕ ಸುಧಾರಣೆ ಹಾಗೂ ಅಭಿವೃದ್ಧಿಗಳನ್ನು ಗಮನದಲ್ಲಿರಿಸಿ ಕರ್ನಾಟಕ ರಾಜ್ಯದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳೂ ಸಹ ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಮಟ್ಟದಲ್ಲಿ ಶೈಕ್ಷಣಿಕವಾಗಿ ಹಾಗೂ ಸ್ಪರ್ಧಾತ್ಮಕ ಪರೀಕ್ಷೆಗಳಲ್ಲಿ ಯಶಸ್ವಿಯಾಗಿ ತಮ್ಮ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ಮಾಡಲು ಈ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ಸಹಕಾರಿಯಾಗಲಿ ಎಂಬುವುದೇ ಸಾರ್ವಜನಿಕ ಶಿಕ್ಷಣ ಇಲಾಖೆಯ ಪ್ರಮುಖ ಆಶಯವಾಗಿದೆ.

ಈ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕವು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ ಸ್ನೇಹಿ ಹಾಗೂ ಶಿಕ್ಷಕ ಸ್ನೇಹಿಯಾಗಿದೆ. ಗಣಿತ ಕಲಿಕೆ ಸಂತೋಷದಾಯಕ ಹಾಗೂ ಅರ್ಥಪೂರ್ಣವಾಗುವಂತೆ ಮಾಡಲು ಈ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕವು ಸೂಕ್ತವಾದ ದಾರಿಯನ್ನು ರೂಪಿಸುತ್ತದೆಯೆಂದು ನಾವು ಭಾವಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಈ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕವನ್ನು ಶಿಕ್ಷಕರಿಗೆ ತಗತಿಯಲ್ಲಿ ಬೋಧನೆ ಮಾಡಲು ಅನುಕೂಲವಾಗುವಂತೆ ಭಾಗ – 1 ಮತ್ತು ಭಾಗ – 2ರಲ್ಲಿ ಅಧ್ಯಾಯಗಳನ್ನು ವೈಜ್ಞಾನಿಕವಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸಿ ಮುದ್ರಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಈ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕವನ್ನು ನಮ್ಮ ರಾಜ್ಯದಲ್ಲಿ ಜಾರಿಗೆ ತರಲು ಅನುಮತಿ, ಸಹಕಾರ ಹಾಗೂ ಮಾರ್ಗದರ್ಶನವನ್ನು ನೀಡಿದ ಎನ್.ಸಿ.ಇ.ಆರ್.ಟಿ ಸಂಸ್ಥೆ ನವದೆಹಲಿ ಹಾಗೂ ಆ ಸಂಸ್ಥೆಯ ಅಧಿಕಾರಿಗಳಿಗೂ ಇಲಾಖೆ ತನ್ನ ಹೃತ್ಪೂರ್ವಕ ಕೃತಜ್ಞತೆಗಳನ್ನು ಅರ್ಪಿಸುತ್ತದೆ.

ನರಸಿಂಹಯ್ಯ
ವ್ಯವಸ್ಥಾಪಕ ನಿರ್ದೇಶಕರು
ಕರ್ನಾಟಕ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ಸಂಘ
ಬೆಂಗಳೂರು – 85

© KTBS Not to be republished

Telugu Translation Committee

Sri. G. Ravindra Reddy Assistant Teacher, Government Telugu and Kannada Higher Primary School, OPH Road, Shivajinagar, Bengaluru - 01.

Smt. R.S UshaRani, Head Mistress, Government Telugu and Kannada Higher Primary School, Shivajinagar, Bengaluru - 01.

Smt. B. Sharmila Reddy, Assistant Teacher, Government Telugu Higher Primary School, Vivekanagar, Bengaluru - 047.

Smt. Jyothirmayi, Assistant Teacher, Government Telugu Higher Primary School, Yelahanka, Bengaluru - 064

Smt. Subhashini, Assistant Teacher, Government Telugu High School, Shivajinagar, Bengaluru.

Advice and Guidance

Sri. Narasimhaiah, Managing Director, Karnataka Textbook Society Bengaluru - 85

Smt C. Nagamani, Deputy Direcor, Karnataka Text Book Society, Bengaluru-85

Program Co-ordinators

Smt. Jayalakshmi Chikkanakote, Assistant director, Karnataka Text Book Society, Bengaluru - 560 085

©KTBS Not to be republished

విషయ సూచిక

భాగం – I

పుట సంఖ్య

1. సంఖ్యావ్యవస్థ **1 - 30**

1.1 పరిచయం 1

1.2 కరణీయ సంఖ్యలు 5

1.3 వాస్తవ సంఖ్యలు మరియు వాటి దశాంశ రూపాలు 9

1.4 వాస్తవసంఖ్యలను సంఖ్యారేఖపై క్రమానుగత వర్ధనం ద్వారా చూపించుండం 16

1.5 వాస్తవ సంఖ్యలపై పరిక్రమలు 20

1.6 వాస్తవ సంఖ్యలపై ఘాతాంక న్యాయాలు 26

1.7 సారాంశం 29

2. యూక్లిడ్ రేఖాగణిత పరిచయం **31 - 45**

2.1 పరిచయం 31

2.2 యూక్లిడ్ నిర్వచనాలు, స్వయం సిద్ధాలు, స్వీకృత సిద్ధాంతాలు 33

2.3. యూక్లిడ్ ఐదవ స్వీకృత సిద్ధాంతం యొక్క సమానమైన రూపాలు 41

2.4 సారాంశం 43

3. రేఖలు మరియు కోణాలు **46 - 69**

3.1 పరిచయం 46

3.2 మూల పదాలు మరియు నిర్వచనాలు 47

©KTBS
Not to be republished

3.3 ఖండించు రేఖలు మరియు ఖండించుకోని రేఖలు 49

3.4 కోణాల జతలు 50

3.5 సమాంతర రేఖలు మరియు తిర్యగ్రేఖ 56

3.6 ఒకే రేఖకు సమాంతరంగావున్న రేఖలు 60

3.7 త్రిభుజము యొక్క కోణాల మొత్తం ధర్మం 64

3.8 సారాంశం 68

4. బహుపదులు 70 - 97

4.1 పరిచయం 70

4.2. ఏక చరరాశిలో బహుపదులు 70

4.3 బహుపది శూన్య విలువలు. 75

4.4 శేష సిద్ధాంతం 79

4.5 బహుపది యొక్క కారణాంక విభజన 85

4.6 బీజగణిత సర్వసమీకరణాలు 89

4.7 సారాంశం 96

5. త్రిభుజాలు 98 - 125

5.1 పరిచయం 98

5.2 త్రిభుజాల సర్వసమానత్వం 98

5.3 త్రిభుజాల సర్వసమాన త్వానికి నియమాలు 101

5.4 త్రిభుజము యుక్క కొన్ని ధర్మములు 110

5.5 త్రిభుజాల సర్వసమానత్వానికి మరికొన్ని నియమాలు 155

©KTBS Not to be republished

5.6 త్రిభుజ అసమానత్వములు 119

5.7 సారాంశం 124

6. నిర్మాణాలు 126 - 135

6.1 పరిచయం 126

6.2 మౌళిక నిర్మాణాలు 127

6.3 కొన్ని త్రిభుజాల నిర్మాణాలు 130

6.4 సారాంశం 135

7. చతుర్భుజాలు 136 - 155

7.1 పరిచయం 136

7.2 చతుర్భుజ కోణాల మొత్తం లక్షణాలు 138

7.3 చతుర్భుజాలు – రకాలు 138

7.4 సమాంతర చతుర్భుజం లక్షణాలు 140

7.5 ఒక చతుర్భుజము సమాంతర చతుర్భుజం కావడానికి మరొక నియమము 147

7.6 మధ్య బిందువుల సిద్ధాంతం 151

7.7 సారాంశం 154

గణితంలో నిరూపణలు 156 - 177

జవాబులు / సూచనలు 178 - 188

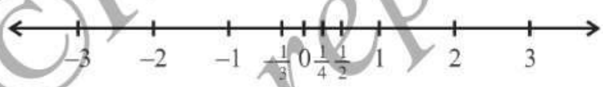
©KTBS Not to be republished

అధ్యాయం – 1

సంఖ్యా వ్యవస్థ

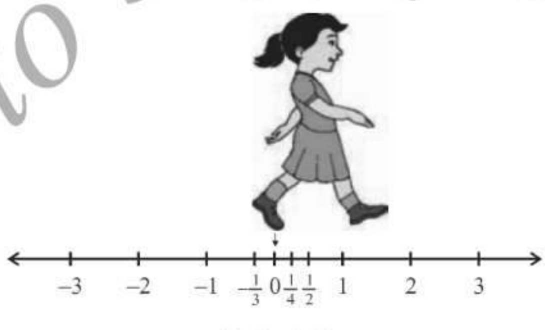
1.1 పరిచయం

వెనుకటితరగతులలోసంఖ్యా రేఖ గురించి మరియు సంఖ్యలను ఎలా రాసి ఉంటారో నేర్చుకున్నారు కదా! కావాలంటే, అవి ఎలా అమరి ఉంటాయో (పటం 1.1 ను చూద్దాం) నేర్చుకున్నారు.



చిత్రం 1.1 : సంఖ్యారేఖ

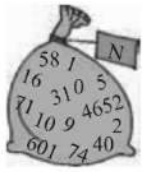
మీరు ఒక సారి ఊహించండి. సున్నా దగ్గర నుండి నడక మొదలుపెట్టి సంఖ్యారేఖపై ధన సంఖ్యల దిశవైపు ప్రయాణం చేస్తూ వెళితే మీరు అనేకమైన ధన సంఖ్యలను చూస్తారు కదా!



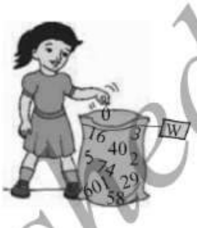
చిత్రం 1.2

ఒక వేళ మీరు సంఖ్యారేఖపై నడుస్తూ కొన్ని సంఖ్యలను సేకరించి, ఒక సంచిలో దింపాలి అనుకోండి!

©KTBS Not to be republished



మీరు ఇప్పుడు కేవలం సహజ సంఖ్యలను మాత్రం సేకరించండి ఉదా:- 1,2,3 మరియు ఇలా చేస్తూ వెళితే అనంత సంఖ్యల్లో ఉంటాయి (ఇది ఎందుకు నిజం) కాబట్టి గుర్తు చెనుకోండి ఒకసారి. సహజసంఖ్యలను 'N' అనే ఆంగ్ల అక్షరంతో సూచిస్తాం



ఇప్పుడు వెనుకకు తిరిగి నడవండి. సున్నను ఇప్పుడు ఆ సంఖ్యవున్న సంఖ్యలను అన్నింటిని కలిపి పూర్ణంకాలు (whole numbers) అంటారు దానిని 'W' అనే ఆంగ్ల అక్షరంతో చూపిస్తారు

అలాగే ముందుకు నడుస్తూ చూస్తే మనకు చాలా ఋణ సంఖ్యలు కనిపిస్తాయి వాటిని సేకరించి, సంచిలో వేయండి ఇప్పుడు మీరు సేకరించిన కొత్త సంఖ్యలను ఏమంటారు? ఒకసారి గుర్తుకు చేసుకోండి. వాటిని పూర్ణసంఖ్యలు (Integers) అంటారు. మరియు వాటిని ఆంగ్ల అక్షరం లోని 'Z' తో చూచిస్తారు.

ఇంకా కొన్ని సంఖ్యలను మనం సంఖ్యారేఖపై వదిలేసి ఉండటం గమనించవచ్చు ? ఒక వేళ! అవి $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ లేదా $-\frac{2005}{2006}$ ఒక వేళ మనం వీటిని కూడా సంచిలో దింపాలి అనుకోండి. అప్పుడు

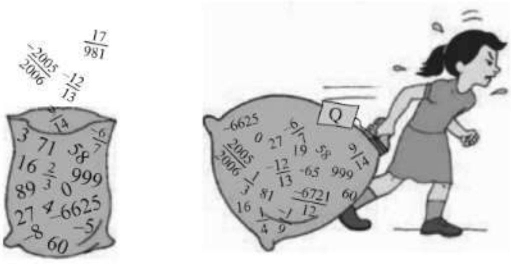
అ సంఖ్యా సమితిని కరణీయ సంఖ్యా సమితి అని అంటారు (Rational numbers)

మరియు ఆ సమితిని 'Q' అనే అక్షరంతో చూచిస్తారు ఒక్కసారి కరణీయ సంఖ్యలు అనే నిర్వచనాన్ని గుర్తు చేసుకోండి.

ఏదైనా సంఖ్య r కరణీయ సంఖ్య అయితే, వాటి రూపం $\frac{p}{q}$ ఇక్కడ p మరియు q లు పూర్ణాంకాలు అయితే మరియు $q \neq 0$ ($q \neq 0$ ఎందుకు?) అవుతుంది.

ఒక్కసారి గమనించండి సంచిలో ఉన్న అన్ని సంఖ్యలను $\frac{p}{q}$ రూపంలో వ్రాయగలమా. ఇక్కడ p, q లు పూర్ణాంకాలు మరియు $q \neq 0$

© KTBS Not to be republished



ఉదాహరణకు – 25 ను $-\frac{25}{1}$ గా రాస్తే ఇక్కడ $p=-25$ మరియు $q=1$.

(కాబట్టి కరణీయ సంఖ్యలు కూడా సహసంఖ్యా సమితిలో ఉంటాయి మరియు పూర్ణాంకాలు మరియు పూర్ణసంఖ్యలు కూడా ఉంటాయి.

మీకు ఇప్పటికే అర్థమై ఉంటుంది. కరణీయ సంఖ్యలు అంటే అవి $\frac{p}{q}$ రూపంలో ఉంటాయి అవి ఇక్కడ p మరియు q లు పూర్ణసంఖ్యలు మరియు $q \neq 0$

ఉదాహరణకు $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{10}{20}=\frac{25}{50}=\frac{47}{94}$ సరి అయిన కరణీయ సంఖ్యలు ఎలాగైనా. $\frac{p}{q}$ ఒక కరణీయ సంఖ్య అయితే లేదా $\frac{p}{q}$ సంఖ్యారేఖపై సంఖ్యఅయితే $q \neq 0$ మరియు p మరియు q లకు సమాన్య కారణాంకాలు లేకపోతే 1 తప్పా వేరె సామాన్యకారణాంకాలు లేకపోతే. (అంటే p మరియు q లు సహపూర్ణాంకాలు) అప్పుడు

సంఖ్యారేఖపై అనంతమైన భిన్నాలు సంఖ్యా రేఖమీద చూపునప్పుడు $\frac{1}{2}$ ఎంచుకోబడుతాయి.

ఇప్పుడు మీరు వెనుకటి తరగతులలో ఏం చదువుకున్నారో కొన్ని ఉదాహరణలను సాధిద్దాం

ఉదాహరణ 1 : కింది వాక్యాలు సత్యమా, అసత్యమా? సరైన సమాధానం రాయండి?

(i) ప్రతి పూర్ణసంఖ్య ఒక సహజ సంఖ్య.

(ii) ప్రతి పూర్ణాంకం ఒక కరణీయ సంఖ్య.

(iii) ప్రతి అకరణీయ సంఖ్య కూడా ఒక పూర్ణాంకం

సాధన:– (i) అసత్యం ఎందుకంటే సున్న అనేది పూర్ణసంఖ్య కాని సంఖ్యకాదు.

(ii) సత్యం ఎందుకంటే ప్రతి పూర్ణాంకం m' అయితే $\frac{m}{1}$ రూపంలో రాయవచ్చు మరియు ఇది ఒక అకరణీయ సంఖ్య

(iii) అసత్యం ఎందుకంటే $\frac{3}{5}$ అనేది పూర్ణాంకం కాదు.

©KTBS Not to be republished

ఉదాహరణ 2 : 1 మరియు 2 ల మధ్యగల కరణీయ సంఖ్యలను కనుక్కోండి కనీసం రెండు పద్ధతుల ద్వారా ఈ ప్రశ్నకు సమాధానం రాయండి.

సాధన : r మరియు s ల మధ్యగల అకరణీయ సంఖ్యలను ఎలా గుర్తిస్తారు ఒకసారి జ్ఞాపకం తెచ్చుకోండి r మరియు s ల ను కూడి వాటి మొత్తాన్ని 2తో భాగించాలి అంటే $\frac{r+s}{2}$ ఇది r మరియు s ల మధ్య ఉంది కాబట్టి $\frac{3}{2}$ అనేది ఒక సంఖ్య ఇది 1 మరియు 2 ల మధ్య ఉంటుంది.

ఈ పద్ధతిని అనుసరించి మీరు 1 మరియు 2 ల మధ్య అకరణీయ సంఖ్యలను కనుగొనవచ్చు వాటిలో ఈ నాలుగు సంఖ్యలు $\frac{5}{4}, \frac{11}{8}, \frac{13}{8}$ మరియు $\frac{7}{4}$.

సాధన 2 : వేరొక పద్ధతిని ఉపయోగించి ఒక్క సారిగా అన్ని ఐదు అకరణీయ సంఖ్యలను కనుగొనవచ్చు మనకు కావలసిన ఐదు సంఖ్యలను, 1 మరియు 2 లు అకరణీయ సంఖ్యలుగా హారం 5 + 1, అయితే $1=\frac{6}{6}$

మరియు $2=\frac{12}{6}$. ఇప్పుడు పరీక్షించండి $\frac{7}{6}, \frac{8}{6}, \frac{9}{6}, \frac{10}{6}$ మరియు $\frac{11}{6}$ అన్ని అకరణీయ సంఖ్యలు

ఇవి కేవలం 1 మరియు 2ల మధ్య గలవు

కావున ఆ ఐదు సంఖ్యలు కూడా $\frac{7}{6}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}$ మరియు $\frac{11}{6}$.

గమనించండి :- ఉదాహరణ 2 ను గమనించండి. 1 మరియు 2ల మధ్య ఉన్న అకరణీయ సంఖ్యలను గుర్తించండి. కాని 1 మరియు 2 ల మధ్య అనంతమైన అకరణీయ సంఖ్యలు ఉన్నాయి సాధారణంగా ఏ రెండు అకరణీయ సంఖ్యల మధ్యనైనా అనంతమైన సంఖ్యలో అకరణీయ సంఖ్యలు వ్యవస్థితమవుతాయి అని చెప్పవచ్చు.

మళ్ళీ ఒకసారి సంఖ్యారేఖను పరిశీలిస్తే, సంఖ్యా రేఖపై ఉన్న అన్ని అంకెలను మనం తీసి సంచిలో వేశామా? లేదు. ఇక్కడ నిజం ఏమిటంటే అనంత సంఖ్యలో సంఖ్యారేఖపై ఉన్న సంఖ్యలను వదిలేశాం కదా! రెండు సంఖ్యల మధ్యగల ఖాళీలలో ఉన్న చాలా సంఖ్యలను తీసుకునే ప్రయత్నం చేయండి. కేవలం 1 లేదా 2 కాదు అనంత సంఖ్యలో ఉన్నవి ఆశ్చర్యకర విషయం ఏమిటంటే ఏరెండు సంఖ్యల మధ్య ఉన్న సంఖ్యలను చూసినా, అవి అనంత సంఖ్యలో సంఖ్యలను కలిగి వున్నాయి. కాబట్టి క్రింద ప్రశ్నలను మనం వదిలేశాం :

©KTBS Not to be republished

1. సంఖ్యారేఖపై మనం వదిలేసిన సంఖ్యలు ఏవి, వాటిని ఏమని పిలుస్తాం?
2. వాటిని గుర్తించడం ఎలా? అవి అకరణీయ సంఖ్యలా అని ఎలా విభజించి చెప్పగలం?

ఈ ప్రశ్నలన్నింటికి సమాధానాలను తరువాతి అధ్యాయం లో తెలుసుకుంటారు.

అభ్యాసం 1.1

1. సున్న అనునది అకరణీయ సంఖ్యనా? $\frac{p}{q}$ రూపంలో రాయగలమా, ఇక్కడ (p మరియు q లు పూర్ణాంకాలు మరియు $q \neq 0$?

2. 3 మరియు 4 మధ్యగల ఐదు అకరణీయ సంఖ్యలను గుర్తించండి.

3. $\frac{3}{5}$ మరియు $\frac{4}{5}$ ల మధ్యగల ఐదు అకరణీయ సంఖ్యలను గుర్తించండి.

4. అయితే క్రింది వాక్యాలు సత్యమా లేదా అసత్యమా మీ మాటలో సమాధానాలు మరియు కారణాలు చెప్పండి?.

(i) ప్రతి సహజసంఖ్య కూడా ఒక పూర్ణసంఖ్య.

(ii) ప్రతి పూర్ణాంకం సంఖ్య ఒక పూర్ణసంఖ్య.

(iii) ప్రతి అకరణీయ సంఖ్య ఒక పూర్ణసంఖ్య.

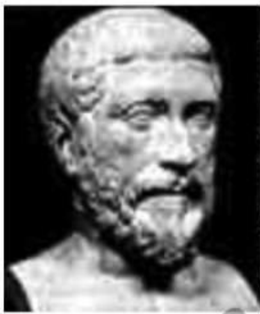
1.2 కరణీయ సంఖ్యలు

మరోసారి సంఖ్యారేఖను గుర్తుకు తెచ్చుకుందాం. సంఖ్యారేఖపై చూచించబడని సంఖ్యలు ఇంకా చాలా ఉన్నాయి. ఇప్పుడు ఆ సంఖ్యలు ఏవో ఈ భాగంలో మనం చూద్దాం. $\frac{p}{q}$ రూపంలో రాసిన ఇక్కడ (p, మరియు q లు పూర్ణాంకాలు మరియు $q \neq 0$ కావున ఏ సంఖ్య లైతే మనం ఈ రూపం రాయలేమో? ఆ సంఖ్యలను సాధారణంగా కరణీయ సంఖ్యలు అని వ్యవహరిస్తాం వాటిని $\frac{p}{q}$ రాయలేము ఇక్కడ. p మరియు లు పూర్ణాంకాలు మరియు మనకు ముందే తెలుసు కదా. ఇక్కడ అనంత సంఖ్యల అకరణీయ సంఖ్యలు ఉంటాయని వాటిని బయటికి తీసి రాసిన అనంతసంఖ్యలో కరణీయ సంఖ్యలు ఉంటాయి. ఉదాహరణకు

$$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{15}, \pi, 0.10110111011110.......$$

©KTBS Not to be republished

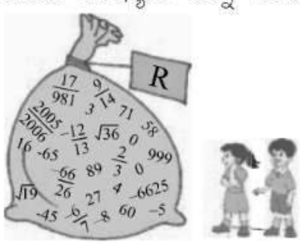
గ్రీసు దేశంలోని పైథాగొరియన్‌లు చాలామంది గొప్పగణితశాస్త్రవేత్త మరియు తత్వవేత్త అయినటువంటి పైథాగరస్‌కు అనుచరులు ఉన్నారు ఈయన క్రీ. పూ. 400 లలో అన్ని సంఖ్యలను కనుగొని, వాటిని అవి అకరణీయసంఖ్యలు కావు అని మాత్రం చెప్పారు. తర్వాత కాలంలో ఈ సంఖ్యలనే కరణీయసంఖ్యలు అని పిలుస్తున్నాం. కాని వాటిని కరణీయ సంఖ్యలరూపం, భిన్న రూపంలో రాయడం వారికి తెలియదు. పైథాగొరియన్‌లలో చాలామంది ఈ కరణీయసంఖ్యను ఒక కల్పిత సంఖ్యగా, పైథాగరియస్‌లలో ఒకరైన హిప్పోస్ కనుగొన్నారు అన్ని కల్పిత సంఖ్యలపై హిప్పొక్రొటస్ సరైన ముగింపును ఇవ్వలేదు. $\sqrt{2}$ అనేది కనుగొని కరణీయ సంఖ్య అని చెప్పారు లేదా $\sqrt{2}$ ను తర్వాతికాలంలో వీరు కరణీయసంఖ్యల గుట్టును కనుగొనడం జరిగింది.



పైథాగరస్
(క్రి.పూ 569 క్రి.పూ 479)
చిత్రం 1.3

గమనించండి : ఒకసారి గుర్తుచేసుకోండి . $\sqrt{\ }$ ఈ గుర్తును ఎప్పుడు వాడతాం, ఒకవేళ ఇది ఒక ధన సంఖ్యయొక్క వర్గమూలం అనుకుంటే. అయితే $\sqrt{4} = 2$ అయినట్లైతే 2 మరియు 2 లుకూడా 4 యొక్క వర్గమూలాలు.

$\sqrt{2}$ ఒక కరణీయ సంఖ్య అని పైథాగొరియన్‌లు నిరూపించారు తర్వాత సిరీస్‌కు చెందిన థియోడరస్ క్రీ .శ. 425 లో $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{10}, \sqrt{11}, \sqrt{12}, \sqrt{13}, \sqrt{14}, \sqrt{15}$ మరియు $\sqrt{17}$ లు కూడా కరణీయ సంఖ్యలు అని నిరూపించాడు $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$........ మొదలైన కరణీయసంఖ్యల యొక్క నిరూపణలు గురించి మీరు 10వ తరగతిలో చదువు కుంటారు అలాగే. π గురించి చాలా వేల సంవత్సరాల నుంచి ఇది ఒక కరణీయ సంఖ్య అని నిరూపించారు లాంబర్ట్ మరియు లెజెండ్రె 17 వశతాబ్దంలో కరణీయ సంఖ్యలు సాధించారు. తర్వాత మనం 0.10110111011110....... మరియు π గురించి చర్చించాలి. మళ్ళీ మనకు కొన్ని ప్రశ్నలు ఉత్పన్నం అవుతున్నాయి. కావున వెనుకటి అధ్యాయంలోకి వెళ్దాం అకరణీయ సంఖ్యలు ఉన్న సంచిని ఒకసారి గుర్తుకుతెచ్చుకోండి ఒకవేళ ఆసంచిలో ఉన్న కరణీయసంఖ్యలను ఉంచాం అనుకోండి. సంఖ్యారేఖపై ఇంకా ఏదైనా సంఖ్య మిగిలిపోయి ఉంటుందా? లేదు! కాబట్టి ఆ సంచిలో ఉన్న లేదా సేకరించిన అకరణీయ సంఖ్యలు మరియు కరణీయ సంఖ్యలను కలిపి వాస్తవ సంఖ్యలు (Real numbers)



©KTBS Not to be republished

అంటారు దానిని R తో సూచిస్తాం, కాబట్టి వాస్తవసంఖ్య అనేది అకరణీయ సంఖ్య అయినా కావచ్చు లేదా కరణీయ సంఖ్య అయినా కావచ్చు. కావున ప్రతి వాస్తవ సంఖ్యను మనం ఖచ్చితంగా ఒక బిందువు దగ్గర సంఖ్యారేఖపై గుర్తించవచ్చును. మరి ఎందుకు సంఖ్యారేఖ అని పిలుస్తున్నాం? వాస్తవ సంఖ్యారేఖ అని పిలవవచ్చుకదా!

ఆర్. డెడెకైండ్
(1831-1916)
చిత్రం: 1.4

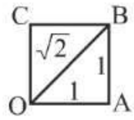
1870 సం॥ లో ఇద్దరు జర్మన్ గణిత శాస్త్రవేత్తలు. కాంటర్ మరియు డెడెకైండ్ సంఖ్యారేఖపైన ఉండే ప్రతి బిందువు ఏకైక వాస్తవసంఖ్యను సూచిస్తుంది ఆదేవిధంగా సంఖ్యారేఖపై ఏ వాస్తవసంఖ్యలోనైనా సూచించే బిందువు ఏకైకంగా ఉంటుంది అని వీరు చూపించారు.

జి. కాంటర్
(1845-1918)
చిత్రం : 1.5

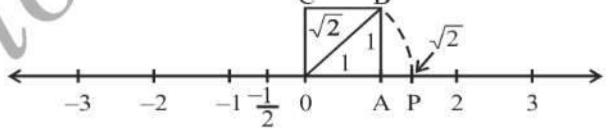
ఇప్పుడు మనం కొన్ని కరణీయ సంఖ్యలు సంఖ్యారేఖపై ఎక్కడ ఉన్నాయో చూద్దాం:

ఉదాహరణ 3 : $\sqrt{2}$ ను సంఖ్యారేఖపై సూచించండి.

సాధన : ఒక యూనిట్ భుజముగాగల చతురస్రం OABC ని సంఖ్యారేఖపై 'O' వద్ద గీయండి. పైథాగరస్ సిద్ధాంతం, ప్రకారం OB = $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ $\sqrt{2}$ ను సంఖ్యారేఖపై ఎక్కడ సూచించాలి? (చిత్రం 1.6 ను నుండి) OB = $\sqrt{2}$ అని మనకు తెలుసు ఒక వృత్తలేఖిని ఉపయోగించండి. (చిత్రం 1.7ను గమనించండి)



చిత్రం 1.6



చిత్రం 1.7

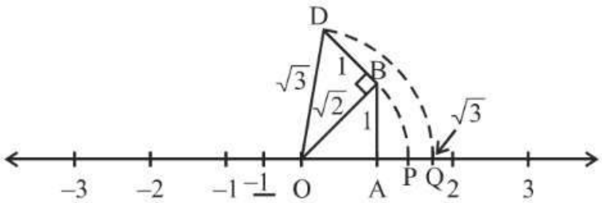
OB = $\sqrt{2}$ అని ఇదివరకే తెలుసుకున్నాం.

'O' కేంద్రంగా OB వ్యాసార్ధంలో సంఖ్యారేఖపై కుడివైపున 'P' వద్ద ఖండించునట్లుగా ఒక చాపాన్ని గీయండి. 'P' అనునది సంఖ్యారేఖపై $\sqrt{2}$ ను సూచిస్తుంది.

©KTBS Not to be republished

ఉదాహరణ 4 : $\sqrt{3}$ ను సంఖ్యారేఖపై సూచించండి

సాధన : చిత్రం 1.7 ను పరిశీలించండి.



చిత్రం 1.8

చిత్రం 1.8 లో చూపిన విధంగా 1 యూనిట్ ప్రమాణంలో BD ని OB కి లంబంగా ఉండేవిధంగా గీయండి O,D లను కలపండి.

పైథాగరస్ సిద్ధాంతం ప్రకారం $OD = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 1^2} = \sqrt{3}$, ఒక వృత్తలేఖినిని ఉపయోగించి 'O' కేంద్రంగా OD వ్యాసార్ధంలో సంఖ్యా రేఖపై Q' కు కుడివైపున Q' వద్ద ఖండించునట్లు ఒక చాపాన్ని గీయండి అది సంఖ్యారేఖపై $\sqrt{3}$ ను సూచిస్తుంది.

ఇదే విధంగా ఏదైనా ధన పూర్ణసంఖ్య ను n కు $\sqrt{n-1}$ ను సంఖ్యారేఖపై సూచించిన తరువాత $\sqrt{n}$ ను సూచించవచ్చు.

అభ్యాసం 1.2

1. ఈ క్రింద వాక్యాలను పరిశీలించి సత్యమా లేదా అసత్యమా చెప్పండి సరైన సమాధానం రాయండి.

(i) ప్రతి కరణీయ సంఖ్య ఒక వాస్తవసంఖ్య అవుతుంది.

(ii) సంఖ్యారేఖపై ప్రతి బిందువు వద్ద వున్న సంఖ్యా రూపం $\sqrt{m}$ ఇక్కడ 'm' ఒక వాస్తవసంఖ్య

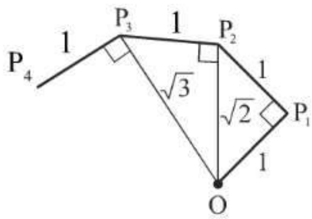
(iii) ప్రతి వాస్తవ సంఖ్య ఒక అకరణీయ సంఖ్య అగును.

2. అన్ని ధన అకరణీయ సంఖ్యల యొక్క వర్గమూలాలు కరణీయసంఖ్యలా? ఒకవేళ అలా కాకపోతే ఒక ఉదాహరణలో ఒక సంఖ్య యొక్క వర్గమూలం అకరణీయ సంఖ్య అని చూపండి.

© KTBS Not to be republished

3. $\sqrt{5}$ ను సంఖ్యారేఖపై ఎలా గుర్తిస్తారు?.

4. తరగతిలో చేయాల్సిన కృత్యం ('వర్గమూల సర్పలం' నిర్మించుట.) వర్గమూల సర్పలాన్ని నిర్మించుటకు పెద్దసైజు కాగితాన్నితీసుకొని కింద సూచించిన సోపానాలు అనుసరించండి.



