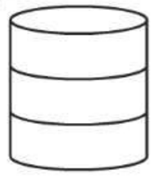
వ్యాసార్ధం 0.7 m అయితే, దాని ఎత్తును కనుగొనండి.

7. వృత్తాకార బావిలోపలి వ్యాసం 3.5 m దాని లోతు 10 m.
   (i) దాని లోపలి వక్ర ఉపరితల వైశాల్యం
   (ii) దాని లోపలి వక్ర ఉపరితలానికి ప్రతి చదరపు మీటర్‌కు ₹ 40 చొప్పున గార (Plastering) వేయడానికి అయ్యే ఖర్చును కనుగొనండి.
8. నాటిని వేడిచేయు (కాంచు) ఒక వ్యవస్థలో, 28 m పొడవుగల సిలిండరాకార గొట్టము ఉంది. మరియు దాని వ్యాసం 5 cm ఈ వ్యవస్థలో మొత్తం వికిరణాలు వెలుపలికి వెదజల్లు వైశాల్యాన్ని కనుగొనండి.
9. (i) సిలిండరాకార పెట్రోల్ సేకరించు తొట్టి వ్యాసం 4.2 m మరియు ఎత్తు 4.5 m ఉన్నచో , దాని వక్ర ఉపరితల వైశాల్యం.
   (ii) ఈ పెట్రోల్ తొట్టిని చేయునప్పుడు $\frac{1}{12}$ అంత ఉపయోగించిన స్టీల్ వ్యర్థమైనచో వాస్తవంగా ఉపయోగించిన స్టీల్ ఎంత?
10. చిత్రం 13.12లో, మీరు దీపపు కాంతిని చీకటి (మబ్బు) చేయు జ్వాల చూసిఉంటారా. దీనిని అలంకార బట్టతో కప్పవలసి ఉంది. ఈ సిలిండరాకార జ్వాల వ్యాసం 20 cm మరియు ఎత్తు 30 cm జ్వాలకు ఉపరితలలో మరియు కిందిభాగంలో రెండు వైపుల బట్టను పడవడానికి వచ్చునట్లు 2.5 cm అంచునూవ్వబఞనంది దీనికొరకు దీప జ్వాలను కప్పడానికి కావలసిన బట్ట ఎంత?



చిత్రం 13.12

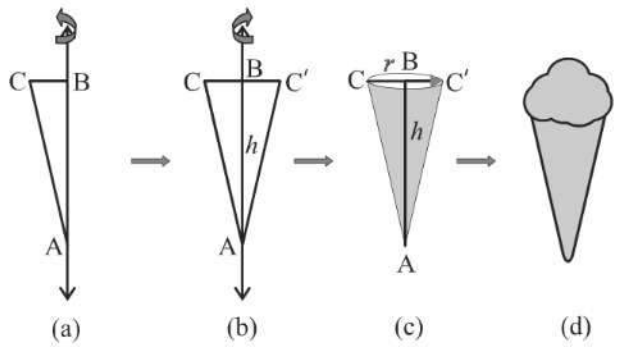
11. పాఠశాల విద్యార్థులకు కార్డ్ బోర్డ్ తో చేసిన సిలిండరాకారపు మరియు అడుగుభాగం కలిగిన పెన్ హోల్డర్ (పెన్నులు ఉండే పెట్టె) ను అలంకరించు పోటీలో పాలొనేవారికి పాఠశాల సమకూర్చుతుంది. ప్రతి పెన్‌హోల్డర్ వ్యాసార్ధం 3 cm మరియు ఎత్తు 10.5 cm ఉండాలి. పోటీలో 35 మంది పోటీదారులున్నచో, పోటీకి తేవలసిన కార్డ్ బోర్డ్ వైశాల్యం కనుగొనండి.

13.4 వృత్తాకార లంబ శంఖువు ఉపరితల వైశాల్యం

మనం ఇది వరకు సర్వసమానమైన ఆకారాలను ఒక దానిపై మరొకటి పెట్టడం ద్వారా ఘనాకృతులను నిర్మించాం. ఈ ఘనాకృతులను 'పట్టకా' (**prisms**)లు అని పిలుస్తాం. ఇప్పుడు మనం మరొక మాదరి, అయితే పట్టకం కాని ఘనాకృతులను చూద్దామా (ఈ మాదరి ఘనాకృతులను గోపురాలు (pyramid) అని పిలుస్తాం. ఇప్పుడు మనం వాటిని ఎలా నిర్మాణం చేయవచ్చో చూద్దాం.

కార్యాచరణం : లంబకోణ త్రిభుజం ABC లో B కోణం లంబకోణం ఉండునట్లు కత్తరించుకోండి. లంబ కోణం పొందిన ఒక భుజానికి పొడవుగా, మందంగా గల ఒక తంతిని అంటించండి. [చిత్రం 13.13 (a) చూడండి]. భుజాన్ని AB అని తెలుసుకోండి. త్రిభుజం రెండు వైపుల చేతిలో తంతిని పట్టుకోండి. తంతిని అక్షంగా చేసుకొని త్రిభుజాన్ని చాలాసార్లు త్రిప్పండి. ఇప్పుడు ఏమవుతుంది? తంతి చుట్టూ త్రిభుజాన్ని త్రిప్పినప్పుడు ఏర్పడు ఆకారాన్ని మీరు గుర్తించగలరా? [చిత్రం 13.3 b చూడండి] ఇలాంటి ఆకారాలలో ఐస్‌క్రీమ్‌ను గోపురం లాగా వేసుకొని, గతంలో తిన్నదాన్ని జ్ఞప్తికి తెచ్చుకోండి. [చిత్రం 13.3 (c) మరియు (d) చూడండి].

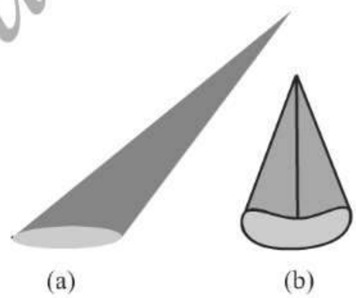
©KTBS Not to be republished



చిత్రం 13.13

దీనిని వృత్తాకార లంబ(నిటారు) శంఖువు అని పిలుస్తారు. వృత్తాకార శంఖువు యొక్క చిత్రం 13.13 (c)లో A బిందువును శీర్షం, AB ని ఎత్తు, BC ని వ్యాసార్థం మరియు AC ని శంఖువు మొత్తు ఏటవాలు ఎత్తు అని అంటారు. ఇక్కడ B బిందువు శంఖువు యొక్క వృత్తాకార పాదపు వ్యాసార్థం. శంఖువు యొక్క ఎత్తు, వ్యాసార్థం మరియు ఏటరాలు ఎత్తును సాధారణంగా h, r మరియు l తో వరుసగా సూచిస్తారు.

ఇప్పుడు మనం ఏ రకపు శంఖువును వృత్తాకార లంబ శంఖువో అను దానిని చూద్దాం చిత్రం 13.14 చూడండి ఈ చిత్రంలో మీరు చూస్తున్న ఆకృతి వృత్తాకార లంబ శంఖువు కాదు. ఎందుకనగా చిత్రం(a) లో శీర్ష్య బిందువు మరియు పాద కేంద్రాన్ని కలుపు (ఖండించు) రేఖ పాదంతో లంబకోణంతో ఏర్పడదు. చిత్రం (b) లో పాదం వృత్తాకారంలో లేదు.



చిత్రం 13.14

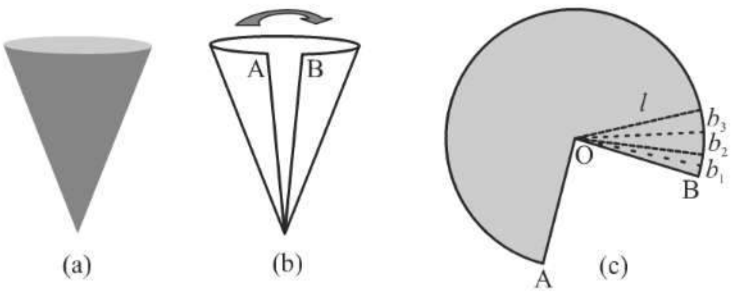
సిలిండర్‌లో ఉన్నట్లు, మనం ఇక్కడ కేవలం వృత్తపాద లంబ శంఖువు గురించి మాత్రమే చదివాం. ఈ అధ్యాయంలో శంఖువు అనగా వృత్తాకార లంబ(నిటారు) శంఖువు అని అర్థం. అను దానిని మీరు జ్ఞాపకముంచుకోండి..

కార్యాచరణం :

(i) కాగితం ఒకదానిపై మరొకటి వ్యాపించినట్లు కాగితంతో సరిగ్గా చేసిన శంఖువును సరళరేఖలో ప్రక్కప్రక్కలో కత్తిరించండి. కాగితాన్ని వదిలి, శంఖువు ఉపరితల ఆకారాన్ని కాగితం మీద చూడండి. (మీరు శంఖువును కత్తరించిన రేఖను శంఖువు వాలుతలం ఎత్తు అవుతుంది. దానిని l తో చూపుతాం). ఇది వృత్తాకారపు కత్తిరించిన కేకు భాగం చూసినట్లు ఉంటుంది.

(ii) చిత్రం 13.15 (c) భుజం తుదిలో గుర్తించిన, A మరియు B భుజాలను మీరు దగ్గరకు తీసుకొని వస్తే, చిత్రం 13.15(c) లోగల వక్ర భాగం శంఖువుయొక్క వృత్తాకార పాదాన్ని ఏర్పరుస్తుంది. అని మీరు చూసి ఉండవచ్చు.

©KTBS Not to be republished



చిత్రం 13.15

(iii) చిత్రం 13.15 (c) లో ఉన్న ఆకారపు కాగితాన్ని 'O' బిందువు నుండి గీచిన రేఖ పొడవుకు వందలాది చిన్న ముక్కలుగా కత్తరించినచో, ప్రతి మొక్క భాగం చాలా మటుకు చిన్న త్రిభుజంగా ఉంటుంది. దీని ఎత్తు శంఖువుయొక్క వాలుతలం ఎత్తు అవుతుంది. .

(iv) ఇప్పుడు ప్రతి త్రిభుజం వైశాల్యం = $\frac{1}{2}$ × త్రిభుజం యొక్క ప్రతిపాదం × l

అందువలన మొత్తం కాగితం వైశాల్యం

= చిన్న త్రిభుజాలన్నింటి వైశాల్యాల మొత్తం

$= \frac{1}{2}b_1l + \frac{1}{2}b_2l + \frac{1}{2}b_3l + \ldots\ldots$

$= \frac{1}{2}l\,[b_1 + b_2 + b_3 + \ldots\ldots]$

$= \frac{1}{2}l$ [చిత్రం 13.15 (c) మొత్తం వక్రం సరిహద్దు రేఖ పొడవు]

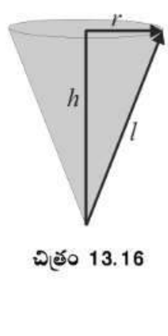
($b_1 + b_2 + b_3 + \ldots\ldots$ చిత్రంలోని వక్రభాగ సరిహద్దు రేఖను సూచిస్తుంది).

అయితే, చిత్రంలోని వక్రభాగం సరిహద్దు రేఖ శంఖువు యొక్క పాదపు చుట్టుకొలత అవుతుంది. శంఖువు యొక్క పాదపు పరిధి = $2\pi r$, ఇక్కడ r శంఖువు యొక్క పాదపు వ్యాసార్థం.

అందువలన, **శంఖువుయొక్క వక్ర ఉపరితల వైశాల్యం = $\frac{1}{2} \times l \times 2\pi r = \pi rl$**

ఇక్కడ, r దాని పాదపు వ్యాసార్థం మరియు l దాని వాలుతలం ఎత్తు.

గమనించండి : $l^2 = r^2 + h^2$ (చిత్రం 13.16 లో పైథాగరస్ సిద్ధాంతాన్ని అన్వయించినప్పుడు దీనిని చూడండి. ఇక్కడ h శంఖువు ఎత్తు అవుతుంది.



చిత్రం 13.16

అందువలన $l = \sqrt{r^2 + h^2}$

ఇప్పుడు శంఖువు పాదం ఆవృతం కావాలంటే వృత్తపు వ్యాసార్థం r గల

©KTBS Not to be republished

వృత్తాకార కాగితం కావాలి. దీని వైశాల్యం πr^2 ఉంటుంది

అందువలన, **శంఖువు పూర్తి ఉపరితల వైశాల్యం** $= \pi rl + \pi r^2$

$= \pi r\,(l + r)$

ఉదాహరణ 4 : వృత్తాకార లంబ శంఖువు యొక్క వాలుతలం ఎత్తు 10 cm మరియు పాదపు వ్యాసార్థం 7 cm ఉన్నచో శంఖువుయొక్క వక్ర ఉపరితల వైశాల్యం కనుగొనండి.

సాధన : వక్ర ఉపరితల వైశాల్యం $= \pi rl$

$$= \frac{22}{7} \times 7 \times 10\ cm^2$$

$$= 220\ \text{cm}^2$$

ఉదాహరణ 5 : శంఖువు యొక్క ఎత్తు 16 cm మరియు దాని పాదపు వ్యాసార్థం 12 cm. శంఖువు యొక్క వక్ర ఉపరితల వైశాల్యం మరియు సంపూర్ణ ఉపరితల వైశాల్యాన్ని కనుగొనండి. ($\pi = 3.14$ అని ఉపయోగించండి)

సాధన : ఇక్కడ $h =$ 16 cm మరియు $r =$ 12 cm

అందువలన, $l^2 = h^2 + r^2$ నుండి

$$l = \sqrt{16^2 + 12^2}\ \text{cm} = 20\ \text{cm}$$

వక్ర ఉపరితల వైశాల్యర $= \pi rl$

$$= 3.14 \times 12 \times 20\text{cm}^2$$

$$= 753.6\ \text{cm}^2$$

కొనసాగించి సంపూర్ణ ఉపరితల వైశాల్యం $= \pi rl + \pi r^2$

$$= (753.6 + 3.14 \times 12 \times 12)\text{cm}^2$$

$$= (753.6 + 452.16)\ \text{cm}^2$$

$$= 1205.76\ \text{cm}^2$$

ఉదాహరణ 6 : మొక్కజొన్న కంకి శంఖువు ఆకారంలో ఉంది. దాని వెడల్పాటి భాగపు వ్యాసార్థం 2.1 cm దాని పొడవు (ఎత్తు) 20 cm ఉంది దాని ప్రతి యొక్క 1cm² వైశాల్యం సరాసరి 4 మొక్కజొన్న గింజలున్నచో మొక్క జొన్న కంకిలో ఉండు మొత్తం గింజలు కనుగొనండి.

సాధన : మొక్కజొన్న కంకిలోని గింజలు దాని వక్ర ఉపరితల వైశాల్యంలో మాత్రమే కనబడుతాయి అందులో ఉండవలసిన మొత్తం గింజలను కనుగొనడానికి మనం మొక్క జొన్న కంకి యొక్క వక్ర ఉపరితల వైశాల్యం కనుగొనాలి ఈ ప్రశ్నలో మనకు ఎత్తు ఇవ్వబడింది. అయితే, మనం వాలుతల ఎత్తును లెక్కించాలి .

చిత్రం 13.17

©KTBS Not to be republished

ఇక్కడ $l = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{(2.1)^2 + 20^2}$ cm

$= \sqrt{404.41}$ cm

$= 20.11$ cm

అందువలన కంకి వక్ర ఉపరితల వైశాల్యం $= \pi rl$

$= \frac{22}{7} \times 2.1 \times 20.11 \text{cm}^2 = 132.726 \text{ cm}^2$

$= 132.73 \text{ cm}^2$ (సుమారుగా)

1cm^2 ఉపరితలం వైశాల్యంలో ఉండవలసిన గింజల సంఖ్య = 4

అందువలన, కంకి వక్ర ఉపరితల వైశాల్యంలో ఉండవలసిన గింజల సంఖ్య = 132.73 × 4

= 530.92

= 531 (సుమారుగా)

మొక్కజొన్న కంకిలో ఉండవలసిన మొక్కజొన్నలు 531.

అభ్యాసం 13.3

(π కి వేరే ఏ విలువ ఇవ్వనిచో $\pi = \frac{22}{7}$ గా పరిగణించండి.)

1. ఒక శంఖువు యొక్క పాదపు వ్యాసం 10.5cm మరియు దాని వాలుతలం ఎత్తు 10cm ఉంది. దాని వక్ర ఉపరితల వైశాల్యం కనుగొనండి.
2. ఒక శంఖువు యొక్క వాలుతలం ఎత్తు 21 m మరియు దాని పాదపు వ్యాసం 24 cm అయితే, శంఖువు యొక్క సంపూర్ణ ఉపరితల వైశాల్యం కనుగొనండి.
3. ఒక శంఖువు యొక్క వక్ర ఉపరితల వైశాల్యం 308 cm^2 మరియు దాని వాయుతలం ఎత్తు 14 cm శంఖువు యొక్క
   (i) పాదపు వ్యాసార్థం.
   (ii) సంపూర్ణ ఉపరితల వైశాల్యం కనుగొనండి.
4. ఒక శంఖువాకార డేరా ఎత్తు 10 m మరియు దాని పాదపు వ్యాసార్థం 24 m
   (i) శంఖువు యొక్క ఏటవాలు ఎత్తు
   (ii) 1 m^2 గుడారం వస్త్రం (canvas) వెల ₹ 70. అయినచో డేరాను గుడారం వస్త్రం (canvas) తో చేయడానికి కావలసిన ఖర్చు కనుగొనండి.
5. శంఖువాకార డేరా ఎత్తు 8 m మరియు దాని పాదపు వ్యాసార్తం 6 m గల డేరాను 3 m వెడల్పుగల టార్పాలిన్‌తో చేయడానికి కావలసిన పడవు ఎంత? డేరాను కుట్టించడానికి కావలసిన ఎక్కువ టార్పాలిన్ అధికపొడవు 20 cm అయువుంటుందని తెలుసుకుందాం.. ($\pi = 3.14$ అని ఉపయోగించండి)
6. ఒక శంఖువాకార స్మారకపు వాటి తలం ఎత్తు మరియు పాదపు వ్యాసం 25 m మరియు

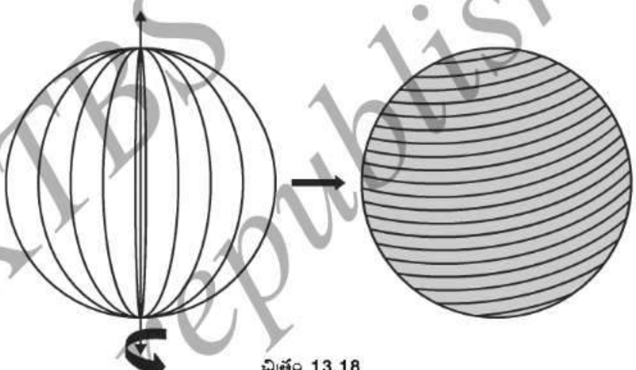
©KTBS Not to be republished

14 m వరుసగా ఉంది. దాని వక్ర ఉపరితల వైశాల్యాన్ని ప్రతి 100 m^2 చదరపు మీటర్లకు ₹ 210 చొప్పున సున్నం పూయడానికి అయ్యే ఖర్చును కనుగొనండి.

7. ఒక హాస్యకారుని టోపి వృత్తాకార లంబ శంఖువాకారంలో ఉంది. దాని పాదపు వ్యాసార్థం 7 cm మరియు ఎత్తు 24 cm అయితే, అలాంటి 10 టోపీలను తయారు చేయడానికి కావలసిన కాగితం వైశాల్యం కనుగొనండి.

8. పునర్నిర్మాణం చేసిన కార్డ్ బోర్డుతో తయారు చేసిన 50 టొళ్ళుగల (బోలు) శంఖువులతో బస్సు నిలయాన్ని రోడ్డునుండి వేరుగా గుర్తించపానికి పెట్టడమైనది ప్రతి శంఖువు పాదపు వ్యాసం 40 cm మరియు ఎత్తు 1 m ఉంది దాని వెలుపలి భాగాన్ని రంగు వేయాల్సిఉంది. మరియు ప్రతి చదరపు మీటర్‌కు 1 m^2 ₹ 12 ఖర్చవుతుంది. ఈ శంఖువులన్నింటిని రంగులు వేయడానికి అయ్యే ఖర్చును కనుగొనండి ($\pi = 3.14$ మరియు $\sqrt{1.04} = 1.02$ అని ఉపయోగించండి.)

13.5 గోళపు ఉపరితల వైశాల్యం



చిత్రం 13.18

గోళం అనగానేమి? గోళం మరియు వృత్తం రెండు కూడా ఒకటేనా? మీరు కాగితం మీద వృత్తం గీయగలరా? ఔను మీరు గీయవచ్చు. ఎందుకనగా వృత్తం ఒక ఆవృతమైన ఆకృతి. దాని పైనగల బిందువులన్ని నిర్దిష్ట బిందువునుండి స్థిరమైన దూరంలో ఉన్నాయి. ఈ స్థిరదూరాన్ని వ్యాసార్థం మరియు స్థిర బిందువును వృత్తకేంద్రం అని అంటారు. ఇప్పుడు మీరు ఒక తంతిని దాని వ్యాసానికి అంటించండి. వెనుక భాగంలో త్రిభుజాన్ని త్రిప్పినట్లు ఈ వృత్తాన్ని త్రిప్పండి. ఇప్పుడు మీరు క్రొత్త ఘనాకృతిని చూస్తారు. అది ఏ ఘనాకృతిని పోలివుంది? అది బంతి? అవును దీనిని గోళం అని అంటారు.

వృత్తాన్ని త్రిప్పడం వలన ఏర్పడిన గోళంలో వృత్తకేంద్రం ఏమవుతుందో మీరు ఊహించగలరా? ఖచ్చితంగా అది గోళపు కేంద్రం అవుతుంది. అందువలన ఒక గోళం **మూడు పరిమాణాత్మక (మితీయ) ఆకృతి (త్రిమితీయ ఆకృతి) దాని బిందువులన్ని అవకాశంలో స్థిర బిందువునుండి సమాన దూరంలో ఉంటాయి. స్థిర బిందువును గోళపుకేంద్రం మరియు స్థిర దూరాన్ని గోళపు వ్యాసార్థం అని అంటారు.**

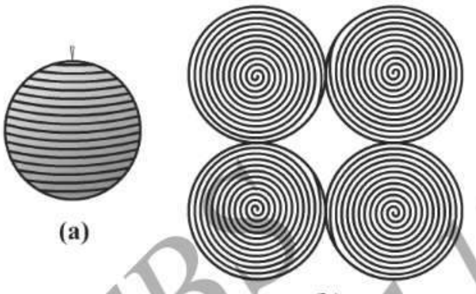
గమనించండి : గోళం బంతి ఉపరితలంలాగా ఉంటుంది. ఘనగోళం అను పదాన్ని గోళపు ఉపరితలం అని అర్థంలో ఉపయోగించబడుతుంది.

కార్యాచరణం : మీరు ఎప్పుడైనా బొంగరంతో ఆట్లాడారా? లేదా వేరేవారు బొంగరం ఆట ఆట్లాడుచుండుటను మీరు చూశారా? బొంగరానికి తాడు ఎలా చుట్టుతారు అని మీకు తెలిసి ఉండాలి. ఇప్పుడు మీరు ఒక రబ్బరు బంతిని తీసుకోండి. దానికి ఒక చిన్న మేకును భద్రంగా గుచ్చుదాం. మేకును ఆధారంగా పెట్టుకుని బంతి చుట్టూ దారం చుడదాం గుండుపిన్నులు ఉపయోగించి దారం జారకుండా బంతిని సంపూర్ణంగా దారంతో చుట్టండి. (చిత్రం 13.19 (a)

© KTBS Not to be republished

చూడండి.) దారానికి ప్రారంభ మరియు అంతిమ బిందువును గుర్తు పెట్టండి. దారాన్ని నిధానంగా బంతి ఉపరితలం నుండి విప్పండి.

ఇప్పుడు ఉపాధ్యాయుల సహాయంతో మీరు బంతి వ్యాసం కొలవండి. దీనివలన మీరు సులభంగా వ్యాసార్ధాన్ని కనుగొనవచ్చు. ఆ తరువాత కాగితంతో బంతి వ్యసార్ధానికి సమానమైన వ్యాసార్ధం కల్గియున్న నాలుగు వృత్తాలు గీయండి. బంతి చుట్టూ చుట్టిన దారాన్ని ఈ వృత్తాలకు ఒకదాని తరువాత మరొకటి చుట్టండి. [చిత్రం 13.19 (b) చూడండి]



(a) (b)

చిత్రం 13.19

దీనివలన మీరు ఏమేమి చూపినట్లయింది?

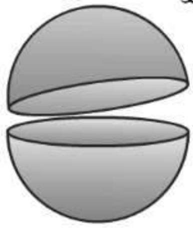
గోళం ఉపరితలం చుట్టూ సంపూర్ణంగా చుట్టిన దారాన్ని గోళపు వ్యాసార్ధానికి సమానంగా ఉన్న నాలుగు వృత్త ప్రదేశాలలో పూర్తిగా దారం వదులు కాకుండా చుట్టబడింది. ఇది ఏమి అర్థాన్నిస్తుంది?

వ్యాసార్ధం r గల గోళం ఉపరితల వైశాల్యం = వ్యాసార్ధం r గల వృత్తి వైశాల్యానికి 4 రెట్లు = $4 \times (\pi r^2)$

అందువలన, **గోళం ఉపరితల వైశాల్యం = $4\pi r^2$**

ఇక్కడ r గోళపు వ్యాసార్ధం.

గోళం ఉపరి తలంలో ఎన్ని ముఖాలున్నాయో మీరు చూశారా? అది వక్రంగా ఉన్న కేవలం ఒక ముఖం ఇప్పుడు మనం ఒక గోళాకృతి తీసుకుని, దానిని దాని కేంద్రం ద్వారా మధ్యలో సాగిపోవునట్లు సరిగ్గా ఒక సమతలం కత్తిరించండి(విభజించండి). ఇప్పుడు గోళం ఏమి అవుతుంది? అవును అది రెండు సమాన భాగాలుగా కనిపిస్తోంది. (చిత్రం 13.20 చూడండి) ఈ ప్రతి అర్థ భాగాన్ని ఏమని అంటారు. వాటిని అర్థగోళం లేదా గోళార్థం (Hemi-sphere) అని అంటారు. (ఎందుకనగా Hemi అనగా అర్థం).



చిత్రం13.20

దాని ఉపరితల వైశాల్యం ఏమయి ఉంటుంది? అది ఎన్ని ముఖాలు కల్గియుంది? రెండు ! అందులో ఒకటి వక్రముఖం, మరొకటి సమతల ముఖం (పాదం)

అర్థగోళపు వక్ర ఉపరితల వైశాల్యం దాని గోళపు ఉపరితల వైశాల్యాన్ని అర్థం మంత

©KTBS Not to be republished

ఉంటుంది.అనగా $\frac{1}{2} \times 4\pi r^2$

అందువలన, **అర్ధగోళపు వక్ర ఉపరితల వైశాల్యం = $2\pi r^2$**

ఇక్కడ, r అర్ధగోళం వ్యాసార్ధంగల గోళంలోని భాగం.

