అధ్యాయము

13 సంభావ్యత

(Probability)

W5T2B3

13.1 పరిచయం

కుమార్ మరియు సుధలు క్యారమ్స్ ఆట ఆడుతూ ఈ విధంగా చర్చిస్తున్నారు.

కుమార్ : ఈ ఆటలో గెలుస్తావని నీవు అనుకుంటున్నావా?

సుధ : నా గెలుపునకు 50 శాతం అవకాశాలున్నాయి. బహుశా నేను గెలవవచ్చు.

కుమార్ : 50 శాతం అవకాశాలు ఉన్నాయని నీవు ఎట్లా చెప్పగలవు ?

ఈ సంభాషణలో సుధ మాటలు ఎంతవరకు సత్యము అనుకుంటున్నారు?

ఆమె గెలవడానికి 50 శాతం అవకాశాలు ఉన్నాయా ? ఆమెతో మీరు ఏకీభవిస్తారా?

ఈ అధ్యాయంలో మనం ఇటువంటి సందర్భాల గురించి చర్చిద్దాం. ఇంకనూ 'బహుశా' 'సంభవము' 'సాధ్యము' మొదలగు పదాల గురించి, వానిని ఎట్లు గణించాలి అను దాని గురించి చర్చిద్దాము. 9వ తరగతిలో పూర్తి సంభవము లేక ఖచ్చిత ఘటనము మరియు పూర్తి అసంభవము లేక అసంభవ సంఘటనల గురించి తెలుసుకున్నాము. ఇంకా ఒక ఘటన యొక్క అవకాశముల గురించి, ఒక ఘటన యొక్క పర్యవసానము ఎల్లప్పుడు ఒకే విధంగా ఉ ండనవసరం లేదు. అనుదాని గురించి చర్చించి యున్నాము. ప్రస్తుతం ఒక ఘటన సంభవము యొక్క ప్రమాణీకరము గురించి నేర్చుకొందాము.

ఈ విధంగా ప్రమాణీకరణమును సంఖ్యాత్మకంగా తెలుపుటను 'సంభావ్యత' అంటారు.

13.1.1 సంభావ్యత అనగా నేమి?

ఈ ప్రయోగాన్ని గమనించండి. ఒక నాణెమును 1000 సార్లు ఎగురవేసినపుడు 455 సార్లు బొమ్మ, 545 సార్లు బొరుసు పడినది. బొమ్మపడే సంభవాన్ని ప్రమాణీకరణము చేస్తే 1000 కి 455 సార్లు అనగా $\frac{455}{1000} = 0.455$.

ఇట్లు ప్రయోగపూర్వక ఫలితాలను ఆధారం చేసుకొని లెక్కించిన సంభావ్యతను 'ప్రయోగిక సంభావ్యత' (Experimental probability) అంటారు. ఈ ప్రయోగిక సంభావ్యత అంచనాకు ఒక ప్రయోగము దాని ఫలితాలు ఆధారము, అనగా ఇదే ప్రయోగాన్ని మరలా 1000 సార్లు చెసినప్పుడు ఇదే సంభావ్యత ఏర్పడుతుందని చెప్పలేము. స్వల్ప బేధము ఏర్పడవచ్చును.

ఇదేవిధంగా నాణెమును ఎగురవేసి బొమ్మ పడే సంభావ్యతను అంచనా వేసే ప్రయోగాన్ని ప్రపంచము నలుమూలలనుంచి ఎందరో వ్యక్తులు చేసి ఉన్నారు.

ఉదాహరణకు పద్దెనిమిదవ శతాబ్దంలో ఫ్రెంచి శాస్త్రవేత్త కాంట్ డి.బఫన్ నాణెమును 4040 సార్లు ఎగురవేసి 2048 సార్లు బొమ్మపడినట్లుగా లెక్కించాడు. అనగా ప్రయోగిక సంభావ్యత = $\frac{2048}{4040} \simeq 0.507$ (సుమారు).

బ్రిటన్ శాస్త్రవేత్త J.E. కెరిచ్ నాణెమును 10,000 సార్లు ఎగురవేసి 5067 సార్లు బొమ్మ పడినట్లుగా లెక్కించాడు. అనగా ప్రయోగిక సంభావ్యత = $\frac{5067}{10000} \simeq 0.5067$ అట్లే సాంఖ్యక శాస్త్రజ్ఞుడు కారల్ పియర్సన్ 24000 సార్లు ఎగురవేసి 12012 సార్లు బొమ్మ పడినట్లు లెక్కించాడు. అనగా ప్రయోగిక సంభావ్యత. $\frac{12012}{24000} = 0.5005$.

మనమిప్పుడు ఇదే ప్రయోగాన్ని 10 లక్షలసార్లో లేక కోటిసార్లో చేసి బొమ్మపడే సంభావ్యతను లెక్కించవలసి వస్తే, పై ప్రయోగాలన్నింటి యొక్క పర్యవసానముగా బొమ్మకానీ, బొరుసు కానీ పడే సంభావ్యత సంఖ్యాత్మకంగా 0.5 లేక $\frac{1}{2}$ అని చెప్పవచ్చు. అంటే ప్రయోగం చేయకుండానే అన్ని పర్యవసానములను బట్టి ఒక ఘటన యొక్క సంభావ్యతను అంచనా వేయవచ్చును. దీనినే 'సైద్ధాంతిక సంభావ్యత' (Theoretical probability) లేక 'సాంప్రదాయక సంభావ్యత' (Classical probability) అంటారు.

ఈ సిద్ధాంతమును ఆధారంగా చేసికొని కొన్ని ప్రాథమిక సమస్యల సాధన గురించి చర్చిద్దాము.

13.2 సంభావ్యత - సైద్ధాంతిక వివరణ

యాదృచ్ఛిక ప్రయోగంలో నిష్పాక్షిక నాణెమును ఎగురవేయుట అను సందర్భమును గమనించండి. ఇచ్చట నాణెము సౌష్టవంగా ఉన్నప్పుడు బొమ్మ లేక బొరుసు పడే సంభవములలో ఏది ఎక్కువ సార్లు? ఏది తక్కువ సార్లు? అనుటకు అవకాశము లేదు. అందువల్ల నాణెమును నిష్పాక్షికము అని, ఎగురవేయుటను 'యాదృచ్ఛిక ప్రయోగము' అని అంటారు. బొమ్మ, బొరుసులను 'సమసంభవ ఘటనలు' (equally likely events) అంటారు.

ఈ పాఠ్యాంశములో యాదృచ్ఛిక ప్రయోగములో వెలువడు ఫలితములు సమసంభవమైనవి గాను మరియు ప్రతి రూప ఆవరణ పరిమితమైనది గాను పరిగణించబడ్డాయి. కనుక నాణెములు లేక పాచికలను తీసుకొన్నప్పుడు అవి నిష్పాక్షికమైనవిగా పరిగణించాలి.

SCERT, TELANGANA

ఇవి చేయండి

అ. క్రింది ఘటనలలో దేని పర్యవసానములన్నీ సమసంభావాలు?

1. పాచిక (dice) ను ఎగురవేసినపుడు 1, 2, 3, 4, 5 లేక 6 పడుట.
2. 5 ఎరుపు, 4 నీలం, 1 నలుపు బంతులు గల సంచి నుండి ఒక బంతిని యాదృచ్ఛికంగా తీయుట.
3. కారమ్స్ ఆటను గెలుచుట.
4. రెండంకెల సంఖ్యలో ఒకట్ల స్థానము 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 లేక 9 అగుట.
5. 10 ఎరుపు, 10 నీలం, 10 నలుపు రంగు బంతులు గల సంచి నుండి ఒక బంతిని యాదృచ్ఛికంగా తీయుట
6. జూలై నెలలో ఒక రోజు వర్షం పడటం

ఆ. పై అన్ని ఘటనల యొక్క పర్యవసానాలన్నీ సమసంభవాలేనా?

ఇ. పర్యవసానాలన్నీ సమసంభవాలైన 5 ఘటనలను, సమసంభవాలు కాని 5 ఘటనలను పేర్కొనండి.

కృత్యం

(i) ఒక నాణెమును 50 సార్లు, 100 సార్లు, 150 సార్లు ఎగురవేసి, సంభవమైన బొమ్మ, బొరుసు సంఖ్యలను లెక్కించండి. క్రింది పట్టికలో పూరించండి.