చిత్రం 1.9

వర్గమూల సర్పలం నిర్మాణం

'O' బిందువు నుంచి ప్రారంభించి 1 సెం. మీ. పొడవుగల రేఖాఖండం OP మని గీయండి. OP కి లాబంగా 1 సెం.మీ. పొడవులో PP_1 నుగీయండి (ఇక్కడ $OP=PP_1=1$ 1 సెం మీ) O,P లను కలవండి ($OP_1=P_1P_2=1$ సెం. మీ) పొడవులో OP_1కు లంబంగా రేఖాఖండాన్ని గీయండి. O_1P_2 లను కలవండి. సెం. మీ పొడవు కు లంబంగా P_2P_3 రేఖాఖండాన్ని గీయండి. ఇదే పద్ధతిలో మరికొన్ని విధానలు కొనసాగించండి అప్పుడు $P_{n-1}P_n$ రేఖాఖండాలు OP_{n-1} యూనిట్ లో వున్న లంబాలు ఏర్పడును ఇదే విధంగా కొనసాగిస్తే P_2P_3..... P_n బిందువు ల వద్ద ఒక అందమైన సర్పలాకారం ఏర్పడుటను చూడవచ్చు ఇక్కడ $\overline{OP}, \overline{OP_1}, \overline{OP_2}, \overline{OP_3}$..... లు వరుసగా $(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5})$ .... సూచిస్తాయి.

1.3 వాస్తవ సంఖ్యలు మరియు వాటి దశాంశ విస్తరణ

ఈ భాగంలో, మనం వాస్తవ సంఖ్యలు మరియు కరణీయ సంఖ్యల వివిధ రూపాలు గమనిస్తాం. వాస్తవ సంఖ్యల యొక్క వివిధ దశాంశరూపాల విస్తరణ గురించి చూస్తాం మరియు వాస్తవసంఖ్యల మరియు కరణీయ సంఖ్యల మధ్య ఉన్న ఈ విస్తరణారూపాల మధ్య తేడాలు గమనిస్తాం అంతేకాకుండా మనం వాస్తవసంఖ్యల దశాంశరూపాలను సంఖ్యారేఖపై ఎలా గుర్తిస్తాం అనేదికూడా గమనిద్దాం. భిన్నాలు మన నిత్య జీవితానికి దగ్గరగా ఉంటాయి ఈ క్రింద 3 ఉదాహరణల ద్వారా వాటిని గమద్దాం $\frac{10}{3}, \frac{7}{8}, \frac{1}{7}$

జాగ్రత్తగా పై భాగహారాలలో శేషాలను గమనించండి.

©KTBS Not to be republished

ఉదాహరణ 5 : $\frac{10}{3}, \frac{7}{8}$ మరియు $\frac{1}{7}$ ల యొక్క దశాంశ విస్తరణలను రాయండి.

సాధన :

$10 \div 3$	$7 \div 8$	$1 \div 7$
3.333...	0.875	0.142857...
3) 10	8) 7.0	7) 1.0
9	64	7
10	60	30
9	56	28
10	40	20
9	40	14
10	0	60
9		56
1		40
		35
		50
		49
		1

శేషాలు 1, 1, 1, 1, 1.... శేషాలు: 6, 4, 0 శేషాలు 3, 2, 6, 4, 5,1,3, 2, 6, 4, 5, 1..........

విభాజకం : 3 విభాజకం : 8 విభాజకం : 7

ఏమి గమనించారు? మిరు ఇక్కడ కనీసం మూడు విషయాలు గమనించి, ఉండాలి:

(i) ఒకానొక దశలో శేషాలు '0' అయివుంటాయి. లేదా తిరిగి అదేశేషం పునరావర్తనం కావడం ప్రారంభమవుతుంది.

(ii) అనేక సార్లు పునరావృతమైన శేషాలు విభాజకం విలువకంటే తక్కువగా ఉన్నాయి. ($\frac{1}{3}$ ఒకటి అనే అంకె అనేక సార్లు పునరావృతం కాగా, అందులో విభాజకం 3, $\frac{1}{7}$ లో ఆరు సార్లు శేషాలు 326451 లు పునావృత అవుతాయి కాని ఇందులో భాజకం 7

(iii) శేషం ఒకవేళ పునరావృతం అయితే, భాగఫలంలో మనకు ఒకే అంకె పునరావృత్తం వస్తుంది. ($\frac{1}{3}$ 3 లో లెక్కించి చూడండి మరియు $\frac{1}{7}$ లో 142857 అనేవి భాగఫలంలో పునరావృతంగా వస్తాయి.

©KTBS Not to be republished

పైన గమనించిన ఉదాహరణలన్నీ కూడా $\frac{p}{q}$ $(q \neq 0)$ రూపం లో ఉన్న అకరణీయ సంఖ్యలకు ఉదాహరణలు. $\frac{p}{q}$ భాగహారంలో రెండు ముఖ్య మైన విషయాలను గమనించుకోవాలి శేషం

గనుక సున్న అవుతుంది. సున్న కాకపోతే. మనకు వివిధరకాల పునరావృతం అయ్యేశేషాలు వస్తాయి ప్రతి సందర్భాన్ని ఇప్పుడు గమనిద్దాం.

సందర్భం (i) : శేషం సున్న అయి వుంటుంది.

ఉదాహరణకు $\frac{7}{8}$ లో మనకు శేషం సున్నరావడం మనం గమనించాం కొన్ని దశల తర్వాత మరియు దశాంశ విస్తరణలో $\frac{7}{8} = 0.875$ మరికొన్ని ఉదాహరణలో $\frac{1}{2} = 0.5; \frac{639}{250} = 2.556$ ఈ అన్ని సందర్భాలలో దశాంశం తర్వాత ఉన్న విలువను వదిలివేస్తాం. లేదా అనంత సంకెలతో ఆ దశాంశంలో రాస్తాం. అందుకోసం మనం దశాంశ విస్తరణలో దశాంశం తర్వాత ఉన్న అంకెలను తొలగించి రాస్తాం.

సందర్భం (ii) : శేషం సున్న అయివుండదు.

ఉదాహరణలు $\frac{1}{3}$ మరియు $\frac{1}{7}$ లో శేషాలు అనేవి పునరావృతంగా రావడం మరియు ఒకదశలో దశాంశ విస్తరణ రూపంలో రావడం గమనించాం మరోలా చెప్పాలంటే విభాజకంలో కొన్ని అంకెల శ్రేణులు పునరావృతం అవుతాయి. దశాంశం తర్వాత. ఈ విధమైన దశాంశ శ్రేణిని ఆంతంకాని ఆవర్తిత దశాంశశ్రేణి అని అంటాం ఉదాహరణకు $\frac{1}{3} = 0.3333$.......మరియు $\frac{1}{7} = 0.142857142857142857$......

సాధారణంగా మనం మూడు సార్లు ఒకే అంకె విభాజకలో పునరావృతం అయితే, దానిని $\frac{1}{3}$ యొక్క విభాజకాలను $0.\bar{3}$ అని రాస్తాం

అదేవిధంగా భాగఫలంలో కొన్ని అంకెల గుంపు పునరావృతం అయితే, $\frac{1}{7}$లో భాజకం విలువ 142857 ను $\frac{1}{7}$ కు $0.\overline{142857}$ అని రాస్తాం, బార్ (–) కింద దన్ని అంకెల సమూహం అని బార్ సూచిస్తుంది అలాగే 3.57272........ రు $3.5\overline{72}$ గా రాస్తాం. ఈ ఉదాహరణలన్నీ కూడా

©KTBS Not to be republished

అంతంకాని ఆవర్తిత దశాంత సంఖ్యలకు ఉదహరణగా చెప్పవచ్చు. కాబట్టి దశాంశ విస్తరణలో వాస్తవసంఖ్యలకు ముఖ్యంగా రెండురకాల రూపాలు ఉంటాయి. అవి ఒకటి అంతమయ్యే దశాంశం లేదా అంతంకాని ఆవర్తిత దశాంశం.

ఇప్పుడు ఒకవేళ సంఖ్యారేఖపై మరొక చేతి వైపు నడుచుకుంటూ వెళితే. 3.142678 అనేది దశాంశ విస్తరణలో ఇది అంతం అయ్యే దశాంశమా లేదా అంతంకాని ఆవర్తిత దశాంశమా: అయితే ఇది అకరణీయ సంఖ్యానా? సమాధానం అవును!

దీనిని మనం నిరూపించం కాని కొన్ని ఉదాహరణల ద్వారా వివరిస్తాం అంతమయ్యే దశాంశం చాలా సులభం.

ఉదాహరణ 6 : 3.142678 అనేది ఒక అకరణీయ సంఖ్య అని చూపండి? లేదా 3.142678 ని $\frac{p}{q}$ రూపంలో రాసి p మరియు q లు పూర్ణాంకాలు అయిన $q \neq 0$ అని చూపండి.

సాధన : $3.142678 = \frac{3142678}{1000000}$. మరియు ఇది అకరణీయ సంఖ్య

ఇప్పుడు సందర్భం (ii) లో చెప్పిన విధంగా అంతంకాని ఆవర్తితం.

ఉదాహరణ 7: $0.3333..... = 0.\bar{3}$ అని చూపండి $\frac{p}{q}$ రూపంలో వ్యక్తపరచుతుంది ఇక్కడ p మరియు q లు అకరణీయసంఖ్యలు మరియు $q \neq 0$.

సాధన: $0.\bar{3}$ ని x అని అనుకుంటే.

$$x = 0.3333...$$

$$10 = 10 \times (0.333...) = 3.333.....$$

ఇప్పుడు $3.3333..... = 3 + x$ ($\because x = 0.3333.........$నుండి

కాబట్టి $\therefore 10x = 3 + x$ సాధించిన x విలువ వస్తుంది

$$9x = 3$$

$$x = \frac{1}{3}$$

ఉదాహరణ 8 : 1.272727........ = $1.\overline{27}$; అని చూపండి దీనిని $\frac{p}{q}$ రూపం లో వ్యక్తపరచిన

ఇక్కడ p మరియు q లు పూర్ణాంకాలు మరియు $q \neq 0$

సాధన : $x = 1.272727......$ అనుకొనిన, దీనినుండి రెండు స్థానాలు పునరావృతం అవుతున్నాయి. కావున x ను 100 లో గుణించాలి.

©KTBS Not to be republished

$$100 \times x = 100 \times (1.272727..........)$$
$$100\,x = 127.2727......$$
$$100\,x = 126 + 1.2727........$$

కావున $100\,x = 126 + x \; (\because x = 1.272727 ....)$

$\therefore \quad 100\,x - x = 126$

కాబట్టి $99\,x = 126$

$$x = \frac{126}{99} = \frac{14}{11}$$

భాగహారంచేయగా $\frac{14}{11} = 1.\overline{27}$

ఉదాహరణ 9 : 0.2353535 = $0.2\overline{35}$ అని చూపండి దానిని $\frac{p}{q}$ రూపంలో వ్యక్త పరచిన ఇక్కడ p మరియు q లు పూర్ణాంకాలు $q \neq 0$ అగును.

సాధన : $x = 0.2\overline{35}$ కావున 2 ఇక్కడ పునరావృతం కాలేదు కావున గమనించండి కాని బార్ లో 35 లు పునరావృతం. అయ్యాయి. రెండు స్థానాలు పునరావృతం అయ్యాయి.

కావున x ని 100 లో గుణకారం చెయ్యాలి

$$100\,x = 23.53535.....$$
$$100\,x = 23.3 + 0.23535.......... = 23.3 + x$$
$$\therefore \quad 99\,x = 23.3$$
$$99\,x = \frac{233}{10}$$
$$x = \frac{233}{990}$$

సరిచూడగా $\frac{233}{990} = 0.2\overline{35}$

కావున ప్రతి సంఖ్య కూడా అంతంకాని ఆవర్తిత దశాంశాన్ని చూపిస్తుంది. $\frac{p}{q}$ రూపంలో $q \neq 0$ ఇక్కడ p మరియు q లు అకరణీయ సంఖ్యలు మన సమాధానాలను క్రింది రూపంలో సేకరించారు దశాంశ విస్తరణ రూపంలో అకరణీయ సంఖ్యలు అంతమయ్యే దశాంశాలూ అవుతాయి అంతేకాకుండా ఏ సంఖ్య అయితే దశాంశరూపంలో అంతం లేదా అంతంకాని ఆవర్తిత దశాంశం అవుతుందో అది అకరణీయ సంఖ్య.

©KTBS Not to be republished

కావున ఇప్పుడు మనకు అకరణీయ సంఖ్యల దశాంశరూపంతెలుసు. మరి కరణీయ సంఖ్యల దశాంశ రూపం ఏంటి?

అంతం మరియు అంతంకాని ఆవర్తిత దశాంశ మాన ప్రధానం ఇది అకరణీయ సంఖ్యల దశాంశ రూపం విస్తరణను పరిశీలించాం, అలాగే కరణీయ సంఖ్యలకుకూడా అకరణీయ సంఖ్యల ప్రాధాన్యత ఇవ్వాలి

కరణీయ సంఖ్యలు దశాంశ విస్తరణరూపంలో కరణీయసంఖ్యలు అంతమయ్యే దశాంశం లేదా అంతంకాని ఆవర్థిత దశాంశం అవుతాయో ఏ సంఖ్య అయితే అంతం అయ్యే దశాంశ మానం లేదా అంతంకాని ఆవర్తిత దశాంశం అవుతుందో అది కరణీయ సంఖ్య గుర్తుపేసుకోండి S = 0.10110111011110........... ముందుభాగంలో రాశాం. ఇది అంతం అయ్యే సంఖ్యనా. అంతం కాని ఆవర్తిత సంఖ్యనా. పైలక్షణాలను బట్టి ఇది ఒక కరణీయ సంఖ్య అనంతసంఖ్యలో కరణీయ సంఖ్యలు S కు ఉద్భవిస్తున్నాయి.

కావున $\sqrt{2}$ మరియు π కు కరణీయ సంఖ్యల రాయండి? ఇక్కడ దశాంశ విస్తరణ రూపం ఒక దశవరకు మాత్రమే గుర్తిస్తాం.

$\sqrt{2}$ = 1.4142135623730950488016887242096.........

π = 3.14159265358979323846264338327950............

(**గమనిక :** $\frac{22}{7}$ యొక్క విలువ దాదాపుగా π విలువకు సమానం కాని $\pi \neq \frac{22}{7}$) తరువాత

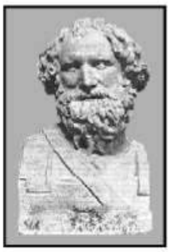
కాలంలో గణిత శాస్త్రంలో కరణీయ సంఖ్యలపైన వివిధరకాలైన టెక్నిక్‌ల ద్వారా దశాంశ రూపంలో విస్తరించి రాయడం మొదలు పెట్టారు. ఉదాహరణకు $\sqrt{2}$ భాగహారపద్ధతిని ఉపయోగించి, దశాంశ రూపంలో రాయడం. ఆసక్తికర విషయం ఏమిటంటే సులభసూత్రాలు గణిత వేదిక్ శాస్త్రంలో (క్రీ.పూ.800 – క్రీ.పూ 500) ను $\sqrt{2}$ విలువను ఈ క్రింది విధంగా సూచించారు.

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{34} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{3}\right) = 1.4142156$$

గమనించాల్సిన విషయం ఏమిటంటే పైవాటిలో ఏవైనా మొదటి 5 దశాంశ స్థానాలు ఒక్కటే చరిత్రలో π విలువను కనుగొనడానికి వేసిన ప్రయోగాలు చాలా ఆసక్తి కలిగివున్నవి.

©KTBS Not to be republished

π విలువను గుణించటంలో మేధాని గ్రీక్‌కు చెందిన ఆర్కిమిడీస్. దీనివిలువ సుమారుగా 3.140845 మరియు 3.142857 ల మధ్య ఉంటుంది $(3.140845 < \pi < 3.142857)$ అని అతడు నిరూపించాడు π విలువను నాలుగవ దశాంశ స్థానం వరకు కనుగొన్న భారతీయ గణిత శాస్త్రవేత్త ఆర్యభట్టు(476 – 550 (క్రీ.శ.) ప్రస్తుతం అత్యంత వేగం గా పనిచేసే కంప్యూటర్లను ఉపయోగించి π విలువను 1.24 ట్రిలియన్ దశాంశ స్థానాల వరకు కనుగొన్నారు. (1 ట్రిలియన్ = 1000000000000)



ఆర్కిమిడీస్
క్రీ.పూ 287 క్రీ.పూ. 212
చిత్రం 1.10

ఇప్పుడు కరణీయ సంఖ్యలను పొందడం ఎలాగో చూద్దాం.

ఉదాహరణ 10 : $\frac{1}{7}$ మరియు $\frac{2}{7}$ ల మధ్యగల కరణీయ సంఖ్యలను కనుగొనండి.

సాధన: $\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$ అంటాం కావున $\frac{2}{7} = 0.\overline{285714}$ అని సులభంగా లెక్కించవచ్చు. $\frac{1}{7}$ మరియు $\frac{2}{7}$ ల మధ్యగల కరణీయసంఖ్యలను గుర్తించగా, అంతమయ్యే మరియు అంతంకాని ఆవర్తిత కరణీయ సంఖ్యలో అనంత సంఖ్యలో ఉంటాయి. ఉదాహరణకు 0.150150015000150000.................

అభ్యాసం 1.3

1. క్రింది వాటిని దశాంశ రూపంలో రాయండి మరి అవి ఏ రకమైన దశాంశ రూపాలో తెలియచేయండి.

   (i) $\frac{36}{100}$ (ii) $\frac{1}{11}$ (iii) $4\frac{1}{8}$

   (iv) $\frac{3}{13}$ (v) $\frac{2}{11}$ (vi) $\frac{329}{400}$

2. $\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$ అయిన $\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7}$ ల దశాంశ రూపాలు రాయండి. భాగహార పద్ధతిని ఉపయోగించకుండా చేయండి? అది ఎలా? (సూచన: $\frac{1}{7}$ లో శేషాలను జాగ్రత్తగా గమనించండి)

3. ఈ క్రిందివాటిని $\frac{p}{q}$ రూపంలో రాయండి. ఇక్కడ p మరియు q లు పూర్ణాంకాలు మరియు $q \neq 0$.

   (i) $0.\overline{6}$ (ii) $0.4\overline{7}$ (iii) $0.\overline{001}$

©KTBS Not to be republished

4. 0.99999...... $\frac{p}{q}$ రూపంలో రాయండి. జవాబును చూసి, మీరు ఆశ్చర్యపోయారా? మీ తరగతి ఉపాధ్యాయునితోనూ మి స్నేహితులతోనూ దీని గురించి చర్చించి, చూడండి.

5. $\frac{1}{17}$ ను దశాంశ విస్తరణ రూపంలో రాయగా, ఎన్ని స్థానాలు పునరావృతం అవుతాయి? గమనించి సమాధానం రాయండి.

6. అకరణీయ సంఖ్యలలో చాలా ఉదాహరణలను $\frac{p}{q}$ రూపంలో రాసిన $(q \neq 0)$, ఇక్కడ p మరియు $-q$' లు పూర్ణాంకాలు ఆయిన వాటికి 1తప్ప మీరే ఇతర ఉమ్మడి కారణాంకాలు లేకపోతే అటువంటివాటికి అంతం ఇక్కడ q విలువ ఏది ఆయితే ఇది సత్యం అవుతుంది చూడండి?

7. ఏ మూడు సంఖ్యలు దశాంశ విస్తరణ రూపంలో రాయగా అంతంకాని ఆవర్తితం కాని దశాంశం అగునో, వాటిని రాయండి?

8. $\frac{5}{7}$ మరియు $\frac{9}{11}$ మరియు అకరణీయ సంఖ్యల మధ్యగల 3 వేర్వేరు కరణీయ సంఖ్యలను రాయండి.

9. ఈ క్రింద ఇవ్వబడిన సంఖ్యలు అకరణీయసంఖ్యలు లేదా కరణీయ సంఖ్యలు అగునో చెప్పండి.

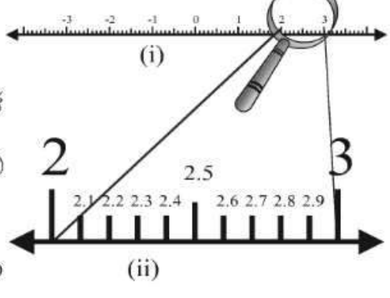
(i) $\sqrt{23}$ (ii) $\sqrt{225}$ (iii) 0.3796

(iv) 7.478478..... (v) 1.101001000100001....

1.4 వాస్తవసంఖ్యలను సంఖ్యారేఖపై క్రమాను గత వర్ధనం ద్వారా చూపించుచడం.

ప్రతి వాస్తవ సంఖ్యను దశాంశ రూపంలో వ్యక్తపరచవచ్చని మనం గతంలో తెలుసుకున్నాం.

ఇప్పుడు మనం సంఖ్యారేఖపై అంతమయ్యే దశాంశ క్రమానుగత వర్ధన పద్ధతిలో ఎలా చూపించవచ్చో తెలుసుకుందాం.



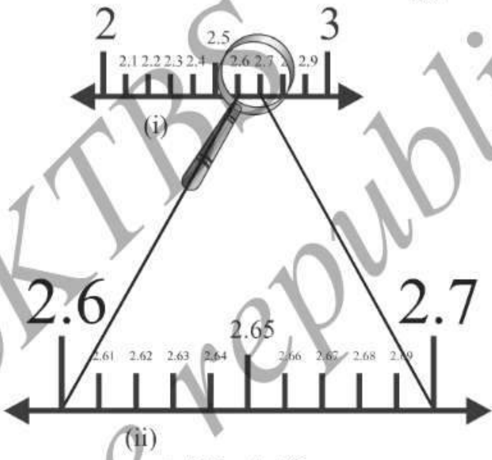
చిత్రం 1.11

ఉదాహరణకు 2.665 ను సంఖ్యారేఖపై సూచిద్దాం ఈ దశాంశ 2,3 ల మధ్య ఉంటుంది. మరియు ఇది అంతమయ్యే దశాంశము మనకు తెలుసు.

©KTBS Not to be republished

మన చేతిలో భూతద్దం ఉంది అనుకోండి. భూతద్దాన్ని ఉపయోగించి సంఖ్యారేఖపై 2 మరియు 3 ల మధ్య ప్రాంతంలోని సంఖ్యలను గమనించండి. సంఖ్యారేఖపై 2 మరియు 3 ల మధ్య పది సమాన భాగాలు, వాటిలో 1.11 లో (i) చూపిన విధంగా ఊహించండి. అది వరుసగా 2.1, 2.2, 2.3 .... 2.9 పటం 1.11 (i) లో మనం వేటిని స్పష్టంగా చూడవచ్చు.

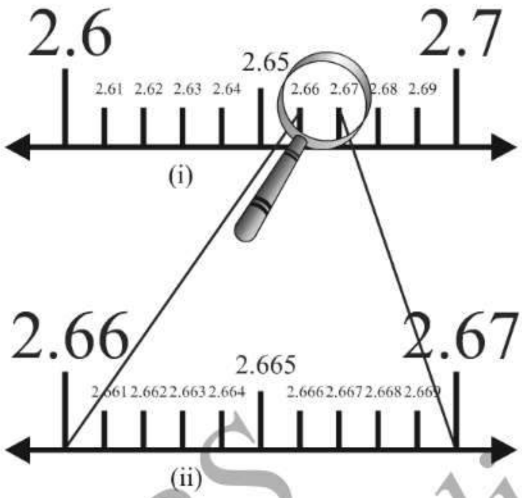
2.776 అనునది 2.7 మరియు 2.8ల మధ్యన ఉంటుంది అని గమనించండి. కాబట్టి మీ చేతిలోని భూతద్దాన్ని ఉపయోగించి 2.7 మరియు 2.8 ని పటం 1.12 (i) ల మధ్య గల ప్రాంతం పై దృష్టిసారించండి. ఈ ప్రాంతాన్ని తిరిగి పది సమాన భాగాలుగా విభజించినట్లుగా ఊహించండి అది వరుసగా 2.61, 2.62 .... చిత్రం 1.12 (ii) లో మనం వాటిని స్పష్టంగా చూడవచ్చు.



చిత్రం 1.12

ఇప్పుడు 2.665 అనునది 2.66 మరియు 2.67 ల మధ్యన ఉంటుంది అని గమనించండి. కాబట్టి మీ చేతిలోని భూతద్దాన్ని ఉపయోగించి 2.66 మరియు 2.67 ల ను చి త్రం 1.13 ల మధ్యగల ప్రాంతంపై దృష్టిసారించండి ఈ ప్రాంతాన్ని తిరిగి పది సమానభాగాలుగా విభజించినట్లుగా ఊహించండి చిత్రం 1.13 లో సూచించిన విధంగా సంఖ్యలను పెద్దవి చేసి చూడండి.

©KTBS Not to be republished



చిత్రం 1.13

మొదటి బిందువు 2.661 ను, రెండవ బిందువు 2.662 ను......... ఇలా సూచిస్తాయి. 6 వ బిందువు 2.665 ను సూచిస్తుంది.

సంఖ్యారేఖపై సంఖ్యలను ఈ విధంగా భూతద్దాన్ని ఉపయోగించి, పెద్దదిగా చేస్తూ బిందువుల ద్వారా చూపించే విధానాన్ని "క్రమానుగత వర్ధనం" అని అంటాం.

ఇప్పుడు మనం క్రమానుగత వర్ధనం పద్ధతిని ఉపయోగించి, సంఖ్యారేఖపై ఒక అంతంకాని ఆవర్తిత దశాంశాన్ని చూపిద్దాం.

ఉదాహరణ 11 : $5.3\overline{7}$ ను 5 దశాంశ స్థానం వరకు క్రమానుగాత వర్ధన పద్ధతిలో సంఖ్యారేఖపై చూపించండి.

సాధన : సంఖ్యారేఖపై క్రమానుగత వర్ధన పద్ధతిలో $5.3\overline{7}$ ను గుర్తించేవరకు క్రమానుగతంగా భూతద్దంలో పరిశీలిస్తూ వెళ్ళండి.

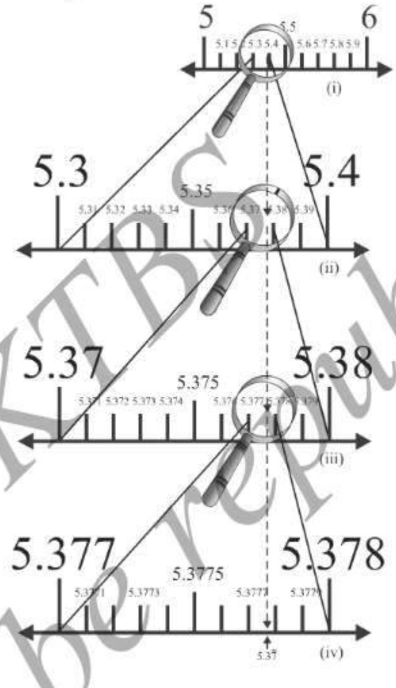
మనం $5.3\overline{7}$ ను 5 మరియు 6 ల మధ్యన గుర్తిస్తాం తర్వాత దశలో $5.3\overline{7}$ 5.3 మరియు 5.4 ల మధ్యన గుర్తిస్తాం. దానిని సంఖ్యారేఖపై చాలా చిన్న భాగంలో గుర్తిస్తాం తిరిగి వీటి మధ్యన 10 సమాన భాగాలు గుర్తిస్తే క్రమానుగత వర్ధన పద్ధతి అవుతుంది.

సంఖ్యారేఖపై $5.3\overline{7}$ ను 5.37 మరియు 5.38 ల మధ్య గుర్తిస్తాం $5.3\overline{7}$ ను మధ్యలో ఖశ్చితమైన సమాన భాగాలు 5.37 మరియు 5.38 ల మధ్యన క్రమానుగతవర్ధన పద్ధతిలో గుర్తించడం జరుగుతుంది.

©KTBS Not to be republished

భూతద్దాన్ని ఉపయోగించి చూసిన $5.3\overline{7}$ సంఖ్యారేఖపై 5.377 మరియు 5.378 ల మధ్యగుర్తించవచ్చును ఇప్పుడు $5.3\overline{7}$ ను అత్యంత ఖశ్చితంగా గుర్తించవచ్చు.

5.377 మరియు 5.378 ల మధ్య ప్రాంతాన్ని తిరిగి 10 సమాన భాగాలు చేస్తే భూతద్దంలో అవి $5.3\overline{7}$ ను పటం 1.14 (iv)) లో చూపిన విధంగా స్పష్టంగా చూపిస్తాయి $5.3\overline{7}$ అనేది 5.3777 నుండి 5.3778 ల మధ్య చిత్రం 1.14 (iv) లో చూపినవిధంగా ఉంటుంది.



చిత్రం 1.14

గమనిక :– ఈ విధంగా చేస్తూ వెలితే. అనంత సంఖ్యలో అవి వస్తూనే ఉంటాయి. కాబట్టి అత్యంత ఖశ్చితంగా $5.3\overline{7}$ ను సంఖ్యారేఖపై గుర్తించడానికి భూతద్దంలో క్రమానుగతవర్ధనం పద్ధతిలో అత్యంత దగ్గరగా ఉన్న విలువను గుర్తించాలి. దృష్టిదోషాలు లేకుండా చూడటంద్వారా దానిని ఖశ్చితంగా చేయవచ్చు.

ఈ పద్ధతిలో చేయడం ద్వారా కొంత వరకు ఈ సంఖ్యారేఖపై క్రమానుగత వర్ధనం ద్వారా అంతం కాని దశాంశ సంఖ్యలను ఎలా గుర్తిస్తాం. అవగాహన చేసుకొని వుంటారు.

ఈ చర్చద్వారా మీరు తిరిగి చెప్పవచ్చును ప్రతి వాస్తవ సంఖ్య అనేది సంఖ్యారేఖపై నిర్దిష్ట బిందువు వద్ద గుర్తించబడి ఉంటుంది లేదా సంఖ్యారేఖపై ప్రతి బిందువు వద్ద ఒక వాస్తవ సంఖ్య ఉంటుంది.

©KTBS Not to be republished

అభ్యాసం 1.4

1. 3.765 ను సంఖ్యారేఖపై క్రమానుగతవర్ధన పద్ధతిద్వారా చూపించండి.
2. $4.\overline{26}$ ను సంఖ్యారేఖపై క్రమానుగతవర్ధన పద్ధతిలో 4 దశాంశ స్థానాల వరకు చూపించండి.

1.5 వాస్తవ సంఖ్యలపై పరిక్రమలు

మనం వెనుకటి తరగతుల్లో అకరణీయ సంఖ్యలు సంకలనం మరియు గుణకారం దృష్ట్యా స్థిత్యంతర

ధర్మము, సహచరధర్మం మరియు విభాగన్యాయాలు పాటిస్తాయని తెలుసుకున్నాం. అదేవిధంగా సంకలనం, వ్యవకలనం, గుణకారం దృష్ట్యా కరణీయ సంఖ్యలు కూడా సంవృతా ధర్మాన్ని పాటిస్తాయని నీవు చెప్పగలవా?

ఉదాహరణకు $\left(\sqrt{6}\right)+\left(-\sqrt{6}\right),\left(\sqrt{2}\right)-\left(\sqrt{2}\right),\left(\sqrt{3}\right)\times\left(\sqrt{3}\right)$ మరియు $\frac{\sqrt{17}}{\sqrt{17}}$ లు అకరణీయ సంఖ్యలు.

ఒక కరణీయ మరియు గుణకారం చేసిన ఏమి జరుగునో పరిశీలిద్దాం

ఉదాహరణకు $\sqrt{3}$ అనేది కరణీయం అయితే. $2+\sqrt{3}$ మరియు $2\sqrt{3}$ ఏమవుతాయి? $\sqrt{3}$ అనేది అంతంకాని మరియు ఆవర్తితంకాని దశాంశం, $2+\sqrt{3}$ మరియు $2\sqrt{3}$ ల విషయంలో కూడా ఇది సత్యం. $2+\sqrt{3}$ మరియు $2\sqrt{3}$ లు కూడా కరణీయ సంఖ్యలే.

ఉదాహరణ 12: $7\sqrt{5},\frac{7}{\sqrt{5}},\sqrt{2}+21,\pi-2$ లు కరణీయ సంఖ్యలు అవునో, కాదో చూడండి.

సాధన:

$$\sqrt{5}=2.236....,\ \sqrt{2}=1.4142....,$$

$$\pi=3.1415....$$

$$\therefore\quad 7\sqrt{5}=7\times 2.236.........=15.652............,$$

$$\frac{7}{\sqrt{5}}=\frac{7\sqrt{5}}{\sqrt{5}\sqrt{5}}=\frac{7\sqrt{5}}{5}=3.1304..........$$

$$\sqrt{2}+21=22.4142...........,\ \pi-2=1.1415.......$$

అన్నికూడా అంతంకాని మరియు అంతంకాని ఆవర్తితంకాని దశాంశాలు. కావున ఇవి అన్నీ కరణీయసంఖ్యలే.

©KTBS Not to be republished

ఇప్పుడు సాధారణంగా కూడికలు, తీసివేతలు, గుణకారాలు, భాగహారాలు వర్గమూలాలపై మరియు 'n' వ వర్గమూలంలో చేస్తే కరణులు అగునా ఇక్కడ 'n' ఒక సహజసంఖ్య. కొన్ని ఉదాహరణాలు చూడండి.

