அத்தியாயம்

9 ஒட்டுறவு மற்றும் தொடர்புப் போக்கு பகுப்பாய்வு

கற்றல் நோக்கங்கள்

இந்த அத்தியாயத்தை படித்தபின்பு பின்வரும் பாடக் கருத்துகளை மாணவர்கள் புரிந்துக்கொள்ள இயலும்

- கார்ல் பியர்சன் ஒட்டுறவுக் கெழுவின் கருத்துரு மற்றும் அதனைக் கணக்கிடும் முறைகள்.
- ஸ்பியர்மேனின் தர ஒட்டுறவுக் கெழு
- தொடர்பு போக்குகளின் கருத்துரு மற்றும் தொடர்பு போக்குக் கெழு.
- y ன் மீது x ன் தொடர்பு போக்கு கோடுகள் மற்றும் x ன் மீது y ன் தொடர்பு போக்கு கோடுகள்.

9.1 ஒட்டுறவு

அறிமுகம்

முந்தைய பாடத்தில் நாம் ஒரே ஒரு மாறியின் பண்புகளைக் கற்றோம். உதாரணமாக, மதிப்பெண்கள், நிறைகள், உயரங்கள், மழைப்பொழிவுகள், விலைகள், விற்பனைகள் போன்றவைகள் ஆகும். இவ்வகைப் பகுப்பாய்வுகள் ஒற்றை மாறுபாட்டுப் பகுப்பாய்வு எனப்படும். சில நேரங்களில் இரு மாறிகளுக்கிடையேயான தொடர்பைக் காண்பதில் நாம் விருப்பம் கொள்வோம். உதாரணமாக பொருளின் விலை மற்றும் அதன் விற்பனை, தந்தையின் உயரம் மற்றும் மகனின் உயரம், விலை மற்றும் தேவை, விளைச்சல் மற்றும் மழை பொழிவு, உயரம் மற்றும் எடை போன்றவை ஆகும். இவ்வாறாக ஒட்டுறவின் கருத்துருவானது இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட மாறிகளுக்கிடையேயானத் தொடர்பை ஒன்றையொன்று சார்ந்து, ஏற்ற இறக்கம் காணும் இருமாறிகளின் படியை அல்லது நீட்சியை அளவிடுவதும், பகுப்பாய்வு செய்வதுமான புள்ளியியல் பகுப்பாய்வு ஒட்டுறவாகும்.

கார்ல் பியர்சன்

9.1.1 ஒட்டுறவின் பொருள் (Meaning of Correlation)

ஒட்டுறவு என்பது இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட மாறிகளுக்கு இடையே உள்ள தொடர்பின் அளவை குறிக்கின்றது. ஒரு மாறியின் மாற்றம் மற்ற மாறியில் மாற்றத்தை ஏற்படுத்தினால் அவ்விரு மாறிகளையும் ஒட்டுறவு மாறிகள் (தொடர்புள்ள மாறிகள்) என்போம்.

9.1.2 ஒட்டுறவின் வகைகள் (Types of correlation)

ஒட்டுறவு பலப் பிரிவுகளாக வகைப் படுத்தப்பட்டுள்ளது. அவற்றுள் முக்கியமானவை

(i) நேரிடை ஒட்டுறவு

(ii) எதிரிடை ஒட்டுறவு

நேரிடை மற்றும் எதிரிடை ஒட்டுறவானது மாறிகளின் மாற்றத்தின் திசையைச் சார்ந்தது.

நேரிடை ஒட்டுறவு (Positive Correlation)

இரு மாறிகளின் மதிப்புகளும் ஒரே திசையில் மாறுபட்டால், அதாவது, ஒரு மாறியின் மதிப்பு அதிகரிக்கும்பொழுது, அதனுடன் தொடர்புடைய மற்றோரு மாறியின் மதிப்பு அதிகரித்தாலோ அல்லது ஒரு மாறியின் மதிப்பு குறையும்பொழுது அதனுடன் தொடர்புடைய மற்றோரு மாறியின் மதிப்பு குறைந்தாலோ, அவ்விரு மாறிகளுக்கிடையே உள்ளத் தொடர்பை நேரிடை ஒட்டுறவு என்கிறோம்.

09_11th_BM-STAT_Ch-9-TM.indd 226 08-12-2021 21:55:21

எடுத்துக்காட்டுகள் (Example)

(i) தனி மனிதர்களின் உயரம் மற்றும் எடை
(ii) விலை மற்றும் அளிப்பு
(iii) மழைப்பொழிவு மற்றும் பயிர்களின் விளைச்சல்
(iv) வருவாய் மற்றும் செலவு

எதிரிடை ஒட்டுறவு (Negative Correlation)

இரு மாறிகளின் மதிப்புக்கள் எதிர் திசையில் மாறுபட்டால், அதாவது ஒரு மாறியின் மதிப்பு அதிகரிக்கும் பொழுது (அல்லது குறையும் பொழுது) அதனுடன் தொடர்புடைய மற்ற மாறியின் மதிப்பு குறைந்தாலோ (அல்லது அதிகரித்தாலோ) அவ்விரு மாறிகளுக்கிடையே உள்ள தொடர்பை எதிரிடை ஒட்டுறவு என்கிறோம்.

எடுத்துக்காட்டுகள் (Example)

(i) விலை மற்றும் தேவை
(ii) திருப்பிச் செலுத்த வேண்டியக் காலம் மற்றும் சுலப மாதத்தவணை
(iii) பயிர்களின் விளைச்சல் மற்றும் விலை

ஒட்டுறவு இன்மை (No Correlation)

ஒரு மாறியில் ஏற்படும் மாற்றத்தின் மதிப்பு மற்றொரு மாறியில் ஏற்படும் மாற்றத்தின் மதிப்பிற்குக் காரணமாக அமையவில்லை எனில், அவ்விரு மாறிகளும் ஒட்டுறவு அற்றவை எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு: (For example)

தனி மனிதனின் நிறை மற்றும் அவரின் தலை முடியின் நிறம் அல்லது தனிமனிதனின் உயரம் மற்றும் அவரின் தலை முடியின் நிறம் ஆகியவற்றிற்கிடையே பூச்சிய ஒட்டுறவு இருப்பதை நாம் கண்டிப்பாக பார்க்க இயலும்.

எளிய ஒட்டுறவு (Simple correlation)

இரண்டு மாறிகளுக்கு இடையேயான ஒட்டுறவு, எளிய ஒட்டுறவு எனப்படும். இரண்டிற்கு மேற்பட்ட மாறிகளுக்கு இடையேயான ஒட்டுறவு, பன்முக ஒட்டுறவு எனப்படும்.

பின்வருவன ஒட்டுறவுக் கெழுவின் கணித முறைகளாகும்.

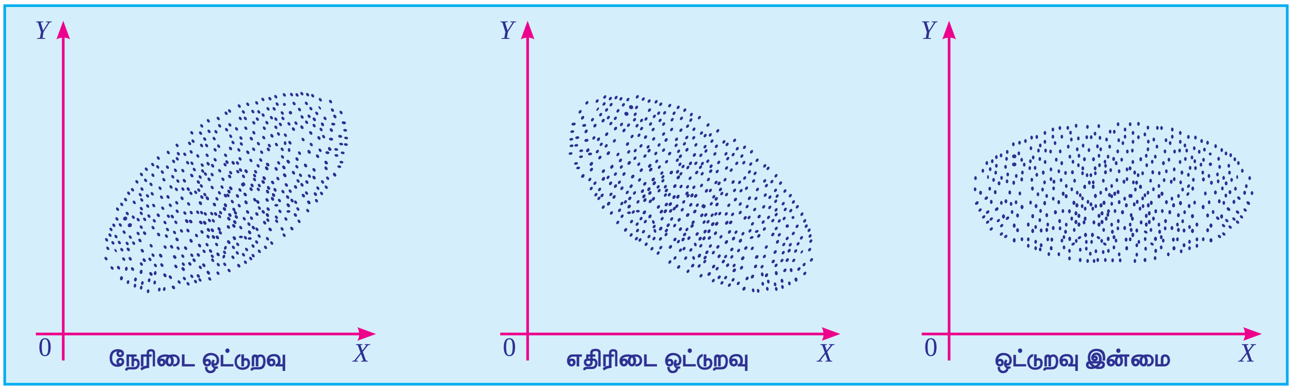
(i) சிதறல் விளக்கப்படம் (வரைபடம்) (Scatter diagram)

(ii) கார்ல் பியர்சனின் ஒட்டுறவுக்கெழு (Karl Pearson's Coefficient of Correlation)

9.1.3 சிதறல் விளக்கப்படம் (Scatter Diagram)

$(X_1, Y_1), (X_2, Y_2) \ldots (X_N, Y_N)$ என்பவை X மற்றும் Y மாறிகளின் N இணை மதிப்புகள் என்க. X ன் மதிப்புகளை x அச்சுத் திசையிலும் அதனுடன் தொடர்புடைய, Y –ன் மதிப்புகளை y அச்சுத் திசையிலும் குறிக்கும்பொழுது கிடைக்கப் பெறும் வரைபடம் சிதறல் விளக்கப்படம் என அழைக்கப்படுகிறது. X மற்றும் Y மாறிலிகளின் மதிப்புக்களுக்கிடையே உள்ளத் தொடர்பை இவ்விளக்கப் படம் பிரதிபலிக்கின்றது.

எளிய நேர்கோட்டு ஒட்டுறவிற்கான சிதறல் விளக்கப்படங்கள் கீழேக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.



படம் 9.1

09_11th_BM-STAT_Ch-9-TM.indd 227 08-12-2021 21:55:31

(i) குறிக்கப்பட்ட புள்ளிகள் மேல்நோக்கியப் போக்கினைக் கொண்டிருந்தால், மாறிகளுக் கிடையே நேரிடை ஒட்டுறவு உள்ளது எனலாம்.

(ii) குறிக்கப்பட்ட புள்ளிகள் கீழ்நோக்கியப் போக்கினைக் கொண்டிருந்தால், மாறிகளுக்கிடையே எதிரிடை ஒட்டுறவு உள்ளது எனலாம்.

(iii) குறிக்கப்பட்ட புள்ளிகள் எவ்வித போக்கினையும் கொண்டிருக்கவில்லை எனில், அம்மாறிகள் ஒட்டுறவு அற்றது எனலாம்.

9.1.4 கார்ல்பியர்சனின் ஒட்டுறவுக் கெழு (Karl Pearson's Correlation Coefficient)

தலைசிறந்த உயிரியல் ஆய்வாளரும் மற்றும் புள்ளியல் நிபுணருமான கார்ல் பியர்சன் என்பவர் இரு மாறிகளுக்கிடையே உள்ள நேர்க்கோட்டு தொடர்பின் அளவை விவரிக்க (அளக்கக்கூடிய) கணித முறையை உருவாக்கினர். நடைமுறையில், பெருமளவில் பயன்படுத்தப்படும் கார்ல்பியர்சனின் முறையானது, பியர்சனின் ஒட்டறவுக்கெழு என அழைக்கப்படுகிறது. இது r என்ற குறியீட்டால் குறிப்பிடப்பட்டு பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படுகிறது.

$$r = \frac{\text{cov}(X,Y)}{\sigma_x \sigma_y},$$

இங்கு $\text{cov}(X, Y) = \frac{1}{N}\sum(X-\overline{X})(Y-\overline{Y})$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(X_i-\overline{X})^2}$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(Y_i-\overline{Y})^2}$$

எனவே கார்ல்பியர்சனின் ஒட்டுறவுக் கெழுவினைக் கணக்கிடுவதற்கானச் சூத்திரம்

$$r = \frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(X_i-\overline{X})(Y_i-\overline{Y})}{\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(X_i-\overline{X})^2}\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(Y_i-\overline{Y})^2}}$$

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{N}(X_i-\overline{X})(Y_i-\overline{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N}(X_i-\overline{X})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{N}(Y_i-\overline{Y})^2}}$$

ஒட்டுறவுக் கெழுவிற்கான விளக்கம்: (Interpretation of Correlation coefficient)

ஒட்டுறவுக் கெழு -1 லிருந்து $+1$ க்கு இடையே ஓர் மதிப்பைப் பெற்றிருக்கும்.

குறியீட்டில் $-1 \leq r \leq +1$

- $r = +1$, எனில் மாறிகளுக்கிடையேயான ஒட்டுறவு முழுமையான நேரிடை ஒட்டுறவு எனப்படும்.
- $r = -1$, எனில் மாறிகளுக்கிடையேயான ஒட்டுறவு முழுமையான எதிரிடை ஒட்டுறவு எனப்படும்.
- $r = 0$ எனில் மாறிகளுக்கிடையே எவ்வித தொடர்பும் இல்லை அதாவது ஒட்டுறவு அற்றது எனப்படும்.

எனவே ஒட்டுறவுக் கெழுவானது ஒட்டுறவின் அளவு மற்றும் திசையை விவரிக்கிறது.

ஒட்டுறவுக் கெழுவை காணும் முறைகள் (Methods of computing Correlation Coefficient)

(i) சராசரியைப் பொறுத்து விலக்கம் எடுக்கப்படும் போது: (When deviations are taken from Mean)

ஒட்டறவை அளக்கும் பல்வேறு கணித முறைகளுள் பெருமளவில் நடைமுறையில் பயன்படுத்தப்படுவது, பிரபலமாக பியர்சனின் ஒட்டறவுக் கெழு என அழைக்கப்பெறும் கார்ல் பியர்சன் முறை ஆகும்.

