૫–સમાંતર શ્રેણી

સંકલન : રજનીકાંત સી. ચાવડા
આચાર્યશ્રી – શ્રી મુરલીધર માધ્યમિક શાળા
દાતાર રોડ, જુનાગઢ. મો. ૯૪૨૭૪ ૧૨૨૩૧

❖ **આટલું સમજીએ અને યાદ રાખીએ :**

- **સમાંતર શ્રેણી : જે શ્રેણી કોઈ નિશ્ચિત વાસ્તવિક સંખ્યાથી શરૂ થતી હોય અને તેના દરેક ક્રમિક પદની જોડમાં પદોનો તફાવત અચળ હોય તે શ્રેણીને સમાંતર શ્રેણી કહે છે.**
- સામાન્ય તફાવત ધન, ઋણ અથવા શૂન્ય હોઈ શકે છે.
- પ્રથમ પદ a અને સામાન્ય તફાવત d લેતાં, a, a + d, a + 2d, a + 3d + ... સમાંતર શ્રેણી દર્શાવે છે. જે સમાંતર શ્રેણીનું વ્યાપક સ્વરૂપ છે.
- **સાન્ત સમાંતર શ્રેણી : જે સમાંતર શ્રેણીમાં પદની સંખ્યા નિશ્ચિત હોય તેવી શ્રેણી સાન્ત સમાંતર શ્રેણી છે.**
  દા.ત. 1, 3, 5, 7 ....., 13 સાન્ત સમાંતર શ્રેણી છે.
- **અનંત સમાંતર શ્રેણી : જે સમાંતર શ્રેણીમાં પદની સંખ્યા અનંત (અનિશ્ચિત) હોય તેવી શ્રેણીને અનંત સમાંતર શ્રેણી કહે છે.**
  દા.ત. 1, 3, 5, 7 ..... અનંત સમાંતર શ્રેણી છે.
- સમાંતર શ્રેણીનું પ્રથમ પદ a_1, બીજું પદ a_2...n મું પદ a_n
  $\therefore$ સામાન્ય તફાવત $d = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = ...$
- **બે સંખ્યાઓ a અને b નો સમાંતર મધ્યક :**
  આપેલ બે સંખ્યા a અને b વચ્ચે સંખ્યા M મૂકવાથી જો a, M અને b સમાંતર શ્રેણી રચે, તો M એ a અને b નો સમાંતર મધ્યક છે.
  $\therefore M - a = b - M \quad \therefore 2M = a + b$
  $M = \dfrac{a+b}{2}$
- સમાંતર શ્રેણીનું પ્રથમ પદ a અને સામાન્ય તફાવત d હોય તે માટે શ્રેણીનું n મું પદ મેળવવાનું સૂત્ર
  $$a_n = a + (n-1)d$$
- સમાંતર શ્રેણી માટે છેલ્લેથી m મું પદ
  = શરૂઆતથી (n-m+1) મું પદ
- સમાંતર શ્રેણી માટે સામાન્ય તફાવત
  $d = \dfrac{a_m - a_n}{m-n}$ જ્યાં $m \neq n$
- **અનંત સમાંતર શ્રેણીના n પદોનો સરવાળો મેળવવાનું સૂત્ર :** $S_n = \dfrac{n}{2}[2a + (n-1)d]$
- **સાન્ત સમાંતર શ્રેણીના n પદોનો સરવાળો મેળવવાનું સૂત્ર :** $S_n = \dfrac{n}{2}[a + l]$
- S_n અને a_n વચ્ચેનો સંબંધ
  $a_n = S_n - S_{n-1}$ જ્યાં $n > 1$
- S_n પરથી a_n મેળવવા
  $a_n = xn + y$ જ્યાં $x = d$ અને $y = (a-d)$
  $S_n = \dfrac{x}{2}n^2 + \left(y + \dfrac{x}{2}\right)n$
- પ્રથમ n પ્રાકૃતિક (ધનપૂર્ણાંક) સંખ્યાઓનો સરવાળો
  $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$
- પ્રથમ n અયુગ્મ પ્રાકૃતિક (ધનપૂર્ણાંક) સંખ્યાઓનો સરવાળો $S_n = n^2$
- પ્રથમ n યુગ્મ પ્રાકૃતિક (ધનપૂર્ણાંક) સંખ્યાઓનો સરવાળો $S_n = n^2 + n$
- ફિબોનાકી શ્રેણી 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34 ....
- $T_n = S_n - S_{n-1}$
- સમાંતર શ્રેણી નક્કી કરવી સામાન્ય તફાવત શોધવો.