ఉదాహరణ 13: $2\sqrt{2}+5\sqrt{3}$ మరియు $\sqrt{2}-3\sqrt{3}$ లను కూడండి.

సాధన:- $\left(2\sqrt{2}+5\sqrt{3}\right)+\left(\sqrt{2}-3\sqrt{3}\right)=\left(2\sqrt{2}+\sqrt{2}\right)+\left(5\sqrt{3}-3\sqrt{3}\right)$

$=(2+1)\sqrt{2}+(5-3)\sqrt{3}=3\sqrt{2}+2\sqrt{3}$

ఉదాహరణ 14: $6\sqrt{5}$ ను $2\sqrt{5}$ లో గుణించండి.

సాధన:- $6\sqrt{5}\times 2\sqrt{5}=6\times 2\times\sqrt{5}\times\sqrt{5}=12\times 5=60$

ఉదాహరణ 15: $8\sqrt{15}$ ను $2\sqrt{3}$ లో భాగహారం చేయండి

సాధన:- $8\sqrt{15}\div 2\sqrt{3}=\dfrac{8\sqrt{3}\times\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}=4\sqrt{5}$

కింది ఉదాహరణలను చదివి ఏవి సత్యమో తెలియచేయండి.

(i) సంకలనం మరియు వ్యవకలనం దృష్ట్యా అకరణీయ మరియు కరణీయ సంఖ్యలలో ఏర్పడేవి కరణీయ సంఖ్యలు

(ii) గుణకార దృష్ట్యా లేదా అకరణీయ సంఖ్యకు 2 సున్న కాని కారణాంకాలు వుంటే అది ఆకరణీయ సంఖ్యల దృష్ట్యా, కరణీయ సంఖ్య.

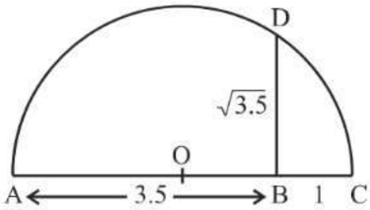
(iii) ఒకవేళకూడికలదృష్ట్యా,వ్యవకలనం,గుణకారం,మరియుభాగహారందృష్ట్యా,రెండుకరణీయ సంఖ్యల మధ్య వచ్చు ఫలితం అకరణీయ లేదా కరణీయ సంఖ్య అగును.

వాస్తవ సంఖ్యల యొక్క వర్గమూలాలగురించి. చర్చిద్దాం ఒకసారి గుర్తుచేసుకోండి 'a' ఒక సహజ సంఖ్య అయితే $\sqrt{a}=b$ అంటె $b^2=a$ మరియు $b>0$ అదే నిర్వచనం ధన వాస్తవ సంఖ్యలకు కూడా వర్తించును.

$a>0$ ఒక వాస్తవ సంఖ్య అయితే $\sqrt{a}=b$ అంటే $b^2=a$ మరియు $b>0$

©KTBS Not to be republished

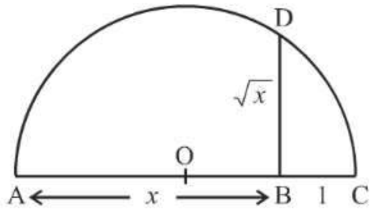
'n' ఏదైనా ధన పూర్ణాంకమైనప్పుడు, $\sqrt{n}$ ను సంఖ్యా రేఖమీద ఎలా గుర్తించాలో విభాగం 1.2లో చూశాం. ఇప్పుడు మనం ఏదైనా దత్త ధనవాస్తవ సంఖ్య 'x' కు $\sqrt{x}$ ను రేఖాగణితంగా ఎలా కనుగొనాలో చూద్దాం ఉదాహరణకు, $\sqrt{3.5}$ ను రేఖా గణిత పరంగా కనుగొందాం.



చిత్రం 1.15

దత్త రేఖ మీదగల స్థిర (నిర్దిష్ట) బిందువు 'A' నుండి 3.5 మూలమానాల దూరంలో AB = 3.5 మూలమానాలు (ప్రమాణాలు) అగునట్లు 'B' బిందువును గుర్తించండి. (చిత్రం 1.15ను గమనించండి) B బిందువు నుండె ఏకమాన దూరంలో 'C' బిందువును గుర్తించండి. AC మధ్య బిందువును గుర్తించండి. 'O' గా పేర్కొనండి. 'O' బిందువును కేంద్రంగా పెట్టుకొని OC వ్యాసార్థంగా ఉండునట్లు ఒక అర్థ వృత్తాన్ని గీయండి. 'B' ద్వారా సాగిపోవునట్లుమరియు అర్థవృత్తాన్ని 'D' బిందువులో ఖండించు నట్లు AC కి ఒక లంబరేఖ గీయండి. అప్పుడు BD = $\sqrt{3.5}$

సాధారణంగా, ఏదైనా ధనవాస్తవ సంఖ్య 'x' కు $\sqrt{x}$ ను కనుగొనండిదేనికి, AB = x మూలమానం అగునట్లు 'B' ని గుర్తించండి. మరియు చిత్రం 1.16లో ఉన్నట్లు BC = 1 మూలమానం అగునట్లు 'C' బిందువును గుర్తించండి. తరువాత $x = 3.5$ ప్రకరణంలో చేసినట్లుగా, BD = $\sqrt{x}$ అయివుండుటను మనం చూస్తాం. (చిత్రం 1.16ను గమనించండి). మనం ఈ ఫలితాన్ని పైథాగరస్ సిద్ధాంతం ఉపయోగించి సాధించవచ్చు. చిత్రం 1.16లో Δ OBD లంబకోణ త్రిభుజం అయివుండుటను గమనించండి. వృత్త వ్యాసార్థం $\frac{x+1}{2}$ మూలమానాలు.



చిత్రం 1.16

అందువలన, OC = OD = OA = $\frac{x+1}{2}$ మూలమానాలు.

ఇప్పుడు OB $= x - \left(\frac{x+1}{2}\right) = \frac{x-1}{2}$

© KTBS Not to be republished

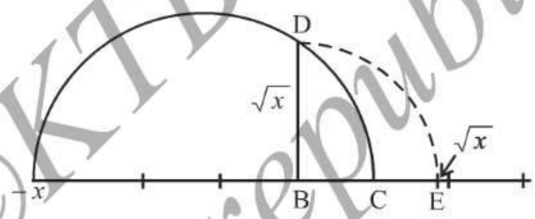
అందువలన పైథాగరస్ సిద్ధాంతంనుండి,

$$BD^2 = OD^2 - OB^2$$

$$BD^2 = \left(\frac{x+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-1}{2}\right)^2 = \frac{4x}{4} = x$$

అది $BD = \sqrt{x}$ అని చూపుతుంది.

సున్నాకంటే పెద్దదైన ఏదైనా వాస్తవ సంఖ్య 'x'$(x > 0)$ కు $\sqrt{x}$ రూపంలో సంఖ్యను రేఖాగణిత పరంగా చూపించవచ్చని ఈ రచన వలన తెలుపు సంఖ్యారేఖ మీద $\sqrt{x}$ స్థానాన్ని మీరు తెలుసుకోవడానికి కోరుకున్నచో 'B'సున్నాను మరియు 'C' 1 ని సూచించునట్లు BC ని సంఖ్యా రేఖగా పరిగణించండి.B' బిందువును కేంద్రంగా పెట్టుకొని, BD వాస్తవంగ ఉండునట్లు మరియు సంఖ్యారేఖను E' బిందువులో ఖండించునట్లు ఒక బావం గీయండి (చిత్రం 1.17 ను గమనించండి). అప్పుడు E' $\sqrt{x}$ ను చూపుతుంది



చిత్రం 1.17

వర్గమూలం, కనుగొను ఈ విధానాన్ని ఘనమూలం, నాల్గవమూలం మరియు సాధారణం గా n'వ మూలలకు (n'ధన పూర్ణాంకం) విస్తరించవచ్చు. వెనుకటి తరగతిలోని వర్గమూలం మరియు ఘనమూలాల అర్థాన్ని జ్ఞాపకం తెచ్చుకోండి. $\sqrt[3]{8}$ అనగానేమి? అది దేని ఘనం 8 అవుతుందో, అలాంటి ఒక ధనసంఖ్యగా మనం తెలుసుకున్నాం $\sqrt[3]{8} = 2$ అని మీరు ఊహించుకోవచ్చు. ఇప్పుడు $\sqrt[5]{243}$ ను ప్రయత్నిద్దాం. $b^5 = 243$ అగునటువంటి ఎదైనా సం ఖ్య b'ని మీరు తెలుసు కున్నారా? దానికి జవాబు 3 అందువలన ఉదాహరణలనుండి 'a' సున్నా కంటే పెద్దదైన వాస్తవ సంఖ్య అయినప్పుడు మరియు n ఒక ధనసంఖ్య అయినప్పుడు మీరు $\sqrt[n]{a}$ ని వ్యాఖ్యానించగలరా? ఇప్పుడు, $a > 0$ ఒక వాస్తవ సంఖ్య అయివుండనీయండి మరియు n ఒక ధన పూర్ణాంకం అయివుండనీయండి. $b^n = a$ మరియు $b > 0$ అయినప్పుడు $\sqrt[n]{a} = b$.

$\sqrt{2}, \sqrt[3]{8}, \sqrt[n]{a}$ ముందుగా వాటిలో ఉపయోగించిన '$\sqrt{\ }$' సంకేతాన్ని కరణీయ చిహ్నం అంటారు అని గమనించండి.

©KTBS Not to be republished

వర్గమూలాలకు సంబంధించిన చాలాచోట్ల ఉపయోగించు కొన్ని నిత్య సమీకరణాలను మనం ఇప్పుడు పట్టీ చేద్దాం వాటిలో కొన్నింటిని వెనుకటి తరగతిలో మీరు ఇదివరకే తెలుసుకున్నారు. వాస్తవ సంఖ్యల సంకలనం మీదగల గుణాకార విభాజక నియమం నుండి మరియు $(x+y)(x-y)=x^2-y^2$ $(x, y \in R)$ అను నిత్య సమీకరణం నుండి మిగిలిన వాటిని పొందవచ్చు.

అభ్యాసం- 1.2 లో $\sqrt{n}$ అదే ఒక ధన కరణీయ సంఖ్య అయితే సంఖ్యారేఖపై n' ఉంటుంది.

(i) $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}$ (ii) $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

(iii) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)=a-b$ (iv) $\left(a+\sqrt{b}\right)\left(a-\sqrt{b}\right)=a^2-b$

(v) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{c}+\sqrt{d}\right)=\sqrt{ac}+\sqrt{ad}+\sqrt{bc}+\sqrt{bd}$

(vi) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2=a+2\sqrt{ab}+b$

కొన్ని ప్రత్యేక సందర్భాలలో వీటిని గుర్తిస్తాం.

ఉదాహరణ 16 : ఈ క్రింది వాటిని సూక్ష్మీకరించండి

(i) $\left(5+\sqrt{7}\right)\left(2+\sqrt{5}\right)$ (ii) $\left(5+\sqrt{5}\right)\left(5-\sqrt{5}\right)$

(iii) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{7}\right)^2$ (iv) $\left(\sqrt{11}-\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{11}+\sqrt{7}\right)$

సాధన : (i) $\left(5+\sqrt{7}\right)\left(2+\sqrt{5}\right)=10+5\sqrt{5}+2\sqrt{7}+\sqrt{35}$

(ii) $\left(5+\sqrt{5}\right)\left(5-\sqrt{5}\right)=5^2-\left(\sqrt{5}\right)^2=25-5=20$

(iii) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{7}\right)^2=\left(\sqrt{3}\right)^2+2\sqrt{3}\sqrt{7}+\left(\sqrt{7}\right)^2=3+2\sqrt{21}+7=10+2\sqrt{21}$

(iv) $\left(\sqrt{11}-\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{11}+\sqrt{7}\right)=\left(\sqrt{11}\right)^2-\left(\sqrt{7}\right)^2=11-7=4$

గమనించండి : పై ఉదాహరణలను సాధించడానికి కొన్ని అకరణీయ సంఖ్యలను కూడడం జరిగింది. తర్వాత ఏర్పడిన సంఖ్య అకరణీయ సంఖ్య అయినా కావచ్చు కరణీయ సంఖ్య అయినా కావచ్చును. ఈ క్రింది సమస్యను సాధించడం ద్వారా భాగాన్ని పూర్తిచేద్దాం $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ను సంఖ్యారేఖపై ఎక్కడ గుర్తిస్తారు. ఇది కరణీయ సంఖ్యనా చెప్పండి హారంలో ఉన్న సంఖ్య ఒక అకరణీయ సంఖ్య కావున $\frac{1}{\sqrt{2}}$ కూడా అకరణీయ సంఖ్య.

©KTBS Not to be republished

ఉదాహరణ 17 : $\frac{1}{\sqrt{2}}$ హారాన్ని అకరణీయం చేయండి

సాధన : ఇప్పుడు $\frac{1}{\sqrt{2}}$ యొక్క హారాన్ని అకరణీయ రూపంలోకి మార్చడానికి ప్రయత్నిద్దాం $\frac{1}{\sqrt{2}}$ యొక్క హారాన్ని అకరణీయం చేయుటకు దాని లవహారాలను గుణిద్దాం.

$\frac{1}{\sqrt{2}}$ ను $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ చేస్తే $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=1$ కావున

$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ అని రాయవచ్చు.

$\frac{1}{\sqrt{2}}$ రూపంలో ఉంటే సంఖ్యారేఖపై గుర్తించటం చాలా సులభం ఇది 0 కు $\sqrt{2}$ సరిగ్గా మధ్యలో ఉంటుంది.

ఉదాహరణ 18: $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$ హారాన్ని అకరణీయం చేయండి.

సాధన: (iv)సూత్రం నుండి గుణకారం మరియు భాగహారం $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$ ను $2-\sqrt{3}$ లో హారాన్ని గుణించాలి.

$$\frac{1}{2+\sqrt{3}}\times\frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=\frac{2-\sqrt{3}}{4-3}=2-\sqrt{3}$$

ఉదాహరణ 19 : $\frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}$ హారాన్ని అకరణీయం చేయండి.

సాధన : (iii) సూత్రం నుండి.

$$\therefore\ \frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}=\frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}\times\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}=\frac{5\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)}{3-5}=\left(\frac{-5}{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)$$

ఉదాహరణ 20 : $\frac{1}{7+3\sqrt{2}}$ ను హారాన్ని అకరణీయం చేయండి.

సాధన : $\frac{1}{7+3\sqrt{2}}=\frac{1}{7+3\sqrt{2}}\times\frac{7-3\sqrt{2}}{7-3\sqrt{2}}=\frac{7-3\sqrt{2}}{49-18}=\frac{7-3\sqrt{2}}{31}$

కావున హారంలో ఒక వర్గమూలం ఉంటే దాన్ని గుర్తును మార్చి తిరిగి లవంగానూ, హారంగానూ రాస్తే ఏర్పడేదే హరాన్ని అకరణీయం చేయడం.

©KTBS Not to be republished

అభ్యాసం 1.5

1. ఈ క్రింది వాటిలో ఏవి అకరణీయ సంఖ్యలు లేదా కరణీయ సంఖ్యలు

   (i) $2-\sqrt{5}$ (ii) $\left(3+\sqrt{23}\right)-\sqrt{23}$ (iii) $\frac{2\sqrt{7}}{7\sqrt{7}}$

   (iv) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (v) 2π

2. కింది వాటిని సూక్ష్మీకరించండి.

   (i) $\left(3+\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{2}\right)$ (ii) $\left(3+\sqrt{3}\right)\left(3-\sqrt{3}\right)$

   (iii) $\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)^2$ (iv) $\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)$

3. ఒక వృత్త పరిధికి మరియు దాని వ్యాసానికి గల నిష్పత్తిని π అని నిర్వచిస్తే (c) దాని వృత్తం మరియు వ్యాసం (d) అయిన $\pi=\frac{c}{d}$. అయిన π కరణీయ సంఖ్య అగునా? దానిని ఎలా సాధిస్తాం.

4. $\sqrt{9.3}$ ని సంఖ్యారేఖపై చూపండి.

5. ఈ క్రింది వాటి హారాలను అకరణీయం చేయండి.

   (i) $\frac{1}{\sqrt{7}}$ (ii) $\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}$

   (iii) $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$ (iv) $\frac{1}{\sqrt{7}-2}$

1.6 వాస్తవ సంఖ్యలకు ఘాతాంక నియమాలు.

ఈ క్రింది వాటిని ఎలా సాధిస్తారో ఒకసారి గుర్తుకు తెచ్చుకోండి

(i) $17^2 . 17^5 =$ (ii) $(5^2)^7 =$

(iii) $\frac{23^{10}}{23^7} =$ (iv) $7^3 . 9^3 =$

మీకు సమాధానాలు యు లభించాయా? అవి కింది విధంగా ఉంటాయి.

(i) $17^2 . 17^5 = 17^7$ (ii) $(5^2)^7 = 5^{14}$

(iii) $\frac{23^{10}}{23^7} = 23^3$ (iv) $7^3 . 9^3 = 63^3$

©KTBS Not to be republished

ఈ సమాధానాలు వెనుకటి తరగతులలో నేర్చుకున్న ఘాతాంక నియయాలు ఉపయోగించి సాధించాం, (ఇక్కడ a, n మరియు m లు సహజ సంఖ్యలు గుర్తుంచుకోండి a ఆధారం లేదా భూమి అంటాం m మరియు n లను ఘాతాలు అంటాం)

(i) $a^m . a^n = a^{m+n}$ (ii) $(a^m)^n = a^{mn}$

(iii) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}\ (m > n)$ (iv) $a^m b^m = (ab)^m$

అయితే $(a)^0$ ఎంత? అవును దీని విలువ 1 $(a)^0 = 1$ అని నేర్చుకున్నాం ఘాతాంక నియమం (iii) నుండి $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$ ఘాతాంక నియమాలలో ఋణ ఘాత సంఖ్యలను ఎలా విస్తరించి రాయాలో తెలుసుకోండి.

ఉదాహరణలు:

(i) $17^2.17^{-5} = 17^{-3} = \frac{1}{17^3}$ (ii) $(5^2)^{-7} = 5^{-14}$

(iii) $\frac{23^{-10}}{23^7} = 23^{-17}$ (iv) $(7)^{-3}.(9)^{-3} = (63)^{-3}$

ఒక వేళ ఈ క్రింది వాటిని ఎలా సాధించాలి?

(i) $2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}}$ (ii) $\left(3^{\frac{1}{5}}\right)^4$ (iii) $\frac{7^{\frac{1}{5}}}{7^{\frac{1}{3}}}$ (iv) $13^{\frac{1}{5}} \cdot 17^{\frac{1}{5}}$

పై వాటిని ఎలా సాధించాలి? వాటిని సాధించాలంటే ముందుగా ఘాతాంక నియమాలను మరింతగా విస్తరించి రాయాలి. అది వెనుకటి తరగతుల్లో నేర్చుకున్నా, అధారం అనేది ఒక ధన వాస్తవ సంఖ్య. అయితే వాటి ఘాతాలు అకరణీయ సంఖ్యలు (తర్వాత పాఠాలలో మీరు ఈ ఘాతాంకాలలో ఉన్న ఘాత సంఖ్యలను గురించే వాస్తవ సంఖ్యసమితిలో నేర్చుకుంటారు) ఈ ఘాతాంక నియమాల ద్వారా ఉదాహరణకు $4^{\frac{3}{2}}$ ను అర్థం చేసుకోవడానికి ప్రయత్నిద్దాం. ఇందుకు మనం కొద్దిగా ఇక్కడ పనిచేయాలి:

అధ్యాయం 1.48 $\sqrt[n]{a}$ ను ఒక వాస్తవసంఖ్య అయితే $a > 0$ అగును అను నిర్వచించాం. కావున $a > 0$ అయితే వాస్తవ సంఖ్యలలో మరియు 'n' అనేది ధనకరణీయ సంఖ్య అగును. అప్పుడు $\sqrt[n]{a} = b$ ఎందుకంటే $b^n = a$ మరియు $b > 0$ ఘాతాంక రూపంలో చెప్పాలంటే $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$ అని నిర్వచిస్తాం ఈవిధంగా. ఇక్కడ $4^{3/2}$ ను రెండు విధాలుగా చెయవచ్చు.

$$4^{\frac{3}{2}} = \left(4^{\frac{1}{2}}\right)^3 = 2^3 = 8$$

$$4^{\frac{3}{2}} = \left(4^3\right)^{\frac{1}{2}} = (64)^{\frac{1}{2}} = 8$$

©KTBS Not to be republished

పై నిర్వచనాన్ని ఉపయోగించి $a > 0$ మరియు a ఒక వాస్తవ సంఖ్య కావున m మరియు n లు కరణీయ సంఖ్యలు అవుతూ వాటికి 1 తప్ప మరే ఇతర ఉమ్మడి కారణాంకం లేదు ఆంటే $n > 0$

కాబట్టి $a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$

ఈ క్రింది ఘాతాంక నియమాలను పరిశీలించండి $a > 0$ ఒక వాస్తవ సంఖ్య p మరియు q లు అకరణీయ సంఖ్యలు అయిన

(i) $a^p . a^q = q^{p+q}$ (ii) $(a^p)^q = a^{pq}$

(iii) $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$ (iv) $a^p b^p = (ab)^p$

ఈ సూత్రాలను ఉపయోగించి, పైన అడిగిన ప్రశ్నల ను సాధించండి

ఉదాహరణ 21: సాధించండి:

(i) $2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}}$ (ii) $\left(3^{\frac{1}{5}}\right)^4$

(iii) $\frac{7^{\frac{1}{5}}}{7^{\frac{1}{3}}}$ (iv) $13^{\frac{1}{5}} \cdot 17^{\frac{1}{5}}$

సాధన

(i) $2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)} = 2^{\frac{3}{3}} = 2^1 = 2$ (ii) $\left(3^{\frac{1}{5}}\right)^4 = 3^{\frac{4}{5}}$

(iii) $\frac{7^{\frac{1}{5}}}{7^{\frac{1}{3}}} = 7^{\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\right)} = 7^{\frac{3-5}{15}} = 7^{\frac{-2}{15}}$ (iv) $13^{\frac{1}{5}} \cdot 17^{\frac{1}{5}} = (13 \times 17)^{\frac{1}{5}} = (221)^{\frac{1}{5}}$

అభ్యాసం1.6

1. **సాధించండి:** (i) $64^{\frac{1}{2}}$ (ii) $32^{\frac{1}{5}}$ (iii) $125^{\frac{1}{3}}$
2. **సాధించండి:** (i) $9^{\frac{3}{2}}$ (ii) $32^{\frac{2}{5}}$ (iii) $16^{\frac{3}{4}}$ (iv) $125^{\frac{-1}{3}}$
3. **సక్షీకరించండి:** (i) $2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{5}}$ (ii) $\left(\frac{1}{3^3}\right)^7$ (iii) $\frac{11^{\frac{1}{2}}}{11^{\frac{1}{4}}}$ (iv) $7^{\frac{1}{2}} \cdot 8^{\frac{1}{2}}$

©KTBS Not to be republished

1.7 సారాంశం

ఈ అధ్యాయంలో ఈ క్రింద అంశాలను నేర్చుకున్నారు.

1. $\frac{p}{q}$ రూపంలో రాయగల సంఖ్యలను అకరణీయసంఖ్యలు ఆంటాం ఇక్కడ p మరియు q లు పూర్ణసంఖ్యలు మరియు $q \neq 0$
2. $\frac{p}{q}$ రూపంలో రాయలేని సంఖ్యలను కరణీయసంఖ్యలు అంటాం ఇక్కడ p, q పూర్ణసంఖ్యలు మరియు $q \neq 0$
3. అకరణీయ సంఖ్యలను దశాంశ విస్తరణ రూపంలో రాయగా అవి అంతం అయ్యే దశాంశ అంతంకాని ఆవర్థితంకాని దశాంశం అగును లేదా ఒక దశాంశ విస్తరణరూపంలో అంతం అయ్యే దశాంశ రూపం లేదా అంతంకాని, ఆవర్థిత దశాంశం అయిన అది అకరణీయం.
4. కరణీయ సంఖ్యల దశాంశ విస్తరణ రూపంలో రాయగా అవి అంతంకాని దశాంశం అంతం కాని ఆవర్థితంకాని దశాంశంలో ఉంటాయి అలాగే. ఒక సంఖ్యయొక్క దశాంశ విస్తరణ రూపం అంతంకాని ఆవర్థితంకాని దశాంశం అయితే అది కరణీయ సంఖ్య
5. కరణీయ సంఖ్యలను మరియు అకరణీయ సంఖ్యల సముదాయాన్ని వాస్తవసంఖ్యలు అని అంటాం.
6. సంఖ్యారేఖపై ప్రతి బిందువుకు సదృశ్యంగా ఏకైక వాస్తవసంఖ్య ఉంటుంది అదేవిధంగా ప్రతి వాస్తవ సంఖ్యకు సదృశ్యంగా సంఖ్యారేఖపై ఏకైక బిందువు ఉంటుంది.
7. r ఒక అకరణీయసంఖ్య మరియు s ఒక కరణీయ సంఖ్య అయితే $r+s$ మరియు $r-s$ కరణీయ సంఖ్యలు, మరియు rs మరియు $\frac{r}{s}$ లు కూడా కరణీయ సంఖ్యలే $r \neq 0$.
8. a మరియు b ఏవైనా రెండు ధన వాస్తవ సంఖ్యలు అయి నప్పుడు, ఈ కింది నిత్యసమీకరణాలూ సరిపోతాయి.

(i) $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ (ii) $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

(iii) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right) = a-b$ (iv) $\left(a+\sqrt{b}\right)\left(a-\sqrt{b}\right) = a^2-b$

(v) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 = a+2\sqrt{ab}+b$

©KTBS Not to be republished

9. $\frac{1}{\sqrt{a}+b}$ చిన్నహారాన్ని అకరణీయం చేయడానికి దీనినిలను $\frac{\sqrt{a}-b}{\sqrt{a}-b}$ చే గుణించాలి

ఇక్కడ a, b లు పూర్ణసంఖ్యలు (a, b ∈ z).

10. $a > 0$ ఒక వాస్తవ సంఖ్య మరియు p మరియు qలు రెండు అకరణీయ సంఖ్యలు అయితే అప్పుడు.

(i) $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$ (ii) $(a^p)^q = a^{pq}$

(iii) $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$ (iv) $a^p b^p = (ab)^p$

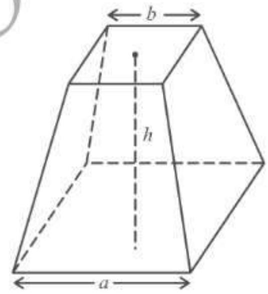
©KTBS Not to be republished

అధ్యాయం – 2

యూక్లిడ్ రేఖాగణిత పరిచయం

2.1 పరిచయం

జామెట్రి అను పదం 'భూమి' అర్థము నిచ్చు 'జియో' మరియు కొలుచుట అను అర్థము నిచ్చు 'మెట్రీన్' అను రెండు గ్రీకు పదాల నుండి వచ్చినది. భూమిని కొలుచు అవసరం ఏర్పడినపుడు జామెట్రీ ఆవిర్భవించినట్లు అనిపిస్తుంది ఈజిప్టు, బాబిలోనియా, చైనా, భారతదేశం, గ్రీసు, ఇంకా మొదలగు ప్రతి పురాతన నాగరికతలోను వివిధ రూపాలలో ఈ గణిత విభాగాన్ని చదివారు. ఈ నాగరికతల ప్రజలు అనేక ప్రాయోగిక సమస్యలను ఎదుర్కొన్నారు. అందువలన జామెట్రీని అనేక విధాలుగా అభివృద్ధి చేయవలసి వచ్చింది.



చిత్రం 2.1
శిఖరం కోసివేయబడిన పిరమిడ్

ఉదాహరణకు, ఎప్పుడు నైలు నది ఉప్పొంగినా, అనేక భూస్వాముల ప్రక్క- ప్రక్క పొలాల మధ్య సరిహద్దులను తుడిచి పెట్టేది.అటువంటి ఉప్పెన వచ్చిన తర్వాత, ఈ సరిహద్దులను మరల గీయవలసి వచ్చేది. అందువలన ఈజిప్టువారు చిన్న చిన్న వైశాల్యాలు లెక్కించటానికి మరియు చిన్న చిన్న నిర్మాణాలు చేయటానికి అనేక రేఖాగణిత సంకేతాలను మరియు నియమాలను అభివృద్ధి పరిచారు. ధాన్యాగారాల ఘనపరిమాణాలు లెక్కించటానికి మరియు కాలువలు, పిరమిడ్లు నిర్మించటానికి వారు రేఖాగణిత పరిజ్ఞానాన్ని ఉపయోగించారు. శిఖరం కోసివేయబడిన పిరమిడ్ ఘనపరిమాణం కనుగొను సూత్రం కూడ వారికి తెలిసియుండెను. (చిత్రం 2.1)

©KTBS Not to be republished

పిరమిడ్ ఒక ఘనాకృతి అనియు, దాని పాదం త్రిభుజం లేక చతురస్రం లేక ఏదైనా బహుభుజాకృతి అనియు దాని ప్రక్కతలాలు త్రిభుజాకారంలో ఉండి, పైన ఒక బిందువు వద్ద కేంద్రీకరించబడుననియు మీకు తెలుసు.

భారత ఉపఖండంలో సింధు నాగరికత (సుమారు క్రీ.పూ 3000) రేఖాగణితాన్ని విరివిగా ఉపయోగించుకొన్నట్లు హరప్ప మరియు మొహెంజొదారో త్రవ్వకాల వలన తెలుస్తున్నది. అది బాగా క్రమబద్ధీకరించబడిన సమాజము. నగరాలు ప్రణాళికా బద్ధంగా ఉండి, బాగా అభివృద్ధి చెందాయి. ఉదాహరణకు రహదారులు పరస్పరం సమాంతరంగా ఉండి, భూగర్భ నీటి పారుదల వ్యవస్థ ఉంది. ఇళ్ళల్లో వివిధ రకాల గదులు చాలా ఉండేవి. పట్టణవాసుల క్షేత్రగణితం, ప్రాయోగిక అంకగణితాలలో ఆరితేరి ఉండేవారు. నిర్మాణాలకు ఉపయోగించే ఇటుకలు బట్టీలలో కాల్చబడి, పొడవు: వెడల్పు: మందం నిష్పత్తి 4: 2: 1 ఉండేదని తెలిసింది.

పురాతన కాలంలో జ్యామితీయ నిర్మాణాలకు సులభ సూత్రాలు (క్రీ.పూ 800 నుండి 500 క్రీ.పూ) కృత్రిమంగా తయారుచేయబడినవి. దైవ పీఠాలు మరియు వేదకర్మలు నిర్వహించటానికి హోమపీఠాలు నిర్మాణాలతో వేదకాల రేఖాగణితం ఆవిర్భవించింది. ఆ పరికరాలు పనికి రావాలంటే వాటి ఆకారాలు మరియు వైశాల్యాల గురించి ఇవ్వబడిన సూచనల కనుగుణంగా పవిత్రమైన మంటల స్థానం ఉండాలి. ఇళ్ళల్లో కర్మకాండలకు చతురస్రాకార మరియు వృత్తాకార దైవ పీఠాలు ఉపయోగించేవారు. ప్రజలు పూజలు చేసుకోవడానికి దీర్ఘచతురస్రాలు, త్రిభుజాలు మరియు ట్రెపీజియాల సమ్మేళనాల ఆకారాలుగల దైవపీఠాలు అవసరమయ్యేవి. (అధర్వణ వేదంలో ఇవ్వబడిన) శ్రీయంత్రంలో తొమ్మిది కలిసి పోయిన సమద్విబాహు త్రిభుజాలు ఉన్నాయి ఈ త్రిభుజాలను 43 సహకార త్రిభుజాలు ఏర్పడేటట్లు అమర్చారు. దైవ పీఠాలు నిర్మించటానికి ఖచ్చితమైన రేఖాగణిత పద్ధతులను ఉపయోగించినప్పటికీ, వాటివెనుక ఉన్న ముఖ్య సూత్రాలను చర్చించలేదు.