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{N}(X_i-\overline{X})(Y_i-\overline{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N}(X_i-\overline{X})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{N}(Y_i-\overline{Y})^2}} = \frac{\sum xy}{\sqrt{\sum x^2 \sum y^2}}$$

இங்கு $x = (X_i - \overline{X})$ மற்றும் $y = (Y_i - \overline{Y})$;
$i = 1, 2 \ldots N$

09_11th_BM-STAT_Ch-9-TM.indd 228 08-12-2021 21:55:35

உருப்படிகளின் விலக்கங்கள் சராசரியிலிருந்து எடுக்கப்படும் பொழுது மட்டுமே இம்முறையை பயன்படுத்த வேண்டும்.

கணக்குகளின் தீர்வு காண படிகள்: (Steps to solve the problems)

(i) இரண்டு தொடர்களின் சராசரி, அதாவது $\bar{X}$ மற்றும் $\bar{Y}$ –ஐ காண்க.

(ii) இரண்டு தொடர்களின் விலக்கங்கள் முறையே $\bar{X}$ மற்றும் $\bar{Y}$ களிலிருந்து எடுத்து இதனை x மற்றும் y எனக் குறிப்பிடுக.

(iii) x மற்றும் y ஆகியவற்றின் விலக்கங்களின் வர்க்க கூடுதல் கணக்கிட்டு, அவற்றை Σx^2 மற்றும் Σy^2 எனக் குறிப்பிடுக.

(iv) x மற்றும் y களின் விலக்கங்களைப் பெருக்கி, அவற்றின் கூடுதல் Σxy காண்க.

(v) Σxy, Σx^2 மற்றும் Σy^2 ஆகியவற்றின் மதிப்புகளை மேற்கண்டச் சூத்திரத்தில் பிரதியிடுக.

எடுத்துக்காட்டு 9.1

பின்வரும் விவரங்களுக்கு கார்ல் பியர்சனின் ஒட்டுறவுக் கெழுவினைக் கணக்கிடுக

X:	6	8	12	15	18	20	24	28	31
Y:	10	12	15	15	18	25	22	26	28

தீர்வு:

X	$x = (X-18)$	x^2
6	–12	144
8	–10	100
12	–6	36
15	–3	9
18	0	0
20	2	4
24	6	36
28	10	100
31	13	169
$\sum X = 162$	$\sum x = 0$	$\sum x^2 = 598$

Y	$y = (Y-19)$	y^2	xy
10	–9	81	108
12	–7	49	70
15	–4	16	24
15	–4	16	12
18	–1	1	0
25	6	36	12
22	3	9	18
26	7	49	70
28	9	81	117
$\sum Y = 171$	$\sum y = 0$	$\sum y^2 = 338$	$\sum xy = 431$

அட்டவணை 9.1

$$N=9,\ \bar{X} = \frac{\Sigma X}{N} = \frac{162}{9} = 18,\ \bar{Y} = \frac{\Sigma Y}{N} = \frac{171}{9} = 19$$

$$r = \frac{\Sigma xy}{\sqrt{\Sigma x^2 \Sigma y^2}}$$

இங்கு $x=(X-\bar{X})$ மற்றும் $y=(Y-\bar{Y})$

$$\Sigma xy = 431,\ \Sigma x^2 = 598,\ \Sigma y^2 = 338$$

$$r = \frac{431}{\sqrt{598 \times 338}} = \frac{431}{449.582} = +0.959$$

(ii) மதிப்புகள் மாற்றமில்லாமல் எடுக்கப்படும்பொழுது (விலக்கமில்லாமல்) (When actual values are taken (without deviation))

மதிப்புகள் குறிப்பிடத்தக்க அளவில் சிறியதாக இருக்கும் நிலையில் பின்வரும் சூத்திரம் பயன்படுத்தப்படுகின்றது

$$r = \frac{N\Sigma XY - (\Sigma X)(\Sigma Y)}{\sqrt{N\Sigma X^2 - (\Sigma X)^2} \times \sqrt{N\Sigma Y^2 - (\Sigma Y)^2}}$$

எடுத்துக்காட்டு 9.2

பின்வரும் விவரங்களிலிருந்து ஒட்டுறவுக் கெழுவினைக் கணக்கிடுக

X	12	9	8	10	11	13	7
Y	14	8	6	9	11	12	3

09_11th_BM-STAT_Ch-9-TM.indd 229 08-12-2021 21:55:39

தீர்வு:

இரண்டு தொடர்களில் உள்ள எண் விவரங்கள் சிறிய எண்களாக உள்ளன. எனவே சராசரி அல்லது ஊகச் சராசரியிலிருந்து விலக்கு எடுக்காமல் ஒட்டுறவுக் கெழுவினை காணலாம்.

X	Y	X^2	Y^2	XY
12	14	144	196	168
9	8	81	64	72
8	6	64	36	48
10	9	100	81	90
11	11	121	121	121
13	12	169	144	156
7	3	49	9	21
$\sum X = 70$	$\sum Y = 63$	$\sum X^2 = 728$	$\sum Y^2 = 651$	$\sum XY = 676$

அட்டவணை 9.2

$$r = \frac{N\Sigma XY - (\Sigma X)(\Sigma Y)}{\sqrt{N\Sigma X^2 - (\Sigma X)^2} \times \sqrt{N\Sigma Y^2 - (\Sigma Y)^2}}$$

$$= \frac{7(676) - (70)(63)}{\sqrt{7(728) - (70)^2} \times \sqrt{7(651) - (63)^2}}$$

$$= \frac{322}{339.48}$$

$$r = +0.95$$

(iii) ஊகச் சராசரியிலிருந்து விலக்கம் எடுக்கப்படும் நிலையில் (When deviations are taken from an Assumed mean)

சராசரி முழு எண்ணாக இல்லாத நிலையில், அதாவது X மற்றும் Y தொடர்களில் சரசாரி 20.167 மற்றும் 29.23 எனில் மேற்கண்ட முறையில் ஒட்டுறவுக் காணும்பொழுது கணக்கீடு கடினமானதாகவும், அதிக நேரம் எடுப்பதாகவும் இருக்கும். அவ்வாறான நிலையில் ஊகச் சராசரி முறை மூலம் ஒட்டுறவுக் கெழுவினைக் காணலாம். விலக்கமானது ஊகச் சராசரியிலிருந்து எடுக்கப்படும் நிலையில் பின்வரும் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தலாம்.

$$r = \frac{N\Sigma\, dx\, dy - (\Sigma dx)(\Sigma dy)}{\sqrt{N\Sigma dx^2 - (\Sigma dx)^2} \times \sqrt{N\Sigma dy^2 - (\Sigma dy)^2}}$$

இங்கு $dx = X - A$ மற்றும் $dy = Y - B$. A மற்றும் B என்பன ஊகச் சராசரிகள்.

குறிப்பு

ஊகச் சராசரி முறையைப் பயன்படுத்தும்பொழுது எந்த மதிப்பை ஊகச் சராசரியாக எடுத்தாலும் ஒரே விடைதான் கிடைக்கும். இருந்தபோதிலும் ஊகச் சராசரியைச் சராசரிக்கு அருகாமையில் எடுக்கும்போது, கணக்கீடு எளிமையானதாக இருக்கும்.

ஊகச் சராசரி கணக்குகளின் தீர்வு காண படிகள் (Steps to solve the problems)

(i) X தொடருக்கு ஊகச் சராசரியிலிருந்து விலக்கம் எடுத்து, இவ்விலக்கங்களை dx எனக் குறித்து Σdx காண்க.

(ii) Y தொடருக்கு ஊகச் சராசரியிலிருந்து விலக்கம் எடுத்து, இவ்விலக்கங்களை dy என குறித்து Σdy காண்க.

(iii) dx–ஐ வர்க்கப்படுத்தி Σdx^2 காண்க.

(iv) dy–ஐ வர்க்கப்படுத்தி Σdy^2 காண்க.

(v) dx மற்றும் dy ஆகிய இரண்டையும் பெருக்கிக் $\Sigma dx\, dy$ காண்க.

(vi) $\Sigma\, dxdy, \Sigma\, dx, \Sigma\, dy, \Sigma\, dx^2$ மற்றும் $\Sigma\, dy^2$ ஆகியவற்றின் மதிப்புகளை மேலேக் கொடுக்கப்பட்டச் சூத்திரத்தில் பிரதியிடுக.

எடுத்துக்காட்டு 9.3

பின்வருவனவற்றுக்கு ஒட்டுறவுக் கெழுவினைக் காண்க. மேலும் அதன் உட்பொருளை வெளிப்படுத்து.

தந்தையின் உயரம் (அங்குலங்களில்)	65	66	67	67	68	69	71	73
மகனின் உயரம் (அங்குலங்களில்)	67	68	64	68	72	70	69	70

09_11th_BM-STAT_Ch-9-TM.indd 230 08-12-2021 21:55:40

தீர்வு:

தந்தையின் உயரம் (அங்குலங்களில்) X எனவும், மகனின் உயரம் (அங்குலங்களில்) Y எனவும் கொள்க.

X	dx = (X–67)	dx^2
65	-2	4
66	-1	1
67	0	0
67	0	0
68	1	1
69	2	4
71	4	16
73	6	36
$\sum X = 546$	$\sum dx = 10$	$\sum dx^2 = 62$

Y	dy = (Y–68)	dy^2	dxdy
67	–1	1	2
68	0	0	0
64	-4	16	0
68	0	0	0
72	4	16	4
70	2	4	4
69	1	1	4
70	2	4	12
$\sum Y = 548$	$\sum dy = 4$	$\sum dy^2 = 42$	$\sum dxdy = 26$

அட்டவணை 9.3

$$r = \frac{N\,\Sigma dx\,dy - (\Sigma dx)(\Sigma dy)}{\sqrt{N\Sigma dx^2 - (\Sigma dx)^2} \times \sqrt{N\Sigma dy^2 - (\Sigma dy)^2}}$$

இங்கு

$\Sigma dx = 10,\ \Sigma dx^2 = 62,\ \Sigma dy = 4,\ \Sigma dy^2 = 42$ மற்றும் $\Sigma dxdy = 26$

$$r = \frac{(8\times 26) - (10\times 4)}{\sqrt{(8\times 62) - (10)^2} \times \sqrt{(8\times 42) - (4)^2}}$$

$$r = \frac{168}{\sqrt{396}\times\sqrt{320}}$$

$$r = \frac{168}{355.98} = 0.472$$

$$r = +0.472$$

தந்தையரின் உயரங்கள் மற்றும் அவர்களுக்கு தொடர்புடைய மகன்களின் உயரங்கள் ஆகியவற்றிற்கிடையே நேரடியான ஒட்டுறவு உள்ளது.

எடுத்துக்காட்டு 9.4

பின்வரும் விவரங்களிலிருந்து ஒட்டுறவுக் கெழுவைக் கணக்கிடுக.

$N = 9,\ \sum X = 45,\ \sum Y = 108,\ \Sigma X^2 = 285,$
$\Sigma Y^2 = 1356,\ \Sigma XY = 597.$

தீர்வு:

ஒட்டுறவுக் கெழு

$$r = \frac{N\Sigma XY - (\Sigma X)(\Sigma Y)}{\sqrt{N\Sigma X^2 - (\Sigma X)^2}\sqrt{N\Sigma Y^2 - (\Sigma Y)^2}}$$

$$= \frac{9(597) - (45\times 108)}{\sqrt{9(285) - (45)^2}\times\sqrt{9(1356) - (108^2)}}$$

$$r = +0.95$$

எடுத்துக்காட்டு 9.5

கீழ்கண்ட விவரங்களுக்கு ஒட்டுறவுக் கெழுவைக் கணக்கிடுக.

$$\Sigma xy = 120,\ \Sigma x^2 = 90,\ \Sigma y^2 = 640$$

தீர்வு:

$\Sigma xy = 120,\ \ \Sigma x^2 = 90,\ \Sigma y^2 = 640$ என கொடுக்கப்பட்டுள்ளது

$$r = \frac{\Sigma xy}{\sqrt{\Sigma x^2 \Sigma y^2}} = \frac{120}{\sqrt{90(640)}} = \frac{120}{\sqrt{57600}}$$

$$= \frac{120}{240} = 0.5$$

9.2 தர ஒட்டுறவுக் கெழு (Rank correlation)

9.2.1 ஸ்பியர்மென்னின் தர ஒட்டுறவுக் கெழு (Spearman's Rank Correlation Coefficient)

1904–ல் சார்லஸ் எட்வர்ட் ஸ்பியர்மென் என்ற பிரிட்டிஷ் உளவியல் வல்லுனரால் ஒட்டுறவுக் கெழுவைத் தரத்தின் மூலம் காணும்

09_11th_BM-STAT_Ch-9-TM.indd 231 08-12-2021 21:55:45

முறையைக் கண்டுபிடித்தார். இம்முறை தரத்தை அடிப்படையாகக் கொண்டது. இம்முறை தர பண்புகளான அதாவது அறிவு, அழகு, நடத்தை, குணம் போன்றவைகளை அளவீடு செய்யப் பயன்படுகிறது. இதனை பியர்சனின் ஒட்டுறவுக்கெழு போல் எண்ணளவில் அளவீடு செய்ய இயலாது.