Ex. 1 11, 21, 31, 41 .... સમાંતર શ્રેણી છે કે નહી?

$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3$
$21 - 11 = 31 - 21 = 41 - 31 = 10$
$\therefore$ સામાન્ય તફાવત $d = 10$
આપેલ શ્રેણી સમાંતર શ્રેણી છે.

Ex. 1 ની રીતે સામાન્ય તફાવત શોધી શ્રેણી સમાંતર છે કે નહી નક્કી કરો.

(1) 5, 15, 25, 35, 45 .....
(2) 1, 11, 111, 1111, ...
(3) ટેક્સીનું ભાડું પ્રથમ કિલોમીટર માટે રૂા. 15 અને પછીના વધારાના પ્રત્યેક કિલોમીટર સાથે રૂા. 8 છે.
(4) 100, 99, 97, 95 .....
(5) 2, 2, 2, 2,.....

Ex. 2 સમાંતર શ્રેણીના પ્રથમ પદ અને સામાન્ય તફાવત શોધવા.

3, 1, -1, 3 , ...
પ્રથમ પદ a = 3
સામાન્ય તફાવત $d = 1-3 = -2 \Leftarrow$ Ans.

Ex. 2 ની રીતે a અને d શોધો.

(6) -5, -1, 3, 7 .....
(7) 0.6, 1.7, 2.8, 3.9 .....
(8) $\dfrac{1}{3}, \dfrac{5}{3}, \dfrac{9}{3}, \dfrac{13}{3}, ...$
(9) -7, -12, -17, -22, ...

- સમાંતર શ્રેણી છે કે નહી તે નક્કી કરવું અને સમાંતર શ્રેણી હોય તો આગળનું પદ શોધવું.

Ex. 3 $2, \dfrac{5}{2}, 3, \dfrac{7}{2} ....$

$a_2 - a_1 = \dfrac{5}{2} - 2 = \dfrac{5-4}{2} = \dfrac{1}{2}$

$a_3 - a_2 = 3 - \dfrac{5}{2} = \dfrac{6-5}{2} = \dfrac{1}{2}$

$a_4 - a_3 = \frac{7}{2} - 3 = \frac{7-6}{2} = \frac{1}{2}$

અહીં $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \frac{1}{2}$

∴ આપેલ શ્રેણી સમાંતર શ્રેણી છે. ⇐ Ans.

$\therefore a_5 = a_4 + d$

$= \frac{7}{2} + \frac{1}{2} = \frac{8}{2}$ **= 4 ⇐ Ans.**

Ex. 3 ની રીતે ગણો.

(10) 1, -1, -3, -5, ...

(11) -1.2, -3.2, -5.2, -7.2, ...

(12) $3, 3+\sqrt{2}, 3+2\sqrt{2}, 3+3\sqrt{2}, ...$

(13) 0.2, 0.22, 0.222, 0.2222 ....

(14) $\sqrt{2}, \sqrt{8}, \sqrt{18}, \sqrt{32}, ...$

(15) a, 2a, 3a, 4a, ...

(16) a, a^2, a^3, a^4, ...

(17) $\sqrt{3}, \sqrt{6}, \sqrt{9}, \sqrt{12}$, ...

- **પ્રથમ પદ a અને સામાન્ય તફાવત d ની કિંમત પરથી સમાંતર શ્રેણીના પ્રથમ ચાર પદ શોધવા.**

Ex. 4

a = -1.25 અને d = -0.25

$a_1 = a = -1.25$

$a_2 = a_1 + d = -1.25 - 0.25 = -1.50$

$a_3 = a_2 + d = -1.50 - 0.25 = -1.75$

$a_4 = a_3 + d = -1.75 - 0.25 = -2.00$

Ex. 4 ની રીતે નીચેનાની ગણતરી કરો.

(18) a = 10 અને d = 10

(19) a = -2 અને d = 0

(20) a = 4 અને d = -3

(21) a = -1 અને d = $\frac{1}{2}$

❖ **સમાંતર શ્રેણીના $a_n = a + (n-1)d$ સૂત્રનો ઉપયોગ :**

Ex. 5 a = 7, n = 8 અને a_n = 28 પરથી d શોધો.