ఈ ఉదాహరణలను బట్టి ప్రపంచమంతటా రేఖాగణితం అభివృద్ధి చెంది, ఉపయోగించబడింది అని తెలుస్తుంది. కాని ఇదంతా ఒక క్రమపద్ధతిలో జరుగలేదు. పురాతన ప్రపంచంలో రేఖాగణిత అభివృద్ధికి సంబంధించిన ఉత్సాహకరమైన విషయమేమంటే అని ఒక తరం నుండి మరొకతరానికి మౌఖికంగా గాని, తాటాకు సందేశాల ద్వారా గాని ఇతర పద్ధతుల ద్వారా గాని పంపబడేవి. భారతదేశం మరియు రోమ్ దేశాలలో మాదిరిగా బాబిలోనియావంటి కొన్ని నాగరికతలలో కూడా రేఖాగణితం ప్రయోగాత్మక అంశంగా మిగిలి పోయింది. ఈజిప్టు వారు రూపొందించిన రేఖాగణితంలో కొన్ని ఫలితాల ప్రవచనాలుండేవి. వారి విధానానికి సాధారణ నియమాలేమి లేవు. నిజానికి బాబిలోనియా

©KTBS Not to be republished

మరియు ఈజిప్టు వారు రేఖాగణితాన్ని ప్రయోగ పూర్వక అవసరాలకే ఉపయోగించారు. వారు రేఖాగణితాన్ని క్రమానుగత విజ్ఞానంగా అభివృద్ధి చేయటానికి కొంత మాత్రమే కృషి చేశారు. కాని గ్రీసు వంటి కొన్ని నాగరికతలలో, కొన్ని నిర్మాణాలు ఎలా పని చేస్తాయనే దానికి కారణాలివ్వటంలోప్రాముఖ్యత ఇవ్వబడింది. సాధనా పద్ధతిలో వారు కనుగొన్న ప్రచనాలు నిజమని నిరూపించుటలో గ్రీసు దేశస్థులు ఉత్సాహం చూపారు. (అనుబంధం – 1 చూడండి).

గ్రీకు గణిత శాస్త్రవేత్త అయిన థేల్స్‌కిమొదటిసారిగా ఒక వ్యాఖ్యానానికి నిరూపణ ఇచ్చినఘనత లభించింది. ఆ నిరూపణ ఏమంటే ఒక వృత్తమును దాని వ్యాసం సమద్విఖండన చేస్తుంది (అంటే రెండు సమాన భాగాలుగా ఖండిస్తుంది) థేల్స్ యొక్క ప్రసిద్ధి చెందిన విద్యార్థులలో మీకు తెలిసిన పైథాగరస్ (572క్రీ.పూ) ఒకడు. పైథాగరస్ మరియు అతని గుంపులోనివారు అనేక రేఖాగణిత ధర్మాలను కనుగొని అధిక స్థాయిలో రేఖాగణిత సిద్ధాంతాల అభివృద్ధికి దోహదపడ్డారు. ఈవిధానం 300 క్రీ.పూ వరకు అనుసరించబడింది. ఆ కాలంలో ఈజిప్టులోని అలెగ్జాం డ్రియాలో ఉపాధ్యాయుడైన యూక్లిడ్ తనకు తెలిసిన విషయాలన్నిం టినీ సేకరించి, తన యొక్క మూలకాలు అను ప్రసిద్ధ గ్రంథములో అమర్చాడు. అతడు తన "మూలకాలు" గ్రంథమును పదమూడు అధ్యాయాలుగా విభజించాడు. ఒక్కొక్క అధ్యాయమును పుస్తకం అన్నారు. తువాత తరాలలో ప్రపంచం మొత్తం రేఖాగణితమును అర్థం చేసుకోవటానికి ఈ పుస్తకాలు దోహద పడ్డాయి.

థేల్స్ (Thales)
(640 BCE – 546 BCE)
చిత్రం 2.2

యూక్లిడ్ (Euclid)
క్రీ.పూ 352 – క్రీ.పూ 265
చిత్రం 2.3

ఈ అధ్యాయంలో మనం యూక్లిడ్ విధానంలో రేఖాగణితాన్ని చర్చించి, ప్రస్తుత రేఖాగణితం లో దానిని పోల్చడానికి ప్రయత్నిద్దాం.

2.2 యూక్లిడ్ నిర్వచనాలు, స్వయం సిద్ధాలు, స్వీకృత సిద్ధాంతాలు.

యూక్లిడ్ కాలం నాటి గ్రీకు గణిత శాస్త్రవేత్తలు రేఖాగణితాన్ని వారు జీవించిన ప్రపంచం యొక్క ప్రత్యేకమైన మాదిరిగా భావించారు. వారి చుట్టూ చూసే వాటి నుండి బిందువు, రేఖ, తలము మొదలగువాటి భావాలను రూపొందించారు. ఒక స్థలము మరియు ఆ స్థలములో వారి చుట్టూ ఉండే ఘనాకృతుల అధ్యయనం నుండి ఒక ఘనాకృతి యొక్క ప్రత్యేకమైన భావనను రూపొందించారు. ఒక ఘనాకృతికి ఆకారము, పరిమాణం, స్థానం ఉండి, ఒక ప్రదేశం

©KTBS Not to be republished

నుండి మరొక ప్రదేశానికి కదిలించటానికి వీలుగా ఉంటుంది. దాని యొక్క సరిహద్దులను ఉపరితలాలు అంటారు. అవి ఒక స్థలము యొక్క రెండు భాగాలను వేరు పరచును. వాటికి మందము ఉండదు. ఉపరితలాలు సరిహద్దులు వక్రరేఖలు లేక సరళరేఖలు అవుతాయి. ఈ రేఖలు బిందువుల వద్ద అంతమగును.

ఘనాకృతుల నుండి బిందువుల వరకు గల మూడు సోపానాలను (ఘనాకృతులు – ఉపరితలాలు – రేఖలు – బిందువులు) గమనిస్తే, ప్రతి సోపానంలో ఒక పరిమాణం తగ్గుతుంది. కాబట్టి ఒక ఘనాకృతికి మూడు పరిమాణాలు, ఉపరితలానికి రెండు పరిమాణాలు ఒక రేఖకు రెండు పరిమాణాలు ఉంటాయి. ఒక బిందువుకు ఏ పరిమాణం ఉండదు. యూక్లిడ్ ఈ వ్యాఖ్యలను నిర్వచనాలుగా సంగ్రహించారు. మూలకాలు గ్రంథములోని పుస్తకం 1లో 23 నిర్వచనాలను పట్టీ చేయుట ద్వారా అతని వ్యాఖ్యానాలను ప్రారంభించాడు. వాటిలో కొన్ని క్రింద ఇవ్వబడినవి:

1. భాగాలేమీ లేనిది **బిందువు**
2. వెడల్పు లేని పొడవు **రేఖ**
3. ఒక రేఖ యొక్క చివరలు బిందువులు
4. ఒక రేఖ మీద బిందువులు సమానంగా ఒకేస్థాయిలో ఉంటే అది **సరళ రేఖ**
5. పొడవు మరియు వెడల్పు మాత్రమే గలది **ఉపరితలం**
6. ఒక ఉపరితలం యొక్క అంచులు రేఖలు.
7. ఒక ఉపరితలం మీద సరళరేఖలు సమానంగా ఒకస్థాయిలో ఉంటే ఆ ఉపరితలం **సమతలం** అవుతుంది.

ఈ నిర్వచనాలను జాగ్రత్తగా పరిశీలిస్తే మనము చూసిన భాగము, వెడల్పు, పొడవు, సమంగా వంటి కొన్ని పదాలను ఇంకా స్పష్టంగా వివరించవలసి ఉన్నది. ఉదాహరణకు అతని యొక్క బిందువు నిర్వచనం తీసుకుందాం. ఈ నిర్వచనం లో 'భాగము' అను పదమును నిర్వచించ వలసి ఉంది. మనము భాగము అను పదమును కొంత వైశాల్యమును (స్థలమును) ఆక్రమించునదిగా నిర్వచిస్తే, మనము మరల వైశాల్యము అను పదమును నిర్వచించవలసి వస్తుంది. కాబట్టి ఒక పదాన్ని నిర్వచించాలంటే, మనము అనేక ఇతర పదాలను నిర్వచించవలసి వస్తుంది. అంతము లేకుండా పొడవైన నిర్వచనాల గొలును తయారవుతుంది. అందువలన గణితశాస్త్రవేత్తలు, కొన్ని రేఖాగణిత పదాలను అనిర్వచిత పదాలుగా వదలి వేయుటకు ఒప్పుకున్నారు. ఏది ఏమైనా పైన ఇవ్వబడిన నిర్వచనం కంటే, ఒక బిందువు యొక్క రేఖా గణిత పరికల్పన గురించి మనకు సహజ

©KTBS Not to be republished

జ్ఞానము వలన ఒక భావం కలుగుతుంది. కాబట్టి ఒక చుక్కకి కొంత పరిమాణం ఉన్నప్పటికీ మనము ఒక బిందువును ఒక చుక్కతో సూచిస్తాము.

పైన ఇవ్వబడిన రెండవ నిర్వచనంలో కూడా ఇదేరకమైన సమస్య ఉద్భవిస్తుంది. ఎందుకంటే అందులో పొడవు, వెడల్పులు ఇవ్వ బడ్డాయి. వాటిలో ఏదీ నిర్వచించబడలేదు. ఈ కారణంగా ఏదైనా ఒక అధ్యాయమును విశదీకరించునప్పుడు కొన్ని పదాలు అనిర్వచితంగా ఉంచబడ్డాయి. కాబట్టి రేఖాగణితంలో బిందువు, రేఖ, తలము (యూక్లిడ్ పదాలలో సమతలం) పదాలను అనిర్వచిత పదాలుగా తీసుకున్నాము. ఒకే ఒక విషయమేమంటే మనము వాటిని సహజ జ్ఞానంతో సూచిస్తాము. లేక భౌతిక నమూనాల సహాయంతో వాటిని వివరిస్తాము.

నిర్వచనాలతో మొదలుపెట్టి యూక్లిడ్ కొన్ని ధర్మాలను నిరూపించనవసరం లేకుండా ఊహించుకున్నాడు. నిజానికి ఇలా ఊహించినవన్నీ సర్వ సామాన్యమైన స్పష్టమైన నిజాలు. వాటిని అతడు రెండు రకాలుగా విభజించాడు. స్వయం సిద్ధాలు మరియు స్వీకృత సిద్ధాంతాలు. రేఖాగణితానికి పరిమితమైన ఉపకల్పనలకు అతడు 'స్వీకృత సిద్ధాంతాలు' అను పదమును ఉపయోగించాడు. సాధారణమైన అభిప్రాయాలు, స్వయంసిద్ధాలుగా పిలవబడునవి మరొకరకంగా చెప్పాలంటే రేఖా గణితానికి మాత్రమే కాకుండా గణితం మొత్తానికి ఉపయోగించబడే ఉపకల్పనలు. స్వయం సిద్ధాలు స్వీకృత సిద్ధాంతాల గురించిన వివరాల కోసం (అనుబంధం – 1 చూడండి). యూక్లిడ్ స్వయం సిద్ధాంతాలలో కొన్ని అతని క్రమంలో లేనివి, క్రింద ఇవ్వబడినవి.

1. ఒకే అంశానికి సమానమైన అంశాలు ఒకదానికొకటి సమానం.
2. సమాన అంశాలకు సమాన అంశాలు కూడినప్పుడు వాటి మొత్తాలు సమానం
3. సమాన అంశాల నుండి సమాన అంశాలు తీసివేసినప్పుడు వాటి శేషములు సమానం.
4. ఒకదానితో ఒకటి ఏకీభవించు అంశాలు ఒక దానికొకటి సమానం.
5. పూర్ణవస్తువు దాని భాగం కంటే పెద్దది.
6. సమాన అంశాల యొక్క రెట్టింపులు ఒకదాని కొకటి సమానం
7. సమాన అంశాల యొక్క అర్ధాలు ఒకదాని కొకటి సమానం.

ఈ సాధారణమైన అభిప్రాయాలు ఒక రకమైన పరిమాణాలను సూచిస్తాయి. మొదటి సాధారణ అభిప్రాయంను సమతల చిత్రాలకు అన్వయించవచ్చు. ఉదాహరణకు ఒక త్రిభుజ వైశాల్యం, ఒక దీర్ఘ చతురస్ర వైశాల్యానికి సమానమై, దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యం, చతురస్ర వైశాల్యానికి సమానమైతే త్రిభుజవైశాల్యం చతురస్ర వైశాల్యానికి కూడా సమానమవుతుంది.

©KTBS Not to be republished

ఒకే రకమైన అంశాల పరిమాణాలను పోల్చవచ్చు మరియు కూడవచ్చు కాని వేర్వేరు రకాల అంశాల పరిమాణాలను పోల్చలేము. ఉదాహరణకు ఒక రేఖను ఒక దీర్ఘచతురస్రానికి కూడలేము మరియు ఒక కోణమును ఒక పంచభుజితో పోల్చలేము.

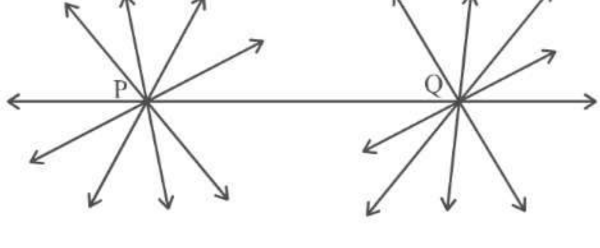
పైన ఇవ్వబడిన 4వ స్వయం సిద్ధం ప్రకారం రెండు వస్తువులు ఒకే రకంగా ఉంటే (అంటే అవి ఒకటే అయితే) అవి ఒకదానికొకటి సమానంగా ఉంటాయి. మరొక రకంగా చెప్పాలంటే ప్రతివస్తువు దానికదే సమానం. ఇది అధ్యారోపణ సూత్రానికి నిరూపణ అవుతుంది. 5వ స్వయం సిద్ధం, దానికంటే పెద్దది అనే పదానికి నిర్వచనాన్ని ఇస్తుంది. ఉదాహరణకు A అనేరాశిలో B రాశి ఒక భాగమైతే A ని B మరియు మరొక మూడవ రాశి C ల మొత్తంగా రాయవచ్చు. సాంకేతికంగా $A > B$ అంటే $A = B + C$ అగునట్లు మరొకరాశి C ఉంటుంది. ఇప్పుడు యూక్లిడ్ అయిదు స్వీకృత సిద్ధాంతాలను చర్చిద్దాం. అవి:

స్వీకృత సిద్ధాంతం 1 : ఏ బిందువు నుండైనా మరొక బిందువుకు సరళరేఖను గీయవచ్చు.

ఈ స్వీకృత సిద్ధాంతం వలన రెండు విభిన్న బిందువుల గుండా కనీసం ఒక సరళరేఖను గీయవచ్చని గమనించవచ్చు. కాని అటువంటి సరళరేఖలు ఒకటికంటే ఎక్కువ గీయలేమని ఈ స్వీకృత సిద్ధాంతం చెప్పదు. ఏది ఏమైనా రెండు విభిన్న బిందువులను కలుపుతూ, ఒకే ఒక సరళ రేఖను గీయవచ్చని యూక్లిడ్ తన పుస్తకాలలో ఉపయోగించాడు. ఈ ఫలితాన్ని మనం స్వయం సిద్ధం రూపంలో క్రింది విధంగా చెప్పవచ్చు.

స్వయం సిద్ధం 2.1 : రెండు విభిన్న బిందువుల గుండా ఒకే ఒక రేఖను గీయవచ్చు.

P గుండా పోవు రేఖలలో ఎన్ని రేఖలు Q గుండా కూడా పోతాయి? (చిత్రం 2.4 చూడండి). PQ రేఖ ఒక్కటే పైన ఇవ్వబడిన వాక్యము దాని కదే సాక్ష్యమైనది. కాబట్టి దానిని స్వయం సిద్ధంగా తీసుకున్నారు.



చిత్రం 2.4

© KTBS Not to be republished

స్వీకృత సిద్ధాంతం 2 : ఒక అంతము చెందు రేఖను అనంతముగా పొడిగించవచ్చు.

మనము ఈ కాలంలో ఉపయోగించే రేఖాఖండం అనే పదానికి యూక్లిడ్ అంతము చెందు రేఖ అని ఉపయోగించారు. కాబట్టి ఈ కాలములోని పదాలకనుగుణంగా రెండవ స్వీకృత సిద్ధాంతమును ఈ క్రింది విధంగా చెప్పవచ్చు.

ఒక రేఖాఖండము నుండి సరళరేఖను పొందాలంటే, దానిని ఇరువైపుల పొడిగించవచ్చు.

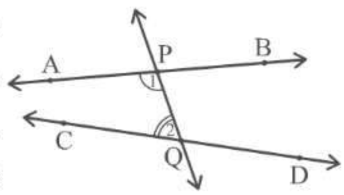
చిత్రం **2.5**

స్వీకృత సిద్ధాంతం 3 : ఏదైనా కేంద్రము మరియు ఏదైనా వ్యాసార్థముతో ఒక వృత్తమును గీయవచ్చు.

స్వీకృత సిద్ధాంతం 4 : అన్ని లంబకోణాలు ఒకదాని కొకటి సమానం.

స్వీకృత సిద్ధాంతం 5: రెండు సరళ రేఖల మీద పడు ఒక సరళరేఖ, దానికి ఒక వైపున గల అంతరకోణాల మొత్తం రెండు లంబకోణాల కంటే తక్కువ ఉండునట్లు ఉంటే, ఆ రెండు సరళరేఖలను అనంతంగా పొడిగిస్తే అవి అదే ప్రక్కన కలుసుకుంటాయి.

ఉదాహరణకు చిత్రం 2.6 లో PQ రేఖ AB మరియు CD రేఖల మీద పడి PQ కు ఎడమ వైపున గల అంతరకోణాలు 1 మరియు 2 ల మొత్తం 180° కంటే తక్కువ చేస్తుంది. కాబట్టి AB మరియు CD రేఖలు PQ కి ఎడమవైపున ఏదో ఒక బిందువు వద్ద ఖండించు కుంటాయి.



చిత్రం **2.6**

ఐదు స్వీకృత సిద్ధాంతాలను క్లుప్తంగా చూస్తే, 5వ స్వీకృత సిద్ధాంతం మిగిలిన అన్ని స్వీకృత సిద్ధాంతాల కంటే క్లిష్టంగా అనిపిస్తుంది. మరొక రకంగా చూస్తే, స్వీకృత సిద్ధాంతాలు 1 నుండి 4 వరకు సరళంగా ఉండి స్వయం సాక్ష్యాధారిత నిజాలుగా తీసుకొనబడినవి. ఏది ఏమైనా వాటిని నిరూపించుట సాధ్యం కాదు. అందు వలన ఈ వ్యాఖ్యలు ఏ నిరూపణ లేకుండా గ్రహించబడినవి (అనుబంధం – 1 చూడండి) 5వ స్వీకృత సిద్ధాంతం క్లిష్టంగా ఊడటం తర్వాత విభాగంలోపల దాని మీద ఎక్కువ దృష్టి పెడతాము.

ఈ రోజులలో స్వయం సిద్ధాలు మరియు స్వీకృత సిద్ధాంతాలు అను పదాలను ఒకే అర్థంతో పరస్పరం మార్చుకొను విధంగా ఉపయోగిస్తున్నారు. స్వీకృత సిద్ధాంతం అనేది నిజానికి

©KTBS Not to be republished

ఒక క్రియాపదం. స్వీకృతం చేద్దాం అని మనం అంటే, దాని అర్థం 'విశ్వం లో మనకు గోచరించిన వాటిని పరిశీలించిన వాటి ఆధారంగా ఒక వ్యాఖ్యను రూపొందిద్దాం'. దానియొక్క వాస్తవికతను తర్వాత పరిశీలిస్తారు. అది నిజమైతే దానిని స్వీకృత సిద్ధాంతంగా తీసుకుంటారు.

ఒక స్వయం సిద్ధానికి గాని ముందే నిరూపించబడిన ఒక వ్యాఖ్యకు గాని వ్యతిరేఖంగా ఒక వ్యాఖ్యను ఈ స్వయం సిద్ధాల నుండి ఊహించుట అసాధ్యమైతే ఆ స్వయం సిద్ధాల సరళి పొందికగాఉంది అంటారు (అనుబంధం – 1 చూడండి) ఎప్పుడైనా ఒక స్వయం సిద్ధాల సరళి ఇవ్వబడినప్పుడు, అది పొందికగా ఉందని నిశ్చయించు కోవాలి.

యూక్లిడ్ తన స్వయం సిద్ధాలు మరియు స్వీకృత సిద్ధాంతాలను వివరించిన తర్వాత, ఇతర ఫలితాలను నిరూపించటానికి అతడు వాటిని ఉపయోగించాడు. ఈ ఫలితాలనుపయోగించి నిగమన పద్ధతిలో మరికొన్ని ఫలితాలను నిరూపించాడు. ఈవిధంగా నిరూపించబడిన ప్రవచనాలను ప్రతిపాదనలు లేక సిద్ధాంతాలు అంటారు. యూక్లిడ్ తన స్వయం సిద్ధాలు, స్వీకృత సిద్ధాంతాలు, నిర్వచనాలు మరియు దీనికి ముందుగా నిరూపించబడిన సిద్ధాంతాల నుపయోగించి 465 ప్రతిపాదనలను రూపొందించాడు. రేఖాగణితంలో రాబోవు కొన్ని అధ్యాయాలలో కొన్ని సిద్ధాంతాలను నిరూపించడానికి ఈ స్వయం సిద్ధాలను ఉపయోగిస్తారు.

క్రింద ఇవ్వబడిన ఉదాహరణలలో కొన్ని ఫలితాలను నిరూపించటానికి యూక్లిడ్ తన స్వయం సిద్ధాలు, స్వీకృత సిద్ధాంతాలను ఏ విధంగా ఉపయోగించాడో చూద్దాం.

ఉదాహరణ 1 : A, B మరియు C లు ఒక రేఖ మీద మూడు బిందువులు మరియు B బిందువు A మరియు C ల మధ్యవుంటే (చిత్రం 2.7చూడండి), AB + BC = AC అని నిరూపించండి.

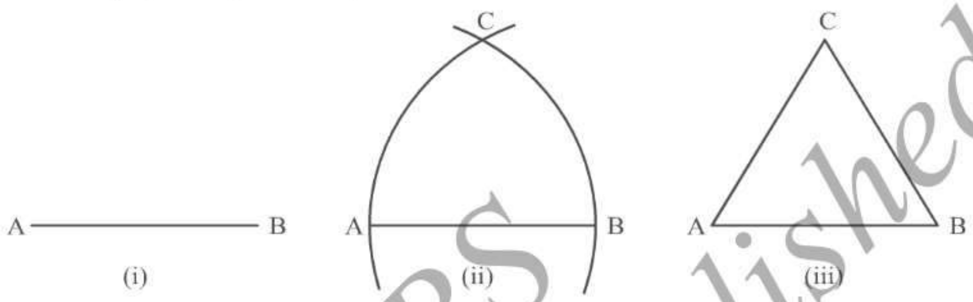
చిత్రం **2.7**

సాధన : పైన ఇవ్వబడిన చిత్రంలో AB + BC తోAC ఏకీభవించును. అంతేకాక యూక్లిడ్ 4 వ స్వయం సిద్ధం ప్రకారం ఒకదానితో ఒకటి ఏకభవించు అంశాలు ఒకదానికొకటి సమానం కాబట్టి AB + BC = AC ని ఊహించవచ్చు. ఈ సాధనలో రెండు బిందువుల గుండా ఒకే ఒక సరళ రేఖ పోతుందని ఊహించబడినదని గమనించండి.

©KTBS Not to be republished

ఉదాహరణ 2 : ఏదైనా ఒక రేఖాఖండము మీద ఒక సమబాహు త్రిభుజమును నిర్మించవచ్చని నిరూపించండి

సాధన : పైన ఇవ్వబడిన వ్యాఖ్యలో కొంత పొడవుగల ఒక రేఖాఖండము ఇవ్వబడినది. అది AB అనుకోండి (చిత్రం 2.8(i)చూడండి)



చిత్రం 2.8

ఇక్కడ మీరు ఒక నిర్మాణం చేయవలసి ఉంది. యూక్లిడ్ 3వ స్వీకృత సిద్ధాంతము ఉపయోగించి A బిందువు కేంద్రంగా మరియు AB వ్యాసార్థంగా ఒక వృత్తమును గీయవచ్చు (చిత్రం 2.8 (ii) చూడండి) అదే విధంగా B బిందువు కేంద్రంగా మరియు BA వ్యాసార్థంగా మరొక వృత్తమును గీయండి. ఈ రెండు వృత్తాలు ఒక బిందువు వద్ద ఖండిస్తాయి అనుకోండి. అవి C అనుకోండి ఇప్పుడు ΔABC ఏర్పడటానికి AC మరియు BC రేఖాఖండాలను గీయండి (చిత్రం 2.8 (iii)చూడండి).

ఇప్పుడు నీవు ఈ త్రిభుజం సమబాహుత్రిభుజమని నిరూపించాలి అంటే AB = AC = BC అని చూపాలి. ఇప్పుడు AB = AC (అవి ఒకే వృత్త వ్యాసార్థాలు కాబట్టి) అదేవిధంగా AB = BC (ఒకే వృత్త వ్యాసార్థాలు) ఈ రెండు కారణాలు మరియు ఒక అంశానికి సమానమైన అంశాలు ఒక దానికొకటి సమానమను యూక్లిడ్ స్వయం సిద్ధం నుండి AB = BC = AC అని నిర్ధారించవచ్చు.

కావున ΔABC ఒక సమబాహు త్రిభుజమవుతుంది ఎక్కడా ప్రస్తావించకుండానే యూక్లిడ్ A మరియు B లు కేంద్రాలుగా గీయబడిన రెండు వృత్తాలు ఒక బిందువు వద్ద ఖండించునవి ఊహించినట్లు గమనించండి. అనేక ఫలితాలలో మనము ఎక్కువగా ఉపయోగించే సిద్ధాంతమును ఇప్పుడు నిరూపిద్దాం.

సిద్ధాంతం 2.1 : రెండు విభిన్న రేఖలు ఒకదాని కంటే ఎక్కువ సామాన్య బిందువును కలిగి ఉండవు.

©KTBS Not to be republished

సాధన : ఇక్కడ l మరియు m రెండు రేఖలున్నాయి వాటికి ఒకే ఒక సామాన్య బిందువు ఉందని మనం నిరూపించాలి.

ఇప్పుడు రెండు రేఖలు రెండు బిందువుల వద్ద ఖండించునని అనుకుందాం. అవి P మరియు Q అనుకోండి. రెండు విభిన్న బిందువులు P మరియు Q గుండా పోవు రెండు రేఖలున్నాయి. కాని రెండు విభిన్న బిందువుల గుండా ఒకే ఒక రేఖ పోతుందన్న స్వయం సిద్ధానికి ఇది విరుద్ధంగా ఉంది. కాబట్టి రెండు రేఖలు రెండు విభిన్న బిందువుల వద్ద ఖండించునని మనము అనుకున్న ఉప కల్పన తప్పు.

దాని నుండి మనం ఏమి నిర్ధారించవచ్చు?

రెండు విభిన్న రేఖలు ఒకదానికంటే ఎక్కువ సామాన్య బిందువును కలిగి ఉండవని నిర్ధారణ అయినది.

©KTBS Not to be republished

అభ్యాసం 2.1

1. క్రింది వాటిలో ఏది సరి? ఏది తప్పు? కారణాలివ్వండి
   (i) ఒక బిందువు ద్వారా ఒక సరళరేఖ మాత్రమే పోతుంది.
   (ii) రెండు విభిన్న బిందువుల గుండా అనంతమైన సరళ రేఖలు పోతాయి.
   (iii) ఒక అంతము చెందు రేఖను ఇరువైపుల అనంతంగా పొడిగించవచ్చు.
   (iv) రెండు వృత్తాలు సమానమైతే, వాటి వ్యాసార్థాలు సమానంగా ఉంటాయి.
   (v) చిత్రం 2.9లో AB = PQ మరియుPQ = XY అయినAB = XY అవుతుంది.

చిత్రం **2.9**

2. క్రింద ఇవ్వబడిన పదాలలో ప్రతి దానికి నిర్వచనము ఇవ్వండి. దానికంటే ముందుగా నిర్వచించవలసిన వేరే పదాలు ఉన్నాయా? అవి ఏవి? వాటిని ఏవిధంగా నిర్వచిస్తావు?
   (i) సమాంతర రేఖలు
   (ii) లంబరేఖలు
   (iii) రేఖాఖండం
   (iv) వృత్త వ్యాసార్థం
   (v) చతురస్రం

3. క్రింద ఇవ్వ బడిన రెండు స్వీకృత సిద్ధాంతాలను తీసుకోండి

   (i) Aమరియు B లు రెండు విభిన్న బిందువు లైన A మరియు B ల మధ్య మూడవ బిందువు C ఉంటుంది.

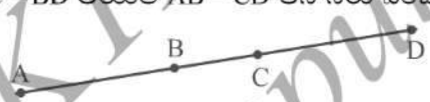
   (ii) ఒకే సరళరేఖ మీద కనీసం మూడు బిందువులుంటాయి .

ఈ స్వీకృత సిద్ధాంతాలలో ఏవైనా అనిర్వచిత పదాలు ఉన్నాయా? ఈ స్వీకృత సిద్ధాంతాలు పొందికగా ఉన్నాయా? అని యూక్లిడ్ స్వీకృత సిద్ధాంతాల నుండి వచ్చాయా? వివరించడి.

4. C అను బిందువు A మరియు B అను రెండు బిందువుల మధ్య AC = BC అగునట్లు ఉంటే $AC = \frac{1}{2}AB$ అని నిరూపించండి. చిత్రం గీచి వివరించండి.

5. 4వ ప్రశ్నలో C బిందువుని AB రేఖాఖండము యొక్క మధ్య బిందువు అంటారు. ప్రతి రేఖాఖండము ఒకే ఒక మధ్య బిందువుని కలిగి ఉంటుందని నిరూపించండి.

6. చిత్రం 2.10 లో AC = BD అయితే AB = CD అని నిరూపించండి.



చిత్రం **2.10**

7. యూక్లిడ్ స్వయం సిద్ధాలలో 5వ దానిని సర్వసామాన్యమైన నిజంగా ఎందుకు పరిగణించారు? (ఈ ప్రశ్న 5 వ స్వీకృత సిద్దాంతానికి సంబంధిచినది కాదని గమనించండి.)

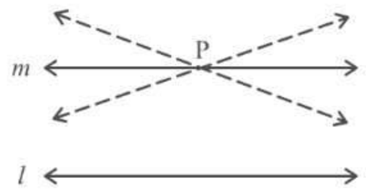
5.3. యూక్లిడ్ ఐదవ స్వీకృత సిద్ధాంతం యొక్క సమానమైన రూపాలు

గణిత చరిత్రలో యూక్లిడ్ ఐదవ స్వీకృత సిద్దాంతం చాలా అర్థవంతమైనది 2.2 విభాగము నుండి దానిని మరల గుర్తుకు తెచ్చుకోండి. దాని గూడార్థము రెండు రేఖల మీద ఒక రేఖ పడినప్పుడు, ఆ రేఖకు ఒకే వైపున గల అంతర కోణాల మొత్తం ఖచ్చితంగా 180° ఉంటే, ఆ రెండు రేఖలు ఖండించుకోవు. ఈ స్వీకృత సిద్దాంతానికి అనేక సమానమైన రూపాలు ఉన్నాయి. వాటిలో ఒకటైన ప్లేఫెయిర్ స్వయం సిద్ధం క్రింద ఇవ్వ బడినది (1729 లో స్కాటిష్ గణిత శాస్త్రవేత్త అయిన జాన్ ప్లేఫెయిర్ చే ఇవ్వ బడినది.)

"ప్రతి రేఖ l కి మరియు l మీద లేని ప్రతి బిందువు P కి lకి సమాంతరంగా P గుండా పోవు ఒకే ఒక రేఖ m ఉంటుంది."

చిత్రం 2.11నుండి P గుండా పోవు అన్ని రేఖలలో m రేఖ మాత్రమే lకి సమాంతరంగా ఉందని చూడవచ్చు.

©KTBS Not to be republished

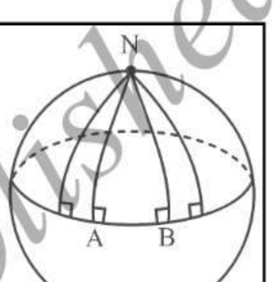


చిత్రం **2.11**

ఈ ఫలితాన్ని క్రింది విధంగా కూడా చెప్పవచ్చు:

రెండు ఖండించు రేఖలు ఒకే రేఖకు సమాంతరంగా ఉండవు.

యూక్లిడ్ కి తన మొదటి 28 సిద్ధాంతాలను నిరూపించుటకు 5 వ స్వీకృత సిద్ధాంతం అవసరం రాలేదు. నిజానికి 5 వ స్వీకృత సిద్ధాంతం కేవలం మొదటి నాలుగు స్వీకృత సిద్ధాంతాలు మరియు ఇతర స్వయం సిద్ధాలను మాత్రమే ఉపయోగించుకొని, నిరూపించగల సిద్ధాంతమని యూక్లిడ్ మరియు అనేక గణిత శాస్త్రవేత్తలు ఒప్పుకున్నారు. ఏది ఏమైనా ఐదవ స్వీకృత సిద్ధాంతమును ఒక సిద్ధాంతముగా నిరూపించుటకు చేసిన ప్రయత్నాలన్నీ విఫలమైనాయి. కాని ఈ ప్రయత్నాలు అనేక ఇతర



చిత్రం **2.12**

రేఖాగణితాలను సృష్టించుటకు దోహదపడ్డాయి. ఇది ఒక గొప్ప సాధన. ఈ రేఖాగణితాలు యూక్లిడ్ రేఖాగణితానికి పూర్తిగా భిన్నంగా ఉంటాయి. (వాటిని యూక్లిడ్ తన రేఖాగణితాలని పిలిచారు) వారిసృష్టిని ఆలోచన యొక్క చరిత్రలో ఒక ప్రత్యేకమైన చిహ్నంగా పరిగణించారు. ఎందుకంటే అప్పటివరకు ప్రతి ఒక్కరు యూక్లిడ్ రేఖాగణితమును మాత్రమే రేఖా గణితం గాను, ప్రపంచమే యూక్లిడ్‌గా నమ్మారు. ఇప్పుడు మనం నివసించే విశ్వంలోని రేఖాగణితాన్ని యూక్లిడేతర రేఖాగణితంగా చూపారు. నిజానికి దానిని గోళీయ రేఖాగణితం అంటారు. గోళీయ రేఖాగణితంలో రేఖలు సరళరేఖలు కావు. అవి పెద్ద వృత్తాల భాగాలు (అంటే వృత్తాలు, ఒక గోళమును దాని కేంద్రము గుండాపోవు సమతలాలు ఖండించినప్పుడు ఏర్పడతాయి).