தனித்த விவரங்களுக்கு மட்டுமே தர ஒட்டுறவுக் கெழுவை பயன்படுத்த இயலும். இம்முறையில் பெரும்பாலும் முடிவு தோராயமானது, ஏனெனில் இம்முறையில் உண்மையான மதிப்பு கணக்கில் கொள்ளப்படுவதில்லை. ஸ்பியர்மென்னின் தர ஒட்டுறவுக் கெழு " row" என்று உச்சரிக்கப்பட்டு, 'ρ' என்றக் குறியீட்டின் மூலம் குறிப்பிடப்படுகின்றது. ஸ்பியர்மென்னின் தர ஒட்டுறவுக் கெழு காண்பதற்கான சூத்திரம்,

$$\rho = 1-\frac{6\Sigma d^2}{N(N^2-1)} \text{ (அல்லது)}$$

$$\rho = 1-\frac{6\Sigma d^2}{N^3-N}$$

இங்கு d = இரண்டு தரங்களின் வேறுபாடு
= $R_X - R_Y$ மற்றும்

N = இணை உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை.

தர ஒட்டுறவுக் கெழு -1லிருந்து $+1$ க்கு இடையே ஓர் மதிப்பைப் பெற்றிருக்கும்.

குறியீட்டில் $-1 \le \rho \le +1$

ஸ்பியர்மென்னின் தர ஒட்டுறவு கணக்கிடும் பொழுது, நாம் இரண்டு வகையான கணக்குகளை காணலாம்

(i) தரங்கள் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் பொழுது

(ii) தரங்கள் கொடுக்கப்படாத பொழுது

எடுத்துக்காட்டு 9.6

புள்ளியியல் மற்றும் கணிதவியலில் 10 மாணவர்கள் பெற்ற தரவரிசைகள் கீழேக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

புள்ளியியல்	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
கணிதவியல்	1	4	2	5	3	9	7	10	6	8

தர ஒட்டுறவுக் கெழுவைக் காண்க.

தீர்வு:

R_X என்பது புள்ளியியல் பாடத்தில் மாணவர்கள் பெற்றத் தரவரிசை என்க. R_Y என்பது கணிதவியல் பாடத்தில் மாணவர்கள் பெற்றத் தரவரிசை என்க.

R_X	R_Y	$d = R_X - R_Y$	d^2
1	1	0	0
2	4	-2	4
3	2	1	1
4	5	-1	1
5	3	2	4
6	9	-3	9
7	7	0	0
8	10	-2	4
9	6	3	9
10	8	2	4
			$\sum d^2 = 36$

அட்டவணை 9.4

தர ஒட்டுறவுக் கெழு கீழேக் கொடுக்கபட்டுள்ளது.

$$\rho = 1-\frac{6\Sigma d^2}{N(N^2-1)}$$

$$= 1-\frac{6(36)}{10(10^2-1)}$$

$$= 1-0.218$$

$$\therefore \rho = 0.782$$

எடுத்துக்காட்டு 9.7

அழகுப் போட்டியில் பங்கேற்ற 10 போட்டியாளர்களுக்கு, மூன்று நீதிபதிகள் அளித்தத்தரவரிசைகீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

முதல் நீதிபதி	1	4	6	3	2	9	7	8	10	5
இரண்டாம் நீதிபதி	2	6	5	4	7	10	9	3	8	1
மூன்றாம் நீதிபதி	3	7	4	5	10	8	9	2	6	1

தர ஒட்டுறவுக் கெழுவைப் பயன்படுத்தி எந்த இரு நீதிபதிகளுக்கு அழகியல் கருத்தில் பொதுவான அணுகுமுறை உள்ளது எனக் காண்க?

தீர்வு:

R_X, R_Y, R_Z என்பன முறையே முதல், இரண்டாம் மற்றும் மூன்றாம் நீதிபதிகள் போட்டியாளர்களுக்கு அளித்தத் தரவரிசையைக் குறிக்கின்றது.

R_X	R_Y	R_Z	$d_{XY} = R_X - R_Y$	$d_{YZ} = R_Y - R_Z$	$d_{ZX} = R_Z - R_X$
1	2	3	-1	-1	2
4	6	7	-2	-1	3
6	5	4	1	1	-2
3	4	5	-1	-1	2
2	7	10	-5	-3	8
9	10	8	-1	2	-1
7	9	9	-2	0	2
8	3	2	5	1	-6
10	8	6	2	2	-4
5	1	1	4	0	-4

d^2_{XY}	d^2_{YZ}	d^2_{ZX}
1	1	4
4	1	9
1	1	4
1	1	4
25	9	64
1	4	1
4	0	4
25	1	36
4	4	16
16	0	16
$\sum d^2_{XY} = 82$	$\sum d^2_{YZ} = 22$	$\sum d^2_{ZX} = 158$

அட்டவணை 9.5

$$\rho_{XY} = 1 - \frac{6\Sigma d^2_{XY}}{N(N^2-1)} = 1 - \frac{6(82)}{10(10^2-1)}$$

$$= 1 - 0.4969 = 0.5031$$

$$\rho_{YZ} = 1 - \frac{6\Sigma d^2_{YZ}}{N(N^2-1)} = 1 - \frac{6(22)}{10(10^2-1)}$$

$$= 1 - \frac{132}{990} = 1 - 0.1333 = 0.8667$$

$$\rho_{ZX} = 1 - \frac{6\Sigma d^2_{ZX}}{N(N^2-1)} = 1 - \frac{6(158)}{10(10^2-1)}$$

$$= 1 - 0.9576 = 0.0424$$

இரண்டாம் மற்றும் மூன்றாம் நீதிபதிகளுக்கு இடையேயான தரஒட்டுறவுக் கெழு அதாவது ρ_{YZ} என்பது மூன்று கெழுக்களிடையே, மிகை மற்றும் அதிக நிறை கொண்டுள்ளது. எனவே, இரண்டாம் மற்றும் மூன்றாம் நீதிபதிகளுக் கிடையே அழகியல் பற்றி ஒரு பொதுவான அணுகுமுறை காணப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 9.8

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களுக்குத் தர ஒட்டுறவுக் கெழுவை காண்க.

பாடம் 1	பாடம் 2
40	45
46	46
54	50
60	43
70	40
80	75
82	55
85	72
87	65
90	42
95	70

தீர்வு:

X என்பது பாடம் 1 எனவும் மற்றும் Y என்பது பாடம் 2 எனவும் கருதவும்.

09_11th_BM-STAT_Ch-9-TM.indd 233 08-12-2021 21:55:49

X	Y	R_X	R_Y	$d = R_X - R_Y$	d^2
40	45	1	4	–3	9
46	46	2	5	–3	9
54	50	3	6	–3	9
60	43	4	3	1	1
70	40	5	1	4	16
80	75	6	11	–5	25
82	55	7	7	0	0
85	72	8	10	–2	4
87	65	9	8	1	1
90	42	10	2	8	64
95	70	11	9	2	4
					$\sum d^2 = 142$

அட்டவணை 9.6

$$\rho = 1 - \frac{6\Sigma d^2}{N(N^2-1)}$$

$$= 1 - \frac{6(142)}{11(11^2-1)}$$

$$= 1 - \frac{852}{1320} = 0.354$$

பயிற்சி 9.1

1. பின்வரும் விவரங்களுக்கு ஒட்டுறவுக் கெழுவினை கணக்கிடுக.

X	5	10	5	11	12	4	3	2	7	1
Y	1	6	2	8	5	1	4	6	5	2

2. பின்வரும் விவரங்களுக்கு ஒட்டுறவுக் கெழுவினை கணக்கிடுக.

விலை (₹)	14	19	24	21	26	22	15	20	19
விற்பனை (₹)	31	36	48	37	50	45	33	41	39

3. கணவர்கள் மற்றும் அவர்தம் மனைவியர்களின் வயதிற்கிடையேயான ஒட்டுறவுக் கெழுவை காண்க.

கணவர்களின் வயது	23	27	28	29	30	31	33	35	36	39
மனைவிகளின் வயது	18	22	23	24	25	26	28	29	30	32

4. பின்வரும் விவரங்களிலிருந்து X மற்றும் Y தொடர்களுக்கிடையே ஒட்டுறவுக் கெழுவினை கணக்கிடுக.

விவரங்கள்	X	Y
இணை சோடிகளின் விவரங்களின் எண்ணிக்கை	15	15
கூட்டுச் சராசரி	25	18
திட்ட விலக்கம்	3.01	3.03
சராசரியிலிருந்துப் பெறப்பட்ட விலக்கங்களின் வர்க்கங்களின் கூடுதல்	136	138

X மற்றும் Y தொடர்களுக்கு முறையே அவற்றின் சராசரிகளிலிருந்து பெறப்பட்ட விலக்கங்களின் பெருக்கல்களின் கூடுதல் 122 ஆகும்.

5. பின்வரும் விவரங்களுக்கு ஒட்டுறவுக்கெழு கணக்கிடுக

X	25	18	21	24	27	30	36	39	42	48
Y	26	35	48	28	20	36	25	40	43	39

6. பின்வரும் விவரங்களுக்கு ஒட்டுறவுக் கெழுவினை காண்க.

X	78	89	96	69	59	79	68	62
Y	121	72	88	60	81	87	123	92

7. கணக்காளர் பதவிக்கு விண்ணப்பம் செய்த 11 விண்ணப்பதாரர்களுக்கு ஒரு நிறுவனம் நடத்திய போட்டித் தேர்வில் திறனாய்வுத் தேர்வு மற்றும் தர்க்க அறிவுத்தேர்வில்

09_11th_BM-STAT_Ch-9-TM.indd 234 08-12-2021 21:55:50

அவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்களின் விவரம் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

விண்ணப்பதாரர்	தர்க்க அறிவுத் தேர்வு	திறனாய்வுத் தேர்வு
A	20	30
B	50	60
C	28	50
D	25	40
E	70	85
F	90	90
G	76	56
H	45	82
I	30	42
J	19	31
K	26	49

மேலே கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களிலிருந்து ஸ்பியர்மென்னின் தர ஒட்டுறவுக் கெழுவினை கணக்கிடுக.

8. பத்து மாணவர்கள் வணிகவியல் மற்றும் கணக்குப் பதிவியல் பாடத்தில் பெற்றத் தரங்கள் பின்வருமாறு

வணிகவியல்	6	4	3	1	2	7	9	8	10	5
கணக்குப் பதிவியல்	4	1	6	7	5	8	10	9	3	2

இரு பாடங்களில் மாணவர்களின் அறிவு எந்த அளவிற்குத் தொடர்புடையது?

9. சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டச் சமீபத்தியப் பழுது வேலைகளின் மதிப்பிடப்பட்ட விலை மற்றும் அசல் விலை பதிவுச் செய்யப்பட்டுள்ளது.

மதிப்பிடப்பட்ட செலவு	300	450	800	250	500	975	475	400
அசல் செலவு	273	486	734	297	631	872	396	457

ஸ்பியர்மென்னின் தர ஒட்டுறவுக் கெழுவினை கணக்கிடுக.

10. ஒரே ஆண்டில் படித்த 10 மாணவர்கள் A மற்றும் B பாடங்களில் பெற்ற தரங்கள் கீழேக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. தர ஒட்டுறவுக் கெழுவினை கணக்கிடுக.

A–ன் தரவரிசை	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B –ன் தரவரிசை	6	7	5	10	3	9	4	1	8	2

9.3 தொடர்புப் போக்கு பகுப்பாய்வு (Regression Analysis)

அறிமுகம்

இதுவரையில் நாம் இரு மாறிகளுக் கிடையேயான திசை மற்றும் உறவின் வலிமை ஆகியவற்றை அளவிடும் ஒட்டுறவுப் பகுப்பாய்வினைப் பற்றிக் கற்றோம். இங்கு கொடுக்கப்பட்ட ஒரு மாறியின் மதிப்பிலிருந்து மற்றொருமாறியின்மதிப்பை நாம்மதிப்பிடவோ அல்லது கணிக்கவோ இயலும். எடுத்துக் காட்டாக, விலை மற்றும் தேவை என்பன ஒட்டுறவுப் பெற்றவை. கொடுக்கப்பட்ட விலைக்கு ஏற்ப எதிர்பார்க்கப்படும் தேவையின் அளவையோ அல்லது கொடுக்கப்பட்ட தேவையின் அளவிற்கேற்ப தேவைப்படும் விலையின் அளவையோ நாம் காணலாம்.

"தொடர்புப் போக்கு" என்பதன் பொருள் யாதெனில் "சராசரியை நோக்கி பின்நோக்கி செல்லுதல்" என்பதாகும். சர் பிரான்ஸிஸ் கால்டன் (1822 – 1911) என்ற ஒரு பிரிட்டன் உயிர் நுட்பவியலாளர், மரபுவழித் தொடர்கிற குணாதிசயங்களை ஆராயும் பொழுது இதனை முதன் முதலில் பயன்படுத்தினார். மிகவும் உயரமான அல்லது குள்ளமான பெற்றோர்களின் வாரிசுகளின் மக்கள் தொகையானது சராசரியான உயரத்தை அடைவதைக் கால்டன் கண்டார். ஆனால் தற்போது தொடர்புப் போக்கு என்கிற வார்த்தை உயிர்நுட்பவியலில் தொடர்பு இல்லாமல் புள்ளியியலில் மட்டும் சாதகமாக பயன்படுத்தப்படும் ஓர் வார்த்தையாக உள்ளது.

வரையறை 9.1

தொடர்புப் போக்கு என்பது இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட மாறிகளுக்கிடையே உள்ளச் சராசரித் தொடர்பை கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களின் அலகில் அறியும் கணக்கியல் அளவு ஆகும்.