ఇప్పుడు ఒక అర్ధగోళంలోని రెండు ముఖాలను తీసుకున్నప్పుడు, వాటి వైశాల్యం $2\pi r^2 + \pi r^2$

అందువలన, **అర్ధగోళపు సంపూర్ణ ఉపరితల వైశాల్యం = $3\pi r^2$**

ఉదాహరణ 7 : వ్యాసార్ధం 7 cm ఉన్న ఒక గోళపు ఉపరితల వైశాల్యం కనుగొనండి.

సాధన : వ్యాసార్ధం 7 cm ఉన్న ఒక గోళపు ఉపరితల వైశాల్యం $= 4\pi r^2 = 4 \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \text{ cm}^2$

$= 616 \text{ cm}^2$

ఉదాహరణ 8 : 21 cm వ్యాసార్ధంగల ఒక అర్ధగోళపు వక్ర ఉపరితల వైశాల్యం (i) వక్ర ఉపరితల వైశాల్యం (ii) సంపూర్ణ ఉపరితల వైశాల్యం కనుగొనండి.

సాధన : 21 cm వ్యాసార్ధంగల ఒక అర్ధగోళపు వక్ర ఉపరితల వైశాల్యం

$= 2\pi r^2 = 2 \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21 \text{ cm}^2 = 2772 \text{ cm}^2$

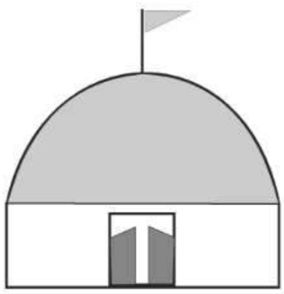
(ii) అర్ధగోళపు సంపూర్ణ ఉపరితల వైశాల్యం $= 3\pi r^2 = 3 \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21 \text{ cm}^2 = 4158 \text{ cm}^2$

ఉదాహరణ 9 : ఒక సర్కస్‌లోని మోటారు ద్విచక్ర వాహన సవారుడు అతని సాహసాలను టొళ్ళుగా (బోలుగా) ఉన్న గోళంలో చేసి చూపుతాడు. గోళపు వ్యాసం 7 m అయితే ద్విచక్ర వాహన సవారుదారునికి సవారికొరకు లభించు వైశాల్యం కనుగొనండి.

సాధన : గోళపు వ్యాసం = 7 m. అందువలన వ్యాసార్ధం 3.5 m. ద్విచక్ర వాహన సవారుదారునికి సవారికొరకు లభించు స్థలం గోళపు ఉపరితల వైశాల్యానికి సమానంగా ఉంటుంది.

అది, $4\pi r^2 = 4 \times \frac{22}{7} \times 3.5 \times 3.5 \text{ m}^2 = 154 \text{ m}^2$

ఉదాహరణ 10: ఒక భవనంలోని అర్ధగోళాకృతి ఉన్న గోపురానికి రంగు వేయవలసి ఉంది. (చిత్రం 13.21 చూడండి). గోపురం పాదం పరిధి 17.6 m ప్రతి 100 m² కు ₹ 5 చొప్పున రంగు వేయడానికి అయ్యే ఖర్చున కనుగొనండి.


చిత్రం 13.21

సాధన : గోపురం గుండ్రంగా ఉన్న ఉపరితలానికి మాత్రమే రంగు వేయాల్సి ఉన్నందున, మనం అర్ధగోళపు వక్ర ఉపరితల వైశాల్యాన్ని కనుగొని, రంగు వేయవలసిన వైశాల్యాన్ని తెలుసుకోవాలి. ఇప్పుడు

©KTBS Not to be republished

గోపురం పరిధి = 17.6 m అందువలన, 17.6 m = $2\pi r$

గోపురం వ్యాసార్ధం = $r = 17.6 \times \frac{7}{2 \times 22}$ m = 2.8 m

గోపురం వక్ర ఉపరితల వైశాల్యం = $2\pi r^2$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 2.8 \times 2.8\ m^2$

$= 49.28\ m^2$

ఇప్పుడు, 100 cm^2 రంగు వేయడానికి అయ్యే ఖర్చు = ₹ 5

1 m^2 రంగు వేయడానికి అయ్యే ఖర్చు = ₹ 500

అందువలన, గోపురం సంపూర్ణంగా రంగు వేయడానికి

అయ్యే ఖర్చు = ₹ 500 × 49.28

= ₹ 24,640

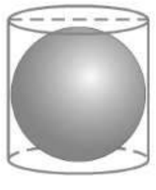
©KTBS Not to be republished

అభ్యాసం 13.4

(π కి వేరే ఏ విలువ ఇవ్వనిచో $\pi = \frac{22}{7}$ గా పరిగణించండి.)

1. కింది వ్యాసార్ధాలుగల గోళం ఉపరితల వైశాల్యాలను కనుగొనండి.
   (i) 10.5 cm (ii) 5.6 cm (iii) 14 cm
2. కింది వ్యాసం గల గోళం ఉపరివైశాల్యాలను కనుగొనండి.
   (i) 14 cm (ii) 21 cm (iii) 3.5 m
3. ఒక అర్ధగోళం వ్యాసార్ధం 10 cm ఉంది. దాని సంపూర్ణ ఉపరితల వైశాల్యం కనుగొనండి. (π = 3.14 ఉపయోగించండి)
4. ఒక గోళాకృతి బెలూన్‌కు గాలిని నింపడానికి దాని వ్యాసార్ధం 7 cm నుండి 14 cm కు పెరుగుతుంది. ఈ రెండు ప్రకరణలలో బెలూన్ యొక్క ఉపరితల వైశాల్య నిష్పత్తిని కనుగొనండి.
5. ఇత్తడితో తయారు చేసిన ఒక అర్ధగోళాకృతిగల పాత్ర లోపలి వ్యాసం 10.5 cm అయితే పాత్ర లోపలి భాగంలో కళాయి వేయడానికి ప్రతి 100 cm^2 కు ₹ 16 చొప్పున అయ్యే ఖర్చును కనుగొనండి.
6. ఒక గోళపు ఉపరితల వైశాల్యం 154 cm^2 అయితే, దాని వ్యాసార్ధం కనుగొనండి.
7. చంద్రుని వ్యాసం అందాజుగా భూమిలో నాలుగింట ఒక భాగం అయిన, వాటి ఉపరితల వైశాల్యం నిష్పత్తిని కనుగొనండి.
8. స్టీల్‌తో తయారు చేసిన అర్ధగోళాకారంలో గల పాత్ర మందం 0.25 cm ఉంది. ఆ పాత్ర లోపలి వ్యాసార్ధం 5 cm. అయితే, దాని వెలుపలి వక్ర ఉపరితల వైశాల్యం కనుగొనండి.
9. r ఒక వృత్తాకార లంబ(నిటారు) సిలిండర్ వ్యాసార్ధం గల ఒక గోళాన్ని సరిగ్గా ఆవరించింది.

[చిత్రం 13.22 చూడండి].
(i) గోళపు ఉపరితల వైశాల్యం,
(ii) సిలిండర్ యొక్క వక్ర ఉపరితల వైశాల్యం,
(iii) (i) & (ii) లోని వైశాల్యాల నిష్పత్తి కనుగొనండి.


చిత్రం 13.22

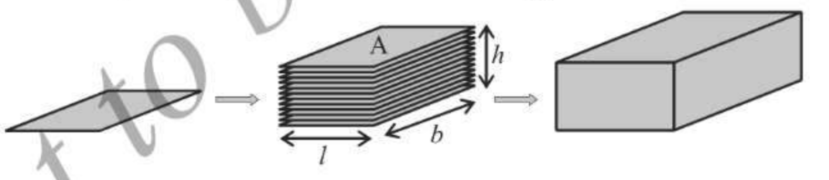
13.6 దీర్ఘ ఘనాకృతుల ఘన పరిమాణాలు

మీరు ఇదివరకే కొన్ని ఘనాకృతుల (వస్తువుల) ఘన పరిమాణాలను కనుగొనడం మీ వెనుకటి తరగతిలో నేర్చుకున్నారు. ఘనాకృతులు స్థళాలను ఆక్రమిస్తాయి. ఈ వస్తువులు ఆక్రమించు పరిమాణపు కొలతను ఆ వస్తువుల యొక్క **ఘనపరిమాణం** అని అంటారు.

గమనించండి : ఒక వస్తువు ఘనాకృతి అయినచో, అ ఆక్రమించు పరిమాణపు కొలతను కొలవబడుతుంది. దీనిని వస్తువు యొక్క ఘనపరిమాణం అని పేర్కొనండి. మరొకరీతిలో వస్తువు బోలుగా ఉన్నచో దాని లోపలి భాగం ఖాళీగా ఉంటుంది. దాని గాలితో లేదా వస్తువు ఆకారం పొంది ద్రవంతో నింపవచ్చు. ఈ ప్రక్రియలో దాని లోపలి భాగంలో నింపదగు వస్తువు యొక్క సామర్థ్యంను వస్తువు యొక్క ఘనపరిమాణం అని పిలుస్తారు. సంక్షిప్తంగా వస్తువు ఘనపరిమాణం. అది ఆక్రమించు పరిమాణపు కొలత, వస్తు సామర్థ్యం దాని లోపలి భాగంలో సేకరించదగు వస్తువు పరిమాణం (ఘనపరిమాణం) అవుతుంది. దీనివలన రెండు విధానాలలో దానిని కొలిచే ప్రమాణం ఘనపరిమాణం అవుతుంది.

అందువలన మనం దీర్ఘఘనపు ఘనపరిమాణం గురించి మాట్లాడినప్పుడు, మనం దీర్ఘఘనం స్థళంలో ఆక్రమించిన పరిమాణపు కొలత అని పరిగణించాలి.

కొనసాగి, వైశాల్యం మరియు ఘనపరిమాణం ఒక క్షేత్రపు (ప్రాంతం) పరిమాణ కొలత అవుతుంది. దీనివలన సరిగ్గా చెప్పాలంటే, మనం వృత్తాకారక్షేత్ర వైశాల్యం లేదా దీర్ఘఘనాకృతి క్షేత్ర ఘనపరిమాణం లేదా వృత్తాకార క్షేత్ర ఘనపరిమాణం మొదలగు వాటిని కనుగొంటాం. అయితే, దీని అర్థం కేవలం వాటి సరిహద్దు రేఖలను సూచించునప్పటికీ సంక్షిప్తం కొరకు మీరు వృత్త వైశాల్యం కనుగొనండి. దీర్ఘఘనం లేదా గోళపు ఘనపరిమాణం కనుగొనండి అని చెప్పుతాం.



చిత్రం 13.23

చిత్రం 13.23 గమనించండి. ప్రతి దీర్ఘ చతురస్రాకార వైశాల్యం A అనుకోండి. దీర్ఘచతురస్రాలను ఒకదాని పై మరొకటి ఎత్తు h వరకు అమర్చబడింది. దీర్ఘఘనం ఘనపరిమాణం V అని అనుకోండి. మీరు V, A మరియు h ల మధ్య సంబంధం చెప్పగలరా?

ప్రతి దీర్ఘ చతురస్రం ఆవరించిన సమతల వైశాల్యం × ఎత్తు = దీర్ఘ ఘనాకృతినుండి స్థళాన్ని ఆవరించిన పరిమాణం అందువలన, మనకు $A \times h = V$

అనగా, **దీర్ఘఘనాకృతి ఘనపరిమాణం = అడుగు భాగం వైశాల్యం × ఎత్తు = పొడవు × వెడల్పు × ఎత్తు =** $l \times b \times h$,

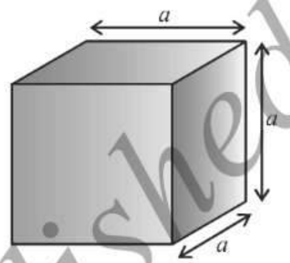
Not to be republished ©KTBS

ఇక్కడ l, b మరియు h వరుసగా పొడవు, వెడల్పు మరియు ఎత్తులను సూచిస్తున్నాయి..

గమనించండి :మనం స్థళం పరిమాణాన్ని కొలిచినప్పుడు, అనగా, స్థళంలో ఘనాకృతి ఆక్రమించిన కొలత. దీనిని మనం అందులో పొందుకునియున్న ప్రమాణ భుజంగల ఘనములను లెక్కించడం ద్వారా చేస్తాం. అందువలన ఘనపరిమాణాన్ని కొలచే ప్రమాణం ఘనమానం అవుతుంది.

అనగా, **ఘనపు ఘనపరిమాణం =భుజం × భుజం × భుజం = a^3**

ఇక్కడ 'a'అనునది ఘనపు అంచు పొడవు [చిత్రం 13.24 చూడండి]



చిత్రం 13.24

ఒక ఘనపు అంచు పొడవు 12 cm,

ఘనపు ఘనపరిమాణం $= 12 \times 12 \times 12 \text{ cm}^3$

$= 1728 \text{ cm}^3$

ఈ సూత్రాన్ని మీరు వెనుకటి తరగతిలో చదివి ఉండుటను జ్ఞప్తికి తెచ్చుకోండి. ఇప్పుడు మనం కొన్ని ఉదాహరణలతో సూత్రాన్ని ఉపయోగించడం వివరిద్దాం.

ఉదాహరణ 11 : పొడవు 10 m గల ఒక గోడను మైదానంలో కట్టవలసిఉంది.గోడ ఎత్తు 4 m మరియు దాని మందం 24 cm ఉంది. ఈ గోడను 24 cm × 12 cm × 8 cm కొలతల ఇటుకలతో కట్టాల్సి ఉంది. దీనికి కావలసిన ఇటుకలను కనుగొనండి?

సాధన : అన్ని ఇటుకలలో కట్టిన గోడ స్థళాన్ని ఆక్రమిస్తుంది. మనం ధీర్ఘ చతురస్రాకార గోడ ఘన పరిమాణాన్ని కనుగొనాల్సి ఉంది.

ఇక్కడ పొడవు $= 10 \text{ m} = 1000 \text{ cm}$

మందం $= 24 \text{ cm}$

ఎత్తు $= 4 \text{ m} = 400 \text{ cm}$

అందువలన గోడ ఘనపరిమాణం = పొడవు × వెడల్పు× ఎత్తు

$= 1000 \times 24 \times 400 \text{ cm}^3$

ప్రతి ఇటుక కూడా ఒక ధీర్ఘ ఘనాకృతి.

దాని పొడవు = 24 cm, వెడల్పు,= 12 cm మరియు ఎత్తు = 8 cm

అందువలన ఇటుక ఘనపరిమాణం = పొడవు × వెడల్పు × ఎత్తు

$= 24 \times 12 \times 8 \text{ cm}^3$

కావలసిన మొత్తం ఇటుకలు $= \dfrac{\text{గోడ ఘనపరిమాణం}}{\text{ప్రతి ఇటుక ఘనపరిమాణం}}$

$= \dfrac{1000 \times 24 \times 400}{24 \times 12 \times 8} = 4166.6$

©KTBS Not to be republished

గోడను కావలసిన మొత్తం ఇటుకలు = 4167

ఉదాహరణ 12 : ఒక బాలిక నిర్మించే (కట్టు) ఘనముల (building blocks) తో ఆడుకుంటోంది. చిత్రం 13.25 లో చూపినట్లుగా ఆకారంలో కడుతోంది. ప్రతి ఘనపు భుజం పొడవు 3 cm ఉంది. బాలిక కట్టిన ఆకారపు ఘనపరిమాణం కనుగొనండి.

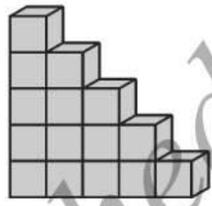
సాధన : ప్రతిఘనపు ఘన పరిమాణం = భుజం × భుజం × భుజం

$= 3 \times 3 \times 3\ cm^3 \quad = 27\ cm^3$

ఆకారంలోగల మొత్తం ఘనములు = 15

అందువలన ఆకారంలోని ఘన పరిమాణం = $27 \times 15\ cm^3$

$= 405\ cm^3$



చిత్ర 13.25

అభ్యాసం 13.5

1. ఒక అగ్గిపెట్టె కొలత $4\ cm \times 2.5\ cm \times 1.5\ cm$ ఇలాంటి 12 అగ్గిపెట్టెలుగల ఒక పొట్టణం ఘనపరిమాణం కనుగొనండి.
2. దీర్ఘఘనాకృతి ఆకారంలోని నీటి తొట్టి 6 m పొడవు, 5 m వెడల్పు, 4.5 m లోతు ఉంది. అందులో ఎన్ని లీటర్ల నీరు పడుతుంది? ($1\ m^3 = 1000\ l$)
3. దీర్ఘ ఘనాకృతి ఆకారంలోని పాత్ర 10 m పొడవు మరియు 8 m వెడల్పు ఉంది. అందులో 380 ఘనమీటర్ల ద్రవం పట్టడానికి ఎంత ఎత్తు ఉండాలి?
4. దీర్ఘ ఘనాకృతి ఆకారపు గొయ్యి 8 m పొడవు, 6 m వెడల్పు మరియు 3 m లోతు ఉంది. దీనిని త్రవ్వడానికి ప్రతి ఘనపుమీటర్‌కు m^3 ₹ 30 చొప్పున గొయ్యి త్రవ్వడానికి అయ్యే ఖర్చు ఎంత?
5. దీర్ఘ ఘనాకృతి ఆకారంలోని నీటి తొట్టి సామర్థ్యం 50,000 లీటర్లు. దాని పొడవు వెడల్పు వరుసగా 10 m మరియు 2.5 m అయితే, దాని వెడల్పు కనుగొనండి.
6. ఒక గ్రామ జనాభా 4000 మంది. ఒకరోజుకు ప్రతి యొక్కరికి 150 లీటర్ల నీరు కావాలి గ్రామంలోగల తొట్టి కొలత $20\ m \times 15\ m \times 6\ m$ ఉంది, అలాగయితే తొట్టిలోగల నీరు ఎన్ని రోజులకు సరిపోతుంది?
7. ఒక గోదాము కొలత $40\ m \times 25\ m \times 15\ m$ ఉంది. దీనిలో $1.5\ m \times 1.25\ m \times 0.5\ m$ కొలతలుగల కొయ్యడబ్బాలు (wooden crates) చాలా ఎక్కువగా ఉంచదగు వాటిని కనుగొనండి.
8. ఒక భుజం 12 cm గల ఘనమును ఎనిమిది సమాన ఘనపరిమాణాలు కలిగియున్న ఘనాలుగా కత్తరించినచో, వచ్చెడి క్రొత్త ఘనపు భుజం పొడవును కనుగొనండి. వాటి మధ్యగల ఉపరితల వైశాల్యపు నిష్పత్తిని కనుగొనండి.
9. లోతు 3 m మరియు 40 m వెడల్పుగల ఒక నది ప్రతి గంటకు 2 కిలో మీటర్ల / వేగంగా ప్రవహిస్తుంది. సముద్రంలోనికి 1 నిమిషంలో ప్రవహించు నీటిని కనుగొనండి?

13.7 సిలిండర్ ఘనపరిమాణం

దీర్ఘ ఘనాకృతిని ఒకే కొలతగల దీర్ఘచతురస్రాలతో నిర్మించినట్లుగా మనం వృత్తాకారపు లంబ (నిటారు) సిలిండర్ ఒక కొలతలుగల వృత్తాలతో నిర్మించవచ్చు. మీరు దీర్ఘ ఘనాకృతులకు

©KTBS Not to be republished

ఉపయోగించిన చర్చలను సిలిండర్ ఘన పరిమాణం కనుగొనడానికి ఉపయోగించవచ్చు.

ఘనపరిమాణం = పాదపు వైశాల్యం × ఎత్తు

= వృత్తాకార పాదవు వైశాల్యం× ఎత్తు $= \pi r^2 h$

అనగా, **సిలిండర్ ఘనపరిమాణం = $\pi r^2 h$**

ఇక్కడ r పాదపు వ్యాసార్థం మరియు h సిలిండర్ ఎత్తు.

ఉదాహరణ 13 : ఒక గుడి స్తంభాలు సిలిండర్ ఆకారంలో ఉన్నాయి.[చిత్రం 13.26 చూడండి] ప్రతి స్తంభం వృత్తాకార పాదపు వ్యాసార్థం 20 cm మరియు ఎత్తు 10 m ఉన్నచో, ఇలాంటి 14 స్తంభాలను నిర్మించడానికి కావలసిన కాంక్రేట్ మిశ్రమం ఎంత?

సాధన : కాంక్రీట్ మిశ్రమం ఉపయోగించి నిర్మించిన స్తంభాలు, స్తంభంలోని సంపూర్ణ స్థళాన్ని ఆక్రమించు కుంటాయి. మనం ఇక్కడ సిలిండర్ ఘనపరిమాణం కనుగొనవలసి ఉంది.

ఒక సిలిండర్ పాదపు వ్యాసార్థం. = 20 cm

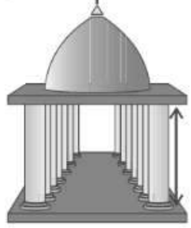
సిలిండర్ ఆకారపు స్తంభం ఎత్తు = 10 m = 1000 cm

ప్రతి సిలిండర్ ఘనపరిమాణం $= \pi r^2 h$

$= \frac{22}{7} \times 20 \times 20 \times 1000 \text{ cm}^3$

$= \frac{8800000}{7} \text{ cm}^3$

$= \frac{8.8}{7} \text{ m}^3 \ [\because 1000000 \text{ cm}^3 = 1 \text{m}^3]$



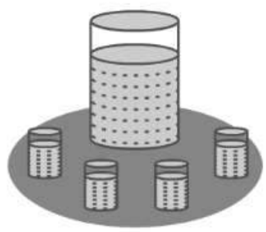
చిత్రం 13.26

అందువలన, 14 స్తంభాల ఘనపరిమాణం = ప్రతి సిలిండర్ ఘన పరిమాణం × 14

$= \frac{8.8}{7} \times 14 \text{ m}^3 = 17.6 \text{ m}^3$

అందువలన, 14 స్తంభాలకు 17.6 m^3 కాంక్రేట్ మిశ్రమం కావాలి.

ఉదాహరణ 14 : రంజాన్ మేళాలూ ఒక ఆహారపు అంగడి వాని దగ్గర 15 cm పాదపు వ్యాసార్థం కల్గియున్న సిలిండర్ ఆకారపు పాత్రలో 32 cm ఎత్తుకు కమలా పండ్ల రసంనింపాడు చిన్న సిలిండర్ ఆకారపు 3 cm వ్యాసార్థం మరియు 8 cm ఎత్తుకు పండ్లరసాన్ని నింపి ప్రతిలోటాకు ₹ 3 చొప్పున అమ్ముతున్నాడు. అంగడివాడు పండ్ల రసం సంపూర్ణంగా అమ్మిన తరువాత లభించు డబ్బు ఎంత?



చిత్రం 13.27

సాధన : పాత్రలోని పండ్లరసం ఘనపరిమాణం

= సిలిండర్ ఆకారపాత్ర ఘనపరిమాణం = $\pi R^2 H$

(ఇక్కడ R మరియు H లను పాత్రలోని వ్యాసార్థంమరియు ఎత్తులు వరుసగా తీసుకోబడినవి.)

$= \pi \times 15 \times 15 \times 32 \text{ cm}^3$

©KTBS Not to be republished

అదేవిధంగా లోటాలో పట్టు పండ్ల రసం ఘనపరిమాణం = $\pi r^2 h$

(ఇక్కడ r మరియు h లను లోటా వ్యాసార్థం మరియు ఎత్తు వరుసగా తీసుకోబడినవి)

$= \pi \times 3 \times 3 \times 8 \text{ cm}^3$

పండ్ల రసం ఉన్న లోటాలు మొత్తం అమ్మినది $= \dfrac{\text{పాత్ర ఘనపరిమాణం}}{\text{ప్రతి లోటా ఘనపరిమాణం}}$

$= \dfrac{\pi \times 15 \times 15 \times 32}{\pi \times 3 \times 3 \times 8} = 100$

అందువలన, అంగడివానికి లభించిన డబ్బు = ₹ 3 × 100 = ₹ 300

అభ్యాసం 13.6

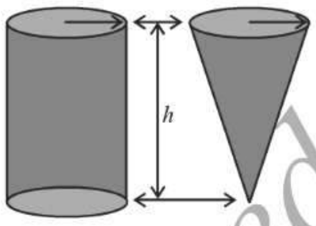
(π కి వేరే ఏ విలువ ఇవ్వనిచో $\pi = \frac{22}{7}$ గా పరిగణించండి.)

1. ఒక సిలిండర్ ఆకారపు పాత్ర పాదపు పరిధి 132cm మరియు ఎత్తు 25cm. దీనిలో పట్టు నీటి ప్రమాణాన్ని లీటర్లలో కనుగొనండి. ($1000 \text{ cm}^3 = 1l$)
2. సిలిండర్ ఆకారపులోని ఒక కొయ్యగొట్టం లోపలి వ్యాసం 24 cm మరియు వెలుపలి వ్యాసం 28 cm. గొట్టం పొడవు 35 cm, 1 cm^3 కొయ్య 0.6 g ద్రవ్యరాశి కల్గియున్నచో, గొట్టం ద్రవ్యరాశిని కనుగొనండి.
3. శీతల పానీయం రెండు రకాల పొట్టణాలలో దొరుకుతుంది
   (i) దీర్ఘచతురస్రాకార పాదం కల్గిన ఒక టిన్ క్యాన్ పొడవు 5 cm, వెడల్పు 4 cm మరియు ఎత్తు 15 cm.
   (ii) ఒక ప్లాస్టిక్ సిలిండర్ యొక్క వృత్తాకార పాదపు వ్యాసం 7 cm మరియు ఎత్తు 10 cm వీటిలో ఏది ఎక్కువ సామర్థ్యం పొందింది? మరియు ఎంత ఎక్కువ?
4. ఒక సిలిండర్ వక్ర ఉపరితల వైశాల్యం 94.2 cm^2 మరియు దాని ఎత్తు 5 cm.
   (i) పాదపు వ్యాసార్థం
   (ii) దాని ఘన పరిమాణం కనుగొనండి. (π = 3.14 ను ఉపయోగించండి)
5. 10 m లోతుగల ఒక సిలిండర్ ఆకార పాత్ర లోపలి ఉపరితలానికి రంగు వేయడానికి అయ్యే ఖర్చు ₹ 2200. దానికి రంగు వేయడానికి ప్రతి చదరపు మీటర్‌కు ₹ 20 ఖర్చు అయితే,
   (i) పాత్ర లోపలి ఉపరితల వైశాల్యం (ii) పాదపు వ్యాసార్థం
   (iii) పాత్ర సామర్థ్యం(ఘనపరిమాణం) కనుగొనండి.
6. మూత మూసిన 1 m ఎత్తుగల సిలిండర్ ఆకార పాత్ర సామర్థ్యం 15.4 లీటర్లు. ఈ సిలిండర్‌ను తయారుచేయడానికి కావలసిన లోహపు రేకును చదరపు మీటర్లలో కనుగొనండి.
7. ఒక సీసపు కడ్డి (పెన్సిల్) సిలిండర్ ఆకారంలోని కొయ్యను పొందింది. దాని మధ్యలో లోపలి భాగంలో సిలిండర్ ఆకారపు ఘన గ్రాఫైట్ వ్యాసం 1 mm సీసపు కడ్డి పొడవు 14 cm అయితే, కొయ్య మరియు గ్రాఫైట్ ఘనపరిమాణం కనుగొనండి.
8. ఆసుపత్రిలో ఒక రోగికి ప్రతిరోజు 7 cm వ్యాసం కల్గిన సిలిండర్ ఆకారపు పాత్రలో సూప్

©KTBS Not to be republished

ఇస్తారు. ఈ పాత్రలో సూప్‌ను 4 cm ఎత్తుకు నింపి ఇచ్చినచో ప్రతిరోజు ఆసుపత్రిలోని 250 మంది రోగులకు తయారు చేయవలసిన సూప్‌ను లెక్కించండి .