చిత్రం 2.12 లో AN మరియు BN రేఖలు (ఒక గోళం యొక్క పెద్ద వృత్తాల భాగాలు) ఒకే రేఖ ABకి లంబంగా ఉన్నాయి. AB రేఖకు ఒకేవైపున గల కోణాల మొత్తం రెండు లంబకోణాలకు తక్కువ లేనప్పటికీ అవి కలుసుకుంటున్నాయి. (నిజానికి అది $90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$.) NAB త్రిభుజం యొక్క కోణాల మొత్తం 180° కంటే ఎక్కువని కూడా గమనించండి. ఎందుకంటే $\angle A + \angle B = 180^\circ$.కాబట్టి యూక్లిడ్ రేఖాగణితం సమతలంలోని చిత్రాలకు మాత్రమే వర్తిస్తుంది. వక్రతలాల మీద అది విఫలమవుతుంది.

ఇప్పుడు ఒక ఉదాహరణ చూద్దాం,

©KTBS Not to be republished

ఉదాహరణ 3 : క్రింది వ్యాఖ్యను తీసుకోండి. ప్రతిచోట ఒకదాని నుండి మరొకటి సమాన దూరంలోగల ఒక జత సరళరేఖలు ఉంటాయి. ఈ వ్యాఖ్య యూక్లిడ్ అయిదవ స్వీకృత సిద్ధాంతం యొక్క తిన్నని పర్యవసానం అవుతుందా? వివరించండి.

సాధన : ఒక సరళ రేఖ *l* ,*l* మీద లేని ఒక బిందువు P ని తీసుకోండి. . ప్లేఫెయిర్ స్వయం సిద్ధం (అయిదవ స్వీకృత సిద్ధాంతానికి సమానమైన) ప్రకారం P గుండా *l* కి సమాంతరంగా ఒకే ఒక రేఖ *m* ఉంటుంది.

ఒక రేఖ నుండి ఒక బిందువు యొక్క దూరం ఆ బిందువు నుండి ఆ రేఖకు గీయబడిన లంబరేఖ పొడవు అవుతుంది. *l* నుండి *m* మీద ఏదైనా బిందువు కి గల దూరం, *m* నుండి *l* మీద ఏదైనా బిందువు కు గల దూరం సమానమవుతాయి. కాబట్టి ఈ రెండు రేఖలు ప్రతి చోట ఒక దాని నుండి మరొకటి సమానదూరంలో ఉంటాయి.

గమనిక : తర్వాతి కొన్ని అధ్యాయాలలో మీరు చదవబోయే రేఖాగణితం యూక్లిడ్ రేఖాగణితం. ఏది ఏమైనా మనం ఉపయోగించే స్వయం సిద్ధాలు మరియు సిద్ధాంతాలు యూక్లిడ్ స్వయం సిద్ధాలు, సిద్ధాంతాలకు భిన్నంగా ఉండవచ్చు.

అభ్యాసం 2.2

1. యూక్లిడ్ అయిదవ స్వీకృత సిద్ధాంతమును అర్థం చేసుకోవడానికి సులభంగా ఉండునట్లు ఏ విధంగా తిరిగి రాస్తావు?
2. యూక్లిడ్ అయిదవ స్వీకృత సిద్ధాంతం సమాంతర రేఖల ఉనికిని తెలియ చేస్తుందా? వివరించండి.

2.4 సారాంశం

ఈ అధ్యాయంలో క్రింది అంశాలను నీవు అధ్యయనం చేశావు:

1. యూక్లిడ్ ఒక బిందువు, రేఖ మరియు ఒక తలములను నిర్వచించినప్పటికీ, ఆ నిర్వచనాలను గణిత శాస్త్ర వేత్తలు అంగీకరించలేదు. కాబట్టి అ పదాలను ఇప్పుడు అనిర్వచితాలుగా తీసుకొన్నారు.
2. స్వయం సిద్ధాలు లేక స్వీకృత సిద్ధాంతాలు సర్వ సామాన్యమైన స్పష్టమైన నిజాలుగా ఊహించబడినవి అవి నిరూపించ బడలేదు.

©KTBS Not to be republished

3. సిద్ధాంతాలు అనేవి నిర్వచనాలు, స్వయం సిద్ధాలు, ముందుగా నిరూపించబడిన వ్యాఖ్యలు, నిగమన పద్ధతులను ఉపయోగించుకొని నిరూపించబడిన వ్యాఖ్యలు.

4. కొన్ని యూక్లిడ్ స్వయం సిద్ధాలు:

    (i) ఒకే అంశానికి సమానమైన అంశాలు ఒకదానికొకటి సమానం

    (ii) సమాన అంశాలకు సమాన అంశాలను కూడినపుడు వాటి మొత్తాలు సమానం

    (iii) సమాన అంశాల నుండి సమాన అంశాలను తీసివేసినప్పుడు శేషములు సమానం

    (iv) ఒక దానితో ఒకటి ఏకీభవించు అంశాలు ఒకదాని కొకటి సమానం.

    (v) పూర్ణరాశి దాని భాగం కంటే పెద్దది.

    (vi) సమాన అంశాల రెట్టింపులు ఒకదానికొకటి సమానం.

    (vii) సమాన అంశాల అర్ధాలు ఒకదానికొకటి సమానం.

5. యూక్లిడ్ స్వీకృత సిద్ధాంతాలు:

    స్వీకృత సిద్ధాంతం 1 : ఒక బిందువు నుండి మరి ఏ ఇతర బిందువుకైనా ఒక సరళ రేఖను గీయవచ్చు.

    స్వీకృత సిద్ధాంతం 2 : ఒక అంతంచెందు రేఖను అనంతంగా పొడిగించవచ్చు.

    స్వీకృత సిద్ధాంతం 3 : ఏ కేంద్రతోనైనా ఏ వ్యాసార్ధంతోనైనా ఒక వృత్తమును గీయవచ్చు.

    స్వీకృత సిద్ధాంతం 4 : అన్ని లంబకోణాలు ఒకదాని కొకటి సమానం.

    స్వీకృత సిద్ధాంతం 5 : రెండు సరళ రేఖల మీద పడు ఒక సరళరేఖ, దానికి ఒకే వైపున గల అంతరకోణాల మొత్తం రెండు లంబకోణాల కంటే తక్కువ ఉండునట్లు ఉంటే, ఆ రెండు రేఖలను అనంతంగా పొడిగిస్తే, అవి అదే వైపున కలుసుకుంటాయి.

©KTBS Not to be republished

6. యూక్లిడ్ అయిదవ స్వీకృత సిద్ధాంతం యొక్క రెండు రూపాలు.

   (i) ప్రతి రేఖ l కి మరియు l మీద లేని ప్రతి బిందువు P కి l కి సమాంతరంగా P గుండా పోవు ఒకే ఒక రేఖ m ఉంటుంది.

   (ii) రెండు ఖండించు రేఖలు ఒకే రేఖకు సమాంతరంగా ఉండవు.

7. మొదటి 4 స్వీకృత సిద్దాంతాలను ఉపయోగించుకొని, యూక్లిడ్ అయిదవ స్వీకృత సిద్ధాంతమును నిరూపించుటకు చేసిన ప్రయత్నాలు విఫలమైనాయి కాని అని అనేక ఇతర రేఖాగణితాలను కనుగొనుటకు దోహదపడ్డాయి. వాటిని యూక్లిడేతర రేఖాగణితాలు అంటారు.

©KTBS Not to be republished

అధ్యాయం - 3

రేఖలు మరియు కోణాలు

3.1 పరిచయం

అధ్యాయం2లో మీరు ఒక రేఖ గీయడానికి కనీసం రెండు బిందువులు అవసరమని చదివారు. అంతేగాక కొన్ని స్వయం సిద్ధాలు చదివారు. వాటి సహాయంతో మరి కొన్ని వ్యాఖ్యలను నిరూపించారు. ఈ అధ్యాయంలో రెండు సరళరేఖలు పరస్పరం ఖండించినప్పుడు ఏర్పడే కోణాల ధర్మాలు మరియు ఒక సరళరేఖ రెండు లేక అంతకంటే ఎక్కువ సమాంతర రేఖలను విభిన్న బిందువుల వద్ద ఖండించినప్పుడు ఏర్పడే కోణాల ధర్మాల గురించి నేర్చుకుంటారు. అంతేకాక నిగమన పద్ధతిలో కొన్ని వ్యాఖ్యలను నిరూపించడానికి ఈ ధర్మాలను ఉపయోగిస్తారు (అనుబంధం - 1 చూడండి) క్రిందటి తరగతులలో కొన్ని కార్యాచరణాల ద్వారా ఈ వ్యాఖ్యలను నిరూపించారు .

నిత్య జీవితంలో సమతలాల అంచుల మధ్య ఏర్పడే వివిధ రకాల కోణాలను చూస్తారు. సమతలాల నుపయోగించి అదేవిధమైన నమూనాను తయారు చేయాలంటే, మీకు కోణాల యొక్క పూర్తి జ్ఞానం ఉండాలి. ఇప్పుడు నీవు మీ పాఠశాల వస్తుప్రదర్శనశాలలో ఉంచడానికి వెదురు పుల్లలతో ఒక గుడిసె యొక్క నమూనాను తయారు చేయాలనుకున్నావు. నీవు దానిని ఎలా తయారు చేయాలో ఊహించు. నీవు కొన్ని పుల్లలను ఒకదానికొకటి సమాంతరంగా ఉంచి, కొన్ని పుల్లలను ఏటవాలుగా ఉంచాలి. ఒక వాస్తు శిల్పి బహు అంతస్థుల కట్టడానికి నమూనా గీయటానికి ఖండించు రేఖలు మరియు విభిన్న కోణాల వద్ద సమాంతర రేఖలను గీయవలసి వస్తుంది. రేఖలు మరియు కోణాల ధర్మాల జ్ఞానం లేకపోతే ఆ వాస్తుశిల్పి, కట్టడం నమూనా గీయగలరా?

©KTBS Not to be republished

విజ్ఞానంలో కాంతిధర్మాలను మీరు కిరణ చిత్రాలను గీచి నేర్చుకుంటారు. ఉదాహరణకు కాంతి ఒక యానకం నుండి మరొక యానకం లోనికి ప్రసరించునపుడు దాని వక్రీభవన ధర్మమునకు అధ్యయనం చేయడానికి మీరు ఖండించు రేఖలు మరియు సమాంతర రేఖల ధర్మాలను ఉపయోగిస్తారు. ఒక వస్తువు మీద రెండు లేక అంతకంటే ఎక్కువ బలాలు పని చేయునప్పుడు, ఫలిత బలాన్ని అధ్యయనం చేయడానికి నీవు బలాలను రేఖాఖండాలలో సూచించి, చిత్రం గీస్తావు. ఆ సమయంలో కిరణాలు (రేఖా ఖండాలు) సమాంతరంగా లేక పరస్పరం ఖండించునప్పుడు కోణాల మధ్య సంబంధమును నీవు తెలుసుకోవాలి. ఒక గోపురం ఎత్తు కనుగొనటానికి లేదా లైట్ హౌస్ నుండి ఓడ యొక్క దూరం కనుగొనడానికి, ఎవరైనా క్షితిజ రేఖ మరియు దృష్టిరేఖల మధ్య ఏర్పడే కోణం గురించి తెలుసుకోవాలి. రేఖలు మరియు కోణాల నుపయోగించి అనేక ఉదాహరణలు ఇవ్వవచ్చు. రేఖాగణితంలోని రాబోవు అధ్యాయాలలో అనేక ముఖ్యమైన ధర్మాలను ఊహించుటకు రేఖలు మరియు కోణాల ధర్మాలను ఉపయోగిస్తారు. ముందుగా క్రిందటి తరగతులలో నేర్చుకున్న రేఖలు మరియు కోణాలకు సంబంధించిన పదాలు మరియు నిర్వచనాలను పునర్విమర్శ చేద్దాం.

3.2 మూల పదాలు మరియు నిర్వచనాలు.

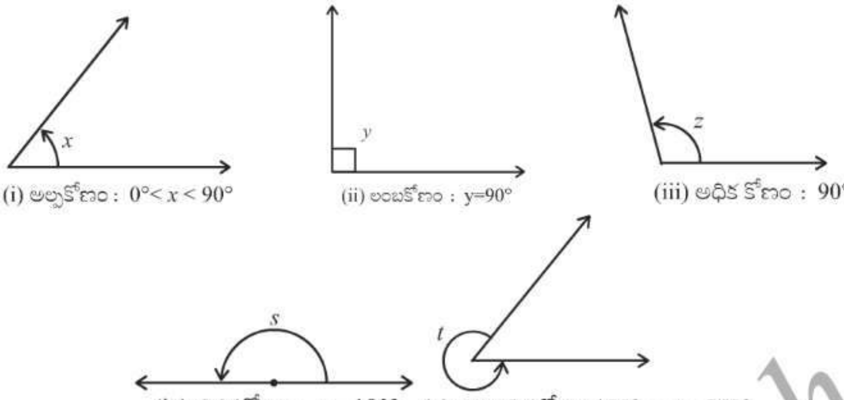
రెండు చివరి బిందువులు గల ఒక రేఖ యొక్క కొంత భాగమును రేఖాఖండము అనియు ఒక చివరి బిందువు గల రేఖ యొక్క కొంత భాగమును కిరణము అంటారని గుర్తు తెచ్చుకోం డి. AB రేఖా ఖండమును $\overline{AB}$ లో సూచిస్తాము మరియు దాని పొడవునం AB లో కిరణమును $\overrightarrow{AB}$ లోను. రేఖను $\overleftrightarrow{AB}$ లోను సూచిస్తాము. ఏది ఏమైనా మనము. ఈ సంకేతాలను ఉపయోగించము. AB రేఖాఖండము, AB కిరణము, AB పొడవు మరియు AB రేఖ అన్నింటికీ AB గుర్తునే ఉపయోగిస్తాము. సందర్భానుసారంగా అర్థం తెలుస్తుంది. కొన్నిసార్లు రేఖలను సూచించటానికి చిన్న అక్షరాలు l,m,n మొదలగు వాటిని ఉపయోగిస్తారు.

మూడు లేక అంతకంటే ఎక్కువ బిందువులు ఒకే రేఖ మీద ఉంటే వాటిని ఏకరేఖా స్థితములు అంటారు.

ఆవిధంగా లేకపోతే వాటిని ఏకరేఖా స్థితములు కాని బిందువులు అంటారు.

రెండు రేఖలు ఒకే చివరి బిందువు నుండి ఆరంభమైనప్పుడు కోణం ఏర్పడుతుందని గుర్తు తెచ్చుకోండి. ఒక కోణమును ఏర్పరచు కిరణాలను ఆ కోణము యొక్క భుజాలు అనియు చివరిబిందువుని ఆ కోణము యొక్క శీర్షము అనియు అంటారు. క్రిందటి తరగతులలో మీరు అల్పకోణము, లంబకోణము, అధిక కోణము, సరళకోణం మరియు సరళాధిక కోణం వంటి వివిధ రకాల కోణాల గురించి అధ్యయనం చేశారు. (చిత్రం 3.1చూడండి).

© KTBS Not to be republished



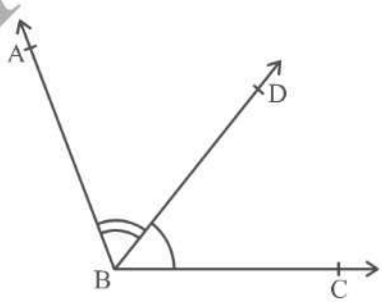
(i) అల్పకోణం : $0^\circ < x < 90^\circ$ (ii) లంబకోణం : $y=90^\circ$ (iii) అధిక కోణం : $90^\circ < z < 180^\circ$

(iv) సరళ కోణం : $s = 180^\circ$ (v) సరళాధిక కోణం: $180^\circ < t < 360^\circ$

చిత్రం : 3.1 కోణాల రకాలు.

ఒక అల్ప కోణం కొలత 0° మరియు 90° మధ్య ఉంటుంది. లంబకోణం ఖచ్చితంగా 90°కి సమానం. 90° కంటే ఎక్కువ మరియు 180° కంటే తక్కువ ఉన్న కోణమును అధిక కోణం అంటారు. ఒక సరళకోణం 180° కి సమానం. 180° కంటే ఎక్కువ మరియు 360° కంటే తక్కువ ఉన్న కోణమును సరళాధిక కోణం అంటారు. రెండు కోణాల మొత్తం 90° అయితే, వాటిని పూరకకోణాలు అంటారు. రెండు కోణాల మొత్తం 180° అయితే వాటిని పరిపూరక కోణాలు అంటారు.

క్రిందటి తరగతులలో మీరు ఆసన్న కోణాల గురించి అధ్యయనం చేశారు (చిత్రం 3.2 చూడండి). రెండు కోణాలు సామాన్యశీర్షము, ఒక సామాన్య భుజము, సామాన్య భుజాలు కాని భుజాలు సామాన్య భుజానికి ఇరువైపుల ఉంటే వాటిని ఆసన్నకోణాలు అంటారు. చిత్రం 3.2లో ∠ABD మరియు ∠DBC లు ఆసన్నకోణాలు. BD కిరణం వాటి సామాన్య భుజం మరియు B బిందువు వాటి సామాన్య శీర్షము. BA మరియు BC కిరణాలు సామాన్యం కాని భుజాలు. అంతేకాక రెండు కోణాలు ఆసన్నకోణాలైతే వాటి మొత్తం, సామాన్యం కాని భుజాలతో ఏర్పడిన కోణానికి సమానం. అందువలన ∠ABC=∠ABD+∠DBC అని రాయవచ్చు.

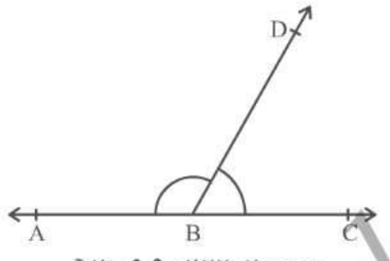


చిత్రం **3.2** : ఆసన్నకోణాలు

∠ABC మరియు ∠ABD లు ఆసన్న కోణాలు కాదని గమనించండి. ఎందుకు? ఎందుకంటే సామాన్యం కాని భుజాలు BD మరియు BC లు సామాన్య భుజం BA కి ఒకే వైపున ఉన్నాయి.

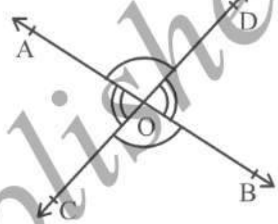
©KTBS Not to be republished

చిత్రం 3.2 లో సామాన్యం కాని భుజాలు BA మరియు BC లు ఒక సరళరేఖను ఏర్పరచిన, అప్పుడు అది చిత్రం 3.3 మాదిరిగా ఉంటుంది ఈ సందర్భంలో ∠ABD మరియు ∠DBC లను సరళయుగ్మం అంటారు.



చిత్రం 3.3 : సరళ యుగ్మాలు

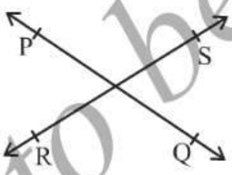
రెండు రేఖలు AB మరియు CD లు పరస్పరం 'O' బిందువు వద్ద ఖండించినప్పుడు ఏర్పడు శీర్షాభిముఖ కోణాలను గుర్తు తెచ్చుకోండి. (చిత్రం 3.4 చూడండి) ఇక్కడ రెండు జతల శీర్షాభిముఖ కోణాలుంటాయి. ఒక జత ∠AOD మరియు ∠BOC. మరొక జతని నీవు కనుగొనగలవా?



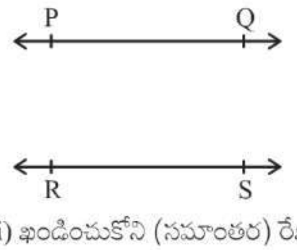
చిత్రం 3.4 శీర్షాభిముఖ కోణాలు

3.3 ఖండించు రేఖలు మరియు ఖండించుకోని రేఖలు

ఒక కాగితం మీద PQ మరియు RS అను రెండు విభిన్న రేఖలను గీయండి. చిత్రం 3.5 (i) మరియు చిత్రం, 3.5 (ii) లలో చూపబడిన విధంగా వాటిని రెండు వేర్వేరు విధాలుగా గీయవచ్చునని తెలుసుకుంటారు.



(i) ఖండిచు రేఖలు



(ii) ఖండించుకోని (సమాంతర) రేఖలు

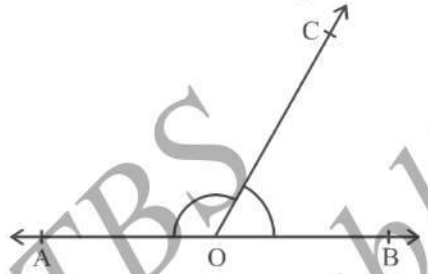
చిత్రం 3.5 : రెండు రేఖలను వేర్వేరు విధాలుగా గీయడం

ఒక సరళరేఖను ఇరువైపులా అనంతంగా పొడిగించవచ్చని గుర్తు చేసుకోండి. చిత్రం 3.5 (i) లో PQ మరియు RS లు ఖండించు రేఖలు మరియు చిత్రం 3.5 (ii) లో సమాంతర రేఖలు. ఈ సమాంతర రేఖల మీద విభిన్న బిందువుల వద్ద సామాన్య లంబరేఖల పొడవులు సమానమని గమనించండి ఈ సమాన పొడవును రెండు సమాంతర రేఖల మధ్యదూరమని అంటారు.

©KTBS Not to be republished

3.4. కోణాల జతలు

3.2 విభాగంలో పూరకకోణాలు, పరిపూరక కోణాలు, ఆసన్నకోణాలు, సరళ యుగ్మం వంటి కొన్ని కోణాల జతల నిర్వచనాలు నేర్చుకున్నారు. ఈ కోణాల మధ్య సంబంధమును గమనించారా? ఇప్పుడు ఒక కిరణము, ఒక సరళరేఖ మీద నిలబడినప్పుడు ఏర్పడే కోణాల మధ్య సంబంధమును కనుగొందాం. చిత్రం 3.6 లో చూపిన విధంగా ఒక కిరణం, ఒక రేఖ మీద నిలబడినట్లు చిత్రం గీయండి. సరళరేఖను AB అని, కిరణమును OC అని పేర్కొనండి.



చిత్రం **3.6** సరళయుగ్మాలు

O బిందువు వద్ద ఏర్పడిన కోణాలు ఏవి? అవి $\angle AOC$, $\angle BOC$ మరియు $\angle AOB$ మనము $\angle AOC + \angle BOC = \angle AOB$ .... (1) అని రాయవచ్చా? అవును! (ఎందుకు? 3.2 విభాగం లోని ఆసన్నకోణాల ను చూడండి) $\angle AOB$ కొలత ఎంత? అది 180° (2) ఉంటుంది. (ఎందుకు)?

పై చర్చ నుండి మనము క్రింది స్వయం సిద్ధమును చెప్పవచ్చు.

స్వయం సిద్ధం 3.1: ఒక సరళ రేఖ మీద ఒక కిరణం నిలబడితే ఏర్పడిన ఆసన్న కోణాల మొత్తం 180°.

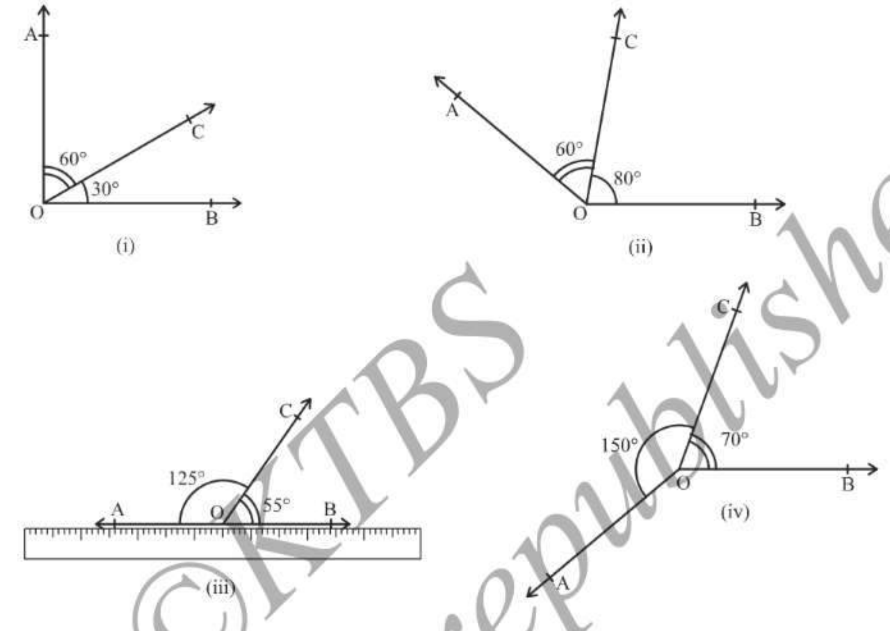
రెండు ఆసన్నకోణాల మొత్తం 180° అయితే, వాటిని సరళ యుగ్మం అంటారని గుర్తు తెచ్చుకోండి. స్వయం సిద్ధ. 3.1 లో ఒక సరళరేఖ మీద ఒక కిరణం నిలబడుతుందని ఇవ్వబడింది. దీని నుండి ఏర్పడిన రెండు ఆసన్నకోణాల మొత్తం 180° అని మనము నిర్ధారించాము. స్వయం సిద్ధం 3.1 ని మనం ఇంకొక రకంగా రాయవచ్చా? అంటే స్వయం సిద్ధం 3.1 యొక్క "నిర్ధారణ"ని "ఇవ్వబడినది" గాను "ఇవ్వబడిన" దానిని "నిర్ధారణ"గాను తీసుకుంటే అది క్రింది విధంగా ఉంటుంది.

(A) రెండు ఆసన్నకోణాల మొత్తం 180° అయితే ఒక కిరణం ఒక సరళరేఖ మీద నిలబడుతుంది. (అంటే సామాన్యం కాని భుజాలు సరళరేఖను ఏర్పరచును)

ఇప్పుడు స్వయం సిద్ధం 3.1 మరియు వ్యాఖ్య (A)లు పరస్పరం విలోమంగా కనిపిస్తున్నాయి. మనము వాటిని ఒకదానికొకటి విపర్యము అంటాము. వ్యాఖ్య (A) సరినా, కాదా అనేది పరీక్షిద్దాం

©KTBS Not to be republished

చిత్రం 3.7లో చూపబడిన విధంగా విభిన్న కొలతలతో ఆసన్న కోణాలను గీయండి. ప్రతి సందర్భంలో స్కేలును సామాన్యం కాని భుజాలలో ఒకదాని వెంబడి ఉంచండి. మరొక సామాన్యం కాని భుజం స్కేలు వెంబడి ఉంటుందా?



చిత్రం : **3.7** విభిన్న కొలతలుగల ఆసన్నకోణాలు.

చిత్రం: 3.7(iii) లో మాత్రమే సామాన్యంకాని భుజాలు రెండూ స్కేలు వెంబడి ఉన్నాయని తెలుస్తుంది. అంటే A, O మరియు B బిందువులు ఒకే రేఖ మీద ఉండి OC కిరణం దాని మీద నిలబడింది. అంతేకాక $\angle AOC + \angle COB = 125^\circ + 55^\circ = 180^\circ$ అవుతుంది. దీనినుండి వ్యాఖ్య (A) సరియైనదని నిర్ధారించవచ్చు. కాబట్టి దానిని ఒక స్వయం సిద్ధం రూపంలో క్రిందివిధంగా చెప్పవచ్చు.

స్వయం సిద్ధం 3.2 : రెండు ఆసన్న కోణాల మొత్తం 180° అయిన వాటి సామాన్యం కాని భుజాలు సరళరేఖను ఏర్పరచును.

స్పష్టమైన కారణాల వలన పైన ఇవ్వబడిన రెండు స్వయం సిద్ధాలను కలిపి సరళ స్వయం సిద్ధయుగ్మం అంటారు.

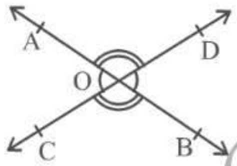
రెండు సరళరేఖలు పరస్పరం ఖండించునపుడు ఇది ఏవిధంగా ఉంటుందో పరీక్షిద్దాం.

క్రిందటి తరగతులలో నేర్చుకున్నదాని ప్రకారం రెండు సరళరేఖలు ఖండించినపుడు శీర్షాభిముఖ కోణాలు సమానమని గుర్తుతెచ్చుకోండి. ఈ ఫలితాన్ని మనం ఇపుడు నిరూపిద్దాం.

©KTBS Not to be republished

సాధనకు కావలసిన అంశాలను అనుబంధం – 1 లో చూచి, క్రింద ఇవ్వబడిన సాధనను అధ్యయనం చేసేటపుడు వాటిని మనసులో ఉంచుకోండి.

సిద్ధాంతం 3.1 : రెండు సరళరేఖలు పరస్పరం ఖండించుకొంటే శీర్షాభిముఖ కోణాలు సమానం



చిత్రం **3.8** శీర్షాభిముఖ కోణాలు

సాధన : పై వ్యాఖ్యలో రెండు సరళ రేఖలు పరస్పరం ఖండించు కొనునని ఇవ్వబడినది. కాబట్టి చిత్రం 3.8 లో చూపబడిన విధంగా AB మరియు CD రేఖలు 'O' వద్ద ఖండించు చున్నని అనుకొనుము. అవి రెండు జతల శీర్షాభిముఖ కోణాలను ఏర్పరచును. అని (i)$\angle AOC$ మరియు$\angle BOD$ (ii) $\angle AOD$ మరియు $\angle BOC$. మనము $\angle AOC = \angle BOD$ మరియు $\angle AOD = \angle BOC$ అని నిరూపించాలి.

ఇప్పుడు OA కిరణం CD రేఖ మీద నిలబడింది కాబట్టి

$\angle AOC + \angle AOD = 180°$ (సరళ స్వయం సిద్ధయుగ్మం) .... (1)

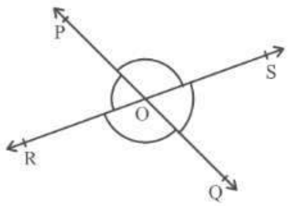
$\angle AOD + \angle BOD = 180°$ అని రాయవచ్చా? అవును! (ఎందుకు?) .... (2)

(1) మరియు (2)ల నుండి $\angle AOC + \angle AOD = \angle AOD + \angle BOD$ అని రాయవచ్చు దాని నుండి $\angle AOC = \angle BOD$ (విభాగం 2.2 స్వయం సిద్ధం 3 చూడండి)

ఇదే విధంగా $\angle AOD = \angle BOC$ అని నిరూపించవచ్చు. ఇప్పుడు సరళ స్వయం సిద్ధ యుగ్మం మరియు సిద్ధాంతం 3.1 ఆధారంగా కొన్ని ఉదాహరణలు చేద్దాం

ఉదాహరణ 1 : చిత్రం 3.9 లో PQ మరియు RS రేఖలు పరస్పరం 'O' బిందువు వద్ద ఖండించుచున్నాయి.

$\angle POR : \angle ROQ = 5:7$ అయిన అన్ని కోణాలను కనుగొనండి



చిత్రం : **3.9**

సాధన : $\angle POR + \angle ROQ = 180°$ (సరళ యుగ్మం)

కాని $\angle POR : \angle ROQ = 5 : 7$ (ఇవ్వబడినది)

కాబట్టి $\angle POR = \frac{5}{12} \times 180° = 75°$

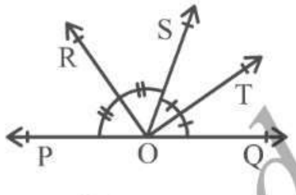
అదేవిధంగా $\angle ROQ = \frac{7}{12} \times 180° = 105°$

©KTBS Not to be republished

ఇప్పుడు $\angle POS = \angle ROQ = 105^\circ$ (శీర్షాభిముఖ కోణాలు)

మరియు $\angle SOQ = \angle POR = 75^\circ$ (శీర్షాభిముఖ కోణాలు)

ఉదాహరణ 2 : చిత్రం 3.10 లో OS కిరణం, POQ రేఖ మీద నిలబడింది. OR కిరణం మరియు OT కిరణాలు క్రమంగా $\angle POS$ మరియు $\angle SOQ$ ల కోణసమద్విఖండన రేఖలు $\angle POS = x$ అయిన $\angle ROT$ ని కనుగొనండి.