09_11th_BM-STAT_Ch-9-TM.indd 235 08-12-2021 21:55:50

9.3.1 சார்புள்ள மாறி மற்றும் சார்பற்ற மாறி (Dependent and independent variables)

வரையறை 9.2

தொடர்புப் போக்கு ஆய்வில் இரு வகையான மாறிகள் உள்ளன. கணிக்கக்கூடிய மாறி சார்புள்ள மாறி எனவும் கணிப்பதற்குப் பயன்படக்கூடிய மாறி சார்பற்ற மாறி எனவும் வரையறுக்கப்படுகிறது.

ஒரு மாறியின் மதிப்பு கொடுக்கப்பட்டால் மற்றொரு மாறியின் மதிப்பைக் கணக்கிட தொடர்புக் போக்கு நமக்கு பயன்படுகிறது. ஒரு மாறியின் மதிப்பு தெரியாத நிலையில், அதனை மதிப்பிடுவதற்கு, அதனுடன் தொடர்புடைய மற்றொரு மாறியின் மதிப்பை பயன்படுத்தும் புள்ளியியல் முறை, தொடர்புப் போக்கு எனப்படும்.

9.3.2 தொடர்புப் போக்கு சமன்பாடுகள் (Regression Equations)

தொடர்புப் போக்கு சமன்பாடுகள் என்பன தொடர்புப் போக்கு கோடுகளின் இயற்கணித அமைப்பாகும். இரண்டு தொடர்புப் போக்கு கோடுகள் உள்ளதால், இரண்டு தொடர்புப் போக்கு சமன்பாடுகள் உள்ளன. கொடுக்கப்பட்ட Y–ன் மதிப்பில் ஏற்படும் மாற்றத்திற்கேற்ப X–ன் மதிப்பில் ஏற்படும் மாற்றத்தை விவரிக்க Y–ன் மீதான X–ன் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடு பயன்படுத்தப்படுகிறது மற்றும் கொடுக்கப்பட்ட X–ன் மதிப்பில் ஏற்படும் மாற்றத்திற்கேற்ப Y–ன் மதிப்பில் ஏற்படும் மாற்றத்தை விவரிக்க X–ன் மீதான Y–ன் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடு பயன்படுத்தப்படுகிறது. தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடுகள் (i) Y–ன் மீதான X–ன் சமன்பாடு (ii) X–ன் மீதான Y–ன் சமன்பாடு மற்றும் அவற்றின் கெழுக்கள் பல்வேறு வகைகளில் கீழ்கண்டவாறு விவரிக்கப்படுகிறது.

வகை 1: கொடுக்கப்பட்ட மதிப்புகளை அவ்வாறே எடுத்துக்கொள்ளும் பொழுது

X மற்றும் Y மாறிகளில் கொடுக்கப்பட்ட மதிப்புகளை அவ்வாறே எடுத்துக்கொள்ளும் பொழுது இரு தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடுகள் மற்றும் அவைகளின் கெழுக்கள் கீழ்க்கண்டவாறு எழுதப்படுகின்றது.

(i) Y–ன் மீது X–ன் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடு :

$$X-\overline{X} = b_{xy}(Y-\overline{Y})$$

இங்கு X தொடரின் சராசரி $\overline{X}$,

Y தொடரின் சராசரி $\overline{Y}$,

$$b_{xy} = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y} = \frac{N\Sigma XY-(\Sigma X)(\Sigma Y)}{N\Sigma Y^2-(\Sigma Y)^2}$$ என்பது

Y–ன் மீதான X–ன் தொடர்புப் போக்குக் கெழு மற்றும் r என்பது X மற்றும் Y ஆகியவற்றின் ஒட்டுறவுக்கெழு, σ_x மற்றும் σ_y ஆகியன முறையே X மற்றும் Y திட்ட விலக்கங்கள் ஆகும்.

(ii) X–ன் மீது Y–ன் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடு:

$$Y-\overline{Y} = b_{yx}(X-\overline{X})$$

இங்கு X தொடரின் சராசரி $\overline{X}$,

Y தொடரின் சராசரி $\overline{Y}$,

$$b_{yx} = r\frac{\sigma y}{\sigma x} = \frac{N\Sigma XY-(\Sigma X)(\Sigma Y)}{N\Sigma X^2-(\Sigma X)^2}$$ என்பது

X–ன் மீதான Y–ன் தொடர்புப் போக்குக் கெழு மற்றும் r என்பது X மற்றும் Y ஆகியவற்றின் ஒட்டுறவுக் கெழு, σ_x, σ_y ஆகியன முறையே X மற்றும் Y ஆகியவற்றின் திட்ட விலக்கங்கள் ஆகும்.

வகை 2 : X மற்றும் Y ஆகியவைகளின் கூட்டுசராசரியிலிருந்து விலக்கங்கள் பெற்று கணக்கிடுதல்

X மற்றும் Y ஆகியவைகளின் மதிப்புகளுக்கு பதிலாக X மற்றும் Y தொடர்களின் சராசரியிலிருந்து விலக்கம் கண்டு கணக்கிடுவது மிக எளிது. அவ்வாறான நிலையில் இரண்டு தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடுகள் மற்றும் அவைகளின் கெழுக்கள் கீழ்க்கண்டவாறு எழுதப்படுகின்றது.

(i) Y–ன் மீது X–ன் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடு:

$$X-\overline{X} = b_{xy}(Y-\overline{Y})$$

இங்கு X தொடரின் சராசரி $\overline{X}$,

Y தொடரின் சராசரி $\overline{Y}$,

09_11th_BM-STAT_Ch-9-TM.indd 236 08-12-2021 21:55:53

$b_{xy} = r\dfrac{\sigma x}{\sigma y} = \dfrac{\Sigma xy}{\Sigma y^2}$ என்பது Y–ன் மீதான X–ன் உடன் தொடர்புப் போக்குக் கெழு, $x = (X - \overline{X})$ மற்றும் $y = (Y - \overline{Y})$

(ii) X–ன் மீது Y–ன் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடு:

$$Y - \overline{Y} = b_{yx}(X - \overline{X})$$

இங்கு X தொடரின் சராசரி $\overline{X}$,

Y தொடரின் சராசரி $\overline{Y}$,

$b_{yx} = r\dfrac{\sigma y}{\sigma x} = \dfrac{\Sigma xy}{\Sigma x^2}$ என்பது Y–ன் மீதான X–ன் உடன் தொடர்புப் போக்குக் கெழு,

$x = (X - \overline{X})$ மற்றும் $y = (Y - \overline{Y})$

குறிப்பு

ஒட்டுறவுக் கெழு σ_X, σ_Y காண்பதற்குப் பதிலாக Σxy, Σy^2 ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் கணக்கிட்டு தொடர்புப் போக்குக் கெழுவைக் காணலாம்.

வகை 3: ஊகச் சராசரிகளிலிருந்து விலக்கம் பெறுதல்

X மற்றும் Y மாறிகளின் சராசரிகள் பின்னமாக இருக்கையில் ஊகச் சராசரிகளிலிருந்து விலக்கங்கள் பெறப்பட்டு கணக்கீடுகளை எளிதாக்க முடியும். இரண்டு தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடுகள் மற்றும் அவைகளின் கெழுக்கள் கீழ்கண்டவாறு எழுதப்படுகின்றது.

(i) X–ன் மீது Y–ன் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடு:

$$Y - \overline{Y} = b_{yx}(X - \overline{X})$$

$$b_{yx} = \frac{N\Sigma dxdy - (\Sigma dx)(\Sigma dy)}{N\Sigma dx^2 - (\Sigma dx)^2}$$

(ii) Y–ன் மீது X–ன் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடு:

$$X - \overline{X} = b_{xy}(Y - \overline{Y})$$

$$b_{xy} = \frac{N\Sigma dxdy - (\Sigma dx)(\Sigma dy)}{N\Sigma dy^2 - (\Sigma dy)^2}$$

இங்கு $dx = X - A$, $dy = Y - B$, A மற்றும் B ஆகியவைகள் ஊகச் சராசரிகள் அல்லது X மற்றும் Y ஆகியவற்றிலிருந்து முறையே பெறப்படும் தன்னிச்சையான மதிப்புகள் ஆகும்.

தொடர்புப் போக்குக் கெழுவின் பண்புகள்

(i) ஒட்டுறவுக் கெழுவானது தொடர்புப் போக்குக்கெழுக்களின் பெருக்கல் சராசரி ஆகும். $r = \pm\sqrt{b_{xy} \times b_{yx}}$

(ii) ஒரு தொடர்புப் போக்குக் கெழுவின் மதிப்பு 1–ஐ விடப் பெரியது எனில் மற்றொன்றின் மதிப்பு 1–ஐ விடச் சிறியதாகத் தான் இருக்கும்.

(iii) இரு தொடர்புப் போக்குக் கெழுக்களும் ஒரே குறியைப் பெற்றிருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 9.9

பின்வரும் விவரங்களிலிருந்து தொடர்புப் போக்குக் கெழுக்கள் மற்றும் தொடர்புப் போக்குக் கோடுகளை காண்க.

X	1	2	3	4	5	6	7
Y	9	8	10	12	11	13	14

தீர்வு:

X	Y	X^2	Y^2	X^Y
1	9	1	81	9
2	8	4	64	16
3	10	9	100	30
4	12	16	144	48
5	11	25	121	55
6	13	36	169	78
7	14	49	196	98
$\sum X = 20$	$\sum Y = 77$	$\sum X^2 = 140$	$\sum Y^2 = 875$	$\sum XY = 334$

அட்டவணை 9.7

$$\overline{X} = \frac{\Sigma X}{N} = \frac{28}{7} = 4,$$

$$\overline{Y} = \frac{\Sigma Y}{N} = \frac{77}{7} = 11$$

09_11th_BM-STAT_Ch-9-TM.indd 237 08-12-2021 21:55:56

***Y*–ன் மீது *X*–ன் தொடர்புப் போக்குக் கெழு**

$$b_{xy} = \frac{N\Sigma XY-(\Sigma X)(\Sigma Y)}{N\,\Sigma Y^2-(\Sigma Y)^2}$$

$$= \frac{7(334)-(28)(77)}{7(875)-(77)^2}$$

$$= \frac{2338-2156}{6125-5929} = \frac{182}{196}$$

$$\therefore b_{xy} = 0.929$$

(i) *Y*–ன் மீது *X*–ன் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடு

$X-\overline{X} = b_{xy}(Y-\overline{Y})$

$X-4 = 0.929(Y-11)$

$X-4 = 0.929Y-10.219$

$\therefore$ Y–ன் மீது X–ன் தொடர்பு போக்குச் சமன்பாடு
$X = 0.929Y-6.219$

(ii) *X*–ன் மீது *Y*–ன் தொடர்புப் போக்குக் கெழு

$$b_{yx} = \frac{N\Sigma XY-(\Sigma X)(\Sigma Y)}{N\,\Sigma X^2-(\Sigma X)^2}$$

$$= \frac{7(334)-(28)(77)}{7(140)-(28)^2}$$

$$= \frac{2338-2156}{980-784}$$

$$= \frac{182}{196}$$

$$\therefore b_{yx} = 0.929$$

(iii) *X*–ன் மீது *Y*–ன் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடு

$Y-\overline{Y} = b_{yx}(X-\overline{X})$

$Y-11 = 0.929\,(X-4)$

$Y = 0.929X-3.716+11$

$Y = 0.929X+7.284$

$\therefore$ X–ன் மீது Y–ன் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடு $Y = 0.929X + 7.284$

எடுத்துக்காட்டு 9.10

கீழேத் தரப்பட்டுள்ள விவரத்திற்கு X மற்றும் Y–ன் சராசரிகளிலிருந்து விலக்கம் கண்டு Y–ன் மீதான X மற்றும் X–ன் மீதான Y–ன் இரு தொடர்புப் போக்குக் கெழுக்களைக் காண்க.

விலை (ரூபாய்களில்)	10	12	13	12	16	15
தேவைப்படும் அளவு	40	38	43	45	37	43

விலை ₹ 20 எனும்போது எதிர் பார்க்கப்படும் தேவையை மதிப்பிடுக.

தீர்வு:

X	$x = (X-13)$	x^2
10	–3	9
12	–1	1
13	0	0
12	–1	1
16	3	9
15	2	4
$\sum X = 78$	$\sum x = 0$	$\sum x^2 = 24$

Y	$y = (Y-41)$	y^2	xy
40	–1	1	3
38	–3	9	3
43	2	4	0
45	4	16	–4
37	–4	16	–12
43	2	4	4
$\sum Y = 246$	$\sum y = 0$	$\sum y^2 = 50$	$\sum xy = -6$

அட்டவணை 9.8

(i) *Y*–ன் மீது *X*–ன் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடு

$$X-\overline{X} = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(Y-\overline{Y})$$

$$\overline{X} = \frac{78}{6} = 13,\quad \overline{Y} = \frac{246}{6} = 41$$

$$b_{xy} = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y} = \frac{\Sigma xy}{\Sigma y^2} = \frac{-6}{50} = -0.12$$

$X-13 = -0.12(Y-41)$

$X-13 = -0.12Y+4.92$

$X = -0.12Y+17.92$

09_11th_BM-STAT_Ch-9-TM.indd 238 08-12-2021 21:55:59

(ii) X–ன் மீது Y-ன் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடு

$$Y-\overline{Y} = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(X-\overline{X})$$

$$b_{yx} = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x} = \frac{\Sigma xy}{\Sigma x^2} = -\frac{6}{24} = -0.25$$

Y–41 = –0.25 (X–13)

Y–41 = –0.25 X+3.25

Y = –0.25 X+44.25

X= 20, எனில் Y- ன் மதிப்பு

Y = –0.25 (20)+44.25

= –5+44.25

= 39.25 (விலை ₹ 20 எனும் போது வாய்ப்புத் தேவை 39.25)

எடுத்துக்காட்டு 9.11

கீழ்க்கண்டவற்றிலிருந்து X –ன் மீது Y–ன் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடு மற்றும் X=55 எனும்போது Y–ன் மதிப்பீடு காண்க.