క్రమ సంఖ్య	ప్రయోగాల సంఖ్య	బొమ్మ పడినసంఖ్య	బొమ్మపడుట సంభావ్యత	బొరుసు పడిన సంఖ్య	బొరుసుపడుట సంభావ్యత
1.	50				
2.	100				
3.	150				

పై ప్రయోగము నుండి మీరేమి గమనించారు? ప్రయోగంలోని ప్రయత్నాల సంఖ్య పెరిగే కొద్ది బొమ్మ లేక బొరుసు పడే సంభావ్యత 50% అనగా $\frac{1}{2}$ కు దగ్గరగా అవుతున్నది కదా. ప్రయత్నాలసంఖ్య అపరిమితంగా చేయగల అన్ని ప్రయోగాల విషయంలో ఇటువంటి సంభావ్యతను లెక్కించవచ్చును.

సంభావ్యత – మాదిరి ప్రయోగము

నాణెం ఎగురవేయుటలోను లేక పాచిక దొర్లించడంలోను ప్రయత్నాల సంఖ్య అపరిమితంగా చేయగలిగినప్పటికి, అన్ని ఘటనలవిషయంలో ప్రయాత్నాలకు కొన్ని అవధులు, సాధ్యాసాధ్యములు ఉంటాయి. ఉదాహరణకు ఒక కృత్రిమ ఉపగ్రహమును అంతరిక్షంలోనికి పంపడం యొక్క ప్రయోగిక సంభావ్యత కనుగొనడానికి, భూకంపము తాకిడికి పలు అంతస్తులు గల భవనం కూలిపోకుండా ఉండే సంభావ్యత కనుగొనడానికి పలు ప్రయత్నాలను మనం చేయలేము. ఫలితాల నుండి ప్రయోగిక సంభావ్యతను లెక్కించలేము కదా! అందువల్ల అటువంటి మాదిరి సంఘటనలను కృత్రిమంగా చేసి లేక ఊహించి ఏర్పడే

SCERT, TELANGANA

వివిధ సమ సంభవ పర్యవసానాలను పరిగణించి సంభావ్యతను అంచనావేస్తారు. అటువంటి మాదిరి ప్రయోగాల విశ్వసనీయత ఆ ప్రయోగం చేయుటలో తీసుకొన్న జాగ్రత్తలు, అంచనాలు మరియు పర్యవసానాలపై ఆధారపడి యుంటుంది. వాతావరణ హెచ్చరికలు, జనాభా విస్తరణ, భూకంపముల గురించి ముందు హెచ్చరికలు, పంటల దిగుబడి మొదలగునవి అన్నింటిని మాదిరి సంఘటనలు ఊహించి పర్యావసానాలను అంచనా వేయడం ద్వారా చెబుతారు.

ఒక ఘటన (E) యొక్క ప్రయోగిక సంభావ్యత P(E) ను లెక్కించుటకు

$$\text{సూత్రం} \quad P(E) = \frac{E \text{ కు అనుకూల పర్యవసానాల సంఖ్య}}{\text{మొత్తం పర్యవసానాల సంఖ్య}}$$

నాణెమును ఎగుర వేయుట, పాచికను దొర్లించుట వంటి ఉదాహరణలలో చర్చించినట్లుగా "సమసంభవ పర్యవసానములు" అను ఊహ ఆధారంగా సంభావ్యత యొక్క నిర్వచనము క్రింది విధంగా ఇవ్వబడింది.

T అనే ఘటన యొక్క సైద్ధాంతిక (లేక సాంప్రదాయక) సంభావ్యతని P(T)అని వ్రాస్తాం.

$$\text{అనగా} \quad P(T) = \frac{\text{ఘటన } T\text{కు అనుకూల పర్యవసానముల సంఖ్య}}{\text{ప్రయోగంలో సాధ్యపడు అన్ని పర్యవసానముల సంఖ్య}} \text{ అని నిర్వచిస్తాం.}$$

ఇచ్చట అన్ని పర్యవసానములు సమసంభవములుగా పరిగణించాలి. సాధారణంగా 'సైద్ధాంతిక సంభావ్యత'ను 'సంభావ్యత' అని వ్యవహరిస్తాము.

సంభావ్యతను మొట్టమొదటిసారిగా 1795లో పియర్ సైమన్ లాప్లేస్ నిర్వచించినాడు.

16వ శతాబ్దములో జె.కార్డన్ అను ఇటలీకి చెందిన భౌతిక శాస్త్రవేత్త, గణితజ్ఞుడు 'The Book on Games of Chance' పుస్తకాన్ని వ్రాయుటతో సంభావ్యత ఒక శాస్త్రంగా ఉద్భవించినది. జేమ్స్ బెర్నౌలి (1654 -1705), ఎ.డి.మావియర్ (1667-1754) మరియు పియర్ సిమ్సన్ లు కూడా సంభావ్యత అధ్యయనానికి, అభివృద్ధికి కృషి చేసారు. వర్తమానంలో సంభావ్యత ప్రాముఖ్యత పెరిగి జీవశాస్త్రం, జెనిటిక్స్, భౌతికశాస్త్రం, సామాజిక శాస్త్రం, ఆర్థిక శాస్త్రంలలో కూడా ప్రముఖ పాత్ర పోషించుచున్నది.

పియర్ సైమన్ లాప్లేస్
(1749 – 1827)

13.3 పరస్పర వర్జిత ఘటనలు (Mutually Exclusive Events)

ఒక నాణెమును ఎగురవేసినప్పుడు బొమ్మ లేక బొరుసు పడుతుంది కానీ రెండూ ఒకేసారి సంభవము కాదు. అదేవిధంగా ఉన్నత పాఠశాలలోని ఏ విద్యార్థిని అయినా తీసుకొంటే అతడు 6, 7, 8, 9 లేక 10 తరగతులలో ఏదో ఒక తరగతికి మాత్రమే చెంది ఉంటాడు. అనగా పరిగణించిన ఘటన ఒక పర్యవసానము అయితే మిగిలిన పర్యవసానములు అన్నీ అసంభవములే. ఇటువంటి సంఘటనలను పరస్పర వర్జిత ఘటనలు అంటారు.

ఒక ప్రయోగంలోని రెండు లేక అంత కన్నా ఎక్కువ ఘటనలలో ఒక ఘటన యొక్క సంభవము మిగిలిన అన్ని ఘటనల సంభవమును నిరోధిస్తే, ఆ ఘటనలను పరస్పర వర్జిత ఘటనలు అంటారు.

13.4.1 సంభావ్యతను గణించుట

సమసంభవ ఘటనల యొక్క సంభావ్యతను ఎలా కనుగొంటాము? నాణెమును ఎగురవేయుట అనేది సమసంభవ పర్యవసానములు గల ప్రయోగముగా పరిగణిస్తాము. అనగా ప్రతిసారి రెండు సమసంభవ పర్యవసానములు ఉంటాయి. ఈ పర్యవసానముల సమూహమును **'ప్రతిరూప ఆవరణము' (sample space)** అంటారు. ఒక నాణెమును ఎగురవేసినప్పుడు ప్రతి రూప ఆవరణము $\{H, T\}$. ఎరుపు, నీలం, పసుపు, తెలుపు బంతుల గల సంచి నుండి ఒక బంతిని తీయుటలో ప్రతిరూప ఆవరణము $\{R, B, Y, W\}$ అట్లే ఒక పాచికను దొర్లించుటలో ప్రతిరూప ఆవరణమును ఊహించగలరా?

ఇవి చేయండి

సమసంభవ పర్యవసానములు గల ఐదు సందర్భాలను పేర్కొని వాని ప్రతిరూప ఆవరణలను వ్రాయండి.

సమసంభవము మరియు పరస్పర వర్జిత ఘటనలయొక్క సంభావ్యతను ఎట్లు కనుగొనవచ్చునో కొన్ని ఉదాహరణలను పరిశీలిద్దాము.

ఉదాహరణ-1. ఒక నాణెమును ఒకసారి ఎగురవేసినప్పుడు బొమ్మపడే సంభావ్యతను, బొరుసు పడే సంభావ్యతను లెక్కించండి.