$a_n = a + (n-1)d$

28 = 7 + (8-1)d

28 - 7 = 7d

21 = 7d $\therefore d = \frac{21}{7} = 3$ ⇐**Ans.**

(22) a = -18, n = 10 અને a_n = 0 પરથી d શોધો.

(23) d = -3, n = 18 અને a_n = -5 પરથી a શોધો.

(24) a = -18.9, d = 2.5 અને a_n = 3.6 પરથી n શોધો.

(25) a = 3.5, d = 0 અને n = 105 પરથી a_n શોધો.

(26) -3, $-\frac{1}{2}$, 2, ... નું 11 મું પદ શોધો.

(27) -4, ..., ..., ..., ..., 6 ના ખાલી જગ્યાવાળા પદ શોધો.

(28) 7, 3, 19, ..., 205 ના પદોની સંખ્યા શોધો.

(29) બે અંકની કેટલી સંખ્યાઓ 3 વડે વિભાજ્ય હશે?

(30) કોઇ સમાંતર શ્રેણીમાં 17 મું પદ 10 કરતાં 7 વધુ છે. તેનો સામાન્ય તફાવત શોધો.

(31) સમાંતર શ્રેણી 3, 15, 27, 39 .... નું ક્યું પદ તેના 54 માં પદથી 132 વધુ હશે?

(32) સમાંતર શ્રેણી 21, 18, 15 ..... નું ક્યું પદ -81 હશે? વળી કોઇ પદ શૂન્ય હોય? સકારણ જવાબ આપો.

(33) રામકલ્લી વર્ષના પ્રથમ અઠવાડીયે રૂા. 5 ની બચત કરે છે અને પછી તેની અઠવાડિક બચત રૂા. 1.75 નો વધારો કરે છે. જો n માં અઠવાડીયે તેમની બચત રૂા. 20.75 હોય તો n નું મૂલ્ય શોધો.

❖ **અનંત સમાંતર શ્રેણીના પ્રથમ n પદોના સરવાળા કરીએ.**

Ex. 6 સમાંતર શ્રેણી 8, 3, -2, ... ના પ્રથમ 22 પદોનો સરવાળો શોધો.

a = 8, d = 3 - 8 = -5, n = 22, s_{22} = ?

$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$

$S_{22} = \frac{22}{2}[2\times 8 + (22-1)(-5)]$

$S_{22} = 11[16 + (21)(-5)]$

$S_{22} = 11[16 - 105]$

$S_{22} = 11(-89)$ $S_{22} = -979$ ⇐ **Ans.**

Ex. 6 ની રીતે ગણો.

(34) સમાંતર શ્રેણી 0.6, 1.7, 2.8, ... ના પ્રથમ 100 પદોનો સરવાળો મેળવો.

(35) સમાંતર શ્રેણી $\frac{1}{15}, \frac{1}{12}, \frac{1}{10}, ...$ ના પ્રથમ 11 પદોનો સરવાળો મેળવો.

(36) 6 વડે વિભાજ્ય હોય તેવા પ્રથમ 40 પદોનો સરવાળો મેળવો.

(37) નિર્માણ કાર્ય માટે થયેલ કરારમાં નિશ્ચિત તારીખ કરતાં વિલંબથી પૂરા થતાં કામ માટે નીચે પ્રમાણેના દંડની જોગવાઇ છે. પ્રથમ દિવસ માટે રૂા. 200, બીજા દિવસ માટે રૂા. 250, ત્રીજા દિવસ માટે રૂા. 300, ... વગેરે. પ્રત્યેક દિવસ માટે દંડ રકમ આગળના દિવસ કરતાં રૂા. 50 વધુ છે. જો કોન્ટ્રાક્ટર 30 દિવસનો વિલંબ કરે તો તેણે ભરવી પડતી દંડની રકમ શોધો.

❖ **સાન્ત સમાંતર શ્રેણીના n પદોનો સરવાળો કરવો**

Ex. 7 (-5) + (-8) + (-11) + ... + (-230)

a = -5, d = - 8 - (-5) = - 8 + 5 = -3

$a_n = \ell = -230$

$a_n = a + (n-1)d$

-230 = -5 + (n-1) (-3)

- 230 = -5 - 3n+3

-230 = -3n - 2

$\therefore 3n = 228 \quad \therefore n = 76$

$S_n = \frac{n}{2}(a + \ell)$

$S_n = \frac{76}{2}(-5 - 230)$

$S_n = 38(-235)$

$S_n = -8930$ ⇐ **Ans.**

Ex. 7 ની રીતે ગણો.