X	40	50	38	60	65	50	35
Y	38	60	55	70	60	48	30

தீர்வு:

X	Y	dx = (X–48)	dx^2	dy = (Y–50)	dy^2	dxdy
40	38	–8	64	–12	144	96
50	60	2	4	10	100	20
38	55	–10	100	5	25	–50
60	70	12	144	20	400	240
65	60	17	289	10	100	170
50	48	2	4	-2	4	-4
35	30	-13	169	-20	400	260
ΣX= 338	ΣY= 361	Σdx= 2	Σdx^2= 774	Σdy= 11	Σdy^2= 1173	$\Sigma dxdy$= 732

அட்டவணை 9.9

$$\overline{X} = \frac{\Sigma X}{N} = \frac{338}{7} = 48.29$$

$$\overline{Y} = \frac{\Sigma Y}{N} = \frac{361}{7} = 51.57$$

(i) X ன் மீது Y–ன் தொடர்புப் போக்குக் கெழு

$$b_{yx} = \frac{N\Sigma dx\,dy-(\Sigma dx)(\Sigma dy)}{N\,\Sigma dx^2-(\Sigma dx)^2}$$

$$= \frac{7(732)-(2)(11)}{7(774)-(2)^2}$$

$$= \frac{5124-22}{5418-4}$$

$$= \frac{5102}{5414}$$

= 0.942

b_{yx} = 0.942

(ii) X–ன் மீது Y–ன் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடு

$$Y-\overline{Y} = b_{yx}(X-\overline{X})$$

Y–51.57 = 0.942(X–48.29)

Y = 0.942X–45.49+51.57

= 0.942 × –45.49+51.57

Y = 0.942X+6.08

∴ X–ன் மீது Y–ன் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடு

Y= 0.942X+6.08

எனும்பொழுது Y–ன் மதிப்பீடு X= 55

Y = 0.942(55)+6.08=57.89

எடுத்துக்காட்டு 9.12

பின்வரும் தொடர்புப் போக்குச் சமன் பாட்டுகளிலிருந்து X, Y மாறிகளின் சராசரிகள் மற்றும் அவற்றிற்கிடையேயான ஒட்டுறவுக் கெழுவினை காண்க.

2Y–X–50 = 0

3Y–2X–10 = 0

தீர்வு:

2Y–X–50 = 0 ... (1)

3Y–2X–10 = 0 ... (2)

(1) யும் (2) யும் தீர்க்க

நாம் பெறுவது Y = 90

09_11th_BM-STAT_Ch-9-TM.indd 239 08-12-2021 21:56:02

$Y = 90$ என (1) ல் பிரதியிட

$X = 130$

ஆகையால் $\overline{X} = 130$ மற்றும் $\overline{Y} = 90$

ஒட்டுறவுக் கெழுவைக் கணக்கிடுதல்

(1) ஐ X–ன் மீது Y–ன் சமன்பாடாகக் கொள்க

$2Y = X+50$

$Y = \frac{1}{2}X+25 \quad b_{yx} = \frac{1}{2}$

(2) ஐ Y ன் மீது X ன் சமன்பாடாகக் கொள்க

$3Y-2X-10 = 0$

$2X = 3Y-10$

$X = \frac{3}{2}Y-5 \quad b_{xy} = \frac{3}{2}$

ஒட்டுறவுக் கெழு $r = \pm\sqrt{b_{xy} \times b_{yx}}$

$r = \sqrt{\frac{1}{2} \times \frac{3}{2}} = 0.866$

குறிப்பு

மேலேக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளக் கணக்கில் ஒரு தொடர்புப் போக்குக் கெழுவின் மதிப்பு ஒன்றை விடப் பெரியதாகவும் மற்றும் மற்றொரு கெழுவின் மதிப்பு ஒன்றை விட சிறியதாகவும் இருப்பதைக் கவனிக்கலாம். எனவே கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகளின் மீதான நம்முடைய அனுமானம் சரியானது ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 9.13

மாறிகள் X, Y–ன் சராசரிகளையும் அவற்றிக்கிடையேயான ஒட்டுறவுக் கெழுவையும் கீழேக் கொடுக்கப்பட்டுள்ள இரு தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடுகளிலிருந்து காண்க.

$4X-5Y+33 = 0$

$20X-9Y-107 = 0$

தீர்வு:

$4X-5Y+33 = 0 \qquad \ldots (1)$

$20X-9Y-107 = 0 \qquad \ldots (2)$

எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

சமன்பாடுகள் (1) மற்றும் (2) ஐ தீர்க்க,

நாம் பெறுவது $Y = 17$

Y–ன் மதிப்பை சமன்பாடு (1)–ல் பிரதியிட,

நாம் பெறுவது $X=13$

எனவே $\overline{X} = 13$ மற்றும் $\overline{Y} = 17$

ஒட்டுறவுக் கெழுவைக் கணக்கிடுதல்

சமன்பாடு (1) என்பதனை Y–ன் மீது X–ன் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடு என்க.

$4X = 5Y-33$

$X = \frac{1}{4}(5Y-33)$

$X = \frac{5}{4}Y-\frac{33}{4}$

$b_{xy} = \frac{5}{4} = 1.25$

சமன்பாடு (2) என்பதனை X–ன் மீது Y–ன் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடு என்க.

$9Y = 20X-107$

$Y = \frac{1}{9}(20X-107)$

$Y = \frac{20}{9}X-\frac{107}{9}$

$b_{yx} = \frac{20}{9} = 2.22$

ஆனால் இது சாத்தியமல்ல ஏனெனில் இரண்டு தொடர்புப் போக்குக் கெழுக்களின் மதிப்புமே, ஒன்றை விட பெரியதாக இருக்கிறது. எனவே நம்முடைய மேற்கண்ட அனுமானம் தவறு. எனவே சமன்பாடு (1) என்பதனை X–ன் மீது Y–ன் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடு எனவும் மற்றும் சமன்பாடு (2) என்பதனை Y–ன் மீது X–ன் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடு எனவும் கருதவும். ஆதலால் நாம் பெறுவது,

$b_{yx} = \frac{4}{5} = 0.8$ மற்றும் $b_{xy} = \frac{9}{20} = 0.45$

ஒட்டுறவுக் கெழு $r = \pm\sqrt{b_{xy} \times b_{xy}}$

$r = \sqrt{0.45 \times 0.8} = 0.6$

எடுத்துக்காட்டு 9.14

கீழ்கண்ட அட்டவணை விற்பனை மற்றும் விளம்பரச் செலவுகளைக் காண்பிக்கிறது.

விவரங்கள்	விற்பனை	விளம்பரச் செலவு (₹ கோடிகளில்)
சராசரி	40	6
திட்ட விலக்கம்	10	1.5

ஒட்டுறவுக் கெழு $r = 0.9$. தீர்மானிக்கப்பட்ட விளம்பரச் செலவு ₹ 10 கோடி. எனில், விற்பனையை மதிப்பீடு செய்க.

தீர்வு:

X என்பது விற்பனை மற்றும் Y என்பது விளம்பர செலவு என்க

$\overline{X}=40, \overline{Y}=6, \sigma_x=10, \sigma_y=1.5$ மற்றும் $r=0.9$ என கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

y–ன் x-ன் மீது தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடு

$$X-\overline{X} = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(Y-\overline{Y})$$

$$X-40 = (0.9)\frac{10}{1.5}(Y-6)$$

$$X-40 = 6Y-36$$

$$X = 6Y+4$$

விளம்பரச் செலவு ₹ 10 கோடி அதாவது $Y = 10$ எனில், விற்பனை $X = 6(10)+4 = 64$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 9.15

இரண்டு குறியீட்டு எண்களின் வரிசைகள் உள்ளன. P என்பது விலை குறியீட்டையும் மற்றும் S என்பது பொருட்களின் இருப்பையும் குறிக்கிறது. P–ன் சராசரி மற்றும் திட்டவிலக்கங்கள் முறையே 100 மற்றும் 8 ஆகும். S –ன் சராசரி மற்றும் திட்டவிலக்கங்கள் முறையே 103 மற்றும் 4. இரண்டு குறியீட்டு எண்களின் வரிசைக்கு இடையேயான ஒட்டுறவு கெழு 0.4. இவ்விவரங்களை கொண்டு, S ன் மீது P ன் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடு மற்றும் P ன் மீது S–ன் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடு ஆகியவற்றைக் காண்க.

தீர்வு:

X என்பது P–ன் விலை மற்றும் Y என்பது S –ன் இருப்பு என்க.

P–ன் சராசரி மற்றும் திட்டவிலக்கங்கள் ஆகியவை முறையே $\overline{X}=100$, $\sigma_x=8$. மேலும் S–ன் சராசரி மற்றும் திட்டவிலக்கங்கள் முறையே $\overline{Y} = 103$, $\sigma_Y = 4$ என கருதவும். இரண்டு வரிசைக்கு இடையேயான ஒட்டுறவுக் கெழு $r(X,Y) = 0.4$ ஆகும்.

Y–ன் மீது X–ன் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடு

$$X-\overline{X} = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(Y-\overline{Y})$$

$$X-100 = (0.4)\frac{8}{4}(Y-103)$$

$$X-100 = 0.8(Y-103)$$

$X-0.8Y-17.6 = 0$ அல்லது $X = 0.8Y+17.6$

X–ன் மீது Y–ன் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடு $Y-\overline{Y} = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(X-\overline{X})$

$$Y-103 = (0.4)\frac{4}{8}(X-100)$$

$$Y-103 = 0.2(X-100)$$

$$Y-103 = 0.2X-20$$

$Y = 0.2X+83$ அல்லது $0.2X-Y+83=0$

எடுத்துக்காட்டு 9.16

5 இணைகளின் உறுப்புகளுக்கான முடிவுகள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. $\Sigma X=15$, $\Sigma Y=25$, $\Sigma X^2=55$, $\Sigma Y^2=135$, $\Sigma XY=83$ தொடர்புப் போக்குக் கோடுகளின் சமன்பாடுகள் காண்க. மேலும் முதல் கோட்டில் $Y=12$ எனில் X-ன் மதிப்பும் இரண்டாம் கோட்டில் $X=8$ எனில் Y–ன் மதிப்பு ஆகியவற்றைக் காண்க.

தீர்வு:

இங்கு $N=5$, $\overline{X} = \frac{\Sigma X}{N} = \frac{15}{5} = 3$,

$\overline{Y} = \frac{\Sigma Y}{N} = \frac{25}{5} = 5$ மற்றும்

தொடர்புப் போக்குக் கெழு

$$b_{xy} = \frac{N\Sigma XY - \Sigma X\Sigma Y}{N\Sigma Y^2 - (\Sigma Y)^2} = \frac{5(83)-(15)(25)}{5(135)-(25)^2} = 0.8$$

09_11th_BM-STAT_Ch-9-TM.indd 241 08-12-2021 21:56:07

Y–ன் மீது X–ன் தொடர்புப் போக்கு சமன்பாடு

$$X-\overline{X} = b_{xy}(Y-\overline{Y})$$
$$X-3 = 0.8(Y-5)$$
$$X = 0.8\,Y-1$$

$Y=12$, எனும் பொழுது X–ன் மதிப்பீடு

$$X = 0.8\,(12)-1=8.6$$

தொடர்புப் போக்குக் கெழு

$$b_{yx} = \frac{N\Sigma XY-\Sigma X\Sigma Y}{N\Sigma X^2-(\Sigma X)^2}$$
$$= \frac{5(83)-(15)(25)}{5(55)-(15)^2}=0.8$$

இவ்வாறாக $b_{yx}=0.8$ எனில் X–ன் மீது Y–ன் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடு

$$Y-\overline{Y} = b_{yx}(X-\overline{X})$$
$$Y-5 = 0.8(X-3)$$
$$Y = 0.8X+2.6$$

$X=8$ எனும் பொழுது Y–ன் மதிப்பீடு

$$Y = 0.8(8)+2.6$$
$$Y = 9$$

எடுத்துக்காட்டு 9.17

இரண்டு தொடர்புப் போக்குக் கோடுகள் என்பன $3X+2Y=26$ மற்றும் $6X+3Y=31$ ஆகும். ஒட்டுறவுக் கெழுவைக் காண்க.

