त्रिकोणमितीय फलन

Ex 3.1

प्रश्न 1. निम्नलिखित डिग्री माप के संगत रेडियन माप ज्ञात कीजिए

(i) 25°
(ii) – 47° 30
(iii) 520°

हल-

हम जानते हैं कि 180° = π रेडियन

$$\therefore \quad 1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ रेडियन}$$

(i) $25^\circ = 25 \times \frac{\pi}{180} = \frac{5\pi}{36}$ रेडियन

(ii) $-47^\circ 30' \quad \because 60' = 1^\circ$

$$\therefore \quad 30' = \left(\frac{30}{60}\right)^\circ = \left(\frac{1}{2}\right)^\circ$$

$$\therefore \quad 47^\circ 30' = \left(47\frac{1}{2}\right)^\circ = \left(\frac{95}{2}\right)^\circ$$

$$= \frac{95}{2} \times \frac{\pi}{180} \text{ रेडियन}$$

$$= \frac{19\pi}{72} \text{ रेडियन}$$

$$\therefore \quad -47^\circ 30' = -\frac{19\pi}{72} \text{ रेडियन}$$

(iii) $180^\circ = \pi$ रेडियन

$$\therefore \quad 520^\circ = 520 \times \frac{\pi}{180} \text{ रेडियन} = \frac{26\pi}{9} \text{ रेडियन}$$

प्रश्न 2. निम्नलिखित रेडियन माप के संगत डिग्री माप ज्ञात कीजिए

($\pi = \frac{22}{7}$ का प्रयोग करें)

(i) $\frac{11}{16}$ (ii) -4 (iii) $\frac{5\pi}{3}$

हल-

हम जानते हैं कि π रेडियन = 180°

$$\therefore \quad 1 \text{ रेडियन} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$$

$$\text{(i)} \quad \frac{11}{16} \text{ रेडियन} = \left(\frac{11}{16}\times\frac{180}{\pi}\right)^\circ = \left(\frac{11}{16}\times\frac{180\times 7}{22}\right)^\circ$$

$$= \left(\frac{315}{8}\right)^\circ = \left(39\frac{3}{8}\right)^\circ$$

$$\Rightarrow \qquad (39)^\circ + \left(\frac{3}{8}\right)^\circ$$

$$\Rightarrow \qquad (39)^\circ + \left(\frac{3}{8}\times 60\right)' \qquad \because \ 1^\circ = 60'$$

$$\Rightarrow \qquad (39)^\circ + \left(\frac{180}{8}\right)'$$

$$\Rightarrow \qquad (39)^\circ + \left(22\frac{4}{8}\right)'$$

$\Rightarrow \quad (39)^\circ + (22)' + \left(\frac{4}{8}\right)'$

$\Rightarrow \quad (39)^\circ + (22)' + \left(\frac{1}{2}\right)'$

$\Rightarrow \quad (39)^\circ + (22)' + \left(\frac{1}{2}\times 60\right)'' \quad \because\ 1' = 60''$

$\Rightarrow \quad (39)^\circ + (22)' + (30)''$

या $\quad 39^\circ\ 22'\ 30''$

(ii) $\because\ \pi$ रेडियन $= 180^\circ$

$\therefore\ 1$ रेडियन $= \frac{180}{\pi}$ डिग्री $= \frac{180\times 7}{22} \quad \because\ \pi = \frac{22}{7}$

$\therefore\ -4$ रेडियन $= -\ \frac{4\times 180\times 7}{22}$ डिग्री

$= -\ 229\frac{1}{11}$ डिग्री

$= -\ 229^\circ - \left(\frac{1}{11}\times 60\right)'$

$= -\ 229^\circ - 5' - \left(\frac{5\times 60}{11}\right)''$

$= -\ 229^\circ - 5' - 27''$

$= -\ 229^\circ.5'.27''$ (निकटतम.)

(iii) $\because\ \pi$ रेडियन $= 180^\circ$

$\therefore\ \frac{5\pi}{3}$ रेडियन $= \frac{180}{\pi} \times \frac{5\pi}{3}$

$= 300^\circ$

प्रश्न 3. एक पहिया एक मिनट में 360° परिक्रमण करता है तो एक सेकण्ड में कितने रेडियन माप का कोण बनाएगा?

हल :

∵ 1 परिक्रमण में पहिये द्वारा बनाया गया कोण = 2π रेडियन
∴ 360 पक्रिमण में पहिये द्वारा बनाया गया कोण = 360 x 2π रेडियन

अतः 1 मिनट या 60 सेकण्ड में बनाया गया कोण = 360 x 2π रेडियन

∴ 1 सेकण्ड में बनाया गया कोण = $\frac{360 \times 2\pi}{60}$

= 12π रेडियन

प्रश्न 4. एक वृत्त, जिसकी त्रिज्या 100 सेमी. है, की 22 सेमी. लम्बाई की चाप वृत्त के केन्द्र पर कितने डिग्री माप का कोण बनाएगी।

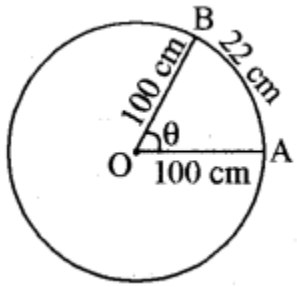
($\pi = \frac{22}{7}$ का प्रयोग कीजिए।)

हल-

हम जानते हैं कि l = r θ

यहाँ r = 100 cm, l = 22 cm.

∴ 22 = 100 x θ



$$\therefore \theta = \frac{22}{100} \text{ रेडियन}$$

$$= \frac{22}{100} \times \frac{180}{\pi} \text{ डिग्री}$$

$$= \frac{22}{100} \times \frac{180 \times 7}{22} \text{ डिग्री}$$

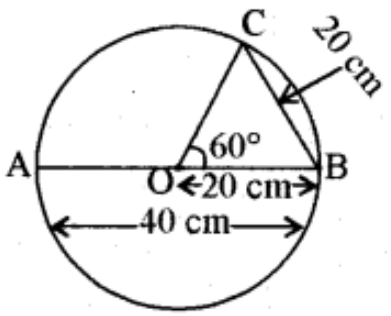
$$= \frac{63}{5} \text{ डिग्री} = \left(12 + \frac{3}{5}\right) \text{ डिग्री}$$

$$= 12^\circ\left(\frac{3}{5} \times 60\right)' = 12^\circ 36'$$

प्रश्न 5. एक वृत्त, जिसका व्यास 40 सेमी. है, की एक जीवा 20 सेमी. लम्बाई की है तो इसके संगत छोटे चाप की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

हल-

माना कि बिन्दु O वृत्त के व्यास का केन्द्र बिन्दु है। हम जानते हैं कि प्रश्नानुसार वृत्त का व्यास 40 सेमी. है अतः त्रिज्या (r) = 20 cm.
ΔOBC एक समबाहु त्रिभुज है।
∴ ∠BOC = 60°



$$\therefore \quad \theta = \frac{60 \times \pi}{180} \text{ रेडियन} = \frac{\pi}{3} \text{ रेडियन}$$