సాధన : నాణెమును ఒకసారి ఎగురవేసినప్పుడు సాధ్యపడు పర్యవసానములు రెండు, బొమ్మ (H) లేక బొరుసు (T). బొమ్మ పడుట అనే ఘటన E అయితే అనుకూల పర్యవసానములు 1.

$$P(E) = P\,(\text{బొమ్మ}) = \frac{E \text{ కు అనుకూల పర్యవసానాల సంఖ్య}}{\text{సాధ్యపడు మొత్తం పర్యవసానాల సంఖ్య}} = \frac{1}{2}$$

ఇదేవిధంగా బొరుసుపడు అనే ఘటన F అయిన

$$P(F) = P(\text{బొరుసు}) = \frac{1}{2} \text{ (ఎందుకు? చర్చించండి)}$$

ఉదాహరణ-2. ఒక సంచిలో ఒక ఎరుపు బంతి, ఒక నీలం బంతి, ఒక పసుపు రంగు బంతి ఉన్నాయి. అన్ని బంతులు ఒకే పరిమాణము కలిగి ఉన్నాయి. సంచిలోనికి చూడకుండా మానస ఒక బంతిని తీస్తే ఆ బంతి (i) పసుపు రంగు బంతి (ii) ఎరుపు బంతి (iii) నీలం బంతి అవడానికి సంభావ్యతలు కనుగొనండి.

సాధన : మానస చూడకుండా బంతిని తీసుకున్నది. కావున అన్ని పర్యవసానములు సమసంభవములు. పసుపు రంగు బంతిని తీయు ఘటన Y, నీలం బంతి తీయు ఘటన B మరియు ఎరుపు బంతి తీయు ఘటన R అయిన ప్రతి రూప ఆవరణము $\{Y, B, R\}$. పర్యవసానములు $= 3$.

(i) Y కి అనుకూల పర్యవసానములు $= 1$.

$$\therefore\ P(Y) = \frac{1}{3} \text{ అదేవిధంగా } P(R) = \frac{1}{3},\ P(B) = \frac{1}{3}$$

SCERT TELANGANA

పరిశీలనలు

1. ఒక ప్రయోగములో ఒక ఘటనకు అనుకూల పర్యవసానము ఒక్కటి మాత్రమే అయిన దానిని ప్రాథమిక ఘటన (Elementary event) అంటారు. 1వ ఉదాహరణలో E మరియు F లు ప్రాథమిక ఘటనలు అట్లే 2వ ఉదాహరణలో Y, B, R లు కూడా ప్రాథమిక ఘటనలే.
2. ఒకటవ ఉదాహరణను గమనిస్తే : $P(E) + P(F) = 1$
   అదే విధంగా 2వ ఉదాహరణలో : $P(Y) + P(R) + P(B) = 1$.

   ఒక ప్రయోగంలో అన్ని ప్రాథమిక ఘటనల యొక్క సంభావ్యతల మొత్తము 1 అవుతుంది.
3. పాచికను దొర్లించుటలో 3 కన్నా తక్కువ పడు ఘటనలు కానీ, 3లేక అంతకన్నా ఎక్కువ పడు ఘటనలు కానీ ప్రాథమిక ఘటనలు కావు. కానీ రెండు నాణెములను ఎగురవేసినప్పుడు {HH}, {HT}, {TH}, {TT} లు ప్రాథమిక ఘటనలు.

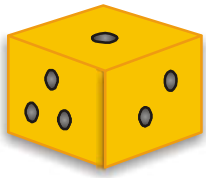
ఉదాహరణ-3. ఒక పాచికను ఒకసారి దొర్లించినపుడు (i) 4 కన్నా ఎక్కువ పడు ఘటన సంభావ్యత (ii) 4 లేక అంతకన్నా తక్కువ పడు ఘటన సంభావ్యతను కనుగొనండి.

సాధన : (i) ఒక పాచికను దొర్లించినపుడు

ప్రతిరూప ఆవరణము $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

మొత్తం పర్యవసానములు $n(S) = 6$

'4 కన్నా ఎక్కువ' అను ఘటనకు అనుకూల పర్యవసానాలు $E = \{5, 6\}$



E కు అనుకూల పర్యవసానాల సంఖ్య $n(E) = 2$

∴ ఘటన E సంభావ్యత $P(E) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

(ii) F అనే ఘటన 4 లేక అంతకన్నా తక్కువ పడుట అయిన

ప్రతిరూప ఆవరణము $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

మొత్తం పర్యవసానాలు $n(S) = 6$

Fకు అనుకూల పర్యవసానాలు $F = \{1, 2, 3, 4\}$

అనుకూల పర్యవసానాల సంఖ్య $n(F) = 4$

ఘటన F యొక్క సంభావ్యత $P(F) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

SCERT, TELANGANA

గమనిక : పై ఉదాహరణలోని ఘటనలు E మరియు F లు ప్రాథమిక ఘటనలా ?

కావు ఘటన Eకు పర్యవసానాలు 2, ఘటన F కు పర్యవసానాలు 4 కావున EF లు ప్రాథమిక ఘటనలు కావు.

13.4.2 పూరక ఘటనలు – సంభావ్యత (complementary events – probability)

ముందు విభాగములో ప్రాథమిక ఘటనల గురించి తెలుసుకొన్నాము. కానీ ఉదాహరణ 3 లోని ఘటనల ప్రాథమిక ఘటనలు కానప్పటికి, వాటి సంభావ్యతలను పరిశీలిస్తే

$$P(E) + P(F) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$$

ఈ ఉదాహరణలో ప్రయోగంలో E, F లు మాత్రమే ఘటనలు 'F' మరియు 'E కానిది' సమానములు. 'E కానిది' అను ఘటనను $\overline{E}$ అని చూపుతాము. దీనిని ఘటన E యొక్క **'పూరక ఘటన'** అంటారు.

$\therefore$ P(E) + P(E కానిది) = 1

లేక $P(E) + P(\overline{E}) = 1$, దీని నుండి $P(\overline{E}) = 1 - P(E)$.

సాధారణంగా E ఏదైనా ఒక ఘటన అయిన $P(\overline{E}) = 1 - P(E)$

ఇవి చేయండి

(i) బొమ్మ పడుట అనేది బొరుసు పడుటకు పూరక ఘటనా? కారణాలు తెలపండి.

(ii) పాచికతో 1 పడుట అనేది 2, 3, 4, 5, 6 పడుట అనే ఘటనలకు పూరక ఘటనయేనా ?

(iii) పరస్పరం పూరక ఘటనలయ్యే జతలకు 5 ఉదాహరణలు ఇవ్వండి.

13.4.3 అసంభవ ఘటన ఇచ్ఛిత లేక ధృడ ఘటనలు(Impossible and Certain Events)

1, 2, 3, 4, 5, 6 అని గుర్తించి పాచికను దొర్లించామనుకొనండి.

(i) పాచికను ఒక్కసారి దొర్లించినపుడు 7 పడే సంభావ్యత ఎంత?

ఒక పాచికను దొర్లించినప్పుడు 1, 2, 3, 4, 5,6 అను 6 పర్యవసానాలు మాత్రమే సంభవాలు కానీ 7 గుర్తించబడి ఉండదు కాబట్టి 7 యొక్క అనుకూల పర్యవసానములు శూన్యము.

$\therefore$ P(7 పడే ఘటన) $= \frac{0}{6} = 0$

అనగా 7 పడుట అసంభవము. ఇటువంటి ఘటననే **'అసంభవ ఘటన'** అంటారు.

(ii) పాచికను ఒక్కసారి దొర్లించినపుడు 6 లేక 6 కన్నా తక్కువపడే సంభావ్యత ఎంత?

SCERT TELANGANA

పాచికను ఒకవైపు 6 మరియు మిగిలిన వైపులు 6 కన్నా తక్కువ 1, 2, 3, 4, 5 లు గుర్తింపబడి ఉంటాయి. కనుక పాచికను దొర్లించినపుడు 6 కానీ, 6 కన్నా తక్కువ కానీ పడుతుంది. అనగా అనుకూల పర్యవసానాల సంఖ్య, మొత్తం పర్యవసానాల సంఖ్యలు సమానం.

$\therefore$ P(E) = P(6 లేక 6 కన్నా తక్కువ పడే ఘటన) $= \frac{6}{6} = 1$

ఘటన సంభవము ఖచ్చితము మరియు సంభావ్యత 1. ఇటువంటి ఘటనలనే ఖచ్చిత లేక దృఢఘటనలు అంటారు.

గమనిక: పై ఉదాహరణలన్నింటి నుండి సంభావ్యత నిర్వచనం $P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$ లోని లవము ఎల్లప్పుడు హారము కన్నా తక్కువ లేక సమానము అని తెలియుచున్నది కావున $\mathbf{0 \le P(E) \le 1}$.