చిత్రం : **3.10**

సాధన : OS కిరణం, POQ రేఖ మీద నిలబడింది

కాబట్టి $\angle POS + \angle SOQ = 180^\circ$

కాని $\angle POS = x$ కావున

$x + \angle SOQ = 180^\circ$

$\angle SOQ = 180^\circ - x$

OR కిరణం $\angle POS$ ని సమద్విఖండన చేస్తుంది.

కాబట్టి $\angle ROS = \frac{1}{2} \angle POS$

$= \frac{1}{2} \times x$

$= \frac{x}{2}$

అదేవిధంగా $\angle SOT = \frac{1}{2} \times \angle SOQ$

$= \frac{1}{2} \times (180^\circ - x)$

$= 90^\circ - \frac{x}{2}$

ఇప్పుడు $\angle ROT = \angle ROS + \angle SOT$

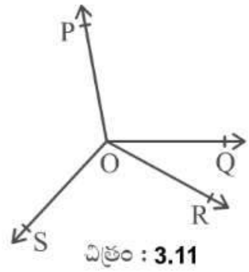
$= \frac{x}{2} + 90^\circ - \frac{x}{2}$

$= 90^\circ$

ఉదాహరణ 3 : చిత్రం 3.11 లో OP, OQ, OR మరియు OS లు నాలుగు కిరణాలు.

$\angle POQ + \angle QOR + \angle SOR + \angle POS = 360^\circ$

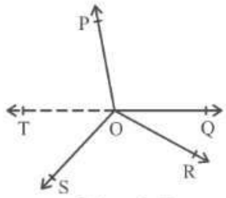
అని నిరూపించండి.



చిత్రం : **3.11**

©KTBS Not to be republished

సాధన : చిత్రం 3.11 లో OP, OQ, OR,లేక OS కిరణాలలో ఒకదానిని ఏదైనా ఒక బిందువు వరకు వెనుకకు పొడిగించాలి. OQ కిరణాన్ని T వరకు వెనుకకు పొడిగిద్దాం అప్పుడు TOQ ఒక రేఖ అవుతుంది (చిత్రం 3.12 చూడండి)



చిత్రం : 3.12

ఇప్పుడు OP కిరణం TOQ రేఖ మీద నిలబడింది. కాబట్టి

కాబట్టి $\angle TOP + \angle POQ = 180^\circ$ (1) (సరళ స్వయం సిద్ధయుగ్మం)

ఇదేవిధంగా OS కిరణంTOQ రేఖ మీద నిలబడుతుంది.

కాబట్టి $\angle TOS + \angle SOQ = 180^\circ$ (2)

కాని $\angle SOQ = \angle SOR + \angle QOR$

(2) నుండి $\angle TOS + \angle SOR + \angle QOR = 180^\circ$ (3)

(1) మరియు (3) లను కూడగా

$\angle TOP + \angle POQ + \angle TOS + \angle SOR + \angle QOR = 360^\circ$ (4)

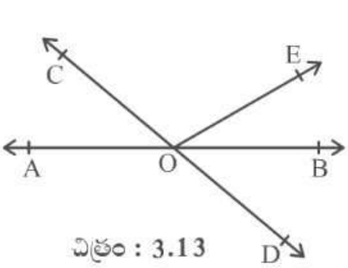
కాని $\angle TOP + \angle TOS = \angle POS$

కాబట్టి (4) నుండి

$\angle POQ + \angle QOR + \angle SOR + \angle POS = 360^\circ$

అభ్యాసం 3.1

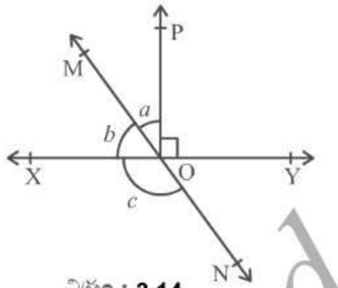
(1) చిత్రం 3.13 లో AB మరియు CD రేఖలు O వద్ద ఖండించి నవి. $\angle AOC + \angle BOE = 70^\circ$ మరియు $\angle BOD = 40^\circ$ అయిన $\angle BOE$ మరియు సరళాధిక $\angle COE$ లను కనుగొనండి.



చిత్రం : 3.13

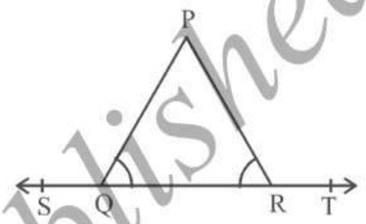
©KTBS Not to be republished

(2) చిత్రం 3.14లో XYమరియు MNరేఖలు O వద్ద ఖండించినవి. $\angle POY = 90^o$ మరియు $a : b = 2 : 3$ అయిన $\angle C$ ని కనుగొనండి.



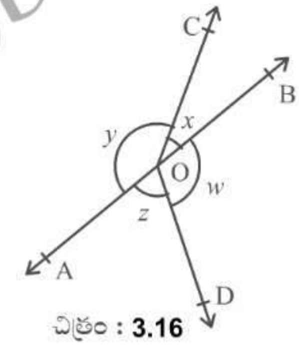
చిత్రం : **3.14**

(3) చిత్రం 3.15 లో $\angle PQR = \angle PRQ$ అయిన $\angle PQS = \angle PRT$ అని నిరూపించండి.



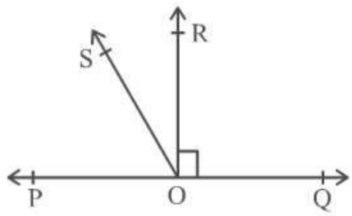
చిత్రం : **3.15**

(4) చిత్రం 3.16 లో $x + y = w + z$ అయిన AOB ఒక సరళరేఖ అని నిరూపించండి.



చిత్రం : **3.16**

(5) చిత్రం 3.17 లో POQ ఒక సరళ రేఖ OR కిరణం PQ రేఖకు లంబంగా ఉంది OP మరియు OR కిరణాల మధ్య మరొక కిరణం OS కింది $\angle ROS = \frac{1}{2}$ ($\angle QOS - \angle POS$) అని నిరూపించండి.



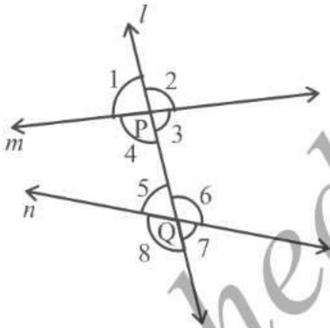
చిత్రం : **3.17**

(6) $\angle XYZ = 64^o$ మరియు XY రేఖ P బిందువు వరకు పొడిగించబడినది ఈ సమాచారానికి ఒక చిత్రం గీయండి YQ కిరణం. $\angle ZYP$ ని సమద్విఖండన చేస్తే $\angle XYQ$ మరియు సరళాధిక $\angle QYP$ లను కనుగొనండి.

©KTBS Not to be republished

3.5 సమాంతర రేఖలు మరియు తిర్యగ్రేఖ

రెండు లేక అంతకంటే ఎక్కువ రేఖలను విభిన్న బిందువుల వద్ద ఖండించే రేఖను తిర్యగ్రేఖ అంటారని గుర్తుతెచ్చుకోండి.(చిత్రం 3.18 చూడండి). l అను రేఖ, m మరియు n రేఖలను క్రమంగా P మరియు Q బిందువుల వద్ద ఖండిస్తుంది. కాబట్టి l రేఖ m మరియు n రేఖలకు తిర్యగ్రేఖ అవుతుంది.



చిత్రం : 3.18

P మరియు Q బిందువుల వద్ద నాలుగు కోణాలేర్పడినవని గమనించండి.

ఈ కోణాలను చిత్రం 3.18 లో చూపిన విధంగా $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$ ..... $\angle 8$ అనుకుందాం.

$\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 7$ $\angle 8$ లను బాహ్యకోణాలు అనియు $\angle 3$, $\angle 4$, $\angle 5$ మరియు$\angle 6$ లను అంతరకోణాలు అనియు అంటారు.

క్రిందటి తరగతులలో రెండు రేఖలను ఒక తిర్యగ్రేఖ ఖండించినప్పుడు ఏర్పడే కొన్ని కోణాల జతలకు మీరు కొన్ని పేర్లు పెట్టినట్లు గుర్తుకు తెచ్చుకోండి. అవి క్రింది విధంగా ఉన్నాయి.

(a) సదృశ కోణాలు:

(i) $\angle 1$ మరియు $\angle 5$ (ii) $\angle 2$ మరియు $\angle 6$

(iii) $\angle 4$ మరియు $\angle 8$ (iv) $\angle 3$ మరియు $\angle 7$

(b) పర్యాయ అంతరకోణాలు :

(i) $\angle 4$ మరియు $\angle 6$ (ii) $\angle 3$ మరియు $\angle 5$

(c) పర్యాయ బాహ్యకోణాలు:

(i) $\angle 1$ మరియు $\angle 7$ (ii) $\angle 2$ మరియు $\angle 8$

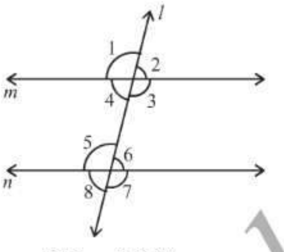
(d) తిర్యగ్రేఖకు ఒకేవైపున గల అంతర కోణాలు:

(i) $\angle 4$ మరియు $\angle 5$ (ii) $\angle 3$ మరియు $\angle 6$

తిర్యగ్రేఖకు ఒకేవైపున గల అంతరకోణాలను క్రమ అంతర కోణాలు లేక సహ అంతర కోణాలు అంటారు. కాని ఎక్కువగా పర్యాయ అంతరకోణాలకు బదులుగా పర్యాయ కోణాలు అను పదాన్ని ఉపయోగిస్తాము.

©KTBS Not to be republished

ఇప్పుడు m రేఖ n రేఖకు సమాంతరంగా ఉంటే, ఈ కోణాల జతల మధ్య సంబంధమును కనుగొందాం. మీ నోటు పుస్తకంలో నియమిత రేఖలు పరస్పరం సమాంతరంగా ఉంటాయని మీకు తెలుసు. వాటిలో ఏవైనా రెండు రేఖల వెంబడి స్కేలు మరియు పెన్సిలు సహాయంతో రెండు సమాంతర రేఖలను మరియు వాటిని ఖండిస్తూ చిత్రం 3.19 లో చూపినట్లు ఒక తిర్యగ్రేఖను గీయండి.



చిత్రం 3.19

ఇపుడు ఏవైనా ఒక జత సదృశ కోణాలను కొలచి వాటి మధ్య సంబంధమును కనుగొనండి

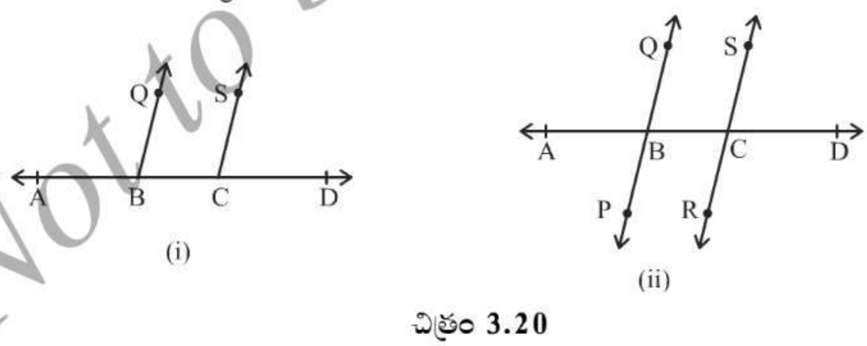
$\angle 1 = \angle 5, \angle 2 = \angle 6, \angle 4 = \angle 8$ మరియు $\angle 3 = \angle 7$ అని కనుగొంటారు దాని నుండి క్రింది స్వయం సిద్ధమును నిర్ధారించవచ్చు.

స్వయం సిద్ధం 3.3 : రెండు సమాంతర రేఖలను ఒక తిర్యగ్రేఖ ఖండించినపుడు, ప్రతి సదృశ కోణాల జత సమానం.

స్వయం సిద్ధం 3.3 ని సదృశ కోణాల స్వయం సిద్ధం అని కూడ అంటారు. ఇపుడు ఈ స్వయం సిద్ధం యొక్క విపర్యాన్ని క్రింది విధంగా చర్చిద్దాం. ఒక తిర్యగ్రేఖ, రెండు రేఖలను ఖండించినపుడు ఏర్పడే ఒక జత సదృశ కోణాలు సమానమైతే ఆ రెండు రేఖలు సమాంతరంగా ఉంటాయి.

ఈ వ్యాఖ్య నిజమేనా? దీనిని క్రింది విధంగా పరిశీలించవచ్చు.

AD రేఖను గీచి దాని మీద B మరియు C బిందువులను గుర్తించండి. B మరియు C ల వద్ద చిత్రం 3.20 (i) లో చూపిన విధంగా ఒకదానికొకటి సమానంగా ఉండునట్లు రెండు కోణాలు $\angle ABQ$ మరియు $\angle BCS$ లను నిర్మించండి.



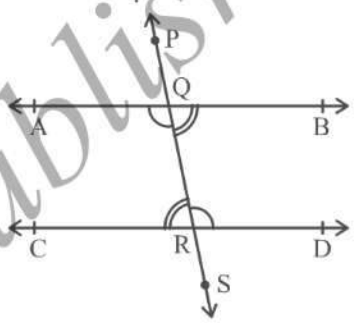
చిత్రం 3.20

©KTBS Not to be republished

QB మరియు SC అను AD కి మరొకవైపు PQ మరియు SR రేఖలు ఏర్పడునట్లు పొడిగించండి (చిత్రం 3.20(ii) చూడండి). రెండు రేఖలు పరస్పరం ఖండించుకోవని గమనించవచ్చు PQ మరియు RS రెండు రేఖలకు విభిన్న బిందువుల వద్ద సామాన్య లంబరేఖలు గీచి, వాటి పొడవులు కొలవండి. అది అన్నిచోట్ల సమానంగా ఉందని గమనిస్తారు. దానిని బట్టి ఈ రేఖలు, సమాంతరంగా ఉన్నాయని నిర్ధారించవచ్చు). కాబట్టి సదృశ కోణాల స్వయం సిద్ధం యొక్క విపర్యం కూడ నిజమవుతుంది కాబట్టి క్రింది స్వయం సిద్ధమును రాయవచ్చు.

స్వయం సిద్ధం 3.4 : ఒక తిర్యగ్రేఖ రెండు రేఖలను ఖండించినప్పుడు ఏర్పడిన ఒక జత సదృశ కోణాలు సమానమైతే, ఆ రెండు రేఖలు పరస్పరం సమాంతరంగా ఉంటాయి.

రెండు సమాంతర రేఖలను ఒక తిర్యగ్రేఖ ఖండించినప్పుడు ఏర్పడే పర్యాయ అంతర కోణాల మధ్య సంబంధమును కనుగొనుటకు సదృశ కోణాల స్వయం సిద్ధమును ఉపయోగించవచ్చా? చిత్రం 3.21లో PS తిర్యగ్రేఖ AB మరియు CD సమాంతర రేఖలను క్రమంగా Q మరియు R ల వద్ద ఖండించుచున్నది.



చిత్రం : **3.21**

$\angle$ BQR $=\angle$ QRC మరియు $\angle$ AQR $=\angle$ QRD అగునా?

మీకు తెలుసు $\angle$ PQA $=\angle$ QRC ....(1)

(సదృశ కోణాల స్వయం సిద్ధం)

$\angle$ PQA $=\angle$ BQR అగునా? అవును! (ఎందుకు?) ....(2)

(1), (2) ల నుండి $\angle$ BQR $=\angle$ QRC అని నిర్ధారించవచ్చు

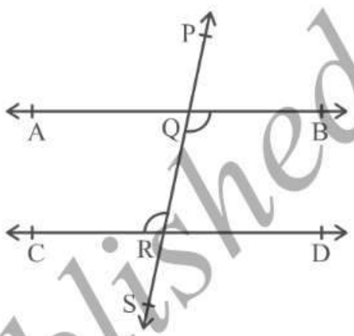
ఇదే విధంగా $\angle$ AQR $=\angle$ QRD

ఈ ఫలితాన్ని క్రింద ఇవ్వబడిన సిద్ధాంతంగా చెప్పవచ్చు

సిద్ధాంతం 3.2 : రెండు సమాంతర రేఖలను ఒక తిర్యగ్రేఖ ఖండించినపుడు ఏర్పడే ప్రతి పర్యాయ అంతర కోణాల జత సమానంగా ఉంటాయి.

©KTBS Not to be republished

సదృశ కోణాల స్వయం సిద్ధం విపర్యమునుపయోగించుకొని, ఒక జత పర్యాయ అంతర కోణాలు సమానమైతే రెండు రేఖలు సమాంతరమని చూపగలమా? చిత్రం 3.22 లో PS తిర్యగ్రేఖ, AB మరియు CD రేఖలను Q మరియు R బిందువుల వద్ద ∠ BQR = ∠QRC అగునట్లు ఖండిస్తుంది AB || CD అగునా?



∠ BQR =∠ PQA (ఎందుకు?) (1)

కాని ∠ BQR =∠ QRC (ఇవ్వబడినది) (2)

చిత్రం : **3.22**

(1) మరియు (2) ల నుండి ∠ PQA =∠ QRC అని నిర్ధారించవచ్చు.

కాని అవి సదృశ కోణాలు

కాబట్టి AB || CD (సదృశ కోణాల స్వయం సిద్ధం విపర్యం)

ఈ ఫలితావలను సిద్ధాంతంగా క్రింది విధంగా చెప్పవచ్చు

సిద్ధాంతం 3.3 : రెండు రేఖలను ఒక తిర్యగ్రేఖ ఖండించినప్పుడు, ఒక జత పర్యాయ అంతర కోణాలు సమానమైతే, ఆ రెండు రేఖలు సమాంతరంగా ఉంటాయి. అదేవిధంగా తిర్యగ్రేఖకు ఒకే వైపున గల అంతర కోణాలకు సంబంధించి, క్రింద ఇవ్వబడిన సిద్ధాంతాలను పొందవచ్చు.

సిద్ధాంతం 3.4 : రెండు సమాంతర రేఖలను ఒక తిర్యగ్రేఖ ఖండించినప్పుడు, తిర్యగ్రేఖకు ఒకే వైపునగల అంతర కోణాల జత పరిపూరకాలు.

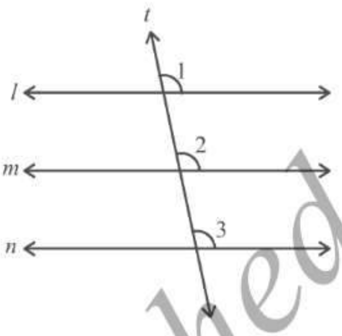
సిద్ధాంతం 3.5 : రెండు రేఖలను ఒక తిర్యగ్రేఖ ఖండించినపుడు, తిర్యగ్రేఖకు ఒకేవైపున గల ఒక జత అంతర కోణాలు పరిపూరకాలైతే, ఆ రెండు రేఖలు సమాంతరంగా ఉంటాయి.

క్రిందటి తరగతులతో మీరు కార్యాచరణాల ద్వారా పైన ఇవ్వబడిన స్వయం సిద్ధాలు మరియు సిద్ధాంతాలను నిరూపించారు. ఆ కార్యాచరణాలను మీరు మరల చేయవచ్చు.

©KTBS Not to be republished

3.6 ఒకే రేఖకు సమాంతరంగావున్న రేఖలు

రెండు రేఖలు ఒకే రేఖకు సమాంతరంగా ఉంటే అవి ఒకదానికొకటి సమాంతరంగా ఉంటాయా? దానిని పరిశీలిద్దాం చిత్రం 3.23చూడండి. చిత్రంలో రేఖ $m \parallel$ రేఖ l మరియు రేఖ $n \parallel$ రేఖ l



చిత్రం : 3.23

l, m మరియు n రేఖలకు తిర్యగ్రేఖ t ని గీద్దాం. రేఖ $m \parallel$ రేఖ l మరియు రేఖ $n \parallel$ రేఖ l అని ఇవ్వబడినది

అందువలన $\angle 1 = \angle 2$ మరియు $\angle 1 = \angle 3$ (సదృశ కోణాల స్వయం సిద్ధం) అపుడు $\angle 2 = \angle 3$ (ఎందుకు?)

కాని $\angle 2$ మరియు $\angle 3$ సదృశ కోణాలు మరియు అవి సమానం.

కాబట్టి రేఖ $m \parallel$ రేఖ n అని చెప్పవచ్చు

(సదృశ కోణాల స్వయం సిద్ధం యొక్క విపర్యం)

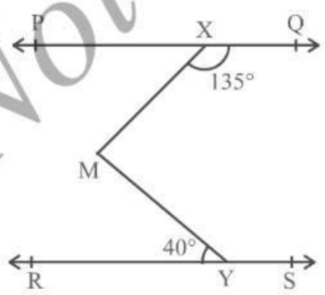
ఈ ఫలితాన్ని క్రింది సిద్ధాంతం రూపంలో చెప్పవచ్చు

సిద్ధాంతం 3.6 : ఒకే రేఖకు సమాంతరంగా ఉండేరేఖలు ఒకదానికొకటి సమాంతరంగా ఉంటాయి

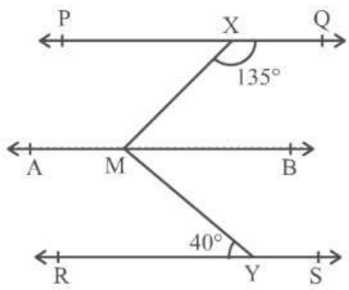
గమనిక : పైన చెప్పబడిన ధర్మం రెండు కంటే ఎక్కువ రేఖలకు కూడా అన్వయించవచ్చు

ఇపుడు సమాంతర రేఖలకు సంబంధిచిన కొన్ని ఉదాహరణలను సాధిద్దాం

ఉదాహరణ 4 :చిత్రం 3.24 లో PQ || RS, $\angle MXQ = 135°$, $\angle MYR = 40°$ అయితే $\angle XMY$ ను కనుగొనండి.



చిత్రం : 3.24



చిత్రం : 3.25

©KTBS Not to be republished

సాధన : చిత్రం 3.25 లో చూపిన విధంగా M గుండా PQ కి సమాంతరంగా AB రేఖనుగీయండి. ఇప్పుడు AB ∥ PQ మరియు PQ ∥ RS

కాబట్టి AB ∥ RS (ఎందుకు?)

ఇపుడు $\angle QXM + \angle XMB = 180^\circ$

(AB ∥ PQ , XM తిర్యగ్రేఖకి ఒకేవైపున గల అంతరకోణాలు)

కాని $\angle QXM = 135^\circ$

కావున $135^\circ + \angle XMB = 180^\circ$

$\angle XMB = 45^\circ$ .... (1)

ఇపుడు $\angle BMY = \angle MYR$ (AB ∥ RS, పర్యాయకోణాలు)

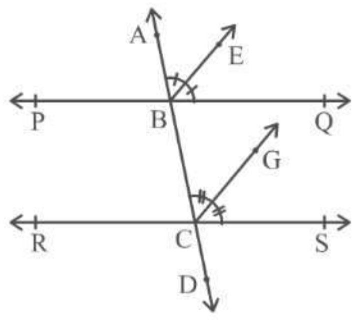
కాబట్టి $\angle BMY = 40^\circ$ .... (2)

(1) మరియు (2) లను కూడగా

$\angle XMB + \angle BMY = 45^\circ + 40^\circ$

$\angle XMY = 85^\circ$

ఉదాహరణ 5: రెండు రేఖలను ఒక తిర్యగ్రేఖ ఖండించినపుడు సదృశ కోణాల సమద్విఖండన రేఖలు సమాంతరం గా ఉంటే, ఆ రెండు రేఖలు సమాంతరంగా ఉంటాయని నిరూపించండి.



చిత్రం : **3.26**

సాధన : చిత్రం 3.26 లో AD తిర్యగ్రేఖ PQ మరియు RS అను రెండు రేఖలను క్రమంగా B మరియు C బిందువుల వద్ద ఖండిస్తుంది. BE రేఖ $\angle ABQ$ యొక్క సమద్విఖండన రేఖ మరియు CG రేఖ $\angle BCS$ యొక్క సమద్విఖండన రేఖ మరియు BE ∥ CG.

మనము PQ ∥ RS అని నిరూపించాలి.

BE కిరణం $\angle ABQ$ యొక్క సమద్విఖండనరేఖ అని ఇవ్వబడినది.

©KTBS Not to be republished

కాబట్టి $\angle ABE = \frac{1}{2} \angle ABQ$ (1)

ఇదేవిధంగా CG కిరణం, $\angle BCS$ యొక్క సమద్విఖండనరేఖ.

కాబట్టి $\angle BCG = \frac{1}{2} \angle BCS$ (2)

కాని BE||CG మరియు AD తిర్యగ్రేఖ

కాబట్టి $\angle ABE = \angle BCG$ (సదృశ కోణాల స్వయం సిద్ధం) (3)

(1) మరియు (2) లను (3) లో ప్రతిక్షేపించగా

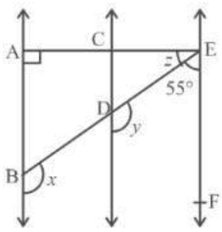
$$\frac{1}{2} \angle ABQ = \frac{1}{2} \angle BCS$$

అంటే $\angle ABQ = \angle BCS$

కాని అవి AD తిర్యగ్రేఖ, PQ మరియు RS రేఖలతో ఏర్పడిన సదృశ కోణాలు మరియు అవి సమానం కాబట్టి PQ || RS (సదృశ కోణాల స్వయం సిద్ధం) విపర్యం

ఉదాహరణ 6 : చిత్రం 3.27 లో, AB || CD మరియు CD || EF అంతేకాక $EA \perp AB$.

$\angle BEF = 55^\circ$ అయిన x, y మరియు z విలువలు కనుగొనండి.



చిత్రం : 3.27

సాధన: $y + 55^\circ = 180^\circ$ (ED తిర్యగ్రేఖకు ఒకేవైపున గల అంతర కోణాలు)

కాబట్టి $y = 180^\circ - 55^\circ = 125^\circ$

మరల $x = y$ (AB || CD సదృశ కోణాల స్వయం సిద్ధం)

కాబట్టి $x = 125^\circ$

ఇపుడు AB || CD మరియు CD || EF . కాబట్టి AB || EF

కాబట్టి $\angle EAB + \angle FEA = 180^\circ$

(EA తిర్యగ్రేఖకు ఒకేవైపున గల అంతరకోణాలు)

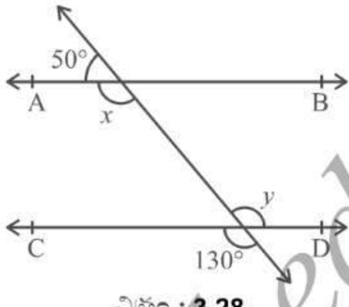
$$90^\circ + Z + 55^\circ = 180^\circ$$

$$Z = 35^\circ$$

©KTBS Not to be republished

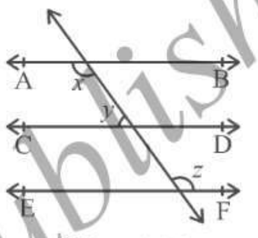
అభ్యాసం 3.2

(1) చిత్రం 3.28లో x మరియు y విలువలను కనుగొని AB || CD అని చూపండి.



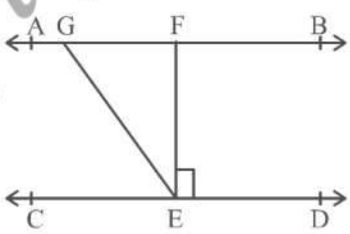
చిత్రం : 3.28

(2) చిత్రం 3.29 లో AB || CD, CD || EF మరియు $y : z = 3:7$ అయిన x ను కనుగొనండి.



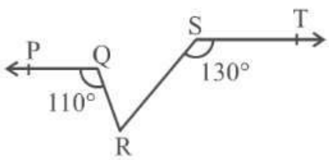
చిత్రం : 3.29

(3) చిత్రం 3.30 లో AB || CD, EF ⊥ CD మరియు ∠GED = 126° అయిన ∠AGE, ∠GEF మరియు ∠FGE లను కనుగొనండి.



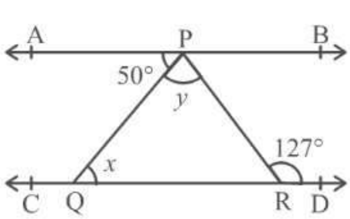
చిత్రం : 3.30

(4) చిత్రం 3.31 లో PQ || ST, ∠PQR = 110° మరియు ∠RST = 130° అయిన ∠QRS ని కనుగొనండి (సూచన: ST కి సమాంతరంగా R బిందువు గుండా ఒక రేఖను గీయండి)



చిత్రం : 3.31

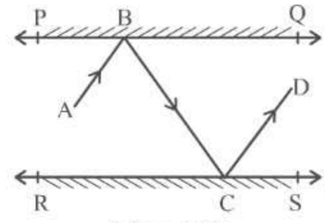
(5) చిత్రం 3.32 లో AB || CD, ∠APQ = 50° మరియు ∠PRD = 127° అయిన x మరియు y లను కనుగొనండి.



చిత్రం : 3.32

©KTBS
Not to be republished

(6) చిత్రం 3.33 లో PQ మరియు RS అను రెండు దర్పణాలు పరస్పరం సమాంతరంగా ఉన్నాయి. ఒక పతన కిరణం AB , PQ దర్పణమును B వద్ద తాకితే, దాని పరావర్తన కిరణం BC మార్గంలో ప్రయాణించి RS దర్పణమును C వద్ద తాకి మరల CD మార్గం లో వెనుకకు పరావర్తనం చెందుతుంది: AB || CD అని నిరూపించండి.



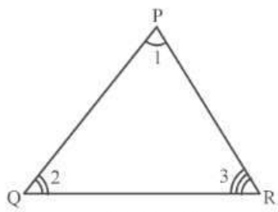
చిత్రం : 3.33

3.7: త్రిభుజము యొక్క కోణాల మొత్తం ధర్మం

క్రిందటి తరగతులలో త్రిభుజం యొక్క అన్నికోణాల మొత్తం 180^o అని కార్యాచరణాల ద్వారా అధ్యయనం చేశారు. మనము సమాంతర రేఖలకు సంబంధించిన స్వయం సిద్ధాలు మరియు సిద్ధాంతాలనుపయోగించి ఈ వ్యాఖ్యను నిరూపించవచ్చు.

సిద్ధాంతం 3.7: ఒక త్రిభుజం యొక్క కోణాలమొత్తం 180^0

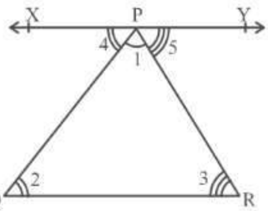
ఉపపత్తి : పైన ఇవ్వబడిన వ్యాఖ్యలో ఏమి ఇవ్వబడినది, అంటే దత్తాంశం మరియు నిరూపించవలసిన వాటిని గురించి పరిశీలిద్దాం. మనకు PQR త్రిభుజము ఇవ్వబడినది. $\angle 1$, $\angle 2$ మరియు $\angle 3$ లు త్రిభుజము PQR యొక్క కోణాలు (చిత్రం 3.34 చూడండి.)



చిత్రం : 3.34

మనము $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^o$ అని నిరూపించాలి

చిత్రం 3.35 లో చూపిన విధంగా QR కి సమాంతరంగా, దాని ఎదుటి శీర్షంను P గుండా ఒక రేఖ XPY ని గీద్దాం. ఇపుడు మనము సమాంతర రేఖల ధర్మాలను ఉపయోగించవచ్చు.



చిత్రం : 3.35

XPY ఒక సరళరేఖ

అందువలన $\angle 4 + \angle 1 + \angle 5 = 180°$ (1)

కాని XPY || QR మరియు PQ, PR లు తిర్యగ్రేఖలు

కాబట్టి $\angle 4 = \angle 2$ మరియు $\angle 5 = \angle 3$ (పర్యాయకోణాల జతలు)

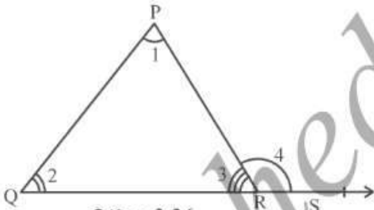
©KTBS Not to be republished

$\angle 4$ మరియు $\angle 5$ లను (1) లో ప్రతిక్షేపిస్తే

$$\angle 2 + \angle 1 + \angle 3 = 180^\circ$$

అంటే $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$

క్రిందటి తరగతులలో మీరు త్రిభుజము యొక్క బాహ్యకోణమును నిర్మించడం గురించి అధ్యయనం చేశారు. (చిత్రం 3.36 చూడండి). QR భుజం, S వరకు పొడిగించ బడింది. $\angle PRS$ ను త్రిభుజము PQR యొక్క బాహ్యకోణం అంటారు.



