પ્રકરણ 6

વિકલિતના ઉપયોગો

❖ *With the Calculus as a key, Mathematics can be successfully applied to the explanation of the course of Nature." — WHITEHEAD* ❖

6.1 પ્રાસ્તાવિક

પ્રકરણ 5 માં આપણે સંયોજિત વિધેય, ત્રિકોણમિતીય પ્રતિવિધેય, ગૂઢ વિધેય, ઘાતાંકીય વિધેય અને લઘુગણકીય વિધેયોના વિકલિતો શોધવાની કેટલીક રીતો શીખ્યાં. આ પ્રકરણમાં, આપણે ઈજનેરીવિદ્યા, વિજ્ઞાન, સામાજિક વિજ્ઞાન જેવી ભિન્ન વિદ્યાશાખાઓ ઉપરાંત અન્ય ક્ષેત્રોમાં વિકલિતના ઉપયોગ વિશે અભ્યાસ કરીશું. ઉદાહરણ તરીકે વિકલિત (i) કોઈ ચલ રાશિમાં થતા ફેરફારનો દર નક્કી કરવા (ii) વક્રના કોઈ બિંદુ આગળના સ્પર્શક તથા અભિલંબનાં સમીકરણો શોધવા (iii) વિધેયના આલેખ પરથી આપણને વિધેય કયાં બિંદુઓ આગળ (સ્થાનીય) મહત્તમ કે ન્યૂનતમ મૂલ્ય ધારણ કરશે તે નક્કી કરવામાં માર્ગદર્શન આપે છે. આપણે વિકલિતો નિર્ણાયક બિંદુઓનાં સ્થાન નક્કી કરવામાં કેવી રીતે ઉપયોગી છે તે શીખીશું. વળી, વિધેય કયા અંતરાલમાં વધે છે અથવા ઘટે છે તે અંતરાલો શોધવા માટે આપણે વિકલિતનો ઉપયોગ કરીશું. અંતમાં આપણે કોઈ ચોક્કસ રાશિનાં આસન્ન મૂલ્યો શોધવા માટે પણ વિકલિતનો ઉપયોગ કરીશું.

6.2 રાશિમાં થતા ફેરફારનો દર

અંતર s માં સમય t ની સાપેક્ષે થતા ફેરફારનો દર વિકલિત $\frac{ds}{dt}$ વેગ દર્શાવે છે. આ જ પ્રકારે, જ્યારે કોઈ એક રાશિ y માં અન્ય રાશિ x ની સાપેક્ષે ફેરફાર થાય ત્યારે વિધેય $y = f(x)$ માટે, $\frac{dy}{dx}$ (અથવા $f'(x)$) એ y માં x ની સાપેક્ષે થતા ફેરફારનો દર દર્શાવે છે અને $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0}$ (અથવા $f'(x_0)$) એ $x = x_0$ આગળ y માં x ની સાપેક્ષે થતા ફેરફારનો દર સૂચવે છે.

વળી, જો કોઈ બે ચલ x તથા y માં અન્ય ચલ t ની સાપેક્ષે ફેરફાર થતો હોય એટલે કે, જો $x = f(t)$ તથા $y = g(t)$ આપેલ હોય અને $\frac{dx}{dt} \neq 0$ હોય, તો સાંકળ નિયમ દ્વારા $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$ મેળવી શકાય.

આથી, y માં x ની સાપેક્ષે થતા ફેરફારના દરની ગણતરી y તથા x બંનેમાં t ની સાપેક્ષે થતા ફેરફારના દરનો ઉપયોગ કરી શોધી શકાય.

ચાલો, આપણે કેટલાંક ઉદાહરણો સમજીએ.

ઉદાહરણ 1 : 5 સેમી ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળના ક્ષેત્રફળમાં તેની ત્રિજ્યાને સાપેક્ષ થતા ફેરફારનો દર શોધો.

ઉકેલ : r ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળનું ક્ષેત્રફળ $A = \pi r^2$ દ્વારા મેળવી શકાય.

આથી, વર્તુળના ક્ષેત્રફળમાં તેની ત્રિજ્યાને સાપેક્ષ થતા ફેરફારનો દર $\frac{dA}{dr} = \frac{d}{dr}(\pi r^2) = 2\pi r$ દ્વારા મળે.

જ્યારે, $r = 5$ સેમી હોય ત્યારે $\frac{dA}{dr} = 10\pi$.

આથી, વર્તુળના ક્ષેત્રફળમાં તેની ત્રિજ્યાને સાપેક્ષ 10π સેમી^{2}/સેમીના દરે ફેરફાર થાય છે.

ઉદાહરણ 2 : એક સમઘનનું કદ 9 સેમી^{3}/સે ના દરથી વધે છે. જ્યારે ઘનની ધારની લંબાઈ 10 સેમી હોય ત્યારે તેના પૃષ્ઠફળના વધવાનો દર શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે સમઘનની ધારની લંબાઈ x, તેનું ઘનફળ V અને પૃષ્ઠફળ S છે. અહીં $V = x^3$ તથા $S = 6x^2$ છે. x એ સમય t નું વિધેય છે.

હવે, $\frac{dV}{dt} = 9$ સેમી^{3}/સે આપેલ છે.

આથી, $9 = \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}(x^3) = \frac{d}{dx}(x^3) \cdot \frac{dx}{dt}$ (સાંકળ નિયમ પરથી)

$$\therefore \quad 9 = 3x^2 \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$\therefore \quad \frac{dx}{dt} = \frac{3}{x^2} \qquad ...(1)$$

હવે, $\frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt}(6x^2) = \frac{d}{dx}(6x^2) \cdot \frac{dx}{dt}$ (સાંકળ નિયમ પરથી)

$$= 12x \cdot \left(\frac{3}{x^2}\right) \qquad ((1) \text{ પરથી})$$

$$= \frac{36}{x}$$

આથી, જ્યારે $x = 10$ સેમી હોય, ત્યારે, $\frac{dS}{dt} = \frac{36}{10} = 3.6$ સેમી^{2}/સે

ઉદાહરણ 3 : શાંત સરોવરમાં એક પથ્થર નાખવામાં આવે છે અને પાણીમાં વર્તુળાકાર વમળો સર્જાય છે. આ વર્તુળાકાર વમળોની ત્રિજ્યા 4 સેમી/સે ની ઝડપે વધે છે. જ્યારે વર્તુળાકાર વમળની ત્રિજ્યા 10 સેમી હોય ત્યારે આ વર્તુળાકાર વમળોનું ક્ષેત્રફળ કેટલી ઝડપે વધે છે ?

ઉકેલ : r ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળનું ક્ષેત્રફળ $A = \pi r^2$ છે. આથી, વર્તુળના ક્ષેત્રફળ A માં સમય t ની સાપેક્ષે થતા ફેરફારનો દર

$$\frac{dA}{dt} = \frac{d}{dt}(\pi r^2) = \frac{d}{dr}(\pi r^2) \cdot \frac{dr}{dt} \qquad (\text{સાંકળ નિયમ પરથી})$$

$$= 2\pi r \cdot \frac{dr}{dt}$$

વળી, $\frac{dr}{dt} = 4$ સેમી/સે આપેલ છે.

$\therefore$ જ્યારે $r = 10$ સેમી હોય, ત્યારે

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi(10)(4) = 80\pi \text{ સેમી}^2\text{/સે}$$

આથી, જ્યારે $r = 10$ સેમી હોય, ત્યારે વર્તુળાકાર વમળોનું ક્ષેત્રફળ 80π સેમી^{2}/સે ની ઝડપે વધે છે.

નોંધ : જો $\frac{dy}{dx} > 0$ હોય તો અને તો જ આપણે કહીએ છીએ કે, જેમ x વધે છે તેમ y વધે છે તથા $\frac{dy}{dx} < 0$ હોય તો ને તો જ આપણે કહીએ છીએ કે જેમ x વધે છે તેમ y ઘટે છે.

ઉદાહરણ 4 : એક લંબચોરસની લંબાઈ x, 3 સેમી/મિનિટના દરે ઘટે છે તથા તેની પહોળાઈ y, 2 સેમી/મિનિટના દરથી વધે છે. જ્યારે $x = 10$ સેમી અને $y = 6$ સેમી હોય, ત્યારે (a) લંબચોરસની પરિમિતિ અને (b) લંબચોરસના ક્ષેત્રફળમાં થતા ફેરફારનો દર શોધો.

ઉકેલ : લંબચોરસની લંબાઈ x, સમય t ની સાપેક્ષે ઘટે છે અને પહોળાઈ y, સમય t ની સાપેક્ષે વધે છે.

આથી, $\frac{dx}{dt} = -3$ સેમી/મિનિટ અને $\frac{dy}{dt} = 2$ સેમી/મિનિટ

(a) લંબચોરસની પરિમિતિ $P = 2(x + y)$

$$\therefore \quad \frac{dP}{dt} = 2\left(\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt}\right)$$

$$= 2(-3 + 2)$$

$$= -2 \text{ સેમી/મિનિટ}$$

(b) લંબચોરસનું ક્ષેત્રફળ $A = x \cdot y$

$$\therefore \quad \frac{dA}{dt} = x\frac{dy}{dt} + y\frac{dx}{dt}$$

$$= 10(2) + 6(-3) \qquad (x = 10 \text{ સેમી અને } y = 6 \text{ સેમી})$$

$$= 2 \text{ સેમી}^2\text{/મિનિટ}$$

ઉદાહરણ 5 : એક વસ્તુના x એકમના ઉત્પાદનનો કુલ ખર્ચ (રૂપિયામાં) $C(x) = 0.005\,x^3 - 0.02\,x^2 + 30\,x + 5000$ દ્વારા મળે છે. જ્યારે 3 એકમનું ઉત્પાદન કરવામાં આવે ત્યારે સીમાંત ખર્ચ શોધો. સીમાંત ખર્ચ એટલે ઉત્પાદનના કોઈ પણ સ્તરે ઉત્પાદિત એકમની સંખ્યાને સાપેક્ષ કુલ ખર્ચમાં થતા ફેરફારનો દર.

ઉકેલ : સીમાંત ખર્ચ એટલે ઉત્પાદનના કોઈ પણ સ્તરે ઉત્પાદિત એકમની સંખ્યાને સાપેક્ષ કુલ ખર્ચમાં થતા ફેરફારનો દર.

$\therefore$ સીમાંત ખર્ચ (MC - ***Marginal Cost***) $= \frac{dC}{dx} = 0.005\,(3x^2) - 0.02\,(2x) + 30$

જ્યારે $x = 3$ હોય ત્યારે, $MC = 0.015\,(3^2) - 0.04\,(3) + 30$

$$= 0.135 - 0.12 + 30$$

$$= 30.015$$

આથી, માંગેલ સીમાંત ખર્ચ ₹ 30.02 (આસન્ન મૂલ્ય) છે.

ઉદાહરણ 6 : એક વસ્તુના x એકમના વેચાણમાંથી થતી રૂપિયામાં કુલ આવક $R(x) = 3x^2 + 36x + 5$ દ્વારા મળે છે. જ્યારે $x = 5$ હોય ત્યારે સીમાંત આવક શોધો. સીમાંત આવક એટલે વેચાયેલા કુલ એકમોને સાપેક્ષ કુલ આવકમાં થતા ફેરફારનો દર છે.

ઉકેલ : સીમાંત આવક એ વેચાયેલા કુલ એકમોને સાપેક્ષ થતી કુલ આવકના ફેરફારનો દર દર્શાવે છે.

$\therefore$ સીમાંત આવક (MR - ***Marginal Revenue***) $= \dfrac{dR}{dx} = 6x + 36$

જ્યારે $x = 5$ હોય ત્યારે, $MR = 6(5) + 36 = 66$

આથી, માંગેલ સીમાંત આવક ₹ 66 છે.

સ્વાધ્યાય 6.1

1. જ્યારે (a) $r = 3$ સેમી તથા (b) $r = 4$ સેમી હોય ત્યારે વર્તુળના ક્ષેત્રફળમાં તેની ત્રિજ્યા r ને સાપેક્ષ થતા ફેરફારનો દર શોધો.
2. એક સમઘનનું કદ 8 સેમી^{3}/સેના દરથી વધે છે. જ્યારે સમઘનની ધારની લંબાઈ 12 સેમી હોય ત્યારે તેનું પૃષ્ઠફળ કેટલી ઝડપથી વધે ?
3. એક વર્તુળની ત્રિજ્યા એકધારી 3 સેમી/સે ના દરથી વધે છે. જ્યારે વર્તુળની ત્રિજ્યા 10 સેમી હોય ત્યારે વર્તુળના ક્ષેત્રફળમાં થતા વધારાનો દર શોધો.
4. એક સમઘનની ધાર 3 સેમી/સે ના દરથી વધે છે. જ્યારે સમઘનની ધારની લંબાઈ 10 સેમી હોય ત્યારે તે સમઘનનું ઘનફળ કેટલી ઝડપથી વધે ?
5. શાંત સરોવરમાં એક પથ્થર નાંખવામાં આવે છે અને પાણીમાં વર્તુળાકાર વમળો સર્જાય છે. વર્તુળાકાર વમળોની ત્રિજ્યા 5 સેમી/સે ની ઝડપે વધે છે. જ્યારે વર્તુળાકાર વમળની ત્રિજ્યા 8 સેમી હોય, ત્યારે આ વર્તુળાકાર વમળોનું ક્ષેત્રફળ કેટલી ઝડપે વધે છે ?
6. એક વર્તુળની ત્રિજ્યા 0.7 સેમી/સે ના દરે વધે છે, તો વર્તુળના પરિઘના વધવાનો દર કેટલો હશે ?
7. એક લંબચોરસની લંબાઈ x, 5 સેમી/મિનિટના દરે ઘટે છે અને તેની પહોળાઈ 4 સેમી/મિનિટના દરે વધે છે. જ્યારે $x = 8$ સેમી અને $y = 6$ સેમી હોય, ત્યારે (a) લંબચોરસની પરિમિતિ અને (b) લંબચોરસના ક્ષેત્રફળમાં થતા ફેરફારનો દર શોધો.
8. એક ગોળાકાર ફુગ્ગામાં તેનું કદ 900 સેમી^{3}/સે ના દરે વધે એવી રીતે હવા ભરવામાં આવે છે. જ્યારે ફુગ્ગાની ત્રિજ્યા 15 સેમી હોય ત્યારે ત્રિજ્યાના વધવાનો દર શોધો. ફુગ્ગો ગોળાકાર જ રહે છે.
9. એક ગોળાકાર ફુગ્ગાની ત્રિજ્યા ચલિત થાય છે અને તે ફુગ્ગો ગોળાકાર જ રહે છે. જ્યારે તેની ત્રિજ્યા 10 સેમી હોય ત્યારે તેના ઘનફળમાં ત્રિજ્યાને સાપેક્ષ થતા વધારાનો દર શોધો.
10. એક 5 મીટર લાંબી નિસરણી દીવાલે ટેકવી છે. સીડીનો નીચેનો છેડો જમીન પર 2 સેમી/સે ના દરે દીવાલથી દૂર લઈ જવામાં આવે છે. જ્યારે સીડીનો નીચેનો છેડો દીવાલથી 4 મીટર દૂર હોય, ત્યારે દીવાલ પર નિસરણીની ઊંચાઈ કેટલી ઝડપથી ઘટે છે ?
11. એક પદાર્થ, વક્ર $6y = x^3 + 2$ પર ગતિ કરે છે. વક્ર પરનાં જે બિંદુઓએ તેમના y-યામમાં તેમના x-યામ કરતાં 8 ગણી ઝડપે ફેરફાર થાય, તે બિંદુઓ શોધો.
12. હવાના પરપોટાની ત્રિજ્યા $\frac{1}{2}$ સેમી/સે ના દરથી વધે છે, જ્યારે પરપોટાની ત્રિજ્યા 1 સેમી હોય ત્યારે તેના કદમાં થતા વધારાનો દર કેટલો હોય ?
13. એક ગોળાકાર ફુગ્ગાનો વ્યાસ $\frac{3}{2}(2x + 1)$ છે, તો આ ફુગ્ગાના ઘનફળમાં x ને સાપેક્ષ થતા ફેરફારનો દર શોધો. ફુગ્ગો ગોળાકાર જ રહે છે.

14. એક પાઈપ દ્વારા 12 સેમી^{3}/સે ના દરથી રેતી નાખવામાં આવે છે. આ રેતી દ્વારા જમીન પર શંકુ બને છે. તેની ઊંચાઈ હંમેશાં તેના પાયાની ત્રિજ્યા કરતાં $\frac{1}{6}$ ગણી રહે છે. જ્યારે ઊંચાઈ 4 સેમી હોય ત્યારે રેતીના આ શંકુની ઊંચાઈના વધવાનો દર શોધો.

15. એક વસ્તુના x એકમના ઉત્પાદનનો કુલ ખર્ચ (રૂપિયામાં) $C(x) = 0.007x^3 - 0.003x^2 + 15x + 4000$ દ્વારા મળે છે. જ્યારે 17 એકમનું ઉત્પાદન થયેલ હોય ત્યારે સીમાંત ખર્ચ શોધો.

16. એક વસ્તુના x એકમના વેચાણથી મળતી કુલ આવક (રૂપિયામાં) $R(x) = 13x^2 + 26x + 15$ દ્વારા મળે છે. જ્યારે $x = 7$ હોય ત્યારે સીમાંત આવક શોધો.

પ્રશ્નો 17 તથા 18 માં વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલ વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો :

17. જ્યારે ત્રિજ્યા 6 સેમી હોય ત્યારે વર્તુળના ક્ષેત્રફળમાં તેની ત્રિજ્યાને સાપેક્ષ થતા ફેરફારનો દર .... હોય.

(A) 10π (B) 12π (C) 8π (D) 11π

18. એક વસ્તુના x એકમના વેચાણથી મળતી કુલ આવક (રૂપિયામાં) $R(x) = 3x^2 + 36x + 5$ દ્વારા મળે છે. જ્યારે $x = 15$ હોય ત્યારે થતી સીમાંત આવક ₹ .... હોય.

(A) 116 (B) 96 (C) 90 (D) 126

6.3 વધતાં તથા ઘટતાં વિધેયો

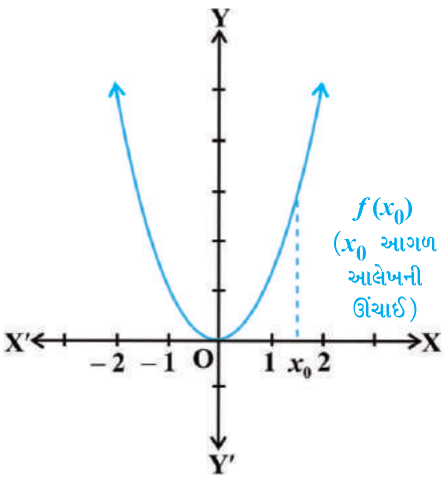
આ વિભાગમાં, વિધેય વધે છે કે ઘટે છે અથવા બેમાંથી કંઈ પણ નથી બનતું તે નક્કી કરવા માટે આપણે વિકલિતનો ઉપયોગ કરીશું.

વિધેય $f(x) = x^2$, $x \in R$ નો આલેખ આકૃતિ 6.1માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે પરવલયાકાર છે.

ઊગમબિંદુની ડાબી તરફની કિંમતો

x	$f(x) = x^2$
-2	4
$-\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$
-1	1
$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
0	0

જેમ આપણે ડાબી બાજુથી જમણી બાજુ તરફ જઈશું, તેમ આલેખની ઊંચાઈ ઘટશે.



આકૃતિ 6.1

ઊગમબિંદુની જમણી તરફની કિંમતો

x	$f(x) = x^2$
0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
1	1
$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$
2	4

જેમ આપણે ડાબી બાજુથી જમણી બાજુ તરફ જઈશું, તેમ આલેખની ઊંચાઈ વધશે.

સૌપ્રથમ આપણે ઊગમબિંદુની જમણી તરફના આલેખનો વિચાર કરીશું. (આકૃતિ 6.1 જુઓ.) અહીં જોઈ શકાય છે કે, આલેખ પર જેમ આપણે ડાબી તરફથી જમણી તરફ જઈએ છીએ તેમ આલેખની ઊંચાઈમાં (ધન રહીને સંખ્યાત્મક રીતે) સતત વધારો થાય છે. આ કારણથી, ધન વાસ્તવિક સંખ્યાઓ ($x > 0$) માટે, વિધેય વધે છે તેમ કહી શકાય.

હવે, આપણે ઊગમબિંદુની ડાબી તરફના આલેખનો વિચાર કરીશું (આકૃતિ 6.1 જુઓ.) અને જોઈશું કે, આલેખ પર જેમ આપણે ડાબી તરફથી જમણી તરફ જઈશું તેમ આલેખની ઊંચાઈમાં (ધન રહીને સંખ્યાત્મક રીતે) સતત ઘટાડો થાય છે. આથી, ઋણ વાસ્તવિક સંખ્યાઓ ($x < 0$) માટે, વિધેય ઘટે છે તેમ કહી શકાય.

હવે, આપણે વિધેય કયા અંતરાલમાં વધે છે અથવા કયા અંતરાલમાં ઘટે છે તેની વિશ્લેષણાત્મક વ્યાખ્યા નીચે પ્રમાણે આપીશું :

વ્યાખ્યા 1 : ધારો કે I = (a, b) એ વાસ્તવિક વિધેય f ના પ્રદેશનો ઉપગણ છે.

