کثیررکنیاں اوراجزائے ضربی
Polynomials and Factorisation

2

2.1 تعارف

ایک باغ میں چھ صف میں جھاڑ لگائے گئے ہیں اور ہر صف میں چھ جھاڑ ہیں جملہ یہاں پر کتنے جھاڑ ہوں گے؟ اگر 'x' جھاڑ ہیں x صف میں لگائے گئے ہیں تب باغ میں جملہ جھاڑ کی تعداد کیا ہے؟ یقیناً وہ x^2 ہوگا۔

پیاز کی قیمت 10 روپئے فی کلوگرام ہے۔ عارف p کلوگرام، رحیم q کلوگرام اور حنیف نے r کلوگرام پیاز خریدی۔ انھیں کتنی رقم ادا کرنی ہوگی؟ اداشدنی رقم `10p` ، `10q` اور `10r` ترتیب وار ہوگی۔ اس قسم کی تمام مثالوں کو الجبرا کی مدد سے ظاہر کرتے ہیں جنھیں الجبری عبارتیں کہتے ہیں۔

ہم الجبری عبارتیں اس طرح بھی استعمال کرتے ہیں جیسے s^2 مربع کا رقبہ معلوم کرنا ہو۔ lb مستطیل کا رقبہ، lbh مکعب نما کے حجم کے طور پر لکھتے ہیں۔ دیگر الجبری عبارتیں اور کیا ہیں جو ہم استعمال کرتے ہیں؟

الجبری عبارتیں جیسے $3xy, x^2+2x, x^3-x^2+4x+3, \pi r^2, ax+b$ وغیرہ کو کثیررکنیاں کہتے ہیں۔ یہ بات خاص ہے کہ ہم نے جتنی بھی الجبری عبارتیں شمار کی ہیں ان میں تمام متغیرات کی قوت نما غیر منفی صحیح اعداد ہیں۔

کیا آپ دی گئی الجبری عبارتوں میں کثیررکنیوں کی نشاندہی کر سکتے ہیں

$$x^2, \quad x^{1/2}+3, \quad 2x^2-\frac{3}{x}+5; \quad x^2+xy+y^2$$

اوپر بیان کردہ x^2+3 ایک کثیررکنی نہیں ہے اس لیے کہ $x^{1/2}$ میں پہلے رکن کی قوت ایک غیر منفی صحیح عدد یعنی $\left(\frac{1}{2}\right)$ ہے اور اسی طرح پھر $2x^2-\frac{3}{x}+5$ ایک کثیررکنی نہیں ہے۔ اس لیے کہ اس کو $2x^2-3x^{-1}+5$ میں ظاہر کر سکتے ہیں۔ یہاں پر دوسرا رکن $(3x^{-1})$ کے لیے منفی قوت نما یعنی (1-) ہے''ایک الجبری عبارت جس میں متغیرات کی قوت غیر منفی صحیح عدد ہو تو اس کو کثیررکنی کہتے ہیں۔''

غور کیجیے، مشورہ کیجیے اور لکھیے

ذیل میں دی گئی کونسی عبارت کثیر رکنی ہے؟ کونسی نہیں۔ وجوہات بیان کیجیے۔

(i) $4x^2 + 5x - 2$ (ii) $y^2 - 8$ (iii) 5 (iv) $2x^2 + \frac{3}{x} - 5$

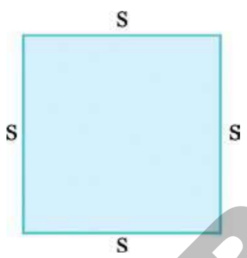
(v) $\sqrt{3}x^2 + 5y$ (vi) $\frac{1}{x+1}$ (vii) $\sqrt{x}$ (viii) $3\,xyz$

ہم کثیر رکنیوں کی مختلف متغیرات پر معلومات حاصل کریں گے۔ اس سبق میں ہم کثیر رکنی کے اجزائے ضربی بنانے کا طریقہ کار بھی سیکھیں گے جس میں مسئلہ باقی اور جز ضربی کا مسئلہ کا استعمال کریں گے تاکہ بعض کثیر رکنیاں اجزائے ضربی میں تحویل کی جاسکیں۔

2.2 ایک متغیر میں کثیر رکنیاں

ایک متغیر کو ایسی علامت کے طور پر ظاہر کرتے ہیں کہ یہ کوئی حقیقی قیمت ہو۔ حروف کا استعمال ..... x, y, z وغیرہ متغیر کے لیے استعمال کرتے ہیں۔

جیسا کہ الجبری عبارتیں ...... $2x, 3x, -x, \frac{3}{4}x$ تمام ایک متغیر x میں ہیں ۔ یہ عبارتیں (عددی مستقل) × (متغیر کی کوئی قوت) کی شکل میں ہوں گی۔ اب ہم مربع کا احاطہ معلوم کرنا چاہتے ہیں۔ ضابطہ P = 4s کا استعمال کریں گے۔



یہاں پر 4 مستقل ہے اور s ایک متغیر ہے جو کہ مربع کے ضلع کو تعبیر کرتا ہے۔ یہ ضلع مختلف مربعوں کے لیے کم یا زیادہ ہوسکتا ہے۔

ذیل کی جدول کا مشاہدہ کیجیے۔

احاطہ (4s)	مربع کا ضلع (s)
P = 4 × 4 = 16 cm	4 cm
P = 4 × 5 = 20 cm	5 cm
P = 4 × 10 = 40 cm	10 cm

یہاں پر مستقل مقدار کی قدر 4 ہے۔ تمام مرحلوں میں یہ مستقل ہے۔ اس سے یہ مراد لی جائے کہ مستقل مقدار کی قدر تبدیل نہیں ہوتی۔ دیئے گئے مسئلہ میں البتہ متغیر کی قدر متواتر تبدیل ہوتی رہتی ہے۔

فرض کیجیے کہ ہم ایک عبارت لکھنا چاہتے ہیں جس کی شکل (مستقل رکن) × (متغیر رکن) ہوگی اور ہمیں یہ اندازہ نہیں ہے کہ مستقل کیا ہے۔ ہم مستقل رکن کو $a, b, c, \ldots$ لکھیں گے۔ یہ عبارتیں عام طور پر $ax, by, cz \ldots.$ وغیرہ سے ظاہر کرتے ہیں یہاں $a, b, c, \ldots.$ اختیاری مستقل (arbitrary constant) مقداریں ہیں۔ آپ ان الجبری عبارتوں سے واقف ہیں جیسے $x^2, x^2+2x+1, x^3+3x^2-4x+5$ یہ تمام عبارتیں ایک متغیر میں کثیر رکنی ہیں۔

یہ کیجیے

- x متغیر میں دو کثیر رکنیاں لکھیے؟
- y متغیر میں کوئی تین کثیر رکنیاں لکھیے۔
- کیا کثیر رکنی $2x^2 + 3xy + 5y^2$ ایک متغیر میں ہے؟
- مختلف ٹھوس وضع کے اجسام کا حجم معلوم کرنے کے ضوابط لکھیے۔ ان ضابطوں میں متغیر یا مستقل رکن بتلائیے۔

2.3 کثیر رکنیوں کا درجہ

کثیر رکنی کا ہر رکن مستقل مقدار کے حاصل ضرب پر مشتمل ہوتا ہے جس کو عددی ضریب کہتے ہیں۔ متغیرات کے عظیم عدد کو غیر منفی حقیقی عدد کے طور پر قوت نما میں ظاہر کیا جاتا ہے۔ متغیر اجزاء کی قوتوں کا حاصل جمع کسی رکن کا درجہ کہلاتا ہے۔

اب ہم رکن، عددی ضریب اور کثیر رکنی کے درجہ کے بارے میں معلومات حاصل کریں گے۔

(i) $3x^2 + 7x + 5$ (ii) $3x^2y^2 + 4xy + 7$

کثیر رکنی $3x^2 + 7x + 5$ میں ہر جز $3x^2$، $7x$ اور 5 کو رکن کہتے ہیں۔

اس کثیر رکنی کے ہر رکن میں عددی ضریب موجود ہے۔ اس لیے $3x^2 + 7x + 5$ میں x^2 کا عددی ضریب 3، $7x$ میں عددی ضریب 7 اور 5، x^0 کا عددی ضریب ہے۔ (یاد کیجیے کہ $x^0 = 1$)

آپ کو معلوم ہے کہ کثیر رکنی کا درجہ اس میں پائے جانے والے کسی متغیر رکن کی سب سے بڑی قوت کو کہتے ہیں۔ جیسا کہ $3x^2+7x+5$ میں دیکھ سکتے ہیں اس کثیر رکنی میں سب سے زیادہ درجہ رکھتی ہے۔ اس لیے $3x^2 + 7x + 5$ کا درجہ 2 ہے۔

اب آپ کثیر رکنی $3x^2y^3 + 4xy + 7$ کے عددی ضریب اور درجہ کی نشاندہی کر سکتے ہیں۔ x^2y^3 کا عددی ضربی 3، xy کا 4 اور x^0y^0 کا 7 ہوگا۔ لہٰذا رکن $3x^2y^3$ میں متغیرات کی قوتوں کا حاصل جمع $2 + 3 = 5$ ہوگا جو کہ دیگر ارکان کی قوتوں سے بڑا ہے لہٰذا کثیر رکنی $x^2y^3 + 4xy + 7$ کا درجہ 5 ہوگا۔

اب یہ سوچیے کہ مستقل رکن کا درجہ کیا ہے؟ کیونکہ مستقل رکن میں کوئی متغیر نہیں ہوتا اس لیے اس کو x^0 سے ظاہر کر سکتے ہیں۔ مثال کے طور پر 5 کا درجہ صفر ہے جس کو $5x^0$ لکھا جا سکتا ہے۔

اب آپ نے دیکھ لیا ہے کہ کثیر رکنی کا درجہ 1، 2 اور 3 کس طرح متعین کیا جاتا ہے۔ کیا آپ کسی بھی طبعی عدد کے لیے n درجہ میں ایک متغیر مقدار کے لیے کثیر رکنی کی مثال دے سکتے ہیں؟

n درجہ میں ایک متغیر مقدار x کے لیے ایک کثیر رکنی اس طرح لکھی جائے گی۔

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$$

جہاں پر $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ مستقل رکن ہیں اور $a_n \neq 0$

خاص طور پر اگر $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_n = 0$ ہو تو (تمام عددی ضریب صفر ہیں)

ہمیں صفر کثیر رکنی حاصل ہوگا جسکو صفر (0) سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

کیا آپ صفر کا درجہ بتا سکتے ہیں؟ یہ وضاحت نہیں کی گئی ہے کیونکہ اسکو متغیر کی کسی قوت کے حاصل ضرب کے طور پر نہیں لکھا جا سکتا۔