ప్రయత్నించండి

1. ఒక పాప వద్దగల పాచిక ముఖాలపై A, B, C, D, E, F అని ముద్రించబడి యున్నది. ఆ పాచికను దొర్లించినపుడు (i) A (ii) D పడే సంభావ్యతలను లెక్కించండి?
2. క్రింది వానిలో ఏవి ఒక ఘటన యొక్క సంభావ్యతను సూచించలేవు ?

   (a) 2.3 (b) –1.5 (c) 15% (D) 0.7

ఆలోచించి - చర్చించండి

1. ఏదైనా ఆటలో ఏ జట్టువారు మొదటి బంతిని తీసుకోవాలో నిర్ణయించడానికి నాణెమును వేయడమే నిష్పాక్షికం అంటారెందుకు ?
2. ఒక ఘటన యొక్క సంభావ్యత $\frac{7}{2}$ ఉంటుందా? వివరించండి.
3. క్రింది వాటిలో ఏయే వాదనలు సత్యములు ?

   i) రెండు నాణెములు ఎగురవేసినప్పుడు 3 పర్యవసానాలు ఉంటాయి. రెండు బొమ్మలు, రెండు బొరుసులు, ఒక్కటి బొమ్మ మరొకటి బొరుసు. కనుక ఒక్కొక్క పర్యవసానము యొక్క సంభావ్యత $\frac{1}{3}$.

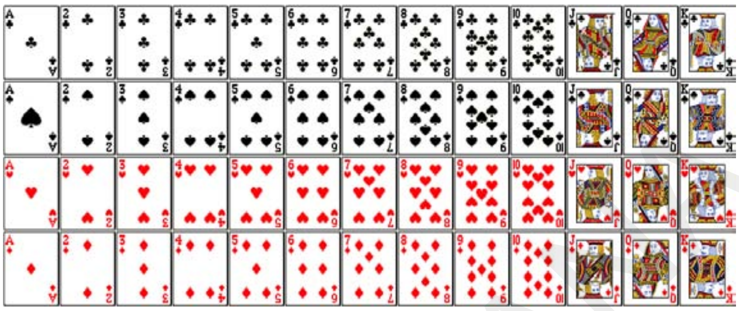
   ii) ఒక పాచికను దొర్లించినపుడు పడేది సరిసంఖ్య లేక బేసి సంఖ్య. కావున బేసి సంఖ్య పడే సంభావ్యత $\frac{1}{2}$.

13.5 పేక ముక్కలు - సంభావ్యత (Playing Cards - Probability)

మీరు ఎప్పుడైనా పేక ముక్కలను చూచారా? ఒక కట్టలో 52 కార్డులు ఉంటాయి. వాటిలో ఒక్కొక్కటి 13 కార్డులు గల 4 విభాగాలు ఉంటాయి. ఆ విభాగాల గుర్తులు నలుపు స్పేడ్‌లు (♠), ఎరుపు అఠీను గుర్తులు (♥), ఎరుపు డైమండులు (♦) మరియు నలుపు కళావరులు (♣).

SCERT, TELANGANA

మరలా ఒక్కొక్క విభాగంలో ఏస్ (A), రాజు (K), రాణి (Q), జాకీ(J) 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2 గుర్తించబడిన 13 కార్డులు ఉంటాయి.



రాజు, రాణి, జాక్ కార్డులను ముఖకార్డులంటారు. ఒక కట్టలోని అన్ని కార్డులు, కొన్ని కార్డులు లేక రెండు కట్టలను ఉపయోగించి రకరకాల ఆటలను ఆడుతారు. ఈ కార్డులను పంచుటలో, ఎదుటివారి వద్ద ఉన్న కార్డులను ఊహించుటలో, గెలుచుటకు ఎత్తులు వేయుటలో సంభావ్యత ఎంతగానో ఉపయోగపడుతుంది.

ఉదాహరణ-4. బాగుగా కలుపబడిన పేకాట కార్డుల కట్టలో 52 కార్డుల నుండి ఒక్క కార్డు తీయుటలో అది (i) ఏస్ అగుటకు (ii) ఏస్ కాక పోవుటకు సంభావ్యతలను లెక్కించండి.

సాధన : కార్డులు బాగుగా కలుపబడ్డాయి. కావున పర్యవసానాలన్నీ సమసంభవములుగా పరిగణించాలి.

(i) ఒక కట్టలో 4 ఏస్‌లు ఉంటాయి.

తీసుకొన్న కార్డు ఏస్ అవడం అనే ఘటన E అయితే

E కు అనుకూల పర్యవసానాల సంఖ్య = 4

మొత్తం పర్యవసానాల సంఖ్య = 52 (ఎట్లో ఊహించగలరా ?)

$\therefore$ కార్డు ఏస్ అగుటకు సంభావ్యత, $P(E) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

(ii) తీసుకున్న కార్డు ఏస్ కాదు అనే ఘటన F అయితే

F కు అనుకూల పర్యవసానాల సంఖ్య = 52 – 4 = 48 (ఎందుకు?)

మొత్తం పర్యవసానాల సంఖ్య = 52

$\therefore$ కార్డు ఏస్ కాకపోవుటకు సంభావ్యత $P(F) = \frac{48}{52} = \frac{12}{13}$

ప్రత్యామ్నాయ పద్ధతి : ఘటన F అనగా E కానిది ($\overline{E}$) కావున పూరక ఘటనలను ఉపయోగించి F యొక్క సంభావ్యత కనుగొనవచ్చు.

$$P(F) = P(\overline{E}) = 1 - P(E) = 1 - \frac{1}{13} = \frac{12}{13}$$

ప్రయత్నించండి

మీ దగ్గర ఒక కట్ట పేకాట కార్డులు బాగుగా కలుపబడి ఉన్నాయి అనుకొనండి. వాటి నుండి యాదృచ్ఛికముగా తీసిన కార్డు

1. రాణి అగుటకు సంభావ్యత ఎంత?

SCERT, TELANGANA

2. ముఖ కార్డు అగుటకు సంభావ్యత ఎంత ?
3. స్పేడ్ అగుటకు సంభావ్యత ఎంత ?
4. స్పేడ్, ముఖ కార్డు అగుటకు సంభావ్యత ఎంత?
5. ముఖకార్డు కాకపోవుటకు సంభావ్యత ఎంత?

13.6 సంభావ్యత యొక్క ఉపయోగాలు

సంభావ్యత ఉపయోగపడే మరికొన్ని సందర్భాలను పరిశీలిద్దాం. ఆటల పోటీలలో కొన్ని దేశాలు చాలా బలమైనవి, కొన్ని అంత బలమైనవి కాదు కదా? ఒక ఆటలోని ఇద్దరు ఆటగాళ్ళు సమానంగా ఆడగలరని చెప్పలేము. ఒక ఆటగాడు లేక జట్టు గెలిచే సంభావ్యత ఖచ్చితంగా రెండవ ఆటగాడు లేక జట్టు యొక్క సంభావ్యత కన్నా ఎక్కువ. మన బంధువులు, స్నేహితుల పుట్టిన రోజులు ఒకే రోజు వస్తాయి. ఇలా రావడం సాధారణమా, యాదృచ్ఛికమా? అవకాశాలెంత ఉంటాయి? మొదలగు ప్రశ్నలకు జవాబులకు, ప్రమాణీకరణ చేయడానికి సాంప్రదాయక సంభావ్యత ఎంతగానో ఉపయోగపడుతుంది.

ఉదాహరణ-5. సంగీత, రేష్మాలు టెన్నీస్ ఆటను ఆడుతున్నారు. సంగీత గెలిచే సంభావ్యత 0.62 అయినప్పుడు రేష్మ గెలిచే సంభావ్యత కనుగొనండి.

సాధన : సంగీత, రేష్మాలు ఆటను గెలిచే ఘటనలను S, R లు సూచిస్తున్నాయి అనుకొనుము.

సంగీత గెలిచే సంభావ్యత $P(S) = 0.62$ (దత్తాంశం)

పూరక సంభావ్యతలను అనుసరించి
రేష్మ గెలిచే సంభావ్యత $P(R) = 1 - P(S)$

$= 1 - 0.62 = 0.38$

ఉదాహరణ-6. శారద, హమీద మంచి స్నేహితులు. వారిద్దరి పుట్టిన రోజు పండుగలు సంవత్సరంలో (లీపు సంవత్సరం కాదు) (i) వేరువేరు రోజు రావడానికి ? (ii) ఒకే రోజు రావడానికి సంభావ్యతలు లెక్కించండి.