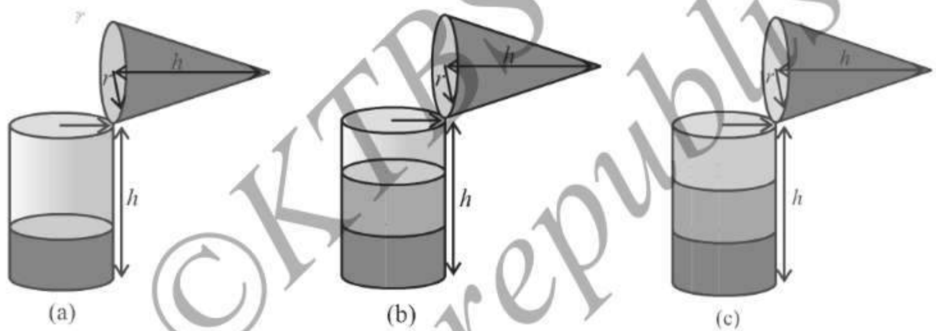
13.8 వృత్తాకార లంబ శంఖువు ఘనపరిమాణం



చిత్రం 13.28

చిత్రం 13.28లో వృత్తాకార లంబ సిలిండర్ మరియు వృత్తాకార లంబ శంఖువు ఒకే పాదపు వ్యాసార్థం మరియు ఒకే ఎత్తు కలిగియుండుటను మీరు చూస్తున్నారు ?

కార్యాచరణం : ఒకే పాదపు వ్యాసార్థం ఒకే ఎత్తు కల్గిన బోలుగా ఉన్న సిలిండర్ మరియు బోలుగా ఉన్న శంఖువు తయారు చేయడానికి ప్రయత్నించండి. [చిత్రం 13.28 చూడండి] ఆ తరువాత మనం వృత్తాకార లంబకోణ ఘనపరిమాణాన్ని ప్రయోగాత్మకంగా చూడటానికి ఒక ప్రయోగం చేద్దామా.



చిత్రం 13.29

మనం దానిని ఇలా ప్రారంభిద్దాం.

మనం శంఖువులో దాని తుదివరకు ఇసుకనింపి, దానిని సిలిండర్‌లో ఖాళీ చేయండి. అది సిలిండర్‌లో కేవలం కొద్ది భాగం నిండటం మీరు కనుగొంటారు. (చిత్రం 13.29(a) చూడండి)

మనం తిరిగి శంఖువు తుది వరకు నింపి, దానిని సిలిండర్‌లో ఖాళీ చేయండి. ఇప్పుడు కూడా సిలిండర్ పూర్తిగా నిండకపోవడం చూస్తారు. [చిత్రం 13.29 (b) చూడండి]

శంఖువును మూడవసారి నింపి సిలిండర్‌లో ఖాళీచేసినప్పుడు సిలిండర్ సంపూర్ణంగా తుదివరకు నిండుటను చూస్తాం. [చిత్రం 13.29 (c) చూడండి]

దీనివలన మనం ఎటువంటి అనుమానం లేకుండా శంఖువు ఘనపరిమాణపు మూడురెట్లు సిలిండర్ ఘనపరిమాణానికి సమానంగా ఉంటుంది అని నిర్ధారించవచ్చు. ఇక్కడ శంఖువుయొక్క మరియు సిలిండర్ యొక్క పాదపు వ్యాసార్థం మరియు ఎత్తు సమానంగా ఉండాలి. దీని అర్థం శంఖువు ఘనపరిమాణం సిలిండర్ పరిమాణపు మూడింట ఒక భాగం ఉంటుంది.

©KTBS Not to be republished

అయితే, **శంఖువుఘనపరిమాణం = $\frac{1}{3}\pi r^2 h$**

ఇక్కడ r పాదపు వ్యాసార్థం మరియు h శంఖువు యొక్క ఎత్తు.

ఉదాహరణ 15 : ఒక శంఖువు ఎత్తు మరియు వాలుతలం వరుసగా 21 cm మరియు 28 cm ఉన్నంచో శంఖువు యొక్క ఘనపరిమాణం కనుగొనండి.

సాధన : $l^2 = r^2 + h^2$ నుండి

$$r = \sqrt{l^2 - h^2}$$

$$= \sqrt{28^2 - 21^2} \text{ cm} = 7\sqrt{7} \text{ cm}$$

శంఖువు ఘనపరిమాణం = $\frac{1}{3}\pi r^2 h$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 7\sqrt{7} \times 7\sqrt{7} \times 21 \text{ cm}^3$$

$$= 7546 \text{ cm}^3$$

ఉదాహరణ 16 : మోనికా దగ్గర 551 m^2 వైశాల్యంగల క్యాన్వాస్ బట్ట ఉంది. ఆమె దానిని 7 m పాదపు వ్యాసార్థంగల శంఖువాకార టెంట్ చేయడానికి ఉపయోగించింది. టెంట్ (గుడారం) కుట్టడానికి వదిలే అంచు మరియు కత్తరించడం వలన వ్యర్థమగు బట్ట 1 m^2 అయినచో, టెంట్ ఘన పరిమాణం కనుగొనండి.

సాధన : క్యాన్వాస్ ఘనపరిమాణం = 551 m^2 మరియు వ్యర్థమైన క్యాన్వాస్ బట్ట వైశాల్యం 1 m^2
అందువలన, టెంట్ చేయడానికి ఉపయోగించిన క్యాన్వాస్ = (551 - 1) m^2

$$= 550 \text{ m}^2$$

ఇప్పుడు టెంట్ ఉపరితల వైశాల్యం = 550 m^2 మరియు టెంట్ పాదపు వ్యాసార్థం = 7 m

టెంట్ కేవలం వక్ర ఉపరితల వైశాల్యం కల్గియుందని గమనించండి. (టెంట్ నేలను క్యాన్వాస్‌తో పోల్చబడదు!!.)

అందువలన, టెంట్ వక్ర ఉపరితల వైశాల్యం = 550 m^2

అనగా . $\pi rl = 550$

$$\frac{22}{7} \times 7 \times l = 550, \quad l = \frac{550}{22} \text{ m} = 25 \text{ m}$$

ఇప్పుడు $l^2 = r^2 + h^2$

అందువలన, $h = \sqrt{l^2 - r^2}$

$$= \sqrt{25^2 - 7^2}\, m = \sqrt{625 - 49}\, m = \sqrt{576}\, m = 24 \text{ m}$$

అందువలన, శంఖువాకార టెంట్ ఘనపరిమాణం = $\frac{1}{3}\pi r^2 h$

©KTBS Not to be republished

$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \times 24 \text{ m}^3$$

$$= 1232 \text{ m}^3$$

అభ్యాసం 13.7

[π చెప్పింది వదలి $\pi = \frac{22}{7}$ అని భావించుకోండి.]

1. కింది వృత్తాకార లంబ శంఖువు యొక్క ఘన పరిమాణం కనుగొనండి.
   (i) వ్యాసార్థం 6 cm, ఎత్తు 7 cm (ii) వ్యాసార్థం 3.5 cm ఎత్తు12 cm
2. కింది శంఖువాకార పాత్ర సామర్థ్యాన్ని లీటర్లలో కనుగొనండి.
   (i) వ్యాసార్థం 7 cm, వాలుతలం ఎత్తు 25 cm(ii) ఎత్తు 12 cm వాలుతలం ఎత్తు 13 cm
3. ఒక శంఖువు ఎత్తు 15 cm ఘనపరిమాణం 1570 cm^3 ఉన్నచో, దాని పాదపు వ్యాసార్థాన్ని కనుగొనండి. ($\pi = 3.14$ ను ఉపయోగించండి)
4. ఎత్తు 9 గల వృత్తాకార లంబ శంఖువు ఘన పరిమాణం 48π cm^3 ఉన్నచో, పాదపు వ్యాసం కనుగొనండి.
5. శంఖువాకార ఒక గొయ్యి పై వ్యాసం 3.5 m, లోతు 12 m అయిన దాని సామర్థ్యం కిలో లీటర్లలో కనుగొనండి.
6. ఒక వృత్తాకార లంబ శంఖువు ఘనపరిమాణం 9856 cm^3 దాని పాదపు వ్యాసం 28 cm అయినచో
   (i) శంఖువు ఎత్తు (ii) శంఖువు వాలుతలం ఎత్తు
   (iii) శంఖువు యొక్క వక్ర ఉపరితల వైశాల్యం కనుగొనండి.
7. లంబకోణ త్రిభుజం ABC లోని భుజాలు 5 cm, 12 cm మరియు 13 cm దీనిని12 cm భుజం పాడవుకు త్రిప్పినప్పుడు ఏర్పడు ఘన వస్తువుయొక్క ఘన పరిమాణం కనుగొనండి.
8. పై ప్రశ్న 7లోని ABC లను 5 cm భుజపు పాడవుకు త్రిప్పినప్పుడు ఏర్పడు ఘనవస్తువుయొక్క ఘనపరిమాణం కనుగొనండి. ప్రశ్న 7 మరియు ప్రశ్న 8 లోని రెండు ఘనవస్తువుల ఘనపరిమాణాలను నిష్పత్తిలో కనుగొనండి.
9. గోధుమ రాశి శంఖువాకారంలో ఉంది. దాని వ్యాసం 10.5 m మరియు ఎత్తు 3 m ఉన్నచో, దాని ఘనపరిమాణం కనుగొనండి. దీనిని వర్షంనుండి రక్షించడానికి క్యాన్వాస్ తో తయారుచేసిన బట్టను కప్పవలసిఉంది. దీనికి కావలసిన క్యాన్వాస్ బట్ట వైశాల్యం కనుగొనండి.

13.9 గోళం ఘనపరిమాణం

ఇప్పుడు మనం గోళం ఘనపరిమాణం ఎలా కొలవవచ్చో చూద్దాం. ముందుగా రెండు లేదా

©KTBS Not to be republished

మూడు వేర్వేరు వ్యాసార్థాలు కలిగిన గోళాలను మరియు ఈ మూడు గోళాలను ఒకే చోట ఉంచదగు ఒక పెద్ద పాత్ర తీసుకోండి. ఈ పాత్రను ఉంచగల (పెట్టగల) పెద్ద తొట్టి తీసుకోండి. తరువాత పాత్రలో అంచువరకు నీటిని నింపండి. (చిత్రం 13.30 (a) చూడండి].

మీరు ఇప్పుడు ఒక గోళాన్ని తొట్టిలో ఉంచిన పాత్రలో జాగ్రత్తగా వేయండి. కొద్దిగా నీరు పాత్రలో నిండి ప్రవహించి తొట్టిలో పడుతుంది. [చిత్రం 13.30 (b) చూడండి]తొట్టిలోని నీటిని కొలిచే సిలిండర్‌లో వేయండి. (అనగా కొలతల గుర్తు పొందిన సిలిండర్ ఆకారంలోని జార్) మరియు ఎక్కువగా ప్రవహించి వచ్చిన నీటి ప్రమాణాన్ని కొలవండి. [చిత్రం 13.30 (c)చూడండి] ఒకవేళ మునిగిన గోళం వ్యాసార్థం r అనుకోండి (మీరు గోళపు వ్యాసాన్ని తెలుసుకోవడం ద్వారా వ్యాసార్థాన్ని కనుగొనవచ్చు). తరువాత $\frac{4}{3}\pi r^3$ విలువను కనుగొనండి. మీరు విలువ ఎక్కువగా ప్రవహించిన నీటి ఘనపరిమాణానికి చాలావరకు సమానంగా ఉండుట కన బడుతున్నదా?

(a) (b) (c)

చిత్రం 13.30

ఈ ప్రక్రియను ఇతర వేర్వేరు వ్యాసార్థాలు కల్గిన గోళాలతో పునరావర్తనం చేయండి. గోళం వ్యాసార్థం R కనుగొని తరువాత $\frac{4}{3}\pi R^3$ విలువ కనుగొనండి. తిరిగి ఈ విలువ గోళం స్థళాంతరం చెందిన (ఎక్కువగా ప్రవహించిన) నీటి ప్రమాణం కొలతకు సమానంగా ఉంటుంది. ఇది మీకు ఏమేమి తెలుపుతున్నది? గోళం ఘన పరిమాణం గోళం నుండి స్థలాంతరం చెందిన నీటి ఘన పరిమాణానికి సమానంగా ఉంటుంది. ఈ ప్రయోగాన్ని పునః పునః వేర్వేరు వ్యాసార్థాలుపొందిన గోళాలతో చేసినప్పుడు వచ్చే, ఫలితం ఒకటే అయి వుంటుంది. అనగా, గోళపు ఘన పరిమాణం వ్యాసార్థ ఘనపు $\frac{4}{3}\pi$ అంతకు సమానంగా ఉంటుంది. దీనివలన మనకు ఈ కింది కల్పన (సూత్రం) నిస్తుంది.

అనగా,

గోళం ఘన పరిమాణం = $\frac{4}{3}\pi r^3$

ఇక్కడ r గోళపు వ్యాసార్థం.

దీనిని మీ తరువాతి తరగతులలో సాధించి చూపుతారు. అయితే, ఈ దశలో మీరు దీనిని నిజం అని తీసుకొందాం.

అర్ధగోళం గోళంలోని సగం ఉంటుంది. మీరు అర్ధగోళం ఘన పరిమాణం ఎంత ఉంటుందో తెలుపవచ్చా? అవును అది $\frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}\pi r^3$

©KTBS Not to be republished

అనగా, **అర్ధగోళం ఘనపరిమాణల** $= \frac{2}{3}\pi r^3$

ఇక్కడ r అర్ధ గోళం వ్యాసార్థం అవుతుంది.

ఈ సూత్రాలను ఉపయోగించడం గురించి, కొన్ని ఉదాహరణలతో స్పష్టపరుచుదాం..

ఉదాహరణ 17 : 11.2 cm వ్యాసార్థంగల గోళపు ఘనపరిమాణం కనుగొనండి.

కావలసిన ఘన పరిమాణం $= \frac{4}{3}\pi r^3$

$= \frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times 11.2\times 11.2\times 11.2 \text{ cm}^3$

$= 5887.32 \text{ cm}^3$

ఉదాహరణ 18 : లోహంలో తయారుచేసిన గోళాకారపు షాట్ పుట్ (గుండు) వ్యాసార్థం 4.9 cm లోహపు సాంద్రత 7.8 g/cm³ అయితే షాట్‌పుట్ ద్రవ్యరాశిని కనుగొనండి.

సాధన : షాట్‌పుట్ గుండును లోహంతో తయారుచేసిన ఘన గోళం అవుతుంది. దాని ద్రవ్యరాశి ఘనపరిమాణం మరియు సాంద్రతయొక్క గుణలబ్దానికి సమానం. మీరు ఇప్పుడు గోళపు ఘనపరిమాణాన్ని కనుగొనాల్సి ఉంది.

ఇప్పుడు గోళపు ఘన పరిమాణం $= \frac{4}{3}\pi r^3$

$= \frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times 4.9\times 4.9\times 4.9 \text{ cm}^3$

$= 493 \text{ cm}^3$ (సుమారుగా)

1 cm³ పరిమాణపు లోహద్రవ్యరాశి 7.8 g .

అందువలన, షాట్‌పుట్ గుండు ద్రవ్యరాశి $= 7.8 \times 493$ g

$= 3845.44 \text{ g} = 3.85 \text{ kg}$ (సుమారుగా)

ఉదాహరణ 19 : ఒక అర్ధగోళాకృతి పాత్ర వ్యాసార్ధం 3.5 cm. ఈ పాత్రలో పట్టు నీటి పరిమాణం కనుగొనండి.

సాధన : పాత్రలో పట్టెడి (నింపదగు) నీటి ఘనపరిమాణం $= \frac{2}{3}\pi r^3$

$= \frac{2}{3}\times\frac{22}{7}\times 3.5\times 3.5\times 3.5 \text{ cm}^3$

$= 89.8 \text{ cm}^3$

© KTBS Not to be republished

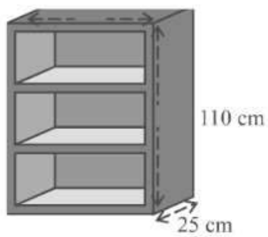
అభ్యాసం 13.8

[π చెప్పింది మినహా $\pi = \frac{22}{7}$ అని భావించికోండి.]

1. కింది వ్యాసార్ధం కల్గియున్న గోళం ఘన పరిమాణం కనుగొనండి
   (i) 7 cm (ii) 0.63 m
2. కింది వ్యాసం కల్గియున్న ఘన గోళాకార బంతి స్థళాంతరం చెందిన నీటి ప్రమాణాన్ని కనుగొనండి.
   (i) 28 cm (ii) 0.21 m
3. ఒక లోహపు బంతి వ్యాసం 4.2 cm లోహపు సాంద్రత 8.9 g/cm^3 అయితే, బంతి ద్రవ్యరాశిని కనుగొనండి.
4. చంద్రుని వ్యాసం సుమారుగా భూమి వ్యాసానికి నాలుగింతలు ఒక భాగానికి సమానం. చంద్రుని ఘనపరిమాణం భూమి ఘన పరిమాణానికి ఎంత భిన్నానికి సమానంగా ఉంటుంది?
5. ఒక అర్ధగోళాకార పాత్ర వ్యాసం 10.5 cm అయితే, అది ఎన్ని లీటర్ల పాలు దానిలో పడుతుంది?
6. ఒక అర్ధగోళాకార తొట్టి 1 cm మందంగల ఇనుప రేకుతో తయారు చేయబడింది. దానిలోపలి వ్యాసార్థం 1 m అయితే, తొట్టి తయారు చేయడానికి ఉపయోగించిన ఇనుము ఘనపరిమాణం కనుగొనండి.
7. ఒకగోళం ఉపరితల వైశాల్యం 154 cm^2 అయితే, దాని ఘనపరిమాణం కనుగొనండి.
8. ఒక భవన గోపురం అర్ధ గోళాకారంలో ఉంది. దాని లోపలి భాగం సున్నం పూయడానికి అయిన ఖర్చు ₹ 498.96 ప్రతి చదరపు మీటర్‌కు ₹ 2.00 చొప్పునసున్నం పూయడానికి ఖర్చు అయినచో,
   (i) గోపురం లోపలి భాగపు ఉపరితల వైశాల్యం
   (ii) గోపురం లోపలి భాగంలోని గాలి ఘనపరిమాణం కనుగొనండి.
9. ఇనుమ వ్యాసార్ధం r మరియు ఉపరితల వైశాల్యం S గల 27 ఇనుప గోళాలను కరిగించి S ఉపరితల వైశాల్యం కల్గిన క్రొత్త గోళం చేయబడింది.
   (i) క్రొత్త గోళపు వ్యాసార్ధం (r^1),
   (ii) S మరియు S1 యొక్క నిష్పత్తిని కనుగొనండి.
10. ఒక ఔషద గుళిక గోళాకారంలో 3.5 mm వ్యాసం కల్గి యుంది. గుళికలో నింపదగిన ఔషద ప్రమాణం mm^3 కనుగొనండి.

అభ్యాసం 13.9 (ఐచ్ఛిక)*

1. ఒక కొయ్య పుస్తకాల అర (Wooden bookshelp) వెలుపలి కొలత ఎత్తు = 110 cm, లోతు = 25 cm, వెడల్పు = 85 cm [చిత్రం 13.31 చూడండి]. అన్ని వైపుల కొయ్య పట్టి 5 cm మందం ఉంది. దాని వెలుపలి భాగం మెరుగు పెట్టడానికి మరియు దానిలోపలి భాగం రంగు వేయవలసి ఉంది. మెరుగు

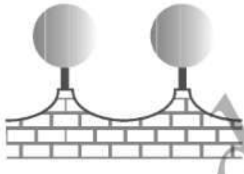


చిత్రం 13.31

©KTBS Not to be republished

పెట్టడానికి ప్రతి చదరపు సెంటీమీటర్‌కు 20 పైసలు, రంగు వేయడానికి ప్రతి చదరపు సెంటీ మీటర్‌కు 10 పైసలు అయినచో, పుస్తకాల అర ఉపరితలంలో కూడా మెరుగు పెట్టడం మరియు రంగు వేయడానికి అయ్యే మొత్తం ఖర్చు కనుగొనండి.

2. ఇంటి ముందుగల వరండా గోడను 21 cm వ్యాసం కల్గియున్న కొయ్య గోళంలో అలంకరించబడింది. చిత్రం 13.22 చూపినట్లుగా సన్నటి ఆధారంలో నిలపడమైంది ఇలాంటి ఎనిమిది గోళాలను ఇదే ఉద్దేశానికి ఉపయోగించబడింది. వాటికి వెండి రంగు పూయవలసి ఉంది. ప్రతి ఆధారం ఆకారంలో ఉంది, 1.5cm వ్యాసార్ధం మరియు 7cm ఎత్తు ఉంది. దీనికి నల్లటి రంగును పూయవలసి ఉంది. వెండిరంగు పూయడానికి ప్రతి చదరపు సెంటీ మీటర్‌కు 25 పైసలు మరియు నలుపు రంగు పూయడానికి ప్రతి చదరపు సెంటీమీటర్‌కు 5 పైసలు చొప్పున కావలసిన రంగులను కనుగొనండి.



చిత్రం 13.32

3. గోళం వ్యాసం 25% తక్కువ చేస్తే, దాని వక్ర ఉపరితల వైశాల్యం ఎంత శాతం తక్కువ అవుతుంది?

13.10 సారాంశం

ఈ అధ్యాయంలో మీరు కింది అంశాలు చదివారు.

1. దీర్ఘఘనపు ఉపరితల వైశాల్యం $= 2(lb + bh + hl)$
2. ఘనపు ఉపరితల వైశాల్యం $= 6a^2$
3. సిలిండర్ వక్ర ఉపరితల వైశాల్యం $= 2\pi r h$
4. సిలిండర్ సంపూర్ణ ఉపరితల వైశాల్యం $= 2\pi r (r + h)$
5. శంఖువు వక్ర ఉపరితల వైశాల్యం $=\pi r l$
6. లంబ వృత్తాకార శంఖువు సంపూర్ణ ఉపరితల వైశాల్యం $= \pi r l + \pi r^2 = \pi r (l + r)$
7. r వ్యాసార్ధం కలిగిన గోళం ఉపరితల వైశాల్యం $= \pi r^2$
8. అర్ధగోళం ఉపరితల వైశాల్యం $= 2 \pi r^2$
9. అర్ధగోళం సంపూర్ణ ఉపరి తల వైశాల్యం $= 3 \pi r^2$
10. దీర్ఘచతురస్రాకార ఘనపు ఘనపరిమాణం $= l \times b \times h$
11. ఘనపు ఘనపరిమాణం $= a^3$
12. సిలిండర్ ఘనపరిమాణం $= \frac{1}{3} \pi r^2 h$
13. శంఖువు ఘన పరిమాణం $= \pi r^2 h$
14. r వ్యాసార్ధంకల్గియున్న గోళపు ఘనపరిమాణం $= \frac{4}{3} \pi r^3$
15. అర్ధగోళపు ఘనపరిమాణం $= \frac{2}{3} \pi r^3$

(ఇక్కడ l, b, h, a, r మొదలగు అక్షరాలను వాటి సందర్భాను సారంగా సాధారణ అర్థంలో ఉపయోగించబడినవి)

©KTBS Not to be republished

అధ్యాయం - 14

సాంఖ్యక శాస్త్రం

14.1 పరిచయం:

మనం ప్రతిరోజు వార్తాపత్రికలు, దూరదర్శన్ మరియు ఇతర మాధ్యమాలలో వాస్తవాలు, సంఖ్యా గణాంకాలు, పట్టికలు లేదా గ్రాఫ్‌ల రూపంలో అనేక సమాచారాలను చూస్తాం. ఉదాహరణకు క్రికెట్ బ్యాటింగ్ లేదా బౌలింగ్ సరాసరి, ఒక కంఫెనీ యొక్క లాభాంశాలు నగరాల ఉష్ణోగ్రత, ఓటింగ్ ఫలితాంశాలు వివిధ శాఖల పంచవార్షిక ప్రణాళికల వ్యయాలు మొదలైన వాటికి సంబంధించిన నిర్దిష్ట సమాచారము లేదా సంఖ్యాత్మక వివరాలను దత్తాంశము అంటారు. దత్తాంశము అనే పదము ఆంగ్ల భాషలో **'Data'** లాటిన్ భాషలో.**'datum'** పదాల బహువచనమైనది. మీకు దత్తాంశము అనే పదము కొత్తదేమి కాదు. దత్తాంశము మరియు దత్తాంశ నిర్వహణ గురించి వెనుకటి తరగతులలో నేర్చుకొన్నారు.

మన విశ్వం మరింత ఎక్కువ సమాచారాల ఆధారిత కేంద్రము దైనందిన జీవనంలో ఏదో ఒక విధంలో దత్తాంశాలను ఉపయోగిస్తాం. అందువలన దత్తాంశాల వల్ల అర్థవంతమైన సమాచారాన్ని పొందుటను తెలుసుకొనుట అనివార్యమైనది. ఈ విధంగా అర్థవంతమైన సమాచారాన్ని తెలుసుకోవడాన్ని అధ్యయనం చేసే గణిత విభాగాన్ని "సాంఖ్యక శాస్త్రం" అంటాము "సేకరించిన సమాచారాన్ని అర్థవంతం చేయు గణిత శాఖను సాంక్యక శాస్త్రం" అంటారు.

సాంఖ్యక శాస్త్రము ఆంగ్లభాషలోని **'STATISTICS'**, లాటిన్ పదము **'Status'** పదం నుండి వచ్చింది. దీని మూల అర్థం **a (Political) State** అంటే ఒక (రాజకీయ). రాష్ట్రం నిజానికి సాంఖ్యక శాస్త్రం అంటే ఒక రాష్ట్రానికి అనుకూలమైన జన జీవనానికి సంబందించిన వివిధ రీతుల సమాచారపు సరళ సంగ్రహనమైనది. కాలం మారిన కొద్దీ సాంఖ్యక శాస్త్రం వ్యాప్తి విస్తృతమైనది. ఇది కేవలం సమాచార సేకరణ ప్రదర్శనగా మిగలలేదు దత్తాంశాల విశ్లేషణ మరియు నిర్ణయాలను తీసుకోవడాన్ని కలిగి ఉన్నది. ఈ విధమైన సాంఖ్యక శాస్త్రం దత్తాంశాల సేకరణ క్రమబద్ధ సమలేఖనం, విశ్లేషణ మరియు నిర్వహణలతో కూడి ఉన్నది.సాంఖ్యక శాస్త్రం పదానికి వేర్వేరు సందర్భాలలో వేర్వేరు అర్థాలు ఉన్నాయి.

©KTBS Not to be republished

క్రింది వాఖ్యలను గమనిద్దాం.

1. ''భారత దేశపు శైక్షణిక సాంఖ్యక శాస్త్రం'' యొక్క తాజా ప్రతిని నాకు ఇవ్వగలరా?
2. దైనందిన జీవితంలో ఉపయోగం ఉన్నందువలన నేను సాంఖ్యక శాస్త్రాన్ని నేర్చుకోవడానికి ఇష్టపడతాను.