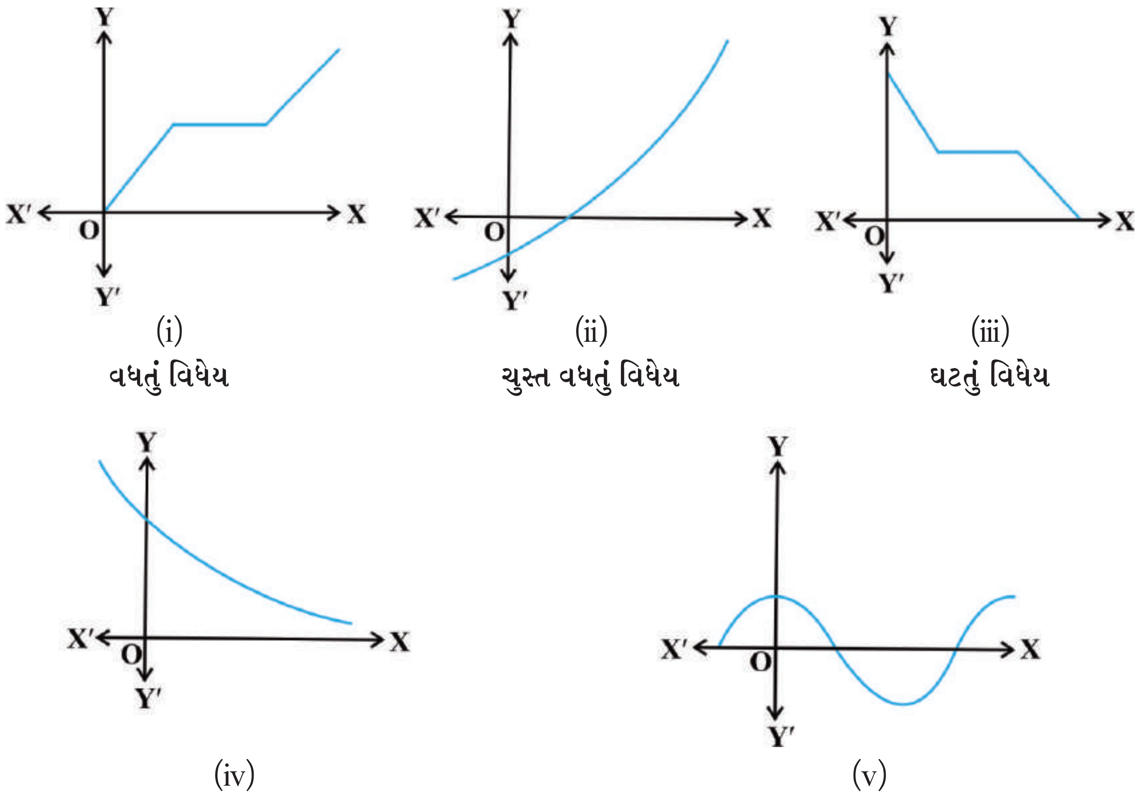
(i) ***જો $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$; $\forall x_1, x_2 \in$ I $= (a, b)$, તો f એ (a, b) પર વધતું વિધેય છે તેમ કહેવાય.***

(ii) ***જો $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$; $\forall x_1, x_2 \in$ I $= (a, b)$, તો f એ (a, b) પર ચુસ્ત વધતું વિધેય છે તેમ કહેવાય.***

(iii) ***જો $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$; $\forall x_1, x_2 \in$ I $= (a, b)$, તો f એ (a, b) પર ઘટતું વિધેય છે તેમ કહેવાય.***

(iv) ***જો $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$; $\forall x_1, x_2 \in$ I $= (a, b)$, તો f એ (a, b) પર ચુસ્ત ઘટતું વિધેય છે તેમ કહેવાય.***

આ પ્રકારનાં વિધેયોની આલેખાત્મક રજૂઆત માટે આકૃતિ 6.2 જુઓ.



(i) વધતું વિધેય

(ii) ચુસ્ત વધતું વિધેય

(iii) ઘટતું વિધેય

(iv) ચુસ્ત ઘટતું વિધેય

(v) ન વધતું વિધેય, ન ઘટતું વિધેય

આકૃતિ 6.2

હવે આપણે વિધેય કોઈક બિંદુ આગળ ક્યારે વધે છે અથવા ઘટે છે તેની વ્યાખ્યા આપીશું.

વ્યાખ્યા 2 : ધારો કે x_0 એ વાસ્તવિક વિધેય f ના પ્રદેશનો ઘટક છે. જો x_0 ને સમાવતો કોઈક અંતરાલ I મળે કે જેથી, f એ I માં વધે, ચુસ્ત રીતે વધે, ઘટે કે ચુસ્ત રીતે ઘટે તો, તદનુસાર f એ x_0 આગળ વધે છે, ચુસ્ત રીતે વધે છે, ઘટે છે કે ચુસ્ત રીતે ઘટે છે તેમ કહેવાય.

ચાલો, આપણે આ વ્યાખ્યાને વધતા વિધેય માટે સ્પષ્ટ કરીએ.

કોઈ $h > 0$ માટે f ના પ્રદેશનો ઉપગણ હોય તેવો કોઈ વિવૃત અંતરાલ $I = (x_0 - h, x_0 + h)$ અસ્તિત્વ ધરાવે કે જેથી $\forall x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$ થાય, તો વિધેય f એ x_0 આગળ વધતું વિધેય છે તેમ કહેવાય.

ઉદાહરણ 7 : સાબિત કરો કે, $f(x) = 7x - 3$ એ R પર ચુસ્ત વધતું વિધેય છે.

ઉકેલ : ધારો કે $x_1, x_2 \in R$; $f(x) = 7x - 3$ માટે,

$$x_1 < x_2 \Rightarrow 7x_1 < 7x_2$$
$$\Rightarrow 7x_1 - 3 < 7x_2 - 3$$
$$\Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

આથી, વ્યાખ્યા 1 પરથી કહી શકાય કે, વિધેય f એ R પર ચુસ્ત રીતે વધે છે.

નોંધ : જો f એ R ના કોઈ પણ અંતરાલમાં વધતું વિધેય હોય, તો તે R પર વધતું વિધેય છે. તે જ રીતે ઘટતાં વિધેય, ચુસ્ત રીતે વધતાં વિધેય કે ચુસ્ત રીતે ઘટતાં વિધેય માટે કહી શકાય.

હવે, આપણે વધતાં અને ઘટતાં વિધેયો માટે પ્રથમ વિકલિત કસોટી આપીશું. આ કસોટીની સાબિતી માટે મધ્યકમાન પ્રમેય જરૂરી છે. આપણે પ્રકરણ 5 માં તેનો અભ્યાસ કર્યો છે.

પ્રમેય 1 : ધારો કે વિધેય f એ સંવૃત અંતરાલ $[a, b]$ પર સતત અને વિવૃત અંતરાલ (a, b) પર વિકલનીય છે.

(a) પ્રત્યેક $x \in (a, b)$ માટે, જો $f'(x) > 0$ હોય, તો f એ $[a, b]$ પર ચુસ્ત વધતું વિધેય છે.

(b) પ્રત્યેક $x \in (a, b)$ માટે, જો $f'(x) < 0$ હોય, તો f એ $[a, b]$ માં ચુસ્ત ઘટતું વિધેય છે.

(c) પ્રત્યેક $x \in (a, b)$ માટે, જો $f'(x) = 0$ હોય, તો f એ $[a, b]$ માં અચળ વિધેય છે.

સાબિતી : ધારો કે, $x_1 < x_2$ થાય તેવા $x_1, x_2 \in [a, b]$ છે.

આથી, મધ્યકમાન પ્રમેય (પ્રકરણ 5, પ્રમેય 8) પરથી, $c \in (x_1, x_2)$ એવો મળે કે જેથી,

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)\,(x_2 - x_1)$$

એટલે કે, $f(x_2) - f(x_1) > 0$ **($f'(c) > 0$ આપેલ છે.)**

એટલે કે, $f(x_2) > f(x_1)$

આથી, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$; $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$

આથી, f એ $[a, b]$ માં ચુસ્ત વધતું વિધેય છે.

વિકલ્પો (b) તથા (c) ની સાબિતી તે જ રીતે આપી શકાય. તે વાચક માટે, સ્વાધ્યાય તરીકે છોડેલ છે.

નોંધ : (i) અહીં વધુ એક વ્યાપક પ્રમેય દર્શાવે છે કે, જો કોઈ વિવૃત અંતરાલ (a, b) ના પ્રત્યેક x માટે $f'(x) > 0$ હોય તથા વિધેય f સંવૃત અંતરાલ $[a, b]$ માં સતત હોય, તો f એ ચુસ્ત વધતું વિધેય છે. આ જ રીતે જો કોઈ વિવૃત અંતરાલ (a, b) ના પ્રત્યેક x માટે $f'(x) < 0$ તથા વિધેય $[a, b]$ માં સતત હોય, તો f એ ચુસ્ત ઘટતું વિધેય છે.

(ii) અંતરાલ I માં જો વિધેય ચુસ્ત વધતું કે ચુસ્ત ઘટતું હોય, તો તે અંતરાલ I માં વધતું કે ઘટતું વિધેય હોય. તેમ છતાં તેનું પ્રતીપ સત્ય હોય, તે જરૂરી નથી.

ઉદાહરણ 8 : સાબિત કરો કે, $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x$, $x \in R$ એ R પર ચુસ્ત વધતું વિધેય છે.

ઉકેલ : અહીં, R ના પ્રત્યેક અંતરાલમાં,

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 4 = 3(x^2 - 2x + 1) + 1$$
$$= 3(x - 1)^2 + 1 > 0$$

આથી, વિધેય f એ R પર ચુસ્ત રીતે વધે છે.

ઉદાહરણ 9 : સાબિત કરો કે $f(x) = cos\, x$ એ

(a) $(0, \pi)$ માં ચુસ્ત ઘટતું વિધેય છે.

(b) $(\pi, 2\pi)$ માં ચુસ્ત વધતું વિધેય છે.

(c) $(0, 2\pi)$ માં વધતું વિધેય પણ નથી કે ઘટતું વિધેય પણ નથી.

ઉકેલ : અહીં $f'(x) = -sin\, x$

(a) પ્રત્યેક $x \in (0, \pi)$ માટે, $sin\, x > 0$

$\therefore \quad f'(x) < 0$

આથી, f એ $(0, \pi)$ માં ચુસ્ત ઘટતું વિધેય છે.

(b) પ્રત્યેક $x \in (\pi, 2\pi)$ માટે, $sin\, x < 0$

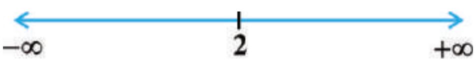
$\therefore \quad f'(x) > 0$

આથી, f એ $(\pi, 2\pi)$ માં ચુસ્ત વધતું વિધેય છે.

(c) વિકલ્પો (a) તથા (b) પરથી સ્પષ્ટ છે કે, f એ $(0, 2\pi)$ માં વધતું વિધેય નથી કે ઘટતું વિધેય પણ નથી.

☛ નોંધ : વિધેય f એ અંત્યબિંદુઓ 0, π અને 2π આગળ સતત છે. આથી, પ્રમેય 1 પરથી, f એ $[\pi, 2\pi]$માં વધતું વિધેય છે અને $[0, \pi]$માં ઘટતું વિધેય છે.

ઉદાહરણ 10 : વિધેય $f(x) = x^2 - 4x + 6$ એ કયા અંતરાલમાં (a) ચુસ્ત રીતે વધે (b) ચુસ્ત રીતે ઘટે છે તે શોધો.



આકૃતિ 6.3

ઉકેલ : અહીં $f(x) = x^2 - 4x + 6$

$\therefore \quad f'(x) = 2x - 4$

આથી, $f'(x) = 0$ લેતાં, $x = 2$ મળે. આથી, $x = 2$ એ વાસ્તવિક સંખ્યારેખાને બે ભિન્ન અંતરાલો $(-\infty, 2)$ અને $(2, \infty)$ માં વિભાજિત કરે. (આકૃતિ 6.3 જુઓ.) અંતરાલ $(-\infty, 2)$ માં, $f'(x) = 2x - 4 < 0$.

આથી, આ અંતરાલમાં વિધેય f ચુસ્ત રીતે ઘટે છે. વળી, અંતરાલ $(2, \infty)$ માં, $f'(x) > 0$ હોવાથી વિધેય f ચુસ્ત રીતે વધે છે.

☛ નોંધ : વિધેય f એ $x = 2$ આગળ સતત છે. $x = 2$ એ બે અંતરાલોને જોડે છે. આથી, પ્રમેય 1 પરથી આપણે તારવી શકીએ કે, આપેલ વિધેય f એ $(-\infty, 2]$ માં ઘટે છે અને $[2, \infty)$માં વધે છે.

ઉદાહરણ 11 : જે અંતરાલોમાં વિધેય $f(x) = 4x^3 - 6x^2 - 72x + 30$ (a) ચુસ્ત રીતે વધે (b) ચુસ્ત રીતે ઘટે છે, તે અંતરાલો શોધો.

આકૃતિ 6.4

ઉકેલ : અહીં $f(x) = 4x^3 - 6x^2 - 72x + 30$

$$\begin{aligned} \therefore \quad f'(x) &= 12x^2 - 12x - 72 \\ &= 12(x^2 - x - 6) \\ &= 12(x - 3)(x + 2) \end{aligned}$$

આથી, $f'(x) = 0$ લેતાં, $x = -2, 3$ મળે.

$x = -2$ અને $x = 3$ વાસ્તવિક સંખ્યારેખાને ત્રણ ભિન્ન અંતરાલો, $(-\infty, -2)$, $(-2, 3)$ તથા $(3, \infty)$ માં વિભાજિત કરે છે. અંતરાલો $(-\infty, -2)$ અને $(3, \infty)$ માં, $f'(x) > 0$ છે, જ્યારે અંતરાલ $(-2, 3)$ માં $f'(x) < 0$ છે. આથી, f એ અંતરાલો $(-\infty, -2)$ અને $(3, \infty)$ માં ચુસ્ત વધતું વિધેય છે. જ્યારે, અંતરાલ $(-2, 3)$ માં f ચુસ્ત ઘટતું વિધેય છે. તેમ છતાં પણ, f એ R માં વધતું કે ઘટતું વિધેય નથી.

અંતરાલ	$f'(x)$ ની નિશાની	વિધેય f નો પ્રકાર
$(-\infty, -2)$	$(-)(-) > 0$	f ચુસ્ત રીતે વધે છે.
$(-2, 3)$	$(-)(+) < 0$	f ચુસ્ત રીતે ઘટે છે.
$(3, \infty)$	$(+)(+) > 0$	f ચુસ્ત રીતે વધે છે.

ઉદાહરણ 12 : જે અંતરાલોમાં વિધેય $f(x) = \sin 3x$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ (a) વધે (b) ઘટે તે અંતરાલો શોધો.

ઉકેલ : અહીં $f(x) = \sin 3x$

$$\therefore \quad f'(x) = 3 \cos 3x$$

આથી, $f'(x) = 0$ લેતાં, $\cos 3x = 0$ મળે.

આથી, $3x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ $\quad \left(x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow 3x \in \left[0, \frac{3\pi}{2}\right]\right)$

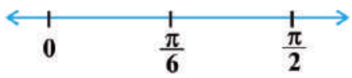
આથી, $x = \frac{\pi}{6}$ અને $\frac{\pi}{2}$ મળે.

હવે, $x = \frac{\pi}{6}$ એ અંતરાલ $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ને બે ભિન્ન અંતરાલો $\left[0, \frac{\pi}{6}\right)$ અને $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$માં વિભાજિત કરે.

હવે, $\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{6}\right)$

$$0 < x < \frac{\pi}{6} \Rightarrow 0 < 3x < \frac{\pi}{2}$$

$\Rightarrow \cos 3x > 0$ એટલે કે $f'(x) > 0$



આકૃતિ 6.5

તથા $\forall x \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$,

$$\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{2} < 3x < \frac{3\pi}{2}$$

$\Rightarrow \cos 3x < 0$ એટલે કે $f'(x) < 0$

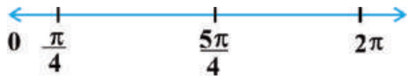
આથી, f એ $\left(0, \frac{\pi}{6}\right)$માં ચુસ્ત વધતું વિધેય છે અને $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$માં ચુસ્ત ઘટતું વિધેય છે.

વળી, આપેલ વિધેય $x = 0$ અને $x = \frac{\pi}{6}$ આગળ સતત હોવાથી, પ્રમેય 1 પરથી, f એ $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ પર વધતું તથા $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$ પર ઘટતું વિધેય છે.

ઉદાહરણ 13 : વિધેય $f(x) = sin\ x + cos\ x,\ 0 \leq x \leq 2\pi$ કયા અંતરાલમાં ચુસ્ત વધે છે અને કયા અંતરાલમાં ચુસ્ત ઘટે છે તે નક્કી કરો.

ઉકેલ : અહીં $f(x) = sin\ x + cos\ x$

$\therefore \quad f'(x) = cos\ x - sin\ x$



આકૃતિ 6.6

હવે, $f'(x) = 0$ લેતાં, $sin\ x = cos\ x$ મળે.

$\therefore \quad x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \qquad (0 \leq x \leq 2\pi)$

$x = \frac{\pi}{4}$ અને $x = \frac{5\pi}{4}$ એ અંતરાલ $[0, 2\pi]$ ને ત્રણ ભિન્ન અંતરાલો $\left[0, \frac{\pi}{4}\right)$, $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$ અને $\left(\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right]$ માં વિભાજિત કરે.

જો $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right]$ હોય, તો $f'(x) > 0$

$\therefore$ f એ અંતરાલો $\left[0, \frac{\pi}{4}\right)$ અને $\left(\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right]$ માં ચુસ્ત વધતું વિધેય છે.

વળી, જો $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$, તો $f'(x) < 0$

એટલે કે, f એ અંતરાલ $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$ માં ચુસ્ત ઘટતું વિધેય છે.

અંતરાલ	$f'(x)$ ની નિશાની	વિધેય f નો ગુણધર્મ
$\left[0, \frac{\pi}{4}\right)$	> 0	f ચુસ્ત વધતું વિધેય છે.
$\left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$	< 0	f ચુસ્ત ઘટતું વિધેય છે.
$\left(\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right]$	> 0	f ચુસ્ત વધતું વિધેય છે.

સ્વાધ્યાય 6.2

1. સાબિત કરો કે $f(x) = 3x + 17$ એ R પર ચુસ્ત વધતું વિધેય છે.
2. સાબિત કરો કે $f(x) = e^{2x}$, R પર ચુસ્ત વધતું વિધેય છે.
3. સાબિત કરો કે $f(x) = sin\ x$
   (a) $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ માં ચુસ્ત વધતું વિધેય છે.
   (b) $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ માં ચુસ્ત ઘટતું વિધેય છે.
   (c) $(0, \pi)$ માં વધતું કે ઘટતું વિધેય નથી.
4. વિધેય $f(x) = 2x^2 - 3x$ કયા અંતરાલમાં
   (a) ચુસ્ત રીતે વધે (b) ચુસ્ત રીતે ઘટે તે શોધો.
5. વિધેય $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 7$ કયા અંતરાલમાં
   (a) ચુસ્ત રીતે વધે (b) ચુસ્ત રીતે ઘટે તે નક્કી કરો.

6. નીચેનાં વિધેયો કયા અંતરાલમાં ચુસ્ત રીતે વધે છે અથવા ચુસ્ત રીતે ઘટે છે તે નક્કી કરો :

(a) $x^2 + 2x - 5$ (b) $10 - 6x - 2x^2$ (c) $-2x^3 - 9x^2 - 12x + 1$

(d) $6 - 9x - x^2$ (e) $(x + 1)^3 (x - 3)^3$

7. સાબિત કરો કે x પરનું વિધેય $y = \log(1 + x) - \frac{2x}{2+x}$, $x > -1$ એ તેના પ્રદેશ પર વધતું વિધેય છે.

8. $y = x(x - 2)^2$ એ xની જે કિંમતો માટે વધતું વિધેય હોય તે કિંમતો શોધો.

9. સાબિત કરો કે $y = \frac{4 \sin\theta}{(2+\cos\theta)} - \theta$ એ $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ માં વધતું વિધેય છે.

10. સાબિત કરો કે લઘુગણકીય વિધેય અંતરાલ $(0, \infty)$ પર ચુસ્ત વધતું વિધેય છે.

11. સાબિત કરો કે $f(x) = x^2 - x + 1$, અંતરાલ $(-1, 1)$ પર ચુસ્ત વધતું કે ઘટતું વિધેય નથી.

પ્રશ્નો 12 તથા 13 માં વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલ વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો :

12. નીચે આપેલાં વિધેયોમાંથી કયું વિધેય અંતરાલ $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ પર ચુસ્ત ઘટતું વિધેય છે ?

(A) $\cos x$ (B) $\cos 2x$ (C) $\cos 3x$ (D) $\tan x$

13. વિધેય $f(x) = x^{100} + \sin x - 1$ એ નીચે આપેલા અંતરાલો પૈકી કયા અંતરાલમાં ચુસ્ત રીતે ઘટે છે ?

(A) $(0, 1)$ (B) $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ (C) $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ (D) આપેલ પૈકી એક પણ નહિ.

14. 'a' ની નાનામાં નાની કઈ કિંમત માટે વિધેય $f(x) = x^2 + ax + 1$ એ અંતરાલ $[1, 2]$ પર ચુસ્ત રીતે વધે છે ?

15. જો I કોઈ વિવૃત્ત અંતરાલ હોય અને $I \cap [-1, 1] = \phi$ હોય, તો સાબિત કરો કે $f(x) = x + \frac{1}{x}$ એ I પર ચુસ્ત વધતું વિધેય છે.

16. સાબિત કરો કે વિધેય $f(x) = \log \sin x$ એ $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ પર ચુસ્ત વધતું વિધેય છે તથા $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ પર ચુસ્ત ઘટતું વિધેય છે.

17. સાબિત કરો કે વિધેય $f(x) = \log|\cos x|$ એ $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ પર ચુસ્ત ઘટતું વિધેય છે તથા $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ પર ચુસ્ત વધતું વિધેય છે.

18. સાબિત કરો કે $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 100$ એ R પર વધતું વિધેય છે.

પ્રશ્ન 19 માં વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલ વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો :

19. નીચે આપેલા અંતરાલો પૈકી કયા અંતરાલમાં $y = x^2 e^{-x}$ વધતું વિધેય છે ?

(A) $(-\infty, \infty)$ (B) $(-2, 0)$ (C) $(2, \infty)$ (D) $(0, 2)$

6.4 સ્પર્શક અને અભિલંબ

આ વિભાગમાં, આપણે કોઈ વક્રને કોઈ બિંદુ આગળ સ્પર્શક તથા અભિલંબનાં સમીકરણ શોધવા માટે વિકલનની ક્રિયાનો ઉપયોગ કરીશું.

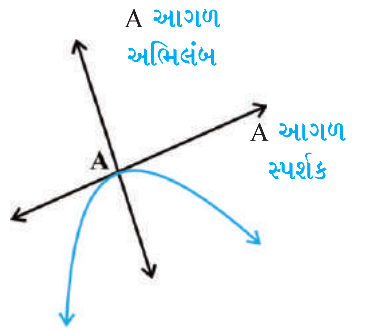
(x_0, y_0) બિંદુમાંથી પસાર થતી અને નિશ્ચિત ઢાળ m વાળી રેખાનું સમીકરણ $(y - y_0) = m(x - x_0)$ દ્વારા મળે.

નોંધીએ કે $y = f(x)$ ને (x_0, y_0) બિંદુ આગળના સ્પર્શકનો ઢાળ $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_0, y_0)}$ $(= f'(x_0))$થી દર્શાવાય.