یہ کیجیے

1. ذیل کے کثیر رکنی کے درجہ لکھیے۔

(i) $7x^3 + 5x^2 + 2x - 6$ (ii) $7 - x + 3x^2$

(iii) $5p - \sqrt{3}$ (iv) 2 (v) $-5xy^2$

2. ذیل کی عبارتوں میں سے x^2 کے عددی ضریب لکھیے۔

(i) $15 - 3x + 2x^2$ (ii) $1 - x^2$ (iii) $\pi x^2 - 3x + 5$ (iv) $\sqrt{2}x^2 + 5x - 1$

ذیل کے جدول کا مشاہدہ کیجیے اور پُر کیجیے۔

(i) کثیر رکنی کی اقسام بلحاظ درجہ

مثال	کثیر رکنی کا نام	کثیر رکنی کا درجہ
0	صفر کثیر رکنی	واضح نہیں کیا گیا
$-12; 5; \frac{3}{4}$ etc	مستقل کثیر رکنی	صفر
$x - 12; -7x + 8; ax + b$ etc.	....	1
....	دو درجی کثیر رکن	2
$3x^3 - 2x^2 + 5x + 7$	تین درجی کثیر رکنی	3

عام طور پر n درجہ کی کثیر رکنی کو n^{th} درجہ کثیر رکنی کہتے ہیں۔

(ii) کثیر رکنی کی اقسام بلحاظ ارکان

رکن	مثال	کثیر رکنی کا نام	غیر صفری ارکان کی تعداد
$-3x$	$-3x$	ایک رکنی	1
$3x, 5$	$3x + 5$	دو رکنی	2
....	$2x^2 + 5x + 1$	سہ رکنی	3
$3x^3, 2x^2, -7x, 5$	....	ہمہ رکنی / کثیر رکنی	3 سے زائد

نوٹ: ہر کثیر رکنی ہمہ رکنی ہوتی ہے لیکن ہر ہمہ رکنی کثیر رکنی ہونا ضروری نہیں۔

ایک متغیر میں خطی کثیر رکنی ایک رکنی یا دو رکنی بھی ہوسکتی ہے۔

مثال: $3x$ یا $2x - 5$

غور کیجیے، مشورہ کیجیے اور لکھیے

ایک متغیر میں سہ درجی کثیر رکنی میں کتنے رکن ہوتے ہیں۔ مثال دیجیے۔

اگر کسی کثیر رکنی میں متغیر x ہے تو ہم اس کثیر رکنی کو $r(x)$ $p(x), q(x)$ وغیرہ سے ظاہر کرتے ہیں۔ مثال کے طور پر ہم اس طرح لکھ سکتے ہیں۔

$$p(x) = 3x^2 + 2x + 1$$

$$q(x) = x^3 - 5x^2 + x - 7$$

$$r(y) = y^4 - 1$$

$$t(z) = z^2 + 5z + 3$$

کوشش کیجیے۔

1. ایک متغیر میں دو ارکان پر مشتمل ایک کثیر رکنی لکھیے۔
2. آپ p متغیرات میں 15 ارکان پر مشتمل کثیر رکنی کس طرح لکھ سکتے ہیں؟

ایک کثیر رکنی میں متناہی رکن ہوتے ہیں۔

اب تک ہم نے صرف ایک متغیر میں کثیر رکنیاں لکھنا سیکھا ہے۔ ہمارے پاس ایک سے زائد متغیرات میں بھی کثیر رکنیاں ہوں گی۔ مثال کے طور پر $x + y$ ، $x^2 + 2xy + y^2$ ۔ $x^2 - y^2$ ، x, y متغیرات میں کثیر رکنیاں ہیں ۔ اس طرح $x^2 + y^2 + z^2$ ، $x^3 + y^3 + z^3$ ، تین متغیرات میں کثیر رکنی ہے۔ اس قسم کی کثیر رکنی آپ بعد میں پڑھیں گے۔

مشق 2.1

.1 ذیل میں دیئے گئے کثیر رکنی کے درجہ لکھیے۔

(i) $x^5 - x^4 + 3$ (ii) $x^2 + x - 5$ (iii) 5

(iv) $3x^6 + 6y^3 - 7$ (v) $4 - y^2$ (vi) $5t - \sqrt{3}$

.2 ذیل میں کونسی عبارت کثیر رکنی ایک متغیر میں ہے اور کونسی نہیں۔ وجہ بیان کیجیے اپنے جواب لکھیے۔

(i) $3x^2 - 2x + 5$ (ii) $x^2 + \sqrt{2}$ (iii) $p^2 - 3p + q$ (iv) $2 + \frac{2}{y} (y \neq 0)$

(v) $5\sqrt{x} + x\sqrt{5}\ (x > 0)$ (vi) $x^{100} + y^{100}$

.3 ذیل میں دی گئی عبارت میں سے x^3 کے عددی ضریب لکھیے۔

(i) $x^3 + x + 1$ (ii) $2 - x^3 + x^2$ (iii) $\sqrt{2}x^3 + 5$ (iv) $2x^3 + 5$

(v) $\frac{\pi}{2}x^3 + n$ (vi) $-\frac{2}{3}x^3$ (vii) $2x^2 + 5$ (viii) 4

.4 ذیل کی عبارتوں کو خطی، دو درجی اور سہ درجی کثیر رکنیوں کے طور پر لکھیے۔

(i) $5x^2 + x - 7$ (ii) $x - x^3$ (iii) $x^2 + x + 4$ (iv) $x - 1$

(v) $3p$ (vi) πr^2

.5 کیا دیئے گئے بیان صادق ہیں یا کاذب؟ اپنے جواب کی وضاحت کیجیے۔

(i) دو رکنی میں زیادہ سے زیادہ 2 رکن ہوتے ہیں۔

(ii) ہر کثیر رکنی دو رکنی ہوتی ہے۔

(iii) ایک دو رکنی 3 درجہ کی ہوسکتی ہے۔

(iv) صفر درجہ کثیر رکنی کا درجہ صفر ہوگا۔

(v) $x^2 + 2x + y^2$ کا درجہ 2 ہے۔

(vi) πr^2 ایک ایک رکنی ہے۔

.6 10 درجہ میں دو رکنی اور سہ رکنی کی ایک ایک مثال دیجیے۔

2.4 کسی کثیر رکنی کے صفر

- $p(x) = x^2 + 5x + 4$ کے کثیر رکنی پر غور کیجیے۔

$x = 1$ پر $p(x)$ کی قدر کیا ہوگا

اس کے لیے ہمیں $p(x)$ میں ہر ایک مقام پر x کی جگہ 1 رکھنا ہوگا۔

اس طرح کرنے سے $p(1) = (1)^2 + 5(1) + 4$

ہمیں حاصل ہوگا $= 1 + 5 + 4 = 10$

اس لیے ہم کہہ سکتے ہیں $p(x)$ میں $x = 1$ رکھنے پر $p(x)$ کی قدر 10

اس طرح $p(x)$ ، جب کہ $x = 0$ اور $x = -1$

$$p(-1) = (-1)^2 + 5(-1) + 4 = 1 - 5 + 4 = 0$$

$$p(0) = (0)^2 + 5(0) + 4 = 0 + 0 + 4 = 4$$

کیا آپ $p(-4)$ کی قدر معلوم کر سکتے ہیں؟

ایک اور کثیر رکنی پر غور کیجیے۔

$$s(y) = 4y^4 - 5y^3 - y^2 + 6$$

$$\begin{aligned} s(1) &= 4(1)^4 - 5(1)^3 - (1)^2 + 6 \\ &= 4(1) - 5(1) - 1 + 6 \\ &= 4 - 5 - 1 + 6 \\ &= 10 - 6 \\ &= 4 \end{aligned}$$

کیا آپ $s(-1)$ کی قدر معلوم کر سکتے ہیں؟

یہ کیجیے

متغیرات کی دی ہوئی قیمت پر ذیل کی کثیر رکنیوں کی قدر معلوم کیجیے۔

(i) $p(x) = 4x^2 - 3x + 7$, $x = 1$

(ii) $q(y) = 2y^3 - 4y + \sqrt{11}$, $y = 1$

(iii) $r(t) = 4t^4 + 3t^3 - t^2 + 6$, $t = p$, $t \in R$

(iv) $s(z) = z^3 - 1$, $z = 1$

(v) $p(x) = 3x^2 + 5x - 7$, $x = 1$

(vi) $q(z) = 5z^3 - 4z + \sqrt{2}$, $z = 2$

اس کثیر رکنی پر غور کیجیے۔

$$r(t) = t - 1$$

$r(1)$ کی قیمت کیا ہوگی؟ $r(1) = 1 - 1 = 0$

جیسا کہ $r(1) = 0$ ، ہم کہہ سکتے ہیں۔

عام طور پر ہم یہ کہتے ہیں کہ جب $p(x) = 0$ ہو۔ کثیر رکنی $p(x)$ کا صفر ہوتا ہے۔

اس قدر کو کثیر رکنی $p(x)$ کی بنیادی قدر (ریشہ) کہتے ہیں۔

$f(x) = x + 1$ کی کثیر رکنی کا صفر کیا ہوگا۔

آپ نے یہ غور کیا ہوگا کہ کثیر رکنی $x + 1$ کا صفر معلوم کرنے کیلئے اس کو صفر (0) کے مساوی کرنا ہوگا یعنی $x + 1 = 0$ جس سے $x = -1$ حاصل ہوتا ہے۔ اگر $f(x)$، x میں کوئی کثیر رکنی ہو تب $f(x) = 0$ کو x میں کثیر رکنی مساوات کہا جاتا ہے۔ مذکورہ مثال میں -1 کثیر رکنی $f(x)$ کا ریشہ کہلاتا ہے۔ لہٰذا ہم کہتے ہیں کہ -1 کثیر رکنی $x + 1$ کا صفر ہے یا کثیر رکنی مساوات $x + 1 = 0$ کا ریشہ ہے

کوشش کیجیے

مندرجہ ذیل کثیر رکنیوں کے صفر معلوم کیجیے۔

1. $2x - 3$
2. $x^2 - 5x + 6$
3. $x + 5$

اب مستقل کثیر رکنی 3 لیجیے۔ کیا آپ بتا سکتے ہیں اس کا صفر کیا ہوگا؟ اس میں صفر نہیں ہے جیسا کہ $3 = 3x^0$، x کی کوئی بھی حقیقی قدر سے $3x^0$ کی قدر حاصل نہیں ہوتی۔ اس سے مراد یہ ہے کہ مستقل کثیر رکنی میں صفر نہیں ہوتا۔ البتہ صفر کثیر رکنی ایک مستقل کثیر رکنی ہے جس میں زیادہ صفر ہوتے ہیں۔