మొదటి వాక్యంలో సాంఖ్యక శాస్త్రం సంఖ్యా దత్తాంశం అనే అర్థంలో బహువచన రూపంలో ఉపయోగించబడినది. ఇవి భాత దేశపు వివిధ విద్యా సంస్థల గురించి వివిధ రాష్ట్రాల సాక్షరత ప్రమాణం మొదలైన అంశాలతో కూడి ఉండవచ్చు. రెండవ వాక్యంలో సాంఖ్యక శాస్త్రం అనే పదము ఏకవచన రూపంలో ఉండి, దత్తాంశాల సేకరణ, విశ్లేషణ మరియు అర్థవంతమైన తీర్మానాన్ని తీసుకోవడాన్ని గురించిన విషయం అనే అర్థాన్ని ఇస్తుంది.

ఈ అధ్యాయంలో మనం దత్తాంశానికి సంబంధించిన అన్ని అంశాలను సంక్షిప్తంగా చర్చిద్దాం.

14.2 దత్తాంశ సేకరణ :-

దత్తాంశమును సేకరించుటలో మెలకువలను కింది కృత్యం ద్వారా చర్చిద్దాం సాంఖ్యక శాస్త్రంలో ఒక లక్ష్యంతో దత్తాంశం సేకరించుట మొదటి ప్రధాన సోపానము.

కార్యాచరణం 1 : తరగతిలోని విద్యార్థులు నాలుగు బృందాలుగా విభజించి. ఒక్కొక్క బృందమునకు కింద చూపిన దత్తాంశముల సేకరణకు కేటాయించండి.

(i) మీ తరగతిలోని 20 మంది విద్యార్థుల ఎత్తులు

(ii) ఒక నెలలో ప్రతిరోజు మీ తరగతిలో గైరుహాజరు అయిన విద్యార్థుల సంఖ్య.

(iii) మీ సహ విద్యార్థుల కుటుంబంలోని సభ్యుల సంఖ్య.

(iv) మీ పాఠశాలలోపల / బయట ఉన్న 15 మొక్కల ఎత్తు.

పై దత్తాంశమును సేకరించుటలో విద్యార్థులు ఉపయోగించిన పద్ధతులను చర్చిద్దాం.

(i) వివరాలు సేకరించుట కొరకు ప్రతి విద్యార్థిని ప్రశ్నించి లేదా స్వయంగా వారి ఇళ్ళకు వెళ్ళి వివరాలు రాబట్టారా?

(ii) పాఠశాలలోని రికార్డులు లేక మరి ఏదైనా రికార్డుల నుండి వివరాలుసేకరించారు?

వీటిని పరిశీలిస్తే (i). (ii) మరియు (iv) వ దత్తాంశముల కొరకు ప్రతి విద్యార్థిని నేరుగా సంప్రదించి, వివరాలు సేకరించవలసి ఉంటుంది. ఇట్లు దత్తాంశములోని రాశులను (విలువలను) మూలము నుండి నేరుగా సేకరించినచో దానిని **ప్రాథమిక దత్తాంశము (primary data)** అంటారు. (iii) వ దత్తాంశం కొరకు వివరాలను విద్యార్తుల నుండి కాకుండా అంతకు పూర్వమే రోజువారీ హాజరు వివరాలు రికార్డు చేయబడిన హాజరు పట్టికలనుండి సేకరించవచ్చును. ఈ విధంగా ముందుగానే సేకరింపబడి ఉన్న

©KTBS Not to be republished

దత్తాంశము లేక దత్తాంశంల నుండి సేకరించు దత్తాంశంను **గౌణ దత్తాంశము** (**Secondary Data**) అంటారు.

ఇప్పుడు, దత్తాంశములను ఎలా సేకరించాలి, ప్రాథమిక మరియు గౌణ దత్తాంశములను ఎలా వేరు చేయాలని మీకు అర్థం అవుతుంది.

అభ్యాసం 14.1

1. దైనందిన జీవితంలో మీరు సేకరించగల దత్తాంశాలకు ఐదు ఉదాహరణలు ఇవ్వండి.
2. పై ప్రశ్న (1)దత్తాంశాలను ప్రాథమిక మరియు గౌణ దత్తాంశాలుగా వర్గీకరించండి.

14.3 దత్తాంశంను ప్రదర్శించుట :

దత్తాంశమును సేకరించిన అనంతరము విశ్లేషకుడు దత్తాంశంను విశ్లేషించి, దానిని అర్థవంతంగా, సమగ్రంగా ప్రదర్శించుట రెండవ ముఖ్య సోపానము. వివిధ సందర్భాలలో ప్రదర్శించుదగు దత్తాంశమును తెలుసుకుందాం.

ఉదాహరణ 1. గణిత పరీక్షలో 10 మంది విద్యార్థులు పొందిన మార్కులు క్రింది విధంగా ఇవ్వబడ్డాయి.

55 36 95 73 60 42 25 78 75 62

ఇట్లు రాశులన్నింటిని విడివిడిగా ప్రకటించు దత్తాంశమును "ముడి దత్తాంశము" (**raw data**) అంటారు. ఈ దత్తాంశమునుండి కనిష్ఠ విలువ గరిష్ఠ విలువ గల రాశులను సులభంగా గుర్తించవచ్చా? గరిష్ఠ విలువ మరియు కనిష్ఠ విలువలను గుర్తించడానికి మీకు కొంచెం సమయం పడుతుందా? లేదు. విలువలను ఆరోహణ లేదా అవరోహణ క్రమంలో వ్రాసినపుడు తక్కువ సమయం పడుతుంది. ఇప్పుడు మనం ఈ మార్కులను ఆరోహణ క్రమంలో వ్రాసిన

25 36 42 55 60 62 73 75 78 95

ఇప్పుడు మనం గరిష్ఠ మరియు కనిష్ఠ మార్కులను స్పష్టంగా చూడవచ్చు. గరిష్ఠ, కనిష్ఠ రాశుల భేదంను ఆ దత్తాంశం యొక్క వ్యాప్తి (**Range**) అంటాము. కాబట్టి, ఈ సందర్భంలో వ్యాప్తి = గరిష్ఠ విలువగల రాశి - కనిష్ఠ విలువగల రాశి 95 - 25 = 70.

దత్తాంశాలను ఆరోషణ, అవరోహణ క్రమంలో ప్రదర్శించడం వలన చాలా తక్కువ సమయం పడుతుంది. ఒక దత్తాంశంలోని రాశులు ఎక్కువగా ఉన్నప్పుడు ఆరోహణ, అవరోహణ క్రమంలో వ్రాయడం ఎక్కువ సమయం తీసుకొంటుంది. ఈ విశ్లేషణను సులభతరం చేయడానికి దత్తాంశంను మరొక విధంగా ప్రదర్శించవలసి ఉంటుంది. క్రింది ఉదాహరణను పరిశీలించండి.

©KTBS Not to be republished

ఉదాహరణ 2 : 9వ తరగతిలో 30 మంది విద్యార్థులు 100 మార్కులకు పొందిన మార్కులు ఈ విధంగా ఇవ్వబడ్డాయి.

10	20	36	92	95	40	50	56	60	70
92	88	80	70	72	70	36	40	36	40
92	40	50	50	56	60	70	60	60	88

నిర్దిష్ట మార్కులను పొందిన విద్యార్థుల సంఖ్య ఆ మార్కుల యొక్క పౌనః పుణ్యాన్ని **(frequency)** అవుతుంది అనుటను గమనించండి. ఇక్కడ 70 మార్కులు పొందిన 4 విద్యార్థులు ఉన్నారు. కావున 70 మార్కుల యొక్క పౌనఃపుణ్యం 4 దత్తాంశాలను సులభంగా అర్థం చేసుకోవడానికి మనం కింది విధంగా పట్టికలో రాయవచ్చు.

పట్టిక 14.1

మార్కులు (x)	విద్యార్థుల సంఖ్య (పౌనఃపుణ్యం) (f)
10	1
20	1
36	3
40	4
50	3
56	2
60	4
70	4
72	1
80	1
88	2
92	3
95	1
మొత్తం	**30**

పట్టిక 14.1 ని అవర్గీకృత పౌనఃపున్య విభజన పట్టిక లేదా భారత్వ పట్టిక అంటారు. మీరు ఈ పట్టికను తయారు చేయడానికి గణన చిహ్నాలను ఉపయోగించవచ్చు. తదుపరి ఉదాహరణను గమనించండి.

ఉదాహరణ 3 : 100 పాఠశాలలో ప్రతి ఒక్కరు 100 మొక్కలను వన మహోత్సవంలో నాటినారు. తరువాతి నెలలో ప్రతి పాఠశాలలో బ్రతికి ఉన్న మొక్కల సంఖ్యను నమోదించబడినది.

©KTBS Not to be republished

95	67	28	32	65	65	69	33	98	96
76	42	32	38	42	40	40	69	95	92
75	83	76	83	85	62	37	65	63	42
89	65	73	81	49	52	64	76	83	92
93	68	52	79	81	83	59	82	75	82
86	90	44	62	31	36	38	42	39	83
87	56	58	23	35	76	83	85	30	68
69	83	86	43	45	39	83	75	66	83
92	75	89	66	91	27	88	89	93	42
53	69	90	55	66	49	52	83	34	36

దత్తాంశంలోని రాశులను ఒక్కసారిగా ప్రదర్శించుటకు, సమగ్రంగా సులభంగా అర్థం చేసుకొనుటకు అనువుగా రాశులన్నింటిని తరగతులు, 20-29, 30-39,....90-99గా విభజిస్తాము. (ఎందుకంటే మన దత్తాంశాలు 23 నుండి 98 వరకు ఉన్నాయి) చిన్న చిన్న వర్గములు లేక సమూహాలను తరగతులు అంటారు. ఒక్కొక్క తరగతియొక్క పరమాణంను తరగతి పొడవు లేక తరగతి వెడల్పు అంటారు. ఉదాహరణకు 20-29 లో 20 ని దిగువ అవధని 29 ని ఎగువ అవధి అంటారు.

పై దత్తాంశాలకు పౌనఃపున్య వితరణా పట్టికను గణన చిహ్నాలను ఉపయోగించి తయారు చేయడాన్ని జ్ఞాపకం చేసుకోండి.

పట్టిక 14.2

బ్రతికి ఉన్న మొక్కల సంఖ్య (తరగతి అంతరం)(X)	గణన చిహ్నాలు	పాఠశాల సంఖ్య (పౌనః పుణ్యం) (f)
20–29	|||	3
30–39	𝍸 𝍸 ||||	14
40–49	𝍸 𝍸 ||	12
50–59	𝍸 |||	8
60–69	𝍸 𝍸 𝍸 |||	18
70–79	𝍸 𝍸	10
80–89	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 |||	23
90–99	𝍸 𝍸 ||	12
మొత్తం		100

©KTBS Not to be republished

ఈ విధమైన దత్తాంశంను సమగ్రంగా, సంక్షిప్తంగా ప్రదర్శించడం వల్ల అర్థం చేసుకోవడం ప్రముఖ లక్షణాలను గుర్తించడం సులభం. దత్తాంశంలోని రాశులను చిన్న చిన్న వర్గములుగా విభజించి పౌనః పున్యంలతో సూచించు పట్టికను వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభజన పట్టిక అంటారు. ఇక్కడ 8 + 18 + 10 + 23 + 12 = 71 పాఠశాలలో 50 శాతం లేక ఎక్కువ మొక్కలు బ్రతికి ఉన్నాయి అని సులభంగా గుర్తించవచ్చు.

పై పట్టికను గమనించినపుడు ఏ తరగతిలోను సంఖ్యలు పునరావృత్తం కాలేదు. ఏ దత్తాంశంలో అయిన ఎక్కువ తరగతి పొడవుతో తక్కువ తరగతులకు లేదా తక్కువ తరగతుల పొడవుతో ఎక్కువ తరగతులను ఏర్పాటు చేసుకోవచ్చును. ఉదా: తరగతి అంతరాన్ని 22-26, 27-31............ ఇలాకూడా తీసుకోవచ్చు. ఇక్కడ ఇలాంటిదే అను నిర్దిష్ట విధానం లేదు. అయితే తరగతి సంఖ్యలు పునరావృతం కారాదు అంతే.

ఉదాహరణ 4: ఈ క్రింది తరగతిలో 38 మంది విద్యార్థుల బరువుల పౌనః పుణ్య వితరణా పట్టిక ఇవ్వబడినది. దీనిని గమనించండి.

పట్టిక 14.3

తూకం (kg. లలో)	విద్యార్థుల సంఖ్య పౌనః పుణ్యం (f)
31 - 35	9
36 - 40	5
41 - 45	14
46 - 50	3
51 - 55	1
56 - 60	2
61 - 65	2
66 - 70	1
71 - 75	1
మొత్తం	$\Sigma fi =$ **38**

ఇప్పుడు బరువు 35.5kg మరియు 40.5kg గల ఇద్దరు కొత్త విద్యార్థులు తరగతిలో చేరితే వారిని ఏ తరగతి అంతరంలోకి చేర్చుతారు? వారిని 35 లేదా 40 దత్తాంశంలో చేర్చడానికి వీలులేదు. తరువాతి అంతరంలో చేర్చడానికి వీలులేదు. ఎందుకంటే ఇక్కడ రెండు క్రమ అంతరాలలో ఎగువ అవధి మరియు దిగువ అవధులకు సమానమయ్యేటట్టు వర్గీకరించాలి. దీనికోసం ఒక తరగతి ఎగువ అవధి మరియు దాని తరువాతి తరగతి దిగువ అవధి వ్యత్యాసాన్ని కనుగొనాలి తరువాత ఈ వ్యత్యాసపు అర్థంను ప్రతి తరగతి ఎగువ అవధులకు చేర్చాలి మరియు దిగువ అవధిలో తీసివేయాలి.

©KTBS Not to be republished

ఉదాహరణకు 31-35 మరియు 36-40 తరగతి అంతరాలను పరిగణించండి.

36 - 40 తరగతి అంతరపు దిగువ అవది = 36

31-35 తరగతి అంతరపు ఎగువ అవది = 35

వాటి వ్యత్యాసం 36-35=1

కావున వ్యత్యాసపు అర్ధ భాగం = $\frac{1}{2}$ = 0.5

$\therefore$ 31 – 35 తరగతి అంతరం నుండి ఏర్పరచు కొత్త తరగతి అంతరము $(31 - 0.5) - (35 + 0.5)$, అంటే 30.5 – 35.5 అవుతుంది.

అదేవిధంగా తరగతి అంతరం 36 – 40 అనునది $(36 - 0.5) - (40 + 0.5) = 35.5 - 40.5$గా మారుతుంది.

ఇదే విధంగా కొనసాగించబడుతూ ఉన్న తరగతి అంతరాలు
30.5 – 35.5, 35.5 – 40.5, 40.5 – 45.5, 45.5 – 50.5, 50.5 – 55.5, 55.5 – 60.5, 60.5 – 65.5, 65.5 – 70.5, 70.5 – 75.5.

ఇప్పుడు మనం కొత్తగా చేరిన విద్యార్థుల బరువులను కొత్త తరగతి అంతరాలలో చేర్చవచ్చు. అయితే మరొక సమస్య 35.5 అనే తరగతి అంతరం 30.5-35.5 మరియు 35.5-40.5 రెండింటిలో కనిపిస్తుంది. అయితే 35.5ను ఏ తరగతి అంతరంలో చేరుస్తారు.

రెండింటిలోను చేరిస్తే దానిని రెండు సార్లు లెక్కించినట్లు అవుతుంది. కావున అనుకూలమయ్యే విధంగా 35.5 ను తరగతి అంతరం 35.5 – 40.5 లో చేర్చాలి. తరగతి అంతరం 35.5 – 35.5 లో చేర్చాలి. 35.5 – 40.5 లో చేర్చకూడదు. కావున క్రొత్త బరువులైన 35.5kg లు 40.5kg లు 35.5 – 40.5 మరియు 40.5 – 45.5 ఈ తరగతి అంతరాలలో క్రమంగా చేర్చుతాం. పై అంశాలనుండి కొత్త పౌనఃపుణ్య వితరణ పట్టిక ఈ క్రింది విధంగా ఉంటుంది.

పట్టిక 14.4

బరువు (kg.లలో)	విద్యార్థుల సంఖ్య
30.5 – 35.5	9
35.5 – 40.5	6
40.5 – 45.5	15
45.5 – 50.5	3
50.5 – 55.5	1
55.5 – 60.5	2
60.5 – 65.5	2
65.5 – 70.5	1
70.5 – 75.5	1
మొత్తం	40

©KTBS Not to be republished

ఇప్పుడు మీరు కార్యాచరణం- 1 లో సేకరించిన దత్తాంశాన్ని పరిశీలించి వాటినుండి పౌనఃపుణ్య వితరణా పట్టికలను రచించండి.

కార్యాచరణం 2 : ముందు చేసినటువంటి నాలుగు గుంపుల నుండి వారి దత్తాంశాలను పౌనఃపుణ్య వితరణా పట్టికలను మార్చండి. తగిన తరగతులను అనుకూల తరగతి అంతరాలతో, దత్తాంశాల వ్యాప్తి మరియు దత్తాంశాల విధానాన్ని గుర్తించుకోండి.

అభ్యాసం 14.2

1. 8వ తరగతిలోని 30 మంది విద్యార్థుల రక్తం గ్రూపులు ఈ కింది విధంగా ఉన్నాయి.

   A, B, O, O, AB, O, A, O, B, A, O, B, A, O, O,

   A, AB, O, A, A, O, O, AB, B, A, O, B, A, B, O.

   ఈ దత్తాంశంలను పౌనఃపున్య విభజన పట్టికనుండి తయారు చేయండి. ఏ రక్తం గ్రూపు విద్యార్థులలో అతి సామాన్యమైన గ్రూపు ఏది? అరుదైన గ్రూపు ఏది?

2. 40 మంది ఇంజనీర్లు ఇంటి నుండి వాళ్ళు పనిచేయు స్థలానికి మధ్య దూరం (kmలలో) ఈ క్రింద ఇవ్వబడినది.

5	3	10	20	25	11	13	7	12	31
19	10	12	17	18	11	32	17	16	2
7	9	7	8	3	5	12	15	18	3
12	14	2	9	6	15	15	7	6	12

ఈ దత్తాంశాలనుండి మొదటి తరగతి అంతరం 0-5 (5చేర్చబడలేదు) ఉండునట్లు పరిమాణం 5 ఉండే ఒక తరగతి పౌనఃపుణ్య వితరణా పట్టికను తయారు చేయండి. ఈ విధంగా తయారు చేసిన పట్టికలో యే ముఖ్య లక్షణాలను గమనిస్తారు.

3. 30 రోజులు గల ఒక నెలలో ఒక నగరపు సాపేక్ష (% లలో) క్రింది విధంగా ఉంది.

98.1	98.6	99.2	90.3	86.5	95.3	92.9	96.3	94.2	95.1
89.2	92.3	97.1	93.5	92.7	95.1	97.2	93.3	95.2	97.3
96.2	92.1	84.9	90.2	95.7	98.3	97.3	96.1	92.1	89

   (i) 84-86, 86-88, తరగతి అంతరాలతో వర్గీకృత పౌనఃపుణ్య విభజనంను నిర్మించండి

   (ii) ఈ దత్తాంశాలు ఏ నెల / కాలానికి సంబంధించినది అని అనుకొంటున్నారు.

   (iii) ఈ దత్తాంశాల వ్యాప్తి ఎంత?

4. 50 మంది విద్యార్థుల ఎత్తుల కొలతలను (సమీప సెంటీమీటర్లలో తీసుకోవడమైనది) క్రింద ఇవ్వబడినది.

161	150	154	165	168	161	154	162	150	151
162	164	171	165	158	154	156	172	160	170
153	159	161	170	162	165	166	168	165	164
154	152	153	156	158	162	160	161	173	166
161	159	162	167	168	159	158	153	154	159

©KTBS Not to be republished

(i) 160-165, 165-170, తరగతి అంతరాలను తీసుకోని పై దత్తాంశాలకు పౌనఃపుణ్య వితరణా పట్టికను తయారు చేయండి.

(ii) ఈ పట్టిక నుండి విద్యార్థుల ఎత్తుల గురించి మీరు ఏ తీర్మానాన్ని తీసుకోవడానికి సాధ్యం.

5. గాలిలో గల SO_2 (సల్ఫర్ - డై - ఆక్సైడ్) ప్రమాణాన్ని ppmలలో (ppm = మిలియన్లలో ఒక భాగం) కనుగొనే అధ్యయనం జరపబడినది. 30 రోజులలో లభించిన దత్తాంశాలు ఈ విధంగా ఉన్నాయి.

0.03	0.08	0.08	0.09	0.04	0.17
0.16	0.05	0.02	0.06	0.18	0.20
0.11	0.08	0.12	0.13	0.22	0.07
0.08	0.01	0.10	0.06	0.09	0.18
0.11	0.07	0.05	0.07	0.01	0.04

(i) 0.00-0.04, 0.04-0.08 తరగతి అంతరాలను తీసుకొని ఒక పౌనఃపుణ్యవితరణా పట్టికను నిర్మించండి.

(ii) ఎన్ని రోజులలో SO_2 ప్రమాణం 0.11 ppm కంటే ఎక్కువగా ఉన్నది.

6. ఒక్కొక్క సారికి 3 నాణెముల చొప్పున 30 సార్లు ఎగురవేసి ఒక్కొక్క సారికి పడిన బొమ్మలను లెక్కించడం క్రింది విధంగా ఉన్నది.

0	1	2	2	1	2	3	1	3	0
1	3	1	1	2	2	0	1	2	1
3	0	0	1	1	2	3	2	2	0

ఈ పై దత్తాంశాలకు ఒక పౌనఃపుణ్య వితరణా పట్టిక తయారు చేయండి.

7. π విలువను 50 దశాంశ స్థానాలకు క్రింద ఇవ్వబడినది.

3.14159265358979323846264338327950288419716939937510

(i) దశాంశ బిందువు తర్వాత 0-9 వరకు గల అంకెలకు ఒక పౌనః పుణ్య పట్టికను తయారు చేయండి.

(ii) ఎక్కువ పౌనఃపుణ్య మరియు తక్కువ పౌనఃపుణ్యం గల అంకె ఏది?

8. మునుపటి వారంలో 30 మంది విద్యార్థులు ఎన్ని గంటలు TV వీక్షణ చేశారు అని ప్రశ్నించడమైనది ఫలితాంశం క్రింది విధంగా ఉన్నది.

1	6	2	3	5	12	5	8	4	8
10	3	4	12	2	8	15	1	17	6
3	2	8	5	9	6	8	7	14	12

(i) 5 – 10 తరగతి అంతరం ఉండునట్లు, తరగతి పరిమాణం 5 ఉండునట్లు పై దత్తాంశాలకు ఒక పౌనఃపున్య వితరణా పట్టిక నిర్మించండి.

(ii) ఎంత మంది విద్యార్థులు వారానికి 15 లేదా ఎక్కువ గంటలు TV వీక్షించారు.

© KTBS Not to be republished

9. ఒక సంస్థవారు తయారుచేసిన కారు బ్యాటరీలలో 40 బ్యాటరీల జీవిత కాలం (సంవత్సరాలలో) కింది విధంగా నమోదు చేస్తారు.

2.6	3.0	3.7	3.2	2.2	4.1	3.5	4.5
3.5	2.3	3.2	3.4	3.8	3.2	4.6	3.7
2.5	4.4	3.4	3.3	2.9	3.0	4.3	2.8
3.5	3.2	3.9	3.2	3.2	3.1	3.7	3.4
4.6	3.8	3.2	2.6	3.5	4.2	2.9	3.6

పై దత్తాంశంలకు తరగతులలో పౌనఃపుణ్య విభజనం తయారు చేయండి తరగతి అంతరం 0.5 గా తీసుకొని 2 – 2.5 గతితో ప్రారంభించండి.

14.4 దత్తాంశాలను గ్రాఫ్‌లో ప్రాతినిధ్యం చేయుట

దత్తాంశాలను పట్టికల ద్వారా ప్రాతినిధ్యం చేయుటను ఇదివరకే చర్చించాము. ఇపుడు గ్రాఫ్ ద్వారా దత్తాంశాలను ప్రాతినిధ్యం చేయుట గురించి గమనిద్దాం. వేయి, పదాలకంటే ఒక చిత్రం ఉత్తమం అని మనకు తెలుసు. ప్రతి దత్తాంశాల మధ్య పోలికను గ్రాఫ్ ద్వారా అత్యుత్తమంగా చూపవచ్చు. ఇలాంటి ప్రదర్శన నిజ దత్తాంశాలను అర్థం చేసుకోవడం కంటే సులభం. ఇప్పుడు మనం క్రింది దత్తాంశాలను ప్రాతినిధ్యం చేయు గ్రాఫ్‌ల గురించి అధ్యయనం చేద్దాం.

(A) స్తంభ నక్ష (Bar graphs) దిమ్మ చిత్రాలు

(B) హిస్టోగ్రాం (Histogram) ఒకే వెడల్పు మరియు విభిన్న వెడల్పులు కలిగిన.

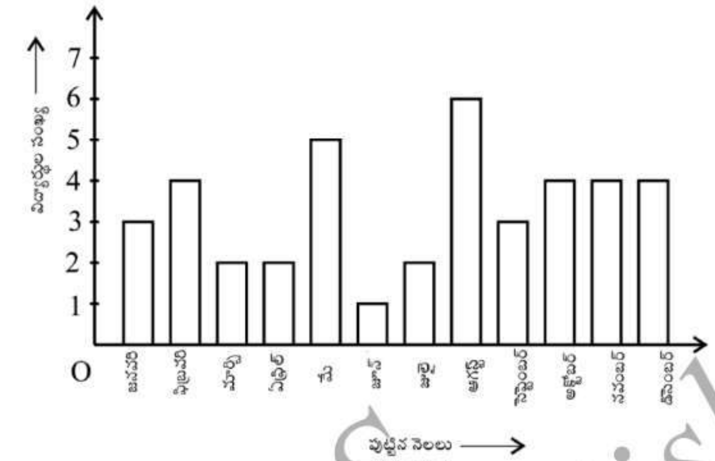
(C) (Frequency Polygons) ఆవృత

(A) (Bar graphs) సోపాన రేఖా చిత్రము (దిమ్మ చిత్రము)

మునుపటి తరగతులలో మీరు ఇది వరకే దిమ్మచిత్రాల గురించి అభ్యాసం మరియు నిర్మాణాలు చేశారు. ఇక్కడ వాటి గురించి ఎక్కువ క్రమబద్ధమైన చర్చ చేద్దాం. దిమ్మచిత్రం అంటే దత్తాంశాలను చిత్రాల ద్వారా చూపడం అని జ్ఞాపకం చేసుకోవడం. సామాన్యంగా దిమ్మ చిత్రాలను సమపరిమాణంలో మరియు రెండు స్థంభాల మధ్య సమాన అంతరం ఉండునట్లు ఒక X - అక్షంపై చరరాశులను చిత్రీకరించాలి. చరాంశాల విలువలను మరొక Y - అక్షంపై గుర్తించాలి. గ్రాఫ్ ఎత్తు చరరాశుల విలువలపై ఆధారపడి ఉంటుంది.