చిత్రం : 3.36

$\angle 3 + \angle 4 = 180^\circ$ అవుతుందా? (ఎందుకు?) (1)

అంతేకాక $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$ (ఎందుకు?) (2)

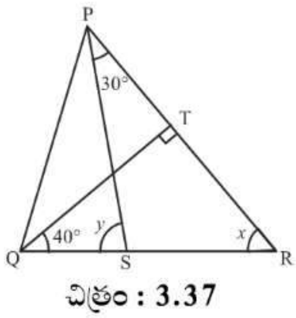
(1) మరియు (2) ల నుండి $\angle 4 = \angle 1 + \angle 2$ అవుతుంది.

ఈ ఫలితాన్ని క్రింది విధంగా ఒక సిద్ధాంతం రూపంలో చెప్పవచ్చు.

సిద్ధాంతం 3.8: ఒక త్రిభుజము యొక్క ఒక భుజమును పొడిగించగా ఏర్పడు బాహ్యకోణం దాని యొక్క రెండు అంతరాభిముఖ కోణాల మొత్తానికి సమానము. పై సిద్ధాంతము నుండి, ఒక త్రిభుజము యొక్క బాహ్యకోణము, దాని ప్రతి అంతరాభిముఖ కోణం కంటే పెద్దదని స్పష్టమవుతుంది,

పైన నేర్చుకున్న సిద్ధాంతాల ఆధారంగా కొన్ని ఉదాహరణలు చూద్దాం.

ఉదాహరణ 7: చిత్రం 3.37 లో $QT \perp PR$, $\angle TQR = 40^\circ$ మరియు $\angle SPR = 30^\circ$ అయిన x మరియు y లను కనుగొనండి.



చిత్రం : 3.37

©KTBS Not to be republished

సాధన : ΔTQR లో $90^\circ + 40^\circ + x = 180^\circ$ (త్రిభుజం యొక్క కోణాల మొత్తం ధర్మం)

కావున $x = 50^\circ$

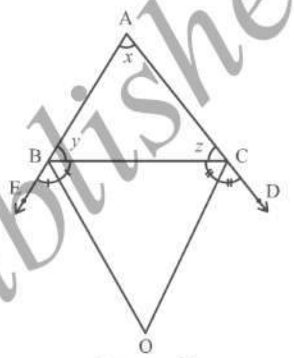
ఇపుడు $y = \angle SPR + x$ (సిద్ధాంతం 3.8)

అందువలన $y = 30^\circ + 50^\circ$

$y = 80^\circ$

ఉదాహరణం 8: చిత్రం 3.38 లో ΔABC యొక్క భుజాలు AB మరియు AC లు క్రమంగా E మరియు D బిందువుల వరకు పొడిగించ బడినవి. $\angle CBE$ మరియు $\angle BCD$ ల సమద్విఖండన రేఖలు క్రమంగా BO మరియు CO లు O బిందువు వద్ద ఖండించినవి.

$\angle BOC = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle BAC$ అని నిరూపించండి.



చిత్రం : 3.38

©KTBS Not to be republished

సాధన: BO కిరణం $\angle CBE$ యొక్క సమద్విఖండనరేఖ

కావున $\angle CBO = \frac{1}{2}\angle CBE$

$= \frac{1}{2}(180^\circ - y)$

$= 90^\circ - \frac{y}{2}$ ....(1)

ఇదేవిధంగా CO కిరణం $\angle BCD$ యొక్క సమద్విఖండన రేఖ. కాబట్టి

$\angle BCO = \frac{1}{2}\angle BCD$

$= \frac{1}{2}(180^\circ - z)$

$= 90 - \frac{z}{2}$ ....(2)

ΔBOC లో $\angle BOC + \angle BCO + \angle CBO = 180^\circ$ ....(3)

(1) మరియు (2) లను (3) లో సూక్ష్మీకరించగా

$\angle BOC + 90^\circ - \frac{z}{2} + 90^\circ - \frac{y}{2} = 180^\circ$

కాబట్టి $\angle BOC = \frac{z}{2} + \frac{y}{2}$

లేదా $\angle BOC = \frac{1}{2}(y + z)$ ....(4)

కాని $x + y + z = 180^\circ$ (త్రిభుజం యొక్క కోణాల మొత్తం ధర్మం)

అందువలన, $y + z = 180^\circ - x$ కాబట్టి (4) నుండి.

$\angle BOC = \frac{1}{2}(180^\circ - x)$

$= 90^\circ - \frac{x}{2}$

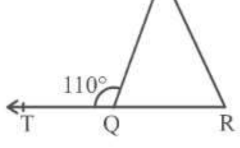
$= 90^\circ - \frac{1}{2}\angle BAC$

అభ్యాసం 3.3

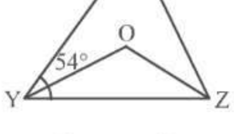
(1) చిత్రం 3.39 లో ΔPQR యొక్క QP మరియు RQ భుజాలు క్రమంగా S మరియు T బిందువుల వరకు పొడిగించబడినవి $\angle SPR = 135^\circ$ మరియు $\angle PQT = 110^\circ$ అయిన $\angle PRQ$ ని కనుగొనండి.

(2) చిత్రం 3.40 లో $\angle X = 62^\circ$, $\angle XYZ = 54^\circ$. ΔXYZ యొక్క కోణాలు $\angle XYZ$ మరియు $\angle XZY$ ల సమద్విఖండన రేఖలు క్రమంగా YO మరియు ZO అయిన $\angle OZY$ మరియు $\angle YOZ$ లను కనుగొనండి

(3) చిత్రం 3.41 లో $AB \parallel DE$, $\angle BAC = 35^\circ$ మరియు $\angle CDE = 53^\circ$ అయిన $\angle DCE$ నికనుగొనండి.



చిత్రం : 3.39



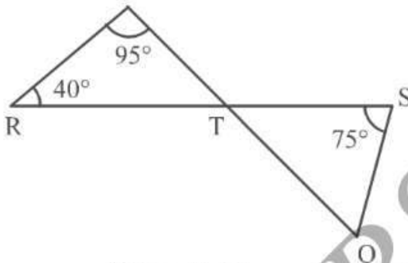
చిత్రం : 3.40

చిత్రం : 3.41

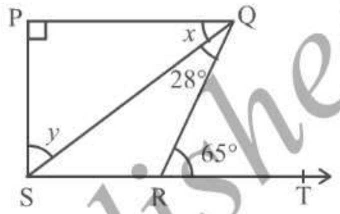
©KTBS Not to be republished

(4) చిత్రం 3.42 లో PQ మరియు RS రేఖలు T బిందువు వద్ద ఖండించినప్పుడు $\angle PRT = 40°$, $\angle RPT = 95°$ మరియు $\angle TSQ = 75°$ అయిన $\angle SQT$ ని కనుగొనండి.

(5) చిత్రం 3.43 లో $PQ \perp PS$, $PQ \parallel SR$, $\angle SQR = 28°$ మరియు $\angle QRT = 65°$ అయిన x మరియు y విలువలను కనుగొనండి.

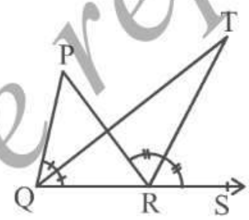


చిత్రం : 3.42



చిత్రం : 3.43

(6) చిత్రం 3.44 లో ΔPQR యొక్క భుజం QR, S బిందువు వరకు పొడిగించబడినది. $\angle PQR$ మరియు $\angle PRS$ ల సమద్విఖండన రేఖలు T బిందువు వద్ద కలిసిన $\angle QTR = \frac{1}{2} \angle QPR$ అని నిరూపించండి.



చిత్రం : 3.44

3.8 సారాంశం:

ఈ అధ్యాయంలో మీరు క్రింది అంశాలను నేర్చుకున్నారు.

1. ఒక కిరణం, ఒక రేఖ మీద నిలబడితే ఏర్పడిన రెండు ఆసన్న కోణాల మొత్తం 180° ఉంటుంది మరియు దీనికి విపర్యంగా కూడా అవుతుంది ఈ ధర్మమును సరళయుగ్మ స్వయం సిద్ధం అంటారు.

©KTBS Not to be republished

2. రెండు రేఖలు పరస్పరం ఖండించినప్పుడు, శీర్షాభిముఖ కోణాలు సమానం.

3. ఒక తిర్యగ్రేఖ రెండు సమాంతర రేఖలను ఖండించినప్పుడు.

   (i) సదృశ కోణాల జతలు సమానంగా ఉంటాయి

   (ii) పర్యాయ అంతర కోణాల జతలు సమానంగా ఉంటాయి.

   (iii) తిర్యగ్రేఖకి ఒకే వైపున గల అంతరకోణాల జతలు పరిపూరకాలు.

4. రెండు రేఖలను ఒక తిర్యగ్రేఖ ఖండించినపుడు

   (i) ఏదైనా ఒక జత సదృశకోణాలు సమానము, లేక

   (ii) ఏదైనా ఒక జత పర్యాయ అంతర కోణాలు సమానం లేక

   (iii) తిర్యగ్రేఖకు ఒకేవైపున గల ఏదైనా ఒక జత అంతరకోణాలు పరిపూరకాలయితే ఆ రేఖలు సమాంతరంగా ఉంటాయి.

5. ఇచ్చిన రేఖకు సమాంతరంగా ఉన్న రేఖలు పరస్పరం సమాంతరంగా ఉంటాయి.

6. ఒక త్రిభుజం యొక్క మూడు కోణాల మొత్తం 180° ఉంటుంది.

7. ఒక త్రిభుజము యొక్క ఒక భుజమును పొడిగించగా ఏర్పడు బాహ్యకోణం, దాని అంతరాభిముఖ కోణాల మొత్తానికి సమానం.

© KTBS Not to be republished

అధ్యాయం - 4

బహుపదులు

4.1 పరిచయం

మీరు బీజోక్తులు వాటి సంకలనం, వ్యవకలనం, గుణకారం మరియు భాగహారాల గురించి వెనుకటి తరగతులలో నేర్చుకొన్నారు. మీరు కొన్ని బీజీయ సమాసాలను కారణాంక విభజన ఎలా చేయాలో కూడా నేర్చుకున్నారు. మీరు ఈ క్రింద బీజీయ సరళ సమీకరణాలను జ్ఞాపకం చేసుకోండి.

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$
$$(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$
మరియు $$x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$$

మరియు కారణాంక విభజనలో వాటి ఉపయోగాన్ని జ్ఞాపకం చేసుకోండి. ఈ అధ్యాయంలో మీరు బహుపదోక్తి అనబడే ఒక నిర్దిష్ట బీజీయ పదాలలో మరియు దానికి సంబంధించిన పదాలను మన అభ్యాసాన్ని ప్రారంభిద్దాం. ఇప్పుడు బహుపదుల యొక్క వివిధ రూపాలను నేర్చుకోవడం. ఇదేవిధంగా శేష సిద్ధాంతం మరియు కారణాంక సిద్ధాంతాల ఆధారంగా బహుపదులను కారణాంక విభజన చేయడం తెలుసుకొందాం.

4.2. ఏక చరరాశిలో బహుపదులు

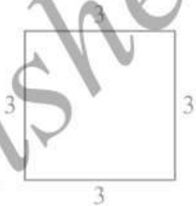
ప్రతి చరరాశిని సూచించడానికి ఒక గుర్తు (అక్షరం) వాడతామని, చరరాశి ఏ వాస్తవ విలువనైనా తీసుకుంటుందని మనకు తెలుసు.

మనం సాధారణంగా చరరాశులను సూచించడానికి $x, y, z...$ మొదలగు అక్షరాలు వాడతాం. అందుచేత $2x, 3x, -x, -\frac{1}{2}x$ వంటి వాటిని చరరాశి x లో గల బీజీయ సమాసాలు అంటాం.

©KTBS Not to be republished

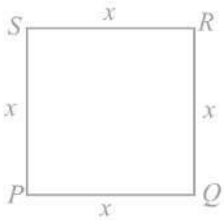
ఈ సమాసాలన్నీ ఒక స్థిరరాశి × రూపంలో ఉంటాయి. ఇప్పుడు మనం ఒక బీజీయ సమాసాన్ని (ఒక స్థిరరాశి) × (ఘాతరూపంలో గల ఒక చరరాశి) రూపంలో రాయాలనుకుంటే మరియు స్థిరాంకం ఏదేని తెలియకుంటే స్థిరాంకాలను a, b, c... మొదలైన అక్షరాలలో రాస్తాం. కావున బీజీయ సమాసాలను సాధారణంగా ax, by, cz .... మొదలగు విధంగా రాస్తాం.

అలాగే ఒక స్థిరాంకాన్ని సూచించే అక్షరం మరియు ఒక చరరాశి సూచించే అక్షరాల మధ్య వ్యత్యాసం కలదు. స్థిరాంకాల విలువ ఒక నిర్దిష్ట సందర్భాలకు ఒక విధంగా ఉంటుంది. అంటే ఇచ్చినటువంటి సమస్యలో స్థిరాంకాల విలువ మారదు అయితే చరరాశి విలువ మారవచ్చు.



చిత్రం 4.1

ఇప్పుడు చతురస్ర భుజం కొలత '3' యూనిట్లు అనుకొందాం (చిత్రం 4.1) చూడండి. దాని చుట్టుకొలత ఎంత? ఒక చతురస్రపు చుట్టుకొలత దాని నాలుగు భుజాల పొడవుల మొత్తం అని మీకు తెలుసు. ప్రతి ఒక భుజం మూడు యూనిట్లు కలదు కావున దాని చుట్టుకొలత $4 \times 3 = 12$ యూనిట్లు చతురస్రపు ప్రతి భుజం కొలత 10 యూనిట్లు అయితే దాని చుట్టుకొలత ఎంత? చుట్టుకొలత $4 \times 10 = 40$ యూనిట్లు.



చిత్రం 4.2

ఒక చతురస్రపు త్రిభుజం పొడవు 'x' యూనిట్లు (చిత్రం 4.2 చూడండి) చుట్టుకొలత $4x$ యూనిట్లు అవుతుంది. ఇలా భుజాల పొడవులు మారుతున్న కొద్దీ చుట్టుకొలత కూడా మారుతుంది. PQRS చతురస్రపు వైశాల్యాన్ని మీరు కనుగొనగలరా? అది $x \times x = x^2$ చ॥యూ॥ x^2 క బీజీయ సమాసం. మీరు ఇదేవిధంగా $2x$, $x^2 + 2x$, $x^3 - x^2 + 4x + 7$ ఇలాంటి బీజీయ సమాసాల గురించి తెలుసుకొని ఉన్నారు. ఇంతవరకు మీరు తీసుకొన్న బీజీయ సమాసాలలో చరరాశుల ఘాతసూచ్యాంకాలన్నీ పూర్ణసంఖ్యలని గమనించండి. ఈ రూపంలో బీజీయ సమాసంకు ఒక చరరాశి గల బహుపదులు అంటారు. పై ఉదాహరణంలలో 'x' చరరాశి ఉదాహణరకు $x^3 - x^2 + 4x + 7$ ఇది x చరరాశి గల బహుపది. అదేవిధంగా, $3y^2 + 5y$ ఇది y చరారాశి గల బహుపది $t^2 + 4$ ఇది t చరరాశి గల బహుపది.

$x^2 + 2x$ ఈ బహుపదిలో బీజీయపదాలైన x^2 మరియు $2x$ వాటిని బహుపదిలోని పదాలు అంటారు. ఇదేవిధంగా $3y^2 + 5y + 7$ ఈ బహుపది $3y^2$, $5y$ మరియు 7 ఈ మూడు పదాలను కలిగి ఉన్నది. $-x^3 + 4x^2 + 7x - 2$ ఈ బహుపదిలోని పదాలను మీరు రాయగలరా? ఈ బహుపదిలోని పదాలు $-x^3$, $4x^2$, $7x$ మరియు 2.

©KTBS Not to be republished

ఒక బహుపదిలోని ప్రతి పదం సహగుణకాలను కలిగి ఉన్నది. కావున $-x^3+4x^2+7x-2$ ఇందులో x^3 యొక్క సహగుణకం -1, x^2 యొక్క 4, x యొక్క సహగుణకం 7 మరియు -2 x^0 యొక్క సహగుణకం దీనిలో $(x^0=1)$ అని గుర్తుంచుకోండి x^2-x+7 లో x యొక్క సహగుణకం తెలుసా? అది -1.

2 కూడా ఒక బహుపది నిజానికి 2, – 5, 7 మొదలైనవి స్థిర బహుపదులకు ఉదాహరణలు స్థిరబహుపదిని '0' శూన్యబహుపది అంటారు. ఇది అన్ని బహుపదులలో ప్రముఖ పాత్ర వహిస్తుం దని పై తరగతులలో తెలుసుకొంటారు.

ఇప్పుడు, $x+\frac{1}{x}, \sqrt{x}+3$ మరియు $3\sqrt{y}+y^2$ ఈ విధమైన బీజీయ సమాసాలను తీసుకోండి. $x+\frac{1}{x}=x+x^{-1}$ అని రాయవచ్చు అని మీకు తెలుసా? ఇక్కడ రెండవ పదం x^{-1} యొక్క ఘాత సూచి – 1 అది పూర్ణసంఖ్య కాదు. కావున ఈ బీజీయ సమాసం బహుపదికాదు. మరల $\sqrt{x}+3$ ని $x^{\frac{1}{2}}+3$ అని రాయవచ్చు. ఇక్కడ x యొక్క ఘాతసూచి $\frac{1}{2}$ ఇది పూర్ణ సంఖ్యకాదు. కావును $\sqrt{x}+3$ ఒక బహుపదా? బహుపదికాదు. (ఎందుకు)

ఒక బహుపదిలో చరరాశి 'x' అయితే మనం ఆ బహుపదిని $p(x)$ లేదా $q(x)$ లేదా $r(x)$ మొదట వాటిలో సూచించవచ్చు. ఉదాహరణకు మనం క్రింది విధముగా రాయవచ్చు.

$$p(x) = 2x^2+5x-3$$
$$q(x) = x^3-1$$
$$r(y) = y^3+y+1$$
$$s(u) = 2-u-u^2+6u^5$$

ఒక బహుపది ఎన్ని పదాలైనా (పరిమిత) కలిగి ఉండవచ్చు. ఉదా॥ $x^{150}+x^{149}+.....+x^2+x+1$ ఇది 151 పదాలు గల బహుపది.

$2x, 2, 5x^3, -5x^2, y$ మరియు u^4 ఈ బహుపదులను తీసుకోండి. ఈ బహుపదులన్నీ కేవలం ఒక బహుపదాన్నేకలిగిఉన్నాయని చూశారు? కేవలంఒకేపదంమాత్రమేకలిగిఉన్నబహుపదులను ఏకపది అంటాం (ఏక అంటే ఒకటి) ఇప్పుడు క్రింది బహుపదు లన్నింటిని గమనించండి.

$p(x)=x+1$ $q(x)=x^2-x$ $r(y)=y^{30}+1$ $t(u)=u^{43}-u^2$

పై బహుపదులలో ఎన్ని పదాలు ఉన్నాయి. ఈ ప్రతి బహుపదలలో కేవలం రెండు పదాలను కలిగి ఉన్నాయి. కేవలం రెండు పదాలను మాత్రమే కలిగి ఉన్న బహుపదులను ద్విపదులు అంటారు. (ద్వి అంటే '2') ఉదా॥ $q(x)=x^2-x$

©KTBS Not to be republished

అదేవిధంగా మూడు పదాలను కలిగిన బహుపదులను త్రిపదులు అంటారు (త్రి అంటే '3')

ఉదా॥ $p(x) = x + x^2 + \pi$ $q(x) = \sqrt{2} + x - x^2$ $r(u) = u + u^2 - 2$ $t(y) = y^4 + y + 5$

ఇప్పుడు $p(x) = 3x^7 - 4x^6 + x + 9$ ఈ బహుపదిని చూడండి. గరిష్ట ఘాతసూచిని కలిగిన పదం ఏదో అంటే $3x^7$ ఈ పదంలో x యొక్క ఘాతసూచి '7' $q(y) = 5y^6 - 4y^2 - 6$, ఈ బహుపదిలో y యొక్క గరిష్ఠ ఘాత సూచిక కలిగిన పదం $5y^6$ మరియు ఈ పదంలో y యొక్క '6' మనం ఒక బహుపదిలో చరరాశి యొక్క గరిష్ట ఘాతసూచిని ఆ బహుపది యొక్క "బహుపది పరిమాణం" అంటాం.

కావున $3x^7 - 4x^6 + x + 9$ ఈ బహుపదుల పరిమాణం (డిగ్రి) '7' మరియు $5y^6 - 4y^2 - 6$ ఈ బహుపది పరిమాణం (డిగ్రి) '6' శూన్యంకాని ఒక స్థిరబహుపది పరిమాణం (డిగ్రి) '0' అవుతుంది.

ఉదా 1 : క్రింది బహుపదుల పరిమాణం(డిగ్రి)ను కనుగొనండి.

(i) $x^5 - x^4 + 3$ (ii) $2 - y^2 - y^3 + 2y^8$ (iii) 2

సాధన : (i) చరరాశి గరిష్ఠ ఘాత సూచి '5' కావున ఈ బహుపది పరిమాణం '5'

$x^5 - x^4 + 3$

(ii) చరరాశి గరిష్ఠ ఘాతసూచి '8' కావున ఈ బహుపది పరిమాణం '8'

$2 - 4^2 - 4^3 + 2y^8$

(iii) 2 ఇక్కడ ఒకే ఒక పదం '2' దీనిని $2x^0$ అని రాయవచ్చు. కావున x యొక్క ఘాతసూచి '0' కావున ఈ బహుపది పరిమాణం '0'.

ఇప్పుడు $p(x) = 4x + 5$ $q(y) = 2y$ $r(t) = t + \sqrt{2}$ మరియు $s(u) = 3u$

ఈ బహుపదులను గమనించండి. మీరు వీటిలో ఏదైనా సామాన్య అంశాన్ని గమనించారా? ప్రతి బహుపదిలో బహుపది పరిమాణం ఒకటి అయింది. బహుపది పరిమాణం (డిగ్రి)1 అయిన బహుపదులను 'రేఖీయ బహుపదులు' అంటారు. ఒక చరరాశిగల మరికొన్ని బహుపదులు అంటే $2x - 1$, $\sqrt{2}y + 1$, $2 - u$. ఇప్పుడు మూడు పదాలు గల 'x' చరరాశులను కలిగిన రేఖీయ బహుపదులను రాయడానికి ప్రయత్నించండి. మీరు వాటిని రాయడానికి సాధ్యంకాదు. ఎందుకంటే ఒకచరరాశితో కూడిన రేఖీయ బహుపది ఒక ఏకపది అయినను ఒక ద్విపది కలిగి

©KTBS Not to be republished

ఉండడానికి సాధ్యం కావున 'x' చరరాశి ఏక రేఖీయ బహుపది యొక్క $ax + b$ రూపంలో ఉంటుంది (ఇక్కడ, a మరియు b లు స్థిరాంకాలు మరియు $a \neq 0$ (ఎందుకు) అలాగే $ay + b$ ఇది 'y' చరరాశి గల ఒక రేఖీయ బహుపది.

ఇప్పుడు $2x^2 + 5$, $5x^2 + 3x + \pi$, x^2 మరియు $x^2 + \frac{2}{5}x$ ఈ బహుపదులను తీసుకోండి.

వాటి బహుపది పరిమాణం (డిగ్రి) '2' అని మీరు ఒప్పుకుంటారా? బహుపది పరిమాణం (డిగ్రి) 2 అయిన ఒక బహుపదికి వర్గబహుపది అంటారు. వర్గ బహుపదికి కొన్ని ఉదాహరణలు అంటే $5 - y^2$, $4y + 5y^2$ మరియు $6 - y - y^2$. ఒక చరరాశిగల నాలుగు వేర్వేరు పదాలను కలిగిన ఒక వర్గ బహుపదిని మీరు రాయగలరా? ఒక చరరాశి గల ఒక వర్గ బహుపది గరిష్ఠం మూడు పదాలను కలిగి ఉండడాన్నే మీరు చూస్తారు. మీరు మరికొన్ని వర్గబహుపదులను పట్టీచేస్తే x చరరాశి గల వర్గబహుపదులు $ax^2 + bx + c$ రూపంలో ఉంటాయి. (ఇక్కడ a, b, c లు స్థిరాంకాలు) అలాగే $a \neq 0$ అనుటను తెలుసుకోండి. ఇదేవిధంగా y చరరాశిగల వర్గ బహుపది $ay^2 + by + c$ రూపంలో ఉంటుంది. (ఇక్కడ a, b, c లు స్థిరాంకాలు) అలాగే $a \neq 0$.

డిగ్రి 3 అయిన ఒక బహుపదిని మనం ఒక ఘన బహుపది అంటాం.'x' చరరాశిగల ఘనబహుపదికి కొన్ని ఉదాహరణలు :

$4x^3$, $2x^3 + 1$, $5x^3 + x^2$, $6x^3 - x$, $6 - x^3$, $2x^3 + 4x^2 + 6x + 7$. ఒక చరరాశి గల ఘణ బహుపదిలో ఎన్ని పదాలు ఉండవచ్చు అని మీరు అనుకొంటున్నారు? అవి గరిష్ఠంగా నాలుగు పదాలను కలిగి ఉండవచ్చు. దీనిని $ax^3 + bx^2 + cx + d$ (a, b, c, d లు స్థిరాంకాలు మరియు $a \neq 0$) రూపంలో రాయవచ్చు. ఒకటవ పరిమాణం, రెండవ పరిమాణం, మూడవ పరిమాణం గల బహుపదులు ఎలా ఉంటాయని మీరు చూశారు. ఏదైనా ఒక సహజ సంఖ్య 'n' అయినపుడు 'n' వ పరిమాణం (డిగ్రి) కలిగిన ఒక చరరాశి గల బహుపదిని రాయగలరా? ఒక చరరాశిగల 'n' వ పరిమాణం (డిగ్రి) కలిగిన ఒక బహుపది సమాసాన్ని రాయవచ్చు.

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

ఇందులో $a_0, a_1, a_2 .... a_n$ లు స్థిరరరాశులు మరియు $a_n \neq 0$ రూపంలో రాయవచ్చు.

ప్రత్యేక సందర్భంలో, $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 .... = a_n = 0$ (అంటే అన్ని గుణకాలు సున్నాలు) అయితే మనకి 'శూన్య బహుపది' వస్తుంది. దీనిని '0' గా సూచిస్తారు.

'సున్న' యొక్క పరిమాణాన్ని చెప్పగలరా? దీనిని నిర్వచించలేము. ఎందుకనగా సున్నను చరరాశి యొక్క ఏ ఘాతాంకానికి హెచ్చించి లబ్ధంగా రాయలేము.

©KTBS Not to be republished

ఇంతవరకు మనం ఒక చరరాశి కలిగిన బహుపదుల గురించి వివరించాము. అంతకంటే $x^2 + y^2 + xyz$ $(x,y,z$ లు చరరాశులు$)$ ఉండి మూడు చరరాశులు గల బహుపది. అదేవిధంగా $p^2 + q^{10} + r$ $(p, q$ మరియు r లు చరరాశులు$)$, $u^3 + v^2$ $(u$ మరియు v లు చరరాశులు$)$ ఇది క్రమంగా మూడు మరియు రెండు చరరాశులగల బహుపదులు. మీరు అలాంటి బహుపదులను వివరంగా తెలుసుకుంటారు.

అభ్యాసం 4.1

1. ఈ క్రింది వాటిలో ఏవి ఏక చరరాశిగల బహుపదులు మరియు ఏవి కాదు. మీ జవాబుకు కారణాలను తెలపండి.

(i) $4x^2 - 3x + 7$ (ii) $y^2 + \sqrt{2}$ (iii) $3\sqrt{t} + t\sqrt{2}$

(iv) $y + \frac{2}{y}$ (v) $x^{10} + y^3 + t^{50}$

2. ఈ కింది వాటిలో x^2 యొక్క సహగుణకాలను రాయండి.

(i) $2 + x^2 + x$ (ii) $2 - x^2 + x^3$ (iii) $\frac{\pi}{2}x^2 + x$ (iv) $\sqrt{2}x - 1$

3. 35వ పరిమాణం (డిగ్రి) కలిగిన ఒక ద్విపది మరియు 100వ పరిమాణం (డిగ్రి) కలిగిన ఒక ఏక పదులకు ఒక్కొక్క ఉదాహరణ రాయండి.

4. క్రింది బహుపదులకు పరిమాణం (డిగ్రి) రాయండి.

(i) $5x^3 + 4x^2 + 7x$ (ii) $4 - y^2$ (iii) $5t - \sqrt{7}$ (iv) 3

5. క్రింది వాటిని రేఖీయ, వర్గమరియు ఘన బహుపదులుగా వర్గీకరించండి.

(i) $x^2 + x$ (ii) $x - x^3$ (iii) $y + y^2 + 4$ (iv) $1 + x$

(v) $3t$ (vi) r^2 (vii) $7x^3$

4.3 బహుపది శూన్య విలువలు.

$p(x) = 5x^3 - 2x^2 + 3x - 2$ అను బహుపదిని తీసుకొందాం

$p(x)$ లో అన్ని చోట్ల 'x' కు '1' ని సూక్ష్మీకరించినచో,

$$p(1) = 5 \times (1)^3 - 2 \times (1)^2 + 3 \times (1) - 2$$
$$= 5 - 2 + 3 - 2$$
$$p = 8 - 4 = 4$$
$$\boxed{p = 4}$$

©KTBS Not to be republished

కావున $x = 1$ అయినప్పుడు $p(x)$ విలువ 4 అని చెబుతాము అలాగే,

$$p(0) = 5(0)^3 - 2(0)^2 + 3(0) - 2$$

$$= -2$$

$p(-1)$ ను మీరు కనుగొనగలరా?

ఉదాహరణ 2: చరరాశులకు ఇచ్చిన విలువలలో ఈ క్రింది బహుపదుల విలువలను కనుగొనండి.

(i) $p(x) = 5x^2 - 3x + 7,\quad x = 1$ అయినపుడు

(ii) $q(y) = 3y^3 - 4y + \sqrt{11},\quad y = 2$ అయినపుడు

(iii) $p(t) = 4t^4 + 5t^3 - t^2 + 6,\quad t = a$ అయినపుడు

సాధన : (i) $p(x) = 5x^2 - 3x + 7$

$x = 1$ అయినపుడు బహుపది $p(x)$ విలువ

$$p(1) = 5(1)^2 - 3(1) + 7$$
$$= 5 - 3 + 7 = 9$$

(ii) $q(y) = 3y^3 - 4y + \sqrt{11}$

$y = 2$ అయినపుడు బహుపది $q(y)$ విలువ

$$q(2) = 3(2)^3 - 4(2) + \sqrt{11} = 24 - 8 + \sqrt{11} = 16 + \sqrt{11}$$

(iii) $p(t) = 4t^4 + 5t^3 - t^2 + 6$

$t = a$ అయిన బహుపది $p(t)$విలువ

$$p(a) = 4a^2 + 5a^3 - a^2 + 6$$

ఇప్పుడు $p(x) = x - 1$ అని బహుపదిని తీసుకోండి.

$p(1)$ విలువ ఎంత? $p(1) = 1 - 1 = 0$ గమనించండి

$p(1) = 0$ అయినందువలన '1'ని మనం $p(x)$ కు శూన్యవిలువ అంటాము

అదేవిధంగా $q(x) = x - 2$ అయినప్పుడు '2' ను $q(x)$ కు శూన్యవిలువ అంటారా? పరిశీలించండి. సామాన్యంగా $p(c) = 0$ అయితే బహుపది $p(x)$ యొక్క శూన్యవిలువ 'c' అవుతుంది.

బహుపది $x - 1$ యొక్క శూన్యవిలువ దీనిని సున్నకు సమానం చేయుట ద్వారా వచ్చిందని పరిశీలించి ఉంటారు. అంటే $x - 1 = 0$, $x = 1$ కావున $p(x) = 0$ అనేది x చరరాశిలో గల బహుపది

©KTBS Not to be republished

అయితే $f(x) = 0$ ను x లో బహుపది సమీకరణం అంటారు. పై ఉదాహరణలో $f(x) = 0$ అయిన సందర్భంలో '1' బహుపది $(x - 1)$ యొక్క మూలం అంటాము.

ఇప్పుడు ఒక స్థిర బహుపది 5ను పరిశీలిద్దాం. దీని యొక్క శూన్యవిలువ చెప్పగలరా? దీనికి శూన్యవిలువ లేదు. ఎందుకంటే $3 = 3x^0$ కావున x యొక్క ఏ వాస్తవ విలువకు సున్న $3x^0$ కానేకాదు. అందుచే స్థిరబహుపదికి శూన్య విలువలు ఉండవు.