مثال - 1: $p(x) = x + 2$ کے لیے $p(1)$، $p(2)$ اور $p(-2)$ کی قدریں معلوم کیجیے۔ کثیر رکنی $x + 2$ کے لیے صفر کی قدر معلوم کیجیے۔

حل: فرض کرو کہ $p(x) = x + 2$

x کے بجائے 1 لکھیے

$p(1) = 1 + 2 = 3$

x کے بجائے 2 لکھیے

$p(2) = 2 + 2 = 4$

x کے بجائے -1 لکھیے

$p(-1) = -1 + 2 = 1$

x کے بجائے -2 لکھیے

$p(-2) = -2 + 2 = 0$

اس لیے $1, 2, -1$ کثیر رکنی $x + 2$ کے صفر نہیں ہیں لیکن -2 کثیر رکنی کا صفر ہے۔

مثال - 2: $p(x) = 3x + 1$ کے لیے کثیر رکنی کا صفر معلوم کیجیے۔

حل: $p(x)$ کے لیے کثیر رکنی کا صفر مساوات حل کرنے سے حاصل ہوگا؟

$$p(x) = 0$$

یعنی

$$3x + 1 = 0$$

$$3x = -1$$

$$x = -\frac{1}{3}$$

لہٰذا $-\frac{1}{3}$ کثیررکنی $3x + 1$ کا صفر ہوگا۔

مثال - 3: $2x - 1$ کثیررکنی کے لیے صفر معلوم کیجیے۔

حل: $p(x)$ کا صفر معلوم کرنے کے لیے $p(x) = 0$ کو کرنا ہوگا $2x - 1 = 0$

(کیسے) $x = \frac{1}{2}$

$P\left(\frac{1}{2}\right)$ کی قدر معلوم کرتے ہوئے اس جواب کی تصدیق کیجیے۔

اب اگر $p(x) = ax + b$ ، $a \neq 0$ ایک خطی کثیررکنی ہے۔تب آپ کس طرح $p(x)$ کا صفر معلوم کریں گے؟

جیسا کہ ہم دیکھ چکے ہیں کثیررکنی $p(x)$ کا صفر کس طرح معلوم کیا جاتا ہے۔ہمیں کثیررکنی مساوات $p(x) = 0$ حل کرنا ہوگا۔

جس کا مطلب ہے $ax + b = 0$ ، $a \neq 0$

جہاں $ax = -b$

یعنی $x = \frac{-b}{a}$

لہٰذا $x = \frac{-b}{a}$ کثیررکنی صرف ایک ہی کثیررکنی کا صفر ہوگا۔

$p(x) = ax + b$ کا واحد صفر ہوگا۔

ایک ہی متغیر میں ایک خطی کثیررکنی ایک ہی صفر رکھتی ہے۔

یہ کیجیے

خالی جگہوں کو پُر کیجیے۔

کثیررکنی کا صفر	خطی کثیررکنی
$-a$	$x + a$
-------------	$x - a$
-------------	$ax + b$
$\frac{b}{a}$	$ax - b$

مثال - 4: تصدیق کیجیے کہ کیا 2 اور 1، کثیر رکنی $x^2 - 3x + 2$ کے صفر ہیں یا نہیں۔

حل: فرض کرو کہ $p(x) = x^2 - 3x + 2$

x کو 2 سے تبدیل کیجیے

$$p(2) = (2)^2 - 3(2) + 2$$
$$= 4 - 6 + 2 = 0$$

x کو 1 سے تبدیل کیجیے

$$p(1) = (1)^2 - 3(1) + 2$$
$$= 1 - 3 + 2$$

اس لیے 2 اور 1 اس کثیر رکنی $x^2 - 3x + 2$ کے صفر ہیں۔

اس کی تصدیق کا کیا کوئی اور طریقہ کار ہے؟

کثیر رکنی $x^2 - 3x + 2$ کا درجہ کیا ہے۔ کیا یہ ایک خطی کثیر رکنی ہے؟ نہیں۔

یہ درجہ دوم کی کثیر رکنی ہے۔ اس لیے دو درجی کثیر رکنی کے دو صفر ہوتے ہیں۔

مثال - 5: اگر 3 کثیر رکنی $x^2 + 2x - a$ کا صفر ہو تب a معلوم کیجیے۔

حل: فرض کرو کہ $p(x) = x^2 + 2x - a$

جیسا کہ کثیر رکنی کا صفر 3 ہے ہمیں معلوم ہے کہ $p(3) = 0$

$$x^2 + 2x - a = 0$$

$x = 3$ لکھیے

$$(3)^2 + 2(3) - a = 0$$
$$9 + 6 - a = 0$$
$$15 - a = 0$$
$$-a = -15$$
$$a = 15$$

غور کیجیے اور گفتگو کیجیے

1. $x^2 + 1$ کے حقیقی صفر نہیں ہے کیوں؟
2. کیا آپ بتا سکتے ہیں کہ n درجے کی کثیر رکنی میں صفر کی تعداد کیا ہے؟

مشق 2.2

1. کثیر رکنی $4x^2 - 5x + 3$ کی قدر معلوم کیجیے جب کہ

(i) $x = 0$ (ii) $x = -1$ (iii) $x = 2$ (iv) $x = \frac{1}{2}$

2. ذیل کی ہر ایک کثیر رکنی کے لیے $p(0)$ ‘ $p(1)$ اور $p(2)$ معلوم کیجیے۔

(i) $p(x) = x^2 - x - 1$ (ii) $p(y) = 2 + y + 2y^2 - y^3$

(iii) $p(z) = z^3$ (iv) $p(t) = (t - 1)(t \quad 1)$

(v) $p(x) = x^2 - 3x + 2$

3. کیا آپ تصدیق کر سکتے ہیں کہ کثیر رکنی کے ساتھ دی گئی مقدار اس کا صفر ہے یا نہیں۔

(i) $p(x) = 2x + 1;\ x = -\frac{1}{2}$ (ii) $p(x) = 5x - \pi;\ x = \frac{-3}{2}$

(iii) $p(x) = x^2 - 1;\ x = \pm 1$ (iv) $p(x) = (x - 1)(x + 2);\ x = -1, -2$

(v) $p(y) = y^2;\ y = 0$ (vi) $p(x) = ax - b;\ x = -\frac{b}{a}$

(vii) $f(x) = 3x^2 - 1;\ x = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}$ (viii) $f(x) = 2x - 1, x = \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}$

4. ذیل میں ہر ایک کے لیے کثیر رکنی کا صفر دریافت کیجیے۔

(i) $f(x) = x + 2$ (ii) $f(x) = x - 2$ (iii) $f(x) = 2x \quad 3$

(iv) $f(x) = 2x - 3$ (v) $f(x) = x^2$ (vi) $f(x) = px,\ p \neq 0$

(vii) $f(x) = px + q,\ p \neq 0$ p,q حقیقی اعداد ہیں۔

5. اگر 2 کثیر رکنی $p(x) = 2x^2 - 3x + 7a$ کا صفر ہو تب a کی قدر معلوم کیجیے۔

6. اگر 0 اور 1 کثیر رکنی $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + ax + b$ کے صفر ہوں تب a اور b کی قدر معلوم کیجیے۔

2.5 کثیر رکنیوں کی عمل تقسیم

ذیل کی مثالوں کا مشاہدہ کیجیے۔

(i) فرض کیجیے 25 اور 3 ‘دو اعداد ہیں۔ 25 کو 3 سے تقسیم کیجیے۔ ہمیں خارج قسمت 8 اور باقی حاصل ہوگا۔

ہم لکھ سکتے ہیں۔

باقی + (خارج قسمت × مقسوم علیہ) = مقسوم

جیسا کہ $25 = (8 \times 3) + 1$

اسی طرح 20 کو 5 سے تقسیم کیجیے ہمیں حاصل ہوگا۔ $20 = (4 \times 5) + 0$

یہاں پر باقی صفر ہے۔ اس مقام پر 5 کو 20 کا جز ضربی کہتے ہیں۔ یا 20 عدد 5 کا ضعف ہے۔

جیسا کہ ہم کسی عدد کو غیر صفری عدد سے تقسیم کرتے ہیں۔ اس طرح ہم کسی کثیر رکنی کو دوسری کثیر رکنی سے بھی تقسیم کر سکتے ہیں۔

(ii) کثیر رکنی $3x^3 + x^2 + x$ کو واحد رکنی x سے تقسیم کیجیے۔

$$(3x^3 + x^2 + x) \div x = \frac{3x^3}{x} + \frac{x^2}{x} + \frac{x}{x}$$

$$= 3x^2 + x + 1$$

جیسا کہ x ہر رکن کا مشترکہ جز ضربی ہے $3x^3 + x^2 + x$ میں ہر رکن کا جز ضربی ہے ہم لکھ سکتے ہیں۔

$$3x^3 + x^2 + x = x(3x^2 + x + 1)$$

$3x^3 + x^2 + x$ کے اجزاء کیا ہیں؟

(iii) دوسری مثال کا مشاہدہ کیجیے $(2x^2 + x + 1) \div x$

$$\begin{array}{r|l} & 2x+1 \\ \hline x & 2x^2+x+1 \\ & -2x^2 \\ \hline & \quad x+1 \\ & \quad -x \\ \hline & \qquad 1 \end{array}$$

یہاں $(2x^2 + x + 1) \div x = \frac{2x^2}{x} + \frac{x}{x} + \frac{1}{x}$

$$= 2x + 1 + \frac{1}{x}$$

کیا یہ کثیر رکنی ہے؟

جیسا کہ ایک رکن $\frac{1}{x}$ کا قوت نما منفی عدد ہے (یعنی $\frac{1}{x} = x^{-1}$)

$$\therefore\ 2x + 1 + \frac{1}{x}$$

کثیر رکنی نہیں ہے۔

ہم یہ اس طرح لکھ سکتے ہیں۔

$$(2x^2 + x + 1) = [x \times (2x + 1)] + 1$$

'1' کو علاحدہ کرکے کثیر رکنی کا باقی حصہ دو کثیر رکنیوں کے حاصل ضرب کے طور پر لکھا جا سکتا ہے۔

یہاں پر ہم کہہ سکتے ہیں $(2x + 1)$ خارج قیمت ہے۔ x مقسوم علیہ اور باقی ایک (1) ہے، ہمیں یہ بات ذہن نشین رکھنا چاہیے کہ باقی صفر نہیں ہے اس لیے x، $2x^2 + x + 1$ کا جز ضربی نہیں ہے۔

یہ کیجیے

1. $3y^3 + 2y^2 + y$ کو 'y' سے تقسیم کرتے ہوئے تقسیمی حقائق لکھیے۔ جبکہ $y \neq 0$
2. $4p^2 + 2p + 2$ کو $2p$ سے تقسیم کرتے ہوئے تقسیمی حقائق لکھیے۔ جبکہ $y \neq 0$