ఉదాహరణ 5: 9వ తరగతిలో ఒక సెక్షన్ విభాగపు 40 మంది విద్యార్థులు పుట్టిన నెలలను అడిగి తెలుసుకొని దత్తాంశాల నుండి క్రింది గ్రాఫ్‌ను నిర్మించారు.

©KTBS Not to be republished



చిత్రం 14.1

పై దిమ్మ చిత్రాన్ని గమనించి, క్రింది ప్రశ్నలకు జవాబులు ఇవ్వండి.

(i) నవంబర్ నెలలో ఎంత మంది విద్యార్థులు పుట్టారు?

(ii) ఏ నెలలో ఎక్కువ సంఖ్యలో విద్యార్థులు పుట్టారు?

సాధన : ఇక్కడ పుట్టిన నెలలు చరరాశులు (variable) మరియు చరరాశి యొక్క విలువ విద్యార్థుల సంఖ్య అని గమనించండి.

(i) నవంబర్ నెలలో 4 విద్యార్థులు పుట్టినారు.

(ii) ఆగస్టు నెలలో ఎక్కువ సంఖ్యలో విదార్థులు పుట్టినారు.

ఈ క్రింది ఉదాహరణ ద్వారా దిమ్మ చిత్ర నిర్మాణాన్ని గుర్తు చేసుకొందాం.

ఉదాహరణ 6 : ఒక కుటుంబం యొక్క నెలసరి ఆదాయం ₹ 20,000 క్రింది విధంగా వివిధ విషయాలకు నెలలో చేయవలసిన ఖర్చులకు ప్రణాళికను తయారు చేశారు.

పట్టిక 14.5

విషయాలు (Heads)	**ఖర్చు (వెయ్యి. రూ. లలో)**
కిరాణా వస్తువులు	4
బాడుగ	5
పిల్లల విద్యాభ్యాసం	5
ఔషధాలు	2
ఇందనం	2
వినోదం	1
ఇతర	1

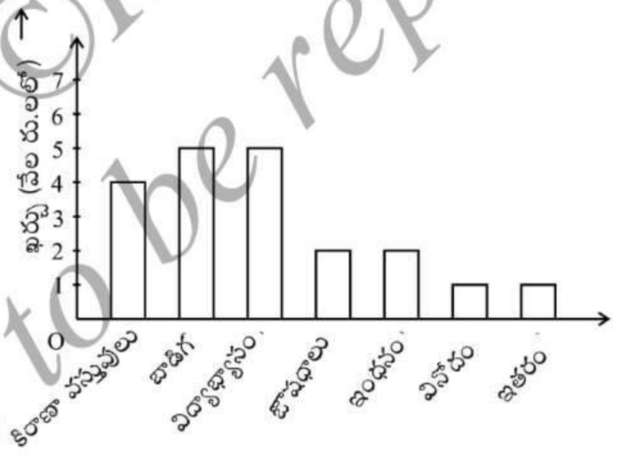
పై దత్తాంశాలకు ఒక దిమ్మ చిత్రాన్ని నిర్మించండి.

©KTBS Not to be republished

సాధన : ఈ క్రింది దశలనుండి పై దత్తాంశాలకు దిమ్మ చిత్రం నిర్మించవచ్చు. రెండవ వరుసలో మూల ప్రమాణం వెయ్యి రూపాయలలో అనుటను గమనించండి కిరాణా వస్తువుల ముందు 4 అంటే ₹ 4000.

1. విషయాలను (చరరాశులు) x - అక్షంపై (క్షితిజ సమాంతర) సరైన ప్రమాణాన్ని ఎన్నుకొని సూచిస్తాము. ఎందుకంటే ఇక్కడ స్థంభం వెడల్పు ముఖ్యం కాదు. అయితే స్పష్టత కోసం మనము ఒకే వెడల్పు గల అన్ని స్థంభాలను మరియు స్థంభాల మధ్య సమాన అంతరాన్ని తీసుకొంటాము. ప్రతి విషయాన్ని '1' యూనిట్ అని సూచించాలి.
2. ఖర్చును y - అక్షంపై (భూలంభాక్షం) గుర్తించబడుతుంది. గరిష్ట ఖర్చు ₹ 5000 ఉన్నందువల్ల ప్రమాణం 1 యూనిట్= ₹ 1000 అని తీసుకోబడినది.
3. మొదటి విషయం అంటే కిరాణ వస్తువులు దీని వెడల్పు 1 యూనిట్ ఎత్తు 4 యూనిట్లు ఉండునట్లు స్థంభం ద్వారా ప్రాతినిధ్యం అయినది.
4. ఇదే విధంగా మిగిలిన విషయాలను క్రమంగా స్థంభాల మధ్య 1 - యూనిట్ అంతరం ఉండునట్లు ప్రతినిధించబడినది.

దిమ్మ చిత్రంను (చిత్రం 14.2) లో నిర్మించబడినది.



చిత్రం 14.2

ఇక్కడ out look నుండి దత్తాంశాల లక్షణాలను సులబంగా పోల్చవచ్చు ఉదా: పిల్లల విద్యాభ్యాసానికి అయిన ఖర్చు, ఔషదాలకు అయిన ఖర్చుకంటే రెండింతలు ఎక్కువ కావున కొన్ని విధానాలలో పట్టిక రూపం కంటే దిమ్మ చిత్రంలో దత్తాంశాలను ప్రతినిదించటం ఉత్తమమనిపిస్తుంది.

©KTBS Not to be republished

కార్యాచరణం 3 : కార్యాచరణం-1లో తీసుకున్న దత్తాంశాలను తగిన దిమ్మ చిత్రంలో ప్రతినిదించమని అదే గుంపు విద్యార్థులకు సూచించాలి.

ఇప్పుడు మీరు నిరంతరం వర్గ వ్యాప్తికలిగిన పౌనః పుణ్య వితరణ పట్టికను గ్రాఫ్‌లో ప్రతినిదించుట గురించి చూద్దాం.

(B) హిస్టోగ్రామ్ (Histo gram)

ఈ విధమయిన ప్రదర్శన దిమ్మ చిత్రం లాగే వున్నను ఇవి నిరంతర తరగతి అంతరాలలో ఉపయోగించబడుతుంది. ఉదాహరణకు 14.6 లో పౌనః పుణ్య వితరణా పట్టికను గమనించండి. తరగతిలోని 36 మంది పిల్లల బరువులను ఇచ్చారు.

పట్టిక 14.6

బరువు (kg. లలో)	విద్యార్థుల సంఖ్య
30.5 – 35.5	9
35.5 – 40.5	6
40.5 – 45.5	15
45.5 – 50.5	3
50.5 – 55.5	1
55.5 – 60.5	2
ఒట్టు	**36**

పై దత్తాంశాలను గ్రాఫ్‌లో ఈ విధంగా ప్రతినిదిస్తాం.

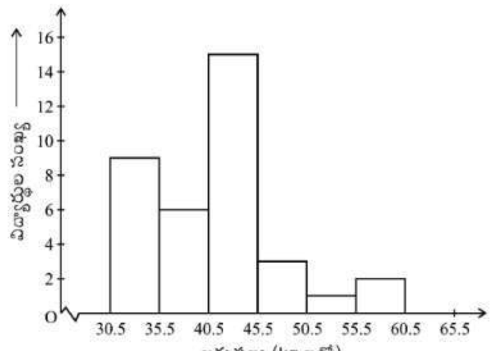
(i) సరైన ప్రమాణంలో బరువులను x - అక్షం పై గుర్తిస్తాము. స్కేలు (ప్రమాణం) 1cm = 5kg అని తెలుసుకోవచ్చు. మొదట తరగతి అంతరం 30.5 నుండి ప్రారంభం అవుతుంది. 0 నుండి కాదు. కావున అక్షంలో ఒక చిక్కుముడి లేక విరామం (**kink / break**)ను గుర్తించండి. సరైన యూనిట్‌లతో గ్రాఫ్‌ను రచించండి.

(ii) విద్యార్థుల సంఖ్య (పౌనఃపుణ్యం)ను y - అక్షం పై గుర్తిస్తాము. గరిష్ట పౌనఃపుణ్యము 15 అయినందు వల్ల, ఈ గరిష్ఠ పౌనఃపుణ్యం గుర్తించడానికి సరైన ప్రమాణాన్ని ఎంచుకోవాలి.

(iii) ఇప్పుడు వెడల్పు తరగతి అంతరము మరియు పొడవు తరగతి అంతరపు పౌనఃపుణ్యము ఉండునట్లు దీర్ఘచతురస్రాకారస్థంబాలను రచిస్తాము. ఉదాహరణకు 30.5-35.5 తరగతి అంతరానికి 1cm వెడల్పు మరియు 4.5cm పొడవు గల ధీర్ఘచతురస్రాన్ని రచిస్తాము.

(iv) ఈ విధంగా చిత్రం 14.3లో చూపించినటువంటి గ్రాఫ్ మనకు దొరుకుతుంది.

©KTBS Not to be republished



చిత్రం 14.3

అనుక్రమ దీర్ఘచతుస్రాల మధ్య అంతరం లేనందువలన ఈ గ్రాఫ్ ఒక ఘనాకృతిలాగ కనపడుతుంది. దీనిని హిస్టోగ్రామ్ లేదా కమ్మిరేఖా చిత్రం అంటారు. ఇది నిరంతర తరగతి అంతరాలు గల వర్గీకృత పౌనః పుణ్య వితరణను గ్రాఫ్‌లో గుర్తించడమయినది. ఇక్కడ దీర్ఘ చతురస్రపు వెడల్పు రచనలో ముఖ్యం అవుతుంది. అయితే దిమ్మ చిత్రంలో స్థంబముయొక్క వెడల్పు ముఖ్యం కాదు.

వాస్తవంగా వుంటాయి. అయినను దీర్ఘచతురస్రాల వెడల్పు సమానంగా వున్నందువల్ల వాటి పొడవులు పౌనః పుణ్యాలకు అనుగుణంగా వుంటాయి. అందువలన పొడవులను దశ (iii) లో చెప్పినట్టు నిర్మిస్తాము. ఇప్పుడు పై విధంగా లేని మరొక సంధర్భాన్ని గమనిద్దాం.

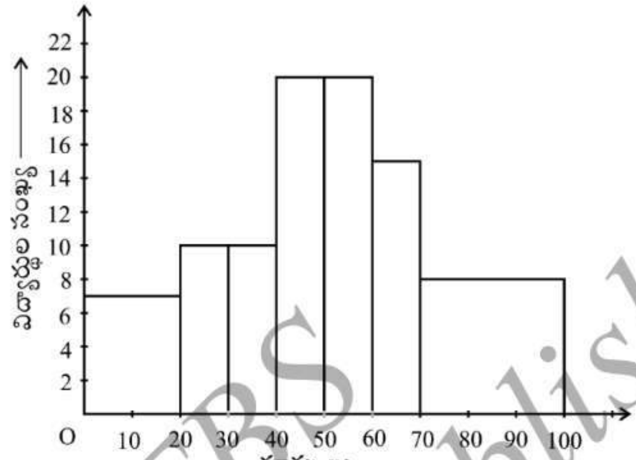
ఉదాహరణం 7: ఒక ఉపాధ్యాయుడు తన తరగతి 2 విభాగాల విద్యార్థులకు గణిత పరీక్షయొక్క నిర్వహణను విశ్లేషించాలనుకున్నారు. విద్యార్తుల నిర్వహణను చూసినప్పుడు కొందరు 20 మార్కులకంటే తక్కువ మరియు 70 మార్కులను లేదా ఎక్కువ మార్కులను పొందారని తెలిసింది. అందువలన వారు వివిధ పరిమాణాల గుంపులుగా 0-20, 20-30, ... 60-70, 70-100 ఈ విధంగా క్రమీకరించాలని నిర్ధారించి ఒక పట్టికను తయారు చేశారు.

పట్టిక 14.7

మార్కులు	విద్యార్థుల సంఖ్య
0–20	7
20–30	10
30–40	10
40–50	20
50–60	20
60–70	15
70→ ఎక్కువ	8
మొత్తం	**90**

© KTBS Not to be republished

పై వితరణకు ఒక విద్యార్థి హిస్టోగ్రామ్ తయారు చేశాడు. దీనిని చిత్రం 14.4 లో చూపారు.



చిత్రం 14.4

ఇక్కడ గ్రాఫ్‌లో గుర్తించినవాటిని జాగ్రత్తగా పరీక్షించండి. ఇది దత్తాంశము యొక్క సరైన ప్రదర్శనమా? కాదు. ఈ గ్రాఫ్‌లోనున్న నమూనా తప్పు కల్పనను ఇస్తుంది. మనం ఇదివరకే తెలిపినట్లు హిస్టోగ్రామ్‌లో దీర్ఘ చతురస్రాల వైశాల్యము పౌనః పుణ్యాలకు అనుగుణంగా వుంటుంది. ఈ సమస్య ఇంతకు ముందు లేదు. ఎందుకంటే దీర్ఘచతురస్రాల వెడల్పులు సమానంగా వుండేవి. అయితే ఇక్కడ దీర్ఘ చతురస్రాల వెడల్పులలో వ్యత్యాసం కలదు. కావునపై హిస్టోగ్రామ్ సరైన కల్పన ఇవ్వదు. ఉదాహరణ ఇది. 60-70 తరగతి అంతరంలో పౌనఃపుణ్యం కంటే 70-100 తరగతి అంతరపు పౌనఃపుణ్యాలకు అనుగుణంగా వుండాలి. మనం దీర్ఘచతురస్రాల పొడవులలో నిర్దిష్ట మార్పులను చెయ్యటం అవసరం.

అనుసరించవలసిన దశలను క్రింద ఇవ్వబడినవి.

1. కనిష్ట పరిమాణం గల తరగతి అంతరాన్ని ఎంచుకోండి. పై ఉదాహరణలలో తరగతి అంతరపు కనిష్ట పరిమాణము 10.

2. తరగతి పరిమాణం 10కి అనుగుణంగా దీర్ఘచతురస్రాల పొడవును మార్చాలి. పై ఉదాహరణలో తరగతి పరిమాణం 20 అయినప్పుడు దీర్ఘచతురస్రపు పొడవు 7 అయ్యింది. కావున తరగతి అంతరపు పరిమాణం 10 అయినప్పుడు దీర్ఘచతురస్రపు పొడవు $\frac{7}{20} \times 10 = 3.5$ కావాలి.

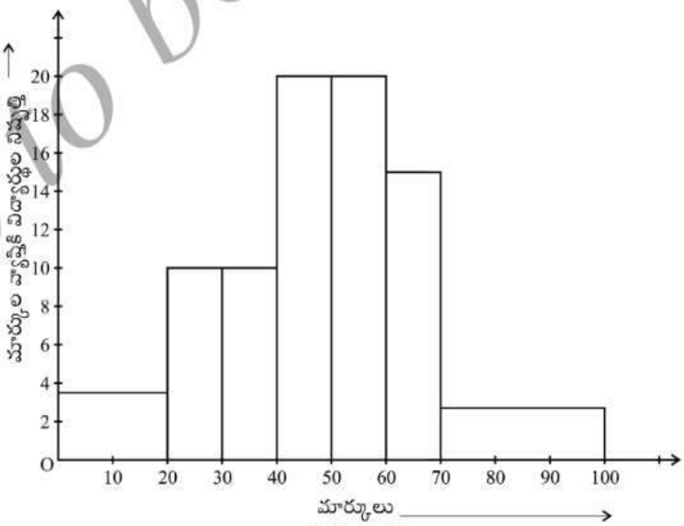
ఇదే విధంగా కొనసాగినప్పుడు క్రింది పట్టికను పొందుతాము.

© KTBS Not to be republished

పట్టిక 14.8

మార్కులు	పౌనః పుణ్యం	తరగతి అంతరపు వెడల్పు	దీర్ఘచతురస్రపు పొడవు
0–20	7	20	$\frac{7}{20}\times 10 = 3.5$
20–30	10	10	$\frac{10}{10}\times 10 = 10$
30–40	10	10	$\frac{10}{10}\times 10 = 10$
40–50	20	10	$\frac{20}{10}\times 10 = 20$
50–60	20	10	$\frac{20}{10}\times 10 = 20$
60–70	15	10	$\frac{15}{10}\times 10 = 15$
70–100	8	30	$\frac{8}{30}\times 10 = 2.67$

మనం పది మార్కుల అంతరంలో పొడవును లెక్కించనందువల్ల ఈ పొడవులను పది మార్కుల అంతరానికి, విద్యార్థుల నిష్పత్తి అనవచ్చు. కావున మారుతున్న వెడల్పు యొక్క సరైన హిస్టోగ్రామ్‌ను చిత్రం 14.5 లో ఇవ్వబడినది.



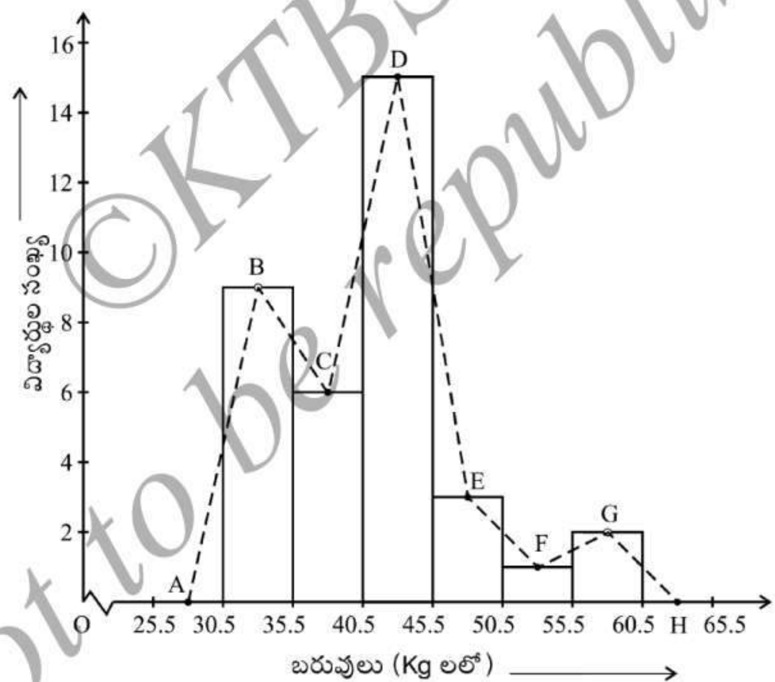
చిత్రం 14.5

©KTBS Not to be republished

(C) పౌనః పుణ్యపు బహుభుజి (Frequency Polygon)

పరిమాణాత్మక దత్తాంశాలను మరియు వాటి పౌనఃపుణ్యాలను మరొక విధంగా గ్రాఫ్ విధానంలో గుర్తించవచ్చు. ఇది ఒక బహుభుజి చిత్రం దీన్ని అర్థం చేసుకోవడానికి చిత్రం 14.3 యొక్క హిస్టోగ్రామ్‌ను గమనించండి. హిస్టోగ్రామ్ యొక్క దీర్ఘచతురస్రాల పై భాగపు మధ్య బిందువులను క్రమంగా రేఖాఖండాలచే కలుపుదాం. ఈ మధ్య బిందువులను A,B,C,D,E,F మరియు G బిందువులుగా గుర్తించండి. వాటిని రేఖా ఖండాలతో చేర్చినప్పుడు B,C,D,E,F,G, ఆకృతి ఏర్పడుతుంది. (చిత్రం 14.6).

తరగతి అంతరం 35.5-60.5, తరువాత 0 పౌనఃపుణ్యము గల తరగతి అంతరం ఉందని అనుకొని వాటి మధ్య బిందువులను. క్రమంగా A మరియు H అని గుర్తించండి. ఆ బహుభుజాకృతిని పూర్తి చెయ్యండి. చిత్రం 14.3 యొక్క దత్తాంశాలను అనుగుణంగా పౌనఃపుణ్య బహుభుజముల ABCDEFGH అవుతుంది. దీనిని చిత్రం 14.6 లో చూపారు.



చిత్రం 14.6

కనిష్ట తరగతి అంతరము ముందు మరియు గరిష్ట తరగతి అంతరము తరువాత ఏ తరగతి అంతరాలు లేకున్నను మనం సున్న పౌనఃపుణ్యం యొక్క రెండు తరగతి అంతరాలను చేర్చుకుంటాము. దీనివల్ల పౌనఃపుణ్య బహుభుజము వైశాల్యము హిస్టోగ్రాం వైశాల్యమునకు సమానం అవుతుంది. ఇది ఎందుకు? ఎలా? (సూచన : సర్వసమాన త్రిభుజాల లక్షణాలను ఉపయోగించండి).

©KTBS Not to be republished

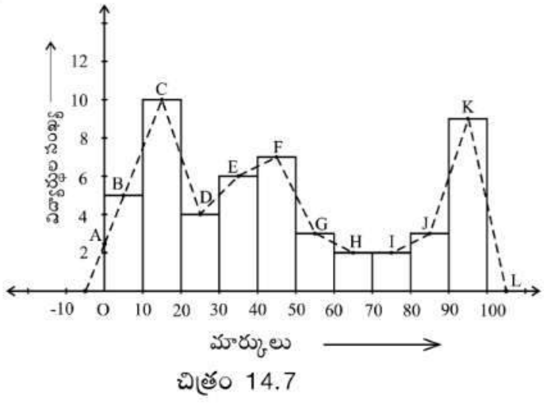
ఉదాహరణ 8: ఒక తరగతిలోని యాభై ఒక్క మంది విద్యార్థులు 100కి పొందిన మార్కులను పట్టిక 14.9లో ఇచ్చినదాన్ని గమనించండి.

పట్టిక 14.9

మార్కులు	విద్యార్థుల సంఖ్య
0–10	5
10–20	10
20–30	4
30–40	6
40–50	7
50–60	3
60–70	2
70–80	2
80–90	3
90–100	9
మొత్తం	**51**

ఈ పౌనఃపుణ్య వితరణ పట్టికకనుగుణంగా పౌనఃపుణ్య బహుభుజాన్ని రచించండి.

సాధన : మొదట దత్తాంశాలకు హిస్టోగ్రామ్ ను నిర్మించండి. ప్రతి దీర్ఘచతురస్రపు చివర మధ్య బిందువులను క్రమంగా B, C, D, E, F, G, H, I, J, K అను గుర్తించండి. మొదటి తరగతి అంతరం 0-10, కావున x అక్షాన్ని ఋణాత్మక దిశకు పొడిగించండి. కాల్పనిక తరగతి అంతరముల (-10) -0 యొక్క మధ్య బిందువును గుర్తించాలి. ఈ సున్న పౌనఃపుణ్యముయొక్క వర్గాంతర మధ్య బిందువును దీర్ఘచతురస్రాల మొదటి మధ్యబిందువు. అంటే 'B' కి చేర్చాలి. Y అక్షాన్ని ఖండించు బిందువును 'A' అని గుర్తించాలి, దత్తాంశాల చివరి తరగతి అంతరానికి కంటే మొదటి తరగతి అంతరం యొక్క మధ్య బిందువు 'L' కావాలి. తరువాత OABCDEFGHIJKL పౌనః పున్య బహుభుజి అవుతుంది. దీనిని చిత్రం 14.7 లో చూపబడింది.



చిత్రం 14.7

©KTBS Not to be republished

హిస్టోగ్రామ్ నిర్మించకుండానే పౌనఃపుణ్య భుజాకృతిని నేరుగా నిర్మించవచ్చు. దీనికి మనకు దత్తాంశాల తరగతి అంతరపు మధ్య బిందువుల అవసరం వుంది. ఈ తరగతి అంతరాల మధ్య బిందువులను వర్గ - అంక అంటారు.

వర్గ అంకాలను కనుగొనడానికి ఎగువ అవధి మరియు దిగువ అవధుల మొత్తాన్ని రెండు చే భాగించాలి. $= \frac{\text{ఎగువ అవది + దిగువ అవధుల}}{2}$

ఇప్పుడు ఒక ఉదాహరణను తీసుకుందాం.

ఉదాహరణ 9: ఒక నగరంలో వారానికి ఒకసారి నడిపే పరిశీలనా అధ్యయనంలో లభించిన జీవన వ్యయాల **(cost of living)** సూచ్యాంకం **(Index)** ఈ క్రింది విధంగా వున్నాయి.

పట్టిక 14.10

జీవన వ్యయపు ఇండెక్స్	వారాల సంఖ్య
140–150	5
150–160	10
160–170	20
170–180	9
180–190	6
190–200	2
మొత్తం	**52**

పై దత్తాంశాలకు ఒక పౌనఃపున్య బహుభుజిని (histogram)నిర్మించండి.

సాధన : హిస్టోగ్రాం నిర్మించకుండా పౌనఃపున్య బహుభుజాన్ని నిర్మించవలసినందువలన దత్త తరగతి అంతరాలకు అంటే 140-150, 150-160,............... యొక్క వర్గ అంక (మధ్య బిందువు)లను కనుగొనాలి.

తరగతి అంతరం 140-150 యొక్క ఎగువ అవధి = 150 మరియు దిగువ అవధి = 140.

$\therefore$ వర్గ అంక (మధ్య బిందువు) = $\frac{150+140}{2} = \frac{290}{2} = 145.$

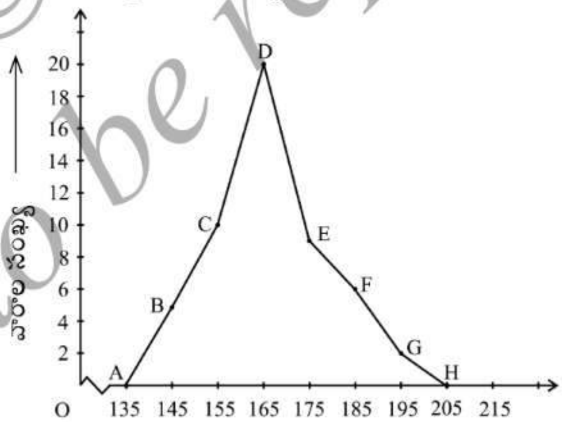
ఇదే విధంగా కొనసాగిస్తూ అన్ని తరగతి అంతరాలకు వర్గ-అంకం(మధ్య బిందువు) లను కనుగొనవచ్చు. దీని నుండి లభించిన కొత్త పట్టికను క్రింద చూపడమయినది.

©KTBS Not to be republished

పట్టిక 14.11

తరగతి అంతరం	వర్గ అంకం (మధ్య బిందువులు)	పౌనః పుణ్యం
140–150	145	5
150–160	155	10
160–170	165	20
170–180	175	9
180–190	185	6
190–200	195	2
మొత్తం		52

ఇప్పుడు వర్గ - అంక (మధ్యబిందువులను) x - అక్షరంపై మరియు పౌనః పుణ్యాలను Y- అక్షం పై గుర్తించండి. పౌనఃపున్య బహుభుజమును గీయవచ్చు దీనికోసం B (145, 5), C (155,10), D (165,20), E (175,9), F (185,6) మరియు G (195,2) బిందువులను రేఖా ఖండాలచే చేర్చాలి. తరగతి అంతరం 140-150 మొదటి సున్నా పౌనః పుణ్యపు తరగతి అంతరము 130-140 యొక్క వర్గ అంక (మధ్య బిందువును) కనుకొని గుర్తించడం మరవకూడదు. అది A(135,0) కావాలి. అదేవిధంగా బిందువు H (205,0) ను బిందువు G(195,2) తర్వాత గుర్తించాలి. ఇప్పుడు లభించు పౌనఃపుణ్య బహుభుజము ABCDEFGH అవుతుంది (చిత్రం 14.8 ని చూడండి.)