हम जानते हैं कि $l = r\theta$

या $$l = 20 \times \frac{\pi}{3}$$

$$= \frac{20\pi}{3} \text{ cm.}$$

$$= \frac{20}{3} \times \frac{22}{7} = \frac{440}{21} \text{ cm.}$$

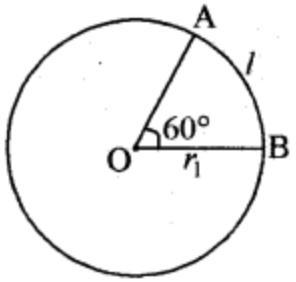
$$= 20.95 \text{ cm.}$$

अतः वृत्त की जीवा के संगत चाप की लम्बाई

$$= \frac{20\pi}{3} \text{ cm. या } 20.93 \text{ cm.}$$

प्रश्न 6. यदि दो वृत्तों के समान लम्बाई वाले चाप अपने केन्द्रों पर क्रमशः 60° तथा 75° के कोण बनाते हों, तो उनकी त्रिज्याओं का अनुपात ज्ञात कीजिए।
हल-

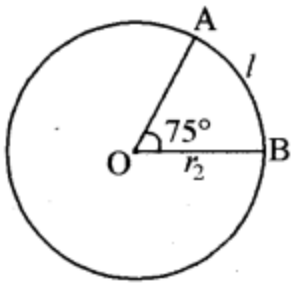
माना कि चाप की लम्बाई l है
चाप द्वारा केन्द्र पर बना कोण = 60°
∴ $\theta_1 = \frac{\pi}{3}$ रेडियन
माना कि इस वृत्त की त्रिज्या r_1 है।
∴ $l = r_1 \theta_1$



$$= r_1 \frac{\pi}{3}$$

$$\therefore r_1 = \frac{3l}{\pi} \quad \text{.... (i)}$$

इसी प्रकार माना कि दूसरे वृत्त की त्रिज्या r_2 है
तथा चाप की लम्बाई l है। चूँकि दिया गया है कि समान लम्बाई के चाप हैं।
चाप द्वारा केन्द्र पर बना कोण = 75° रेडियन



$$\therefore \theta_2 = 75 \times \frac{\pi}{180} \text{ रेडियन}$$

$$\theta_2 = \frac{5\pi}{12} \text{ रेडियन}$$

$$\therefore l = r_2 \theta_2 \text{ से}$$

$$l = r_2 \times \frac{5\pi}{12}$$

$$\therefore r_2 = \frac{12l}{5\pi} \quad \text{.... (ii)}$$

समीकरण (i) में (ii) से भाग देने पर

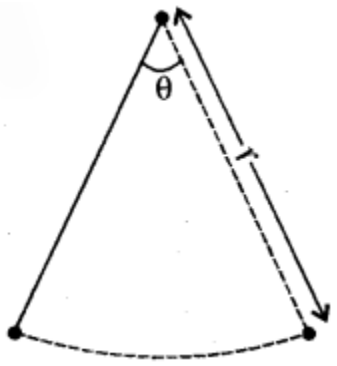
$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{3l}{\pi} \div \frac{12l}{5\pi}$$

$$= \frac{3l}{\pi} \times \frac{5\pi}{12l} = \frac{5}{4} = 5 : 4$$

प्रश्न 7. 75 सेमी. लम्बाई वाले एक दोलायमान दोलक का एक सिरे से दूसरे सिरे तक दोलन करने से जो कोण बनता है, उसका माप रेडियन में ज्ञात कीजिए, जबकि उसके नोक द्वारा बनाए गए चाप की लम्बाई निम्नलिखित हैं
(i) 10 सेमी.
(ii) 21 सेमी.

हल-

(i) प्रश्नानुसार r = 75 सेमी.
l = 10 सेमी
θ = ?



∵ हम जानते हैं कि $\theta = \frac{l}{r}$

$= \frac{10}{75}$ रेडियन $= \frac{2}{15}$ रेडियन **उत्तर**

(ii) यहाँ $r = 75$ सेमी., $l = 21$ सेमी., $\theta = ?$

$\therefore \theta = \frac{l}{r} = \frac{21}{75}$ रेडियन $= \frac{7}{25}$ रेडियन

Ex 3.2

प्रश्न 1. cos x = $-\frac{1}{2}$,x तीसरे चतुर्थांश में स्थित है।

हल-

दिया है— cos x = $-\frac{1}{2}$
हम जानते हैं
$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

$$= 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\sin^2 x = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \quad \sin x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$[(\because x \text{ तृतीय चतुर्थांश में है}) \; x < 0]$

अत: $$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

$$\therefore \quad \cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\frac{-1}{2}} = -2$$

और $$\text{cosec } x = \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{\frac{-\sqrt{3}}{2}} = \frac{-2}{\sqrt{3}}$$

प्रश्न 2. cot x = $\frac{3}{2}$,x तृतीय चतुर्थांश में स्थित है।

हल–

दिया है— cot x = $\frac{3}{2}$
हम जानते हैं कि
$\text{cosec}^2 x = 1 + \cot^2 x$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{cosec}^2 x = 1+\left(\frac{3}{4}\right)^2 = 1+\frac{9}{16}$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{cosec}^2 x = \frac{25}{16}$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{cosec} x = \pm\frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{cosec} x = -\frac{5}{4}$$

($\because$ x तृतीय चतुर्थांश में है अत: $x < 0$)

अत: $$\sin x = \frac{1}{\operatorname{cosec} x} = \frac{1}{-\frac{5}{4}} = -\frac{4}{5}$$

$$\cos x = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)(\sin x) = (\cot x) \cdot \sin x$$

$$= \frac{3}{4}\times\left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{3}{5}$$

$$\tan x = \frac{1}{\cot x} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$$

और $$\sec x = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{-\frac{3}{5}} = -\frac{5}{3}$$

प्रश्न 3. Sec x = $\frac{13}{5}$, x चतुर्थ चतुर्थांश में स्थित है।

हल–

दिया है- sec x = $\frac{13}{5}$
हम जानते हैं कि $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$
$\tan^2 x = \sec^2 x - 1$

$$\Rightarrow \quad \tan^2 x = \left(\frac{13}{5}\right)^2 - 1$$

$$= \frac{169}{25} - 1 = \frac{169 - 25}{25}$$

$$\Rightarrow \quad \tan^2 x = \frac{144}{25}$$

$$\Rightarrow \quad \tan x = \pm\frac{12}{5}$$

$$\Rightarrow \quad \tan x = -\frac{12}{5}$$

($\because$ x तृतीय चतुर्थांश में है अत: $x < 0$)

अत: $$\sin x = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)\cos x = \tan x\left(\frac{1}{\sec x}\right)$$

$$= \left(-\frac{12}{5}\right)\left(\frac{1}{\frac{13}{5}}\right) = -\frac{12}{5} \times \frac{5}{13}$$

$$= -\frac{12}{13}$$

$$\cos x = \frac{1}{\sec x} = \frac{1}{\frac{13}{5}} = \frac{5}{13}$$

$$\cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{1}{-\frac{12}{5}} = -\frac{5}{12}$$

और $$\text{cosec } x = \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{-\frac{12}{13}} = -\frac{13}{12}$$

प्रश्न 4. मान ज्ञात कीजिए

Sin 765°

हल : sin 765° = sin (2 x 360° + 45°)

= sin 45° $\because$ sin (2πn + θ) = sin θ, ∀x ∈ 1

$= \frac{1}{\sqrt{2}}$

प्रश्न 5. $\tan \frac{19x}{3}$

हल :

$\tan \frac{19x}{3}$

$= \tan \left(6\pi + \frac{\pi}{3}\right)$

$= \tan \frac{\pi}{3}$ [$\because$ tan $(2n\pi + \theta) = \tan \theta, n \in I$]

$= \tan 60°$

$= \sqrt{3}$

प्रश्न 6.