مثال - 6: $3x^2 + x - 1$ کو $x + 1$ سے تقسیم کیجیے۔ جبکہ $(x \neq -1)$

حل: $p(x) = 3x^2 + 3x - 1$ اور $(x) = x + 1$

$p(x)$ کو $q(x)$ سے تقسیم کیجیے۔ تقسیم کے طریقہ کار کا اعادہ کیجیے۔

مرحلہ 1: $\frac{3x^2}{x} = 3x$ خارج قسمت میں یہ پہلا رکن ہوگا۔

$$
\begin{array}{r}
3x-2 \\
x+1\,\overline{)\,3x^2+x-1} \\
3x^2+3x \\
-\quad - \\
\hline
-2x-1 \\
-2x-2 \\
+\quad + \\
\hline
+1
\end{array}
$$

مرحلہ 2: $(x + 1)3x$ کی قیمت:

$(x + 1)\ \ 3x = 3x^2 + 3x$

$3x^2 + 3x$ کو $3x^2 + x$ سے تفریق کرنے پر ہمیں $(-2x)$ حاصل ہوگا۔

مرحلہ 3: $\frac{-2x}{x} = -2$ یہ خارج قسمت کا دوسرا رکن ہوگا۔

مرحلہ 4: $(x + 1)(-2) = -2x - 2$

$-2x - 1$ اسے تفریق کیجیے جہاں پر 1 حاصل ہوگا۔

مرحلہ 5: یہاں پر ہم رک جائیں گے کیونکہ باقی '1' حاصل ہوا جو کہ ایک مستقل مقدار ہے۔

(کیا آپ بتا سکتے ہیں کہ ایک مستقل رکن کو کثیر رکنی سے تقسیم کیوں نہیں کیا جا سکتا؟)

اس سے ہمیں خارج قیمت $(3x - 2)$ اور باقی $(+1)$ حاصل ہوگا۔

نوٹ: تقسیم کا طریقہ کار اس وقت مکمل کہلاتا ہے جب باقی صفر ہو یا جب باقی عدد کا درجہ مقسوم کے درجہ سے کم ہو۔

اب ہم تقسیم کے حقائق کو اس طرح لکھ سکتے ہیں۔

$$3x^2 + x - 1 = (x + 1)\,(3x - 2) + 1$$

یعنی مقسوم = (مقسوم علیہ × خارج قیمت) + باقی

$p(x)$ میں x کی جگہ -1 رکھ کر دیکھیں گے۔

$p(x) = 3x^2 + x - 1$

$p(x) = 3x^2 + x - 1$

$= 3(+1) + (-1) - 1 = 1$

یہ مشاہدہ کیا جا سکتا ہے کہ $p(-1)$ کی قدر باقی کے مساوی ہے جو 1 ہے۔

$p(x) = 3x^2 + x - 1$ کو $(x + 1)$ سے تقسیم کرنے پر

حاصل ہونے والا باقی $p(-1)$ ہوگا۔ جہاں -1، $(x + 1)$ کا صفر ہے i.e: $x = -1$

آیئے چند اور مثالوں پر غور کریں گے۔

مثال - 7: $2x^4 - 4x^3 - 3x - 7$ کو $(x + 1)$ سے تقسیم کیجیے اور کثیر رکنی کے صفر سے تصدیق کیجیے۔ جبکہ $(x \neq 1)$

حل: فرض کرو کہ $f(x) = 2x^4 - 4x^3 - 3x - 1$

پہلے دیکھیے کہ x، $2x^4$ کا کتنا گنا ہوگا

$$\frac{2x^4}{x} = 2x^3$$

$$
\begin{array}{r}
2x^3-2x^2-2x-5 \\
x-1\,\overline{)\,2x^4-4x^3-3x-1} \\
2x^4-2x^3 \\
-\quad + \\
\hline
-2x^3-3x-1 \\
-2x^3+2x^2 \\
+\quad - \\
\hline
-2x^2-3x-1 \\
-2x^2+2x \\
+\quad - \\
\hline
-5x-1 \\
-5x+5 \\
+\quad - \\
\hline
-6
\end{array}
$$

اب $(x - 1)$ کو $2x^3$ سے ضرب دینے پر $2x^4 - 2x^3$ حاصل ہوگا

اب باقی کا پہلا رکن دیکھیے جو کہ $-2x^3$ ہے

اب اسی طرح کا عمل جو پہلے کیا ہے لکھیے۔

یہاں پر خارج قیمت

$2x^3 - 2x^2 - 2x - 5$ ہے

اور باقی 6 - ہوگا۔

اب اس کثیر رکنی کا صفر $(x - 1)$ کے لیے 1 ہے۔

$x = 1$ ، $f(x)$ میں درج کرنے پر

$$f(x) = 2x^4 - 4x^3 - 3x - 1$$
$$f(1) = 2(1)4 - 4(1)^3 - 3(1) - 1$$
$$= 2(1) - 4(1) - 3(1) - 1$$
$$= 2 - 4 - 3 - 1$$
$$= -6$$

کیا $f(x)$، $(x - 1)$ کے صفر پر کثیر رکنی $f(x)$ کی قدر باقی کے مساوی ہے

مذکورہ مثالوں سے ہم ذیل کے مسئلہ کو بیان کرتے ہیں۔

کسی کثیر رکنی کو ایک متغیر مقدار کی خطی کثیر رکنی سے تقسیم کیے بغیر باقی حاصل کیا جاسکتا ہے۔

مسئلہ باقی:

فرض کیجیے کہ $p(x)$ ایک یا ایک سے زائد درجہ کی اک کثیر رکنی ہے اور فرض کیجیے کہ a اک حقیقی عدد ہے۔

اگر $p(x)$ کو اک خطی کثیر رکنی $(x - a)$ سے تقسیم کیا جائے تو باقی $p(a)$ ہوگا۔

اب ہم اس کا ثبوت دیکھیں گے۔

فرض کیجیے کہ $p(x)$ اک ایسی کثیر رکنی ہے جس کا درجہ ایک سے بڑا یا ایک کے مساوی ہے۔

ثبوت: فرض کرو کہ $p(x)$ ایک کثیر رکنی کو خطی کثیر رکنی $g(x) = x - a$ سے تقسیم کیا گیا ہو تو $q(x)$ خارج قسمت اور $r(x)$ باقی ہوگا دیگر لفظوں میں $p(x)$ اور $g(x)$ دو کثیر رکنی ہے اس طرح ہیں کہ $p(x)$ کا درجہ $g(x)$ کے درجہ سے بڑا ہے یا مساوی ہے اور $g(x) \neq 0$ تب ہم کثیر رکنی $q(x)$ اور $r(x)$ حاصل کریں گے۔ اس طرح کہ $r(x) = 0$ یا $r(x)$ چھوٹا ہوتا ہے $g(x)$ کے درجہ سے۔

تقسیم کے اصول پر $\quad p(x) = g(x) . q(x) + r(x)$

$\because g(x) = (x - a) \quad \therefore p(x) = (x - a) . q(x) + r(x)$

چونکہ $(x - a)$ کا درجہ ایک ہے $r(x)$ کا درجہ $(x - a)$ کے درجہ سے کم ہے۔

لہٰذا $r(x) = 0$ کا درجہ دلالت کرتا ہے کہ $r(x)$ ایک مستقل ہے۔ فرض کیجیے کہ وہ مستقل K ہے۔

x کی ہر ایک حقیقی قیمت کے لیے $\quad r(x) = K$

اس لیے $\quad p(x) = (x - a) q(x) + K$

اگر $x = a$ تب $\quad p(a) = (a - a) q(a) + K$

$$= 0 + K$$

جو کہ ثابت کرنا تھا۔ $\quad = K$

جب کبھی کسی کثیر رکنی کو بناء کسی تقسیمی عمل کے کسی خطی کثیر رکنی سے تقسیم کیا جائے تو یہ نتیجہ باقی معلوم کرنے کے لیے استعمال کیا جائے گا۔

مثال - 8: $x^3 + 1$ کا باقی معلوم کیجیے جس کو $(x + 1)$ سے تقسیم کیا گیا ہے۔

حل: $p(x) = x^3 + 1$

خطی کثیر رکنی $x + 1$ کا صفر -1 ہوگا۔ $[x + 1 = 0, x = -1]$

اس لیے x کی بجائے -1 درج کر دیجیے

$$p(-1) = (-1)^3 + 1$$
$$= -1 + 1$$
$$= 0$$

اس لیے مسئلہ باقی کی رو سے ہمیں معلوم ہے کہ $x^3 + 1$ کو $x + 1$ سے تقسیم کرنے پر باقی صفر ہوگا۔

آپ $x^3 + 1$ کو $x + 1$ سے تقسیم کرتے ہوئے تصدیق کر سکتے ہیں۔

کیا آپ کہہ سکتے ہیں کہ $(x + 1)$ ، $(x^3 + 1)$ کا جزِ ضربی ہے؟

مثال - 9: جانچئے کہ آیا $(x - 2)$ ، $x^3 - 2x^2 - 5x + 4$ کا جزِ ضربی ہے۔

حل: فرض کرو کہ $p(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 4$

یہ جانچنے کے لیے کہ خطی کثیر رکنی $(x - 2)$ ، دی ہوئی کثیر رکنی کا جزِ ضربی ہے $(x - 2)$ میں x کو '0' سے بدل دیجیے۔

یعنی $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

$$\begin{aligned} p(2) &= (2)^3 - 2(2)^2 - 5(2) + 4 \\ &= 8 - 2(4) - 10 + 4 \\ &= 8 - 8 - 10 + 4 \\ &= -6. \end{aligned}$$

کیونکہ باقی صفر نہیں ہے اس لیے $(x - 2)$ کثیر رکنی $x^3 - 2x^2 - 5x + 4$ کا جزِ ضربی نہیں ہوسکتا۔

مثال - 10: جانچئے کہ کثیر رکنی $p(y) = 4y^3 = 4y^2 - y - 1$ ، $2y + 1$ کا ضعف ہے۔

حل: اگر $(2y + 1)$ ، $p(y)$ کو مکمل طور پر تقسیم کرتا ہو تو $p(y)$ صرف $(2y + 1)$ کا ہی ضعف ہوگا۔