ఉదాహరణ 3 : $x + 2$ బహుపదికి -2 మరియు 2లు శూన్యవిలువలా? పరిశీలించండి.

సాధన : $p(x) = x + 2$ అనుకొంటే.

$p(2) = 2 + 2 = 4 \qquad p(-2) = -2 + 2 = 0$

కావున -2, $x + 2$ బహుపదికి శూన్యవిలువ అవుతుంది $+2$, శూన్యవిలువ కాదు.

ఉదాహరణ 4 : $p(x) = 2x + 1$ బహుపది యొక్క శూన్యవిలువ కనుగొనండి.

సాధన : $p(x)$ యొక్క శూన్యవిలువ కనుగొనడం అంటే బహుపది సమీకరణం $p(x) = 0$ ను సాధన చేయడమే

అనగా, $2x + 1 = 0$

$\therefore \ x = \frac{-1}{2}$

కావున $2x + 1$ బహుపది శూన్యవిలువ $-\frac{1}{2}$ అయినది ఇప్పుడు $p(x) = ax + b$, $a \neq 0$ ఒక రేఖీయ బహుపది. అయితే దీని యొక్క శూన్యవిలువను ఎలా కనుగొంటారు.

ఉదాహరణ 4 మీకు కొన్ని సూచనలు ఇచ్చి ఉండవచ్చు బహుపది $p(x)$ యొక్క శూన్యవిలువలను కనుగొనాలంటే, $p(x) = 0$ బహుపది సమీకరణాన్ని సాధించాలి అంటే

$ax + b = 0$, $a \neq 0$

కావున $ax = -b$

అనగా $x = \frac{-b}{a}$

అందుచే $x = \frac{-b}{a}$ అనేది $p(x) = ax + b$ యొక్క ఒకేఒక శూన్యవిలువ అయినది. "ఏక చరరాశిలో గల రేఖీయ బహుపదికి ఒకేఒక శూన్యవిలువ ఉంటుంది".

©KTBS Not to be republished

ఇప్పుడు మనం '1' ని $x - 1$ యొక్క శూన్యవిలువ మరియు '–2', $x + 2$ యొక్క శూన్య విలువ అని చెప్పవచ్చు.

ఉదాహరణ 5: $x^2 - 2x$ అనే బహుపదికి '2' మరియు '0' విలువలు శూన్యాలు అవుతాయో లేదో సరిచూడండి.

సాధన : $p(x) = x^2 - 2x$ అనుకొనుము

అప్పుడు $p(2) = 2^2 - 2(2) = 4 - 4 = 0$ అవుతుంది

మరియు $p(0) = 0^2 - 2(0) = 0 - 0 = 0$

కావుని '2' మరియు '0' అనేవి రెండుకూడా $x^2 - 2x$ యొక్క శూన్య విలువలు అయినాయి. మనం ఇపుడు మన పరిశీలనలను పట్టీ చేద్దాం

(i) ఒక బహుపది యొక్క శూన్యవిలువ సున్నా (0) కానవసరం లేదు.

(ii) సున్నా (0) ఒక బహుపది యొక్క శూన్యవిలువ అయి ఉండవచ్చు.

(iii) ప్రతి రేఖీయ బహుపది కేవలం ఒకేఒక శూన్య విలువను కలిగి ఉంటుంది.

(iv) ఒక బహుపది ఒకటి కంటే ఎక్కువ శూన్యవిలువలు కలిగి ఉండటానికి సాధ్యం అవుతుంది.

©KTBS Not to be republished

అభ్యాసం 4.2

1. $5x + 4x^2 + 3$ అనేది బహుపది విలువలను x విలువల వద్ద కనుగొనండి.

   (i) $x = 0$ (ii) $x = -1$ (iii) $x = 2$

2. క్రింది బహుపదులలో $p(0), p(1)$ మరియు $p(2)$విలువలను కనుగొనండి.

   (i) $p(y) = y^2 - y + 1$ (ii) $p(t) = 2 + t + 2t^2 - t^3$

   (iii) $p(x) = x^3$ (iv) $p(x) = (x - 1)(x + 1)$

3. క్రింద ఇవ్వబడిన బహుపదులలో x యొక్క ఏ విలువలకు బహుపది శూన్యం అగునో, లేదో పరిశీలించండి.

   (i) $p(x) = 3x + 1 ;\ x = -\frac{1}{3}$ (ii) $p(x) = 5x - \pi ;\ x = \frac{4}{5}$

   (iii) $p(x) = x^2 - 1 ;\ x = 1, -1$ (iv) $p(x) = (x + 1)(x - 2) ;\ x = -1, 2$

(v) $p(x) = x^2 ; x = 0$ (vi) $p(x) = lx + m ; x = -\frac{m}{l}$

(vii) $p(x) = 3x^2 - 1; x = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}$ (viii) $p(x) = 2x + 1 ; x = \frac{1}{2}$

4. క్రింది బహుపదులకు శూన్యవిలువలు కనుగొనండి.

(i) $p(x) = x + 5$ (ii) $p(x) = x - 5$ (iii) $p(x) = 2x + 5$

(iv) $p(x) = 3x - 2$ (v) $p(x) = 3x$ (vi) $p(x) = ax, a \neq 0$

(vii) $p(x) = cx + d, c \neq 0, c, d$ లు వాస్తవ సంఖ్యలు.

4.4 శేష సిద్ధాంతం

15 మరియు 6 అనే రెండు సంఖ్యలను తీసుకోండి. 15ను 6చేత భాగించినపుడు మనకు భాగలబ్ధం '2' శేషం '3' లభిస్తాయి అని మీకు తెలుసు. దీనిని ఎలా వ్యక్తపరుస్తామో అని జ్ఞాపకం ఉన్నదా ! మనం 15 ను ఈ విధంగా రాస్తాము.

$$15 = (2 \times 6) + 3$$

శేషం '3' భాజకం '6' కంటే తక్కువ అని మనం గమనించాము అలాగే '12'ను '6' చే భాగిస్తే $12 = (2 \times 6) + 0$ అవుతుంది. ఇక్కడ శేషం ఎంత? ఇక్కడ శేషం '0' అవుతుంది. మరియు '6' అనేది '12' కు కారణాంకం అవుతుంది. లేదా '12' అనేది '6' కు గుణిజం అవుతుంది. ఇపుడు ప్రశ్న ఏమిటంటే సంఖ్యలను భాగించినట్లుగానే బహుపదులను కూడా వేరొక బహుపదులలో భాగించగలమా చూద్దాం.

విభాజకము ఏకపది అయినపుడు ప్రయత్నిద్దాం కావున బహుపదోక్తి $2x^3 + x^2 + x$ ను ఏకపది 'x' తో భాగిద్దాం

$$(2x^3 + x^2 + x) \div x = \frac{2x^3}{x} + \frac{x^2}{x} + \frac{x}{x}$$
$$= 2x^2 + x + 1$$

'x' అనేది ఇచ్చిన బహుపది $2x^3 + x^2 + x$ యొక్క అన్నిపదాలకు ఉమ్మడి కారణాంకం కావున మనం $2x^3 + x^2 + x$ ను $x(2x^2 + x + 1)$ అని రాయవచ్చు. x, $2x^2 + x + 1$ లు $2x^3 + x^2 + x$ యొక్క కారణాంకాలని చెబుతాము మరొక ఉదాహరణ $3x^2 + x + 1$ మరియు x అనే బహుపదులను తీసుకోండి.

©KTBS Not to be republished

$(3x^2 + x + 1) \div x = \dfrac{3x^3}{x} + \dfrac{x}{x} + \dfrac{1}{x} = 3x + 1 + \dfrac{1}{x}$ ఇది బహుపది అవుతుందా? ఈ సమాసంలో ఒక పదం $\dfrac{1}{x}$ అనేది ఋణేతర పూర్ణసంఖ్య ఘాతాంకం కాని చరరాశిని కలిగి ఉన్నది. (అనగా $\dfrac{1}{x} = x^{-1}$).

$3x + 1 + \dfrac{1}{x}$ అనేది బహుపదికాదు. అయితే ఈ భాగహారాన్ని నియమం ప్రకారం

$(3x^2 + x + 1) = \{(3x + 1)(x)\} + 1$ అని రాయవచ్చు. ఇందులో '1'ని మినహాయిస్తే మిగిలిన బహుపదిని రెండు బహుపదుల లబ్ధంగా రాయవచ్చు. ఇచ్చట మనం $(2x + 1)$ ని భాగఫలం, x ను విభాజకం మరియు '1'ని శేషం అంటాము. అందుచేత భాగహారంలో శేషం 'సున్న' కానందున xను $3x^2 + x + 1$ అనే బహుపదికి కారణాంకం కాదని మనం గుర్తుంచుకోవాలి. ఇపుడు ఒక బహుపదిని శూన్యనిలువ కాని బహుపదిలో ఎలా భాగించాలో ఈ ఉదాహరణతో తెలుసుకుందాము.

ఉదాహరణ 6: $p(x) = x + 3x^2 - 1$ మరియు $g(x) = 1 + x$ అయినప్పుడు $p(x)$ ను $g(x)$ లో భాగించండి?

సాధన : క్రింది దశల ద్వారా మనం భాగహార క్రియను చేద్దాం.

దశ 1: మనం భాజ్యం $x + 3x^2 - 1$ ను మరియు భాజకం $1 + x$ ను ప్రామాణిక రూపంలో రాస్తాము అంటే పదాలను వాటి (డిగ్రి) పరిమాణం యొక్క అవరోహణ క్రమంలో రాస్తాము. అందువల్ల విభాజ్యం $3x^2 + x - 1$ మరియు విభాజకం $x + 1$ అవుతుంది.

దశ 2: మనం విభాజ్యం యొక్క మొదటి పదాన్ని విభాజకం యొక్క మొదటి పదంతో భాగిస్తాము. అంటే మనం $3x^2$ ను x లో భాగిస్తాము మరియు $3x$ ను పొందుతాము. ఇది భాగలబ్ధపు మొదటి పదం అవుతుంది.

$\dfrac{3x^2}{x} = 3x$ = భాగలబ్ధపు మొదటి పదం

దశ 3: మనం భాజకాన్ని భాగలబ్ధం మొదటి పదంలో గుణిస్తాము మరియు ఈ గుణలబ్ధాన్ని భాజ్యం నుండి తీసివేస్తాము. అంటే $(x + 1)$ ను $3x$ చే గుణిస్తాము మరియు గుణలబ్ధం $3x^2 + 3x$ ను భాజ్యం $3x^2 + x - 1$ నుండి తీసివేస్తాము అపుడు శేషం $-2x - 1$ లభిస్తుంది.

$$\begin{array}{r|l} & 3x \\ \hline x+1 & 3x^2 + x - 1 \\ & 3x^2 + 3x \\ & - \quad - \\ \hline & -2x - 1 \end{array}$$

©KTBS Not to be republished

దశ 4 : శేషం $-2x-1$ ను మనం కొత్త భాజ్యంగా పరిగణిస్తాము. విభాజకము అలాగే ఉంటుంది. భాగలబ్ధపు తరువాతి పదాన్ని

$\frac{-2x}{x}=-2$ = భాగలబ్ధపు రెండవపదం

కొత్త భాగలబ్ధం $= 3x-2$

పొందడానికి రెండవ దశనే పునరావృతం చేయాలి. అంటే మనం కొత్త విభాజ్యం మొదటి పదాన్నే విభాజకం మొదటి పదం x లో భాగిస్తే -2 వస్తుంది. ఇది భాగలబ్ధంలో రెండవ పదం అవుతుంది.

దశ 5 : మనం విభాజకాన్ని విభాగలబ్ధం యొక్క రెండవ పదంలో గుణిస్తాము. మరియు గుణలబ్ధాన్ని విభాజ్యం నుండి తీసివేస్తాము. అంటే $(x+1)-2$ చే గుణిస్తాము మరియు గుణలబ్ధం $-2x-2$ ను విభాజ్యం $-2x-1$ నుండి తీసివేస్తాము. అపుడు శేషం '1' వస్తుంది.

$$(x+1)(-2) = -2x-2 \qquad \begin{array}{r} -2x-1 \\ -2x-2 \\ + \quad + \\ \hline +1 \end{array}$$

కొత్త విభాజ్యపు (డిగ్రి) పరిమాణం విభాజకపు (డిగ్రి) పరిమాణం కంటే తక్కువ అయ్యేవరకు ఈ క్రియ కొనసాగుతుంది. ఈ దశలో కొత్త విభాజ్యం శేషం అవుతుంది మరియు భాగలబ్ధాల మొత్తం పూర్ణభాగలబ్ధాన్ని ఇస్తుంది.

దశ 6: ఇలా పూర్ణభాగలబ్ధం $(3x-2)$ మరియు శేషం '1' అవుతుంది. ఇప్పుడు పై క్రియలో మనం చేసిన దానిని సంపూర్ణంగా చూద్దాం.

$$\begin{array}{r|l} & 3x-2 \\ \hline x+1 & 3x^2+x-1 \\ & 3x^2+3x \\ & - \quad - \\ \hline & -2x-1 \\ & -2x-2 \\ & + \quad + \\ \hline & 1 \\ \hline \end{array}$$

$3x^2+x-1=(x+1)(3x-2)+1$ అయినది గమనించండి

అంటే **విభాజ్యం = (విభాజకం × భాగఫలం) + సామాన్యంగా**

$p(x)$ యొక్క పరిమాణం $\geq g(x)$ యొక్క పరిమాణం (డిగ్రి) $g(x)\neq 0$ అగునట్లు $p(x)$ మరియు $g(x)$ లు రెండు బహుపదులైతే అప్పుడు మనం

©KTBS Not to be republished

$p(x) = g(x)\,q(x) + r(x)$ అగునట్లు $q(x)$ మరియు $r(x)$ బహుపదులను పొందుతాము.

ఇక్కడ $r(x) = 0$ లేదా $r(x)$ యొక్క పరిమాణం $g(x)$ యొక్క పరిమాణం (డిగ్రి) కన్నాతక్కువ ఇక్కడ $p(x)$ ను $g(x)$ తో భాగించినప్పుడు భాగలబ్ధం $q(x)$ మరియు $r(x)$ లు లభిస్తాయని చెబుతాము. ఈ పై ఉదాహరణలో విభాజకము రేఖీయ బహుపది అయినది అలాంటి సందర్భంలో శేషము మరియు విభాజ్యము యొక్క విలువల మధ్య ఏదైనా సంబంధం వుందా అని చూద్దాము. సూక్ష్మీకరించినప్పుడు.

$p(x) = 3x^2 + x - 1$ లో 'x' లో '-1' ని ప్రతిక్షేపించినప్పుడు.

$p(-1) = 3(-1)^2 + (-1) - 1 = 1$ లభిస్తుంది.

కావున $p(x) = 3x^2 + x - 1$ ను $x + 1$ నుండి భాగించినపుడు లభించిన శేషం, బహుపది $x + 1$ యొక్క శూన్య విలువలో అంటే -1 లో బహుపది $p(x)$ విలువకు సమానం ఇపుడు ఇంకొన్ని ఉదాహరణలను తీసుకుందాం.

ఉదాహరణ 7 : $3x^4 - 4x^3 - 3x - 1$ అనే బహుపదిని $x - 1$ చే భాగించి శేషాన్ని విభాజకం యొక్క శూన్యవిలువలో సరి చూడండి.

సాధన : దీర్ఘ భాగాహార పద్ధతిలో :–

$$
\begin{array}{r|l}
 & 3x^3 - x^2 - x - 4 \\
\hline
x - 1 & 3x^4 - 4x^3 - 3x - 1 \\
 & 3x^4 - 3x^3 \\
 & - \quad + \\
\hline
 & -x^3 \quad - 3x - 1 \\
 & -x^3 + x^2 \\
 & + \quad - \\
\hline
 & -x^2 - 3x - 1 \\
 & -x^2 + x \\
 & + \quad - \\
\hline
 & -4x - 1 \\
 & -4x + 4 \\
 & + \quad - \\
\hline
 & -5
\end{array}
$$

ఇక్కడ శేషం -5 అయినది ఇప్పుడు $x - 1$ యొక్క శూన్యవిలువ '1' కావున $x = 1$ ని $p(x)$ లో సూక్ష్మీకరించినచో.

©KTBS Not to be republished

$p(x) = 3(1)^4 - 4(1)^3 - 3(1) - 1$

$= 3 - 4 - 3 - 1$

$= -5$ ఇది శేషం.

ఉదాహరణ 8 : $p(x) = x^3 + 1$, $x + 1$ చే భాగించినప్పుడు లభించుశేషాన్ని కనుగొనండి.

సాధన : ధీర్ఘ భాగాహార పద్ధతిలో :–

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 - x + 1 \\
x+1 & x^3 + 1 \\
 & x^3 + x^2 \\
 & - \quad - \\ \hline
 & -x^2 \qquad + 1 \\
 & -x^2 - x \\
 & + \quad + \\ \hline
 & x + 1 \\
 & x + 1 \\
 & - \quad - \\ \hline
 & 0
\end{array}
$$

కావున శేషం '0' అయిందని మనకు తెలుసు.

ఇక్కడ $p(x) = x^3 + 1$ మరియు $x + 1 = 0$ దీని మూలము $x = -1$

$p(-1) = (-1)^3 + 1$

$= -1 + 1$

$= 0$

ఇది ధీర్ఘ భాగహార పద్ధతిలో లభించిన శేషమునకు సమానం ఒక బహుపదిని రేఖీయ బహుపదిలో భాగించినప్పుడు లభించు శేషమును కనుగొనుటకు ఇది సరల మార్గమే కదా? మనం ఇప్పుడు ఈ విషయాన్ని క్రింది సిద్ధాంతం రూపంలో సామాన్యీకరిస్తాం. ఈ సిద్ధాంతాన్ని సాధించడం వల్ల ఈ ప్రమేయము సరి అని చూపిస్తాము.

శేష సిద్ధాంతం :

***p(x)* అనేది ఒక ఏక పరిమాణ లేదా అంతకన్నా ఎక్కువ గరిష్ఠ పరిమాణం గల బహుపది మరియు '*a*' అనేది వాస్తవ సంఖ్య అయినప్పుడు *p(x)*ను రేఖీయ బహుపది *x – a* చే భాగిస్తే వచ్చు శేషం *p(a)* అగును.**

©KTBS Not to be republished

సాధన :

ఏక పరిమాణ (డిగ్రి) లేదా అంతకన్నా ఎక్కువ గరిష్ఠ పరిమాణం (డిగ్రి)గల బహుపది $p(x)$ ను తీసుకుందాం $p(x)$ ను రేఖీయ బహుపది $g(x) = (x - a)$ చే భాగించినప్పుడు భాగఫలం $q(x)$ మరియు శేషం $r(x)$ అనుకుందాం అంటే $p(x)$ మరియు $g(x)$ అనేవి రెండు బహుపదులు అయిన సందర్భంలో $p(x)$ యొక్క పరిమాణం >, $g(x)$ యొక్క పరిమాణం (డిగ్రీ) మరియు $g(x) \neq 0$ అయితే మనకు $q(x)$ మరియు $r(x)$ అనే మరొక రెండు బహుపదులు వస్తాయి. ఇందులో $r(x) = 0$ లేదా $r(x)$ పరిమాణం (డిగ్రీ) ఎప్పుడూ $g(x)$ పరిమాణం (డిగ్రీ)కన్నా తక్కువగా ఉంటుంది.

భాగహార నియమం ప్రకారం

$p(x) = g(x)\, q(x) + r(x)$ గా రాయవచ్చు

$\therefore\ p(x) = (x - a)\, q(x) + r(x) \qquad \because\ p(x) = (x - a)$

$(x - a)$ పరిమాణం 1 మరియు $r(x)$ పరిమాణం $(x - a)$ పరిమాణం కన్నా తక్కువకనుక.

$\therefore\ r(x)$ పరిమాణం = 0, అంటే $r(x)$ ఒక స్థిరరాశి దీనిని 'k' అనుకుంటే ప్రతి వాస్తవ

విలువ x కు $r(x) = k$ కావున.

$$p(x) = (x - a)\, q(x) + k$$
$$x = a\ p(a) = (a - a)\, q(a) + k$$
$$= 0 + k$$
$$= k$$

కావున సిద్ధాంతం నిరూపించబడినది.

ఇప్పుడు మనం ఒక బహుపదిని మరొక రేఖీయ బహుపదిచేత భాగించునప్పుడు వచ్చే శేషాలను భాగహారంచేయకుండానే సిద్ధాంతం ఆధారంగా ఎలా కనుక్కొంటారో ఉదాహరణల ద్వారా పరిశీలిద్దాం.

ఉదాహరణ 9 : $x^4 + x^3 - 2x^2 + x + 1$ ను $x - 1$ లో భాగిస్తే వచ్చే శేషం కనుగొనండి.

సాధన : ఇచ్చుట $p(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 + x + 1$ మరియు రేఖీయ బహుపది $x - 1$ శూన్యవిలువ 1.

కావున $p(1) = (1)^4 + (1)^3 - 2(1)^2 + 1 + 1$
$= 2$

$\therefore$ శేషసిద్ధాంతం ప్రకారం, $x^4 + x^3 - 2x^2 + x + 1$ ను $x - 1$ లో భాగించగా శేషం '2' వచ్చింది.

©KTBS Not to be republished

ఉదాహరణ 10 : బహుపది $q(t) = 4t^3 + 4t^2 - t - 1$ ఇది $(2t + 1)$ యొక్క కారణాంకమా? పరీక్షించండి?

సాధన : ఇచ్చిన బహుపదికి $2t + 1$ కారాణాంకం అవునో, కాదో తెలుసుకోవాలంటే $2t + 1$, $q(t)$ ని శేషం '0' అగునట్లు భాగిస్తే మాత్రమే $q(t)$, $2t + 1$ కు కారణాంకం అవుతుంది. ఇప్పుడు $2t + 1 = 0$ అని తీసుకుంటే $t = -\frac{1}{2}$ అవుతుంది.

$$q\left(-\frac{1}{2}\right) = 4\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 4\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right) - 1 = -\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} - 1 = 0$$

కావున $q(t)$ ని $2t + 1$ చే భాగించినప్పుడు లభించుశేషం '0' అవుతుంది కావున $2t + 1$ ఇది దత్త బహుపది q(t) యొక్క కారణాంకము, అంటే $q(t)$, $2t + 1$ యొక్క కారణాంకం అవుతుంది.

అభ్యాసం 4.3

1. $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ ను కింది రేఖీయ బహుపదులతో భాగించునప్పుడు వచ్చే శేషాలు కనుగొనండి.

   (i) $x + 1$ (ii) $x - \frac{1}{2}$ (iii) x (iv) $x + \pi$ (v) $5 + 2x$

2. $x^3 - ax^2 + 6x - a$ ను $x - a$ లో భాగిస్తే వచ్చే శేషం ఎంత?

3. $7 + 3x$ ఇది $3x^3 + 7x$ యొక్క కారణాంకమా పరిశీలించండి?

4.5 బహుపది యొక్క కారణాంక విభజన

ఇపుడు పై ఉదాహరణ 10 సందర్భాన్ని సూక్ష్మంగా గమనించండి. దానివల్ల శేషం $q\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$ అయినందువల్ల, $(2t + 1)$, $q(t)$ యొక్క కారణాంకమైనది అని తెలుస్తున్నది. అంటే ఏదేని బహుపది $g(t)$ కి $q(t) = (2t + 1)\, g(t)$. ఇది కింది సిద్ధాంతానికి ప్రత్యేక ప్రకరణం అవుతుంది.

కారణాంక సిద్ధాంతము : బహుపది పరిమాణం $(n \geq 1)$ గాగల బహుపది $p(x)$ మరియు *'a'* ఏదేని వాస్తవ సంఖ్య అయినపుడు.

(i) $p(a) = 0$ అయిన $x - a$ అనేది $p(x)$ కు కారణాంకం అగును మరియు

(ii) $(x - a)$ అనేది $p(x)$ కు కారణాంకం అయిన $p(a) = 0$ అగును.

సాధన : శేష సిద్ధాంతం ప్రకారం, $p(x) = (x - a)\, q(x) + p(a)$

©KTBS Not to be republished

(i) $p(a) = 0$ అయిన సందర్భంలో $p(x) = (x - a)\, q(x) + 0$ అగును $(x - a)\, q(x)$ దీనిని బట్టి $p(x)$ కు $(x - a)$ కారణాంకమని చెప్పవచ్చు.

(ii) ఇదే విధంగా $(x - a)$ అనేది $p(x)$ కు కారణాంకం కావున $p(x) = (x - a)\, q(x)$ సత్యమవుతుంది. $q(x)$ అనేది మరొక బహుపది.

$\therefore\ p(a) = (a - a)\, q(a) = 0$

$\therefore\ (x - a)$ అనేది $p(x)$ కు కారణాంకం అయిన $p(a) = 0$ అయినది.

ఈ విధంగా సిద్ధాంతం నిరూపించబడినది.

ఉదాహరణ 11: $x^3 + 3x^2 + 5x + 6$ మరియు $2x + 4$ ల కారణాంకం $x + 2$ అవుతుందా పరీక్షించండి.

సాధన : $x + 2$ యొక్క శూన్యవిలువ -2.

$p(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 6$ మరియు $s(x) = 2x + 4$ అనుకొనుము.

అప్పుడు, $p(-2) = (-2)^3 + 3(-2)^2 + 5(-2) + 6$

$= -8 + 12 - 10 + 6$

$= 0$

$x + 2$ ఇది $x^3 + 3x^2 + 5x - 6$ యొక్క కారణాంకం అవుతుంది.

పునః $s(-2) = 2(-2) + 4 = 0$

కావున $x + 2$ ఇది $2x+4$ యొక్క కారణాంకం అవుతుంది నిజంగా, $2x + 4 = 2(x + 2)$ అయినందువల్ల కారణాంక సిద్ధాంతం అన్వయించిందా లేదా పరిశీలించవచ్చు.

ఉదాహరణ 12 : $4x^3 + 3x^2 - 4x + k$ అను బహుపది సమాసానికి $x - 1$ కారణాంకమైతే k విలువను కనుగొనండి.

సాధన : $x - 1$ అనేది $p(x) = 4x^3 + 3x^2 - 4x + k$ బహుపదికి కారణాంకం అయినందున $p(1) = 0$

ఇప్పుడు, $p(1) = 4(1)^3 + 3(1)^2 - 4(1) + k$

కావున, $4 + 3 - 4 + k = 0$

అంటే $k = -3$

©KTBS Not to be republished

మనం ఇప్పుడు రెండవ పరిమాణం (డిగ్రీ) మరియు 3వ పరిమాణం (డిగ్రీ) అయినకొన్ని బహుపదులను కారణాంకాలుగా విభజించడానికి కారణాంక సిద్ధాంతాన్ని ఉపయోగిస్తాము. మీరు ఇదివరకే $x^2 + lx + m$. ఈ విధమైన వర్గబహుపదిని కారణాంకాలుగా విభజన గురించి తెలుసుకున్నారు. మీరు మధ్యపదము 'lx' ను $ax + bx$ ($ab = m$ అగునట్లు) అని విభజించుట ద్వారా కారణాంక విభజన చేశాము. అప్పుడు $x^2 + lx + m = (x + a)(x + b)$ ఇప్పుడు మనం $ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$, a, b, c లు స్థిరాంకాలు) రూపంలో గల వర్గ బహుపదులను కారణాంక విభజన చేయడానికి ప్రయత్నిద్దాం మధ్యపదాన్ని విభజించుట ద్వారా బహుపది $ax^2 + bx + c$ ని కారణాంక విభజన ఈ క్రింది విధంగా వుంటుంది.

ఇప్పుడు దాని కారణాంకాలు $(px + q)$ మరియు $(rx + s)$ అనుకుందాం.

$\therefore\ ax^2 + bx + c = (px + q)(rx + s) = pr\,x^2 + (ps + qr)\,x + qs$

x^2 యొక్క సహగుణకాలను పోలిస్తే, $a = pr$.

అలాగే, x యొక్క సహగుణాలు పోలిస్తే, $b = ps + qr$ మరియు

స్థిరాంకాలను పోలిస్తే, $c = qs$.

దాని నుండి మనకు 'x' గుణకం 'b' అనేది ps మరియు qr ల మొత్తమని తెలుస్తున్నది. వీటి లబ్ధం $(ps)(qr) = (pr)(qs) = ac$ అని రాయవచ్చు.

దీనిని బట్టి, $ax^2 + bx + c$ వర్గబహుపది కారణాంక విభజనలో b అనేది రెండు సంఖ్యల మొత్తం అని, వాటి లబ్ధం 'ac' అని తెలుస్తున్నది. ఇది ఉదా 13నుండి స్పష్టమవుతుంది.

ఉదాహరణ 13 : $6x^2 + 17x + 5$ దీనిని మధ్యపదాన్ని విభజించుట ద్వారా మరియు కారణాంక సిద్ధాంతం ఉపయోగించి విభజించండి.

సాధన : (మధ్యపదాన్ని విభజించే విధానం ద్వారా) : $p + q = 17$ మరియు $pq = 6 \times 5 = 30$ అగునట్లు p మరియు q అనే రెండు సంఖ్యలు మనకు లభిస్తే అప్పుడు మనం కారణాంకాలు పొందవచ్చు. కావున ఇప్పుడు 31 కారణాంకాల జతలను చూద్దాం. 1 మరియు 30, 2 మరియు 15, 3 మరియు 10, 5 మరియు 6. వీటిలో 2 మరియు 15ను తీసుకున్నప్పుడు $p + q = 17$.

కావున, $6x^2 + 17x + 5 = 6x^2 + (2 + 15)x + 5$

$= 6x^2 + 2x + 15x + 5$

$= 2x(3x + 1) + 5(3x + 1)$

$= (3x + 1)(2x + 5)$

©KTBS Not to be republished

ఉదాహరణ 14 : కారణాంక సిద్ధాంతం ఉపయోగించి $y^2 - 5y + 6$ ను విభజించండి.

సాధన : ఇప్పుడు $p(y) = y^2 - 5y + 6$ అయివుండనీయండి. ఇప్పుడు, $p(y) = (y - a)(y - b)$ అయితే, స్థిరాంకం ab అయివుండుటనం మీరు తెలుసుకున్నారు. ఇదేవిధంగా $ab = 6$. అందువలన $p(y)$ కారణాంకాలు తెలుసుకోవడానికి మనం 6 యొక్క కారణాంకాలు చూస్తాం.

6 యొక్క కారణాంకాలు 1, 2, మరియు 3

ఇప్పుడు, $p(2) = 2^2 - (5 \times 2) + 6 = 0$

$\therefore$ $p(y)$ మరియు ఒక కారణాంకం $y - 2$ అవుతుంది.

$p(3) = 3^2 - (5 \times 3) + 6 = 0$

$y^2 - 5y + 6 = 0$ యొక్క కారణాంకం $(y - 3)$ కూడా అవుతుంది.

కావున, $y^2 - 5y + 6 = (y - 2)(y - 3)$.

$y^2 - 5y + 6$ ను మధ్యపదం $-5y$ ను విడదీయుట కారణాంకా విభజన చేయవచ్చు అని గమనించండి. ఇప్పుడు గణ బహుపదుల కారణాంక విభజనను తీసుకుందాం. ఇక్కడ విభజించే విధానంలో ప్రారంభించడం సరికాదు. మీరు ఈ క్రింది ఉదాహరణలలో చూపినట్టు మొదట కనీసం ఒక కారణాంకాన్ని కనుగొనవలసింది.

ఉదాహరణ 15 : $x^3 - 23x^2 + 142x - 120$ ను కారణాంకాలుగా విభజించండి.

సాధన : $p(x) = x^3 - 23x^2 + 142x - 120$ అనుకొనండి

వీటిలో ప్రయత్నిస్తే మనకు $p(x) = 0$ అవుతుంది (సరిచూడండి). కావున $p(x)$ కు $(x - 1)$ కారణాంకం అవుతుంది. తర్వాత $p(x)$ ను $(x - 1)$ చే భాగిస్తే మనకు $x^2 - 22x + 120$ వస్తుంది. దీని కారణాంక విభజన మరొక విధంగా చేసి చూద్దాం

$$x^3 - 23x^2 + 142x - 120 = x^3 - x^2 - 22x^2 + 22x + 120x - 120$$

$$= x^2(x - 1) - 22x(x - 1) + 120(x - 1) \quad \text{(ఎలా?)}$$

$$= (x - 1)(x^2 - 22x + 120)(x - 1)$$

ఇప్పుడు $x^2 - 22x + 120$ వర్గబహుపది కావున, మధ్యపదంను విడదీసి కారణాంకాలు కనుగొందాం.

$$x^2 - 22x + 120 = x^2 - 12x - 10x + 120$$
$$= x(x - 12) - 10(x - 12)$$
$$= (x - 12)(x - 10)$$

కావున, $x^3 - 12x^2 + 142x - 120 = (x - 1)(x - 10)(x - 12)$

©KTBS Not to be republished