தீர்வு:

X–ன் மீது Y–ன் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடு

$$3X+2Y = 26$$
$$2Y = -3X+26$$
$$Y = \frac{1}{2}(-3X+26)$$
$$Y = -1.5X+13$$
$$r\frac{\sigma_y}{\sigma_x} = -1.5$$
$$b_{yx} = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}=-1.5$$

Y–ன் மீது X–ன் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடு

$$6X+3Y = 31$$
$$X = \frac{1}{6}(-3Y+31)=-0.5Y+5.17$$
$$r\frac{\sigma_x}{\sigma_y} = -0.5$$
$$b_{xy} = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}=-0.5$$
$$r = \pm\sqrt{b_{xy}.b_{yx}}$$
$$= -\sqrt{(-1.5).(-0.5)}$$

(அதாவது இரண்டு தொடர்பு போக்குக் கெழுக்களும் r–ம் குறை குறியீடு பெற்றதாக இருக்கும்.)

$$\therefore \quad r = -0.866$$

எடுத்துக்காட்டு 9.18

ஒட்டுறவு ஆய்வின் மீதான ஆய்வகச் சோதனையில் கிடைக்கப்பெற்ற இரண்டு தொடர்பு சமன்பாடுகள் $2X-Y+1=0$ மற்றும் $3X-2Y+7=0$ ஆகும். X மற்றும் Y ஆகியவற்றின் சராசரியைக் காண்க. மேலும் X மற்றும் Y ஆகியவற்றின் தொடர்பு போக்குக் கெழுக்கள் மற்றும் ஒட்டுறவுக் கெழு காண்க.

தீர்வு:

இரண்டு தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க நமக்கு X மற்றும் Y ஆகியவற்றின் சராசரிகள் கிடைக்கும்

$$2X-Y = -1 \qquad \ldots (1)$$
$$3X-2Y = -7 \qquad \ldots (2)$$

சமன்பாடு (1) மற்றும் (2)–லிருந்து நாம் பெறுவது $X=5$ மற்றும் $Y=11$

எனவே, தொடர்புப் போக்கு சமன்பாடுகள் $\overline{X}=5$ மற்றும் $\overline{Y}=11$ சராசரிகளின் வழியே செல்கிறது.

X–ன் மீது Y–ன் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடு

$$3X-2Y=-7$$
$$2Y = 3X+7$$
$$Y = \frac{1}{2}(3X+7)$$

09_11th_BM-STAT_Ch-9-TM.indd 242 08-12-2021 21:56:09

$$Y = \frac{3}{2}X+\frac{7}{2}$$

$$\therefore b_{yx} = \frac{3}{2}(>1)$$

Y–ன் மீது X–ன் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடு

$$2X-Y = -1$$

$$2X = Y-1$$

$$X = \frac{1}{2}(Y-1)$$

$$X = \frac{1}{2}Y-\frac{1}{2}$$

$$\therefore b_{xy} = \frac{1}{2}$$

தொடர்ப்புப் போக்கு கெழுக்கள் மிகை மதிப்பை பெற்றிருக்கும்.

$$r = \pm\sqrt{b_{xy}.b_{yx}} = \pm\sqrt{\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{3}{4}}$$

$$= 0.866$$

$$\therefore r = 0.866$$

எடுத்துக்காட்டு 9.19

$3X-2Y=5$ மற்றும் $X-4Y=7$ என்ற தொடர்புப் போக்குக் கோடுகளுக்கு

(i) தொடர்பு போக்குக் கெழுக்கள் மற்றும்

(ii) ஒட்டுறவுக் கெழு ஆகியவற்றைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

தீர்வு:

(i) முதலில் கொடுக்கப்பட்ட X–ன் மீது Y–ன் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடு மற்றும் Y–ன் மீது X–ன் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடு ஆகியவற்றை இயல்பான வடிவில் மாற்றியமைக்கவும். பின்பு தொடர்பு போக்குக் கெழுக்களை கண்டுபிடிக்கவும்.

கொடுக்கப்பட்டுள்ள தொடர்புப் போக்குக் கோடுகள்

$$3X-2Y = 5 \quad \ldots (1)$$

$$X-4Y = 7 \quad \ldots (2)$$

X–ன் மீது Y–ன் தொடர்புப் போக்கு $3X-2Y = 5$ என்க.

$$3X = 2Y+5$$

$$X = \frac{1}{3}(2Y+5)$$

$$X = \frac{1}{3}(2Y+5)$$

$$X = \frac{2}{3}Y+\frac{5}{3}$$

Y–ன் மீது X–ன் தொடர்புப் போக்குக் கெழு

$$b_{xy} = \frac{2}{3}(<1)$$

X–ன் மீது Y– ன் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடு

$$X-4Y = 7$$

$$-4Y = -X+7$$

$$4Y = X-7$$

$$Y = \frac{1}{4}(X-7)$$

$$Y = \frac{1}{4}X-\frac{7}{4}$$

$\therefore X$–ன் மீது Y தொடர்புப் போக்குக் கெழு

$$b_{yx} = \frac{1}{4}(<1)$$

(ii) **ஒட்டுறவுக் கெழு (Coefficient of correlation)**

இரண்டு தொடர்புப் போக்குக் கெழுக்களும் மிகை குறியீடு பெற்றிருப்பதால் r–ம் மிகை குறியீடு பெற்றதாக இருக்கும் மற்றும்

$$r = \sqrt{b_{yx}.\ b_{xy}}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{3}.\frac{1}{4}}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{6}}$$

$$= 0.4082$$

$$\therefore r = 0.4082$$

பயிற்சி 9.2

1. கீழே தரப்பட்ட விவரங்களிலிருந்து

பொருளியலில் மதிப்பெண்கள்	25	28	35	32	31	36	29	38	34	32
புள்ளியியலில் மதிப்பெண்கள்	43	46	49	41	36	32	31	30	33	39

(a) இரண்டு தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடுகள்.

(b) பொருளியல் மற்றும் புள்ளியியல் பாடங்களின் மதிப்பெண்களுக்கு இடையேயான ஒட்டுறவுக் கெழு.

(c) பொருளியலில் 30 மதிப்பெண்கள் பெற்ற நிலையில் புள்ளியியலில் பெரிதும் பெற வாய்ப்பான மதிப்பெண் ஆகியவற்றைக் காண்க.

2. தந்தையர் மற்றும் அவர்தம் மகன்களின் உயரங்கள் (செ.மீ–ல்) கீழேக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

தந்தையின் உயரம்:	158	166	163	165	167	170	167	172	177	181
அவர்தம் மகனின் உயரம்:	163	158	167	170	160	180	170	175	172	175

இவற்றிக்கான தொடர்புப் போக்குக் கோடுகளைக் காண்க. மேலும் தந்தையின் உயரம் 164 செ.மீ எனும்போது மகனின் உயரத்தை மதிப்பிடுக.

3. 17 வயது மாணவர்களின் குழுவிலிருந்து 10 மாணவர்கள் கொண்டக் கூறில், உயரம் (அங்குலங்களில்) X மற்றும் Y நிறை (பவுண்ட்) உள்ள விவரங்கள் பின்வருமாறு

X	61	68	68	64	65	70	63	62	64	67
Y	112	123	130	115	110	125	100	113	116	125

69 அங்குலம் உயரம் உள்ள மாணவனின் நிறையை மதிப்பிடுக.

4. பின்வரும் விவரங்களுக்கான இரு தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடுகளைக் கணக்கிடுக. $N=20$, $\sum X=80$, $\sum Y=40$, $\sum X^2=1680$, $\sum Y^2=320$ மற்றும் $\sum XY=480$

5. கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களுக்கு, மழைப் பொழிவு 29 எனில், இயலக்கூடிய விளைச்சல் என்ன.

விவரங்கள்	மழைப்பெழிவு	விளைச்சல்
சராசரி	25``	ஓர் ஏக்கருக்கு 40 அலகுகள்
திட்ட விலக்கம்	3``	ஓர் ஏக்கருக்கு 6 அலகுகள்

மழைப்பொழிவு மற்றும் விளைச்சலுக்கான ஒட்டுறவு கெழு 0.8 ஆகும்.

6. பின்வரும் விவரங்கள் குறிப்பது, விளம்பர செலவு (₹ லட்சங்களில்) அவற்றுடன் தொடர்புடைய விற்பனைகள் (₹ கோடிகளில்)

விளம்பர செலவு	40	50	38	60	65	50	35
விற்பனைகள்	38	60	55	70	60	48	30

விளம்பர செலவு ₹ 30 லட்சங்கள் எனும் போது தொடர்புடைய விற்பனையை மதிப்பிடுக.

7. பின்வரும் விவரங்கள் கீழேக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

விவரங்கள்	X	Y
சராசரி	36	85
திட்ட விலக்கம்	11	8

X மற்றும் Y களுக்கு இடையேயான ஒட்டுறவுக் கெழு 0.66 எனில்

(i) இரு தொடர்புப் போக்குக் கெழுக்கள்

(ii) $X=10$ எனும் பொழுது பொருத்தமான Y–ன் மதிப்பு ஆகியவற்றைக் காண்க.

8. (X_i, Y_i) விவரங்கள் பின்வருவன (1,4) (2,8) (3,2) (4,12) (5, 10) (6, 14) (7, 16) (8, 6) (9, 18) எனில் X–ன் மீது Y–ன் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாட்டைக் காண்க.

09_11th_BM-STAT_Ch-9-TM.indd 244 08-12-2021 21:56:13

9. தங்குமிடம் செலவு (X) உணவு மற்றும் பொழுது போக்கு செலவு (Y) ஆகியவற்றிற்கிடையேயான தொடர்பு அறியும் வகையில் ஆய்வு நடத்தப்பட்டு, கண்டறியப்பட்ட ஆய்வில் முடிவுகள் பின்வறுமாறு:

விவரங்கள்	சராசரி	திட்டவிலக்கம்
தங்குமிடம் செலவு (₹)	178	63.15
உணவு மற்றும் பொழுது போக்கு செலவு (₹)	47.8	22.98
ஒட்டுறவுக் கெழு	0.43	

தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடு காண்க. மேலும், தங்குமிடம் செலவு ₹ 200 எனில் உணவு மற்றும் பொழுது போக்கு மீதான இயலக்கூடிய செலவை காண்க.

10. X மற்றும் Y மாறிகளின் 5 விவரங்களின் (X,Y)–க்கான பெறப்பட்ட பின்வரும் முடிவுகள் $\sum X=15$, $\sum Y=25$, $\sum X^2=55$, $\sum Y^2=135$, $\sum XY=83$. தொடர்புப் போக்கு கோடுகளின் சமன்பாடுகள் காண்க. மேலும் $Y = 8$ எனில் இயலக்கூடிய X–ம், $X = 12$ எனில் இயலக்கூடிய Y–ம் காண்க.

11. கண்டறியப்பட்ட இரு தொடர்பு போக்கு $4X-5Y+33=0$ மற்றும் $20X-9Y-107=0$. X ,Yக்கு இடையிலான சராசரி மதிப்புகள் மற்றும் ஒட்டுறவுக்கெழு ஆகியவற்றைக் காண்க.

12. ஒட்டுறவுக்கெழு பகுப்பாய்வின் இரு தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடுகளாவன $2X=8-3Y$ மற்றும் $2Y=5-X$ ஆகும். தொடர்புப் போக்குக் கெழுக்கள் மற்றும் ஒட்டுறவுக் கெழு ஆகியவற்றைக் காண்க.

பயிற்சி 9.3

சரியான விடையைத் தேர்ந்தெடுத்து எழுதுக.

1. பின்வருனவற்றில் எவை நேரிடை ஒட்டுறவுக்கான எடுத்துக்காட்டாகும்?
   (a) வருவாய் மற்றும் செலவு
   (b) விலை மற்றும் தேவை
   (c) திருப்பிச் செலுத்தும் காலம் மற்றும் சுலப மாதத் தவணை
   (d) நிறை மற்றும் வருவாய்

2. இரு மாறிகளின் மதிப்புகள் ஒரே திசையில் நகரும் எனில் ஒட்டுறவு
   (a) எதிரிடை
   (b) நேரிடை
   (c) முழுமையான நேரிடை
   (d) ஒட்டுறவு இன்மை

3. இரு மாறிகளின் மதிப்புகள் எதிர்த்திசையில் நகரும் எனில் ஒட்டுறவு
   (a) எதிரிடை
   (b) நேரிடை
   (c) முழுமையான நேரிடை
   (d) ஒட்டுறவு இன்மை

4. ஒட்டுறவுக் கெழு அமைவது
   (a) 0 முதல் ∞ வரை
   (b) -1 முதல் $+1$
   (c) -1 முதல் 0
   (d) -1 முதல் ∞

5. $r(X,Y) = 0$ எனில் மாறிகள் X மற்றும் Y பெற்றிருப்பது
   (a) நேரிடை ஒட்டுறவு
   (b) எதிரிடை ஒட்டுறவு
   (c) ஒட்டுறவு இன்மை
   (d) முழுமையான நேரிடை ஒட்டுறவு

09_11th_BM-STAT_Ch-9-TM.indd 245 08-12-2021 21:56:13

6. $N=25$, $\sum X=125$, $\sum Y=100$, $\sum X^2=650$, $\sum Y^2=436$, $\sum XY=520$ என்ற விவரங்களில் இருந்து ஒட்டுறவுக் கெழுவானது

(a) 0.667 (b) –0.006

(c) –0.667 (d) 0.70

7. $N=11$, $\sum X=117$, $\sum Y=260$, $\sum X^2=1313$, $\sum Y^2=6580$, $\sum XY=2827$ என்ற பின்வரும் விவரங்களிலிருந்து ஒட்டுறவுக் கெழுவானது