આથી, $y = f(x)$ ના (x_0, y_0) બિંદુ આગળના સ્પર્શકનું સમીકરણ $(y - y_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ દ્વારા મળે.

વળી, અભિલંબ એ સ્પર્શકને લંબ છે. આથી, જો $f'(x_0) \neq 0$ હોય, તો વક્ર $y = f(x)$ ના (x_0, y_0) બિંદુ આગળના અભિલંબનો ઢાળ $\frac{-1}{f'(x_0)}$ મળે. આથી, વક્ર $y = f(x)$ ના (x_0, y_0) બિંદુ આગળના અભિલંબનું સમીકરણ $(y - y_0) = \frac{-1}{f'(x_0)}(x - x_0)$ દ્વારા મળે.

એટલે કે, $(y - y_0)\, f'(x_0) + (x - x_0) = 0$



આકૃતિ 6.7

નોંધ : જો વક્ર $y = f(x)$ નો સ્પર્શક X-અક્ષની ધન દિશા સાથે θ માપનો ખૂણો બનાવે, તો $\frac{dy}{dx}$ = સ્પર્શકનો ઢાળ = $tan\,\theta$.

વિશિષ્ટ કિસ્સાઓ :

(i) જો સ્પર્શકનો ઢાળ શૂન્ય હોય, તો $tan\,\theta = 0$. આથી, $\theta = 0$. એનો અર્થ એ થયો કે, સ્પર્શક X-અક્ષને સમાંતર છે અથવા X-અક્ષ સાથે સંપાતી છે. આ કિસ્સામાં, (x_0, y_0) બિંદુ આગળના સ્પર્શકનું સમીકરણ $y = y_0$ મળે.

(ii) જો $\theta \to \frac{\pi}{2}$ હોય, તો $tan\,\theta \to \infty$. એટલે કે, સ્પર્શક એ X-અક્ષને લંબરેખા છે; એનો અર્થ એ થયો કે તે Y-અક્ષને સમાંતર છે અથવા Y-અક્ષ સાથે સંપાતી છે. આ કિસ્સામાં, (x_0, y_0) બિંદુ આગળના સ્પર્શકનું સમીકરણ $x = x_0$ મળે. **(શા માટે ?)**

ઉદાહરણ 14 : $x = 2$ આગળ વક્ર $y = x^3 - x$ ના સ્પર્શકનો ઢાળ મેળવો.

ઉકેલ : $x = 2$ આગળ સ્પર્શકનો ઢાળ $= \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=2} = (3x^2 - 1)_{x=2} = 11$ મળે.

ઉદાહરણ 15 : વક્ર $y = \sqrt{4x-3} - 1$ ને $\frac{2}{3}$ ઢાળવાળા સ્પર્શકનું સ્પર્શબિંદુ મેળવો.

ઉકેલ : આપેલ વક્રને (x, y) બિંદુ આગળના સ્પર્શકનો ઢાળ $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(4x - 3)^{-\frac{1}{2}} \cdot 4 = \frac{2}{\sqrt{4x-3}}$

આપેલ ઢાળ $\frac{2}{3}$ છે.

$\therefore \quad \frac{2}{3} = \frac{2}{\sqrt{4x-3}}$

અથવા $4x - 3 = 9$

અથવા $x = 3$

હવે, $y = \sqrt{4x-3} - 1$ માં, $x = 3$ લેતાં, $y = \sqrt{4(3)-3} - 1 = 2$

આથી, માંગેલ સ્પર્શબિંદુ $(3, 2)$ છે.

ઉદાહરણ 16 : વક્ર $y + \frac{2}{x-3} = 0$ ને 2 ઢાળવાળા તમામ સ્પર્શકોનાં સમીકરણ શોધો.

ઉકેલ : વક્રને (x, y) બિંદુ આગળના સ્પર્શકનો ઢાળ $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{(x-3)^2}$

પરંતુ આપેલ ઢાળ 2 હોવાથી, $2 = \frac{2}{(x-3)^2}$

અથવા $(x - 3)^2 = 1$

અથવા $x - 3 = \pm 1$

અથવા $x = 2, 4$

હવે, $x = 2$ લેતાં, $y = 2$ તથા $x = 4$ લેતાં, $y = -2$ મળે.

આથી, આપેલ વક્રને (2, 2) તથા (4, –2) સ્પર્શબિંદુવાળા, 2 ઢાળવાળા, બે સ્પર્શકો મળે.

(2, 2) બિંદુ આગળના સ્પર્શકનું સમીકરણ

$(y - 2) = 2(x - 2)$

$\therefore \quad y - 2x + 2 = 0$ મળે.

તથા (4, –2) બિંદુ આગળના સ્પર્શકનું સમીકરણ

$y - (-2) = 2(x - 4)$

$\therefore \quad y - 2x + 10 = 0$ મળે.

ઉદાહરણ 17 : વક્ર $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1$ પરનાં જે બિંદુઓ આગળના સ્પર્શકો

(i) X-અક્ષને સમાંતર હોય (ii) Y-અક્ષને સમાંતર હોય તે બિંદુઓ શોધો.

ઉકેલ : $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1$ નું x ને સાપેક્ષ વિકલન કરતાં,

$$\frac{x}{2} + \frac{2y}{25}\frac{dy}{dx} = 0$$

અથવા $\frac{dy}{dx} = \frac{-25}{4} \cdot \frac{x}{y}$

(i) હવે, જો સ્પર્શક X-અક્ષને સમાંતર હોય, તો તેનો ઢાળ 0 થાય.

આથી, $\frac{-25}{4} \cdot \frac{x}{y} = 0$. જો $x = 0$ હોય તો અને તો જ આ શક્ય બને.

આથી, $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1$ માં $x = 0$ લેતાં, $y^2 = 25$ એટલે કે, $y = \pm 5$ મળે.

આથી, બિંદુઓ (0, 5) અને (0, –5) આગળના સ્પર્શકો X-અક્ષને સમાંતર છે.

(ii) જો અભિલંબનો ઢાળ શૂન્ય હોય, તો સ્પર્શક Y-અક્ષને સમાંતર હોય. આથી, $\frac{4y}{25x} = 0$ એટલે કે $y = 0$.

આથી, $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1$ માં $y = 0$ લેતાં, $x = \pm 2$ મળે.

આથી, બિંદુઓ (2, 0) અને (–2, 0) આગળના સ્પર્શકો Y-અક્ષને સમાંતર છે.

ઉદાહરણ 18 : વક્ર $y = \frac{x-7}{(x-2)(x-3)}$ એ X-અક્ષને જે બિંદુએ છેદે તે બિંદુ આગળના સ્પર્શકનું સમીકરણ શોધો.

ઉકેલ : X-અક્ષ પર $y = 0$ હોવાથી, વક્રના સમીકરણમાં $y = 0$ લેતાં, $x = 7$ મળે. આથી, વક્ર X-અક્ષને (7, 0) બિંદુએ છેદે છે. હવે, આપેલ વક્રના સમીકરણનું x પ્રત્યે વિકલન કરતાં,

$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - y(2x-5)}{(x-2)(x-3)}$ મળે. **(કેવી રીતે ?)**

અથવા $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(7,0)} = \frac{1-0}{(5)(4)} = \frac{1}{20}$

આથી, (7, 0) બિંદુ આગળના સ્પર્શકનો ઢાળ $\frac{1}{20}$ છે.

આથી, (7, 0) બિંદુ આગળના સ્પર્શકનું સમીકરણ $(y - 0) = \frac{1}{20}(x - 7)$

$\therefore \quad 20y - x + 7 = 0$

ઉદાહરણ 19 : વક્ર $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 2$ના બિંદુ (1, 1) આગળના સ્પર્શક તથા અભિલંબનાં સમીકરણો મેળવો.

ઉકેલ : $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 2$નું x પ્રત્યે વિકલન કરતાં,

$$\frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}} + \frac{2}{3}y^{\frac{-1}{3}} \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \text{ મળે.}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = -\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$$

આથી, (1, 1) બિંદુ આગળના સ્પર્શકનો ઢાળ $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(1,\ 1)} = -1$

આથી, (1, 1) બિંદુ આગળના સ્પર્શકનું સમીકરણ

$y - 1 = -1\,(x - 1)$ એટલે કે, $y + x - 2 = 0$ છે.

વળી, (1, 1) બિંદુ આગળના અભિલંબનો ઢાળ $= \dfrac{-1}{\text{(1, 1) બિંદુ આગળના સ્પર્શકનો ઢાળ}} = 1$

આથી, (1, 1) બિંદુ આગળના અભિલંબનું સમીકરણ $(y - 1) = 1\,(x - 1)$ એટલે કે, $y - x = 0$ મળે.

ઉદાહરણ 20 : $x = a\,sin^3\,t,\ y = b\,cos^3\,t$ પ્રચલ સમીકરણવાળા વક્રના $t = \frac{\pi}{2}$ બિંદુ આગળના સ્પર્શકનું સમીકરણ શોધો.

ઉકેલ : $x = a\,sin^3\,t,\ y = b\,cos^3\,t$ ...(i)

x તથા y ના t પ્રત્યે વિકલન કરતાં,

$$\frac{dx}{dt} = 3a\,sin^2 t\,cos\,t \text{ તથા } \frac{dy}{dt} = -3b\,cos^2 t\,sin\,t \text{ મળે.}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-3b\,cos^2 t\,sin\,t}{3a\,sin^2 t\,cos\,t} = \frac{-b\,cos\,t}{a\,sin\,t}$$

આથી, $t = \frac{\pi}{2}$ આગળ, સ્પર્શકનો ઢાળ $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{t = \frac{\pi}{2}} = \dfrac{-b\,cos\frac{\pi}{2}}{a\,sin\frac{\pi}{2}} = 0$

વળી, જ્યારે $t = \frac{\pi}{2}$ હોય ત્યારે $x = a$ અને $y = 0$ મળે.

આથી, વક્રને $t = \frac{\pi}{2}$ આગળના સ્પર્શકનું સમીકરણ એટલે કે,

બિંદુ $(a, 0)$ આગળના સ્પર્શકનું સમીકરણ $(y - 0) = 0\,(x - a)$ એટલે કે, $y = 0$ મળે.

નોંધ : ખરેખર પરિણામ સાચું છે, પરંતુ વધુ યોગ્ય ગણતરી નીચે પ્રમાણે થાય :

$$x = a\,sin^3\,t,\ \ y = b\,cos^3\,t \text{ પરથી } \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$$

$$\therefore \quad \frac{2}{3}\left(\frac{x}{a}\right)^{-\frac{1}{3}}\frac{1}{a} + \frac{2}{3}\left(\frac{y}{b}\right)^{-\frac{1}{3}}\frac{1}{b}\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{y^{\frac{1}{3}}\, b^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}\, a^{\frac{2}{3}}}$$

$t = \frac{\pi}{2}$ પરથી બિંદુ $(a, 0)$ મળે.

$$\therefore \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(a\,,\,0)} = 0$$

$\therefore$ માંગેલ સ્પર્શકનું સમીકરણ $y = 0$

સ્વાધ્યાય 6.3

1. વક્ર $y = 3x^4 - 4x$ ને $x = 4$ આગળના સ્પર્શકનો ઢાળ શોધો.

2. વક્ર $y = \frac{x-1}{x-2}$, $x \neq 2$ ને $x = 10$ આગળના સ્પર્શકનો ઢાળ શોધો.

3. વક્ર $y = x^3 - x + 1$ ના જે બિંદુનો x-યામ 2 હોય તે બિંદુ આગળના સ્પર્શકનો ઢાળ શોધો.

4. વક્ર $y = x^3 - 3x + 2$ ના જે બિંદુનો x-યામ 3 હોય તે બિંદુ આગળના સ્પર્શકનો ઢાળ શોધો.

5. $x = a\,cos^3\,\theta$, $y = a\,sin^3\,\theta$ પ્રચલ સમીકરણવાળા વક્રને $\theta = \frac{\pi}{4}$ આગળના અભિલંબનો ઢાળ શોધો.

6. $x = 1 - a\,sin\,\theta$, $y = b\,cos^2\,\theta$ પ્રચલ સમીકરણવાળા વક્રને $\theta = \frac{\pi}{2}$ આગળના અભિલંબનો ઢાળ શોધો.

7. વક્ર $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 7$ ને જે બિંદુઓ આગળના સ્પર્શકો X-અક્ષને સમાંતર હોય તે બિંદુઓ શોધો.

8. વક્ર $y = (x - 2)^2$ નો એક સ્પર્શક વક્ર પરનાં બિંદુઓ $(2, 0)$ અને $(4, 4)$ ને જોડતી જીવાને સમાંતર હોય, તો તે સ્પર્શકનું સ્પર્શબિંદુ શોધો.

9. વક્ર $y = x^3 - 11x + 5$ ના કોઈ બિંદુ આગળનો સ્પર્શક $y = x - 11$ હોય, તો વક્ર પરનું તે બિંદુ શોધો.

10. વક્ર $y = \frac{1}{x-1}$, $x \neq 1$ ને -1 ઢાળવાળા તમામ સ્પર્શકોનાં સમીકરણો શોધો.

11. વક્ર $y = \frac{1}{x-3}$, $x \neq 3$ ને 2 ઢાળવાળા તમામ સ્પર્શકોનાં સમીકરણો શોધો.

12. વક્ર $y = \frac{1}{x^2 - 2x + 3}$ ને 0 ઢાળવાળા તમામ સ્પર્શકોનાં સમીકરણો શોધો.

13. વક્ર $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ ના જે બિંદુ આગળના સ્પર્શકો

(i) X-અક્ષને સમાંતર હોય, (ii) Y-અક્ષને સમાંતર હોય તે બિંદુઓ શોધો.

14. નીચે આપેલ વક્રોને દર્શાવેલ બિંદુ આગળ સ્પર્શક તથા અભિલંબનાં સમીકરણો શોધો :

(i) $y = x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 10x + 5$ પરના $(0, 5)$ બિંદુ આગળ

(ii) $y = x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 10x + 5$ પરના $(1, 3)$ બિંદુ આગળ

(iii) $y = x^3$ પરના $(1, 1)$ બિંદુ આગળ

(iv) $y = x^2$ પરના $(0, 0)$ બિંદુ આગળ

(v) $x = cos\,t$, $y = sin\,t$ પરના $t = \frac{\pi}{4}$ ને સંગત બિંદુ પર

15. વક્ર $y = x^2 - 2x + 7$ ના (a) રેખા $2x - y + 9 = 0$ ને સમાંતર તથા (b) રેખા $5y - 15x = 13$ ને લંબ સ્પર્શકોનાં સમીકરણો શોધો.

16. વક્ર $y = 7x^3 + 11$ ના $x = 2$ તથા $x = -2$ આગળના સ્પર્શકો પરસ્પર સમાંતર છે તેમ સાબિત કરો.

17. વક્ર $y = x^3$ ના જે બિંદુ આગળના સ્પર્શકનો ઢાળ તે બિંદુના y-યામ જેટલો હોય, તે બિંદુઓ શોધો.

18. વક્ર $y = 4x^3 - 2x^5$ ના ઊગમબિંદુમાંથી પસાર થતા સ્પર્શકોનાં સ્પર્શબિંદુઓ શોધો.

19. વક્ર $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ નાં જે બિંદુ આગળના સ્પર્શકો X-અક્ષને સમાંતર હોય, તે બિંદુઓ મેળવો.

20. વક્ર $ay^2 = x^3$ ના (am^2, am^3) બિંદુ આગળના અભિલંબનું સમીકરણ મેળવો.

21. $y = x^3 + 2x + 6$ ના રેખા $x + 14y + 4 = 0$ ને સમાંતર અભિલંબનાં સમીકરણો શોધો.

22. પરવલય $y^2 = 4ax$ ના $(at^2, 2at)$ બિંદુ આગળ સ્પર્શક તથા અભિલંબનાં સમીકરણો મેળવો.

23. ***જો બે વક્રોના છેદબિંદુ આગળના સ્પર્શકો પરસ્પર લંબ હોય, તો તે બે વક્રો લંબચ્છેદી છે તેમ કહેવાય.***
જો $8k^2 = 1$ હોય, તો વક્રો $y^2 = x$ તથા $xy = k$ લંબચ્છેદી છે, તેમ સાબિત કરો.

24. અતિવલય $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ ના (x_0, y_0) બિંદુ આગળના સ્પર્શક તથા અભિલંબનાં સમીકરણો મેળવો.

25. વક્ર $y = \sqrt{3x-2}$ ના રેખા $4x - 2y + 5 = 0$ ને સમાંતર સ્પર્શકોનાં સમીકરણો શોધો.

પ્રશ્નો 26 તથા 27 માં વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલ વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો :

26. વક્ર $y = 2x^2 + 3sin\ x$ ને $x = 0$ આગળ દોરેલ અભિલંબનો ઢાળ .... છે.

(A) 3 (B) $\frac{1}{3}$ (C) -3 (D) $-\frac{1}{3}$

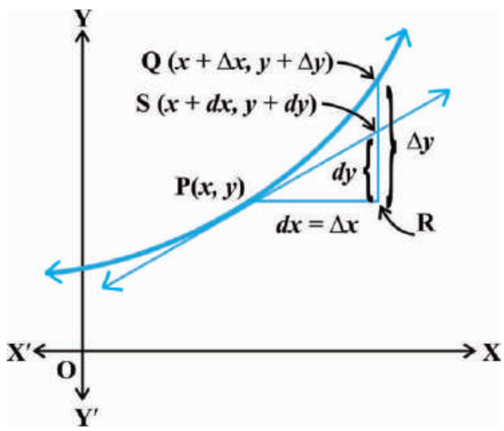
27. વક્ર $y^2 = 4x$ ના .... બિંદુ આગળનો સ્પર્શક $y = x + 1$ છે.

(A) (1, 2) (B) (2, 1) (C) (1, –2) (D) (–1, 2)

6.5 આસન્ન મૂલ્યો

આ વિભાગમાં, આપણે કોઈ નિશ્ચિત રાશિનાં આસન્ન મૂલ્યો શોધવા માટે વિકલિતનો ઉપયોગ કરીશું.

ધારો કે, $f : D \to R$, $D \subset R$ પર વ્યાખ્યાયિત વિધેય છે. વળી, $y = f(x)$ છે. ધારો કે x માં થતો સૂક્ષ્મ ફેરફાર એ Δx છે. x માં થતા સૂક્ષ્મ ફેરફારને અનુરૂપ y માં થતો સૂક્ષ્મ ફેરફાર Δy વડે દર્શાવાય.



આકૃતિ 6.8

તેને $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ દ્વારા મેળવી શકાય. આપણે નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યા આપીએ :

(i) dx વડે દર્શાવાતું x નું વિકલ $dx = \Delta x$ થી વ્યાખ્યાયિત થાય.

(ii) y નું વિકલ dy વડે દર્શાવાય છે. તેને

$$dy = f'(x)\ dx \text{ અથવા } dy = \left(\frac{dy}{dx}\right)\Delta x \text{ થી દર્શાવી શકાય.}$$

જો x ની સાથે તુલના કરીએ તો $dx = \Delta x$ તુલનાત્મક રીતે ઘણો નાનો છે તથા dy એ Δy નું આસન્ન મૂલ્ય છે. તેને $dy \approx \Delta y$ વડે દર્શાવાય.

Δx, Δy, dx અને dy ના ભૌમિતિક અર્થઘટન માટે, આકૃતિ 6.8 જુઓ.

☛ નોંધ : આકૃતિ 6.8 તથા ઉપર્યુક્ત ચર્ચાના સંદર્ભમાં આપણે નોંધીએ કે અવલંબી ચલનું વિકલ એ અવલંબી ચલમાં થતા વધારા જેટલું હોય તે આવશ્યક નથી. જ્યારે સ્વતંત્ર ચલનું વિકલ એ ચલમાં થતા વધારા જેટલું હોય છે.

ઉદાહરણ 21 : વિકલના ઉપયોગથી $\sqrt{36.6}$ નું આસન્ન મૂલ્ય શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે $y = \sqrt{x}$; $x = 36$ તથા $\Delta x = 0.6$.

$$\therefore \quad \Delta y = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}$$
$$= \sqrt{36.6} - \sqrt{36}$$
$$= \sqrt{36.6} - 6$$

અથવા $\sqrt{36.6} = \Delta y + 6$

હવે, $dy \approx \Delta y$ છે અને $dy = \left(\frac{dy}{dx}\right) \cdot \Delta x$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}}(0.6) \qquad \left(y = \sqrt{x}\right)$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{36}}(0.6)$$
$$= 0.05$$

આથી, $\sqrt{36.6}$ નું આસન્ન મૂલ્ય $6 + 0.05 = 6.05$ છે.

ઉદાહરણ 22 : વિકલના ઉપયોગથી $(25)^{\frac{1}{3}}$ નું આસન્ન મૂલ્ય મેળવો.

ઉકેલ : ધારો કે $y = x^{\frac{1}{3}}$; $x = 27$ તથા $\Delta x = -2$

$$\therefore \quad \Delta y = (x + \Delta x)^{\frac{1}{3}} - (x)^{\frac{1}{3}}$$
$$= (25)^{\frac{1}{3}} - (27)^{\frac{1}{3}}$$
$$= (25)^{\frac{1}{3}} - 3$$

$$\therefore \quad (25)^{\frac{1}{3}} = \Delta y + 3$$

હવે, $dy \approx \Delta y$ છે. $dy = \left(\frac{dy}{dx}\right) \cdot \Delta x$

$$= \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}(-2) \qquad \left(y = x^{\frac{1}{3}}\right)$$
$$= \frac{1}{3((27)^{\frac{1}{3}})^2}(-2)$$
$$= \frac{-2}{27} = -0.074$$

$\therefore$ $(25)^{\frac{1}{3}}$ નું આસન્ન મૂલ્ય $3 + (-0.074) = 2.926$ છે.

ઉદાહરણ 23 : $f(x) = 3x^2 + 5x + 3$ હોય, તો $f(3.02)$ નું આસન્ન મૂલ્ય શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે, $x = 3$ અને $\Delta x = 0.02$

$$\therefore \quad f(3.02) = f(x + \Delta x) = 3(x + \Delta x)^2 + 5(x + \Delta x) + 3$$

વળી, $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$

$\therefore \quad f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta y$

$\approx f(x) + f'(x) \cdot \Delta x$ **($dx = \Delta x$)**

$\therefore \quad f(3.02) \approx (3x^2 + 5x + 3) + (6x + 5)\,\Delta x$

$= (3(3)^2 + 5(3) + 3) + (6(3) + 5)\,(0.02)$ **($x = 3, \Delta x = 0.02$)**

$= (27 + 15 + 3) + (18 + 5)\,(0.02)$

$= 45 + 0.46$

$= 45.46$

આથી, $f(3.02)$ નું આસન્ન મૂલ્ય 45.46 છે.