$\sin\left(-\frac{11\pi}{3}\right)$

हल :

$\sin\left(-\frac{11\pi}{3}\right) = -\sin \frac{11\pi}{3}$ [$\because \sin(-\theta) = -\sin\theta$]

$= -\sin\left(4\pi - \frac{\pi}{3}\right)$

[$\because \sin(2 \times 2\pi - \theta) = -\sin\theta$]

$= -\left(-\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$= \sin \frac{\pi}{3}$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}$

प्रश्न 7.

$$\cot\left(-\frac{15\pi}{4}\right)$$

हल :

$$\cot\left(-\frac{15\pi}{4}\right) = -\cot\left(\frac{15\pi}{4}\right) \quad [\because \cot(-\theta) = -\cot\theta]$$

$$= -\cot\left(4\pi - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= -\cot\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$[\because \cot(2n\pi \pm \theta) = \cot(\pm\theta)]$$

$$= \cot\frac{\pi}{4} \quad [\because \cot(-\theta) = -\cot\theta]$$

$$= 1$$

Ex 3.3

प्रश्न 1.

$$\sin^2\frac{\pi}{6} + \cos^2\frac{\pi}{3} - \tan^2\frac{\pi}{4} = -\frac{1}{2}$$

हल- प्रश्नानुसार L.H.S.

$$= \sin^2\frac{\pi}{6} + \cos^2\frac{\pi}{3} - \tan^2\frac{\pi}{4}$$

$$\sin^2 30° + \cos^2 60° - \tan^2 45°$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - (1)^2$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - 1$$

$$= \frac{1+1-4}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} = \text{R.H.S.}$$

प्रश्न 2.

$$2\sin^2\frac{\pi}{6} + \operatorname{cosec}^2\frac{7\pi}{6}\cdot\cos^2\frac{\pi}{3} = \frac{3}{2}$$

हल :

$$\text{L.H.S.} = 2\sin^2\frac{\pi}{6} + \operatorname{cosec}^2\frac{7\pi}{6}\cdot\cos^2\frac{\pi}{3}$$

$$= 2\sin^2\frac{\pi}{6} + \operatorname{cosec}^2\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)\cdot\cos^2\frac{\pi}{3}$$

$$= 2\sin^2\frac{\pi}{6} + \left(-\operatorname{cosec}\frac{\pi}{6}\right)^2\cdot\cos^2\frac{\pi}{3}$$

$$= 2\sin^2\frac{\pi}{6} + \operatorname{cosec}^2\frac{\pi}{6}\cdot\cos^2\frac{\pi}{3}$$

$$= 2\sin^2 30^\circ + \operatorname{cosec}^2 30^\circ\cdot\cos^2 60^\circ$$

$$= 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 + (2)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$= 2\times\frac{1}{4} + 4\times\frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2} = \text{R.H.S.}$$

प्रश्न 3.

$$\cot^2\frac{\pi}{6} + \operatorname{cosec}\frac{5\pi}{6} + 3\tan^2\frac{\pi}{6} = 6$$

हल :

$$\text{L.H.S.} = \cot^2\frac{\pi}{6} + \operatorname{cosec}\frac{5\pi}{6} + 3\tan^2\frac{\pi}{6}$$

$$= \cot^2\frac{\pi}{6} + \operatorname{cosec}\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + 3\tan^2\frac{\pi}{6}$$

$$= \cot^2\frac{\pi}{6} + \operatorname{cosec}\frac{\pi}{6} + 3\tan^2\frac{\pi}{6}$$

$$= \cot^2 30° + \operatorname{cosec} 30° + 3\tan^2 30°$$

$$= \left(\sqrt{3}\right)^2 + 2 + 3\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2$$

$$= 3 + 2 + 3\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$= 3 + 2 + 1 = 6 = \text{R.H.S.}$$

प्रश्न 4.

$$2\sin^2\frac{3\pi}{4} + 2\cos^2\frac{\pi}{4} + 2\sec^2\frac{\pi}{3} = 10$$

हल :

$$\text{L.H.S.} = 2\sin^2\frac{3\pi}{4} + 2\cos^2\frac{\pi}{4} + 2\sec^2\frac{\pi}{3}$$

$$= 2\sin^2\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) + 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 2(2)^2$$

$$= 2\sin^2\frac{\pi}{4} + 1 + 8$$

$$= 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1 + 8$$

$$= 1 + 9 = 10 = \text{R.H.S.}$$

प्रश्न 5. मान ज्ञात कीजिया

(i) sin 75°

(ii) tan 15°

हल : (i) ∵ sin 75°

= sin (45° + 30°)
= sin 45°. cos 30° + cos 45°. sin 30°

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

(ii) tan 15°

= tan (45° – 30°)

$$= \frac{\tan 45° - \tan 30°}{1 + \tan 45°.\tan 30°}$$

$$= \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + (1)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)} = \frac{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} \times \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1}$$

यहाँ पर अंश तथा हर में $(\sqrt{3}-1)$ से गुणा किया गया है।

$$= \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3})^2 - (1)^2}$$

$$= \frac{(\sqrt{3})^2 - 2(\sqrt{3}) + (1)^2}{3-1}$$

$$= \frac{3 - 2\sqrt{3} + 1}{2} = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{2(2-\sqrt{3})}{2} = 2 - \sqrt{3}$$

प्रश्न 6. सिद्ध कीजिए
tan 225° cot 405° + tan 765° cot 675° = 0

हल :

L.H.S. tan 225° cot 405° + tan 765° cot 675°
⇒ tan(180° + 459) cot(360° + 459) + tan(2 x 360° + 45°). cot (2 x 360° – 45°)

⇒ tan 45° cot 45° + tan 45o ° x (-cot 45°)
⇒ tan 45° . cot 45° – tan 45° . cot 45° + 0
= RHS
LHS = RHS

प्रश्न 7.

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\sqrt{2}\cos x$$

हल :

$$\text{LHS}\ \cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$$

$$=\cos\frac{\pi}{4}\cos x-\sin\frac{\pi}{4}\sin x+\cos\frac{\pi}{4}\cos x+\sin\frac{\pi}{4}\sin x$$

$$=2\cos\frac{\pi}{4}\cos x$$

$$=2\times\frac{1}{\sqrt{2}}\times\cos x=\sqrt{2}\cos x\ =\text{R.H.S.}$$

$$\therefore\ \text{L.H.S.}=\text{R.H.S.}$$

प्रश्न 8. निम्नलिखित को सिद्ध कीजिए

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\ \cos\left(\frac{\pi}{4}-y\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\ \sin\left(\frac{\pi}{4}-y\right)$$
$$=\sin\ (x+y)$$

हल :

$$\text{L.H.S.}=\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\ \cos\left(\frac{\pi}{4}-y\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}-y\right)$$