సాధన : సంవత్సరంలో 365 రోజులలో ఇద్దరిలో ఎవరి పుట్టినరోజు అయినా ఏరోజు అయినా రావచ్చును. కావున మొత్తం 365 పర్యవసానాలు సమసంభవములని పరిగణించాలి.

(i) శారదా, రేష్మల పుట్టిన రోజులు వేరువేరు రోజులు అవడానికి అనుకూల పర్యవసానాలు = 365 - 1 = 364

$\therefore$ P (వేరు వేరు పుట్టిన రోజులు వచ్చే ఘటన) $= \frac{364}{365}$

(ii) P(ఒకే రోజు పుట్టిన రోజు వచ్చే ఘటన) = 1 – P (వేరు వేరు పుట్టిన రోజులు వచ్చే ఘటన)

$$= 1 - \frac{364}{365} = \frac{1}{365} \quad [\because P(\overline{E}) = 1 - P(E)]$$

ఉదాహరణ-7. 40 మంది విద్యార్థులు కల తరగతిలో 25 మంది బాలికలు, 15 మంది బాలురు ఉన్నారు. తరగతి ప్రతినిధిని నియమించడానికై, వారి ఉపాధ్యాయురాలు అందరి పేర్లను విడివిడి కార్డులపై వ్రాసి, ఒక పెట్టెలో వేసి, బాగా కలిపి, ఒక కార్డును తీశారు. ఆ కార్డుపై పేరు (i) అమ్మాయి లేక (ii) అబ్బాయిది కావడానికి సంభావ్యతలు లెక్కించండి.

సాధన : కార్డులన్నీ సమానం అయితే 40 మందిలో ఎవరి పేరు కార్డు అయినా రావచ్చును.

మొత్తం పర్యవసానాల సంఖ్య 40

(i) తీసిన కార్డుపై అమ్మాయి పేరు ఉండడానికి అనుకూల పర్యవసానాల సంఖ్య = 25

$\therefore$ P (అమ్మాయి పేరుగల కార్డు) = P(అమ్మాయి) $= \frac{25}{40} = \frac{5}{8}$

(ii) తీసిన కార్డుపై అబ్బాయి పేరు ఉండడానికి అనుకూల పర్యవసానాలు = 15

$\therefore$ P(అబ్బాయి పేరు గల కార్డు) = P(అబ్బాయి) $= \frac{15}{40} = \frac{3}{8}$

లేదా P(అబ్బాయి) = 1 – P(అబ్బాయికానిది)

= 1 – P(అమ్మాయి) $= 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$

అభ్యాసము - 13.1

1. క్రింది ప్రవచనాలను పూరించండి.

(i) ఘటన E యొక్క సంభావ్యత + ఘటన 'Eకాదు' సంభావ్యత = ______________

(ii) ఎల్లప్పుడు సాధ్యపడని ఘటన యొక్క సంభావ్యత __________ .
దానిని __________ ఘటన అంటారు.

(iii) ఖచ్చితంగా సంభవించే ఘటన యొక్క సంభావ్యత __________.
దానిని ______ ఘటన అంటారు.

(iv) ఒక ప్రయోగంలోని అన్ని ప్రాథమిక ఘటనల యొక్క సంభావ్యతల మొత్తము __________

(v) ఒక ఘటన యొక్క సంభావ్యత ఎల్లప్పుడు __________ కన్నా ఎక్కువ లేక సమానము మరియు ________ కన్నా తక్కువ లేక సమానము గా ఉంటుంది.

2. క్రింది ప్రయోగాలలో దేని పర్యవసానములు సమసంభవములు ? వివరించండి.

(i) స్టార్టు చేయబోయిన కారు స్టార్టు అవుతుంది లేక కాదు.

(ii) ఒక ఆటగాడు బాస్కెట్ బాల్‌ను కొట్టబోతే, అది తగులుతుంది, లేక తగలదు

(iii) తప్పు-ఒప్పు ప్రశ్నకు సమాధానము వ్రాసినప్పుడు అది సరికావచ్చు, కాకపోవచ్చు.

(iv) పుట్టిన పసిపాప అబ్బాయి లేక అమ్మాయి కావచ్చు.

SCERT TELANGANA

3. P(E) = 0.05 అయిన 'E కాదు' అనే ఘటన సంభావ్యత ఎంత?
4. ఒక సంచిలో నిమ్మవాసన గల చాకొలేట్‌లు ఉన్నాయి. మాలిని చూడకుండా సంచినుండి ఒక చాకొలేట్ తీస్తే అది (i) నారింజవాసన గలది అవడానికి (ii) నిమ్మ వాసనగలది అవడానికి సంభావ్యతలు లెక్కించండి.
5. రహీమ్ ఒక పేక ముక్కల కట్టలోని అన్ని అఠీను గుర్తు గల కార్డులను తొలగించాడు. ఇప్పుడు
   i. ఒక కార్డును ఎన్నుకొంటే అది ఏస్ అయ్యే సంభావ్యత ఎంత?
   ii. డైమండును ఎన్నుకొనే సంభావ్యత ఎంత?
   iii. అఠీను గుర్తు లేని కార్డు ఎన్నుకొనే సంభావ్యత ఎంత ?
   iv. అఠీను గుర్తు గల ఏస్‌ను ఎన్నుకొనే సంభావ్యత ఎంత?
6. ముగ్గురు విద్యార్థులలో ఇద్దరి పుట్టిన రోజులు సంవత్సరములో ఒకేరోజు రాని సంభావ్యత 0.992 అయిన ఒకేరోజు వచ్చే సంభావ్యత ఎంత?
7. ఒక పాచికను ఒక్కసారి దొర్లించినప్పుడు ఏర్పడు పర్యవసానములతో క్రింది ఘటనల సంభావ్యతలను కనుగొనండి.

   (i) ప్రధానసంఖ్య; (ii) 2, 6ల మధ్య సంఖ్య; (iii) బేసి సంఖ్య
8. ఒక పేకముక్కల కట్ట నుండి ఎరుపు రంగు రాజును తీయు సంభావ్యత ఎంత?
9. పాచికలను, కార్డులను, పుట్టినరోజు సందర్భాలను ఉపయోగించు కొని ఐదు సమస్యలను తయారుచేసి వాటి సాధనలను గురించి మిత్రులతో ఉపాధ్యాయునితో చర్చించండి.

13.7 సంభావ్యత యొక్క మరికొన్ని అనువర్తనాలు

ఇప్పటివరకు సంభావ్యత కొరకు కొన్ని సందర్భాలను చర్చించాము. ఆ సందర్భములలోని విషయమును, సంభావ్యతను గణించుటలో పాటించిన వివిధ పద్ధతులను గమనించండి. పూరక ఘటనల యొక్క సంభావ్యతల మొత్తం 1 అవుతున్నది. ప్రాథమిక ఘటనల సంభావ్యతల మొత్తం 1 అవుతుంది. ఇప్పటి వరకు చర్చించిన ఉదాహరణలతో, అభ్యాసము సమస్యలలో ఈ విషయాలను గమనించారా ? మీ మిత్రులతో, ఉపాధ్యాయులతో చర్చించండి. మరికొన్ని ప్రత్యేక ఉదాహరణలను పరిశీలిద్దాము.

ఉదాహరణ-8. ఒక పెట్టెలో 3నీలం, 2 తెలుపు, 4 ఎరుపు గోళీలు కలవు. యాదృచ్ఛికంగా పెట్టె నుండి ఒక గోళీను తీసుకొంటే అది (i) తెలుపు (ii) నీలం (iii) ఎరుపు రంగు గోళీ అగుటకు సంభావ్యతలు గమనించండి.

సాధన : యాదృచ్ఛికంగా గోళీను తీసుకొనుట అనగా అన్ని పర్యవసనాలు సమ సంభవాలు.

∴ ప్రతి రూప ఆవరణలోని పర్యవసనాల సంఖ్య $= 3 + 2 + 4 = 9$

తెల్లని గోళీ తీయు ఘటనను W చే, నీలం గోళీ తీయు ఘటనను Bచే, ఎరుపు గోళీతీయు ఘటనను R చే గుర్తిస్తే

(i) W కు అనుకూల పర్యవసానాల సంఖ్య = 2

$\therefore\ P(W) = \frac{2}{9}$

ఇదేవిధంగా, (ii) $P(B) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$, (iii) $P(R) = \frac{4}{9}$

గమనిక $P(W) + P(B) + P(R) = 1$.