ઉદાહરણ 24 : જો સમઘનની બાજુની લંબાઈ x મીટર હોય તથા તેની બાજુની લંબાઈમાં 2 % નો વધારો થતો હોય, તો તેના ઘનફળમાં થતો ફેરફાર શોધો.

ઉકેલ : અહીં, $V = x^3$

$$\Delta V \simeq \left(\frac{dV}{dx}\right) \cdot \Delta x$$

$= (3x^2) \cdot \Delta x$

$= (3x^2)\,(0.02x)$ **(x ના 2 % = $0.02x$)**

$= 0.06\, x^3$ મી^{3}

$\therefore$ સમઘનના ઘનફળમાં થતો ફેરફાર $0.06\, x^3$ મી^{3} એટલે કે 6 %.

ઉદાહરણ 25 : ગોલકની ત્રિજ્યાના માપનમાં 0.03 સેમીની ત્રુટિ રહી ગયેલ છે. જો ગોલકની ત્રિજ્યા 9 સેમી માપવામાં આવી હોય, તો ગોલકના ઘનફળના માપનમાં આશરે કેટલી ત્રુટિ પ્રવેશે તે શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે ગોલકની ત્રિજ્યા r તથા તેની ત્રિજ્યાના માપનમાં રહી ગયેલ ત્રુટિ Δr છે, જ્યારે $r = 9$ સેમી ત્યારે $\Delta r = 0.03$ સેમી છે.

હવે, ગોલકનું ઘનફળ $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

$$\therefore \quad \frac{dV}{dr} = 4\pi r^2$$

આથી, $\Delta V \simeq \left(\frac{dV}{dr}\right) \cdot \Delta r$

$= 4\pi r^2 \cdot \Delta r$

$= 4\pi(9)^2\,(0.03)$

$= 9.72\,\pi$ સેમી^{3}

આથી, ગોલકના ઘનફળના માપમાં પ્રવેશતી ત્રુટિ $9.72\,\pi$ સેમી^{3} છે.

સ્વાધ્યાય 6.4

1. વિકલના ઉપયોગથી, નીચેનાં આસન્ન મૂલ્યો 3 દશાંશસ્થળ સુધી મેળવો :

(i) $\sqrt{25.3}$ (ii) $\sqrt{49.5}$ (iii) $\sqrt{0.6}$

(iv) $(0.009)^{\frac{1}{3}}$ (v) $(0.999)^{\frac{1}{10}}$ (vi) $(15)^{\frac{1}{4}}$

(vii) $(26)^{\frac{1}{3}}$ (viii) $(255)^{\frac{1}{4}}$ (ix) $(82)^{\frac{1}{4}}$

(x) $(401)^{\frac{1}{2}}$ (xi) $(0.0037)^{\frac{1}{2}}$ (xii) $(26.57)^{\frac{1}{3}}$

(xiii) $(81.5)^{\frac{1}{4}}$ (xiv) $(3.968)^{\frac{3}{2}}$ (xv) $(32.15)^{\frac{1}{5}}$

2. જો $f(x) = 4x^2 + 5x + 2$ હોય, તો $f(2.01)$ નું આસન્ન મૂલ્ય શોધો.

3. જો $f(x) = x^3 - 7x^2 + 15$ હોય, તો $f(5.001)$ નું આસન્ન મૂલ્ય શોધો.

4. એક સમઘનની બાજુની લંબાઈ x મીટર છે. જો સમઘનની બાજુની લંબાઈમાં 1 % નો વધારો થતો હોય, તો તેના ઘનફળમાં થતા વધારાનું આસન્ન મૂલ્ય શોધો.

5. એક સમઘનની બાજુની લંબાઈ x મીટર છે. જો સમઘનની બાજુની લંબાઈમાં 1 % નો ઘટાડો થતો હોય, તો તેના પૃષ્ઠફળમાં આશરે કેટલો ઘટાડો થાય તે શોધો.

6. એક ગોલકની ત્રિજ્યાના માપનમાં 0.02 મીટર ત્રુટિ રહી ગયેલ છે. જો ગોલકની ત્રિજ્યા 7 મીટર માપવામાં આવી હોય, તો તેના ઘનફળમાં પ્રવેશતી ત્રુટિનું આસન્ન મૂલ્ય શોધો.

7. એક ગોલકની ત્રિજ્યાના માપનમાં 0.03 મીટર ત્રુટિ રહી ગયેલ છે. જો ગોલકની ત્રિજ્યા 9 મીટર માપવામાં આવી હોય, તો તેના પૃષ્ઠફળમાં પ્રવેશતી ત્રુટિનું આસન્ન મૂલ્ય શોધો.

પ્રશ્નો 8 તથા 9 માં વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલ વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો :

8. જો $f(x) = 3x^2 + 15x + 5$ હોય, તો $f(3.02)$નું આસન્ન મૂલ્ય .... હોય.

(A) 47.66 (B) 57.66 (C) 67.66 (D) 77.66

9. એક સમઘનની બાજુની લંબાઈ x મીટર છે. જો તેની બાજુની લંબાઈમાં 3 % નો વધારો થતો હોય, તો તેના ઘનફળમાં થતા વધારાનું આસન્ન મૂલ્ય .... છે.

(A) $0.06\ x^3$ (મીટર)^3 (B) $0.6\ x^3$ (મીટર)^3 (C) $0.09\ x^3$ (મીટર)^3 (D) $0.9\ x^3$ (મીટર)^3

6.6 મહત્તમ તથા ન્યૂનતમ મૂલ્યો

આ વિભાગમાં, આપણે ભિન્ન વિધેયોનાં ઈષ્ટતમ મૂલ્યો શોધવા માટે વિકલિતની સંકલ્પનાનો ઉપયોગ કરીશું. હકીકતમાં, આપણે વિધેયના આલેખ પર ***નિર્ણાયક બિંદુઓ*** શોધીશું. આથી, વિધેયનો આલેખ તે નિર્ણાયક બિંદુઓ (કે સંખ્યા) આગળ ***સ્થાનીય મહત્તમ (અથવા ન્યૂનતમ) (local maximum or minimum)*** સ્થિતિ પ્રાપ્ત કરે. આવાં બિંદુઓ (અથવા સંખ્યા)નું જ્ઞાન આપેલ વિધેયનો આલેખ દોરવા માટે જરૂરી છે. વધુમાં, આપણે આપેલ વિધેયના વ્યાવહારિક કૂટપ્રશ્નોના ઉકેલ માટે ઉપયોગી હોય તેવા ***વૈશ્વિક (નિરપેક્ષ) (global or absolute) મહત્તમ*** અને ***વૈશ્વિક (નિરપેક્ષ) ન્યૂનતમ*** મૂલ્યો શોધીશું.

ચાલો, આપણે નીચે દર્શાવ્યા પ્રમાણે, રોજિંદા જીવનમાં ઉદ્ભવતી સમસ્યાઓ ધ્યાનમાં લઈએ :

(i) જમીનમાં પ્રતિ એકર થતા નારંગીના વૃક્ષની સંખ્યા x હોય અને નારંગીના વૃક્ષના વેચાણથી થતો નફો $P(x) = ax + bx^2$; (a, b અચળ) હોય, તો મહત્તમ નફો મેળવવા માટે જમીનમાં પ્રતિ એકર નારંગીના કેટલાં વૃક્ષ વાવવા જોઈએ ?

(ii) 60 મીટર ઊંચા મકાનની છત પરથી એક દડાને હવામાં ફેંકવામાં આવે છે. તે $f(x) = 60 + x - \frac{x^2}{60}$ ના માર્ગે મુસાફરી કરે છે. અહીં, x એ દડાનું મકાનથી સમક્ષિતિજ અંતર તથા $h(x)$ એ દડાની ઊંચાઈ હોય, તો દડો મહત્તમ કેટલી ઊંચાઈ પ્રાપ્ત કરે ?

(iii) દુશ્મનનું એક (અપાચે) હેલિકૉપ્ટર વક્ર $f(x) = x^2 + 7$ ના માર્ગે હવામાં ઊડે છે. બિંદુ (1, 2) આગળ ઊભેલ સૈનિક, જ્યારે હેલિકૉપ્ટર તેની એકદમ નજીક હોય ત્યારે તેને ગોળીથી વીંધવા ઇચ્છે છે, તો આ ન્યૂનતમ અંતર શું હોઈ શકે ?

ઉપર્યુક્ત તમામ કૂટપ્રશ્નોમાં કંઈક સામ્યતા રહેલી છે, એટલે કે આપણે આપેલ વિધેયનાં મહત્તમ કે ન્યૂનતમ મૂલ્યો શોધવા ઇચ્છીએ છીએ. સામાન્ય રીતે, આવી સમસ્યાઓના ઉકેલ માટે, સૌપ્રથમ આપણે વિધેયનાં મહત્તમ તથા ન્યૂનતમ મૂલ્યો, સ્થાનીય મહત્તમ અને સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્યો માટેનાં નિર્ણાયક બિંદુઓ અને આવાં બિંદુઓ નક્કી કરવા માટેની કસોટીઓ વ્યાખ્યાયિત કરીશું.

વ્યાખ્યા 3 : ધારો કે f એ અંતરાલ I પર વ્યાખ્યાયિત વિધેય છે.

(a) કોઈ સંખ્યા $c \in$ I એવી મળે કે જેથી પ્રત્યેક $x \in$ I માટે, $f(c) \geq f(x)$ થાય, તો વિધેય f એ I માં મહત્તમ મૂલ્ય ધરાવે છે તેમ કહેવાય.

આ સંજોગોમાં, $f(c)$ ને વિધેય f ની I માં મહત્તમ કિંમત કહે છે તથા c ને વિધેય f ની I માં મહત્તમ કિંમત માટેની સંખ્યા કહે છે.

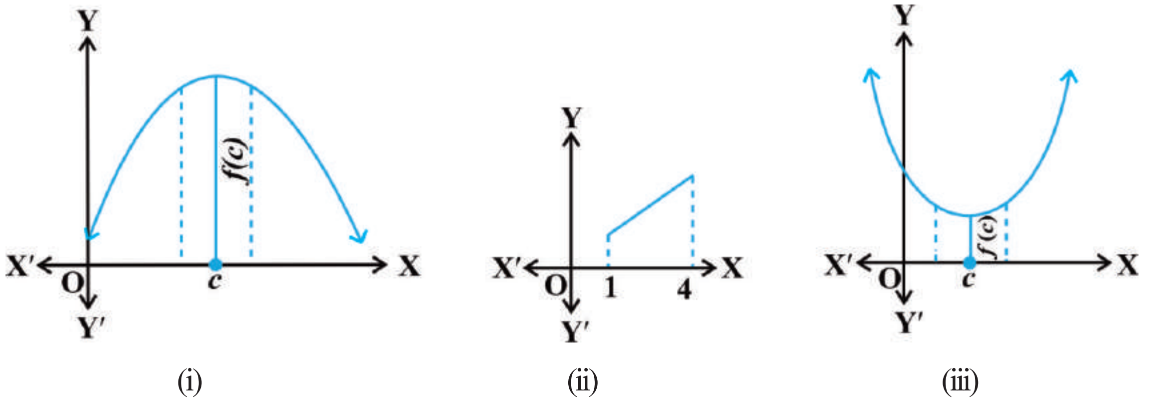
(b) કોઈ સંખ્યા c એવી મળે કે જેથી પ્રત્યેક $x \in$ I માટે, $f(c) \leq f(x)$ થાય તો, વિધેય f એ I માં ન્યૂનતમ મૂલ્ય ધરાવે છે તેમ કહેવાય.

આ સંજોગોમાં, $f(c)$ ને વિધેય f ની I માં ન્યૂનતમ કિંમત કહે છે તથા c ને વિધેય f ની I માં ન્યૂનતમ કિંમત માટેની સંખ્યા કહે છે.

(c) કોઈ સંખ્યા $c \in$ I એવી મળે કે જેથી $f(c)$ એ વિધેય f ની I માં મહત્તમ કે ન્યૂનતમ કિંમત હોય તો વિધેય f એ I માં આત્યંતિક મૂલ્ય ધરાવે છે તેમ કહેવાય.

આ સંજોગોમાં, $f(c)$ ને વિધેય f નું I માં આત્યંતિક મૂલ્ય કહે છે તથા સંખ્યા c ને આત્યંતિક સંખ્યા કહે છે.

નોંધ : અમુક વિશિષ્ટ વિધેયોના આલેખો આકૃતિ 6.9 (i), (ii) તથા (iii) માં દર્શાવેલ છે. તે આપણને વિધેય કયા બિંદુ આગળ મહત્તમ કે ન્યૂનતમ મૂલ્ય દર્શાવે છે તે શોધવા માટે મદદ કરે છે. હકીકતે, આલેખ દ્વારા, આપણે વિધેય વિકલનીય ન હોય તેમ છતાં પણ વિધેયના તે બિંદુ આગળ મહત્તમ/ન્યૂનતમ મૂલ્યો શોધી શકીએ છીએ. (ઉદાહરણ 27 જુઓ.)



આકૃતિ 6.9

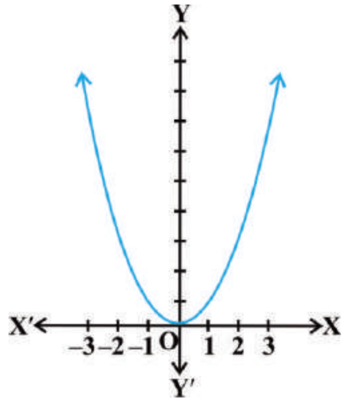
ઉદાહરણ 26 : વિધેય $f(x) = x^2$; $x \in R$ નાં મહત્તમ તથા ન્યૂનતમ મૂલ્યો હોય, તો તે શોધો.

ઉકેલ : આપેલ વિધેયના આલેખ (આકૃતિ 6.10) પરથી,

જો $x = 0$ તો $f(x) = 0$.

વળી, $f(x) \geq 0$; $\forall x \in R$

આથી, f નું ન્યૂનતમ મૂલ્ય 0 છે અને આ ન્યૂનતમ મૂલ્ય $x = 0$ આગળ મળે છે. વધુમાં, વિધેયના આલેખ પરથી જોઈ શકાય છે કે, f ને મહત્તમ મૂલ્ય નથી. આથી, f ને R માં x ની કોઈ પણ કિંમત આગળ મહત્તમ મૂલ્ય નથી.



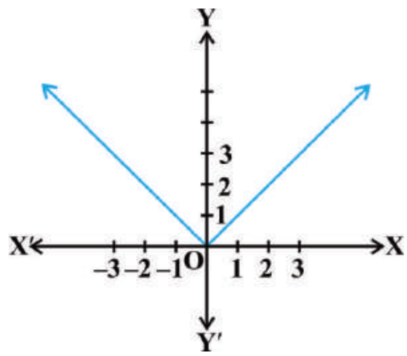
આકૃતિ 6.10

નોંધ : જો આપણે વિધેય f નો પ્રદેશ માત્ર $[-2, 1]$ સુધી જ મર્યાદિત કરીએ, તો f ની $x = -2$ આગળ મહત્તમ કિંમત $(-2)^2 = 4$ મળે.

ઉદાહરણ 27 : જો વિધેય $f(x) = |x|$, $x \in R$ નાં મહત્તમ તથા ન્યૂનતમ મૂલ્યોનું અસ્તિત્વ હોય, તો તે શોધો.

ઉકેલ : આપણે આપેલ વિધેયના આલેખ (આકૃતિ 6.11) પરથી નોંધીએ કે, $f(x) \geq 0$; $\forall x \in R$ અને જો $x = 0$ તો $f(x) = 0$.

આથી, f નું ન્યૂનતમ મૂલ્ય 0 છે અને $x = 0$ આગળ આ ન્યૂનતમ મૂલ્ય મળે છે. વળી, વિધેય f ના આલેખ પરથી સ્પષ્ટ છે કે, f ને R માં મહત્તમ મૂલ્ય નથી. આથી, f ને R માં x ની કોઈ પણ કિંમત આગળ મહત્તમ મૂલ્ય નથી.



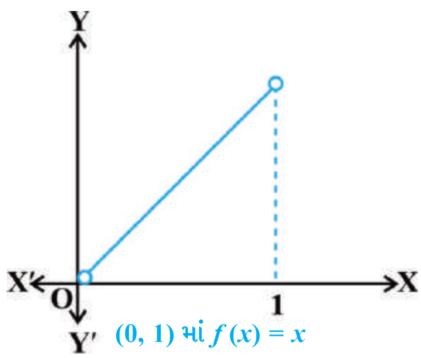
આકૃતિ 6.11

નોંધ : (1) જો આપણે વિધેયનો પ્રદેશ માત્ર $[-2, 1]$ સુધી જ મર્યાદિત કરીએ, તો વિધેય f નું મહત્તમ મૂલ્ય $|-2| = 2$ મળે.

(2) ઉદાહરણ 27 માં આપણે નોંધીશું કે વિધેય f એ $x = 0$ આગળ વિકલનીય નથી.

ઉદાહરણ 28 : જો વિધેય $f(x) = x$, $x \in (0, 1)$ નાં મહત્તમ તથા ન્યૂનતમ મૂલ્યો હોય, તો તે શોધો.

ઉકેલ : આપેલ વિધેય f એ અંતરાલ $(0, 1)$ માં ચુસ્ત વધતું વિધેય છે. વિધેય f ના આલેખ (આકૃતિ 6.12) પરથી, જોઈ શકાય છે કે, f ને શૂન્યની જમણી તરફ, 0 ની નજીક કોઈ સંખ્યા આગળ ન્યૂનતમ મૂલ્ય હોય તેમ લાગે છે તથા 1ની ડાબી તરફ, 1ની સૌથી નજીક કોઈ સંખ્યા આગળ મહત્તમ મૂલ્ય હોય તેવું લાગે છે. શું આવાં બિંદુઓ ઉપલબ્ધ છે ? ના, તે નથી. આવાં બિંદુઓ દર્શાવવાં શક્ય નથી. હકીકતમાં, જો x_0 એ શૂન્યની નજીક હોય, તો આપણે પ્રત્યેક $x_0 \in (0, 1)$ માટે, $\frac{x_0}{2} < x_0$ મેળવી શકીશું. વળી, જો x_1 એ 1 ની નજીક હોય, તો પ્રત્યેક $x_1 \in (0, 1)$ માટે, આપણે $\frac{x_1 + 1}{2} > x_1$ મેળવી શકીશું.



આકૃતિ 6.12

આથી, આપેલ વિધેય f ને અંતરાલ $(0, 1)$ માં મહત્તમ કે ન્યૂનતમ મૂલ્ય નથી.

નોંધ : વાચકે ઉદાહરણ 28માં નોંધ્યું હશે કે, જો આપણે વિધેય f ના પ્રદેશમાં સંખ્યાઓ 0 અને 1નો સમાવેશ કરીએ, એટલે કે જો આપણે વિધેય f નો પ્રદેશ $[0, 1]$ સુધી વિસ્તારીએ, તો વિધેય f ને $x = 0$ આગળ ન્યૂનતમ મૂલ્ય તથા $x = 1$ આગળ મહત્તમ મૂલ્ય છે. હકીકતમાં, આપણી પાસે નીચેનું પરિણામ છે વર્તમાન પાઠ્યપુસ્તકમાં આ પરિણામની સાબિતીને અવકાશ નથી.

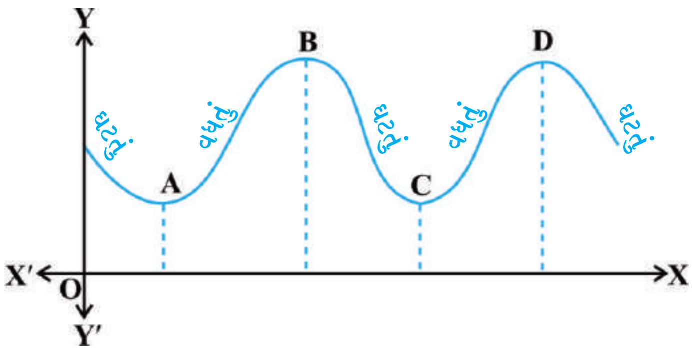
પ્રત્યેક વધતું (અથવા ઘટતું) વિધેય તે જેમાં વ્યાખ્યાયિત છે તે પ્રદેશનાં અંત્યબિંદુઓ આગળ મહત્તમ (અથવા ન્યૂનતમ) મૂલ્ય ધારણ કરે. (પ્રદેશ કોઈક સંવૃત અંતરાલ છે.)

વ્યાપક પરિણામ : જો વિધેય f એ $[a, b]$ પર સતત હોય તો તેને તેના પ્રદેશમાં મહત્તમ કે ન્યૂનતમ મૂલ્ય હોય.

☛ **નોંધ :** અંતરાલ I માં વ્યાખ્યાયિત એકસૂત્રી વિધેય f એટલે વિધેય f એ અંતરાલ I માં વધતું વિધેય છે અથવા ઘટતું વિધેય છે.

હવે, આ વિભાગમાં, $[a, b]$ પર વ્યાખ્યાયિત વિધેયનાં મહત્તમ તથા ન્યૂનતમ મૂલ્યો અંગેની ચર્ચા કરીશું.

ચાલો, આપણે આકૃતિ 6.13 માં દર્શાવેલ વિધેયના આલેખને ચકાસીએ. જુઓ કે, આલેખ પરનાં બિંદુઓ A, B, C અને D આગળ વિધેયનો પ્રકાર ઘટતાંથી વધતાં અથવા વધતાંથી ઘટતાં એ પ્રમાણે બદલાય છે. આ બિંદુઓને આપેલ વિધેયનાં **નિર્ણાયક બિંદુઓ** કહે છે. વધુમાં જુઓ કે, આ નિર્ણાયક બિંદુઓ આગળ આલેખ નાની **ટેકરી (શૃંગ)** અથવા **નાની ખીણ (ગર્ત)** સ્વરૂપે છે. ટૂંકમાં, વિધેયને બિંદુઓ A અને C આગળ (અનુક્રમે તેમની ખીણના તળિયે) કોઈક સામીપ્યમાં (અંતરાલમાં) ન્યૂનતમ કિંમત છે. આ જ રીતે, વિધેયને બિંદુઓ B અને D આગળ (અનુક્રમે ટેકરીના મથાળે) કોઈક સામીપ્યમાં મહત્તમ કિંમત છે. આ કારણે, બિંદુઓ A અને C ને વિધેયનાં સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્યો માટેનાં બિંદુઓ (અથવા સંબંધિત ન્યૂનતમ મૂલ્ય) તથા બિંદુઓ B અને D ને સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્યો માટેનાં બિંદુઓ (અથવા સંબંધિત મહત્તમ મૂલ્ય) કહે છે. વિધેયનાં સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય અને સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્યને અનુક્રમે સ્થાનીય મહત્તમ અને સ્થાનીય ન્યૂનતમ કહીશું.