माना $\frac{\pi}{4}-x=A$ तथा $\frac{\pi}{4}-y=B$

$\therefore$ $= \cos A \cdot \cos B - \sin A \cdot \sin B$

$\cos (A+B)$

A तथा B का मान रखने पर

$$= \cos\left(\frac{\pi}{4}-x+\frac{\pi}{4}-y\right)$$

$$= \cos\left[\frac{\pi}{2}-(x+y)\right]$$

$$= \sin (x+y) = \text{R.H.S.} \quad \left[\because \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta\right]$$

प्रश्न 9.

$$\frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}=\left(\frac{1+\tan x}{1-\tan x}\right)^2$$

हल :

$$\text{L.H.S.} = \frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}$$

$\left[\because \tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A.\tan B}\right.$ तथा $\tan (A-B)$

$$= \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A . \tan B}\Bigg]$$

$$= \frac{\dfrac{\tan\frac{\pi}{4} + \tan x}{1 - \tan\frac{\pi}{4}.\tan x}}{\dfrac{\tan\frac{\pi}{4} - \tan x}{1 + \tan\frac{\pi}{4}.\tan x}} = \frac{\dfrac{1+\tan x}{1-\tan x}}{\dfrac{1-\tan x}{1+\tan x}} \qquad \left[\because \tan\frac{\pi}{4} = 1\right]$$

$$= \frac{1+\tan x}{1-\tan x} \times \frac{1+\tan x}{1-\tan x} = \left(\frac{1+\tan x}{1-\tan x}\right)^2 = \text{R.H.S.}$$

प्रश्न 10.

$$\frac{\cos(\pi + x)\cos(-x)}{\sin(\pi - x)\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)} = \cot^2 x$$

हल :

$$\text{L.H.S.} = \frac{\cos(\pi + x)\cos(-x)}{\sin(\pi - x)\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}$$

∵ हम जानते हैं कि

$\cos(\pi + x) = -\cos x$, $\cos(-x) = \cos x$

तथा $\sin(\pi - x) = \sin x$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$

$$\therefore \quad = \frac{(-\cos x)\cos x}{\sin x(-\sin x)} = \frac{-\cos^2 x}{-\sin^2 x}$$

$$= \cot^2 x = \text{R.H.S.}$$

प्रश्न 11. sin (n + 1) x sin (n + 2) x + cos (n + 1) x cos (n + 2) x = cos x

हल :

L.H.S. = sin (n + 1) x sin (n + 2) x + cos (n + 1) x cos (n + 2) x
माना कि (n +1) x = A तथा (n + 2)x = B
= sin A . sin B + cos A cos B
= cos (A – B)

A तथा B का मान रखने पर
= cos [(n + 1)x – (n + 2)x]
= cos (nx + x – nx – 2x]
= cos (x – 2x) = cos (-x)

हम जानते हैं कि cos (-θ) = cos θ ∀θ∈R
= cos x
= R.H.S.

प्रश्न 12. $\sin^2 6x - \sin^2 4x = \sin 2x \sin 10x$

हल :

L.H.S. = $\sin^2 6x - \sin^2 4x$
= (sin 6x + sin 4x) (sin 6x – sin 4x)
[∵ $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$]

$$= \left[2\sin\left(\frac{6x+4x}{2}\right)\cos\left(\frac{6x-4x}{2}\right)\right] \cdot \left[2\cos\left(\frac{6x+4x}{2}\right)\sin\left(\frac{6x-4x}{2}\right)\right]$$

= (2 sin 5x cos x) (2 cos 5x . sin x)
= (2 sin 5x cos 5x) (2 sin x cos x)
= sin 10x . sin 2x (∵ 2 sin cos θ = sin 2θ)
= R.H.S.

IInd Method :
L.H.S.= $\sin^2 6x - \sin^2 4x$
= sin (6x + 4x) sin (6x – 4x)
[∵ $\sin^2 A - \sin^2 B = \sin(A + B)\sin(A - B)$]
= sin 10x sin 2x
= R.H.S.

प्रश्न 13.Sin 2x + 2 sin 4x + sin 6x = 4 $\cos^2$ x sin 4x

हल :

L.H.S. = sin 2x + 2 sin 4x + sin 6x
= (sin 2x + sin 6x) + 2 sin 4x

$$= 2 \sin\left(\frac{2x+6x}{2}\right) \cos\left(\frac{2x-6x}{2}\right) + 2 \sin 4x$$

$$\left[\because \sin A + \sin B = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}\right]$$

= 2 sin (4x) cos (-2x) + 2 sin 4x
= 2 sin 4x (cos 2x + 1)
[∵ cos (-x) = cos x ∀ x ∈ R].
= 2 sin 4x (2 $\cos^2$x)
[∵ cos 2x = 2 $\cos^2$x – 1]
= 4 $\cos^2$ x sin 4x
= R.H.S.

प्रश्न 14. cot 4x (sin 5x + sin 3x) = cot x (sin 5x – sin 3x)

हल :
L.H.S. = cot 4x (sin 5x + sin 3x)

$$= \frac{\cos 4x}{\sin 4x}(\sin 5x + \sin 3x)$$

$$= \frac{\cos 4x}{\sin 4x}\left[2\sin\left(\frac{5x+3x}{2}\right)\cos\left(\frac{5x-3x}{2}\right)\right]$$

$$\left[\because \sin C + \sin D = 2\sin\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}\right]$$

$$= \frac{\cos 4x}{\sin 4x}\ (2 \sin 4x \cos x)$$

$$= 2 \cos 4x \cdot \cos x \qquad \ldots. \text{(i)}$$

$$\text{R.H.S.} = \cot x\ (\sin 5x - \sin 3x)$$

$$= \frac{\cos x}{\sin x}\left\{2\cos\frac{5x+3x}{2}\sin\frac{5x-3x}{2}\right\}$$

$$\left(\because \sin A - \sin B = 2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}\right)$$

$$= \frac{\cos x}{\sin x}\ \{2\ \cos\ 4x\ .\ \sin\ x\}$$

$$= 2\ \cos\ 4x\ .\ \cos\ x \qquad \ldots.\ \text{(ii)}$$

समीकरण (i) तथा (ii) से

L.H.S. = R.H.S.

प्रश्न 15. सिद्ध कीजिए

$$\frac{\sin 5x - 2\sin 3x + \sin x}{\cos 5x - \cos x} = \tan x$$

हल :

$$\text{L.H.S.} = \frac{\sin 5x - 2\sin 3x + \sin x}{\cos 5x - \cos x}$$

$$= \frac{\sin 5x + \sin x - 2\sin 3x}{\cos 5x - \cos x}$$

$$\text{सूत्रानुसार} = \frac{2\sin\left(\frac{5x+x}{2}\right)\cos\left(\frac{5x-x}{2}\right) - 2\sin 3x}{2\sin\left(\frac{5x+x}{2}\right)\sin\left(\frac{x-5x}{2}\right)}$$

$$= \frac{2\sin 3x\cos 2x - 2\sin 3x}{2\sin 3x\sin(-2x)}$$

$$= \frac{2\sin 3x(\cos 2x - 1)}{-2\sin 3x\sin 2x}$$

$$\because\ \sin\ (-\ x) = -\ \sin\ x$$

$$= \frac{\cos 2x - 1}{-\sin 2x} = \frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x}$$

$$= \frac{1 - (1 - 2\sin^2 x)}{2\sin x\cos x} = \frac{2\sin^2 x}{2\sin x\cos x}$$

$$= \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x = \text{RHS}$$

$\therefore$ L.H.S. = R.H.S.