(a) 0.3566 (b) –0.3566

(c) 0 (d) 0.4566

8. ஒட்டுறவுக் கெழு என்பது

(a) $r(X,Y)=\dfrac{\sigma_x\sigma_y}{\text{cov}(x,y)}$

(b) $r(X,Y)=\dfrac{\text{cov}(x,y)}{\sigma_x\sigma_y}$

(c) $r(X,Y)=\dfrac{\text{cov}(x,y)}{\sigma_y}$

(d) $r(X,Y)=\dfrac{\text{cov}(x,y)}{\sigma_x}$

9. தாக்கத்தை ஏற்படுத்தக் கூடிய அல்லது கணித்துச் சொல்லப்படக் கூடிய மாறி என்பது

(a) சார்ந்த மாறி

(b) சார்பற்ற மாறி

(c) தொடர்புப் போக்கு

(d) விளக்கமளிக்கும் மாறி ஆகும்

10. தாக்கத்தை ஏற்படுத்தக் கூடிய அல்லது கணித்துச் சொல்வதற்கு பயன்படுத்தப்படக் கூடிய மாறி

(a) சார்ந்த மாறி

(b) சார்பற்ற மாறி

(c) விளக்கமளிக்கும் மாறி

(d) தொடர்புப் போக்குடையது

11. ஒட்டுறவுக் கெழுவானது

(a) $r=\pm\sqrt{b_{xy}\times b_{yx}}$

(b) $r=\dfrac{1}{b_{xy}\times b_{yx}}$

(c) $r=b_{xy}\times b_{yx}$

(d) $r=\pm\sqrt{\dfrac{1}{b_{xy}\times b_{yx}}}$

12. Y– ன் மீதான X– ன் ஒட்டுறவுக் கெழு

(a) $b_{xy}=\dfrac{N\Sigma dx\,dy-(\Sigma dx)(\Sigma dy)}{N\,\Sigma dy^2-(\Sigma dy)^2}$

(b) $b_{yx}=\dfrac{N\Sigma\,dx\,dy-(\Sigma dx)(\Sigma dy)}{N\,\Sigma dy^2-(\Sigma dy)^2}$

(c) $b_{yx}=\dfrac{N\Sigma dxdy-(\Sigma dx)(\Sigma dy)}{N\,\Sigma dx^2-(\Sigma dx)^2}$

(d) $b_{xy}=\dfrac{N\Sigma xy-(\Sigma x)(\Sigma y)}{\sqrt{N\Sigma x^2-(\Sigma x)^2}\times\sqrt{N\Sigma y^2-(\Sigma y)^2}}$

13. X ன் மீதான Y –ன் ஒட்டுறவுக் கெழு

(a) $b_{xy}=\dfrac{N\Sigma dx\,dy-(\Sigma dx)(\Sigma dy)}{N\,\Sigma dy^2-(\Sigma dy)^2}$

(b) $b_{yx}=\dfrac{N\Sigma dxdy-(\Sigma dx)(\Sigma dy)}{N\Sigma dy^2-(\Sigma dy)^2}$

(c) $b_{xy}=\dfrac{N\Sigma dx\,dy-(\Sigma dx)(\Sigma dy)}{N\Sigma dx^2-(\Sigma dx)^2}$

(d) $b_{xy}=\dfrac{N\Sigma xy-(\Sigma x)(\Sigma y)}{\sqrt{N\Sigma x^2-(\Sigma x)^2}\times\sqrt{N\Sigma y^2-(\Sigma y)^2}}$

14. ஒரு தொடர்புப் போக்குக் கெழு குறையாக இருக்கும் நிலையில் மற்றொன்று

(a) குறை (b) மிகை

(c) பூச்சியம்

(d) இவற்றில் ஏதுமில்லை

15. X மற்றும் Y என்பன இரு மாறிகள் எனில் அதிக பட்சமாக இருப்பது

(a) ஒரு தொடர்புப் போக்குக் கோடு

(b) இரண்டு தொடர்புப் போக்குக் கோடுகள்

(c) மூன்று தொடர்புப் போக்குக் கோடுகள்

(d) பல தொடர்புப் போக்குக் கோடுகள்

16. Y–ன் மீதான X–ன் தொடர்புப் போக்குக் கோடு மதிப்பிடுவது

(a) கொடுக்கப்பட்ட Y –ன் மதிப்பிற்கு X

(b) கொடுக்கப்பட்ட X –ன் மதிப்பிற்கு Y

09_11th_BM-STAT_Ch-9-TM.indd 246 08-12-2021 21:56:17

(c) Y–லிருந்து X மற்றும் X–லிருந்து Y

(d) இவற்றில் ஏதுமில்லை

17. (X,Y) மாறிகளின் மதிப்புகளின் சிதறல் விளக்கப்படம் விளக்கும் கருத்தானது

(a) சார்புகளின் மீதான தொடர்பு

(b) தொடர்புப் போக்கு வடிவம்

(c) பிழைகளின் பரவல்

(d) தொடர்பு இன்மை

18. X–ன் மீதான Y–ன் தொடர்புப் போக்கு கெழு 2 எனில், Y–ன் மீதான X–ன் தொடர்புப் போக்கு கெழு

(a) $\leq \frac{1}{2}$ (b) 2

(c) $> \frac{1}{2}$ (d) 1

19. இரண்டு மாறிகள் இறங்கு திசையில் நகர்கிறது எனில் ஒட்டுறவுக் கெழுவானது

(a) நேரிடை

(b) எதிரிடை

(c) முழுமையான எதிரிடை

(d) ஒட்டுறவு இன்மை

20. X மற்றும் Y என்ற இரு மாறிகளுக் கிடையேயான நேர்க்கோட்டு தொடர்பின் அளவை அளவிடும் கணிதமுறையை அறிமுகப்படுத்தியவர்

(a) கார்ல் பியர்சன்

(b) ஸ்பியர்மென்

(c) கிரக்ஸ்டன் மற்றும் கௌடன்

(d) யா லன் சூ

21. தொடர்புப் போக்குக் கோடுகள் வெட்டிக் கொள்ளும் புள்ளி

(a) (X,Y) (b) $(\overline{X}, \overline{Y})$

(c) $(0,0)$ (d) (σ_x, σ_y)

22. தொடர்புப்போக்கைஅறிமுகப்படுத்தியவர்

(a) R.A பிஷர்

(b) சர்ஃபிரான்சிஸ் கால்டன்

(c) கார்ல் பியர்சன்

(d) இவர்களில் எவரும் இல்லை

23. $r=-1$, எனில் மாறிகளுக்கிடையேயான ஒட்டுறவுக் கெழு

(a) முழுமையான நேரிடையானது

(b) முழுமையான எதிரிடையானது

(c) எதிரிடையானது

(d) ஒட்டுறவு இன்மை

24. ஒட்டுறவுக் கெழு விவரிப்பது

(a) எண்ணளவு மற்றும் திசை

(b) எண்ணளவு மட்டும்

(c) திசை மட்டும்

(d) எண்ணளவு இல்லை மற்றும் திசை இல்லை

25. $Cov(x,y)=-16.5$, $\sigma_x^2=2.89$, $\sigma_y^2=100$. எனில் ஒட்டுறவு கெழுவைக் காண்க.

(a) -0.12 (b) 0.001

(c) -1 (d) -0.97

இதர கணக்குகள்

1. பின்வரும் விவரங்களுக்கு ஒட்டுறவுக் கெழுவினை காண்க.

X	35	40	60	79	83	95
Y	17	28	30	32	38	49

2. பின்வரும் விவரங்களிலிருந்து ஒட்டுறவுக்கு கெழுவினை கணக்கிடுக.

$\Sigma X=50$, $\Sigma Y=-30$, $\Sigma X^2=290$, $\Sigma Y^2=300$, $\Sigma XY=-115$, $N=10$

3. கீழேயுள்ள விவரங்களிலிருந்து ஒட்டுறவுக் கெழுவினைக் கணக்கிடுக.

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Y	9	8	10	12	11	13	14	16	15

4. பின்வரும் விவரங்களிலிருந்து ஒட்டுறவுக் கெழுவினைக் கணக்கிடுக.

$\Sigma X=125$, $\Sigma Y=100$, $\Sigma X^2=650$, $\Sigma Y^2=436$, $\Sigma XY=520$, $N=25$

09_11th_BM-STAT_Ch-9-TM.indd 247 08-12-2021 21:56:18

5. சமீபத்திய பழுது நீக்கு வேலைகள் சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டன. மேலும் எதிர்ப்பார்க்கப்பட்ட செலவு ,அசல் செலவு பதியப்பட்டுள்ளது.

மதிப்பிடப்பட்ட செலவு	30	45	80	25	50	97	47	40
அசல் செலவு	27	48	73	29	63	87	39	45

ஸ்பியர்மனின் ஒட்டுறவுக் கெழுவின் மதிப்பினைக் கணக்கிடுக

6. பின்வரும் ஒரு குறிப்பிட்ட தேர்வில் A மற்றும் B என்ற இரு பாடங்களின் மதிப்பெண்கள் தொடர்புடையவை A–ன் சராசரி மதிப்பெண் = 39.5. B–ன் சராசரி மதிப்பெண் = 47.5 A–ன் மதிப்பெண்களின் திட்ட விலக்கம் =10.8 மற்றும் B–ன் மதிபபெண்களின் திட்டவிலக்கம் = 16.8. A மற்றும் B ஆகியவற்றின் மதிப்பெண்களுக்கு இடையேயான ஒட்டுறவுக்கெழு 0.42. பாடம் A–ல் 51 மதிப்பெண்கள் பெற்ற மாணவன் பாடம் B–ல் எதிர்பார்க்கும் மதிப்பெண்ணை மதிப்பிடுக.

7. X மற்றும் Y என்பன தொடர்புபடுத்தப்பட்ட இணை மாறிகள். அவற்றின் 10 விபரங்களுக்கான முடிவுகள், $\sum X=55$, $\sum XY=350$, $\sum X^2=385$, $\sum Y=55$, X ன் மதிப்பு 6. Y ன் மதிப்பை தீர்மானிக்கவும்.

8. X-ன் மீது Y-ன் தொடர்புப் போக்குக் கோட்டின் சமன்பாடு காண்க.

X	1	2	3	4	5	8	10
Y	9	8	10	12	14	16	15

9. பின்வரும் விவரங்களை பயன்படுத்தி
(i) X–ன் மீது Y–ன் தொடர்புப் போக்குக் கோட்டின் சமன்பாடு காண்க.
(ii) சோதனைச் செலவு ₹ 82 எனும்பொழுது விநியோகிக்கப்பட்ட குறையுள்ள பொருட்களின் அளவை மதிப்பிடுக. $\sum X=424$, $\sum Y=363$, $\sum X^2=21926$, $\sum Y^2=15123$, $\sum XY=12815$, $N=10$. இங்கு X என்பது சோதனைச் செலவு, Y என்பது விநியோகிக்கப்பட்ட குறை பொருட்கள் ஆகும்.

10. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களுக்கு,

விவரங்கள்	X (₹)	Y (₹)
சராசரி	6	8
திட்ட விலக்கம்	5	$\frac{40}{3}$

X மற்றும் Y ஆகியவற்றின் ஒட்டுறவுக் கெழு $\frac{8}{15}$.

(i) X – ன் மீது Y–ன் தொடர்புப் போக்குக் கெழு

(ii) X = ₹ 100 எனும்போது மிகப் பொருத்தமான Y–ன் மதிப்பு ஆகியவற்றைக் காண்க.

நிகழ்வு ஆய்வு–1

திரு. பீன் 2018 ஆம் ஆண்டு மார்ச் மாதம் 1 ஆம் தேதி சென்னையில் திருவல்லிக்கேணியில் உள்ள ஒரு பல்பொருள் அங்காடிக்கு சென்று 15 வகையான உணவு வகைகளை தேர்ந்தெடுக்கிறார். அனைத்து வகையான உணவு பெட்டிகளிலிலும் சத்து விவரங்கள் பற்றிய தகவல் இடம்பெற்றுள்ளது. திரு பீன் ஒவ்வொரு உணவு பொருளையும் கண்டு அதில் பதிவு செய்யப்பட்டுள்ள கொழுப்பு (gm /100 gms) மற்றும் சோடியம் உள்ளடக்கம் (mgs/100gms) அளவை கண்டறிந்து பின்வருமாறு அட்டவணையில் பதிவு செய்துள்ளனர்.