(38) $7 + 10\frac{1}{2} + 14 + ... + 84$

(39) પ્રથમ 1000 ધનપૂર્ણાંકોનો સરવાળો કરો.

(40) 0 થી 50 વચ્ચેના અયુગ્મ સંખ્યાઓનો સરવાળો શોધો.

❖ મહાવરાના દાખલા ❖

(1) સમાંતર શ્રેણી 9, 17, 25, ... ના કેટલા પદોનો સરવાળો 636 થાય?

(2) સમાંતર શ્રેણીના પ્રથમ 14 પદોનો સરવાળો 1050 છે. તથા તેનું પ્રથમ પદ 10 છે તો તેનું 20 મું પદ શોધો.

(3) $a=7$ અને $a_{13}=35$ આપેલ હોય તો d અને s_{13} શોધો.

(4) $a=2$, $d=8$ અને $s_n=90$ આપેલ હોય તો n અને a_n શોધો.

(5) $\ell=28$, $s=144$ હોય અને કુલ પદ 9 હોય તો a શોધો.

(6) સમાંતર શ્રેણીનું બીજું અને ત્રીજું પદ અનુક્રમે 14 અને 18 હોય તો તેના પ્રથમ 51 પદોનો સરવાળો શોધો.

(7) સમાંતર શ્રેણીના પ્રથમ 7 પદોનો સરવાળો 49 અને પ્રથમ 17 પદોનો સરવાળો 289 હોય તેના પ્રથમ n પદોનો સરવાળો શોધો.

(8) સમાંતર શ્રેણી 15, 15.5, 16, 16.5, ... નું 16 મું પદ શોધો.

(9) જેનું n મું પદ (37n + 41) હોય તેવી સમાંતર શ્રેણીનું 11 મું પદ શોધો.

(10) એક સમાંતર શ્રેણીનું n મું પદ 5n-2 છે, તો 12 મું પદ શોધો.

(11) $\frac{3}{2}, \frac{7}{2}, \frac{11}{2}, \frac{15}{2}$ નો સામાન્ય તફાવત d લખો.

(12) શ્રેણી 1, 11, 21, 31 .... નું 15 મું પદ શોધો.

(13) સમાંતર શ્રેણી 3, 6, 9 ..... માં a_{100} શોધો.

(14) સમાંતર શ્રેણી માટે $a_{16} - a_6$ શોધો.

(15) જો કોઈ સમાંતર શ્રેણી માટે $a_{25} - a_{20} = 15$ હોય, તો તે શ્રેણી માટે d શોધો.

(16) સમાંતર શ્રેણી 5, 7, 9, 11, 13, 15, ... માં છઠ્ઠી અવિભાજ્ય સંખ્યા કઈ હશે?

(17) કોઈ સમાંતર શ્રેણી માટે $S_{n-2}\ S_{n-1} + S_{n-2} = ?$

(18) સમાંતર શ્રેણી $\sqrt{2}, \sqrt{8}, \sqrt{18}, ...$ નું 10 મું પદ શોધો.

(19) સમાંતર શ્રેણી $\sqrt{5}, \sqrt{20}, \sqrt{45}$, ... નો સામાન્ય તફાવત d શોધો.

(20) જે શ્રેણીનું પ્રથમ પદ 2 અને અંતિમપદ 20 હોય, તો શ્રેણીના 200 પદોનો સરવાળો શોધો.

(21) એક સમાંતર શ્રેણીનું ત્રીજું પદ અને છઠ્ઠું પદ અનુક્રમે 7 અને 13 છે. તો તફાવત d શોધો.

(22) એક વિદ્યાર્થી પ્રથમ દિવસે રૂા. 1, બીજા દિવસે રૂા. 2, ત્રીજા દિવસે રૂા. 3 એમ બચત કરે છે તો 100 દિવસોમાં કુલ કેટલી બચત કરી હશે?

(23) એક સમાંતર શ્રેણીનું પ્રથમ પદ p અને સામાન્ય તફાવત q હોય તેવી સમાંતર શ્રેણીનું 10 મું પદ જણાવો.