प्रश्न 16.

$$\frac{\sin x-\sin y}{\cos x+\cos y}=\tan\frac{x-y}{2}$$

हल :

$$\text{L.H.S.}=\frac{\sin x-\sin y}{\cos x+\cos y}$$

$$\left[\because \sin C-\sin D=2\cos\frac{C+D}{2}.\sin\frac{C-D}{2}\right.$$

$$\left.\text{तथा } \cos C+\cos D=2\cos\frac{C+D}{2}.\cos\frac{C-D}{2}\right]$$

$$\text{अत: L.H.S.}=\frac{2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)}$$

$$=\frac{\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)}=\tan\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$=\text{R.H.S.}$$

प्रश्न 17.

$$\frac{\sin x+\sin 3x}{\cos x+\cos 3x}=\tan 2x$$

हल :

$$\text{L.H.S.}=\frac{\sin x+\sin 3x}{\cos x+\cos 3x}$$

$$\left[\because \sin C+\sin D=2\sin\frac{C+D}{2}.\cos\frac{C-D}{2}\right.$$

$$\text{तथा } \cos C + \cos D = 2\cos\frac{C+D}{2}.\cos\frac{C-D}{2}\Big]$$

$$\therefore \text{ L.H.S. } = \frac{2\sin\frac{x+3x}{2}\cos\frac{x-3x}{2}}{2\cos\frac{x+3x}{2}\cos\frac{x-3x}{2}}$$

$$= \frac{2\sin 2x\cos(-x)}{2\cos 2x\cos(-x)} = \frac{2\sin 2x\cos x}{2\cos 2x\cos x}$$

$$\because \cos(-x) = \cos x$$

$$= \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \tan 2x = \text{R.H.S.}$$

प्रश्न 18.

$$\frac{\cos 4x + \cos 3x + \cos 2x}{\sin 4x + \sin 3x + \sin 2x} = \cot 3x$$

हल :

$$\text{L.H.S.} = \frac{\cos 4x + \cos 3x + \cos 2x}{\sin 4x + \sin 3x + \sin 2x}$$

$$= \frac{(\cos 4x + \cos 2x) + \cos 3x}{(\sin 4x + \sin 2x) + \sin 3x}$$

$$\Big[\because \cos C + \cos D = 2\cos\frac{C+D}{2}.\cos\frac{C-D}{2}$$

$$\text{तथा } \sin C + \sin D = 2\sin\frac{C+D}{2}.\cos\frac{C-D}{2}\Big]$$

$$\text{अत: L.H.S. } = \frac{2\cos\frac{4x+2x}{2}\cos\frac{4x-2x}{2} + \cos 3x}{2\sin\frac{4x+2x}{2}\cos\frac{4x-2x}{2} + \sin 3x}$$

$$= \frac{2\cos 3x\cos x + \cos 3x}{2\sin 3x\cos x + \sin 3x}$$

$$= \frac{\cos 3x\,(2\cos x + 1)}{\sin 3x\,(2\cos x + 1)}$$

$$= \frac{\cos 3x}{\sin 3x} = \cot\ 3x = \text{R.H.S.}$$

प्रश्न 19.

$$\tan\ 4x = \frac{4\tan x\,(1-\tan^2 x)}{1-6\tan^2 x+\tan^4 x}$$

हल :

$$\text{L.H.S.} = \tan\ 4x = \tan\ 2\ (2x)$$

$$= \frac{2\tan 2x}{1-\tan^2 2x}$$

$$= \frac{2\left[\dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}\right]}{1-\left[\dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}\right]^2} \qquad \left[\because \tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}\right]$$

$$= \frac{\dfrac{4\tan x}{(1-\tan^2 x)}}{1-\dfrac{4\tan^2 x}{(1-\tan^2 x)^2}} = \frac{\dfrac{4\tan x}{(1-\tan^2 x)}}{\dfrac{(1-\tan^2 x)^2-4\tan^2 x}{(1-\tan^2 x)^2}}$$

$$= \frac{4\tan x}{(1-\tan^2 x)} \times \frac{(1-\tan^2 x)^2}{(1-\tan^2 x)^2-4\tan^2 x}$$

$$= \frac{4\tan x\,(1-\tan^2 x)}{1-2\tan^2 x+\tan^4 x-4\tan^2 x}$$

$$= \frac{4\tan x\,(1-\tan^2 x)}{1-6\tan^2 x+\tan^4 x} = \text{R.H.S.}$$

प्रश्न 20. $\cos 4x = 1 - 8\sin^2 x \cos^2 x$

हल :

L.H.S.= $\cos 4x = 1 - 2\sin^2 2x = 1 - 2[\sin 2x]^2$
$= 1 - 2[2 \sin x \cos x]^2$
$= 1 - 2[4 \sin^2 x \cos^2 x]$
$= 1 - 8\sin^2 x \cos^2 x$
= R.H.S.

प्रश्न 21. $\cos 6x = 32 \cos^6 x - 48 \cos^4 + x + 18 \cos^2 x - 1$

हल :

L.H.S. = $\cos 6x = \cos 2(3x)$
$= 2 \cos^2 3x - 1$
$= 2 (4 \cos^3 x - 3 \cos x)^2 - 1$

$\because \cos 3x = (4 \cos^3 x - 3 \cos x)$
$= 2 [16 \cos^6 x - 2 (4 \cos^3 x) (3 \cos x) + 9 \cos^2 x] - 1$
$= 2 (16 \cos^6 x - 24 \cos^4 x + 9 \cos^2 x) - 1$
$= 32 \cos^6 x - 48 \cos^4 x + 18 \cos^2 x - 1$
= R.H.S.

प्रश्न 22.

$$\left[1+\cot\theta-\sec\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\right]\left[1+\cot\theta+\sec\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\right]=2\cot\theta$$

हल :

$$\text{L.H.S.} = \left[1+\cot\theta-\sec\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\right]\left[1+\cot\theta+\sec\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$\Rightarrow$ $[1 + \cot \theta + \text{cosec } \theta] [1 + \cot \theta - \text{cosec } \theta]$

$\Rightarrow$ $(1 + \cot \theta)^2 - \text{cosec } \theta)^2$

$\because \sec(90° + \theta) = -\text{cosec } \theta$

$\Rightarrow$ $(1 + \cot \theta)^2 - (\text{cosec } \theta)^2$

$= 1 + \cot^2 \theta + 2 \cot \theta - \text{cosec}^2 \theta$

$\Rightarrow$ $\text{cosec}^2 \theta + 2 \cot \theta - \text{cosec}^2 \theta$

$= 2 \cot \theta$ = R.H.S.