આકૃતિ 6.13

હવે, આપણે નીચે પ્રમાણેની વ્યાખ્યા વિધિવત્ રીતે આપીએ.

વ્યાખ્યા 4 : ધારો કે સંખ્યા c વાસ્તવિક વિધેય f ના પ્રદેશમાં આવેલ છે.

(a) જો ધન સંખ્યા h એવી મળે કે જેથી, પ્રત્યેક $x \in (c - h, c + h)$ માટે, $f(c) \geq f(x)$ થાય તો f ને $x = c$ આગળ સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય છે.

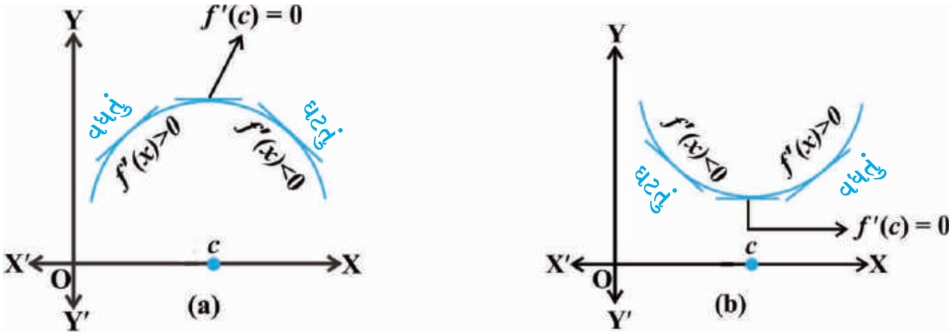
$f(c)$ને f ની સ્થાનીય મહત્તમ કિંમત કહે છે.

(b) જો ધન સંખ્યા h એવી મળે કે જેથી પ્રત્યેક $x \in (c - h, c + h)$ માટે, $f(c) \leq f(x)$ થાય, તો f ને $x = c$ આગળ સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય છે. $f(c)$ ને f ની સ્થાનીય ન્યૂનતમ કિંમત કહે છે.

નોંધ : $(c - h, c + h)$ વિધેયના પ્રદેશનો ઉપગણ હોય, તે જરૂરી છે.

ભૌમિતિક રીતે, ઉપર્યુક્ત વ્યાખ્યા સૂચવે છે કે, જો વિધેય f ને $x = c$ આગળ સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય હોય, તો વિધેય f નો આલેખ c ની આસપાસ આકૃતિ 6.14(a) માં દર્શાવ્યા પ્રમાણેનો હશે. અહીં નોંધીએ કે, વિધેય f અંતરાલ $(c - h, c)$ માં વધે છે (એટલે કે, $f'(x) > 0$) તથા અંતરાલ $(c, c + h)$ માં ઘટે છે. (એટલે કે, $f'(x) < 0$).

તે સૂચવે છે કે $f'(c) = 0$.



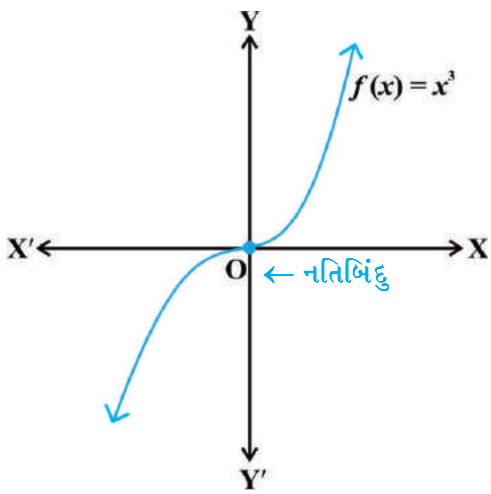
આકૃતિ 6.14

આ જ રીતે, જો વિધેય f ને $x = c$ આગળ સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય હોય, તો વિધેય f નો આલેખ c ની આસપાસ આકૃતિ 6.14(b)માં દર્શાવ્યા પ્રમાણેનો હોય. અહીં વિધેય f એ અંતરાલ $(c - h, c)$ માં ઘટે છે. (એટલે કે, $f'(x) < 0$) તથા અંતરાલ $(c, c + h)$ માં વધે છે (એટલે કે, $f'(x) > 0$). આ પણ સૂચવે છે કે $f'(c) = 0$.

ઉપર્યુક્ત ચર્ચા આપણને નીચેના પ્રમેય તરફ દોરી જાય છે. (આ પ્રમેયને સાબિતી વગર સ્વીકારી લઈશું.)

પ્રમેય 2 : ***ધારો કે f એ $I = (a, b)$ પર વ્યાખ્યાયિત વિધેય છે તથા $c \in I$. જો વિધેય f ને $x = c$ આગળ સ્થાનીય મહત્તમ કે સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય હોય, તો $f'(c) = 0$ અથવા f એ $x = c$ આગળ વિકલનીય નથી.***

નોંધ : ઉપર્યુક્ત પ્રમેયનું પ્રતીપ સત્ય હોય તે જરૂરી નથી. એટલે કે કોઈ બિંદુ આગળ વિકલિત શૂન્ય થઈ જાય તો તે બિંદુ આગળ વિધેયનું સ્થાનીય મહત્તમ કે સ્થાનીય ન્યૂનતમ હોય તે જરૂરી નથી. ઉદાહરણ તરીકે, જો $f(x) = x^3$ તો $f'(x) = 3x^2$ અને આથી, $f'(0) = 0$. પરંતુ વિધેય f ને $x = 0$ આગળ સ્થાનીય મહત્તમ કે સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય નથી. (આકૃતિ 6.15 જુઓ.)



આકૃતિ 6.15

☛ નોંધ : કોઈ પ્રદેશ D_f પર વ્યાખ્યાયિત વિધેય f માટે, જો $c \in D_f$ હોય તો, $f'(c) = 0$ અથવા f એ $x = c$ આગળ વિકલનીય ન હોય, તો c ને f ની નિર્ણાયક સંખ્યા કહે છે. અહીં નોંધીએ કે, વિધેય f એ $x = c$ આગળ સતત હોય અને $f'(c) = 0$ હોય, તો કોઈક $h > 0$ માટે વિધેય f એ અંતરાલ $(c - h, c + h)$ માં વિકલનીય હોય.

હવે, આપણે માત્ર પ્રથમ કક્ષાના વિકલિતોના ઉપયોગથી વિધેયના સ્થાનીય મહત્તમ અથવા સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્યો માટેનાં બિંદુઓ (કે x ની કિંમતો) શોધવા માટેના કાર્યનિયમ આપીશું.

પ્રમેય 3 : (પ્રથમ વિકલિત કસોટી) : ધારો કે f એ $I = (a, b)$ પર વ્યાખ્યાયિત વિધેય છે. $c \in I$ એ f ની નિર્ણાયક સંખ્યા છે તથા f એ c આગળ સતત છે.

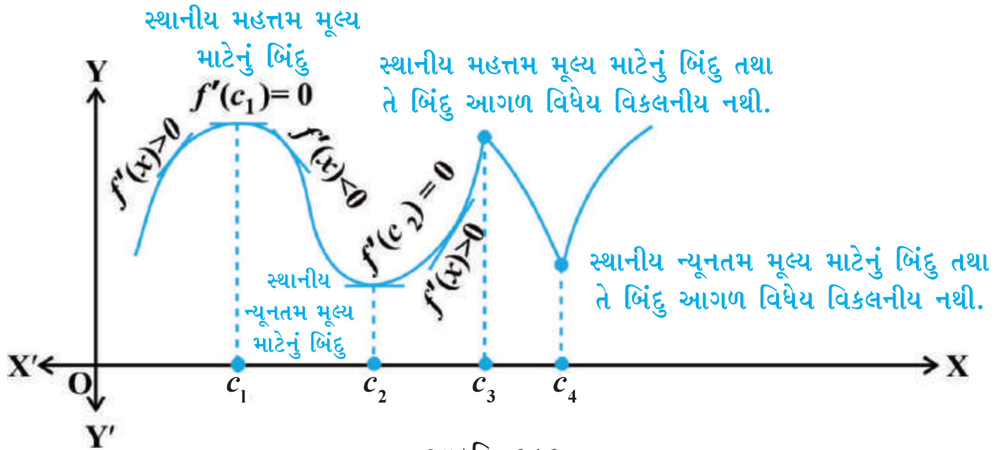
(i) જો $x = c$ આગળ $f'(x)$ નાં મૂલ્ય ધનમાંથી ઋણ થાય, એટલે કે, કોઈ ધન સંખ્યા h માટે જો $(c - h, c + h) \subset I$ તથા $(c - h, c)$ માં $f'(x) > 0$ તથા $(c, c + h)$ માં $f'(x) < 0$ તો f ને $x = c$ આગળ સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય છે.

(ii) જો $x = c$ આગળ $f'(x)$ નાં મૂલ્ય ઋણમાંથી ધન બને, એટલે કે, જો કોઈ ધન સંખ્યા h માટે $(c - h, c + h) \subset I$ તથા $(c - h, c)$ માં $f'(x) < 0$ તથા $(c, c + h)$ માં $f'(x) > 0$ તો f ને $x = c$ આગળ સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય છે.

(iii) જો $f'(x)$ એ $x = c$ આગળ તેનાં મૂલ્યો (ધનમાંથી ઋણ કે ઋણમાંથી ધન) ન બદલે તો f ને $x = c$ માટે સ્થાનીય મહત્તમ કે સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય ન મળે. હકીકતમાં, આવા બિંદુને નતિબિંદુ (Point of Inflection) કહે છે. (આકૃતિ 6.15 જુઓ.)

☛ નોંધ : જો વિધેય f ને $x = c$ આગળ સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય હોય, તો $f(c)$ ને વિધેય fનું સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય કહે છે. આ જ રીતે, જો વિધેય f ને $x = c$ આગળ સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય હોય, તો $f(c)$ ને વિધેય fનું સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય કહે છે.

આકૃતિઓ 6.15 અને 6.16, પ્રમેય 3ની ભૌમિતિક સમજ આપે છે.



આકૃતિ 6.16

ઉદાહરણ 29 : વિધેય $f(x) = x^3 - 3x + 3$ નાં સ્થાનીય મહત્તમ તથા સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્યો શોધો.

ઉકેલ : અહીં $f(x) = x^3 - 3x + 3$

$$\therefore \quad f'(x) = 3x^2 - 3$$
$$= 3(x - 1)(x + 1)$$

હવે, $f'(x) = 0$ લેતાં, $x = -1$ અથવા $x = 1$ મળે.

આથી, $x = \pm 1$ એ વિધેય fનાં સ્થાનીય મહત્તમ અને સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્યો માટેની નિર્ણાયક સંખ્યાઓ છે. ચાલો, સૌપ્રથમ આપણે $x = 1$ આગળ ચકાસણી કરીએ.

નોંધીએ કે, જેમ $x \to 1_+$ તેમ $f'(x) > 0$ તથા જેમ $x \to 1_-$ તેમ $f'(x) < 0$. આથી, પ્રથમ વિકલિત કસોટી પરથી, f એ $x = 1$ આગળ સ્થાનીય ન્યૂનતમ છે અને વિધેય f નું સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય $f(1) = 1$ છે. હવે $x = -1$ના કિસ્સામાં, નોંધો કે, જેમ $x \to -1_-$ તેમ $f'(x) > 0$ તથા જેમ $x \to -1_+$ તેમ $f'(x) < 0$. આથી, પ્રથમ વિકલિત કસોટી પરથી, f ને $x = -1$ આગળ સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય છે તથા વિધેય f નું સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય $f(-1) = 5$ છે.

x ની કિંમતો		$f'(x) = 3(x-1)(x+1)$ ની નિશાની
1ની નજીક	1_+ (ઉદાહરણ તરીકે, 1.1)	> 0
	1_- (ઉદાહરણ તરીકે, 0.9)	< 0
-1ની નજીક	-1_+ (ઉદાહરણ તરીકે, -0.9)	< 0
	-1_- (ઉદાહરણ તરીકે, -1.1)	> 0

ઉદાહરણ 30 : વિધેય $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 6x + 5$ ને જે સંખ્યાઓ આગળ સ્થાનીય મહત્તમ કે સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્યો હોય તે સંખ્યાઓ શોધો.

ઉકેલ : અહીં, $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 6x + 5$

$\therefore \quad f'(x) = 6x^2 - 12x + 6$

$= 6(x-1)^2$

$\therefore \quad x = 1$ આગળ $f'(x) = 0$

આથી, માત્ર $x = 1$ એ જ વિધેય f ની નિર્ણાયક સંખ્યા છે. હવે, આપણે આ સંખ્યા માટે વિધેય f ના સ્થાનીય મહત્તમ અને/અથવા સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્યો માટે તપાસ કરીએ. નોંધો કે, પ્રત્યેક $x \in R$ માટે, $f'(x) \geq 0$ અને વિશેષમાં, જેમ $x \to 1_-$ તથા $x \to 1_+$ તેમ $f'(x) > 0$. આથી, પ્રથમ વિકલિત કસોટી પરથી, વિધેયને $x = 1$ આગળ સ્થાનીય મહત્તમ કે સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય નથી. આથી, $x = 1$ એ નતિબિંદુ છે.

નોંધ : ઉદાહરણ 30 માં જોઈ ગયાં કે, $f'(x)$ એ R માં તેની નિશાની બદલતું નથી. તેમજ વિધેય f ના આલેખને વળાંક (સંક્રાંતિ બિંદુ) નથી. આથી, વિધેય x ની કોઈ કિંમત આગળ સ્થાનીય મહત્તમ કે સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય ધરાવતું નથી.

હવે, આપણે આપેલ વિધેયના સ્થાનીય મહત્તમ કે સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્યો ચકાસવા માટે બીજી કસોટી આપીશું. પ્રથમ વિકલિત કસોટી કરતાં આ કસોટીનો વધુ સરળતાથી ઉપયોગ કરી શકાય છે.

પ્રમેય 4 : *(દ્વિતીય વિકલિત કસોટી) : ધારો કે વિધેય f એ અંતરાલ I પર વ્યાખ્યાયિત છે તથા $c \in$ I. ધારો કે $f''(c)$નું અસ્તિત્વ છે.*

(i) જો $f''(c) < 0$ તથા $f'(c) = 0$ તો f ને $x = c$ આગળ સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય છે. $f(c)$ એ f નું સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય છે.

(ii) જો $f''(c) > 0$ તથા $f'(c) = 0$ તો f ને $x = c$ આગળ સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય છે. $f(c)$ એ f નું સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય છે.

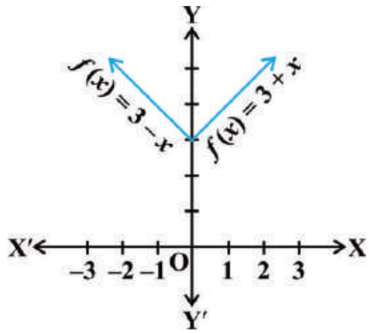
(iii) જો $f''(c) = f'(c) = 0$ તો કસોટી કોઈ પણ તારણ આપવામાં નિષ્ફળ જાય છે.

(iii) ના જેવા સંજોગોમાં, આપણે પ્રથમ વિકલિત કસોટી પર પાછા ફરીશું અને $x = c$ આગળ વિધેયને સ્થાનીય મહત્તમ, સ્થાનીય ન્યૂનતમ કે નતિબિંદુ છે તે નક્કી કરીશું.

> **☛ નોંધ :** $f''(c)$ નું અસ્તિત્વ છે એનો અર્થ એ થયો કે, વિધેય fનું $x = c$ આગળ દ્વિતીય કક્ષાનું વિકલિત અસ્તિત્વ ધરાવે છે.

ઉદાહરણ 31 : વિધેય $f(x) = 3 + |x|, x \in R$ નું સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય શોધો.

ઉકેલ : નોંધીશું કે આપેલ વિધેય $x = 0$ આગળ વિકલનીય નથી. આથી, દ્વિતીય વિકલિત કસોટી નિષ્ફળ જાય છે. ચાલો, આપણે પ્રથમ વિકલિત કસોટી અજમાવીએ. નોંધીએ કે fની નિર્ણાયક સંખ્યા 0 છે.



આકૃતિ 6.17

હવે, $x < 0$ માટે, $f(x) = 3 - x$.

તેથી, $f'(x) = -1 < 0$ મળે.

વળી, $x > 0$ માટે, $f(x) = 3 + x$

તેથી, $f'(x) = 1 > 0$

આથી, પ્રથમ વિકલિત કસોટી પરથી, f ને $x = 0$ આગળ સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય છે અને f નું સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય $f(0) = 3$ છે.

નોંધ : $|x| \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq 3$. આથી, $x = 0$ આગળ ન્યૂનતમ મૂલ્ય $f(0) = 3$ મળે.

ઉદાહરણ 32 : $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 12$ નાં સ્થાનીય મહત્તમ તથા સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્યો શોધો.

ઉકેલ : અહીં $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 12$

$$\therefore \quad f'(x) = 12x^3 + 12x^2 - 24x$$

$$= 12x(x + 2)(x - 1)$$

હવે, $f'(x) = 0$ લેતાં, $x = 0$, $x = 1$ અને $x = -2$ મળે.

વળી, $f''(x) = 36x^2 + 24x - 24$

$$= 12(3x^2 + 2x - 1)$$

$$\therefore \quad \begin{cases} f''(0) = -12 < 0 \\ f''(1) = 48 > 0 \\ f''(-2) = 84 > 0 \end{cases}$$

આથી, દ્વિતીય વિકલિત કસોટી પરથી, વિધેય f ને $x = 0$ આગળ સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય છે તથા સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય $f(0) = 12$ છે. વળી, $x = 1$ તેમજ $x = -2$ આગળ વિધેય f ને સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્યો છે. તે અનુક્રમે $f(1) = 7$ અને $f(-2) = -20$ છે.

ઉદાહરણ 33 : વિધેય $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 6x + 5$ ને જે સંખ્યાઓ આગળ સ્થાનીય મહત્તમ તથા સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્યો હોય, તે સંખ્યાઓ શોધો.

ઉકેલ : અહીં $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 6x + 5$

$$\therefore \quad f'(x) = 6x^2 - 12x + 6$$

$$= 6(x - 1)^2$$

અથવા $f''(x) = 12(x - 1)$

હવે, $f'(x) = 0$ લેતાં, $x = 1$ મળે. પણ $f''(1) = 0$

આથી, આ કિસ્સામાં દ્વિતીય વિકલિત કસોટી નિષ્ફળ જાય છે. આથી, આપણે પ્રથમ વિકલિત કસોટી પર પાછા ફરીશું.

અગાઉ ઉદાહરણ 30 માં, પ્રથમ વિકલિત કસોટીના ઉપયોગથી જોઈ ગયાં છીએ કે, $x = 1$ આગળ વિધેયને સ્થાનીય મહત્તમ કે સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય નથી. આથી, $x = 1$ એ નતિબિંદુ છે.

ઉદાહરણ 34 : જેમનો સરવાળો 15 હોય તથા જેમના વર્ગોનો સરવાળો ન્યૂનતમ હોય એવી બે ધન સંખ્યાઓ શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે બે સંખ્યાઓ પૈકીની એક સંખ્યા x છે. આથી, બીજી સંખ્યા $(15 - x)$ થાય. ધારો કે $S(x)$ એ આ બે સંખ્યાઓના વર્ગોનો સરવાળો દર્શાવે છે. આથી,

$$S(x) = x^2 + (15 - x)^2$$
$$= 2x^2 - 30x + 225$$
$$\therefore \quad S'(x) = 4x - 30$$
$$\therefore \quad S''(x) = 4$$

હવે, $S'(x) = 0$ લેતાં, $x = \frac{15}{2}$ મળે. વળી, $S''\left(\frac{15}{2}\right) = 4 > 0$

આથી, દ્વિતીય વિકલિત કસોટી પરથી, $x = \frac{15}{2}$ આગળ S સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય ધરાવે. આથી, જ્યારે સંખ્યાઓ $\frac{15}{2}$ તથા $15 - \frac{15}{2} = \frac{15}{2}$ હોય, ત્યારે તેમના વર્ગોનો સરવાળો ન્યૂનતમ હોય.

નોંધ : ઉદાહરણ 34ની જેમ સાબિત કરી શકાય કે, બે ધન સંખ્યાઓનો સરવાળો k હોય તથા તેમના વર્ગોનો સરવાળો ન્યૂનતમ હોય તો તે સંખ્યાઓ $\frac{k}{2}, \frac{k}{2}$ છે.

જો $x + y = k$ તો $S(x) = x^2 + (k - x)^2 = \frac{(2x-k)^2}{2} + \frac{k^2}{2}$ ન્યૂનતમ થવા માટે $x = \frac{k}{2}$.

ઉદાહરણ 35 : $0 \le c \le 5$ હોય, તો પરવલય $y = x^2$થી બિંદુ $(0, c)$ નું ન્યૂનતમ અંતર શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે પરવલય $y = x^2$ પરનું કોઈ બિંદુ (h, k) છે.

ધારો કે બિંદુઓ (h, k) તથા $(0, c)$ વચ્ચેનું અંતર D છે.

$$\therefore \quad D = \sqrt{(h-0)^2 + (k-c)^2}$$
$$= \sqrt{h^2 + (k-c)^2} \qquad ...(1)$$

વળી, બિંદુ (h, k), પરવલય $y = x^2$ પર હોવાથી, $k = h^2$ મળે.

આથી, (1) પરથી,

$$D \equiv D(k) = \sqrt{k + (k-c)^2}$$
$$\therefore \quad D'(k) = \frac{1 + 2(k-c)}{2\sqrt{k + (k-c)^2}}$$

$D'(k) = 0$ લેતાં, $k = \frac{2c-1}{2}$ મળે.

જુઓ, કે જ્યારે $k < \frac{2c-1}{2}$ હોય, ત્યારે $1 + 2(k - c) < 0$. એટલે કે, $D'(k) < 0$.