پہلے ہم مقسوم علیہ کا صفر معلوم کریں گے یعنی $2y + 1$ کا

یعنی $y = \frac{-1}{2}$

$p(y)$ میں y کو $\frac{-1}{2}$ سے تبدیل کیجیے

$$p\left(\frac{-1}{2}\right) = 4\left(\frac{-1}{2}\right)^3 + 4\left(\frac{-1}{2}\right)^2 - \left(\frac{-1}{2}\right) - 1$$

$$= 4\left(\frac{-1}{8}\right) + 4\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2} - 1$$

$$= \frac{-1}{2} + 1 + \frac{1}{2} - 1$$

$$= 0$$

لہٰذا $(2y + 1)$ ، $p(y)$ کا جز ضربی ہے۔اس طرح $p(y)$ ، $(2y + 1)$ کا ضعف ہوگا۔

مثال - 11: کثیر رکنیاں $ax^3 + 3x^2 - 13$ اور $2x^3 + 5x + a$ کو $(x - 2)$ تقسیم کرنے پر باقی ایک جیسے عدد حاصل ہوتے ہیں تب a کی قدر معلوم کیجیے۔

حل: فرض کرو کہ $p(x) = ax^3 + 2x^2 - 3x^2 - 13$ اور $q(x) = 2x^3 - 5x + a$

∵ $p(x)$ اور $q(x)$ کو $(x - 2)$ سے تقسیم کرنے پر باقی مساوی ہے۔

$$p(2) = q(2)$$

$$a(2)^3 + 3(2)^2 - 13 = 2(2)^3 - 5(2) + a$$

$$8a + 12 - 13 = 16 - 10 + a$$

$$8a - 1 = a + 6$$

$$8a - a = 6 + 1$$

$$7a = 7$$

$$a = 1$$

مشق 2.3

1. باقی معلوم کیجیے جب کہ $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ کو حسب ذیل خطی کثیر رکنی سے تقسیم کیا گیا ہے۔

(i) $x + 1$ (ii) $x - 1/2$ (iii) x (iv) $x + p$

(v) $5 + 2x$

2. باقی معلوم کیجیے اگر $x^3 - px^2 + 6x - p$ کو $x - p$ سے تقسیم کیا جائے۔

.3 کثیررکنی $2x^2 - 3x + 5$ کو $2x - 3$ سے تقسیم کیا گیا ہو تو باقی معلوم کیجیے۔ کیا یہ مکمل طور پر تقسیم ہوتا ہے؟ وجوہات بیان کریں۔

.4 کثیررکنی $9x^3 - 3x^2 + x - 5$ کو $x - 2/3$ سے تقسیم کیا گیا ہو باقی معلوم کیجیے۔

.5 اگر کثیررکنیوں $2x^3 + ax^2 + 3x - 5$ اور $x^3 + x^2 - 4x + a$ کو $x - 2$ سے تقسیم کرنے پر باقی مساوی ہوتا ہے تب a کی قدر معلوم کیجیے۔

.6 اگر کثیررکنیوں $x^3 + ax^2 + 5$ اور $x^3 - 2x^2 + a$ کو $(x + 2)$ سے تقسیم کیا گیا ہو تو باقی مساوی ہوگا تب a کی قدر معلوم کیجیے۔

.7 باقی معلوم کیجیے اگر کثیررکنی $f(x) = x^4 - 3x^2 + 4$ کو $g(x) = x - 2$ سے تقسیم کیا جائے اور تقسیم کے طریقہ سے تصدیق کیجیے۔

.8 کثیررکنی $p(x) = x^3 - 6x^2 + 14x - 3$ کو $g(x) = 1 - 2x$ سے تقسیم کرنے پر باقی معلوم کیجیے اور تقسیم کے طریقہ سے تصدیق کیجیے۔

.9 کثیررکنی $2x^3 + 3x^2 + ax + b$ کو $(x - 2)$ سے تقسیم کرنے پر باقی 2 اور $x + 2$ سے تقسیم کرنے پر باقی -2 تب a اور b کی قدر معلوم کیجیے۔

2.6 کثیررکنی کے اجزائے ضربی

جیسا کہ آپ پہلے ہی پڑھ چکے ہیں کہ $q(x)$ کثیررکنی $p(x)$ کو برابر یا مکمل طور پر تقسیم کرتا ہو تو باقی صفر ہوگا۔ اس میں $q(x)$ ایک جزضربی ہوگا $p(x)$ کا۔

مثال کے طور پر $p(x) = 4x^3 + 4x^2 - x - 1$ کو $g(x) = 2x + 1$ سے تقسیم کرنے پر اگر باقی صفر ہو۔

تب $4x^3 + 4x^2 - x - 1 = q(x)\,(2x + 1) + 0$

لہٰذا $p(x) = q(x)\,(2x + 1)$

اس لیے $g(x) = 2x + 1$ کثیررکنی $p(x)$ کا جز ضربی ہے۔

مسئلہ باقی کی مدد سے کیا آپ ایسا مسئلہ بیان کر سکتے ہیں جو دی گئی کثیررکنی کے اجزائے ضربی معلوم کرنے میں مددگار ہو سکتا ہو؟

جزضربی کا مسئلہ: اگر $p(x)$ ایک کثیررکنی ہے جس کا درجہ $n \geq 1$ اور a ایک حقیقی عدد ہے۔ تب (i) $(x - a)$ '$p(x)$ کا جزضربی ہوگا۔ اگر $p(a) = a$ (ii) اس کا برعکس یعنی

"اگر $(x - a)$ کثیررکنی $p(x)$ کا جزضربی ہے تب $p(a) = 0$"

اب ہم اس کا سادہ ثبوت دیکھیں گے۔

ثبوت: مسئلہ باقی کی رو سے $p(x) = (x - a)\;q(x) + p(a)$

(i) اس تناظر میں $p(x) = 0$ ؛ تب $p(x) = (x-a)q(x) + 0$

اگر $= (x-a)q(x)$

جس سے ظاہر ہوتا ہے کہ $(x-a)$ ایک جزضربی ہے۔

(ii) اس تناظر میں (iii) لہذا ثابت کیا گیا $(x-a)$ جزضربی ہے $p(x)$ کا تب $p(x)=(x-a)q(x)$

یعنی کثیر رکنیوں $q(x)$ کے لیے

$$\therefore\ p(a)=(a-a)q(a)$$

$$=0$$

$\therefore$ $p(a)=0$ جہاں $(x-a)$ ایک جزضربی ہے $p(x)$ کا۔

آیئے چند اور مثالوں پر غور کریں گے۔

مان لیجیے کہ $p(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

$(a\neq 0)$ اور $p(x)$ کا جزضربی $(x-1)$ ہے۔

$$\Rightarrow P(1)=0$$

$$\Rightarrow a+b+c+d=0$$

یعنی ایک کثیر رکنی کے عددی ضربوں کا مجموعہ صفر ہو تب $(x-1)$ اس کا ایک جزضربی ہے۔

مان لیجیے $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d\,(a\neq 0)$

اور P(x) کا جزضربی $(x+1)$ ہے تب $P(x)\Rightarrow P(-1)=0$

$$\Rightarrow b+d=a+c$$

یعنی جفت قوت ارکان کے عددی ضریبوں کا مجموعہ مساوی ہوتا ہے طاق قوت کے ارکان کے عددی ضریبوں کے لہذا $(x+1)$ جزضربی ہے۔

مثال - 12: بتایئے کہ $x+2$ جزضربی ہے x^3+2x^2+3x+6 کا۔

حل: فرض کرو کہ $p(x)=x^3+2x^2+3x+6$ اور $g(x)=x+2$

تب $g(x)$ کا صفر -2 ہے۔

$$p(-2)=(-2)^3+2(-2)^2+3(-2)+6$$
$$=-8+2(4)-6+6$$
$$=-8+8-6+6$$
$$=0$$

$\therefore$ جزضربی کے مسئلہ کی رو سے $x+2$ جزضربی ہوگا x^3+2x^2+3x+6 کا۔

مثال - 13: K کی قدر معلوم کیجیے۔ اگر $2x-3$ ، $2x^3-9x^2+x+\text{K}$ کا جزضربی ہے۔

حل: $(2x-3)$ جزضربی ہے $p(x)=2x^3-9x^2+x+\text{K}$ کا۔

اگر $2x-3=0$ تب $x=\dfrac{3}{2}$

$\therefore$ $(2x-3)$ کا صفر $\dfrac{3}{2}$ ہے۔

اگر $(2x-3)$ ایک جزضربی $p(x)$ کا تب $p\left(\dfrac{3}{2}\right)=0$

$$p(x)=2x^3-9x^2+x+\text{K}$$

$$\Rightarrow p\left(\frac{3}{2}\right)=2\left(\frac{3}{2}\right)^3-9\left(\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{2}+\text{K}=0$$

$$\Rightarrow 2\left(\frac{27}{8}\right)-9\left(\frac{9}{4}\right)+\frac{3}{2}+\text{K}=0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{27}{4}-\frac{81}{4}+\frac{3}{2}+K=0\right)\times 4$$

$$27 - 81 + 6 + 4K = 0$$

$$-48 + 4K = 0$$

$$4K = 48$$

$$K = 12$$

مثال - 14: بتلایئے کہ $(x-1)$ جز ضربی ہے $x^{10}-1$ اور $x^{11}-1$ کا۔

حل: فرض کرو کہ $p(x) = x^{10}-1$ اور $g(x) = x^{11}-1$

ثابت کرنے کے لیے کہ $(x-1)$ $p(x)$، $g(x)$ دونوں ہی کا جز ضربی ہے یہ کافی ہوگا کہ $p(1) = 0$ اور $g(1) = 0$ ثابت کر دیا جائے۔

اب $g(x) = x^{11}-1$ اور $p(x) = x^{10}-1$

$g(1) = 1^{11}-1$ اور $p(1) = (1)^{10}-1$

$= 1-1$ $\quad$ $= 1-1$

$= 0$ $\quad$ $= 0$

کوشش کیجیے

بتلایئے کہ $(x-1)$ جز ضربی ہے x^n-1 کا۔

اس طرح جز ضربی کے مسئلہ کی رو سے $(x-1)$ جز ضربی ہے $p(x)$ اور $g(x)$ دونوں ہی کا۔

اب ہم $ax + bx + c$ جیسی دو درجی کثیر رکنی کے اجزائے ضربی محسوب کریں گے جہاں a، b اور c مستقل رکن ہیں اور $a \neq 0$

فرض کرو کہ اس کے اجزائے ضربی $(px+q)$ اور $(rx+s)$ ہیں

تب $ax^2+bx+c = (px+q)(rx+s)$

$= prx^2 + (ps + qr)\,x + qs$

x^2، x کے عددی ضریب اور مستقل رکن کا تقابل کرنے پر

$a = pr$

$b = ps + qr$

$c = qs$

یہ ظاہر کرتا ہے کہ b دو اعداد ps اور qs کا مجموعہ ہے۔

جن کا حاصل ضرب $(ps)\,(qr) = (pr)(qs)$

$= ac$

اس لیے $ax^2 = bx + c$ کو اجزائے ضربی میں تحویل کرنے کے لیے ہمیں b کو دو اعداد کے مجموعے کے طور پر لکھنا ہوگا۔