ఉదాహరణ-9. హర్ప్రీత్ రెండు నాణెములను (₹1 మరియు ₹2) ఒకేసారి ఎగురవేసినాడు. కనీసం ఒక బొమ్మ పడుటకు సంభావ్యత కనుగొనండి.

సాధన : బొమ్మను Hతో బొరుసును T తో సూచిస్తే, రెండు నాణెములు ఎగురవేసినప్పుడు ఏర్పడు అన్ని పర్యవసానములు (H, H), (H, T), (T, H), (T, T) ఇవి అన్నీ సమసంభవాలే. ఇందు (H, H) అనగా మొదటి నాణెం (₹1) బొమ్మ, రెండవ నాణెం (₹2) బొమ్మ అని అర్థం. అట్లే (H, T) అనగా మొదటి నాణెం బొమ్మ రెండవ నాణెం బొరుసు అని అర్థం. అట్లే మిగిలిన పర్యవసానాలు.

కనీసం ఒక బొమ్మకు అనుకూల పర్యవసానాలు $E = \{(H, H), (H, T), (T, H)\}$

E కు అనుకూల పర్యవసానాల సంఖ్య $n(E) = 3$.

$P(E) = \frac{3}{4}$ [$\because$ ప్రతిరూప ఆవరణలో పర్యవసానాలు 4]

అనగా హర్ప్రీత్ కనీసం ఒక బొమ్మ పొందే సంభావ్యత $= \frac{3}{4}$

సరిచూడండి.

ఇప్పటి వరకు చర్చించిన అన్ని సందర్భములలో ప్రతిరూప ఆవరణములోని పర్యవసానముల సంఖ్య పరిమితము.

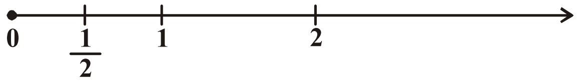
కొన్ని ప్రయోగములలో పర్యవసానములు రెండు సంఖ్యల మధ్య అన్ని సంఖ్యలు, ఒక వృత్తం లేక దీర్ఘచతురస్రం లోని అన్ని బిందువులు అయ్యే అవకాశం ఉంది. ఇటువంటి సందర్భాలలో పర్యవసానముల సంఖ్యను లెక్కించలేము. అవి అపరిమితములు (రెండు సంఖ్యల మధ్య అపరిమిత వాస్తవ సంఖ్యలు ఉంటాయి, వృత్తం లేక దీర్ఘ చతురస్రం లోని బిందువులు అపరిమితం) సంభావ్యత యొక్క సైద్ధాంతిక నిర్వచనం, సూత్ర రూపములు ఈ సందర్భములో ఉపయోగపడవు.

అటువంటి సమస్యలను ఎట్లు గణించవచ్చునో క్రింది ఉదాహరణ ద్వారా చర్చిద్దాం.

ఉదాహరణ-10. (వార్షిక పరీక్షలకు కాదు) మ్యూజికల్ చైర్స్ ఆటలో, ఆట మొదలైన 2 నిమిషాల లోపు ఏదో ఒక సమయంలో పాట ఆగుతుంది, ఆటగాళ్ళు ఆగాలి. అయితే ఆట మొదలైన $\frac{1}{2}$ నిమిషంలోపు పాట ఆపు ఘటనకు సంభావ్యతను లెక్కించండి.

SCERT, TELANGANA

సాధన : పాట ఆపు సమయం యొక్క పర్యవసనాలు 0 మరియు 2 ల మధ్య గల అన్ని వాస్తవ సంఖ్యలు. దీనిని సంఖ్యారేఖపై సూచిస్తే



$\frac{1}{2}$ నిమిషంలోపు పాట ఆగును అనుఘటనను E ని సూచిస్తే

E కు అనుకూల పర్యవసానములు అనగా సంఖ్యారేఖపై $0, \frac{1}{2}$ ల మధ్య గల అన్ని బిందువులు

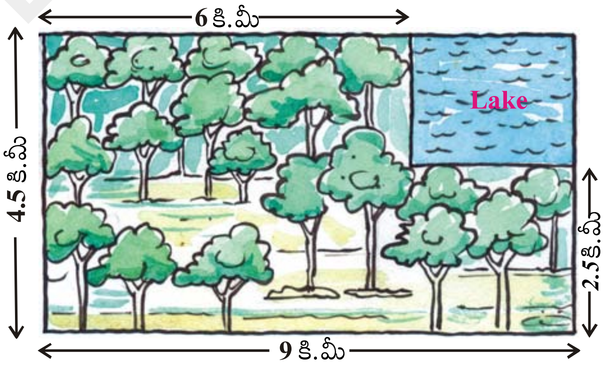
0కు, 2కు మధ్యగల దూరం 2 అయిన $0, \frac{1}{2}$ ల మధ్యదూరం $\frac{1}{2}$ అవుతుంది.

ప్రయోగంలోని అన్ని పర్యవసానములన్నీ సమసంభవములు కావున మొత్తం దూరం (కాలం) 2 అని, E కు అనుకూల దూరం (కాలం) $\frac{1}{2}$ అని పరిగణించవచ్చును.

$$\therefore \ P(E) = \frac{\text{E కు అనుకూల దూరము}}{\text{మొత్తం దూరము}} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$$

ఇదే విధమైన మార్పును వైశాల్యము లకు కూడా విస్తరించి ఎట్లు ఉపయోగించవచ్చునో క్రింది ఉదాహరణ ద్వారా పరిశీలిద్దాం.

ఉదాహరణ-11. ప్రక్క పటంలో చూపబడిన దీర్ఘచతురస్రాకార ప్రాంతంలో ఒక హెలికాప్టరు కూలిపోయిందని సమాచారం వచ్చింది. అది కొలను (lake)లో కూలి పోయి ఉండుటకు సంభావ్యత ఎంత?



సాధన : మొత్తం దీర్ఘచతురస్రాకార స్థలములో హెలికాప్టర్ ఏ బిందువు వద్ద అయినా కూలి ఉండవచ్చును.

$\therefore$ ఘటన జరుగుటకు పూర్తి స్థల వైశాల్యము $n(S) = (4.5 \times 9)$ కి.మీ$^2 = 40.5$ కి.మీ^{2}

ఘటన E జరుగుటకు అనుకూల ప్రాంతము $n(E) = (2 \times 3)$ కి.మీ$^2 = 6$ కి.మీ^{2}

$\therefore$ P (హెలికాప్టరు సరస్సులో కూలుట) $= \frac{6}{40.5} = \frac{4}{27}$

ఉదాహరణ-12. ఒక పెట్టెలోని 100చొక్కాలలో 88సరిగ్గా ఉన్నవి. 8 చొక్కాలు కొద్ది లోపాలను, 4 చొక్కాలు ఎక్కువ లోపాలను కలిగి ఉన్నాయి. జానీ అనే వ్యాపారి మంచి చొక్కాలను మాత్రమే కొంటాడు. సుజాత అను మరొక వ్యాపారి ఎక్కువ లోపాలున్న చొక్కాలను మాత్రమే నిరాకరిస్తుంది (కొనదు) పెట్టెలో నుండి యాదృచ్ఛికంగా ఒక చొక్కాను తీస్తే ఎవరు కొనే సంభావ్యత ఎంత? (i) జానీ (ii) సుజాత

SCERT TELANGANA

సాధన : పెట్టెలోని 100 చొక్కాలలో నుండి 1 చొక్కా యాదృచ్ఛికంగా తీయబడినది అనగా పర్యవసానములన్నీ సమసంభవాలు.

(i) జానీ కొనుటకు అనుకూల పర్యవసనాలు = 88

$$P\,(\text{జానీ చొక్కాను కొనుట}) = \frac{88}{100} = 0.88$$

(ii) సుజాత చొక్కా కొనుటకు అనుకూల పర్యవసానాలు = 88 + 8 = 96

$$\therefore\ P\,(\text{సుజాత చొక్కాను కొనుట}) = \frac{96}{100} = 0.96$$

ఉదాహరణ-13. రెండు పాచికలు, ఒకటి ఎర్రనిది, ఒకటి తెల్లనిది, ఒకేసారి దొర్లించడం జరిగింది. ఈ ఘటనకు సాధ్యపడు అన్ని పర్యవసానములను పేర్కొనండి మరియు రెండు పాచికలపై కనిపించే చుక్కల మొత్తం (i) 8 (ii) 13 మరియు (iii) 12 లేక 12 అంతకన్నా తక్కువ అవడానికి సంభావ్యతలు ఎంతెంత?