చిత్రం 14.8

పౌనఃపుణ్య బహుభుజంలో దత్తాంశాలు నిరంతరంగా మరియు ఎక్కువ ప్రమాణంలో ఉపయోగిస్తారు. ఒకే లక్షణం కలిగిన రెండు వేర్వేరు దత్తాంశాల గణనలున్నప్పుడు పోల్చడానికి ఇది సహాయపడుతుంది. ఉదాహరణకు, ఒకే తరగతి రెండు విభాగాల నిర్వహణను పోల్చడం.

© KTBS Not to be republished

అభ్యాసం 14.3

1. ఒక సంస్థ ప్రపంచ వ్యాప్తంగా 15 నుండి 44 సంవత్సరాల వయోమానపు మహిళల అనారోగ్యానికి కారణం మరియు మరణాలకు సంబంధించిన జరిపిన సమీక్షలో కనబడిన గణాంకాల వివరాలు (%లో) క్రిందివిధంగా ఉన్నాయి.

క్ర.సం.	కారణాలు	మహిళల మరణపు ప్రమాణం (%)
1	సంతానోత్పత్తి ఆరోగ్య స్థితి	31.8
2	నరాలు మానసిక స్థితి	25.4
3	గాయాలు	12.4
4	హృదయ సంబంధ రోగాలు	4.3
5	శ్వాసక్రియ స్థితి	4.1
6	ఇతర కారణాలు	22.0

(i) పై సమాచారాలను గ్రాఫ్ ద్వారా గుర్తించండి.

(ii) ప్రపంచవ్యాప్తంగా మహిళలలు మరియు మరణానికి ఏ స్థితి-గతి ముఖ్యకారణం.

(iii) (ii) లో ఇచ్చిన కారణాలు ముఖ్యమనిపించడానికి ఏ రెండు ముఖ్య అంశాలు పాత్ర ముఖ్యమైనదని ఉపాధ్యాయులు సహాయంతో కనుగొనడానికి ప్రయత్నించండి.

2. భారతీయ సమాజపు వివిధ విభాగాలలో 1000 మంది అబ్బాయిలకు అనుగుణంగా వున్న అమ్మాయి సంఖ్యను దశాంశను సమీపంగా ఈ క్రింది దత్తాంశాలలో ఇవ్వబడినది.

విభాగం	1000 మంది అబ్బాయిలకు అనుగుణంగా అమ్మాయిల సంఖ్య
షెడ్యూల్డ్ కులాలు (SC)	940
షెడ్యూల్డ్ తెగలు (ST)	970
SC/ST కాకుండా	920
వెనుకబడిన జిల్లాలు	950
వెనుకబడిన జిల్లాలు	920
గ్రామీణ	930
నగరాలు	910

© KTBS Not to be republished

(i) పై సమాచారంను దిమ్మ చిత్రంలో గుర్తించండి.

(ii) ఈ గ్రాఫ్ నుండి ఏ తీర్మానానికి సాధ్యమో తరగతిలో చర్చించండి.

3. ఒక శాసన సభ ఎన్నికల వోటింగ్ ఫలితాలలో రాజకీయ పార్టీలు గెలిచిన స్థానాల సంఖ్యలను కింద ఇవ్వబడినది.

రాజకీయ పార్టీలు	A	B	C	D	E	F
గెలిచిన స్థానాల సంఖ్య	75	55	37	29	10	37

(i) వోటింగ్ ఫలితాంశాలను సూచించే ఒక దిమ్మ చిత్రాన్ని నిర్మించండి.

(ii) ఏ రాజకీయ పార్టీ ఎక్కువ స్థానాలను గెలిచింది?

4. ఒక మొక్క యొక్క 40 ఆకుల పొడవు 1mm కు సరిగా కొలిచి పొందిన దత్తాంశాలను ఈ క్రింది పట్టికలో గుర్తించారు?

పొడవు (mm లలో)	ఆకుల సంఖ్య
118 -126	3
127 - 135	5
136 - 144	9
145 - 153	12
154 - 162	5
163 - 171	4
172 - 180	2

(i) ఇచ్చిన దత్తాంశాలను ఒక హిస్టోగ్రాంలలో గుర్తించండి. (సూచన: తరగతి అంతరాలు నిరంతరంగా ఉండునట్లు రాయండి.)

(ii) ఇవే దత్తాంశాలను గుర్తించే సరైన గ్రాఫ్ వేరేవుందా?

(iii) ఎక్కువ ఆకులు 153mm పొడవు వున్నాయని తీర్మానించవచ్చా? ఎందుకు?

5. క్రింది పట్టిక 400 నియాన్ బల్బుల మన్నిక (life time) ను ఇస్తుంది.

మన్నిక గం.లలో	బల్బుల సంఖ్య
300 - 400	14
400 - 500	56
500 - 600	60
600 - 700	86
700 - 800	74
800 - 900	62
900 - 1000	48

©KTBS Not to be republished

(i) హిస్టోగ్రాం సహాయంతో ఇచ్చిన సమాచారాన్ని గుర్తించండి.

(ii) 700 గంటలకంటే ఎక్కువ మన్నిక వచ్చే బల్బులు ఎన్ని?

6. విద్యార్థులు వారు పొందిన మార్కుల ఆధారంతో వారిని రెండు విభాగాలకు పంపిణీ చేసినదాన్ని ఈ క్రింది పట్టికలో ఇవ్వబడినది.

విభాగం – A		విభాగం – B	
మార్కులు	పౌనఃపుణ్యం	మార్కులు	పౌనఃపుణ్యం
0 - 10	3	0 - 10	5
10 - 20	9	10 - 20	19
20 - 30	17	20 - 30	15
30 - 40	12	30 - 40	10
40 - 50	9	40 - 50	1

రెండు విభాగాల విద్యార్థుల మార్కులు ఒకే గ్రాఫ్‌లో పౌనఃపున్య భుజాలలో గుర్తించండి. రెండు పౌనఃపుణ్య బహుభుజాలనుండి రెండు విభాగాల నిర్వహణను పోల్చండి.

7. ఒక క్రికెట్ మ్యాచ్‌లో మొదటి 60 బంతులలో A మరియు B జట్లు సంపాదించిన పరుగులు కింది పట్టికలో ఇచ్చారు.

బంతుల సంఖ్య	జట్టు A	జట్టు B
1 - 6	2	5
7 - 12	1	6
13 - 18	8	2
19 - 24	9	10
25 - 30	4	5
31 - 36	5	6
37 - 42	6	3
43 - 48	10	4
49 - 54	6	8
55 - 60	2	10

రెండు జట్ల దత్తాంశాలను ఒకే గ్రాఫ్ లో పౌనఃపున్య బహుభుజాల నుండి ప్రతినిధించండి.

(**సూచన** : తరగతి అంతరాలను మొదట నిరంతరగా ఉండాలి)

©KTBS Not to be republished

8. ఒక యాదృచ్ఛిక (random) సర్వేలో పార్కులో ఆడే వివిధ వయస్సు పిల్లల సంఖ్య కింది విధంగా ఉన్నది.

వయస్సు సం. లలో	పిల్లల సంఖ్య
1 - 2	5
2 - 3	3
3 - 5	6
5 - 7	12
7 - 10	9
10 - 15	10
15 - 17	4

పై దత్తాంశాలను గుర్తించు ఒక హిస్టోగ్రాంను నిర్మించండి.

9. ఒక స్థానిక టెలిఫోన్ డైరెక్టరీ (దూరవాణి విళాస దర్శిని) నుండి యాదృచ్ఛికంగా 100 ఇంటిపేర్లను (surname) లను తీశారు. మరియు వాటిలో (surname) లో కనబడిన ఆంగ్లభాష అక్షరాల సంఖ్యల పౌనఃపున్య వితరణ కింద ఇవ్వబడినది.

అక్షరాల సంఖ్య	ఇంటిపేర్ల (surname) ల సంఖ్య
1 - 4	6
4 - 6	30
6 - 8	44
8 - 12	16
12 - 20	4

(i) ఇచ్చిన సమాచారాన్ని గుర్తించడానికి ఒక హిస్టోగ్రాంను నిర్మించండి.

(ii) ఇంటిపేర్ల సంఖ్య గరిష్ఠ తరగతి అంతరాన్ని రాయండి..

14.5 కేంద్రీయ స్థాన విలువలు:

ఇదే అధ్యాయంలో ఇంతకుమందు మీరు వివిధ విధానాలలో అంటే పౌనః పున్య వితరణా పట్టిక, హిస్టోగ్రామ్ మరియు పౌనఃపుణ్య బహుభుజిల ద్వారా దత్తాంశాలను ప్రతినిధించాము. దత్తాంశాలను అర్థంచేసుకోవడానికి అన్ని ప్రాప్తాంకాలను పరిగణించాలా? లేదా నిర్దిష్ట ప్రాప్తాంకాలను మాత్రం పరిగణించాలా. దత్తాంశాల కొన్ని ప్రముఖ లక్షణాలను తెలుసుకోవచ్చా అనే ప్రశ్న వస్తుంది. ఇది కేంద్రీయ స్థాన విలువల లేదా సరాసరిల ద్వారా సాధ్యమవుతుంది.

మేరి మరియు హరి అను ఇద్దరు విద్యార్థులు తమ పరీక్ష జవాబు పత్రికలను తీసుకున్న సన్నివేశాన్ని గమనించండి. పరీక్షలో 5 ప్రశ్నలకు 10 మార్కులు కలిగివున్నది. వారి మార్కులు ఇలా వున్నాయి.

©KTBS Not to be republished

ప్రశ్న సంఖ్య	1	2	3	4	5
మేరీ మార్కులు	10	8	9	8	7
హరి మార్కులు	4	7	10	10	10

టెస్ట్ కాపీ తీసుకున్న తరువాత వారి సరాసరి మార్కులు క్రింది విధంగా వున్నట్టు తెలుస్తుంది.

మేరి సరాసరి మార్కులు = $\frac{42}{5} = 8.4$

హరి సరాసరి మార్కులు = $\frac{41}{5} = 8.2$

మేరి సరాసరి హరి కంటే ఎక్కువ కావున మేరి తన నిర్వహణ హరి కన్న ఉత్తమంగా వుందని అంటుంది. హరి ఇందుకు ఒప్పుకోడు. అతడు ఇద్దరి మార్కులను ఆరోహణ క్రమంలో రాస్తాడు. మరియు మధ్యలో మార్కులను క్రింది విధంగా కనుగొంటాడు.

మేరి మార్కులు	7	8	(8)	9	10
హరి మార్కులు	4	7	(10)	10	10

హరి తన మధ్య స్కోర్ 10 అయినందువల్ల, అది మేరి మధ్యంకము 8 కంటే ఎక్కువ కావున హరి తన నిర్వహణ ఉత్తమం అంటాడు.

అయితే మేరి దానికి ఒప్పుకొన్నప్పుడు హరి మరొక విధానం ద్వారా ప్రయత్నిస్తాడు. ఇద్దరి మార్కులను పోల్చినప్పుడు హరి 10 ని ఎక్కువ సార్లు (3 సార్లు) తెచ్చుకున్నాడు మేరి ఒక సారి పొందింది. కావున తన నిర్వహణే ఉత్తమం అంటాడు.

ఇప్పుడు హరి మరియు మేరిల మధ్య భిన్నాభిప్రాయాలు పరిష్కరించాలి. దాని కొరకు వారి వాదన సమర్థనకోసం మూడు కొలతలను గమనిద్దాం. మొదటి సందర్భంలో మేరి కనుగొన్న మార్కుల కొలతయే సరాసరి **(mean)**. హరి తన వాదన కొరకు ఉపయోగించిన కొలత మధ్య మార్కులనే మధ్యమం **(median)**. అలాగే ఎక్కువ సార్లు పునరావర్ధనం అయిన మార్కులే బహులకం **(mode)**.

ఇప్పుడు మనం సరాసరిని వివరంగా చూద్దాం.

ఒక దత్తాంశంలోని అన్ని రాశుల మొత్తంను ఆ రాశుల సంఖ్యచే భాగించగా ఫలితమును అంక గణిత మధ్యమము లేక సరాసరి లేక సగటు అంటారు.

అంక గణిత మధ్యమము $\bar{x} = \frac{\text{రాశుల మొత్తం}}{\text{రాశుల సంఖ్య}}$ లేదా

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$$

©KTBS Not to be republished

దీన్ని $\bar{x}$ సంకేతంతో సూచిస్తారు. మరియు '**x బార్**' అని చదువుతారు. ఇప్పుడు ఒక ఉదాహరణను గమనిద్దాం.

ఉదాహరణ 10 : ఒక వారంలో సమాజ సేవలకు వినియోగిగిచు సమయం గురించి ఒక సముదాయపు 5 మందిని అడిగినప్పుడు వారు క్రమంగా 10, 7, 13, 20 మరియు 15 గంటలు అన్నారు. ఒక వారంలో వారు సమాజ సేవకు వినియోగించిన సరాసరి సమయాన్ని కనుగొనండి.

సాధన : మీరు ఇంతకు ముందు మునుపటి తరగతులలో నేర్చుకునట్టు రాశుల సరాసరి $\frac{\text{రాశుల మొత్తం}}{\text{మొత్తం రాశుల సంఖ్య}}$ అవుతుంది.

సరాసరి కనుగొనుటలో మన పనిని సరళీకరిద్దాం. i వ రాశిని సూచించడానికి చరరాశి x_i ని ఉపయోగిద్దాం. పై ఉదాహరణలు i విలువ 1 నుండి 5 వేరకు తీసుకుందాం. అందువలన మన మొదటి రాశి x_1, రెండవది x_2 ఈ విధంగా x_5 వరకు తీసుకుందాం.

$x_1 = 10$, అంటే మొదటి రాశి, ఇదే విధంగా $x_2 = 7$

$x_3 = 13$, $x_4 = 20$ మరియు $x_5 = 15$ అవుతుంది.

$$\therefore \text{ సరాసరి } \bar{x} = \frac{\text{రాశుల మొత్తం}}{\text{మొత్తం రాశుల సంఖ్య}}$$

$$= \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}{5}$$

$$= \frac{10 + 7 + 13 + 20 + 15}{5} = \frac{65}{5} = 13$$

కాబట్టి '5' మంది సమాజ సేవకు వినియోగించిన వారానికి 13 గంటలు.

ఇదే విధంగా 30 మంది సరాసరి సమయాన్ని కనుగొనడానికి మనం $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{30}$ వరకు రాయడం కష్టం. కావున మనం మొత్తాన్ని సూచించడానికి గ్రీక్ సంకేతం Σ (Sigma సిగ్మా) ను ఉపయోగిస్తాము. $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{30}$ కు బదులుగా మనం $\sum_{i=1}^{30} x_i$ అని రాస్తాము. దీన్ని i విలువ 1-30 వరకు ఉండునట్లు x_i ను రాశుల మొత్తం అని చదువుతాము.

అందువలన $$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{30} x_i}{30}$$

ఇదే విధంగా 'n' రాశులకు $$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

©KTBS Not to be republished

ఉదాహరణ 11: ఒక పాఠశాలలో 9వ తరగతిలో 30 మంది విద్యార్థులు పొందిన మార్కులను **ఉదా:** 2లో ఇవ్వబడినది. వాటి సరాసరిని కనుగొనండి.

సాధన : ఇప్పుడు $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_{10}}{30}$

$\sum_{i=1}^{30} x_i = 10 + 20 + 36 + 92 + 95 + 40 + 50 + 56 + 60 + 70 + 92 + 88 + 80 + 70 + 72 + 70 + 36 + 40 + 36 + 40 + 92 + 40 + 50 + 50 + 56 + 60 + 70 + 60 + 60 + 88 = 1779$

$\therefore \quad \bar{x} = \frac{1779}{30} = 59.3$

ఈ విధానంలో సమయం వ్యర్థం అవుతున్నది కదా దీనిని సరళీకరించవచ్చా? ఈ దత్తాంశాలకు పౌనఃపుణ్య వితరణ పట్టికను నిర్మాణాన్ని గమనించండి. (14.1 పట్టిక)

ఈ పట్టిక నుండి 1 విద్యార్థి 10 మార్కులు, ఒకరు 20 మార్కులు ముగ్గురు 36 మార్కులు, నలుగురు 40 మార్కులు, ఇద్దరు 56 మార్కులు, నలుగురు 60 మార్కులు, నలుగురు 70 మార్కులు ఒకడు 72 మార్కులు ఒకరు 80 మార్కులు, ఇద్దరు 88 మార్కులు ముగ్గురు 92 మార్కులు మరియు ఒకరు 95 మార్కులను పొందినట్లు తెలుస్తుంది.

$\therefore$ పొందిన మొత్తం మార్కులు $= (1 \times 10) + (1 \times 20) + (3 \times 36) + (4 \times 40) + (3 \times 50) + (2 \times 56) + (4 \times 60) + (4 \times 70) + (1 \times 72) + (1 \times 80) + (2 \times 88) + (3 \times 92) + (1 \times 95)$

$= f_1 x_1 + \ldots + f_{13}\ x_{13},$

ఇక్కడ f_i అనునది i రాశి యొక్క పౌనః పున్యము 14.1 పట్టిక)

దీనిని మనం సంక్షిప్తంగా $\sum_{i=1}^{13} f_i x_i$ అని రాస్తాము.

$\therefore$ పొందిన మొత్తం మార్కులు $= \sum_{i=1}^{13} f_i x_i$

$= 10 + 20 + 108 + 160 + 150 + 112 + 240 + 280 + 72 + 80 + 176 + 276 + 95 = 1779$

ఇప్పుడు మొత్తం రాశుల సంఖ్య $= \sum_{i=1}^{13} f_i$

$= f_1 + f_2 + \text{- - -} + f_{13}$

$= 1 + 1 + 3 + 4 + 3 + 2 + 4 + 4 + 1 + 1 + 2 + 3 + 1$

$= 30$

కావున సరాసరి $\bar{x} = \frac{\text{అన్ని రాశుల మొత్తం}}{\text{మొత్తం రాశుల సంఖ్య}} = \left(\frac{\sum_{i=1}^{13} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{13} f_i} \right) = \frac{1779}{30} = 59.3$

©KTBS Not to be republished

ఈ విధానాన్ని క్రింది పట్టికలో చూపబడింది. ఇది పట్టిక (14.1) పరిష్కృత రూపం.

పట్టిక 14.12

మార్కులు (x_i)	విద్యార్థుల సంఖ్య (f_i)	$f_i x_i$
10	1	10
20	1	20
36	3	108
40	4	160
50	3	150
56	2	112
60	4	240
70	4	280
72	1	72
80	1	80
88	2	176
92	3	276
95	1	95
	$\sum_{i=1}^{13} f_i = 30$	$\sum_{i=1}^{13} f_i\ x_i = 1779$

©KTBS Not to be republished

ఇలా అవర్గీకృత పౌనః పున్య వితర సందర్భంలో సరాసరిని కనుగొనడానికి మీరు ఈ సుత్రాన్ని ఉపయోగించవచ్చు.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

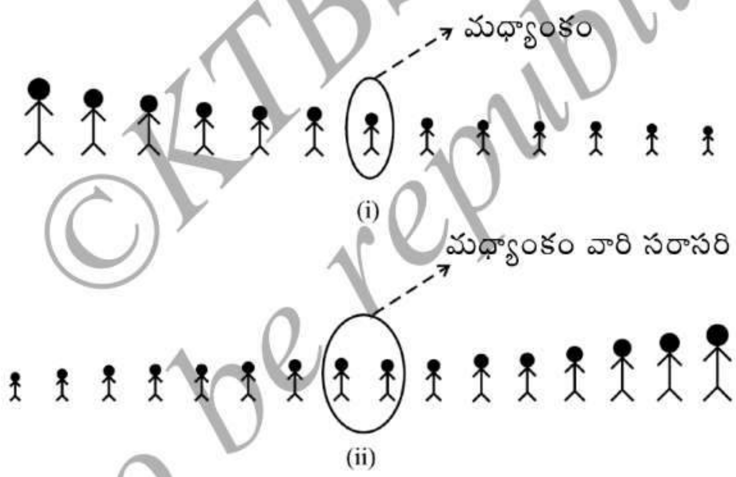
ఇప్పుడు మునుపు చర్చించిన హరి మరియు మేరిల సమస్య వైపుకు వెలదాం. రెండవ విధానంలో మధ్య మార్కులు కనుగొనడానికి తన నిర్వహణ ఉత్తమ అంటాడు. ఇదివరకే, చెప్పినట్టు కేంద్రీయ స్థాన విలువల మధ్య గతం అంటాము.

మధ్య గతం **(median)** విలువ రాశులను రెండు సమభాగాలుగా విభజిస్తుంది. దత్తాంశాలను ఆరోహణ మరియు అవరోహణ క్రమంలో రానీ, అవర్గీకృత దత్తాంశాల మధ్య గతం **(median)** క్రింది విధముగా కనుగొనవచ్చు.

(i) రాశుల మొత్తం సంఖ్య (n) బేసి సంఖ్య అయినప్పుడు మధ్యగతం విలువ $\left(\frac{n+1}{2}\right)$రాశి అవుతుంది. ఉదా: $n = 13$ అయితే, $\left(\frac{13+1}{2}\right)$వ అంటే 7వ రాశి మధ్యగతం అవుతుంది 14.9 (i) చిత్రంను చూడండి)

(ii) మొత్తం రాశుల సంఖ్య (n) సరి సంఖ్య అయితే మధ్యగతం విలువ $\left(\frac{n}{2}\right)$వ మరియు $\left(\frac{n}{2}+1\right)$రాశుల సరాసరి అవుతుంది.

ఉదాహరణ, $n = 16$ అయినప్పుడు మధ్యగతము $\left(\frac{16}{2}\right)$వ మరియు $\left(\frac{16}{2}+1\right)$వ రాశుల సరాసరి అంటే 8వ మరియు 9వ రాసుల సరాసరి అవుతుంది. (చిత్రం 14.9 (ii) చూడండి.



చిత్రం 14.9

©KTBS Not to be republished

ఇప్పుడు కొన్ని ఉదాహరణల సహాయంతో దీన్ని అర్థం చేసుకుందాం.

ఉదాహరణ 12 : ఒక తరగతిలో 9 మంది విద్యార్థుల ఎత్తులు (cm) లలో క్రింది విధంగా వున్నాయి?

155 160 145 149 150 147 152 144 148

ఈ దత్తాంశాల మధ్యగతాన్ని కనుగొనండి.

సాధన : జట్టు గడించిన పాయింట్లను ఆరోహణ క్రమంలో రాసినప్పుడు.

144 145 147 148 149 150 152 155 160

ఇక్కడ మొత్తం రాశుల సంఖ్య 9, ఇది ఒక బేసి సంఖ్య కావున $\left(\frac{n+1}{2}\right)=\left(\frac{9+1}{2}\right)$వ = 5వ విద్యార్థి ఎత్తు 149cm మధ్యగతం అవుతుంది. కావున మధ్యగతం 149cm లేదా ఎత్తుల మధ్యమ విలువ 149 cm.

ఉదాహరణ 13 : ఒక కబడ్డీ జట్టు ఒక సీరిస్ లో గడించిన పాయింట్లు క్రింది విధంగా వున్నాయి.

17, 2, 7, 27, 15, 5, 14, 8, 10, 24, 48, 10, 8, 7, 18, 28

జట్టు గడించిన పాయింట్ల మధ్యగతాన్ని కనుగొనండి.

సాధన : జట్టు గడించిన పాయింట్లను ఆరోహణ క్రమంలో రాసినప్పుడు.

2, 5, 7, 7, 8, 8, 10, 10, 14, 15, 17, 18, 24, 27, 28, 48

మొత్తం 16 రాశులున్నాయి. కావున ఇక్కడ రెండు మధ్య పదాలు ఉన్నాయి. $\left(\frac{16}{2}\right)$వ మరియు $\left(\frac{16}{2}+1\right)$వ రాశులు అంటే 8 వ మరియు 9 వ రాశులు. కావున మధఆయగతము 8 వ మరియు 9 వ పదాల సరాసరి అవుతుంది.

అంటే మధ్యగతము $=\frac{10+14}{2}=12$

కావున కబడ్డి జట్టు గడించిన పాయింట్లు మధ్యగతము = 12

ఇప్పుడు మరల హరి మరియు మేరి వీరిద్దరి పరిహారం కాని వివాదాన్ని గమనిద్దాం. హరి 3వ కొలత కోసం బహుళకాన్ని ఉపయోగించుకున్నాడు. ఒక దత్తాంశములలో మిగిలిన రాశులకన్నా ఎక్కువసార్లు పునరావృతమగు రాశిని అనగా ఎక్కువ పౌనఃపున్యము గల రాశిని ఆ దత్తాంశమునకు బహుళకము అంటారు.

గార్మెంట్స్ మరియు షూ కంపెనీలలో ఈ కేంద్రీయ స్థాన విలువలకు గాను ఎక్కువ ఉపయోగించుకొనే బహుళకముయొక్క ఉపయోగం జ్ఞానంతో కంపెనీలు ఏ కొలత ఉత్పన్నాలను ఎక్కువ సంఖ్యలో తయారు చేయాలో అనుటను నిర్ధారిస్తాయి.

దీనిని ఒక ఉదాహరణ ద్వారా స్పష్టం చేద్దాం.

ఉదాహరణ 14 : 20 మంది విద్యార్థులు పొందిన క్రింది ఇచ్చిన మార్కులలో (10 లో) బహుళకాన్ని (mode) కనుగొనండి.

4, 6, 5, 9, 3, 2, 7, 7, 6, 5, 4, 9, 10, 10, 3, 4, 7, 6, 9, 9

సాధన : క్రింది విధంగా దత్తాంశాలను జోడిద్దాం.

2, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 9, 9, 9, 9, 10, 10,

ఇక్కడ 9 అనునది ఎక్కువసార్లు అంటే 4 సార్లు పునరావర్తనం అయినది కావున బహుళకం 9 అవుతుంది.

©KTBS Not to be republished

ఉదాహరణ 15 : 5 మంది ఉద్యోగులు గల ఒక ఫ్యాక్టరి ఒక చిన్న ఘటకాన్ని పరగణించండి. అందులో ఒక సూపర్ వైజర్ మరియు నలుగురు కార్మికులు కార్మికులు ప్రతినెల ₹ 5000 తీసుకుంటే సూపర్‌వైసర్ ₹15.000 తీసుకుంటాడు. ఫ్యాక్టరీ ఘటకపు వేతనం, సరాసరి, మధ్యగతం, బహుళకాన్ని కనుగొనండి.

సాధన : సరాసరి $= \frac{5000+5000+5000+5000+15000}{5} = \frac{35000}{5} = 7000$

∴ వేతనాలు సరాసరి ప్రతినెలకు ₹ 7000

మధ్యగతాన్ని పొందడానికి వేతనాలను ఆరోహణ క్రమంలో రాయాలి.

5000, 5000, 5000, 5000, 15,000

ఉద్యోగస్తుల సంఖ్య 5, ఇది ఒక బేసి సంఖ్య కావున మధ్యగతము $\left(\frac{5+1}{2}\right)$వ $= \left(\frac{6}{2}\right)$ = 3వ రాశి

∴ మధ్యగతము ప్రతి నెలకు ₹ 5000 అవుతుంది.