مثال - 15: $3x^2+11x+6$ کے اجزائے ضربی معلوم کیجیے۔

حل: اگر ہم دو اعداد p اور q حاصل کرسکتے ہیں اس طرح کہ $p + q = 1$ اور $pq = 3 \times 6 = 18$ تب ہمیں اجزائے ضرب بی حاصل ہوں گے۔

آیئے 18 کے اجزائے ضربی کے جوڑ دیکھیں گے۔

$(1, 18), (2, 9), (3, 6)$ کے اجزاء میں 2 اور 9، $p + q = 11$ کو مطمئن کرتے ہیں۔

لہٰذا
$$3x^2+11x+6 = 3x^2+2x+9x+6$$
$$= x(3x+2)+3(3x+3)$$
$$= (3x+2)(x+3)$$

یہ کیجیے

1. $6x^2 + 19x + 5$　　2. $10m^2 - 31m - 132$　　3. $12x^2 + 11x + 2$

آیئے ایک مثال پر غور کریں۔

مثال - 16: بتلایئے کہ کیا $2x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 3x - 2$ قابل تقسیم ہے $x^2 - 3x + 2$ سے یا نہیں؟ جز ضربی کے مسئلہ سے آپ کس طرح تصدیق کرسکتے ہیں؟

حل: مقسوم علیہ خطی کثیر رکنی نہیں ہے۔ وسطی رکن کو اجزاء میں بانٹتے ہوئے کسی دو درجی کثیر رکنی کے اجزائے ضربی معلوم کرنا آپ جانتے ہیں۔

$$x^2 - 3x + 2 = x^2 - 2x - x + 2$$
$$= x(x-2) - 1(x-2)$$
$$= (x-2)\,(x-1).$$

بتلانے کے لیے کہ $x^2 - 3x + 2$ کثیر رکنی $2x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 3x - 2$ کا جز ضربی ہے ہمیں ثابت کرنا ہے کہ $(x-2)$ اور $(x-1)$ بھی کثیر رکنی $2x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 3x - 2$ کے اجزائے ضربی ہیں۔

فرض کرو کہ $p(x) = 2x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 3x - 2$

تب $p(2) = 2(2)^4 - 6(2)^3 + 3(2)^2 + 3(2) - 2$
$$= 2(16) - 6(8) + 3(4) + 6 - 2$$
$$= 32 - 48 + 12 + 6 - 2$$
$$= 50 - 50$$
$$= 0$$

جیسا کہ $p(2) = 0$ ‘ $(x-2)$ جز ضربی ہے $p(x)$ کا۔

$$p(1) = 2(1)^4 - 6(1)^3 + 3(1)^2 + 3(1) - 2$$
$$= 2(1) - 6(1) + 3(1) + 3 - 2$$
$$= 2 - 6 + 3 + 3 - 2$$
$$= 8 - 8$$
$$= 0$$

جیسا کہ $p(1) = 0$ تب $(x - 1)$ جز ضربی ہے $p(x)$ کا۔

جیسا کہ دونوں $(x-2)$ اور $(x-1)$ اجزائے ضربی ہیں $p(x)$ کے۔ اس لیے ان کا حاصل ضرب $x^2 - 3x + 2$ بھی جز ضربی ہوگا $p(x) = 2x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 3x$ کا۔

☆ $(x-y)\left(x^n - y^n\right)$ $\quad \forall x \in N$
☆ $(x+y)\left(x^n - y^n\right)$ جہاں پر n جفت ہو
☆ $(x+y)\left(x^n + y^n\right)$ جہاں پر n طاق ہو
☆ $(x-y)\left(x^n + y^n\right)$ $\forall x \in N$ کے لیے ممکن نہیں ہے

مثال - 17: $x^3 - 23x^2 + 142x - 120$ کے اجزائے ضربی معلوم کیجیے

حل: فرض کرو کہ $p(x) = x^3 - 23x^2 + 142x - 120$

آزمائشی طریقہ سے ہمیں معلوم ہے کہ $p(1) = 0$ (تصدیق کیجیے)

اس لیے $(x-1)$ کثیر رکنی $p(x)$ کا جز ضربی ہوگا۔

جب ہم $p(x)$ کو $(x-1)$ سے تقسیم کرتے ہیں تب ہمیں $x^2 - 22x + 120$ حاصل ہوگا۔

حل کا دوسرا طریقہ: (متبادل طریقہ سے)

$$x^3 - 23x^2 + 142x - 120 = x^3 - x^2 - 22x^2 + 22x + 120x - 120$$
$$= x^2(x-1) - 22x(x-1) + 120(x-1) \quad (\text{کیوں؟})$$
$$= (x-1)(x^2 - 22x + 120)$$

$x^2 - 22x + 120$ جو درجہ دوم کی عبارت ہے جس کے درمیان رکن کو تحلیل کر کے اس کے اجزائے ضربی معلوم کیے جاسکتے ہیں۔

$$x^2 - 22x + 120 = x^2 - 12x - 10x + 120$$
$$= x(x-12) - 10(x-12)$$
$$= (x-12)(x-10)$$

جیسا کہ $x^3 - 23x^2 + 142x - 120 = (x-1)(x-10)(x-12).$

نوٹ: $a \mid b$ (اسکو a تقسیم کرتا ہے b کو) پڑھا جاتا ہے یا a جز وضربی ہے b کا

$a \nmid b$ (a‘ b کو تقسیم نہیں کرتا ہے) یعنی a‘ b کا جز وضربی نہیں ہے۔

مشق 2.4

1. کونسی کثیر رکنی کا جز ضربی $(x+1)$ ہے۔

(i) $x^3 - x^2 - x + 1$ (ii) $x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$

(iii) $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 1$ (iv) $x^3 - x^2 - (3 - \sqrt{3})\,x + \sqrt{3}$

2. جز ضربی کے مسئلہ کو استعمال کرتے ہوئے معلوم کیجیے کہ کیا $g(x)$ جز ضربی ہے ذیل کے $f(x)$ کی ہر مثال کے لیے؟

(i) $f(x) = 5x^3 + x^2 - 5x - 1,\ g(x) = x + 1$

(ii) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1,\ g(x) = x + 1$

(iii) $f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6,\ g(x) = x - 2$

(iv) $f(x) = 3x^3 + x^2 - 20x + 12,\ g(x) = 3x - 2$

(v) $f(x) = 4x^3 + 20x^2 + 33x + 18,\ g(x) = 2x + 3$

3. بتلائیے کہ $(x+3)(x-2)$ اور $(x-4)$ اجزائے ضربی ہیں $x^3 - 3x^2 - 10x + 24$ کے۔

4. بتلائیے کہ $(x+4)(x-3)$ اور $(x-7)$ اجزائے ضربی ہیں $x^3 - 6x^2 - 19x + 84$ کے۔

5. اگر دونوں $(x-2)$ اور $\left(x - \frac{1}{2}\right)$ اجزائے ضربی ہیں $px^2 - 5x + r$ کے تو بتلائیے کہ $p = r$

6. اگر $(x^2 - 1)$ اجزائے ضربی ہیں $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ کا تو بتلائیے کہ $a+c+e=b+d=0$

7. اجزائے ضربی معلوم کیجیے۔

(i) $x^3 - 2x^2 - x + 2$ (ii) $x^3 - 3x^2 - 9x - 5$

(iii) $x^3 + 13x^2 + 32x + 20$ (iv) $y^3 + y^2 - y - 1$

8. اگر $ax^2 + bx + c$ اور $bx^2 + ax + c$ کا مشترک جز ضربی $x + 1$ ہے تب بتلائیے کہ $c = 0$ اور $a = b$

9. اگر $x^2 - x - 6$ اور $x^2 + 3x - 18$ کا مشترک جز ضربی $(x - a)$ ہے تب a کی قدر معلوم کیجیے۔

10. اگر $(y-3)$ جز ضربی ہے $y^3 - 2y^2 - 9y + 18$ کا تب بقیہ دو جز ضربی معلوم کیجیے۔

2.6 الجبری متماثلات

اعادہ کیجیے کہ الجبری متماثلات' الجبری مساوات ہوتی ہیں۔ یہ ان تمام متغیرات کے لیے جو ان میں استعمال ہوتی ہیں درست متماثلہ ہوں گی۔ آپ بعض الجبری متماثلات پچھلی جماعتوں میں پڑھ چکے ہیں۔

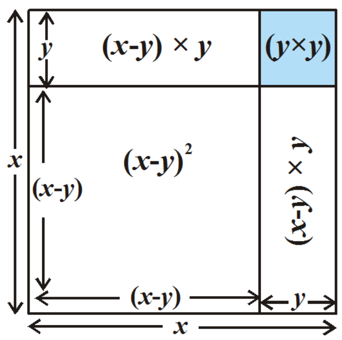
متماثلہ I : $(x+y)^2 \equiv x^2 + 2xy + y^2$

متماثلہ II : $(x-y)^2 \equiv x^2 - 2xy + y^2$

متماثلہ - III : $(x+y)(x-y) \equiv x^2 - y^2$

متماثلہ - IV : $(x + a) (x + b) \equiv x^2 + (a + b)\, x + ab$

جیومترائی ثبوت



متماثلہ $(x-y)^2$ کے لیے

مرحلہ I : x ضلع کا مربع بنائیے۔

مرحلہ II : طول y کو x میں سے تفریق کیجیے۔

مرحلہ III : $(x-y)^2$ محسوب کیجیے۔

$= x^2 - [(x-y)\,y + (x-y)\,y + y^2]$

$= x^2 - xy + y^2 - xy + y^2 - y^2$

$= x^2 - 2xy + y^2$

کوشش کیجیے

دیگر متماثلات کے لیے جیومٹریائی خاکے کھینچیے۔

(i) $(x+y)^2 \equiv x^2 + 2xy + y^2$ (ii) $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$ (iii) $(x+a)(x+b) \equiv x^2 + (a+b)\,x + ab$

(iv) $(x+a)(x+2)(x+c)=x+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x+abc$