సాధన : ఎరుపు పాచికపై 1 ఉన్నప్పుడు తెలుపు పాచికపై 1, 2, 3, 4, 5 లేక 6 ఏదయినా ఉండవచ్చును అట్లే ఎరుపు పాచికపై '2', '3', '4', '5' లేక '6' లు ఉన్నప్పుడు కూడా వివిధ పర్యవసానములు ఉంటాయి. ప్రయోగంలో సాధ్యపడు అన్ని పర్యవసానములు పట్టికలో క్రమ యుగ్మాలుగా చూపబడ్డాయి. ప్రతి క్రమయుగ్మంతో మొదటిది ఎరుపు పాచికపై సంఖ్య, రెండవది తెలుపు పాచికపై సంఖ్య

	1	2	3	4	5	6
1	1, 1	1, 2	1, 3	1, 4	1, 5	1, 6
2	2, 1	2, 2	2, 3	2, 4	2, 5	2, 6
3	3, 1	3, 2	3, 3	3, 4	3, 5	3, 6
4	4, 1	4, 2	4, 3	4, 4	4, 5	4, 6
5	5, 1	5, 2	5, 3	5, 4	5, 5	5, 6
6	6, 1	6, 2	6, 3	6, 4	6, 5	6, 6

కావున ఉదాహరణకు (1, 4) , (4, 1) క్రమయుగ్మాలు సమానం కావు.

$\therefore$ మొత్తం సాధ్యపడు పర్యవసానాల సంఖ్య $n(S) = 6 \times 6 = 36$.

(i) ఘటన E (రెండు సంఖ్యల మొత్తం 8) యొక్క అనుకూల పర్యవసానాలు = {(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)}

E కు అనుకూల పర్యవసానాల సంఖ్య $n(E) = 5$

$$\therefore\ P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{5}{36}$$

(ii) ఘటన F (రెండు సంఖ్యల మొత్తం 13) కు అనుకూల పర్యవసానాలు శూన్యము.

$$\therefore\ P(F) = \frac{0}{36} = 0$$

(iii) ఘటన G (12 లేక అంతకన్నా తక్కువ)కు అన్ని పర్యవసానాలు అనుకూలములే

$$\therefore\ P(G) = \frac{36}{36} = 1$$

SCERT, TELANGANA

అభ్యాసము - 13.2

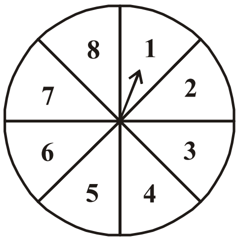
1. ఒక సంచిలో 3 ఎరుపు, 5 నలుపు బంతులు కలవు. సంచి నుంచి యాదృచ్ఛికంగా ఒక బంతిని తీస్తే అది (i) ఎరుపుదై ఉండుటకు (ii) ఎరుపుది కాకపోవుటకు సంభావ్యతలు ఎంతెంత?

2. ఒక పెట్టెలో 5 ఎరుపు, 8 తెలుపు, 4 ఆకుపచ్చ గోళీలు కలవు. పెట్టె నుండి యాదృచ్ఛికంగా ఒక గోళీను తీస్తే అది (i) ఎరుపు (ii) తెలుపు (iii) ఆకుపచ్చకానిది అగుటకు సంభావ్యతలు కనుగొనండి.

3. ఒక కిడ్డి బ్యాంకు డబ్బాలో వంద 50పై నాణెములు, యాభై ₹1 నాణెములు, ఇరవై ₹2 నాణెములు, పది ₹5 నాణెములు ఉన్నాయి. డబ్బాను తలక్రిందులు చేసి నప్పుడల్లా యాదృచ్ఛికంగా ఒక్క నాణెం పడుతుంటే అది (i) 50 పై నాణెం అగుటకు, (ii) ₹5 నాణెం కాకపోవుటకు సంభావ్యతలు ఎంతెంత?

4. గోపి అక్వేరియం దుకాణం నుండి ఒక చేపను కొన్నాడు. అక్వేరియంలో 5 మగ చేపలు, 8 ఆడచేపలు ఉండినప్పుడు, వ్యాపారి యాదృచ్ఛికముగా ఒక చేపను తీసి ఇచ్చి ఉంటే, ఆ చేప మగ చేప అవడానికి సంభావ్యత ఎంత?

5. ఒక ఆట నందు వేగంగా త్రిప్పబడిన బాణపు గుర్తు పటములో చూపబడినట్లు, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 లేక 8 ని సూచిస్తూ ఆగుతుంది. అన్ని పర్యవసానములు సమసంభవములైతే క్రింది ఘటనల సంభావ్యతలు లెక్కించండి. బాణపు గుర్తు సూచించేది



(i) 8 (ii) ఒక బేసిసంఖ్య
(iii) 2 కన్నా పెద్ద సంఖ్య (iv) 9 కన్నా చిన్న సంఖ్య

6. బాగుగా కలుపబడిన పేక ముక్కల (52) కట్టనుండి యాదృచ్ఛికంగా ఒక కార్డును తీస్తే అది క్రింది కార్డు అగుటకు సంభావ్యతలు లెక్కించండి.
(i) ఎరుపు రాజు (ii) ముఖ కార్డు (iii) ఎరుపు, ముఖ కార్డు
(iv) అఠీను జాకీ (v) స్పేడ్ (vi) డైమండు రాణి

7. పేక ముక్కలలోని డైమండువి ఐదు కార్డులు; 10, రాజు, రాణి, జాకీ మరియు ఏస్‌లను మాత్రం తీసుకొని, బాగా కలిపి, యాదృచ్ఛింగా ఒక కార్డును ఎన్నుకొంటే
(i) ఆ కార్డు రాణి అయ్యే సంభావ్యత ఎంత?
(ii) రాణి కార్డును తొలగించి రెండవ కార్డును ఎన్నుకొంటే అది (ఎ) ఏస్ అగుటకు (బి) రాణి అగుటకు సంభావ్యతలు ఎంతెంత?

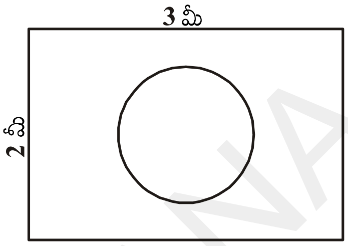
8. సూక్ష్మలోపం గల 12 పెన్నులు పొరపాటుగా 132 మంచి పెన్నులలో కలిసిపోయాయి. చూడగానే పెన్నులోని లోపాన్ని గుర్తించలేము. అయితే యాదృచ్ఛికంగా ఒక పెన్నును ఎన్నుకొంటే అది మంచి పెన్ను అవడానికి సంభావ్యత ఎంత?

9. 20 విద్యుత్ బల్బులు కల పెట్టెలో 4బల్బులు లోపాలు కలిగి ఉన్నవి. పెట్టె నుండి యాదృచ్ఛికంగా తీసిన బల్బు లోపాలు కలిగి ఉండుటకు సంభావ్యత ఎంత? ఒకవేళ అది మంచి బల్బు అయిఉండి, దానిని పెట్టెలో పెట్టకుండా రెండవ బల్బును తీసుకొంటే అది కూడా మంచిదై ఉండుటకు సంభ్యావత ఎంత?

SCERT, TELANGANA

10. ఒక పెట్టెనందు 1 నుండి 90 వరకు వ్రాయబడి ఉన్న 90 ఫలకాలు ఉన్నాయి. వాటి నుండి యాదృచ్ఛికంగా ఒక ఫలకాన్ని ఎన్నుకొంటే దానిపై క్రింది సంఖ్యలు ఉండుటకు సంభావ్యత ఎంతెంత? (i) రెండంకెల సంఖ్య (ii) ఖచ్చిత వర్గ సంఖ్య (iii) 5 చే భాగింపబడు సంఖ్య.

11. పటంలో చూపినట్లు దీర్ఘచతురస్రాకార పలకపై 1మీ వ్యాసం గల వృత్తం గీయబడి ఉన్నది. ఒక పాచికను ఈ పలకపై జారవిడిస్తే అది వృత్తంలో పడుటకు సంభావ్యత ఎంత?



12. ఒక వ్యాపారి వద్ద 144 పెన్నులు ఉన్నాయి. వాటిలో 20 సూక్ష్మ లోపం కలిగి ఉన్నాయి. సుధ పెన్ను కొనడానికి వస్తే వ్యాపారి యాదృచ్ఛికంగా ఒక పెన్ను ఇస్తే దానిని (i) సుధ కొనుటకు (ii) కొనలేకపోవుటకు సంభావ్యతలు ఎంతెంత?