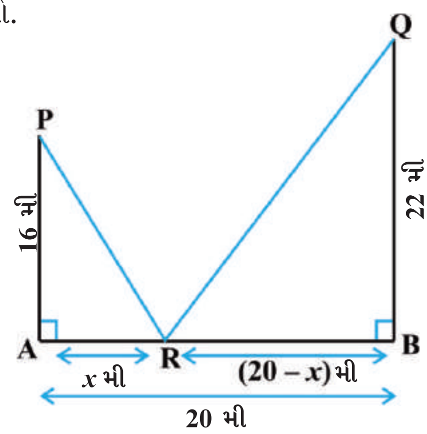
પણ જ્યારે $k > \frac{2c-1}{2}$ હોય, ત્યારે $D'(k) > 0$.

આથી, પ્રથમ વિકલિત કસોટી પરથી, $k = \frac{2c-1}{2}$ માટે $D(k)$ ન્યૂનતમ છે.

આથી, માંગેલ ન્યૂનતમ અંતર $D\left(\frac{2c-1}{2}\right) = \sqrt{\frac{2c-1}{2} + \left(\frac{2c-1}{2} - c\right)^2} = \frac{\sqrt{4c-1}}{2}$

☛ નોંધ : વાચકે નોંધ્યું હશે કે, ઉદાહરણ 35 માં આપણે અગાઉની જેમ દ્વિતીય વિકલિત કસોટીને બદલે પ્રથમ વિકલિત કસોટીનો ઉપયોગ કરેલ છે. અહીં તે ટૂંકી અને સરળ છે.

ઉદાહરણ 36 : ધારો કે બિંદુઓ A તથા B આગળ અનુક્રમે AP તથા BQ એમ બે શિરોલંબ સ્તંભ છે. જો AP = 16 મીટર, BQ = 22 મીટર અને AB = 20 મીટર હોય, તો $RP^2 + RQ^2$ ન્યૂનતમ થાય તે શરત અનુસાર મળતા $\overline{AB}$ પરના બિંદુ R નું બિંદુ A થી અંતર શોધો.



આકૃતિ 6.18

ઉકેલ : ધારો કે R એ AB પર માંગ્યા પ્રમાણેનું બિંદુ છે.

AR = x મીટર

$\therefore$ RB = $(20 - x)$ મીટર **(AB = 20 મીટર)**

આકૃતિ 6.18 પરથી,

$RP^2 = AR^2 + AP^2$

અને $RQ^2 = RB^2 + BQ^2$

$$\therefore\ RP^2 + RQ^2 = AR^2 + AP^2 + RB^2 + BQ^2$$
$$= x^2 + (16)^2 + (20 - x)^2 + (22)^2$$
$$= 2x^2 - 40x + 1140$$

ધારો કે $S \equiv S(x) = RP^2 + RQ^2 = 2x^2 - 40x + 1140$

$\therefore\ S'(x) = 4x - 40$

હવે $S'(x) = 0$ લેતાં, $x = 10$ મળે. તેમજ $S''(x) = 4 > 0, \forall x$

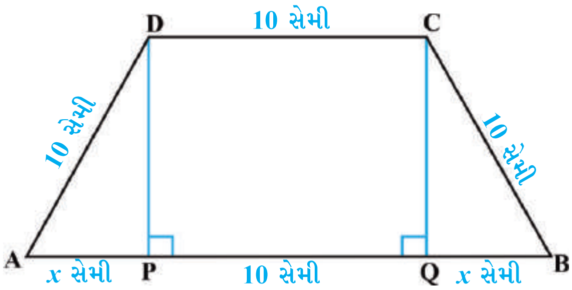
અને તેથી $S''(10) > 0$

આથી, દ્વિતીય વિકલિત કસોટી પરથી, $x = 10$ આગળ S ને સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય છે. આથી, $RP^2 + RQ^2$ ન્યૂનતમ બને તે માટે $\overline{AB}$ પરના બિંદુ Rનું બિંદુ Aથી અંતર AR = x = 10 મીટર.

ઉદાહરણ 37 : જો સમલંબ ચતુષ્કોણની આધાર સિવાયની ત્રણેય બાજુઓ પૈકી પ્રત્યેકની લંબાઈ 10 સેમી હોય, તો તે સમલંબ ચતુષ્કોણનું મહત્તમ ક્ષેત્રફળ શોધો.

ઉકેલ : માંગેલ સમલંબ ચતુષ્કોણ આકૃતિ 6.19 માં દર્શાવેલ છે.

$\overline{AB}$ પર લંબ $\overline{DP}$ તથા $\overline{CQ}$ દોરો.



આકૃતિ 6.19

ધારો કે AP = x સેમી

અહીં, $\Delta APD \cong \Delta BQC$

આથી, QB = x સેમી

પાયથાગોરસ પ્રમેય પરથી,

$$DP = QC = \sqrt{100 - x^2}$$

ધારો કે, સમલંબ ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ S છે.

$$\therefore\ S \equiv S(x) = \frac{1}{2}(\text{સમાંતર બાજુઓનો સરવાળો})(\text{ઊંચાઈ})$$
$$= \frac{1}{2}(2x + 10 + 10)\left(\sqrt{100 - x^2}\right)$$
$$= (x + 10)\left(\sqrt{100 - x^2}\right)$$

$$\therefore \quad S'(x) = (x+10)\frac{(-2x)}{2\sqrt{100-x^2}} + \left(\sqrt{100-x^2}\right)$$

$$= \frac{-2x^2 - 10x + 100}{\sqrt{100-x^2}}$$

હવે, $S'(x) = 0$ લેતાં, $2x^2 + 10x - 100 = 0$ એટલે કે, $x = 5$ તથા $x = -10$ મળે.

પરંતુ x એ અંતર દર્શાવે છે. તે ઋણ ન હોઈ શકે. આથી, $x = 5$.

નોંધ : $S''(5) = \dfrac{-4x-10}{\sqrt{100-x^2}}$

$$= \frac{-30}{5\sqrt{3}} < 0$$

કારણ કે ગુણાકારના નિયમથી વિકલન કરતાં બીજું પદ તો $x = 5$ માટે શૂન્ય જ છે.

$$\text{હવે, } S''(x) = \frac{\sqrt{100-x^2}(-4x-10) - (-2x^2-10x+100)\dfrac{(-2x)}{2\sqrt{100-x^2}}}{100-x^2}$$

$$= \frac{2x^3 - 300x - 1000}{(100-x^2)^{\frac{3}{2}}} \qquad \text{(સાદું રૂપ આપતાં)}$$

$$\text{અથવા } S''(5) = \frac{2(5)^3 - 300(5) - 1000}{(100-(5)^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-2250}{75\sqrt{75}} = \frac{-30}{\sqrt{75}} < 0$$

આથી, $x = 5$ આગળ સમલંબ ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ મહત્તમ હોય.

$$\therefore \quad \text{મહત્તમ ક્ષેત્રફળ } S(5) = (5+10)\sqrt{100-(5)^2}$$

$$= 15\sqrt{75} = 75\sqrt{3} \text{ સેમી}^2$$

ઉદાહરણ 38 : જેની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ મહત્તમ હોય તેવા આપેલ શંકુને અંતર્ગત લંબવૃત્તીય નળાકારની ત્રિજ્યા એ આપેલ શંકુના પાયાની ત્રિજ્યા કરતાં અડધી છે તેમ સાબિત કરો.

ઉકેલ : ધારો કે $OC = r$ = શંકુના પાયાની ત્રિજ્યા અને $OA = h$ = શંકુની ઊંચાઈ

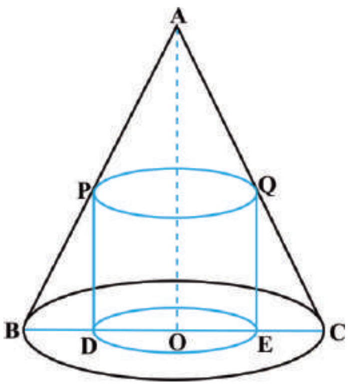
ધારો કે આપેલ શંકુને અંતર્ગત નળાકારની ત્રિજ્યા $OE = x$ (આકૃતિ 6.20)

નળાકારની ઊંચાઈ = QE

$$\therefore \quad \frac{QE}{OA} = \frac{EC}{OC} \qquad (\Delta QEC \sim \Delta AOC)$$

$$\therefore \quad \frac{QE}{h} = \frac{r-x}{r}$$

$$\therefore \quad QE = \frac{h(r-x)}{r}$$



આકૃતિ 6.20

ધારો કે નળાકારની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ S છે.

$$\therefore \quad S \equiv S(x) = \frac{2\pi x h(r-x)}{r} = \frac{2\pi h}{r}(rx - x^2)$$

$$\therefore \quad \begin{cases} S'(x) = \dfrac{2\pi h}{r}(r-2x) \\ S''(x) = \dfrac{-4\pi h}{r} \end{cases}$$

હવે, $S'(x) = 0$ લેતાં, $x = \frac{r}{2}$ મળે. વળી, પ્રત્યેક x માટે, $S''(x) < 0$ અને તેથી $S''\left(\frac{r}{2}\right) < 0$.

આથી, $x = \frac{r}{2}$ આગળ S મહત્તમ મૂલ્ય ધરાવે.

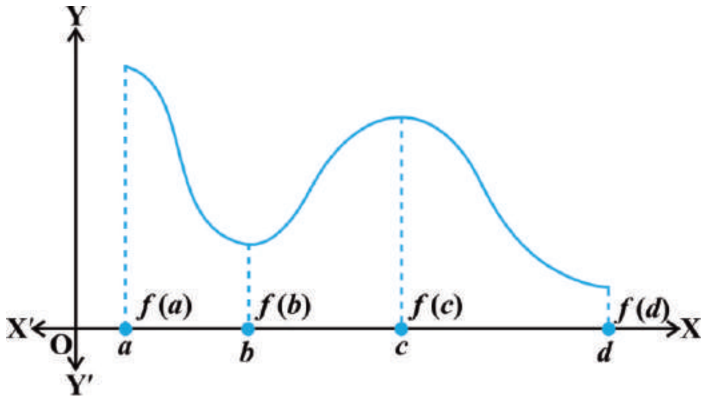
આથી, આપેલ શંકુને અંતર્ગત જેની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ મહત્તમ હોય તેવા લંબવૃત્તીય નળાકારની ત્રિજ્યા એ શંકુના પાયાની ત્રિજ્યા કરતાં અડધી છે.

6.6.1 સંવૃત અંતરાલમાં વ્યાખ્યાયિત વિધેયનાં આત્યંતિક મૂલ્યો

ધારો કે $f(x) = x + 2$, $x \in (0, 1)$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત વિધેય છે.

જુઓ કે, વિધેય f એ $(0, 1)$ પર સતત છે અને તેને મહત્તમ કે ન્યૂનતમ મૂલ્ય નથી. વધુમાં, આપણે નોંધીશું કે વિધેયને સ્થાનીય મહત્તમ કે સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય પણ નથી.

તેમ છતાં પણ, જો વિધેયનો પ્રદેશ $[0, 1]$ સુધી વિસ્તારીએ, તો વિધેય f ને સ્થાનીય મહત્તમ કે સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્યો તો ન જ મળે. પરંતુ તેને મહત્તમ મૂલ્ય $f(1) = 3$ તથા ન્યૂનતમ મૂલ્ય $f(0) = 2$ મળે. વિધેય f ની $x = 1$ આગળની મહત્તમ કિંમત 3 ને અંતરાલ $[0, 1]$ પર વિધેય f નું ***નિરપેક્ષ મહત્તમ મૂલ્ય (વૈશ્વિક મહત્તમ મૂલ્ય) (Absolute or Global maximum value)*** કહે છે. આ જ રીતે, વિધેય f ની $x = 0$ આગળની ન્યૂનતમ કિંમત 2 ને વિધેય f નું અંતરાલ $[0, 1]$ પરનું ***નિરપેક્ષ ન્યૂનતમ મૂલ્ય (વૈશ્વિક ન્યૂનતમ મૂલ્ય) (Absolute or Global minimum value)*** કહે છે.



આકૃતિ 6.21

આકૃતિ 6.21માં સંવૃત અંતરાલ $[a, d]$ પર વ્યાખ્યાયિત સતત વિધેયનો આલેખ આપેલ છે. નોંધીશું કે, વિધેય f ને $x = b$ આગળ સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય છે અને f નું સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય $f(b)$ છે. વળી, $x = c$ આગળ વિધેય f ને સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય છે તથા $f(c)$ એ f નું સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય છે.

વળી, આલેખ પરથી સ્પષ્ટ છે કે, વિધેય f ને વૈશ્વિક (નિરપેક્ષ) મહત્તમ મૂલ્ય $f(a)$ તથા વૈશ્વિક (નિરપેક્ષ) ન્યૂનતમ મૂલ્ય $f(d)$ છે. વધુમાં, નોંધીએ કે વિધેય f નું વૈશ્વિક (નિરપેક્ષ) મહત્તમ (કે ન્યૂનતમ) મૂલ્ય એ f ના સ્થાનીય મહત્તમ (કે ન્યૂનતમ) મૂલ્ય કરતાં જુદું પડી શકે છે.

હવે, આપણે સંવૃત અંતરાલ I પર વ્યાખ્યાયિત વિધેયના વૈશ્વિક (નિરપેક્ષ) મહત્તમ મૂલ્ય અને વૈશ્વિક (નિરપેક્ષ) ન્યૂનતમ મૂલ્યોને સંબંધિત નીચેના બે પ્રમેયો (સાબિતી વગર) સ્વીકારીશું.

પ્રમેય 5 : *ધારો કે f એ સંવૃત અંતરાલ $I = [a, b]$ પર સતત વિધેય છે. વિધેય f એ ઓછામાં ઓછી કોઈ એક સંખ્યા $c \in I = [a, b]$ આગળ વૈશ્વિક મહત્તમ મૂલ્ય તથા કોઈ એક સંખ્યા $d \in I = [a, b]$ આગળ વૈશ્વિક ન્યૂનતમ મૂલ્ય ધારણ કરે.*

પ્રમેય 6 : *ધારો કે f એ સંવૃત અંતરાલ $I = [a, b]$ પર વિકલનીય છે તથા કોઈ એક સંખ્યા $c \in (a, b)$ માટે,*

(i) જો f એ $x = c$ આગળ નિરપેક્ષ મહત્તમ મૂલ્ય ધારણ કરે, તો $f'(c) = 0$.

(ii) જો f એ $x = c$ આગળ નિરપેક્ષ ન્યૂનતમ મૂલ્ય ધારણ કરે, તો $f'(c) = 0$.

ઉપર્યુક્ત પ્રમેયોના સંદર્ભમાં, સંવૃત અંતરાલ $[a, b]$ પર વ્યાખ્યાયિત વિધેયનાં વૈશ્વિક (નિરપેક્ષ) મહત્તમ મૂલ્ય અને/અથવા વૈશ્વિક (નિરપેક્ષ) ન્યૂનતમ મૂલ્યો શોધવા માટે આપણે નીચેનો કાર્યનિયમ ધ્યાનમાં લઈશું.

કાર્યનિયમ :

સોપાન 1 : *આપેલ સંવૃત અંતરાલમાં વિધેય f ની તમામ નિર્ણાયક સંખ્યાઓ શોધો. આપણે જ્યાં $f'(x) = 0$ હોય અથવા વિધેય f એ x આગળ વિકલનીય ન હોય તેવી x ની કિંમતો શોધીશું.*

સોપાન 2 : *અંતરાલનાં અંત્યબિંદુઓ આગળ વિધેય f ની કિંમત શોધો. નિર્ણાયક સંખ્યાઓ આગળ શક્ય હોય, તો સ્થાનીય મહત્તમ કે સ્થાનીય ન્યૂનતમ હોય તેવી સંખ્યાઓ પસંદ કરો.*

સોપાન 3 : *આ તમામ બિંદુઓ (સોપાન 1 તથા સોપાન 2માં મેળવેલ) આગળ f ની કિંમત શોધો.*

સોપાન 4 : *વિધેય f ની સોપાન 3માં મેળવેલ તમામ કિંમતોમાંથી મહત્તમ તથા ન્યૂનતમ મૂલ્યો શોધી કાઢો. આ મહત્તમ મૂલ્ય એ વિધેય f નું વૈશ્વિક (નિરપેક્ષ) મહત્તમ મૂલ્ય તથા ન્યૂનતમ મૂલ્ય એ વિધેય f નું વૈશ્વિક (નિરપેક્ષ) ન્યૂનતમ મૂલ્ય થશે.*

ઉદાહરણ 39 : વિધેય $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 1$, $x \in [1, 5]$ નાં વૈશ્વિક મહત્તમ તથા વૈશ્વિક ન્યૂનતમ મૂલ્યો શોધો.

ઉકેલ : અહીં $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 1$

$$\therefore \quad f'(x) = 6x^2 - 30x + 36$$

$$= 6(x - 2)(x - 3)$$

હવે, $f'(x) = 0$ લેતાં, $x = 2$ અથવા $x = 3$ મળે.

$$f''(x) = 12x - 30$$

હવે, આપણે x ની આ કિંમતો આગળ વિધેય f નાં મૂલ્યો મેળવીશું. તદુપરાંત અંતરાલ $[1, 5]$નાં અંત્યબિંદુઓ આગળ પણ વિધેય f નાં મૂલ્યો મેળવીશું. એટલે કે $x = 1, x = 2, x = 3$ તથા $x = 5$ આગળ વિધેયનાં મૂલ્યો મેળવીશું.

આથી, $f(1) = 2(1)^3 - 15(1)^2 + 36(1) + 1 = 24$

$$f(2) = 2(2)^3 - 15(2)^2 + 36(2) + 1 = 29$$

$$f(3) = 2(3)^3 - 15(3)^2 + 36(3) + 1 = 28$$

$$f(5) = 2(5)^3 - 15(5)^2 + 36(5) + 1 = 56$$

આથી, આપણે કહી શકીએ વિધેય f ને $x \in [1, 5]$ માં $x = 5$ આગળ વૈશ્વિક મહત્તમ મૂલ્ય 56 છે અને $x = 1$ આગળ વૈશ્વિક ન્યૂનતમ મૂલ્ય 24 છે.

નોંધ : $f''(2) = -6$, $f''(3) = 6$ આથી, $f(2)$, $f(3)$ અનુક્રમે સ્થાનીય મહત્તમ તથા સ્થાનીય ન્યૂનતમ છે.

ઉદાહરણ 40 : વિધેય $f(x) = 12x^{\frac{4}{3}} - 6x^{\frac{1}{3}}$, $x \in [-1, 1]$ નાં વૈશ્વિક મહત્તમ તથા વૈશ્વિક ન્યૂનતમ મૂલ્યો શોધો.

ઉકેલ : અહીં, $f(x) = 12x^{\frac{4}{3}} - 6x^{\frac{1}{3}}$

$$\therefore \quad f'(x) = 16x^{\frac{1}{3}} - \frac{2}{x^{\frac{2}{3}}} = \frac{2(8x - 1)}{x^{\frac{2}{3}}}$$

આથી, $f'(x) = 0$ લેતાં, $x = \frac{1}{8}$ મળે. વધુમાં, $x = 0$, આગળ $f'(x)$ વ્યાખ્યાયિત નથી. આથી, $x = 0$ અને $x = \frac{1}{8}$ નિર્ણાયક સંખ્યાઓ/બિંદુઓ છે. હવે, આ નિર્ણાયક સંખ્યાઓ તથા અંતરાલનાં અંત્યબિંદુઓ $x = -1$ તથા $x = 1$ આગળ વિધેય f નાં મૂલ્યો મેળવીએ.

$$\therefore \quad f(-1) = 12(-1)^{\frac{4}{3}} - 6(-1)^{\frac{1}{3}} = 18$$

$$f(0) = 12(0) - 6(0) = 0$$

$$f\left(\frac{1}{8}\right) = 12\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{4}{3}} - 6\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{-9}{4} \text{ તથા}$$

$$f(1) = 12(1)^{\frac{4}{3}} - 6(1)^{\frac{1}{3}} = 6$$

આથી, આપણે કહી શકીએ કે, વિધેય f ને $x = -1$ આગળ વૈશ્વિક મહત્તમ મૂલ્ય 18 તથા $x = \frac{1}{8}$ આગળ વૈશ્વિક ન્યૂનતમ મૂલ્ય $\frac{-9}{4}$ મળે છે.

નોંધ : ખરેખર તો $x^{\frac{p}{q}}$ વ્યાખ્યાયિત થવા માટે $x > 0$ જરૂરી છે. $(-1)^{\frac{4}{3}}$ ને (-1) ના 4 ઘાતના ઘનમૂળ તરીકે મૂલવવા જોઈએ. તે જ રીતે $(-1)^{\frac{1}{3}}$ એ (-1) નું ઘનમૂળ છે.

ઉદાહરણ 41 : $x \geq 0$ માટે દુશ્મનનું એક (અપાચે) હેલિકૉપ્ટર વક્ર $y = x^2 + 7$ ના માર્ગે હવામાં ઊડે છે. બિંદુ (3, 7) આગળ ઊભેલ સૈનિક, જ્યારે હેલિકૉપ્ટર તેની એકદમ નજીક હોય ત્યારે તેને નિશાન તાકી નીચે પાડવા ઇચ્છે છે, તો તેમની વચ્ચેનું ન્યૂનતમ અંતર શોધો.

ઉકેલ : પ્રત્યેક $x \geq 0$ માટે, હેલિકૉપ્ટરનું સ્થાન $(x, x^2 + 7)$ બિંદુએ છે. આથી, (3, 7) આગળ ઊભેલ સૈનિક તથા હેલિકૉપ્ટર વચ્ચેનું અંતર $\sqrt{(x-3)^2 + (x^2+7-7)^2}$ એટલે કે, $\sqrt{(x-3)^2 + x^4}$ છે.

ધારો કે, $f(x) = (x - 3)^2 + x^4$

$$\therefore \quad f'(x) = 2(x - 3) + 4x^3$$

$$= 2(x - 1)(2x^2 + 2x + 3)$$

આથી, $f'(x) = 0$ લેતાં, $x = 1$ અથવા $2x^2 + 2x + 3 = 0$ મળે.

પરંતુ, $2x^2 + 2x + 3 = 0$ ને વાસ્તવિક બીજ નથી. જેના માટે $f'(x) = 0$ હોય, તેવા ગણમાં ઉમેરવા માટે અંતરાલનું કોઈ અંત્યબિંદુ છે જ નહિ. એટલે કે, માત્ર એક જ નિર્ણાયક સંખ્યા $x = 1$ મળે. આ બિંદુ આગળ વિધેય f નું મૂલ્ય $f(1) = (1 - 3)^2 + (1)^4 = 5$ મળે. આથી, સૈનિક તથા હેલિકૉપ્ટર વચ્ચેનું અંતર $\sqrt{f(1)} = \sqrt{5}$.