یہ کیجیے

متماثلات کا استعمال کرتے ہوئے حسب ذیل کا حاصل ضرب معلوم کیجیے۔

(i) $(x + 5)(x + 5)$ (ii) $(P - 3)(P + 3)$ (iii) $(4 - 1)(4 - 1)$

(iv) $(t + 2)(t + 4)$ (v) 102×98 (vi) $(x+1)(x+2)(x+3)$

متماثلات، الجبرئی عبارتوں کے اجزائے ضربی محسوب کرنے میں مددگار ہوتی ہیں۔

آیئے چند مثالوں پر غور کرتے ہیں۔

مثال - 18: اجزائے ضربی میں تحویل کیجیے۔

(i) $x^2 + 5x + 4$ (ii) $9x^2 - 25$

(iii) $25a^2 + 40ab + 16b^2$ (iv) $49x^2 - 112xy + 64y^2$

حل: (i) یہاں $x^2 + 5x + 4 = x^2 + (4 + 1)x + (4)(1)$

متماثلات کا تقابل کرنے پر $(x + a)(x + b) \equiv x^2 + (a + b)x + ab$

ہمیں حاصل ہوتا ہے $(x + 4)(x + 1)$

(ii) $9x^2 - 25 = (3x)^2 - (5)^2$

اب ہم متماثلہ III سے اس عبارت کا تقابل کریں گے۔ $x^2 - y^2 \equiv (x + y)(x - y)$ ہم حاصل کریں گے۔

$\therefore\ 9x^2 - 25 = (3x + 5)(3x - 5)$

$\star\ (x+y)^2+(x-y)^2=2(x^2+y^2)$

$\star\ (x+y)^2-(x-y)^2=4xy$

(iii) یہاں پر آپ دیکھ سکتے ہیں کہ

$$25a^2 + 40ab + 16b^2 = (5a)^2 + 2(5a)(4b) + (4b)^2$$

متماثلہ عبارت $x^2 + 2xy + y^2$ کا تقابل کرنے پر

$x = 5a$ اور $y = 4b$

متماثلہ I استعمال کرنے پر $(x + y)^2 \equiv x^2 + 2xy + y^2$

$$25a^2 + 40ab + 16b^2 = (5a + 4b)$$

$$= (5a + 4b)(5a + 4b).$$

(iv) یہاں $49x^2 - 112xy + 64y^2$

اور $49x^2 = (7x)^2, \quad 64y^2 = (8y)^2$

$$112\, xy = 2(7x)(8y)$$

اب اس کا تقابل متماثلہ II سے کرنے پر

$$(x - y)^2 \equiv x^2 - 2xy + y^2$$

ہمیں یہ حاصل ہوتا ہے

$$49x^2 - 112xy + 64y^2 = (7x)^2 - 2(7x)(8y) + (8y)^2$$

$$= (7x - 8y)^2$$

$$= (7x - 8y)(7x - 8y)$$

یہ کیجیے

ذیل کی عبارتوں کو متماثلات کے استعمال سے اجزائے ضربی میں تحویل کیجیے۔

(i) $49a^2 + 70ab + 25b^2$ (ii) $\frac{9}{16}x^2 - \frac{y^2}{9}$

(iii) $t^2 - 2t + 1$ (iv) $x^2 + 3x + 2$

یہاں یہ بات قابل ذکر ہے کہ تمام متماثلات دو رکنی کا حاصل ضرب ہیں۔ اب ہم متماثلہ I کو سہ رکنی $x + y + z$ تک توسیع دیں گے۔ ہم $(x + y + z)^2$ محسوب کریں گے۔

فرض کرو کہ $x + y = t$ $\quad (x + y + z)^2 = (t + z)^2$

متماثلہ I استعمال کرنے پر $= t^2 + 2tz + z^2$

't' کی قدر درج کرنے پر $= (x + y)^2 + 2(x + y)z + z^2$

$= x^2 + 2xy + y^2 + 2xz + 2yz + z^2$

ارکان کو ترتیب میں رکھنے پر $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$

متبادل طریقہ:

ارکان کی دوبارہ درجہ بندی کرتے ہوئے آپ $(x + y + z)^2$ بھی محسوب کرسکتے ہیں‘

$$[(x + y) + z]^2 = (x + y)^2 + 2(x + y)(z) + (z)^2$$

$$= x^2 + 2xy + y^2 + 2xz + 2yz + z^2 \qquad \text{[متماثلہ I کی روسے]}$$

$$= x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2xz$$

عبارت کی قدر معلوم کرنے کے لیے آپ کونسے دوسرے انداز میں ارکان کی دوبارہ ترتیب کرسکتے ہیں۔

ہم ذیل کی اکائیاں حاصل کریں گے۔

متماثلہ V : $(x + y + z)^2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$

مثال - 19: متماثلہ استعمال کرتے ہوئے $(2a + 3b + 5)^2$ کو پھیلایئے۔

حل: دی گئی عبارت کا $(x + y + z)^2$ سے تقابل کرنے پر

ہمیں $x = 2a$‘ $y = 3b$ اور $z = 5$ حاصل ہوتا ہے۔

متماثلہ V کا استعمال کرنے پر

$$(2a + 3b + 5)^2 = (2a)^2 + (3b)^2 + (5)^2 + 2(2a)(3b) + 2(3b)(5) + 2(5)(2a)$$

$$= 4a^2 + 9b^2 + 25 + 12ab + 30b + 20a$$

مثال - 20: حاصل ضرب $(5x - y + z)(5x - y + z)$ معلوم کیجیے۔

حل: یہاں $(5x - y + z)(5x - y + z) = (5x - y + z)^2$

$$= [5x + (-y) + z]^2$$

متماثلہ V استعمال کرنے پر $(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$ ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$(5x + (-y) + z)^2 = (5x)^2 + (-y)^2 + (z)^2 + 2(5x)(-y) + 2(-y)(z) + 2(z)(5x)$$

$$= 25x^2 + y^2 + z^2 - 10xy - 2yz + 10zx$$

مثال - 21: اجزائے ضربی میں تحویل کیجیے $4x^2 + 9y^2 + 25z^2 - 12xy - 30yz + 20zx$

حل: ہم جانتے ہیں

$$4x^2 + 9y^2 + 25z^2 - 12xy - 30yz + 20zx$$

$$= [(2x)^2 + (-3y)^2 + (5z)^2 + 2(2x)(-3y) + 2(-3y)(5z) + 2(5z)(2x)]$$

متماثلہ V سے تقابل کرنے پر

$$(x + y + z)^2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$$
$$= (2x - 3y + 5z)^2$$
$$= (2x - 3y + 5z)(2x - 3y + 5z)$$

یہ کیجیے

(i) $(p + 2q - 3z)^2$ کو پھیلائیے۔

(ii) $(4x - 2y - 3z)^2$ کو متماثلہ کے استعمال سے پھیلائیے۔

(iii) $4a^2 + b^2 + c^2 - 4ab + 2bc - 4ca$ کو متماثلہ کے استعمال سے اجزائے ضربی میں تحویل کیجیے۔

اب اس کو مزید آگے بڑھاتے ہوئے $(x + y)^2$ معلوم کریں گے۔

اب تک ہم نے دو دو رجی ارکان کی متماثلات پر غور کیا۔ آیئے ہم متماثلہ I کو $(x + y)^3$ تک توسیع دیں گے۔

ہم جانتے ہیں $(x + y)^3 = (x + y)^2 (x + y)$

$$= (x^2 + 2xy + y^2)(x + y)$$
$$= x(x^2 + 2xy + y^2) + y(x^2 + 2xy + y^2)$$
$$= x^3 + 2x^2y + xy^2 + x^2y + 2xy^2 + y^3$$
$$= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$
$$= x^3 + 3xy(x + y) + y^3$$
$$= x^3 + y^3 + 3xy(x + y).$$

ہمیں ذیل کی متماثلہ حاصل ہوگی۔

متماثلہ VI : $(x + y)^3 \equiv x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$

کوشش کیجیے

$(x - y)^3$ کی قیمت بغیر ضرب دیئے کیسے معلوم کریں گے؟ ضرب کا عمل کیے بغیر تصدیق کیجیے۔

دوسری متماثلہ آپ اس طرح حاصل کریں گے۔

متماثلہ VII : $(x - y)^3 \equiv x^3 - y^3 - 3xy(x - y)$
$\equiv x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$

آیئے بعض مثالوں پر غور کریں جہاں متماثلات استعمال کی گئی ہیں۔

مثال - 22: ذیل کے مکعب کا پھیلاؤ لکھیے ۔

(i) $(2a + 3b)^3$ (ii) $(2p - 5)^3$

حل: (i) دی ہوئی عبارت کا تقابل $(x + y)^3$ سے کرنے پر ہمیں $x = 2a, y = 3b$ حاصل ہوتا ہے۔

متماثلہ IV کے استعمال سے

$$(2a + 3b)^3 = (2a)^3 + (3b)^3 + 3(2a)(3b)\,(2a + 3b)$$
$$= 8a^3 + 27b^3 + 18ab\,(2a + 3b)$$
$$= 8a^3 + 27b^3 + 36a^2b + 54\,ab^2$$
$$= 8a^3 + 36a^2b + 54ab^2 + 27b^3.$$

(ii) دی ہوئی عبارت کا تقابل $(x + y)^3$ سے کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے $x = 2p, y = 5$

متماثلہ VII استعمال کرنے پر

$$(2p - 5)^3 = (2p)^3 - (5)^3 - 3(2p)(5)\,(2p - 5)$$
$$= 8p^3 - 125 - 30p\,(2p - 5)$$
$$= 8p^3 - 125 - 60p^2 + 150p$$
$$= 8p^3 - 60p^2 + 150p - 125.$$

مثال - 23: موزوں متماثلات کو استعمال کرتے ہوئے قدر معلوم کیجیے۔

(i) $(103)^3$ (ii) $(99)^3$

حل: (i) ہم جانتے ہیں

$$(103)^3 = (100 + 3)^3$$

$(x + y)^3 \equiv x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$ سے تقابل کرنے پر

$$= (100)^3 + (3)^3 + 3(100)\,(3)\,(100 + 3)$$
$$= 1000000 + 27 + 900(103)$$
$$= 1000000 + 27 + 92700$$
$$= 1092727.$$

(ii) ہم جانتے ہیں کہ $(99)^3 = (100 - 1)^3$

$(x - y)^3 \equiv x^3 - y^3 - 3xy(x - y)$ سے تقابل کرنے پر

$$= (100)^3 - (1)^3 - 3(100)(1)\,(100 - 1)$$
$$= 1000000 - 1 - 300\,(99)$$

$= 1000000 - 1 - 29700$

$= 970299.$

مثال - 24: $8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3$ کے اجزائے ضربی معلوم کیجیے۔

حل: دی گئی عبارت کو اس طرح بھی لکھا جا سکتا ہے۔

$$8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3 = (2x)^3 + 3(2x)^2(3y) + 3(2x)(3y)^2 + (3y)^3$$

متماثلہ VI سے تقابل کرنے پر $(x + y)^3 \equiv x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