13. ఒకేసారి రెండు పాచికలను దొర్లించి వాటిపై సంఖ్యలను కూడినచో వచ్చు (i) మొత్తాల సంభావ్యతను తెలుపు పట్టికను పూరించండి.

రెండు పాచికలపై మొత్తం (ఘటన)	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
సంభావ్యత	$\frac{1}{36}$						$\frac{5}{36}$				$\frac{1}{36}$

(ii) ఒక విద్యార్థి ఈ ప్రయోగంలో 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 అనే 11 పర్యవసానములు ఉన్నవి కావున ఒక్కొక్క పర్యవసానము యొక్క సంభావ్యత $\frac{1}{11}$ అన్నాడు. ఈ సమాధానంతో నీవు ఏకీభవిస్తావా? వివరించు.

14. దీక్షిత ఒక రూపాయి నాణెమును 3 సార్లు ఎగురవేసి బొమ్మ, బొరుసులు ఎన్నిసార్లు పడతాయో పరిశీలించాలనుకొంది. ఒకవేళ మూడు బొమ్మలు లేక మూడు బొరుసులు పడితే దీక్షిత గెలుస్తుంది. అయితే ఆమె ఓడిపోవడానికి సంభావ్యత కనుగొనండి.

15. ఒక పాచికను రెండు సార్లు దొర్లించారు. రెండు సార్లు వరుసగా (i) 5 పాచికపై కనిపించకపోవడానికి (ii) 5 పాచికపై కనిపించడానికి సంభావ్యతలు ఎంతెంత?

ఐచ్ఛిక అభ్యాసము

[విస్తృత అధ్యయన కోసం]

1. ఇద్దరు వినియోగదారులు శ్యామ్, ఏక్తాలు ఒక అంగడిలో ఒకే వారము (మంగళవారం నుండి శనివారం వరకు) దర్శించారు. వారిద్దరు విడివిడిగా ఏరోజు అయినా దర్శించి ఉండవచ్చును. అయిన ఆ ఇద్దరు (i) ఒకే రోజు (ii) ప్రక్క ప్రక్క రోజులు (iii) వేరువేరు రోజులు అంగడిని దర్శించి ఉండడానికి సంభావ్యతలు ఎంతెంత?

2. ఒక సంచిలో 5 ఎరుపు బంతులు, కొన్ని నీలం బంతులు కలవు. యాదృచ్ఛికంగా నీలం బంతి తీయు సంభావ్యత, ఎరుపు బంతి తీయు సంభావ్యతకు రెట్టింపు అయిన ఎన్ని నీలం బంతులు కలవు ?

3. ఒక పెట్టెలో 12 బంతులు కలవు. అందు x బంతులు నల్లనివి. పెట్టె నుండి యాదృచ్ఛికంగా తీసిన బంతి నలుపుది అవడానికి సంభావ్యత ఎంత? ఇంకా 6 నలుపు బంతులు కలిపితే అప్పుడు మొత్తం నుండి నలుపు బంతి తీయు సంభావ్యత రెట్టింపు (ప్రస్తుతం కన్నా) అవుతుంది. అయిన x ఎంత?.

SCERT TELANGANA

4. ఒక పాత్రలో 24 గోళీలు ఉన్నాయి. అందులో కొన్ని ఆకుపచ్చనివి, కొన్ని నీలం రంగువి పాత్ర నుండి యాదృచ్ఛికంగా ఆకుపచ్చరంగు గోళీ తీయు సంభావ్యత $\frac{2}{3}$ అయిన నీలం గోళీ తీయు సంభావ్యత ఎంత?

ప్రాజెక్టు పని

"సైద్ధాంతిక సంభావ్యతను - ప్రయోగాత్మక సంభావ్యత తో పోల్చుట"

ఈ క్రింది సందర్భాలను ప్రయోగాత్మకంగా పరిశీలించి ఫలితాలను నమోదు చేయించి-పిల్లలచే వ్యాఖ్యానింప చేయుట

- (i) ఒక పాచికను 100 సార్లు దొర్లించినపుడు (a) సరిసంఖ్యలు (b) బేసి సంఖ్యలు (c) ప్రధాన సంఖ్యలు మొదలగునవి (ii) నాణెమును 100 సార్లు / 200 సార్లు ఎగుర వేసినపుడు (a) బొమ్మ పడే సంభావ్యత (b) బొరుసు పడే సంభావ్యత (iii) రెండు పాచికలను ఒకేసారి ఎగురవేసినపుడు (iv) వివిధ రకాల రంగుల బంతులు రంగుల కార్డులు/ పేక ముక్కలు.

మనం ఏమి చర్చించాం

ఈ అధ్యాయంలోని చర్చల ద్వారా క్రింది విషయాలను అవగాహన చేసుకొన్నాము.

1. ప్రయోగిక సంభావ్యత, సైద్ధాంతిక సంభావ్యతల గురించి తెలుసుకొన్నాము.
2. ఘటన E యొక్క సైద్ధాంతిక సంభావ్యతను P(E) తో సూచిస్తాము. మరియు

   $P(E) = \dfrac{E \text{ కు అనుకూల పర్యవసానాల సంఖ్య}}{\text{మొత్తం పర్యవసానాల సంఖ్య}}$. ఇందు అన్ని పర్యవసానాలు సమసంభవాలని పరిగణిస్తాము.

Z4Y9H2

3. ఖచ్చిత లేక దృఢ ఘటన యొక్క సంభావ్యత 1.
4. అసంభవ ఘటన యొక్క సంభావ్యత 0.
5. ఘటన E యొక్క సంభావ్యత P(E) సంఖ్యాత్మకం మరియు $0 \le P(E) \le 1$
6. ఒకే ఒక అనుకూల పర్యవసానము గల ఘటనను ప్రాథమిక ఘటన అంటారు. ఒక ప్రయోగంలోని అన్ని ప్రాథమిక ఘటనల సంభావ్యతల మొత్తం 1 అవుతుంది.
7. E ఒక ఘటన అయిన 'E కాదు' అనుఘటనను $\overline{E}$ తో సూచిస్తారు. దీనిని పూరక ఘటన అంటారు.

   $P(E) + P(\overline{E}) = 1.$
8. ఈ అధ్యాయంలో క్రింది నిర్వచనాల గురించి చర్చించాము.

యాదృచ్ఛిక ప్రయోగం : ఒక ప్రయోగంలోని ఫలితాల జాబితా ముందుగా తెలిసి ఉంటుంది. కానీ నిర్దిష్ట ఫలితాన్ని మాత్రం ఊహించలేము. ఇలాంటి ప్రయోగాన్ని యాదృచ్ఛిక ప్రయోగం అంటాం.

సమసంభవ ఘటనలు : ఒక ప్రయోగంలోని రెండు లేక అంతకన్నా ఎక్కువ ఘటనలు సంభవించ దానికి సమాన అవకాశములు ఉంటే వాటిని సమ సంభవ ఘటనలు అంటారు.

పరస్పర వర్జిత ఘటనలు : ఒక ప్రయోగంలోని రెండు లేక అంత కన్నా ఎక్కువ ఘటనలలో ఒక ఘటన యొక్క సంభవము మిగిలిన అన్ని ఘటనల సంభవమును నిరోధిస్తే ఆ ఘటనలను పరస్పర వర్జిత ఘటనలంటారు.

పూరక ఘటనలు : ఒక ప్రయోగములో ఒక ఘటన యొక్క అనుకూల పర్యవసానములు కాని, ప్రతిరూప ఆవరణలోని మిగిలిన అన్ని పర్యవసానములు గల ఘటనను మొదటి దాని యొక్క పూరక ఘటన అంటారు.

పూర్ణ ఘటనలు : ఒక ప్రయోగములోని అన్ని ఘటనల సమ్మేళనము ప్రతిరూప ఆవరణము అయిన, వానిని పూర్ణఘటనలు అంటారు.

ఖచ్చిత ఘటన : ఒక ప్రయోగములో ఒక ఘటన యొక్క సంభవము ఖచ్చితము మరియు సంభావ్యత 1 అయిన దానిని ఖచ్చిత లేక దృఢ ఘటన అంటారు.

అసంభవ ఘటన : ఒక ప్రయోగంలో ఒక ఘటన ఎప్పుడూ సాధ్యపడక పోతే దానిని అసంభవ ఘటన అంటారు.

SCERT, TELANGANA