નોંધીએ કે, $\sqrt{5}$ એ મહત્તમ મૂલ્ય કે ન્યૂનતમ મૂલ્ય હોઈ શકે.

વળી, $\sqrt{f(0)} = \sqrt{(0-3)^2 + (0)^4} = 3 > \sqrt{5}$

આ દર્શાવે છે કે, $\sqrt{5}$ એ $\sqrt{f(x)}$ ની ન્યૂનતમ કિંમત છે. આથી, સૈનિક તથા હેલિકૉપ્ટર વચ્ચેનું ન્યૂનતમ અંતર $\sqrt{5}$ છે.

નોંધ : $f''(x) = 12x^2 + 2$

$$\therefore \quad f''(1) = 14 > 0$$

$$\therefore \quad \sqrt{f(1)} = \sqrt{5} \text{ ન્યૂનતમ છે.}$$

સ્વાધ્યાય 6.5

1. નીચે આપેલાં વિધેયોને મહત્તમ તથા ન્યૂનતમ મૂલ્યો હોય, તો તે શોધો :

(i) $f(x) = (2x - 1)^2 + 3$ (ii) $f(x) = 9x^2 + 12x + 2$

(iii) $f(x) = -(x - 1)^2 + 10$ (iv) $g(x) = x^3 + 1$

2. નીચેનાં વિધેયોને મહત્તમ તથા ન્યૂનતમ મૂલ્યો હોય, તો તે શોધો :

(i) $f(x) = |x + 2| - 1$ (ii) $g(x) = -|x + 1| + 3$

(iii) $h(x) = sin\,(2x) + 5$ (iv) $f(x) = |\,sin\,4x + 3\,|$

(v) $h(x) = x + 1,\ x \in (-1, 1)$

3. નીચે આપેલાં વિધેયોને સ્થાનીય મહત્તમ તથા સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્યો હોય, તો તે શોધો :

(i) $f(x) = x^2$ (ii) $g(x) = x^3 - 3x$

(iii) $h(x) = sin\,x + cos\,x;\ 0 < x < \frac{\pi}{2}$ (iv) $f(x) = sin\,x - cos\,x;\ 0 < x < 2\pi$

(v) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 15$ (vi) $g(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x};\ x > 0$

(vii) $g(x) = \frac{1}{x^2 + 2}$ (viii) $f(x) = x\sqrt{1-x},\ 0 < x < 1$

4. સાબિત કરો કે નીચે આપેલાં વિધેયોને મહત્તમ કે ન્યૂનતમ મૂલ્યો નથી :

(i) $f(x) = e^x$ (ii) $g(x) = \log x$

(iii) $h(x) = x^3 + x^2 + x + 1$

5. આપેલ અંતરાલમાં નીચેનાં વિધેયોનાં વૈશ્વિક મહત્તમ તથા વૈશ્વિક ન્યૂનતમ મૂલ્યો શોધો :

(i) $f(x) = x^3,\ x \in [-2, 2]$ (ii) $f(x) = sin\,x + cos\,x,\ x \in [0, \pi]$

(iii) $f(x) = 4x - \frac{1}{2}x^2,\ x \in \left[-2, \frac{9}{2}\right]$ (iv) $f(x) = (x-1)^2 + 3,\ x \in [-3, 1]$

6. જો કંપનીએ પ્રાપ્ત કરેલ નફાનું વિધેય, $P(x) = 41 - 72x - 18x^2$ હોય, તો કંપનીને પ્રાપ્ત થતો મહત્તમ નફો શોધો.

7. વિધેય $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 12x^2 - 48x + 25,\ x \in [0, 3]$ નાં મહત્તમ તથા ન્યૂનતમ મૂલ્યો શોધો.

8. વિધેય $f(x) = sin\,2x,\ x \in [0, 2\pi]$ એ x ની કઈ કિંમતો આગળ મહત્તમ મૂલ્ય પ્રાપ્ત કરશે ?

9. $f(x) = sin\,x + cos\,x$ ની મહત્તમ કિંમત શોધો.

10. વિધેય $f(x) = 2x^3 - 24x + 107,\ x \in [1, 3]$ માટે, f નું મહત્તમ મૂલ્ય શોધો. આ જ વિધેય માટે, $x \in [-3, -1]$ હોય, તો f નું મહત્તમ મૂલ્ય નક્કી કરો.

11. જો વિધેય $f(x) = x^4 - 62x^2 + ax + 9,\ x \in [0, 2]$ એ $x = 1$ આગળ મહત્તમ કિંમત ધારણ કરે છે તેમ આપેલ હોય, તો a ની કિંમત શોધો.

12. વિધેય $f(x) = x + sin\,2x,\ x \in [0, 2\pi]$ ની મહત્તમ તથા ન્યૂનતમ કિંમતો શોધો.

13. જેમનો સરવાળો 24 હોય અને જેમનો ગુણાકાર મહત્તમ હોય એવી બે ધન સંખ્યાઓ શોધો.

14. $x + y = 60$ થાય તથા xy^3 મહત્તમ થાય એવી બે ધન સંખ્યાઓ x અને y મેળવો.

15. જેમનો સરવાળો 35 થાય એવી બે ધન સંખ્યાઓ x અને y મેળવો જેથી ગુણાકાર x^2y^5 મહત્તમ બને.

16. જેમનો સરવાળો 16 હોય એવી બે ધન સંખ્યાઓ શોધો જેથી તેમના ઘનનો સરવાળો ન્યૂનતમ હોય.

17. જેમની બાજુનું માપ 18 સેમી હોય તેવા પતરાના ચોરસ ટુકડાના દરેક ખૂણેથી ચાર એકરૂપ ચોરસ કાપીને અને બાકીના ભાગને વાળીને એક ખુલ્લી પેટી બનાવવામાં આવે છે. પેટીનું ઘનફળ મહત્તમ થાય તે માટે કાપવામાં આવતા ચોરસની બાજુની લંબાઈ શોધો.

18. 45 સેમી × 24 સેમી લંબચોરસ પતરાના દરેક ખૂણેથી ચાર એકરૂપ ચોરસ કાપીને તથા બાકીના ભાગને વાળીને એક ખુલ્લી પેટી બનાવવામાં આવે છે. પેટીનું ઘનફળ મહત્તમ થાય, તે માટે પતરામાંથી કાપવામાં આવતા ચોરસની લંબાઈ શોધો.

19. સાબિત કરો કે નિયત વર્તુળમાં અંતર્ગત તમામ લંબચોરસોમાં ચોરસનું ક્ષેત્રફળ મહત્તમ છે.

20. લંબવૃત્તીય નળાકારનું પૃષ્ઠફળ અચળ હોય, તો નળાકારના આધારનો વ્યાસ એ તેની ઊંચાઈ જેટલો હોય ત્યારે નળાકારનું ઘનફળ મહત્તમ છે તેમ સાબિત કરો.

21. આપેલ તમામ બંધ (લંબવૃત્તીય) નળાકાર કેનમાંથી પ્રત્યેક કેનનું કદ 100 સેમી^{3} હોય તો, તે કેનનું પૃષ્ઠફળ ન્યૂનતમ હોય ત્યારે તેનાં પરિમાણ શોધો.

22. 28 મીટર લાંબા વાયરને કાપીને બે ટુકડા બનાવવામાં આવે છે. તેના એક ટુકડામાંથી ચોરસ અને બીજા ટુકડામાંથી વર્તુળ બનાવવામાં આવે છે. તેમાંથી એવી રચના બને કે જ્યારે બંનેનું કુલ ક્ષેત્રફળ ન્યૂનતમ હોય ત્યારે વાયરના બંને ટુકડાની લંબાઈ શોધો.

23. R ત્રિજ્યાવાળા ગોલકમાં અંતર્ગત મહત્તમ ઘનફળવાળા શંકુનું ઘનફળ ગોલકના ઘનફળ કરતાં $\frac{8}{27}$ ગણું છે તેમ સાબિત કરો.

24. લંબવૃત્તીય શંકુની વક્રસપાટી ન્યૂનતમ હોય અને ઘનફળ આપેલ હોય ત્યારે શંકુની ઊંચાઈ એ તેના આધારની ત્રિજ્યા કરતાં $\sqrt{2}$ ગણી છે તેમ સાબિત કરો.

25. તિર્યક ઊંચાઈ (l) આપેલ હોય ત્યારે મહત્તમ ઘનફળવાળા શંકુનો અર્ધશિરઃકોણ $tan^{-1}\sqrt{2}$ છે તેમ સાબિત કરો.

26. લંબવૃત્તીય શંકુનું પૃષ્ઠફળ S આપેલ હોય ત્યારે મહત્તમ ઘનફળવાળા શંકુનો અર્ધશિરઃકોણ $sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ છે તેમ સાબિત કરો.

પ્રશ્નો 27 થી 29 માં વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલ વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો :

27. વક્ર $x^2 = 2y$ પરનું (0, 5) થી સૌથી નજીકનું બિંદુ .... હોય.

(A) $(2\sqrt{2}, 4)$ (B) $(2\sqrt{2}, 0)$ (C) (0, 0) (D) (2, 2)

28. વિધેય $f(x) = \frac{1-x+x^2}{1+x+x^2}$, $\forall x \in R$ ની ન્યૂનતમ કિંમત .... છે.

(A) 0 (B) 1 (C) 3 (D) $\frac{1}{3}$

29. વિધેય $f(x) = [x(x-1)+1]^{\frac{1}{3}}$, $x \in [0, 1]$ નું મહત્તમ મૂલ્ય .... છે.

(A) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) 1 (D) 0

પ્રકીર્ણ ઉદાહરણો

ઉદાહરણ 42 : એક ગાડી $t = 0$ સેકન્ડના સમયે બિંદુ P થી ગતિ શરૂ કરીને t સેકન્ડે; બિંદુ Q આગળ પહોંચીને અટકે છે. આ સમય દરમિયાન ગાડીએ કાપેલું અંતર $x = t^2\left(2 - \frac{t}{3}\right)$ મીટર હોય, તો ગાડીને બિંદુ Q સુધી પહોંચતાં લાગતો સમય શોધો તથા આ બે બિંદુઓ વચ્ચેનું અંતર PQ શોધો.

ઉકેલ : t સેકન્ડમાં ગાડીએ કાપેલું અંતર $x = t^2\left(2 - \frac{t}{3}\right)$ છે.

$\therefore$ તેનો વેગ $V = \frac{dx}{dt} = 4t - t^2 = t(4 - t)$

આથી, $V = 0$ લેતાં, $t = 0$ તથા $t = 4$ મળે.

હવે, બિંદુઓ P તથા Q આગળ $V = 0$ છે.

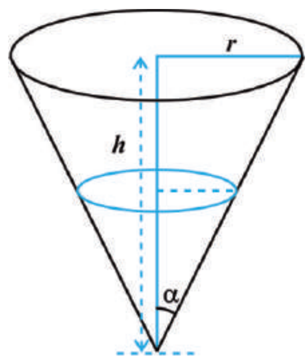
બિંદુ P આગળ $t = 0$. આથી Q આગળ $t = 4$

આથી, ગાડીને બિંદુ Q સુધી પહોંચતાં લાગતો સમય 4 સેકન્ડ છે. 4 સેકન્ડ દરમિયાન કાપેલું અંતર

$$(x)_{t=4} = 4^2\left(2 - \frac{4}{3}\right) = 16\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{32}{3} \text{ મીટર}$$

ઉદાહરણ 43 : પાણીની એક ટાંકી ઊંધા શંકુ આકારની છે. તેનો અર્ધશિરઃકોણ $tan^{-1}(0.5)$ છે. આ ટાંકીમાં 5 મી^{3}/કલાકના દરે પાણી રેડવામાં આવે છે. જ્યારે ટાંકીમાં પાણીની ઊંડાઈ 4 મીટર હોય, ત્યારે પાણીની સપાટીની ઊંચાઈ વધવાનો દર શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે, શંકુના આધારની ત્રિજ્યા r, ઊંચાઈ h તથા અર્ધશિરઃકોણ α છે. આ માહિતી આકૃતિ 6.22 માં દર્શાવેલ છે.



આકૃતિ 6.22

$\therefore \quad tan\,\alpha = \frac{r}{h}$

આથી, $\alpha = tan^{-1}\left(\frac{r}{h}\right) = tan^{-1}(0.5)$ (આપેલ છે.)

અથવા $\frac{r}{h} = 0.5$

$\therefore \quad r = \frac{h}{2}$

ધારો કે, શંકુનું ઘનફળ V છે.

$$\therefore \quad V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{h}{2}\right)^2 h = \frac{\pi h^3}{12}$$

આથી, $\frac{dV}{dt} = \frac{d}{dh}\left(\frac{\pi h^3}{12}\right) \cdot \frac{dh}{dt}$ (સાંકળના નિયમ પરથી)

$$= \frac{\pi}{4} h^2 \cdot \frac{dh}{dt}$$

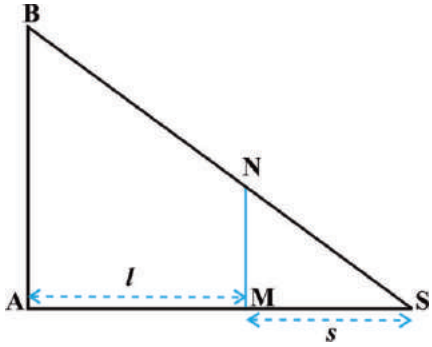
હવે ઘનફળમાં થતા ફેરફારનો દર $= \frac{dV}{dt} = 5$ મી^{3}/કલાક અને $h = 4$ મીટર

આથી, $5 = \frac{\pi}{4}(4)^2 \cdot \frac{dh}{dt}$

અથવા $\frac{dh}{dt} = \frac{5}{4\pi} = \frac{35}{88}$ મીટર/કલાક $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$

આથી, પાણીની સપાટીની ઊંચાઈ વધવાનો દર $\frac{35}{88}$ મીટર/કલાક છે.

ઉદાહરણ 44 : 2 મીટર ઊંચો એક માણસ 5 કિમી/કલાકના દરે પ્રકાશના સ્રોતથી અચળ ઝડપે દૂર જઈ રહ્યો છે. પ્રકાશના સ્રોતની જમીનથી ઊંચાઈ 6 મીટર છે, તો તેના પડછાયાની લંબાઈના વધવાનો દર શોધો.



આકૃતિ 6.23

(MN = 2 અને AB = 6 આપેલ છે.)

ઉકેલ : આકૃતિ 6.23 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે, ધારો કે AB = પ્રકાશનો સ્રોત તથા B એ ગોળાની સ્થિતિ દર્શાવે છે. વળી, MN એ t સમયે માણસની સ્થિતિ અને AM = l મીટર છે. MS એ માણસનો પડછાયો છે.

ધારો કે, MS = s મીટર

નોંધીએ કે, $\Delta MSN \sim \Delta ASB$

$$\therefore \quad \frac{MS}{AS} = \frac{MN}{AB}$$

અથવા AS = $3s$

આથી AM = $3s - s = 2s$. પરંતુ AM = l

તેથી $l = 2s$

$$\therefore \quad \frac{dl}{dt} = 2\frac{ds}{dt}$$

વળી, $\frac{dl}{dt} = 5$ કિમી/કલાક છે, તેથી $\frac{ds}{dt} = \frac{5}{2}$ કિમી/કલાક

આથી, પડછાયાની લંબાઈમાં $\frac{5}{2}$ કિમી/કલાકની ઝડપે વધારો થાય છે.

ઉદાહરણ 45 : વક્ર $x^2 = 4y$ ના બિંદુ (1, 2) માંથી પસાર થતા અભિલંબનું સમીકરણ શોધો.

ઉકેલ : $x^2 = 4y$ નું x પ્રત્યે વિકલન કરતાં,

$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{2}$ મળે.

ધારો કે (h, k) એ વક્ર $x^2 = 4y$ પરનું સ્પર્શબિંદુ છે.

આથી, ઊગમબિંદુ સિવાયના બિંદુ (h, k) આગળના સ્પર્શકનો ઢાળ $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(h,\ k)} = \frac{h}{2}$ મળે.

આથી, બિંદુ (h, k) આગળના અભિલંબનો ઢાળ $= \frac{-2}{h}$. **($h \neq 0$)**

આથી બિંદુ (h, k) આગળના અભિલંબનું સમીકરણ

$$y - k = \frac{-2}{h}(x - h) \qquad ...(1)$$

વળી, તે બિંદુ (1, 2) માંથી પસાર થાય છે.

$$\therefore \quad 2 - k = \frac{-2}{h}(1 - h)$$

અથવા $k = 2 + \frac{2}{h}(1 - h)$ ...(2)

વળી, બિંદુ (h, k) વક્ર $x^2 = 4y$ પર છે.

$$\therefore \quad h^2 = 4k \qquad ...(3)$$

આથી, (2) તથા (3) પરથી, $h = 2$ તથા $k = 1$ મળે.

h અને k ની આ કિંમતો સમીકરણ (1)માં મૂકતાં, માંગેલ અભિલંબનું સમીકરણ

$$y - 1 = \frac{-2}{2}(x - 2)$$

$\therefore$ $x + y = 3$ મળે.

ઉદાહરણ 46 : વક્ર $y = cos\,(x + y)$, $-2\pi \le x \le 2\pi$ ના રેખા $x + 2y = 0$ ને સમાંતર સ્પર્શકોનાં સમીકરણો શોધો.

ઉકેલ : $y = cos\,(x + y)$ નું x પ્રત્યે વિકલન કરતાં,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-sin\,(x + y)}{1 + sin\,(x + y)}$$

$\therefore$ (x, y) બિંદુ આગળ સ્પર્શકનો ઢાળ $= \dfrac{-sin\,(x + y)}{1 + sin\,(x + y)}$

વળી, આપેલ વક્રના સ્પર્શકો રેખા $x + 2y = 0$ ને સમાંતર હોવાથી, સ્પર્શકનો ઢાળ $\frac{-1}{2}$ છે.

$$\therefore \quad \frac{-sin\,(x + y)}{1 + sin\,(x + y)} = \frac{-1}{2}$$

$\therefore$ $sin\,(x + y) = 1$

$$\therefore \quad x + y = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{2};\ n \in Z$$

આથી, $y = cos\,(x + y) = cos\left(n\pi + (-1)^n \cdot \frac{\pi}{2}\right);\ n \in Z$

$= 0;\quad \forall n \in Z$

વળી, $-2\pi \le x \le 2\pi$ હોવાથી, $x = \frac{-3\pi}{2}$ તથા $x = \frac{\pi}{2}$ મળે. **($sin\,(x + y) = 1$)**

આથી, રેખા $x + 2y = 0$ ને સમાંતર આપેલ વક્રના સ્પર્શકોનાં સ્પર્શબિંદુઓ $\left(\frac{-3\pi}{2}, 0\right)$ અને $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ છે. આથી, માંગેલ સ્પર્શકોનાં સમીકરણ

$y - 0 = \frac{-1}{2}\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$ એટલે કે, $2x + 4y + 3\pi = 0$

અને $y - 0 = \frac{-1}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ એટલે કે, $2x + 4y - \pi = 0$ મળે.

ઉદાહરણ 47 : જે અંતરાલમાં $f(x) = \frac{3}{10}x^4 - \frac{4}{5}x^3 - 3x^2 + \frac{36}{5}x + 11$ (a) ચુસ્ત વધતું વિધેય (b) ચુસ્ત ઘટતું વિધેય હોય તે અંતરાલો નક્કી કરો.

ઉકેલ : $f(x) = \frac{3}{10}x^4 - \frac{4}{5}x^3 - 3x^2 + \frac{36}{5}x + 11$

$$\therefore \quad f'(x) = \frac{3}{10}(4x^3) - \frac{4}{5}(3x^2) - 6x + \frac{36}{5}$$

$$= \frac{6}{5}(x - 1)(x + 2)(x - 3)$$ **(સાદું રૂપ આપતાં)**

હવે, $f'(x) = 0$ લેતાં, $x = 1$ અથવા $x = -2$ અથવા $x = 3$ મળે.

x ની આ કિંમતો, વાસ્તવિક સંખ્યારેખાને ચાર ભિન્ન અંતરાલો, $(-\infty, -2)$, $(-2, 1)$, $(1, 3)$ તથા $(3, \infty)$માં વિભાજિત કરે. (આકૃતિ 6.24 જુઓ.)

આકૃતિ 6.24

અંતરાલ $(-\infty, -2)$ એટલે કે, $-\infty < x < -2$ લેતાં,

$(x - 1) < 0$, $(x + 2) < 0$ અને $(x - 3) < 0$ મળે.

(ઉદાહરણ તરીકે નોંધીએ કે, $x = -3$ માટે, $f'(x) = (x - 1)(x + 2)(x - 3) = (-4)(-1)(-6) < 0$)

આથી, જ્યારે $-\infty < x < -2$ ત્યારે $f'(x) < 0$

આથી, વિધેય f એ $(-\infty, -2)$ માં ચુસ્ત ઘટતું વિધેય છે.

હવે, અંતરાલ $(-2, 1)$ એટલે કે, $-2 < x < 1$ લેતાં,

$(x - 1) < 0$, $(x + 2) > 0$ તથા $(x - 3) < 0$ મળે.

(ઉદાહરણ તરીકે નોંધીએ કે, $x = 0$ માટે $f'(x) = (x - 1)(x + 2)(x - 3)$

$= (-1)(2)(-3) = 6 > 0$)

આથી, $-2 < x < 1$ માટે, $f'(x) > 0$

આથી, વિધેય f એ $(-2, 1)$માં ચુસ્ત વધતું વિધેય છે.

હવે, અંતરાલ $(1, 3)$ એટલે કે, $1 < x < 3$ લેતાં,

$(x - 1) > 0$, $(x + 2) > 0$, $(x - 3) < 0$ મળે.

આથી, $1 < x < 3$ માટે, $f'(x) < 0$

આથી, વિધેય f એ $(1, 3)$ માં ચુસ્ત ઘટતું વિધેય છે.

અંતમાં, અંતરાલ $(3, \infty)$ એટલે કે, $x > 3$ લેતાં,

$(x - 1) > 0$, $(x + 2) > 0$ તથા $(x - 3) > 0$ મળે.

આથી જ્યારે $x > 3$ ત્યારે $f'(x) > 0$

આથી, વિધેય f એ $(3, \infty)$ માં ચુસ્ત વધતું વિધેય છે.

ઉદાહરણ 48 : સાબિત કરો કે, વિધેય $f(x) = tan^{-1}(sin\ x + cos\ x)$, $x > 0$ એ $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ પર ચુસ્ત વધતું વિધેય છે.