(24) જો 2p + 1, 13, 5p - 3 એ સમાંતર શ્રેણીના ક્રમિક પદો હોય તો p ની કિંમત શોધો.

(25) જો 2k + 1, 3k + 3, 5k-1 એ સમાંતર શ્રેણીના ક્રમિક પદો હોય તો k ની કિંમત શોધો.

(26) જો $\frac{4}{5}$, a, 2 એ સમાંતર શ્રેણીના ક્રમિક પદો હોય તો a શોધો.

(27) જો સમાંતર શ્રેણીના પ્રથમ p પદોનો સરવાળો ap^2+bp હોય તો સામાન્ય તફાવત d શોધો.

(28) સમાંતર શ્રેણી 5, 9, 13 ... 185 નું છેલ્લેથી નવમું પદ શોધો.

(29) એક દેવસ્થાન પર પહોંચવા 30 પગથિયાં છે. પ્રત્યેક પગથિયાની ઉંચાઇ 20 સેમી. છે. તો જમીનથી દેવસ્થાનની કુલ ઉંચાઇ કેટલી હશે?

(30) એક સમાંતર શ્રેણીનું n મું પદ S_{n-3} છે, તો 10 મું પદ શોધો.

(31) સમાંતર શ્રેણી માટે (n-2) મું પદ શોધો.

(32) સમાંતર શ્રેણી 3, 8, 13, 18, ... નું n મું પદ શોધો.

❖ જવાબ ❖

(1) સમાંતર શ્રેણી છે. d = 10 (2) સમાંતર શ્રેણી નથી.
(3) સમાંતર શ્રેણી છે. d = 8 (4) સમાંતર શ્રેણી છે. d = -2
(5) સમાંતર શ્રેણી છે. d = 0 (6) a = -5, d = 4
(7) a = 0.6, d=1.1 (8) $a = \frac{1}{3}, d = \frac{4}{3}$ (9) a=-7,d=-5
(10) સમાંતર શ્રેણી છે. $a_5 = -7$, $a_6 = -9$
(11) સમાંતર શ્રેણી છે. $a_5 = -9.2$, $a_6 = -11.2$
(12) સમાંતર શ્રેણી છે. $a_5 = 3+4\sqrt{2}$, $a_6 = 3+5\sqrt{2}$
(13) સમાંતર શ્રેણી નથી.
(14) સમાંતર શ્રેણી છે. $a_5 = \sqrt{50}, a_6 = \sqrt{72}$
(15) સમાંતર શ્રેણી છે. $a_5 = 5a$, $a_6 = 6a$
(16) સમાંતર શ્રેણી નથી. (17) સમાંતર શ્રેણી નથી.
(18) $a_1 = 10$, $a_2 = 20$, $a_3 = 30$, $a_4 = 40$
(19) $a_1 = -2$, $a_2 = -2$, $a_3 = -2$, $a_4 = -2$
(20) $a_1 = 4$, $a_2 = 1$, $a_3 = -2$, $a_4 = -5$
(21) $a_1 = 1$, $a_2 = -\frac{1}{2}$, $a_3 = 0$, $a_4 = \frac{1}{2}$ (22) d = 2
(23) a=46 (24) 10 (25) 3.5 (26) 22 (27) -2, 0, 2, 4
(28) 34 (29) 30 (30) d = 1 (31) 65 મું પદ (32) 35 મું પદ, 8 મું પદ 0 (33) 10 (34) 5505 (35) $\frac{33}{20}$
(36) 4960 (37) 27750 રૂા. (38) $1046\frac{1}{2}$
(39) 500500 (40) 625

---

(1) 12 (2) $a_{20} = 200$ (3) $d = \frac{7}{3}$, $S_{13} = 273$
(4) n=5, $a_n = 34$ (5) a = 4 (6) 5610 (7) n^2 (8) 22.5
(9) 448 (10) 58 (11) 2 (12) 141 (13) 300
(14) 10d (15) 3 (16) 19 (17) d (18) $\sqrt{200}$
(19) $\sqrt{5}$ (20) 2200 (21) 2 (22) 5050 રૂા.
(23) p + 9q (24) 4 (25) 6 (26) $\frac{7}{5}$ (27) 2a
(28) 153 (29) 6 મીટર (30) 47 (31) a + (n-3) d
(32) S_{n-2}