వేతన బహుళకాన్ని కనుగొనడానికి దత్తాంశాలను గమనించినప్పుడు 5000 అను రాశి ఎక్కువ సార్లు పునరావృతమైనది. కావున వేతనాల బహుళకం ప్రతి నెలకు 5000.

వేతనాల సరాసరి అంటే ₹ 7000 ను దత్తాంశాలలో ఏదేని అంశానికి అందాజు విలువను ఇవ్వకూడదు. అంటే వేతనాలు మధ్యగతము మరియు బహుళకాలు అంటే ₹ 5000ను దత్తాంశాలను ఉత్తమంగా ప్రతినిధిస్తాం.

దత్తాంశాల ఆది మరియు అంత్య పదాలు దత్తాంశాల సరాసరి విలువపై పరిణామం చూపిస్తుంది. ఇది సరాసరి పరిమాణము అవుతుంది. కావున దత్తాంశాలలో కొన్ని అంశాలు మిగిలిన ఎక్కువ అంశాల కంటే ఎక్కువ వ్యత్యాసం ఉంటే (**ఉదా**:1, 7, 8, 9, 9) సరాసరి దత్తాంశాల ఉత్తమ ప్రాతినిద్యం అనిపించదు. మధ్యగతము మరియు బహుళ కాల దత్తాంశాల ఆది మరియు అంత్య పదాలను అవి అవలంబించి ఉండవు. అలాంటి సందర్భాలలో ఇవి సరాసరి కంటే ఉత్తమమనిపిస్తాయి.

ఇప్పుడు మనం మరలా హరి మరియు మేరీల సమస్య చూద్దాం. మరియు కేంద్రీయ స్థాన విలువల మూడు కొలతను పోలుద్దాం.

కేంద్రీయ స్థాన విలువలు	హరి	మేరి
సరాసరి	8.2	8.4
మధ్యగతం	10	8
బహుళకం	10	8

©KTBS Not to be republished

ఈ పోలిక నుండి మనకు తెలియున దేమంటే ఏ విద్యార్థి ఉత్తమం అను నిర్ణయానికి రావడానికి కొలతలు చాలవు. దీనికోసం మరికొన్ని సమాచారాల అవసరముంది దీనిని మీరు తర్వాతి తరగతులలో అభ్యసిస్తారు.

అధ్యాయం 14.4

1. ఒక సీరీస్ 10 పంద్యాలలో ఒక జట్టు పొందిన గోల్‌ల సంఖ్య ఇవ్వబడినది.

   2, 3, 4, 5, 0, 1, 3, 3, 4, 3

   వీటి సరాసరి, మధ్యగతము మరియు బహుళకాలను కనుగొనండి.
2. గణిత పరీక్ష రాసిన 15 మంది విద్యార్థులకు వచ్చిన మార్కులు (100కి) కింద ఇవ్వబడినవి..

   41, 39, 41, 39, 48, 52, 46, 62, 54, 40, 96, 52, 98, 40, 42, 52, 60

   ఈ దత్తాంశాల సరాసరి, మధ్యగతము మరియు బహుళకాలను కనుగొనండి.
3. ఈ క్రింది రాశులను ఆరోహణ క్రమంలో జోడించారు. వీటి మధ్యగతము 63 అయితే x విలువ కనుగొనండి.

   29, 32, 48, 50, x, $x+2$, 72, 78, 84, 95
4. 14, 25, 14, 28, 18, 17, 18, 14, 23, 22, 14, 18 వీటిబహుళకాన్ని కనుగొనండి.
5. ఒక ఫ్యాక్టరిలో పనిచేసే 60 మంది పనివాళ్ళ వేతనమును క్రింది పట్టికలో ఇవ్వబడినది. వేతనాల సరాసరి కనుగొనండి.

వేతనము (₹ లలో)	పనివాళ్ళ సంఖ్య
3000	16
4000	10
5000	10
6000	8
7000	6
8000	4
9000	3
10.000	1
మొత్తం	**60**

©KTBS Not to be republished

6. క్రింది సన్నివేశాలకు ఉదాహరణ ఇవ్వండి..
   (i) సరాసరి కేంద్రీయ స్థాన విలువల ఖచ్చితమైన కొలత కలదు..
   (ii) సరాసరి కేంద్రీయ స్థాన విలువల ఖచ్చితమైన కొలతకాదు. ఐతే మధ్యగతము కేంద్రీయ స్థాన విలువల ఖచ్చితమైన కొలత కలదు.

14.6. సారాంశం :

ఈ అధ్యాయంలో మీరు క్రింది అంశాలను నేర్చుకున్నారు

1. ఒక ప్రత్యేక ఉపయోగార్థం సేకరించబడిన విషయాలు లేక సంఖ్యాత్మక వివరాలను దత్తాంశం అంటారు.
2. సేకరించిన సమాచారాన్ని అర్థవంతము చేయు గణిత శాఖనే సాంఖ్య శాస్త్రము అంటారు.
3. దత్తాంశాలను గ్రాఫ్ విధానంలో అంటే దిమ్మ చిత్రం (Bar graph) హిస్టోగ్రాం మరియు పౌనః పున్య బహుభుజాలలో ఎలా గుర్తించాలి.
4. అవర్గీకబుుత దత్తాంసాలకు కేంద్రీయ స్థాన విలువలు 3 కొలతలు అంటే

(i) **సరాసరి** : రాశుల మొత్తమును రాశుల సంఖ్యచే భాగించగా ఫలితమును దత్తాంశము యొక్క అంకగణిత మధ్యమము (సరాసరి) అంటారు.

$\therefore \ \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$, వర్గీకృత పౌనః పున్య విభాగజనమునకు అంకగణిత మధ్యమము, $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$

(ii) **మధ్యగతం విలువ** : దత్తాంశములోని రాశుల సంఖ్య 'n' బేసి సంఖ్య అయిన $=\left(\frac{n+1}{2}\right)$వ రాశి విలువ మధ్యగతము అవుతుంది.

దత్తాంశములోని రాశుల సంఖ్య 'n' $=\left(\frac{n}{2}\right)$ మరియు $\left(\frac{n}{2}+1\right)$వ రాశుల సరాసరి మధ్యగతం అవుతుంది.

(iii) **బహుళకము** : ఒక దత్తాంశములోని మిగిలిన రాశులకన్నా ఎక్కువ సార్లు పునరావృత్తం అగు రాశిని అనగా ఎక్కువ పౌనఃపున్యం గల రాశిని ఆ దత్తాంశమునకు బహుళకం అంటారు.

©KTBS Not to be republished

అధ్యాయ - 15

సంభావ్యత (PROBABILITY)

"అవకాశపు ఆటలని పరిగణించడం వలన ఆరంభమైన విజ్ఞానమును మానవుని విజ్ఞానపు అత్యంత ప్రముఖ విషయమై ఉన్నత స్థానమునకు చేర్చుట ఒక గమనార్హమైన విషయమైనది.

- పియరె సైమన్ ల్యాప్లస్

It is remarkable that a science, which began with the consideration of games of chance, should be elevated to the rank of the most important subject of human knowledge.

- Pierre Simon Laplace

15.1 పరిచయము

నిత్య జీవితంలో మనం కొన్ని మాటలను వినియుండెదము

1. **బహుశ:** ఈ రోజు వర్షం రావచ్చును.
2. అతడు పరీక్షల్లో ఉత్తర్ణుడగట నాకు సందేహంగావుంది.
3. వార్షిక పరీక్షల్లో కవిత ప్రథమ స్థానంలో ఉత్తీర్ణురాలగుటలో ఎక్కువ సాధ్యాలు కలవు.
4. డీజల్ దరలు ఎక్కువగు **అవకాశములు** ఎక్కువగా ఉంది.
5. ఈ రోజు జరగబోయే క్రికెట్ పంద్యములో భారత్ టాస్ గెలిచే **అవకాశములు** 50:50 కలవు.

పై వాక్యాలలో 'బహుశ', 'సందేహం', 'ఎక్కువ సాధ్యత', 'అవకాశములు' ఇలాంటి పదాలు అనిశ్చితిని సూచించును. ఉదా: "మొదటి వాక్యము""బహుశ వర్షం". అనగా ఈ రోజు వర్షం రావచ్చును లేక రాకపోవచ్చును. అనే అర్థమును ఇచ్చును. ఇలాంటి సందర్భములలో వెనుక వర్షం వచ్చిన అనుభవంలోని అధారంతో మనం ఈ రోజు వర్షం రావచ్చునని ఊహించుకొనెదదు. (2) నుండి(5) వరకు గల వాక్యములో ఈ విధముగా ఊహించు కోన్నాము. అనేక సందర్భాలలో "బహుశ" ఇలాంటి పదాల అనిశ్చితిని సంభావ్యత ద్వారా సాంఖ్యకంగా కొలుచుటకు సాధ్యమైయున్నది.

సంభావ్యత జూదం నుండి ప్రారంభమైననూ దీనిని భౌతిక విజ్ఞాన శాస్త్రం, వాణిజ్య శాస్త్రం జీవన విజ్ఞాన శాస్త్రం ఔషద విజ్ఞానము మరియు వాయునియంత్రణ విజ్ఞాన రంగాలలో సంపూర్ణంగా అత్యంత విపులంగా ఉపయోగించబడుతుంది.

©KTBS Not to be republished

15.2 సంభావ్యత - ఒక ప్రాయోగిక పద్ధతి

బ్లేస్ ప్యాస్కల్
(1623-1662)
చిత్రం 15.1

"సంభావ్యత పరికల్పన అత్యంత ఆశ్చర్యకరంగా అభివృద్ధి చెందినది. 1654వ సంవత్సరంలో చెవలీర్ డి మేరి అను జూదగాడు 17వ శతాబ్దంలో ఫ్రెంచ్ తత్వజ్ఞాని మరియు గణిత శాస్త్రజ్ఞుడు అయిన బ్లేస్ ప్యాస్కల్‌ను దాడులకు సంబంధించిన కొన్ని సమస్యలకుగాను సందర్శించెను. ఈ సమస్యలలో ఆసక్తి పొందిన ప్యాస్కల్ వాటిని అభ్యసించి మరియొక ఫ్రెంచి గణిత శాస్త్రజ్ఞుడు పైరి డి పర్మిట్‌తో చర్చించెను. ప్యాస్కల్ మరియు ఫెర్మాట్ ఇద్దరు సమస్యలకు సరైన పరిహారమును స్వతంత్రంగా కనుగొనిరి. ఈ తత్వం సంభావ్యత తత్వం యొక్క మొదటి దశయైనది.

బ్లేస్ ప్యాస్కల్
(1623-1662)
చిత్రం 15.1

ఇటలీకిలి చెందిన గణిత శాస్త్రజ్ఞుడైన. జె.కార్డన్(1501 నుండి 1576) గారు ఈ విషయపు మొదటి గ్రంథము రచించింది. ఈ గ్రంథం యొక్క ముఖ్యశీర్షిక "Book on Games of chance"(సాధ్యమైన ఆటలపై పుస్తకము) [Liber de Ludo Alear] ఇది 1663 లో ప్రచురించబడినది. గణిత శాస్త్రజ్ఞుడైన జె. బర్నోలి(1654-1705) మరియు పి.ల్యాప్లాస్(1749-1827) ఎ.ఎ.మార్కోవా(1856-1922)మరియు ఎ.ఎన్ కాల్మోగోరవ్(జననం 1903) వారందరూ గణనీయమైన సేవలు అందించిరి.

వెనుకటి తరగతులలో మీరు నాణ్యమును ఎగుర వేయుట, బిళ్ళలను విసురుట మొదలగు ప్రయోగాలను చేయుట ద్వారా సంభావ్యత యొక్క పరిచయంను కలిగే ఉన్నాము. మరియు వాటి ఫలితాలను గమనించియుండెదరు. ఒక ప్రయోగంలో నిర్దిష్టమైన ఫలితాలనిచ్చు సాధ్యతను కొలవడం మీరు ఇప్పుడు నేర్చుకొనెదరు.

కార్యాచరణం 1 : (i) ఏదైనా నాణ్యమును తీసుకొని 10 సార్లు ఎగురవేసిన బొమ్మ(Head) మరియు బొరుస(Tail) అధోముఖంగా పడు సంఖ్యాను ఈ కింది విధంగా నమోదించండి.

పట్టిక 15.1

నాణ్యమును పైకి ఎగురవేసిన సంఖ్య	బొమ్మ అధోముఖాంగా పడిన సంఖ్య	బొరుసు అధోముఖంగా పడిన సంఖ్య
10	-	-

కింది భిన్నాల విలువలను రాయండి:

$$\frac{\text{ఒకటి బొమ్మ అధోముఖాంగా పడిన సంఖ్యా}}{\text{నాణ్యమును ఎగురవేసిన మొత్తం సంఖ్య}}$$

©KTBS Not to be republished

మరియు

$$\frac{\text{ఒకటి బొరుసు అధోముఖంగా పడిన సంఖ్య}}{\text{నాణ్యమును ఎగురవేసిన మొత్తం సంఖ్య}}$$

(ii) ఒక నాణ్యమును 20సార్లు పైకి ఎగురవేసి మీరు చూసిన దానిని వైవిధంగా నమోదు చేయండి. మరల మీరు చూసిన వానిని పై విధంగా భిన్నాల విలువలను కనుగొనండి.

(iii) ఇదే విధంగా నాణ్యమును ఎగురవేయు ప్రయోగాల సంఖ్యను పెంచి ప్రయోగాన్ని పునరావృత్తం చేయండి. బొమ్మ మరియు బొరుసులు అధోముఖంగా పడు సంఖ్యలను నమోదు చేసి దానికి అనుగుణంగా భిన్నాలను కనుగొనండి.

నాణ్యమును ఎగురువేయు ప్రయోగముల సంఖ్య పెంచిన కొలది భిన్నాల విలువలు 0.5కు దగ్గరగాఉండును. అనుటను మీరు చూసెదరు. ఎక్కువసార్లు నాణ్యమును అధోముఖంగా ఎగురవేసినప్పుడు ఫలితం ఏమైనది అని తెలుసుకొనుటకు కింది కార్యాచరణాన్ని కూడా చేయవచ్చును.

కార్యచరణం 2 : తరగతిలోని విద్యార్థులను రెండు తేదా మూడు గుంపులుగా చేయవలెను. ప్రతి గుంపులోని ఒక విద్యార్థి ఒక నాణ్యమును 15 సార్లు ఎగురవేయవలెను. అదే గుంపులోని ఇంకో విద్యార్థి బొమ్మ మరియు బొరుసు అదోముఖంగా పడిన సంఖ్యను నమోదుచేయాలి (ఇందులోని అన్ని గుంపుల సభ్యులు ఒకే రకములోని నాణ్యాలను ఉపయోగించాలి)

ఇపుడు నల్లబల్లపై(Black Board) 15.2 మాదిరిగా పట్టికను చేయవలెను. ముందుగా ఒకటవ గుంపు సభ్యులు తమ వీక్షణను నమోదుచేసి ఫలిత భిన్నాలను లెక్కించవలెను. తరావత 2వ గుంపు సభ్యులు తమ వీక్షణను రాయవలెను. అయితే ఇక్కడ 1వ గుంపు మరియు 2వ గుంపు యొక్క మొత్తం దత్తాంశాలను భిన్నాలను లెక్కించవలెను మరియు ఇదే విధంగా కొనసాగించాలి. (మనం ఈ బిన్నాలను సంచిత భిన్నాలు అనవచ్చును)

ఇక్కడ మనం ఒక తరగతిలోని విద్యార్థులు ఇచ్చిన ఫలితాలను మొదటి 3 వరుసలలో నమోదు చేయాలి.

పట్టిక 15.2

గుంపు	బొమ్మ అధోముఖంగా పడిన సంఖ్య	బొరుసు అధోముఖంగా పడిన సంఖ్య	బొమ్మ అధోముఖంగా పడిన సంఖ్య మొత్తం / నాణ్యమును ఎగురవేసిన మొత్తం సంఖ్య	బొరసు అధోముఖంగా పడిన సంఖ్యల మొత్తం / నాణ్యమును ఎగురవేసిన మొత్తం సంఖ్య
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
1	3	12	$\frac{3}{15}$	$\frac{12}{15}$
2	7	8	$\frac{7+3}{15+15}=\frac{10}{30}$	$\frac{8+12}{15+15}=\frac{20}{30}$
3	7	8	$\frac{7+10}{15+30}=\frac{17}{45}$	$\frac{8+20}{15+30}=\frac{28}{45}$
4	⋮	⋮	⋮	⋮

©KTBS Not to be republished

ఈ పట్టికలో మీరు దీనిని గమనించెదరు? నాణ్యమును ఎగురవేయు సంఖ్య ఎక్కువైన కొలది నిలువరుస(4) మరియు(5) యొక్క భిన్నాల విలువలు 0.5కు దగ్గరగా ఉండుటను మీరు గమనిస్తారు.

కార్యాచరణము-3 : (i) ఒక పాచిక(Die)ను 20సార్లు ఎగురవేసి అంకెలైన 1,2,3,4,5 మరియు 6 పైకి వచ్చు సంఖ్యలను రాసి, దానిని పట్టిక 15.3 వలె నమోదు చేయండి.

ఒక పాచిక ఖచ్చితమైన 6 ముఖాల ఘనము, ప్రతి ముఖము 1 నుండి 6 వరకు ఒక అంకె యుండును. ఒక్కోసారి అంకెల బదులు అంతే సంఖ్య బిందువులు వుండును.

పట్టిక 15.3

(పాచిక)	ఈ అంకెలు అధోముఖంగా పడిన సంఖ్య					
బిళ్ళను ఎగుర వేసిన సంఖ్య	1	2	3	4	5	6
20						

ఈ క్రింది భిన్నాల విలువలను కనుక్కోండి

$$\frac{\text{అధో ముఖంగా 1 వచ్చిన సంఖ్య}}{\text{పాచికను ఎగురవేసిన మొత్తం సంఖ్య}}$$

$$\frac{\text{అధోముఖంగా 2వచ్చిన సంఖ్య}}{\text{పాటికను ఎగురవేసిన మొత్తం సంఖ్య}}$$

$$\vdots$$

$$\frac{\text{అధోముఖంగా 6 వచ్చిన సంఖ్య}}{\text{పాటికను ఎగురవేసిన మొత్తం సంఖ్య}}$$

(ii) ఇపుడు పాచికను 40 సార్లు ఎగురవేయండి వీక్షించినదానిని నమోదు చేయండి. (i) లో చేసినట్లు భిన్నాలను లెక్కించండి. పాచికను ఎగురవేసిన సంఖ్య ఎక్కువైన కొద్దీ (i) మరియు (ii)లలో లెక్కించిన ప్రతిభిన్నం విలువ సమీపంగా ఉంటుంది.

దీనిని వీక్షించుటకు కార్యాచరణము 2లో చేసినట్లు గుంపు కార్యాచరణం చేయించవచ్చును. మీ తరగతి విద్యార్థులను చిన్న చిన్న గుంపులుగా విభజించండి. ప్రతి గుంపులోని ఒక విద్యార్థి 10 సార్లు ఒక పాచికను ఎగురవేయాలి. ఎగురవేసిన 10 సార్లు ఒక పాచికను ఎగురవేయాలి. ఎగురవేసిన వీక్షణలను నమోదు చేసి సంచిత భిన్నాలను లెక్కించాలి.

అంకె 1 భిన్నాల విలువలను పట్టిక 15.4 లో నమోదు చేయ ఈ పట్టికను మిగిలిన అంకెల భిన్నాల విలువలను కనుగొనుటకు విస్తరించవచ్చును. లేదా ఇదే విధంగా మరియొక్క పట్టికను గీయవచ్చు.

©KTBS Not to be republished

పట్టిక 15.4

గుంపులు	గుంపులు పాచికను ఎగురవేసిన సంఖ్య	అంకె 1 పడిన సంఖ్యల మొత్తం / పాటికను ఎగురవేసిన సంఖ్య మొత్తం
(1)	(2)	(3)
1	-	-
2	-	-
3	-	-
4	-	-

అన్ని గుంపులు ఉపయోగించిన పాచికను వీక్షించుట ఒకే విధంగా ఉండి ఒకే పారిమాణాన్ని కలిగే ఉండాలి. అప్పుడు మొత్తం పాచికలు ఎగురవేయుటను ఒకే పాచికలో ఎగురవేసినట్లు పరిగణించాలి

మీరు ఈ పట్టికలో దీనిని గమనించెదరు ? పాచిక ఎగురువేసిన మొత్తం సంఖ్య ఎక్కువైన కొలది (3) వ నిలువ వరుసలోని భిన్నాలు 1/6ను సమీపించును.

కార్యాచరణము 4 : (i) 2 నాణ్యములను ఒకే సమయంలో 10 సార్లు ఎగురవేయండి. మరియు మీ ఫలితాలను కింది విధంగా పట్టిక రూపంలో నమోదు చేయండి.

పట్టిక 15.5

2 నాణ్యములు పైయిగుర వేయు సంఖ్య	బొమ్మ పైకిరుని వాటి సంఖ్య	1 బొమ్మ పైకి పడు సంఖ్య	2 బొమ్మలు పైకి పడు సంఖ్య
10	-	-	-

భిన్నాలను రాసుకోండి:

$$A = \frac{\text{బొమ్మలు పైకి పడనివాటి సంఖ్య}}{\text{2 నాణ్యములు పైకి ఎగురవేయు మొత్తం సంఖ్య}}$$

$$B = \frac{\text{1 బొమ్మలు పైకి పడు సంఖ్య}}{\text{2 నాణ్యములు పైకి ఎగురవేసిన మొత్తం సంఖ్య}}$$

$$C = \frac{\text{2 బొమ్మలు పైకి పడిన సంఖ్య}}{\text{2 నాణ్యములు పైకి ఎగురవేసిన మొత్తం సంఖ్య}}$$

ఈ భిన్నాలను కనుగొనండి.

©KTBS Not to be republished

ఇపుడు ఎగుర వేయు దాని సంఖ్య పెంచండి. (కార్యాచరణం 2 మాదిరిగా) ఎగుర వేయు సంఖ్యను పెంచిన కొలది A,B మరియు C ల విలువలు క్రమంగా 0.25, 0.5 మరియు 0.25 నకు సమీపించుటను చూడవచ్చును.

కార్యాచరణం : 1లో ప్రతి నాణ్యాన్ని ఎగురవేసిన లేదా పాచికను దొర్లించిన దానిని 'ప్రయత్నం' అంటారు. లేదా దీనిని యాదృశ్చిక ప్రయోగం అని కూడా అంటారు. ఇదే విధంగా కార్యాచరణం 3,4లో ఏకకాలంలో రెండు నాణ్యములను ఎగుర వేయుట కూడా 1 ప్రయత్నమై ఉంటుంది. దానివలన ప్రయత్నం ఒక ప్రక్రియమై ఉంది.

ఇది ఒకటి లేదా ఎక్కువ ఫలితాలను ఇచ్చును. కార్యాచరణం 1లో సాధ్యమైన పర్యవసానాలు బొమ్మమరియు బొరుసుపై యుండును. అలాగే కార్యాచరణం 3 లో సాధ్యమైన పర్యవసానాలు 1,2,3,4,5 మరియు 6 అవుతాయి.

కార్యాచరణం 1లో ప్రతి ప్రత్యేక ప్రయత్నాన్ని లేదా కొన్ని ప్రత్యేక ప్రయత్నాలను కలిపి ఒక ఘటన అందురు. ఇదేవిధంగా బొరుసును పొందిన దానిని బొరుసు పర్యవాసానాన్ని ఘటన అందురు. కార్యాచరణం 2లో 1 నిర్దిష్ట సంఖ్యను తీసుకొని ఉదా: 1ని పొందుట పర్యవసానం 1 అహిన ఘటనమై ఉండును.

మన ప్రయోగము నాణ్యమును ఎగురవేసినపుడు సమాన సంఖ్య పొందినది. ఘటన 2,4 మరియు 6 అను మూడు పర్యవసానాలను కలిగి ఉండును. అ ప్రయోగం కొన్ని పర్యవసానాలను పొందియుండెను. 10వ తరగతిలో మీరు ఘటన యొక్క ఖచ్చితవై ౨న వ్యాఖ్యానాన్ని అభ్యసించెదరు. అందువలన ఇప్పుడు మీరు కార్యాచరణం-4 లోని ఘటనలను తెలిపెదరు ?

దీని ఆధారంగా ఇపుడు సంభావ్యత అనగానేమె. అనుదానిని చూచెదము. మన ప్రయత్నాల నుండి ఏ పర్యవసారాలను పొందెదమో అనుదాని అధారంగా మనము ప్రయోగాత్మకంగా లేదా అనుభావిక సంభావ్యతను కనుగొనవచ్చును. ఇప్పుడు మొత్తం ప్రయత్నాల సంఖ్య 'n' అనుకొనిన సంభవించుచున్న బిందు ఘటన E యొక్క ప్రయోగాత్మక సంభావ్యత P(E)

$$P(E) = \frac{\text{ఘటన సంభవించిన ప్రయత్నముల సంఖ్య}}{\text{మొత్తం ప్రయత్నముల సంఖ్య}}$$

ఈ అధ్యాయంలో ప్రాయోగిక సంభావ్యతను కనుగొనుచున్ననూ, అనుకూలానికి సంభావ్యత అని రాస్తారు కొన్ని ఉదాహరణలు గమనిద్దాం.

వెనుకటి కార్యాచరణము 2 మరియు పట్టిక 15.2 ను పున: పరిశీలంచిన పట్టిక(4)లో నిలువ వరుసలో మనం లెక్కించిన భిన్నాలు ఏవి? ఇదీ బొమ్మ పొండా ప్రాయోగిక సంభావ్యత

©KTBS Not to be republished

అయినది. యత్నాల సంఖ్యా మరియు యత్నాలలో బొమ్మ పొందిన సంఖ్య ఆధారంగా ఈ సంభావ్యత మార్పుచెందును ఇదే విధంగా పట్టిక 15.2 లోని 5 వ నిలువ వరుస బొరుసు పొందుటను ప్రాయోగిక సంభావ్యత అగును. ఇది $\frac{12}{15}$ నుండి ప్రారంభమై తదనంతరం $\frac{2}{3}$ మరియు $\frac{28}{45}$ మరియు ఇదే విధంగా ముందుకు కొనసాగును.

అందువలన ప్రాయోగిక సంభావ్యత తీసుకొన్న ప్రయత్నాల సంఖ్య మరియు ఈ ప్రయత్నాలలో మనకు కావలసిన ఫలితాలు వచ్చు సంఖ్యలను అవలంభించియుంటాయి.

కార్యాచరణం5: ప్రారంభించుటకు మునుపు మీరు కార్యాచరణము 3లో రాసిన పట్టికలను చూడండి. నిర్ధిష్ట సంఖ్యాలు ఎన్ని సార్లు పాచికను ఎగురవేసినపుడు అంకె 3ను పొందెడి సంభావ్యతను కనుగొనండి. అలాగే ప్రయత్నాల సంఖ్య పెంచినపుడు సంభ్యావ్యత ఎలా మార్పు చెందుతుండి అనుదానిని చూపించండి.

ఇప్పుడు మరి కొన్ని ఉదాహరణలు పరిగణలోనికి తీసుకొందాం.

ఉదా 1 : ఒక నాణ్యమును క్రిందో పౌనః పుణ్యంలో 1000 సార్లు ఎగురవేసినప్పుడు బొమ్మ 455 బొరుసు 545 ప్రతి ఒక ఘటన సంభావ్యతను లెక్కించండి ?