ઉકેલ : અહીં $f(x) = tan^{-1}(sin\ x + cos\ x)$, $x > 0$

$$\therefore \quad f'(x) = \frac{1}{1 + (sin\ x + cos\ x)^2}(cos\ x - sin\ x)$$

$$= \frac{cos\ x - sin\ x}{2 + sin\ 2x} \qquad \text{(સાદું રૂપ આપતાં)}$$

આપણે નોંધીએ કે, પ્રત્યેક $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ માટે $2 + sin\ 2x > 0$.

આથી, જો $(cos\ x - sin\ x) > 0$ તો $f'(x) > 0$.

અથવા જો $cos\ x > sin\ x$ અથવા $cot\,x > 1$ તો $f'(x) > 0$.

હવે, જો $0 < tan\,x < 1$ તો અને તો જ $cot\,x > 1$

એટલે કે, જો $0 < x < \frac{\pi}{4}$ તો $f'(x) > 0$.

આથી, વિધેય f એ $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ માં ચુસ્ત વધતું વિધેય છે.

ઉદાહરણ 49 : 3 સેમી ત્રિજ્યાવાળી એક વર્તુળાકાર તક્તીને ગરમ કરવામાં આવે છે. આથી વિસ્તારના કારણે તેની ત્રિજ્યા 0.05 સેમી/સે ના દરે વધી રહી છે. જ્યારે તક્તીની ત્રિજ્યા 3.2 સેમી હોય ત્યારે તેના ક્ષેત્રફળમાં થતા વધારાનો દર શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે આપેલ તક્તીની ત્રિજ્યા r તથા ક્ષેત્રફળ A છે.

$\therefore \quad A = \pi r^2$

અથવા $\frac{dA}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt}$ **(સાંકળ નિયમ પરથી)**

હવે, ત્રિજ્યામાં થતા વધારાનો દર $= \frac{dr}{dt} = 0.05$ સેમી/સે

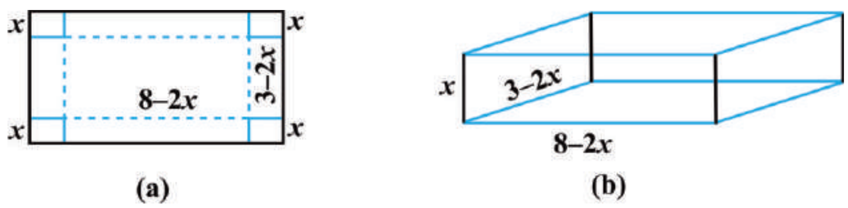
$\therefore$ ક્ષેત્રફળમાં થતા વધારાનો દર $\frac{dA}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt}$

$= 2\pi\,(3.2)(0.05)$ **($r = 3.2$ સેમી)**

$= 0.320\pi$ સેમી^{2}/સે

ઉદાહરણ 50 : 3 મીટર × 8 મીટર માપના ઍલ્યુમિનિયમના લંબચોરસ પતરાના દરેક ખૂણેથી ચાર એકરૂપ ચોરસ કાપી દરેક બાજુ વાળીને ખુલ્લી પેટી બનાવવામાં આવે છે. આ રીતે બનતી પેટીનું મહત્તમ ઘનફળ શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે દરેક ખૂણેથી કાપવામાં આવતા ચોરસની બાજુની લંબાઈ x મીટર છે. આથી, પેટીની ઊંચાઈ x મીટર, લંબાઈ $8 - 2x$ મીટર તથા પહોળાઈ $3 - 2x$ મીટર છે. (આકૃતિ 6.25 જુઓ.)



આકૃતિ 6.25

જો આ પેટીનું ઘનફળ V(x) હોય, તો

$$V(x) = x\,(3 - 2x)(8 - 2x)$$
$$= 4x^3 - 22x^2 + 24x$$

આથી, $V'(x) = 12x^2 - 44x + 24$

$= 4(x - 3)(3x - 2)$

$\therefore \quad V''(x) = 24x - 44$

હવે, $V'(x) = 0$ લેતાં, $x = 3, \frac{2}{3}$ મળે. પરંતુ $x \neq 3$ **(શા માટે ?)**

આથી, $x = \frac{2}{3}$ લેતાં, $V''\left(\frac{2}{3}\right) = 24\left(\frac{2}{3}\right) - 44$

$$= -28 < 0$$

આથી, $x = \frac{2}{3}$ માટે મહત્તમ કિંમત મળે. એટલે કે, આપણે પતરાના દરેક ખૂણેથી $\frac{2}{3}$ મીટરની લંબાઈ ધરાવતો ચોરસ દૂર કરીએ અને બાકીના ભાગમાંથી પેટી બનાવીએ, તો મળતી પેટીનું ઘનફળ મહત્તમ થાય.

$\therefore\ V\left(\frac{2}{3}\right) = 4\left(\frac{2}{3}\right)^3 - 22\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 24\left(\frac{2}{3}\right)$

$= \frac{200}{27}$ (મીટર)^3

ઉદાહરણ 51 : કોઈ એક ઉત્પાદક પ્રત્યેક એકમના ₹ $\left(5 - \frac{x}{100}\right)$ના દરે x વસ્તુઓનું વેચાણ કરે છે. જો x વસ્તુઓની પડતર કિંમત ₹ $\left(\frac{x}{5} + 500\right)$ હોય, તો ઉત્પાદકને મહત્તમ નફો પ્રાપ્ત કરવા માટે કેટલી વસ્તુઓનું વેચાણ કરવું પડે ?

ઉકેલ : ધારો કે x વસ્તુઓની વેચાણકિંમત $S(x)$ તથા પડતર કિંમત $C(x)$ છે.

હવે, $S(x) = \left(5 - \frac{x}{100}\right)x = 5x - \frac{x^2}{100}$

અને $C(x) = \frac{x}{5} + 500$

આથી, નફાનું વિધેય $P(x) = S(x) - C(x)$ દ્વારા મેળવી શકાય.

$\therefore\ P(x) = 5x - \frac{x^2}{100} - \frac{x}{5} - 500$

એટલે કે, $P(x) = \frac{24}{5}x - \frac{x^2}{100} - 500$

$\therefore\ P'(x) = \frac{24}{5} - \frac{x}{50}$

હવે, $P'(x) = 0$ લેતાં, $x = 240$ મળે.

વળી, $P''(x) = \frac{-1}{50}$. આથી, $P''(240) = \frac{-1}{50} < 0$.

આથી, $x = 240$ આગળ મહત્તમ કિંમત મળે. આથી ઉત્પાદકને મહત્તમ નફો પ્રાપ્ત કરવા માટે 240 વસ્તુઓનું વેચાણ કરવું પડે.

પ્રકીર્ણ સ્વાધ્યાય 6

1. વિકલનો ઉપયોગ કરીને નીચેનાં વિધેયોનાં આસન્ન મૂલ્યો શોધો :

(a) $\left(\frac{17}{81}\right)^{\frac{1}{4}}$ (b) $(33)^{\frac{-1}{5}}$

2. સાબિત કરો કે વિધેય $f(x) = \frac{\log x}{x}$ ને $x = e$ આગળ મહત્તમ મૂલ્ય છે.

3. એક સમદ્વિભુજ ત્રિકોણના અચળ આધારનું માપ b છે તથા તેની બે સમાન લંબાઈની બાજુઓનાં માપ 3 સેમી/સે ના દરે ઘટી રહ્યા છે. જ્યારે આ ત્રિકોણની બે સમાન બાજુઓનાં માપ આધારના માપ જેટલાં થાય ત્યારે તે ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ કેટલી ઝડપથી ઘટે ?

4. વક્ર $x^2 = 4y$ ના બિંદુ $(1, 2)$ માંથી પસાર થતા અભિલંબનું સમીકરણ શોધો.

5. $x = a cos\theta + a\theta sin\theta$, $y = a\, sin\theta - a\theta cos\theta$ પ્રચલ સમીકરણવાળા વક્રનો θ બિંદુ આગળનો અભિલંબ ઊગમબિંદુથી અચળ અંતરે આવેલો છે તેમ સાબિત કરો.

6. કયા અંતરાલમાં વિધેય $f(x) = \dfrac{4\,sin\,x - 2x - x\,cos\,x}{2 + cos\,x}$ (a) ચુસ્ત રીતે વધે અને કયા અંતરાલમાં તે (b) ચુસ્ત રીતે ઘટે છે તે નક્કી કરો.

7. કયા અંતરાલમાં વિધેય $f(x) = x^3 + \dfrac{1}{x^3}$, $x \neq 0$ (a) વધતું વિધેય અને કયા અંતરાલમાં તે (b) ઘટતું વિધેય છે તે નક્કી કરો.

8. જેનું શીર્ષ પ્રધાન અક્ષનું એક અંત્યબિંદુ હોય તેવા ઉપવલય $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ માં અંતર્ગત સમદ્વિભુજ ત્રિકોણનું મહત્તમ ક્ષેત્રફળ શોધો.

9. લંબચોરસ આધાર તથા પૃષ્ઠો ધરાવતી એક ખુલ્લી ટાંકીની ઊંડાઈ 2 મીટર તથા ઘનફળ 8 (મીટર)^3 છે. જો આ ટાંકીના આધારના બાંધકામની કિંમત ₹ 70 પ્રતિ(મીટર)^2 તથા પૃષ્ઠોના બાંધકામની કિંમત ₹ 45 પ્રતિ(મીટર)^2 હોય, તો ટાંકી બનાવવા માટે થતો ન્યૂનતમ ખર્ચ શોધો.

10. એક ચોરસની પરિમિતિ તથા વર્તુળના પરિઘનો સરવાળો અચળ k છે. સાબિત કરો કે જ્યારે ચોરસની બાજુની લંબાઈ વર્તુળની ત્રિજ્યા કરતાં બમણી હોય ત્યારે તેમના ક્ષેત્રફળનો સરવાળો ન્યૂનતમ છે.

11. એક બારી લંબચોરસ પર અર્ધવર્તુળ ગોઠવેલ હોય તે આકારની છે. બારીની કુલ પરિમિતિ 10 મીટર છે. બારીમાંથી મહત્તમ પ્રકાશ પ્રવેશી શકે તે માટે બારીનાં પરિમાણ શોધો.

12. કાટકોણ ત્રિકોણના કર્ણ પરના એક બિંદુનાં કાટખૂણો બનાવતી બાજુઓથી લંબઅંતર a તથા b છે (a, b અચળ છે) સાબિત કરો કે, કર્ણની મહત્તમ લંબાઈ $(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$ છે.

13. જે બિંદુઓ આગળ (અથવા x ની જે કિંમતો આગળ) વિધેય $f(x) = (x - 2)^4\,(x + 1)^3$, (a) સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય (b) સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય (c) નતિબિંદુ ધરાવે તે બિંદુઓ (અથવા x ની કિંમતો) શોધો.

14. વિધેય $f(x) = cos^2 x + sin\,x$, $x \in [0, \pi]$ નાં વૈશ્વિક મહત્તમ તથા વૈશ્વિક ન્યૂનતમ મૂલ્યો શોધો.

15. r ત્રિજ્યાવાળા ગોલકમાં અંતર્ગત મહત્તમ ઘનફળવાળા લંબવૃત્તીય શંકુની ઊંચાઈ $\dfrac{4r}{3}$ છે તેમ સાબિત કરો.

16. ધારો કે f એ $[a, b]$ પર વ્યાખ્યાયિત વિધેય છે. પ્રત્યેક $x \in (a, b)$ માટે $f'(x) > 0$ હોય, તો સાબિત કરો કે વિધેય f એ (a, b) પર વધતું વિધેય છે.

17. R ત્રિજ્યાવાળા ગોલકમાં અંતર્ગત મહત્તમ ઘનફળવાળા નળાકારની ઊંચાઈ $\dfrac{2R}{\sqrt{3}}$ છે તેમ સાબિત કરો. આ નળાકારનું મહત્તમ ઘનફળ શોધો.

18. h ઊંચાઈવાળા અને અર્ધશિરઃકોણ α હોય, તેવા લંબવૃત્તીય શંકુમાં અંતર્ગત મહત્તમ ઘનફળવાળા નળાકારની ઊંચાઈ એ શંકુની ઊંચાઈ કરતાં ત્રીજા ભાગની છે તેમ સાબિત કરો અને સાબિત કરો કે નળાકારનું મહત્તમ ઘનફળ $\dfrac{4\pi}{27} h^3\, tan^2\alpha$ છે.

પ્રશ્નો 19 થી 24 માં વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલ વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો :

19. 10 મીટર ત્રિજ્યાવાળા એક નળાકાર પીપમાં 314 (મીટર)^3/કલાકના દરે ઘઉં ભરવામાં આવે છે, તો ઘઉંની ઊંડાઈના વધવાનો દર .... હોય.

(A) 1 મીટર/કલાક (B) 0.1 મીટર/કલાક (C) 1.1 મીટર/કલાક (D) 0.5 મીટર/કલાક

20. $x = t^2 + 3t - 8$, $y = 2t^2 - 2t - 5$ પ્રચલ સમીકરણવાળા વક્રના $(2, -1)$ બિંદુ આગળના સ્પર્શકનો ઢાળ .... છે.

(A) $\frac{22}{7}$ (B) $\frac{6}{7}$ (C) $\frac{7}{6}$ (D) $\frac{-6}{7}$

21. રેખા $y = mx + 1$ એ વક્ર $y^2 = 4x$ નો સ્પર્શક હોય, તો m = ...

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) $\frac{1}{2}$

22. વક્ર $2y + x^2 = 3$ ના બિંદુ $(1, 1)$ આગળના અભિલંબનું સમીકરણ .... છે.

(A) $x + y = 0$ (B) $x - y = 0$ (C) $x + y + 1 = 0$ (D) $x - y = 1$

23. વક્ર $x^2 = 4y$ ના બિંદુ $(1, 2)$ માંથી પસાર થતાં અભિલંબનું સમીકરણ .... છે.

(A) $x + y = 3$ (B) $x - y = 3$ (C) $x + y = 1$ (D) $x - y = 1$

24. વક્ર $9y^2 = x^3$ પરનાં .... બિંદુઓ આગળ દોરેલ અભિલંબ યામાક્ષો સાથે સમાન અંતઃખંડ બનાવે.

(A) $\left(4, \pm\frac{8}{3}\right)$ (B) $\left(4, -\frac{8}{3}\right)$ (C) $\left(4, \pm\frac{3}{8}\right)$ (D) $\left(\pm 4, \frac{3}{8}\right)$

સારાંશ

- જો કોઈ એક રાશિ y માં અન્ય રાશિ x ની સાપેક્ષે ફેરફાર થતો હોય, તો $y = f(x)$ માટે, $\frac{dy}{dx}$ (અથવા $f'(x)$) એ y માં x ની સાપેક્ષે થતા ફેરફારનો દર દર્શાવે છે તથા $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x = x_0}$ (અથવા $f'(x_0)$) એ y માં x ની સાપેક્ષે $x = x_0$ આગળ થતા ફેરફારનો દર દર્શાવે છે.
- જો કોઈ બે ચલ x તથા y માં અન્ય ચલ t ની સાપેક્ષે ફેરફાર થતો હોય, એટલે કે જો $x = f(t)$ અને $y = g(t)$ આપેલ હોય, તેમજ $\frac{dx}{dt} \neq 0$ હોય, તો સાંકળ નિયમ દ્વારા $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$ મેળવી શકાય.
- કોઈ એક વિધેય f માટે,

  (a) પ્રત્યેક $x_1, x_2 \in (a, b)$ માટે, જો $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$ હોય અથવા પ્રત્યેક $x \in (a, b)$ માટે, જો $f'(x) \ge 0$ હોય, તો વિધેય f એ (a, b) પર વધતું વિધેય છે તેમ કહેવાય.

  (b) પ્રત્યેક $x_1, x_2 \in (a, b)$ માટે, જો $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$ હોય અથવા પ્રત્યેક $x \in (a, b)$ માટે, જો $f'(x) \le 0$ હોય, તો વિધેય f એ (a, b) પર ઘટતું વિધેય છે તેમ કહેવાય.
- વક્ર $y = f(x)$ ના બિંદુ (x_0, y_0) આગળના સ્પર્શકનું સમીકરણ $(y - y_0) = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_0, y_0)} (x - x_0)$ દ્વારા મેળવી શકાય.

- જો બિંદુ (x_0, y_0) આગળ $\dfrac{dy}{dx}$ નું અસ્તિત્વ ન હોય, તો આ બિંદુ આગળનો સ્પર્શક Y-અક્ષને સમાંતર છે તથા તેનું સમીકરણ $x = x_0$ છે.
- જો વક્ર $y = f(x)$ ને $x = x_0$ આગળનો સ્પર્શક X-અક્ષને સમાંતર હોય, તો $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{x = x_0} = 0$.
- વક્ર $y = f(x)$ ના બિંદુ (x_0, y_0) આગળના અભિલંબનું સમીકરણ $(y - y_0) = \dfrac{-1}{\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{(x_0, y_0)}} (x - x_0)$

  દ્વારા મેળવી શકાય. અહીં, $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{(x_0, y_0)} \neq 0$.
- જો બિંદુ (x_0, y_0) આગળ $\dfrac{dy}{dx} = 0$ હોય, તો અભિલંબનું સમીકરણ $x = x_0$ છે.
- જો બિંદુ (x_0, y_0) આગળ $\dfrac{dy}{dx}$ નું અસ્તિત્વ ન હોય (અથવા $\dfrac{dy}{dx}$ અવ્યાખ્યાયિત હોય), તો અભિલંબ X-અક્ષને સમાંતર હોય અને તેનું સમીકરણ $y = y_0$ છે.
- ધારો કે, Δx એ x માં થતું ‘સૂક્ષ્મ પરિવર્તન’ છે અને તેને અનુરૂપ Δy એ $y = f(x)$ માં થતું ‘સૂક્ષ્મ પરિવર્તન’ છે. $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$. આથી, y નું વિકલ, $dy = f'(x)\, dx$ તથા

  $dy = \left(\dfrac{dy}{dx}\right)\Delta x$ એ Δy નું આસન્ન મૂલ્ય છે.

  $dx = \Delta x$ તુલનાત્મક રીતે ઘણો નાનો હોય ત્યારે તેને $dy \approx \Delta y$ વડે દર્શાવાય.
- કોઈ એક સંખ્યા $c \in D_f$ એવી મળે કે જેથી $f'(c) = 0$ અથવા f એ $x = c$ આગળ વિકલનીય ન હોય, તો c ને વિધેય f ની નિર્ણાયક સંખ્યા (અથવા નિર્ણાયક બિંદુ) કહે છે.
- **પ્રથમ વિકલિત કસોટી :** ધારો કે f એ $I = (a, b)$ પર વ્યાખ્યાયિત વિધેય છે. $c \in I$ એ f ની નિર્ણાયક સંખ્યા (અથવા બિંદુ) છે તથા f એ c આગળ સતત છે.
  (i) જો $x = c$ આગળ $f'(x)$ ધનમાંથી ઋણ બને એટલે કે, કોઈ ધન સંખ્યા h માટે જો $(c - h, c + h) \subset I$ તથા $(c - h, c)$ માં $f'(x) > 0$ તથા $(c, c + h)$ માં $f'(x) < 0$ તો f ને $x = c$ આગળ સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય છે. $(c - h, c + h) - \{c\}$ માં f વિકલનીય છે.
  (ii) જો $x = c$ આગળ $f'(x)$ ઋણમાંથી ધન બને એટલે કે, કોઈ ધન સંખ્યા h માટે જો $(c - h, c + h) \subset I$ તથા $(c - h, c)$ માં $f'(x) < 0$ તથા $(c, c + h)$ માં $f'(x) > 0$ તો f ને $x = c$ આગળ સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય છે. $(c - h, c + h) - \{c\}$ માં f વિકલનીય છે.
  (iii) જો $f'(x)$ એ $x = c$ આગળ તેની નિશાની ન બદલે તો f ને $x = c$ માટે સ્થાનીય મહત્તમ કે સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય ન મળે. હકીકતમાં, આવા બિંદુને નતિબિંદુ કહે છે.
- **દ્વિતીય વિકલિત કસોટી :** ધારો કે વિધેય f એ અંતરાલ I પર વ્યાખ્યાયિત છે તથા $c \in I$ છે. ધારો કે $f''(c)$ નું અસ્તિત્વ છે.
  (i) જો $f''(c) < 0$ તથા $f'(c) = 0$ તો f ને $x = c$ આગળ સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય છે તથા $f(c)$ એ f નું સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય છે.

(ii) જો $f''(c) > 0$ તથા $f'(c) = 0$ તો f ને $x = c$ આગળ સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય છે તથા $f(c)$ એ f નું સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય છે.

(iii) જો $f''(c) = 0 = f'(c)$ તો કસોટી કોઈ પણ તારણ આપવામાં નિષ્ફળ જાય છે.

આ સંજોગોમાં, આપણે પ્રથમ વિકલિત કસોટી પર પાછા ફરીશું અને વિધેયને $x = c$ આગળ સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય, સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય કે નતિબિંદુ છે, તે નક્કી કરીશું.

- વૈશ્વિક મહત્તમ અને/અથવા વૈશ્વિક ન્યૂનતમ મૂલ્યો શોધવા માટેનો કાર્યનિયમ :

સોપાન 1 : આપેલ અંતરાલમાં વિધેય f નાં તમામ નિર્ણાયક બિંદુઓ (અથવા નિર્ણાયક સંખ્યાઓ) શોધવાં એટલે કે, x ની એવી કિંમતો શોધીશું કે જ્યાં $f'(x) = 0$ હોય અથવા x ની તે કિંમતો આગળ f વિકલનીય ન હોય.

સોપાન 2 : અંતરાલનાં અંત્યબિંદુઓએ વિધેય f ની કિંમતો શોધો. નિર્ણાયક બિંદુઓ આગળ સ્થાનીય મહત્તમ કે સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય હોય, તો તે શોધો.

સોપાન 3 : આ તમામ બિંદુઓ (સોપાન 1 તથા સોપાન 2 માં મેળવેલ) આગળ f ની કિંમતો શોધો.

સોપાન 4 : વિધેય f ની સોપાન 3 માં, મેળવેલ તમામ કિંમતોમાંથી મહત્તમ તથા ન્યૂનતમ મૂલ્યો ઓળખી કાઢો. આ મહત્તમ મૂલ્ય એ વિધેય f નું વૈશ્વિક મહત્તમ મૂલ્ય તથા ન્યૂનતમ મૂલ્ય એ વિધેય f નું વૈશ્વિક ન્યૂનતમ મૂલ્ય થશે.