Ex 3.4

प्रश्न 1. tan x = √3

हल : प्रश्नानुसार tan x = √3

$\because$ हम जानते हैं कि $\tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$

तथा $\tan\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \tan \frac{4\pi}{3} = \sqrt{3}$

$\therefore \quad \tan \frac{\pi}{3} = \tan \frac{4\pi}{3} = \sqrt{3}$

$\therefore$ मुख्य हल $= \frac{\pi}{3}$ तथा $\frac{4\pi}{3}$

अब $\tan x = \sqrt{3}$

या $\tan x = \tan \frac{\pi}{3}$

या $x = n\pi + \frac{\pi}{3}, n \in \mathrm{I}$

अत: इसका व्यापक हल $\Rightarrow x = n\pi + \frac{\pi}{3}, n \in \mathrm{I}$

प्रश्न 2. sec x = 2

हल : प्रश्नानुसार sec x = 2

या $\frac{1}{\cos x} = 2$

या $\cos x = \frac{1}{2}$

हम जानते हैं कि $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

तथा $\cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

अत: $\cos \frac{\pi}{3} = \cos \frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2}$

अत: मुख्य हल $= \frac{\pi}{3}$ तथा $\frac{5\pi}{3}$ होंगे।

अब $\cos x = \frac{1}{2}$

या $\cos x = \cos \frac{\pi}{3}$

या $x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}, n \in \mathrm{I}$

अत: व्यापक हल $\Rightarrow x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}, n \in \mathrm{I}$

प्रश्न 3. cot x = -√3

हल : प्रश्नानुसार cot x = -√3

या $\frac{1}{\tan x} = -\sqrt{3}$

या $\tan x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

हम जानते हैं कि $\tan \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

अत: $\tan\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\tan \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\tan\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\tan \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

अत: $\tan \frac{5\pi}{6} = \tan \frac{11\pi}{6} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

अत: मुख्य हल $= \frac{5\pi}{6}$ तथा $\frac{11\pi}{6}$

अब $\tan x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

या $\tan x = \tan \frac{5\pi}{6}$

$\therefore \quad x = n\pi + \frac{5\pi}{6}, n \in \mathrm{I}$

अत: व्यापक हल $\Rightarrow x = n\pi + \frac{5\pi}{6}, n \in \mathrm{I}$

प्रश्न 4. cosec x = – 2

हल : प्रश्नानुसार cosec x = – 2

या $\frac{1}{\sin x} = -2$

या $\sin x = -\frac{1}{2}$

हम जानते हैं कि $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

अत: $\sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$

तथा $\sin\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$

अत: $\sin\frac{7\pi}{6} = \sin\frac{11\pi}{6} = -\frac{1}{2}$

अत: मुख्य हल $= \frac{7\pi}{6}$ तथा $\frac{11\pi}{6}$

अब $\sin x = -\frac{1}{2}$

या $\sin x = \sin\frac{7\pi}{6}$

$$\therefore \quad x = n\pi + (-1)^n \frac{7\pi}{6}, n \in I$$

अत: व्यापक हल $\Rightarrow x = n\pi + (-1)^n \frac{7\pi}{6}, n \in I$

निम्नलिखित समीकरणों के व्यापक हल ज्ञात कीजिए

प्रश्न 5. cos 4x = cos 2x

हल :

प्रश्नानुसार cos 4x = cos 2x
या 4x = 2nπ ± 2x

धनात्मक चिह लेने पर 4x = 2nπ + 2x
या 4x – 2x = 2nπ

या 2x = 2nπ
या x = nπ, n ∈ I

ऋणात्मक चिह लेने पर 4x = 2nπ – 2x
4x + 2x = 2nπ

6x = 2nπ

या $x = \frac{2n\pi}{6} = \frac{n\pi}{3}, n \in I$

अत: व्यापक हल $\Rightarrow x = n\pi$ तथा $x = \frac{n\pi}{3}, n \in I$

प्रश्न 6. cos 3x + cos x – cos 2x = 0

हल : प्रश्नानुसार cos 3x + cos x – cos 2x = 0

या $\left[2\cos\frac{3x+x}{2}\cos\frac{3x-x}{2}\right] - \cos 2x = 0$

या $2\cos 2x\cos x - \cos 2x = 0$

या $\cos 2x\,(2\cos x - 1) = 0$

अत: $\cos 2x = 0$ या $2\cos x - 1 = 0$

$\cos 2x = 0$ या $\cos x = \frac{1}{2}$

i.e. $\cos 2x = 0$ या $\cos x = \cos\frac{\pi}{3}$

अत: $2x = (2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in I$ या $x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}, n \in I$

या $x = (2n+1)\frac{\pi}{4}, n \in I$ या $x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}, n \in I$

प्रश्न 7. sin 2x + cos x = 0

हल :

प्रश्नानुसार sin 2x + cos x = 0
या 2 sin x cos x + cos x = 0

या cos x (2sin x + 1) = 0

अत: या तो $\cos x = 0$ या $2\sin x + 1 = 0$

$\Rightarrow$ $\cos x = 0$ या $\sin x = -\frac{1}{2} = -\sin\frac{\pi}{6}$

$\Rightarrow$ $\cos x = 0$ या $\sin x = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)$

$\Rightarrow$ $\cos x = 0$ या $\sin x = \sin\frac{7\pi}{6}$

अत: $x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$, $n \in I$ या $x = n\pi + (-1)^n\frac{7\pi}{6}$, $n \in I$

प्रश्न 8. $\sec^2 2x = 1 - \tan 2x$

हल : प्रश्नानुसार $\sec^2 x = 1 - \tan 2x$
$\Rightarrow 1 + \tan^2 2x = 1 - \tan 2x$

$\Rightarrow \tan^2 2x + \tan 2x = 0$
$\Rightarrow \tan 2x (\tan 2x + 1) = 0$

अत:

$$\text{या तो } \tan 2x = 0 \qquad \text{या } \tan 2x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \tan 2x = 0 \qquad \text{या } \tan 2x = -1 = -\tan \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \quad \tan 2x = 0 \qquad \text{या } \tan 2x = \tan\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \tan 2x = 0 \qquad \text{या } \tan 2x = \tan \frac{3\pi}{4}$$

$$\text{अत:} \qquad 2x = n\pi, n \in I \qquad \text{या } 2x = n\pi + \frac{3\pi}{4}, n \in I$$

$$\text{या } x = \frac{n\pi}{2}, n \in I \qquad \text{या } x = \frac{n\pi}{2} + \frac{3\pi}{4}, n \in I$$

प्रश्न 9. $\sin x + \sin 3x + \sin 5x = 0$

हल :

प्रश्नानुसार $\sin x + \sin 3x + \sin 5x = 0$
या $(\sin x + \sin 5x) + \sin 3x = 0$

$$\text{या } \left[2\sin\frac{x+5x}{2}\cos\frac{x-5x}{2}\right] + \sin 3x = 0$$

या $2 \sin 3x \cos(-2x) + \sin 3x = 0$

या $2 \sin 3x \cos 2x + \sin 3x = 0$
या $\sin 3x (2 \cos 2x + 1) = 0$

अत:

या तो $\sin 3x = 0$ या $2\cos 2x + 1 = 0$

$\Rightarrow \quad \sin 3x = 0$ या $\cos 2x = -\frac{1}{2} = -\cos\frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow \quad \sin 3x = 0$ या $\cos 2x = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$

$\Rightarrow \quad \sin 3x = 0$ या $\cos 2x = \cos\frac{2\pi}{3}$

$\Rightarrow \quad 3x = n\pi, n \in I$ या $2x = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}, n \in I$

अत: $x = \frac{n\pi}{3}, n \in I$ या $x = n\pi \pm \frac{\pi}{3}, n \in I$

Miscellaneous Exercise

प्रश्न 1. एक समकोण होता है

(A) एक रेडियन के बराबर
(B) 90 डिग्री के बराबर
(C) एक डिग्री के बराबर
(D) 90 रेडियन के बराबर

हल : (B)