ہم حاصل کرتے ہیں $= (2x + 3y)^3$

$= (2x + 3y)(2x + 3y)(2x + 3y).$

اجزائے ضربی ہیں

یہ کیجیے

(1) $(x + 1)^3$ کا پھیلاؤ متماثلہ کا استعمال کرتے ہوئے کیجیے۔

(2) $(3m - 2m)^3$ کو محسوب کیجیے۔

(3) $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ کو اجزائے ضربی میں تحویل کیجیے۔

غور کرنے پر $(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

کے پھیلاؤ سے ہم یہ حاصل کریں گے۔

$$= x(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) + y(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$$
$$+ z(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$$

$$= x^3 + \cancel{xy^2} + \cancel{xz^2} - \cancel{x^2y} - xyz - \cancel{x^2z} + \cancel{x^2y} + y^3 + \cancel{yz^2} - \cancel{xy^2} - \cancel{y^2z} - xyz + \cancel{x^2z}$$
$$+ \cancel{y^2z} + z^3 - xyz - \cancel{yz^2} - \cancel{xz^2}$$

$= x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ (مختصر کرنے پر)

اس طرح

متماثلہ VIII: $\boxed{(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz) \equiv x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz}$

مثال - 25: $(2a + b + c)(4a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - bc - 2ca)$ حاصل ضرب معلوم کیجیے۔

حل: یہاں حاصل ضرب اس طرح لکھا گیا ہے۔

$$= (2a + b + c)\,[(2a)^2 + b^2 + c^2 - (2a)(b) - (b)(c) - (c)(2a)]$$

متماثلہ VIII سے تقابل کرنے پر

$$(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) \equiv x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$$

$$= (2a)^3 + (b)^3 + (c)^3 - 3(2a)(b)(c)$$

$$= 8a^3 + b^3 + c^3 - 6abc$$

مثال - 26: $a^3 - 8b^3 - 64c^3 - 24abc$ کو اجزائے ضربی میں تحویل کیجیے۔

حل: یہاں دی گئی عبارت کو اس طرح لکھا جاتا ہے۔

$$a^3 - 8b^3 - 64c^3 - 24abc = (a)^3 + (-2b)^3 + (-4c)^3 - 3(a)(-2b)(-4c)$$

اکائی VIII سے تقابل کرنے پر

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \equiv (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$$

ہمیں حاصل ہوگا

$$= (a - 2b - 4c)\,[(a)^2 + (-2b)^2 + (-4c)^2 - (a)(-2b) - (-2b)(-4c) - (-4c)(a)]$$

$$= (a - 2b - 4c)(a^2 + 4b^2 + 16c^2 + 2ab - 8bc + 4ca).$$

یہ کیجیے

(1) بغیر ضرب دیئے حاصل ضرب محسوب کیجیے۔ $(a - b - c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab + bc - ca)$

(2) $27a^3 + b^3 + 8c^3 - 18abc$ متماثلہ کے استعمال سے اجزائے ضربی میں تحویل کیجیے۔

مثال - 27: مستطیل کا رقبہ $2x^2 + 9x - 5$ ہے جس کے لیے ممکنہ طول اور عرض کی پیمائش معلوم کیجیے۔

حل: فرض کرو کہ l اور b مستطیل کے طول اور عرض ہیں۔

مستطیل کا رقبہ $= 2x^2 + 9x - 5$

$$lb = 2x^2 + 9x - 5$$

$$= 2x^2 + 10x - x - 5$$

$$= 2x(x + 5) - 1(x + 5)$$

$$= (x + 5)(2x - 1)$$

طول = $(x + 5)$

عرض = $(2x - 1)$

فرض کرو کہ $x = 1, \; l = 6, \; b = 1$

$x = 2, \; l = 7, \; b = 3$

$x = 3, \; l = 8, \; b = 5$

....

....

کیا آپ مزید اور قیمتیں معلوم کرسکتے ہیں۔

مشق 2.5

1. ذیل کے حاصل ضرب معلوم کرنے کے لیے موزوں متماثلات استعمال کیجیے۔

(i) $(x+5)(x+2)$ (ii) $(x-5)(x-5)$ (iii) $(3x+2)(3x-2)$

(iv) $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)$ (v) $(1+x)(1+x)$

2. بغیر ضرب دیئے حاصل ضرب معلوم کیجیے۔

(i) 101×99 (ii) 999×999 (iii) $50\frac{1}{2} \times 49\frac{1}{2}$

(iv) 501×501 (v) 30.5×29.5

3. موزوں متماثلات کو استعمال کرتے ہوئے اجزائے ضربی معلوم کیجیے۔

(i) $16x^2 + 24xy + 9y^2$ (ii) $4y^2 - 4y - 1$

(iii) $4x^2 - \frac{y^2}{25}$ (iv) $18a^2 - 50$

(v) $x^2 + 5x + 6$ (vi) $3p^2 - 24p + 36$

4. موزوں متماثلات کی مدد سے پھیلاؤ لکھیے۔

(i) $(x+2y+4z)^2$ (ii) $(2a-3b)^3$ (iii) $(-2a+5b-3c)^2$

(iv) $\left(\frac{a}{4}-\frac{b}{2}+1\right)^2$ (v) $(p+1)^3$ (vi) $\left(x-\frac{2}{3}y\right)^3$

5. اجزائے ضربی میں تحویل کیجیے۔

(i) $25x^2 + 16y^2 + 4z^2 - 40xy + 16yz - 20xz$

(ii) $9a^2 + 4b^2 + 16c^2 + 12ab - 16bc - 24ca$

6. اگر $a + b + c = 9$ اور $ab + bc + ca = 26$ تب $a^2 + b^2 + c^2$ معلوم کیجیے۔

7. موزوں متماثلات کے ذریعہ قدر محسوب کیجیے۔

(i) $(99)^3$ (ii) $(102)^3$ (iii) $(998)^3$ (iv) $(1001)^3$

8. ذیل میں ہر ایک کے اجزائے ضربی بنائیے۔

(i) $8a^3 + b^3 + 12a^2b + 6ab^2$ (ii) $8a^3 - b^3 - 12a^2b + 6ab^2$

(iii) $1 - 64a^3 - 12a + 48a^2$ (iv) $8p^3 - \frac{12}{5}p^2 + \frac{6}{25}p - \frac{1}{125}$

9. تصدیق کیجیے۔ (i) $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$ (ii) $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$

غیر صفری مثبت عدد لے کر ضربی عمل سے تصدیق کیجیے۔ کیا آپ اس کو متماثلہ کہہ سکتے ہیں۔

10. اجزائے ضربی معلوم کیجیے (i) $27a^3 + 64b^3$ (ii) $343y^3 - 1000$

11. متماثلہ کو استعمال کرتے ہوئے اجزائے ضربی معلوم کیجیے $27x^3 + y^3 + z^3 - 9xyz$

12. جانچیے $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = \frac{1}{2}(x+y+z)[(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2]$

13. اگر $x + y + z = 0$ ہو تب بتلائیے کہ $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$

14. مکعبوں کو محسوب کیے بغیر ذیل کی قیمتیں معلوم کیجیے۔

(i) $(-10)^3 + (7)^3 + (3)^3$ (ii) $(28)^3 + (-15)^3 + (-13)^3$

(iii) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 - \left(\frac{5}{6}\right)^3$ (iv) $(0.2)^3 - (0.3)^3 + (0.1)^3$

15. مستطیل کے طول اور عرض کے لیے ممکنہ قیمتیں معلوم کیجیے جن کا رقبہ دیا گیا ہے۔

(i) $4a^2 + 4a - 3$ (ii) $25a^2 - 35a + 12$

16. مکعب نما کے ابعاد کے لیے ممکنہ کثیر رکنی قیمتیں معلوم کیجیے جن کے حجم دیے گئے ہیں۔

(i) $3x^3 - 12x$ (ii) $12y^2 + 8y - 20$.

17. اگر $2(a^2+b^2) = (a+b)^2$ ہو تو ثابت کیجیے کہ $a = b$

ہم نے کیا سیکھا؟

اس باب میں آپ نے حسب ذیل نکات کو سیکھا ہے۔

1. کثیر رکنی $p(x)$ ایک متغیر x میں الجبری عبارت ہے اس طرح لکھی جاسکتی ہے۔
$p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1 x + a_0$, جہاں $a_0, a_1, a_2, ... a_n$ ،
$x^0, x^1, x^2, ... x^n$ کے بالترتیب عددی ضریب ہیں۔ اگر $a_n \neq 0$ ہوتو n کو کثیر رکنی کا درجہ کہتے ہیں۔
$a_{n-1}x^{n-1} ... a_0$ کو کثیر رکنی $p(x)$ کا رکن کہتے ہیں۔

2. کثیر رکنیوں کو ایک رکنی، دو رکنی، سہ رکنی وغیرہ کی اُن کے ارکان کی تعداد کے مطابق، زمرہ بندی کی گئی ہے۔

3. کثیر رکنیوں کو خطی کثیر رکنی، دودرجی کثیر رکنی، سہ درجی کثیر رکنی وغیرہ کے نام ان کے درجہ کے اعتبار سے دیتے ہیں۔

4. اگر $p(a) = 0$ کے لیے ایک حقیقی عدد 'a' کثیر رکنی $p(x)$ کا صفر کہلاتا ہے۔ ایسی صورت میں 'a' کو کثیر رکنی مساوات $p(x) = 0$ کا ریشہ بھی کہتے ہیں۔

5. ہر خطی کثیر رکنی ایک متغیر میں صرف ایک صفر رکھتی ہے جب کہ ایک غیر مستقل کثیر رکنی کا صفر نہیں ہوتا۔

6. مسئلہ باقی: اگر $p(x)$ ایک ایسا کثیر رکنی ہے جس کا درجہ ایک یا ایک سے زائد ہو اور $p(x)$ کو $(x - a)$ خطی کثیر رکنی سے تقسیم کیا جائے تو باقی $P(a)$ ہوگا۔

7. جزضربی کا مسئلہ: اگر $x - a$ کثیر رکنی $p(x)$ کا جز ضربی ہے تب $p(a) = 0$ اور پھر اگر $p(a) = 0$ تب $(x - a)$ کثیر رکنی کا جز ضربی ہوگا۔

8. بعض متماثلات ذیل میں دی گئی ہیں۔

(i) $(x + y + z)^2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$

(ii) $(x + y)^3 \equiv x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$

(iii) $(x - y)^3 \equiv x^3 - y^3 - 3xy(x - y)$

(iv) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \equiv (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

(v) $x^3 + y^3 \equiv (x + y)(x^2 - xy + y^2)$

(vi) $x^3 - y^3 \equiv (x - y)(x^2 + xy + y^2)$

(vii) $x^4 + y^4 \equiv ((x+y)^2 + y^2)((x - y)^2+y^2)$

دماغی ورزش

اگر $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+...}}} = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x...}}}$ تب x کی قدر کیا ہے