வ. எண்.	உற்பத்தி பொருட்கள்	கொழுப்பு (gm / 100gms)	சோடியம் (mg / 100gms)
1	பேரீட்சை பழங்கள்	0.4	74.4
2	அப்பளம்	0.26	1440
3	சத்து பானம்	1.8	136
4	குளோப்ஜாமூன் பவுடர்	10.4	710
5	கோதுமை	2.2	4.97

09_11th_BM-STAT_Ch-9-TM.indd 248 08-12-2021 21:56:18

6	அத்தி பழங்கள்	0.14	2
7	உருளை – பச்சை பட்டாணி கலவை	5	440
8	பாப்கார்ன்	2.32	51.38
9	பெருங்காயம்	0.37	40
10	காளான்	31	11.73
11	பழரசம்	0.1	74
12	இனிப்பு மிட்டாய்	0.8	0.09
13	ரவை	9	575
14	பிஸ்கட்	19.7	498
15	நொருக்கு தீனி	33.5	821

மேலே குறிப்பிடப்பட்ட உணவு உள்ளடக்கங்களுக்கிடையில் சில புள்ளிவிவர உறவை திரு.பீன் நிர்மானிக்க விரும்புகிறார். ஆய்வுக்கு உட்படுத்தப்படும் மாறிகள் X மற்றும் Y முறையே ஒவ்வொரு உணவு பொருட்களின் கொழுப்பு உள்ளடக்கம் மற்றும் சோடியம் உள்ளடக்கத்தின் அளவு ஆகியவற்றைக் குறிக்கிறது. ஆகையால் திரு பீன் ஒவ்வொரு உணவு பொருட்களுக்கான ஒரு ஜோடி மதிப்புகள் (X , Y) பெறுகிறார். மேலும் திரு. பீன் அனைத்து 15 பொருட்களின் சராசரி கொழுப்பு உள்ளடக்கம் $\overline{X}$ =7.8 (gm/100gms) மற்றும் சராசரி சோடியம் உள்ளடக்கம் $\overline{Y}$ =325.23 (gm/100gms). என்பதை காண்கிறார். மேலும், பழச்சாறில் உள்ள கொழுப்பு குறைந்தபட்சம் அளவு 0.1(gm/100gms) என்று அறியப்பட்டது. இதனால் அனைத்து 15 உணவுகள் உள்ள கொழுப்பு 0.1 (gm/100 gms)-லிருந்து 33.5(gm/100gms) வரை உள்ளது. இதே போல், இனிப்பு மிட்டாயில் உள்ள சோடியம் உள்ளடக்கம் குறைந்தபட்ச அளவு 0.09 (mg/100gms) மற்றும் அப்பளத்தில் உள்ள சோடியம் உள்ளடக்கம் அதிகபட்ச அளவு 1440(mg/100gms).

ஆகையால் அனைத்து 15 பொருட்களின் கொழுப்பு உள்ளடக்கம் மற்றும் சோடியம் உள்ளடக்கம் ஆகியவற்றின் வீச்சு அளவை முறையே33.4gmமற்றும்1439.91(mg/100gms) அனைத்து விவரங்களின் சராசரியிலிருந்து ஒவ்வொரு தனி விவரத்தின் மாறுபாட்டை அறிய திரு. பீன் விரும்பினார். திட்ட விலக்கம் என அழைக்கப்படும் மற்றொரு சிதறல் அளவையை காண முயற்சி மேற்கொண்டார். அனைத்து 15 உணவு பொருட்களின் கொழுப்பு உள்ளடக்கத்தின் சராசரி விலக்கம் 11.3 (gm/100gm) மற்றும் சோடியம் உள்ளடக்கத்தின் சராசரி விலக்கம் 420.14 (mg/100gms) மேலும் திரு. பீன் மாறிகள் X மற்றும் Y ஆகியவற்றிற்கு இடையேயான தொடர்பைக் கண்டுபிடிப்பதில் ஆர்வம் கொண்டார். எனவே ஒட்டுறவு பகுப்பாய்வு மேற்கொள்ளப்பட்டது. ஒட்டுறவுக் கெழு $r(X,Y)=0.2285$ என்பது சோடியம் உள்ளடக்கம் மற்றும் கொழுப்பு உள்ளடக்கம் ஆகியவற்றிற்கிடையே 22.85% நேரிடையான தொடர்பு உள்ளதை குறிக்கிறது. இந்த ஆய்வில் இருந்து திரு. பீன் ஒவ்வொரு உணவு பொருளின் பெட்டிகளிலும் இடம் பெற்றுள்ள ஊட்டச்சத்து தகவல் போதுமானது என திருப்திப்படுவதாக அறிகிறார்.

நிகழ்வு ஆய்வு–2

2018 பிப்ரவரி 20 முதல் 2018 மார்ச் 1 வரையிலான பத்து நாட்களுக்கு இரு இடங்களில், சென்னை சந்தை மற்றும் மும்பை சந்தை ஆகியவற்றில் தங்கம் விலை (கிராமுக்கு) தொடர்பான விவரங்களை நாங்கள் சேகரித்தோம் மற்றும் அளவை கீழே பதியப்பட்டுள்ளது.

தேதி	சென்னை X	மும்பை Y
பிப்ரவரி 20	2927	2923
பிப்ரவரி 21	2912	2910
பிப்ரவரி 22	2919	2907
பிப்ரவரி 23	2912	2920
பிப்ரவரி 24	2921	2919
பிப்ரவரி 25	2921	2919
பிப்ரவரி 26	2927	2925
பிப்ரவரி 27	2924	2918
பிப்ரவரி 28	2908	2902
மார்ச் 1	2893	2895

09_11th_BM-STAT_Ch-9-TM.indd 249 08-12-2021 21:56:19

சென்னை சந்தையில் தங்கத்தின் விலை அதன் தாக்கத்தை மும்பை சந்தையின் மீது ஏற்படுத்தும் என்பதை நாம் ஒத்துக்கொள்ள இயலுமா?

சென்னை சந்தையில் தங்கத்தின் விலை (கிராமுக்கு) X எனவும் மும்பை சந்தையில் தங்கத்தின் விலை (கிராமுக்கு) Y எனவும் கொள்க. மேற்கண்ட அட்டவணையில் தரப்பட்ட விவரத்திலிருந்து சென்னை சந்தையில் தங்கத்தின் விலையின் ஏற்றம் ₹2893 (கிராமுக்கு) லிருந்து ₹ 2927 (கிராமுக்கு) வரையும் மும்பை சந்தையில் தங்கத்தின் விலையில் ஏற்றம் ₹2895 (கிராமுக்கு) –லிருந்து ₹2925 (கிராமுக்கு) வரையும் உள்ளது. மேலும் பிப்ரவரி 20 முதல் பிப்ரவரி 24 வரையிலான தேதியிட்ட நாட்களில் தங்க விலை வீதத்தில் சில அலைவுகளும் பிப்ரவரி 24 மற்றும் 25. ஒரே மாதிரியாகவும் உள்ளது குறிப்பிடத்தக்கது. இது தங்க சந்தைகளுக்கு விடுமுறை காரணமாக இருக்கலாம். தங்க விலை வீதம் பிப்ரவரி 27 முதல் மார்ச் 1 வரை வேகமாக குறைவது அட்டவணையிலிருந்து தெளிவாகிறது. இதே போன்ற ஏற்ற இறக்கம் மும்பை சந்தையில் பிப்ரவரி 20 முதல் 24 ஆம் தேதி வரையும் 24 மற்றும் 25 ஆம் தேதிகளில் ஒரே மாதிரியாகவும், பிப்ரவரி 27 முதல் மார்ச் 1 வரை வேகமாகவும் குறைந்து வருகின்றன. எனவே, தங்க சந்தை வீதத்தில் சந்தை போக்கு இரண்டு சந்தைகளிலும் ஒரே நிலையில் உள்ளது. இந்த 10 நாட்களில் சென்னை சந்தையில் சராசரி தங்க விலை ₹2916.4 (கிராமுக்கு) மற்றும் மும்பை சந்தையில் சராசரி தங்க விலை ₹2913.8 (கிராமுக்கு) என்பதை நாம் காண்கிறோம்.

10 நாட்களில் தங்க விலைகளுக்கிடையேயான மாறுபாடு

அனைத்து விவரங்களின் சராசரியிலிருந்து ஒவ்வொரு தனி விவரத்தின் மாறுபாட்டை காண வேண்டும். திட்ட விலக்கத்தை சிறந்த அளவையாக நாம் பயன்படுத்தலாம். இந்த ஆய்வில், தங்கத்தின் விலையானது, சராசரி விலக்கமாக சென்னை சந்தையில் ₹ 10 (தோராயமாக) மும்பை சந்தையில் ₹ 9 (தோராயமாக) என தெரிய வருகிறது. இரண்டு நகரங்களுக்கும் இடையே உள்ள விலைகளின் நிலைத்தன்மையை சரிபார்க்க. மாறுபாட்டின் சதவீதத்தை வெளிப்படுத்துகின்ற மாறுவிகிதக் கெழுவை நாங்கள் முயற்சிக்கிறோம். சென்னை சந்தையில் தங்கத்தின் விலையின் மாறுவிகிதக் கெழுவானது

$$CV_X = \frac{\sigma_X}{\overline{X}} \times 100 = \frac{10}{2916.4} \times 100 = 0.343\%$$

இதே போல், மும்பை சந்தையில் தங்கத்தின் விலையின் மாறுவிகிதக் கெழுவானது

$$CV_Y = \frac{\sigma_Y}{\overline{Y}} \times 100 = \frac{9}{2913.8} \times 100 = 0.31\%$$

இக்கெழுக்களை ஒப்பிடுவதன் மூலம் மும்பை சந்தையில் தங்கத்தின் விலையானது, மிகவும் நிலையானதாக இருப்பதை நாம் கண்டறிந்துள்ளோம்.

மேலும் இரண்டு மாறிகள் X மற்றும் Y –க்கு இடையேயான நேர்கோட்டு உறவை ஆராய்வதற்கு ஒட்டுறவு பகுப்பாய்வு முடிவு $r(X,Y) = 0.8682$. என காண்கிறோம். இது மும்பை சந்தை மற்றும் சென்னை சந்தைக்கு இடையே தங்கத்தின் விலையில் நேரிடையான ஒட்டுறவு உள்ளது என்பதை இது குறிக்கிறது.

தொடர்புப் போக்குக் கோட்டை கண்டுபிடிப்பதை இங்கு அறிவுபூர்வமானதாக உணருகிறீர்களா?

09_11th_BM-STAT_Ch-9-TM.indd 250 08-12-2021 21:56:19

தொகுப்புரை

- ஒட்டுறவு என்பது இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட மாறிகளுக்கு இடையே உள்ள தொடர்பின் அளவை குறிக்கின்றது.
- சிதறல் வரைபடம் என்பது இரு மாறிகளுக்கு இடையேயான ஒட்டுறவை காணுவதற்கான ஒரு வரைபட கருவி ஆகும்.
- கார்ல் பியர்சனின் ஒட்டுறவுக் கெழு $r(x,y) = \frac{\text{cov}(X,Y)}{\sigma_x \sigma_y}$
- ஒட்டுறவுக் கெழு -1 லிருந்து $+1$ க்கு இடையே ஓர் மதிப்பைப் பெற்றிருக்கும். குறியீட்டில் $-1 \le r \le 1$
- $r=+1$, எனில் மாறிகளுக்கிடையேயான ஒட்டுறவு முழுமையான நேரிடை ஒட்டுறவு எனப்படும்.
- $r=-1$, எனில் மாறிகளுக்கிடையேயான ஒட்டுறவு முழுமையான எதிரிடை ஒட்டுறவு எனப்படும்.
- $r=0$, எனில் மாறிகளுக்கிடையே எவ்வித தொடர்பும் இல்லை அதாவது ஒட்டுறவு இல்லை எனலாம் .
- தர ஒட்டுறவு கருத்தியல் பண்பளவையின் குணங்கள் அளவிடுகிறது.
- ஸ்பியர்மெனின் தர ஒட்டுறவு கெழு சூத்திரம் (ρ)

  $\rho = 1 - \frac{6\Sigma d^2}{N(N^2-1)}$ இங்கு $d = R_X - R_Y$, N = இணை உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை
- ஒட்டுறவு மாறிகளின் இடையே உள்ள நேரிடை தொடர்பை விளக்குகின்றது. ஆனால் தொடர்புப் போக்கு ஒரு மாறியின் மதிப்பை பயன்படுத்தி மற்றொரு மாறியின் மதிப்பை கணக்கிட உதவுகின்றது.
- *(i)* Y –ன் மீதான X –ன் தொடர்புப் போக்குக் கோடு $X - \overline{X} = b_{xy}(Y - \overline{Y})$

  (ii) X –ன் மீதான Y –ன் தொடர்புப் போக்குக் கோடு $Y - \overline{Y} = b_{yx}(X - \overline{X})$
- இரண்டு தொடர்புப் போக்குக் கோடுகள், சராசரிகளின் வழியே செல்கின்றது.

  $b_{xy} = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}$ மற்றும் $b_{yx} = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}$ ஆகிய சூத்திரங்கள் மூலம் தொடர்புப் போக்குக் கெழுக்கள் கணக்கிடப்படுகின்றன.

09_11th_BM-STAT_Ch-9-TM.indd 251 08-12-2021 21:56:21

- ஒட்டுறவுக் கெழுவின் பண்புகள்

(i) $r = \sqrt{b_{yx} \times b_{xy}}$

(ii) இரண்டு தொடர்புப் போக்குக் கெழுக்களும் எண் ஒன்றை விட பெரியதாக இருக்க முடியாது.

(iii) இரண்டு தொடர்புப் போக்குக் கெழுக்களும் ஒரே குறியீட்டை உடையதாக இருக்கும்.

கலைச் சொற்கள் (GLOSSARY)	
அசாதாரனமான	Abnormal
இருமாறி பகுப்பாய்வு	Bivariate analysis
ஊகிக்கப்பட்ட சராசரி	Assumed Mean
எதிர்மறை ஒட்டுறவு	Negative Correlation
ஏற்ற இறக்கம்	fluctuate
ஒட்டுறவு	Corrleation
ஒருமாறி பகுப்பாய்வு	Univariate analysis
சமவாய்ப்பு மாறிகள்	Random variables
சார்ந்த மாறி	Relative Variable
தொடர்புப் போக்கு ஆய்வு	Regression analysis
தோராயமாக	Approximate
நேரிடை ஒட்டுறவு	Positive Correlation
பண்புகள்	Characteristics
பொருத்தமுடைய	Closeness
விலக்கம்	Deviations

09_11th_BM-STAT_Ch-9-TM.indd 252 08-12-2021 21:56:21