प्रश्न 2. तृतीय पाद में निम्न त्रिकोणमितीय फलन धनात्मक होता है

(A) sin θ
(B) tan θ
(C) cos θ
(D) sec θ

हल : (B)

प्रश्न 3. cosec (-θ) बराबर है

(A) sin θ

(B) tan θ
(C) cos θ
(D) -cosec θ

हल : (D)

प्रश्न 4. tan(90° – θ) बराबर है
(A) -tan θ
(B) cot θ
(C) tan θ
(D) -cot θ

हल : (B)

प्रश्न 5. cos θ = $-\frac{1}{2}$ हो, तो θ का मान होगा

(A) $\frac{2\pi}{3}$ **(B)** $\frac{\pi}{3}$

(C) $-\frac{2\pi}{3}$ **(D)** $\frac{3\pi}{4}$

हल : (A)

प्रश्न 6. यदि n एक सम पूर्णांक हो, तो sin(2nπ ± θ) का मान होगा

(A) ± cos θ
(B) ± tan θ
(C) ± sin θ
(D) ± cot θ

हल : (C)

प्रश्न 7. cot 15° का मान होगा

(A) 2 + √3
(B) – 2 + √3
(C) 2 – √3
(D) – 2 – √3

हल : (A)

प्रश्न 8. cos 15° का मान होगा

(A) $\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ **(B)** $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

(C) $\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ **(D)** $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

हल : (A)

प्रश्न 9.

$2sin\frac{5\pi}{12}sin\frac{\pi}{12}$ का मान होगा

(A) 1 **(B)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(C) $\frac{\sqrt{3}}{2} - 1$ **(D)** $\frac{\sqrt{3}}{2} + 1$

हल : (D)

प्रश्न 10.

$cos\frac{\pi}{12} - sin\frac{\pi}{12}$ का मान होगा

(A) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ **(B)** 0

(C) $-\frac{1}{2\sqrt{2}}$ **(D)** $\frac{1}{\sqrt{2}}$

हल : (D)

प्रश्न 11. यदि sin A = $\frac{3}{5}$ हो, तो sin 2A का मान होगा

(A) 4/25
(B) 5/25
(C) 24/25
(D) 4/5

हल : (C)

प्रश्न 12. यदि sin A = 3/4 हो, तो sin 3A का मान होगा
(A) 9/16
(B) -9/16
(C) 9/32
(D) 7/16
हल : (A)

प्रश्न 13. यदि tan A = 1/5 हो, तो tan 3A को मान होगा
(A) 47/25
(B) 37/55
(C) 37/11
(D) 47/55

हल : (B)

प्रश्न 14. यदि A + B = π/4 हो, तो (1 + tan A) (1 + tan B) का मान होगा

(A) 3
(B) 2
(C) 4
(D) 1
हल : (B)

प्रश्न 15. समीकरण $\sec^2 \theta = 2$ में θ का व्यापक मान होगा

(A) $2n\pi \pm \frac{\pi}{4}$ (B) $n\pi \pm \frac{\pi}{2}$

(C) $n\pi \pm (-1)^n \frac{\pi}{4}$ (D) $n\pi \pm \frac{\pi}{4}$

हल : (A)

प्रश्न 16. सिद्ध कीजिए कि

(i) cos θ + sin(270° + θ) – sin(270° – θ) + cos(180° + θ) = 0
(ii)

$$\sec\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)\sec\left(\theta-\frac{5\pi}{2}\right)+\tan\left(\frac{5\pi}{2}+\theta\right)\tan\left(\theta-\frac{3\pi}{2}\right)=-1$$

हल :

(i) L.H.S. $\cos\theta + \sin(270° + \theta) - \sin(270° - \theta) + \cos(180° + \theta)$
$\Rightarrow \cos\theta - \cos\theta - (-\cos\theta) - \cos\theta$
$\because \sin(270° + \theta) = -\cos\theta$

$\sin(270° - \theta) = -\cos\theta$
$\cos(180° + \theta) = -\cos\theta$
$\Rightarrow \cos\theta - \cos\theta + \cos\theta - \cos\theta$
$= 0$
= R.H.S.

(ii) L.H.S.

$$\sec\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)\sec\left(\theta-\frac{5\pi}{2}\right)+\tan\left(\frac{5\pi}{2}+\theta\right)\tan\left(\theta-\frac{3\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \sec\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)\sec\left\{-\left(\frac{5\pi}{2}-\theta\right)\right\}+\tan\left(\frac{5\pi}{2}+\theta\right)\tan\left\{-\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)\right\}$$

हम जानते हैं कि $\sec(-\theta) = \sec\theta$ और $\tan(-\theta) = -\tan\theta$

$$\Rightarrow \sec\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)\sec\left(\frac{5\pi}{2}-\theta\right)-\tan\left(\frac{5\pi}{2}+\theta\right).\tan\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)$$

$$\Rightarrow \sec(270° - \theta)\sec(450° - \theta) - \tan(450° + \theta)\tan(270° - \theta)$$

$$\Rightarrow \sec(270° - \theta)\sec[360° + (90° - \theta)] - \tan(360° + (90° + \theta)\,.\,\tan(270° - \theta)$$

$= \{-\text{cosec}\,\theta\}\sec(90° - \theta) - \tan(90° + \theta)\cot\theta$
$= (-\text{cosec}\,\theta)\,.\,\text{cosec}\,\theta - \{-\cot\theta\}.\cot\theta$
$= -\text{cosec}^2\theta + \cot^2\theta$
$= -(\text{cosec}^2\theta - \cot^2\theta)$
$= -1$ = R.H.S.

प्रश्न 17.

$$\sin\left(n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{4}\right)$$

का मान ज्ञात कीजिए जहाँ n एक पूर्णांक हो।

हल : यहाँ पर n का मान पूर्णांक है।
$\therefore$ n = 0 रखने पर

$$\sin\left(0+(-1)^{0}\cdot\frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4} = \sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$n = 1$ रखने पर

$$\sin\left(1.\pi + (-1)^1 \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$n = 2$ रखने पर

$$\sin\left(2\pi + (-1)^2 \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$n = -1$ रखने पर

$$\sin\left(n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(-1.\pi + (-1)^{-1}.\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \sin\left(-\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(-\frac{5\pi}{4}\right)$$

$$= -\sin\frac{5\pi}{4} = -\sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= -\left\{-\sin\frac{\pi}{4}\right\} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$n = -2$ रखने पर

$$\sin\left(-2\pi + (-1)^2 \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(-2\pi + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \sin\left(-\frac{7\pi}{4}\right) = -\sin\frac{7\pi}{4} = -\sin\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= -\left(-\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

अत: n के प्रत्येक पूर्णांक के लिए $\sin\left(n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{4}\right)$ का मान

$\frac{1}{\sqrt{2}}$ होगा।

प्रश्न 18. यदि sin A + sin B = a तथा cos A + cos B = b हो, तो सिद्ध कीजिए
(i) $\sin(A + B) = (2ab)/(a^2 + b^2)$
(ii) $\cos(A + B) = (b^2 - a^2)/(a^2 + b^2)$

हल-

(i) दिया है sin A + sin B = a
तथा . cos A + cos B = b

$$\text{R.H.S.} = \frac{2ab}{a^2+b^2} = \frac{2(\sin A+\sin B)(\cos A+\cos B)}{(\sin A+\sin B)^2+(\cos A+\cos B)^2}$$

$$= \frac{2[\sin A\cos A+\sin A\cos B+\sin B\cos A+\sin B\cos B]}{[\sin^2 A+2\sin A\sin B+\sin^2 B+\cos^2 A+2\cos A\cos B+\cos^2 B]}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2\left[\frac{1}{2}\sin 2A+\frac{1}{2}\sin 2B+\sin(A+B)\right]}{[1+1+2(\cos A\cos B+\sin A\sin B)]}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2\left[\frac{1}{2}(\sin 2A+\sin 2B)+\sin(A+B)\right]}{[2+2\cos(A-B)]}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2\left[\frac{1}{2}(2\sin(A+B)\cos(A-B)+\sin(A+B)\right]}{2[1+\cos(A-B)]}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{[\sin(A+B)\cos(A-B)+\sin(A+B)]}{[1+\cos(A-B)]}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\sin(A+B)[1+\cos(A-B)]}{[1+\cos(A-B)]} = \sin(A+B) = \text{L.H.S.}$$

(ii) $\cos(A+B) = \dfrac{b^2-a^2}{b^2+a^2}$

$$\text{R.H.S.} = \frac{b^2-a^2}{b^2+a^2} = \frac{(\cos A+\cos B)^2-(\sin A+\sin B)^2}{(\cos A+\cos B)^2+(\sin A+\sin B)^2}$$

$$= \frac{\cos^2 A+\cos^2 B+2\cos A\cos B-\sin^2 A-\sin^2 B-2\sin A\sin B}{\cos^2 A+\cos^2 B+2\cos A\cos B+\sin^2 A+\sin^2 B+2\sin A\sin B}$$

$$= \frac{\cos 2A+\cos 2B+2\cos(A+B)}{1+1+2\cos(A-B)}$$

$$= \frac{\cos 2A+\cos 2B+2\cos(A+B)}{2+2\cos(A-B)}$$

$$= \frac{2\cos(A+B)\cos(A-B)+2\cos(A+B)}{2[1+\cos(A-B)]}$$

$$= \frac{2\cos(A+B)(\cos(A-B)+1)}{2[1+\cos(A-B)]}$$

$$= \cos(A+B) = \text{R.H.S.}$$

प्रश्न 19. यदि A + B + C = 180° हो, तो सिद्ध कीजिए

(i) cos 2A + cos 2B – cos 2C = 1 – 4sin A sin B cos C

(ii) sin A – sin B + sin C = $4sin\frac{A}{2}cos\frac{B}{2}sin\frac{C}{2}$

हल-

(i) L.HS.

= cos 2A + cos 2B – cos 2C

= 2 cos(A + B) cos(A – B) – cos 2C

= 2 cos(A + B) cos(A – B) – ($2\cos^2 C - 1$)

∵ cos 2C = $2\cos^2 C - 1$

$2\cos(\pi - C)\cos(A - B) - 2\cos^2 C + 1 - 2\cos C$

$\cos(A - B) - 2\cos^2 C + 1$

$1 - 2\cos C[\cos(A - B) + \cos C]$

$1 - 2\cos C[\cos(A - B) + \cos(\pi - (A + B)]$

∵ A + B + C = 180°

$1 - 2\cos C(\cos(A - B) - \cos(A + B)]$

$1 - 2\cos C \times 2\sin A \sin B$

= 1 – 4 sin A sin B cos C

= R.H.S.

(ii) L.H.S.

$$\sin A - \sin B + \sin C = 4\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$\Rightarrow 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)+\sin C$$

दिया है $A + B + C = 180°$

$$\frac{A+B}{2} = \frac{180°-C}{2} = \left(90° - \frac{C}{2}\right)$$

$$\therefore \quad 2\cos\left(90° - \frac{C}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right) + 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$\Rightarrow \quad 2\sin\frac{C}{2}\sin\left(\frac{A-B}{2}\right) + 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$\Rightarrow \quad 2\sin\frac{C}{2}\left[\sin\left(\frac{A-B}{2}\right) + \cos\frac{C}{2}\right]$$

$$\Rightarrow \quad 2\sin\frac{C}{2}\left[\sin\left(\frac{A-B}{2}\right) + \cos\left(90° - \left(\frac{A+B}{2}\right)\right)\right]$$

$$\Rightarrow \quad 2\sin\frac{C}{2}\left[\sin\left(\frac{A-B}{2}\right) + \sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \quad 2\sin\frac{C}{2}\left[2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\right]$$

$$\Rightarrow \quad 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = \text{R.H.S.}$$

प्रश्न 20. यदि A + B + C = 2π हो, तो सिद्ध कीजिए
$\cos^2 B + \cos^2 C - \sin^2 A = 2\cos A \cos B \cos C$

हल-
L.HS.
$\cos^2 B + \cos^2 C - \sin^2 A$
हम जानते हैं
$\cos 2B = 2\cos^2 B - 1$

$$\therefore \cos^2 B = \frac{1+\cos 2B}{2}$$

इसी तरह से $-\cos 2A = 1 - 2\sin^2 A$

$$\therefore \sin^2 A = \frac{1-\cos 2A}{2}$$

मान रखने पर

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{1+\cos 2B}{2}\right) + \left(\frac{1+\cos 2C}{2}\right) - \left(\frac{1-\cos 2A}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}[1 + \cos 2B + 1 + \cos 2C - 1 + \cos 2A]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}[1 + \cos 2A + \cos 2B + \cos 2C]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}[1 + 2\cos(A + B)\cos(A - B) + 2\cos^2 C - 1]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}[2\cos(A + B)\cos(A - B) + 2\cos^2 C]$$

$\Rightarrow \cos(A + B)\cos(A - B) + \cos^2 C$
$\Rightarrow \cos(2\pi - C)\cos(A - B) + \cos^2 C$
$\because A + B + C = 2\pi$
$\Rightarrow \cos C \cos(A - B) + \cos^2 C$

$\Rightarrow \cos C[\cos C + \cos(A - B)]$
$\Rightarrow \cos C[\cos(2\pi - (A + B) + \cos(A - B)]$
$\Rightarrow \cos C[\cos(A + B) + \cos(A - B)]$
$\Rightarrow \cos C \times 2\cos A \cos B$
$\Rightarrow 2\cos A \cos B \cos C$ = R.H.S.

प्रश्न 21. निम्न समीकरण का हल ज्ञात कीजिए
$2 \tan \theta - \cot \theta + 1 = 0$

हल : दिया गया समीकरण
$2 \tan \theta - \cot \theta + 1 = 0$

$$\Rightarrow \quad 2\tan\theta - \frac{1}{\tan\theta} + 1 = 0$$
$$\Rightarrow \quad 2\tan^2\theta - 1 + \tan\theta = 0$$
$$\Rightarrow \quad 2\tan\theta + \tan\theta - 1 = 0$$
$$\Rightarrow \quad (2\tan\theta - 1)(\tan\theta + 1) = 0$$

यदि $2\tan\theta - 1 = 0$ तब $\tan\theta = \frac{1}{2}$

$$\therefore \quad \theta = n\pi + \tan^{-1}\frac{1}{2}, n \in Z$$

यदि $\tan\theta + 1 = 0$ तब $\tan\theta = -1 = \tan\frac{3\pi}{4}$

$$\therefore \quad \theta = n\pi + \frac{3\pi}{4}, n \in Z$$