సాధన : నాణ్యమును 1000 సార్లు ఎగురవేయుట వలన మొత్తం ప్రయత్నాల సంఖ్య 1000 బొమ్మ మరియు బొరుసు పొందు పర్యవసానాలు క్రమంగా E మరియు F అని పేర్కొందాము. E సంభవించే సంఖ్య అనగా బొమ్మ పడే సంఖ్య 455.

$$\text{అందువలన 'E'యొక్క సంభావ్యత} = \frac{\text{బొమ్మల సంఖ్య}}{\text{ప్రయత్నాల మొత్తం సంఖ్య}}$$

$$\text{అనగా, } P(E) = \frac{455}{1000} = 0.455$$

$$\text{ఇదేవిధంగా బొరుసు పోందు ఘటన సంభావ్యత} = \frac{\text{బొరుసుల సంఖ్య}}{\text{ప్రయత్నాల మొత్తం సంఖ్య}}$$

$$\text{అనగా, } P(F) = \frac{545}{1000} = 0.545$$

పై ఉదాహరణలలో $P(E) + P(F) = 0.455 + 0.545 = 1$, మరియు ప్రతి ఒక ప్రయత్నం యొక్క సాధనా పర్యవసానాలు లభించినవి.

ఉదాహరణ 2: రెండు నాణెముల విసినప్పుడు 500 సార్లు ప్రతి ప్రయత్నం యొక్క సాధనా పర్యవసానాలు. ఈ కింది విధంగా లభించినవి.

రెండు బొమ్మలు : 105 సార్లు

ఒక బొమ్మ : 275 సార్లు

బొమ్మ లేనట్లుగా : 120 సార్లు

ప్రతి పర్యవసానచ సంభవించు సంభావ్యత కనుగొనండి.

సాధన : రెండు బొమ్మలు పడు, ఒకే బొమ్మపడు మరియు బొమ్మ పడని పర్యవసానాలు క్రమంగా E1,E2 మరియు E3 అని సూచిద్దాం.

©KTBS Not to be republished

$$P(E_1) = \frac{105}{500} = 0.21$$
$$P(E_2) = \frac{275}{500} = 0.55$$
$$P(E_3) = \frac{120}{500} = 0.24$$

ఇందులో $P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) = 1$ అగుట గమనించండి. E_1, E_2 మరియు E_3 లు ఘటన యొక్క పర్యవసానాలలో కూడి యున్నవి.

ఉదాహరణ 3: ఒక పాచికను 1000 సార్లు ఎగురవేసిన పడు 1,2,3,4,5 మరియు 6 ఈ పర్యవసానాల పౌనఃపున్యంను కింది పట్టికలో ఇవ్వబడినది.

పట్టిక 15.6

పర్యవసానం	1	2	3	4	5	6
పౌనఃపున్యం	179	150	157	149	175	190

ప్రతి పర్యవసానపు సంభావ్యతను కనుగొనండి.

సాధన: పర్యవసానం i పొందే ఘటకను Ei అని సూచించాడు. ఇందులో $i = 1, 2, 3, 4, 5$ మరియు 6.

ఇప్పుడు పర్యవసానం 1 సంభావ్యత = P(E) $\dfrac{\text{1యొక్క పౌనఃపున్యం}}{\text{ఎగురవేసిన మొత్తం సంఖ్య}}$

$$= \frac{179}{1000} = 0.179$$

ఇదే విధంగా, $P(E_2) = \frac{150}{1000} = 0.15$ $\qquad P(E_3) = \frac{157}{1000} = 0.157$

$P(E_4) = \frac{149}{1000} = 0.149$ $\qquad P(E_5) = \frac{175}{1000} = 0.175$

మరియు $P(E_6) = \frac{190}{1000} = 0.19$

$P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) + P(E_4) + P(E_5) + P(E_6) = 1$ అని గమనించండి. ఇది కాకుండా ఈ కింది వాటిని గమనించండి:

(i) ప్రతి ఘటనలో సంభావ్యత '0' మరియు '1' మధ్యలో వుండును.

(ii) మొత్తం సంభావ్యతల మొత్తం 1 అవుతుంది.

(iii) $E_1, E_2, \ldots\ldots\ldots, E_6$ లు ఒక ఘటన యొక్క అన్ని సాధ్య పర్యవసానాలతో కూడి ఉంటుంది.

ఉదాహరణ 4 : ఒక దూరవాణి మార్గదర్శనం(Telephone Directory) లో ఒక పేజీలో

©KTBS Not to be republished

200 దూరవాణి సంఖ్యలుండును వాటి ఒకట్ల స్థానం చివరి పౌనఃపుణ్య వితరణను [ఉదా: 25828573 ఈ సంఖ్యలో ఒకట్ల స్థానంలోని అంకె '3'] పట్టికలో ఇవ్వబడినవి .

పట్టిక 15.7

అంకె	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
పౌనఃపుణ్యం	22	26	22	22	20	10	14	28	16	20

కాగితాన్ని చూడకుండా పెన్సిల్‌ను ఒక సంఖ్యపై పెట్టాలి. అనగా ఒక సంఖ్యను యాదృశ్చికంగా ఎన్నుకొనవలెను. ఈ సంఖ్య ఒకట్ల స్థానలో '6'వుండు సంభావ్యతను కనుగొనండి ?

సాధన : ఒకట్ల స్థానంలో 6 వుండు సంభావ్యత

$$= \frac{\text{6యొక్క పౌనఃపుణ్యం}}{\text{ఎన్నుకోబడిన దూరవాణి సంఖ్యలమొత్తం సంఖ్య}}$$

$$= \frac{14}{200} = 0.07$$

ఇదే విధంగా మిగిలిన అంకెల ఒకట్ల స్థానంలోవున్న సంఖ్యల ప్రాయోగిక సంభావ్యతను మనం పొందవచ్చును.

ఉదాహరణ 5: వెనుకటి క్రమంగా వచ్చు 250 రోజుల వాతావరణ సూచనలో 175 సూచనలు సరిగ్గా ఉన్నవని వాతావరణ శాఖ నమూనాలు సూచించుచున్నవి.

(i) సరైన సూచనలను ఇచ్చినటువంటి రోజుల సంభావ్య ఎంత?

(ii) సూచనలు సరిగ్గాలేని రోజుల సంభావ్యత ఎంత?

సాధన : నమూనాలు దొరికే మొత్తం రోజులు = 250

(i) P (సరైమ సూచనలు గల రోజు)

$$= \frac{\text{సూచనలు సరిగ్గా గల రోజుల సంఖ్యా}}{\text{నమూనాలు దొరికే మొత్తం రోజుల సంఖ్య}}$$

$$= \frac{175}{250} = 0.7$$

(ii) సూచనలు సరిగ్గా లేని రోజుల సంఖ్య $= 250 - 175 = 75$

అందు వలన (సూచనలు సరిగ్గాలేనిరోజు) $= \frac{75}{250} = 0.3$

గమనించండి : P (సూచనలు సరిగ్గాగల రోజు) +P(సూచనలు సరిగ్గా లేని రోజు)

$= 0.7 + 0.3 = 1$

ఉదాహరణ 6: ఒక టైర్ ఉత్పాదన కర్మాగారము టైర్ మార్పుచేయుటకు ముందు నమూనాలను పెట్టికొన్నది, పట్టిక 1000 చలించిన దూరపు ప్రకరణలు ఫలితాలను చూపించినది.

©KTBS Not to be republished

పట్టిక 15.8

దూరం (km)	4000 కన్నా తక్కువ	4000 నుండి 9000 వరకు	9001 నుండి 14000 వరకు	14000 కన్న ఎక్కువ
పౌనఃపుణ్యం	22	210	325	445

మీరు ఈ కంపెనీ టైర్ కొన్నచో క్రింది సంభావ్యతలను కనుక్కోండి.

(i) 4000 km కన్నా ముందే మార్పుచేయవలసిన అవసరం?

(ii) 9000 km కన్నా ఎక్కువైనప్పుడు టైర్ మార్పు?

(iii) 4000 km నుండి 14000 km వరకు మధ్యలో మార్పు చేయడం?

సాధన : (i) ప్రయత్నాల మొత్తం సంఖ్య = 1000

4000 km ల మొదటి టైర్ మార్పు చేయు పౌనఃపున్యం = 20

అందువలన P (4000 km కన్నా ముందే టైర్ మార్పు చేయుట) $= \frac{20}{1000} = 0.02$

(ii) 9000 km కాన్న దూరం ఎక్కువైన పౌనఃపున్యం $325 + 445 = 770$

అందువలన P (9000 km కన్నా ఎక్కువైన టైర్ మార్పు) $= \frac{770}{1000} = 0.77$

(iii) 4000 km మరియు 14000 km ల మధ్య టైర్ మార్పు చేయు పౌనఃపుణ్యం = $210 + 325 = 535$

అందువలన P (4000 km మరియు 14000 km ల మధ్య టయర్ మార్పుచేయుట) $= \frac{535}{1000} = 0.535$

ఉదాహరణ 7: ప్రతినెల ఘటక పరీక్షలలో ఒక విద్యార్థి పొందిన మార్కుల శాతమును క్రింది విధంగా ఇవ్వబడినది.

పట్టిక 15.9

ఘటక పరీక్ష	I	II	III	IV	V
పొందిన మార్కులశాతం	69	71	73	68	74

ఈ దత్తాంశాల అధారంగా ఘటక పరీక్షల్లో విద్యార్థులు 70% కన్ను ఎక్కువ మార్కులు పొందిన సంభావ్యత కనుగొనండి.

సాధన : జరిపిన ఘటక పరీక్షల మొత్తం సంఖ్య '5' విద్యార్థి 70% కన్న ఎక్కువ మార్కులు పొండిన ఘటక పరీక్షల సంఖ్య '3'.

అందువలన P (70% కన్నా ఎక్కువ పొందిన మార్కులు) $= \frac{3}{5} = 0.6$.

©KTBS Not to be republished

ఉదాహరణ 8 : ఒక నగరంలో ఒక భీమా కంపెనీ, వయస్సు మరియు ప్రమాదాల మధ్య సంబంధము కనుగొనుటకు యాదృశ్చికంగా 2000 మంది డ్రైవర్లను ఎన్నుకొనింది. ఒక డ్రైవర్‌కి ఇంకొక డ్రైవర్ నుండి ప్రాధాన్యత దొరకకుండా పొందిన దత్తాంశాలను కింది విధంగా పట్టికలో ఇవ్వబడినవి.

పట్టిక 15.10

డ్రైవర్ల వయస్సు	ఒక సంవత్సరంలోని ప్రమాదాలు				
(సం:)	0	1	2	3	3 కన్నా ఎక్కువ
18–29	440	160	110	61	35
30–50	505	125	60	22	18
50 కన్నా ఎక్కువ	360	45	35	15	9

నగరంలో యాదృశ్చికంగా ఎన్నుకోబడిన డ్రైవరుకు సంబంధించిన కింది విధంగా ఘటన సంభావ్యత.

(i) ఒక సంవత్సరంలో సరిగ్గా 3 ప్రమాదములు చేసిన 18-29 సం:డ్రైవర్లు.

(ii) ఒక సంవత్సరంలో ఒకటి లేదా ఎక్కువ ప్రమాదాలు చేసిన 30-35 సంవత్సరాల డ్రైవర్ల సంఖ్య.

(iii) ఒక సంవత్సరంలో ప్రమాదాలే చేయని డ్రైవర్లు.

సాధన : మొత్తం డ్రైవర్ల సంఖ్య = 2000

(i) ఒక సంవత్సరంలో 3 ప్రమాదాలను చేసిన 18-29 సంవత్సరంల వయస్సుగల డ్రైవర్ల సంఖ్య = 61

అందువలన P (3) ప్రమాదాలు చేసిన సంవత్సరాల వయస్సు గల డ్రైవర్లు) $= \frac{61}{2000} = 0.0305 \approx 0.031$

(ii) ఒక సంవత్సరంలో 1 లేదా ఎక్కువ ప్రమాదాలను చేసిన 30-35 సంవత్సరాల వయస్సు గల డ్రైవర్ల సంఖ్య = 125 + 60 + 22 + 18 = 225

అందువలన P(1) లేదా ఎక్కువ ప్రమాదాల చేసిన 30-35 సంవత్సరాల వయస్సుగల (డ్రైవర్లు)

$= \frac{225}{2000} = 0.1125 \approx 0.113.$

(iii) ఒక సం.లో ప్రమాదాలు చేయని డ్రైవర్ల సంఖ్య = 440 + 505 + 360 = 1305

అందువలన P(ప్రమాదాలు చేయని డ్రైవర్లు) $= \frac{1305}{2000} = 0.653$.

ఉదాహరణ 9 : ఒక తరగతిలో 38 మంది విద్యార్థుల బరువులను చూసించు పౌనఃపున్యం

©KTBS Not to be republished

వితరణా పట్టికను పరిగణించి(అద్యాయం 14లోని ఉదాః 4లోని పట్టిక 14.3).

(i) 46-50kg వర్గాంతరంలోని తరగతి విద్యార్థుల బరువు సంభావ్యతను కనుక్కోండి.

(ii) ఇందులోని సంభావ్యత '0' మరియు సంభావ్యత '1' కలిగిన రెండు ఘటలను రాయండి ?

సాధన :(i) విద్యార్థుల మొత్తం సంఖ్య 38 మరియు బరువులు 46-50kg వర్గాంతరములోని విద్యార్థుల సంఖ్య '3'.

అందువలన P (46-50kg వర్గాంతరంలోని విద్యార్థుల బరువు) $= \frac{3}{38} = 0.079$

(ii) ఉదాహరణకు 30kg ల బరువు గల విద్యార్థియొక్క ఘటనను తీసుకోండి. కాని ఈ బరువు విద్యార్థి ఉండడు. కనుక ఈ ఘటన సంభావ్యత '0'(శూన్యం) ఇదే విధంగా 30 kgల కన్నా ఎక్కువ బరువు గల విద్యార్థుల సంభావ్యత $\frac{38}{38} = 1$ అయివుండును.

ఉదాహరణ 10 : విత్తనములు నింపిన 5 సంచుల నుండి ప్రతి సంచిలో 50 విత్తనములు యాదృశ్చి కంగా ఎన్నుకోబడినవి. మరియు వాటిని మొలక వచ్చుటకు వాటికి అనుకూల వైన వాతావరణంలో పెట్టబడినవి. 20 రోజుల తర్వాత మొలకెత్తని ప్రతి సంచిలో విత్తనముల సంఖ్యను లెక్కించి, క్రిందివిధంగా నమోది చేయండి.

పట్టిక 15.11

సంచి	1	2	3	4	5
మొలకెత్తిన విత్తనముల సంఖ్య	40	48	42	39	41

కింది విధంగా మొలకెత్తిన విత్తనముల సంభావ్యత కనుక్కోండి.

(i) ఒక సంచిలో 40కన్నా ఎక్కువ విత్తనముల.

(ii) ఒక సంచిలో 49 విత్తనములు.

(iii) ఒక సంచిలో 35 కన్నా ఎక్కువ విత్తనములు.

సాధన : మొత్తం సంచుల సంఖ్య 5

(i) 50 సంచులలో 40కన్నా ఎక్కువ మొలకెత్తని విత్తనములు సంచుల సంఖ్య 3

P(1 సంచిలో 40 కన్నా ఎక్కువ విత్తనములు మొలకెత్తెను) $= \frac{3}{5} = 0.6$

(ii) 49 విత్తనములు మొలకెత్తిన సంచులసంఖ్య = 0

P(1 సంచిలో 49 విత్తనములు మొలకెత్తిన సంచుల సంఖ్య) $= \frac{0}{5} = 0$

(iii) 35 కన్నా ఎక్కువ విత్తనములు మొలకెత్తిన సంచులు సంఖ్య = 5

అందువలన కావలసిన సంభావ్యత $= \frac{5}{5} = 1$

©KTBS Not to be republished

షరా (Remark) : పై ఉదాహరణలన్నిటిలో ఒక ఘటన యొక్క సంభావ్యత '0' మరియు '1' మధ్య ఏదైనా భిన్నామైయుంటుందని మీరు గమనించవచ్చు.

అభ్యాసము 15.1

1. ఒక క్రికెట్ పందెంలో ఒక బ్యాట్స్ ఉమెన్ (Batswomen) ఆమె ఎదుర్కొన 30 బంతులలో 6 బౌండరలు కొట్టను. ఆమె బౌండరిని కొట్టని సంభావ్యతను కనుగొనండి.

2. ఇద్దరు పిల్లలు గల 1500 కుటుంబలను యాదృశ్చికంగా ఎన్నుకో బడినది. మరియు కింది దత్తాంశాలను నమోదించడమైనది.

ఒక కుటుంబంలోని బాలికల సంఖ్య	2	1	0
కుటుంబాల సంఖ్య	475	814	211

యాదృశ్చికంగా ఎన్నుకోబడిన కుటుంబాలలో
(i) ఇద్దరు అమ్మాయిలు గల (ii) ఒక అమ్మాయిగల (iii)అమ్మాయితే లేని కుటుంబంలో సంభావ్యతను కనుగొనండి.

3. అధ్యాయం 14వ ఘటకం 14.4 యొక్క ఉదాహరణ 5 ను చూడండి. తరగతిలో ఆగష్టు నెలలో పుట్టిన విద్యార్థుల సంభావ్యతను కనుగొనండి.

4. మూడు నాణ్యములను ఏక కాలంలో 200 సార్లు ఎగుర వేసినపుడు వివిధ పర్యవసానాల పౌనఃపుణ్యం. ఈ క్రింది విధంగా ఇవ్వడమైనది.

పర్యవసానం	3 బొమ్మలు	2 బొమ్మలు	1 బొమ్మ	బొమ్మలేని
పౌనఃపుణ్యం	23	72	77	28

మూడు నాణ్యములను మరల ఒకే కాలంలో ఎగురచేసినపుడు 2 బొమ్మలు పడు సంభావ్యతను కనుక్కోండి.

5. ఒక సంస్థలో 2400 కుటుంబాలను యాదృశ్చికంగా ఎన్నుకొని వాటి ఆదాయపుస్థాయి మరియు కుటుంబంలోనివున్న వాహనాల సంఖ్య మధ్య ఉన్న సంభందంను కనుగొనుటను సర్వేచేశారు. సేకరించని వివరాలు కింది పట్టికలో పట్టిచేయబడినవి.

నెలసరి ఆదాయం (రూ/- లలో)	కుటుంబానికి వాహనాలు			
	0	1	2	2 కన్న ఎక్కువ
7000 కన్నా తక్కువ	10	160	25	0
7,000–10,000	0	305	27	2
10,000–13,000	1	535	29	1
13,000–16,000	2	469	59	25
16,000 కన్నా ఎక్కువ	1	579	82	88

©KTBS Not to be republished

ఇపుడు ఒక కుటుంబంను ఎన్నుకొంటే క్రిందివిధంగా కుటుంబంను ఎన్నుకొన్న సంభావ్యతను కనుగొనండి.

(i) నెలసరి ఆదాయం ₹ 10,000 - 13,000 మరియు సరిగ్గా 2 వాహనములను కలిగి ఉండును.

(ii) నెలసరి ఆదాయము ₹ 16,000 లేదా ఎక్కువ మరియు సరిగ్గా 1 వాహనమును కలిగియుండును.

(iii) నెలసరి ఆదాయం ₹ 7,000 కన్నా తక్కువ మరియు వాహనం లేకపోవడం.

(iv) నెలసరి ఆదాయం ₹ 13,000 – 16,000 మరియు 2 కన్నా ఎక్కువ వాహనములను కలిగియుండును.

(v) 1కన్న ఎక్కువ వాహనలు లేకుండుట.

6. అధ్యాయం 14యొక్క 14.7పట్టికను చూడండి.

(i) ఒక విద్యార్థి గణిత పరీక్షలో 20% కన్నా తక్కువ మార్కులు పొందిన సంభావ్యతను కనుగొనండి.

(ii) 60 లేదా అంతకన్నా ఎక్కువ మార్కులు పొందిన విద్యార్థుల యొక్క సంభావ్యత కనుక్కోండి.

7. సాంఖ్యక శాస్త్ర విషయం గురించి విద్యార్థుల అభిప్రాయమును తెలుసుకొనడానికి 200 మంది విద్యార్థుల ఒక సమీక్ష జరిపించడం జరిగినది. కింది పట్టికలో దత్తాంశాలను నమోదుచేయడమైనది.

అభిప్రాయము	విద్యార్థుల సంఖ్య
ఇష్టపడేవారు	135
ఇష్టపడనివారు	65

8. అభ్యాసము 14.2లో 2వ ప్రశ్నను గమనించండి. ఈ క్రింది విధంగా ఒక ఇంజనీర్ నివాసముండు ప్రాయోగిక సంభావ్యతను కనుక్కోండి.

(i) పని చేయు స్థలము నుండి 7km తక్కువ దూరంలో వున్న.

(ii) పని చేయు స్థలము నుండి 7km లేదా అంతకన్నా ఎక్కువ దూరంలోవున్న.

(iii) పని చేయు స్థలము నుండి $\frac{1}{2}$ km దూరంలో కంటే తక్కువ దురంలో ఉన్న.

9. **కార్యాచరణము** : నిర్ధిష్టమైన సమయంలో మీ పాఠశాల గేటు ఎదురు నుండి పోయే ద్విచక్ర, త్రిచక్ర మరియు నాలుగు చక్రాల వాహనాల సంఖ్యను(పౌనఃపున్యంను).

©KTBS Not to be republished

నమోదు చేయండి. మీరుచూసిన మొత్తం వాహనాలలో ఒక వాహనం ద్విచక్ర వాహన మగు సంభావ్యతను కనుగొనండి.

10. **కార్యాచరణం** : మీ తరగతిలోని విద్యార్థులకు 3 అంకెల ఒక సంఖ్యను రాయమని చెప్పండి. యాదృచ్ఛికంగా ఒక విద్యార్థిని ఎన్నుకొని అతడు/ ఆమె రాసిన సంఖ్యను 3 చే భాగించబడు సంభావ్యత ఎంత ?3 భాగించబడిన సంఖ్యయొక్క అంకెల మొత్తం 3 చే భాగింపబడుతుందని జ్ఞాపకం తెచ్చుకోండి?

11. 5kg లు అని నమోదు చేసిన 11 సంచుల గోధుమ పిండి కలదు, ఆ సంచులు కింది విధంగా గోధుమ పిండి బరువు పొందియున్నది. (kg లలో)

4.97 5.05 5.08 5.03 5.00 5.06 5.08 4.98 5.04 5.07 5.00

ఒక సంచిని యాదృచ్ఛికంగా ఎన్నుకొన్నప్పుడు 5kg కన్నా ఎక్కువ గోధుమ పిండిని కలిగిన సంచిని పొందు సంభావ్యతను కనుక్కోండి.

12. అభ్యాసము 14.2 లోని 5 వ ప్రశ్నలో 30 రోజులలో ఒక నగరంలో గల సల్ఫర్-డై-ఆక్సైడ్ ప్రమాణమును (మిలియన్ భాగాలల్లోని) PPM పౌనఃపున్య వితరణా పట్టికలో తయారు చేయమని అడిగారు. ఈ పట్టికనుండి ఈ ఏదైనా రోజులలో 0.12-0.16 వర్గాంతరంలోని సల్ఫర్-డై-ఆక్సైడ్ యొక్క ప్రమాణపు సంభావ్యతను కనుక్కోండి.

13. అభ్యాసం 14.2యొక్క ప్రశ్న 1లోని తరగతి 30 విద్యార్థుల రక్తపు గుంపుల గురించి పౌనఃపుణ్య వితరణ పట్టికను ఉపయోగించి తరగతిలోని ఒక విధ్యార్థిని యాదృచ్ఛికంగా ఎన్నుకోబడిన రక్తపు గుంపు ABలను కలిగియున్న నంభావ్యతను కనుక్కోండి.

15.3 సారాంశం

ఈ అధ్యాయంలో మీరు క్రింది అంశాలను అధ్యయనం చేశారు.

1. కొన్ని ప్రయోగాలలో పర్యవసానాలన్నీ ఏర్పడుటకు సమాన అవకాశాలు ఉంటాయి.

2. 'E' ఘటనపు ప్రాయోగిక సంభావ్యత P(E)

$$P(E) = \frac{\text{ఘటన E సంభవించు ప్రయత్నాల సంఖ్య}}{\text{ప్రయత్నాల మొత్తం సంఖ్య}}$$

3. ఒక ఘటన సంభావ్యత 0 మరియు 1ల మధ్య వుండును (0 మరియు 1 ను కలిపి).

© KTBS Not to be republished

అనుబంధ – 2

గణితశాస్త్ర ఆకృతీకరణ పరిచయం

A 2.1 పరిచయం

మీరు మీ ముందు తరగతులలో మీ చుట్టూ వాస్తవ ప్రపంచానికి సంబంధించిన సమస్యలను పరిష్కరించారు. ఉదాహరణకు సరళవడ్డీ సూత్రం $\left(I = \frac{PnR}{100}\right)$ ను ఉపయోగించి కనుగొన్నారు. ఈ సూత్రము వడ్డీ దానికి సంబందించిన మూడు అంశాలైన అసలు, కాలం, వడ్డీ రేటు వీటికి గల సంబందాన్ని తెలుపుతుంది. ఈ సూత్రము గణిత నమూనాకు ఒక ఉదాహరణ. గణిత నమూనాలు అంటే నిజ జీవితంలోని కొన్ని సన్నివేశాలను వివరించే గణిత సంబంధ సూచకం.

నిజజీవితంలో అనేక సమస్యలకు పరిష్కారం చూపడానికి గణిత నమూనాలు ఉపయోగ పడతాయి.

- ఒక ఉపగ్రహాన్ని కక్ష్యలోనికి ప్రవేశపెట్టడం.
- వర్షాకాలం వచ్చే సూచనను అంచనా వేయడం.
- వాహనాల వల్ల కలుగు వాతావరణ కాలుష్యాన్న నియంత్రించడం.
- నగరాలలో ట్రాఫిక్ రద్దీని తగ్గించడం.

ఈ అధ్యాయంలో గణిత నమూనాను రచించ ప్రక్రియలను మీకు పరిచయం చేస్తూ దానిని ''గణితశాస్త్ర ఆకృతీకరణ'' అని అంటారు. గణిత శాస్త్ర ఆకృతీకరణలో ఒక నిజ జీవిత సమస్యను తీసుకొని దానికి సమానమైన గణిత సమస్యగా రాస్తాము. ఈ గణిత నమూనాలోని సమస్యను పరిస్కరించి దాని ఫలితాంశాన్ని నిజ జీవన సమస్య యొక్క భాష్య పదాలలో విశ్లేషిస్తాము. తరువాత ఈ పరిష్కారము నిజ జీవనానికి ఆధారంగా ఎంత వరకు సంబంధం ఉందని గమనిస్తాము. అందుకు గణతీయ ఆకృతీకరణ ఈ దశలలో కూడి ఉంటుంది.

©KTBS Not to be republished

సూత్రకరణం (Formulation)

పరిష్కారం (Solution)

విశ్లేషణ (వ్యాఖ్యానం) (interpretation)

దృవీకరణం (validation)

విభాగం (సెక్షన్) A 2.2 లో మీరు పద సమస్యలను పరిష్కరించడానికి ఈ విధానాన్ని పరిశీలించుట ద్వారా ప్రారంబిద్దాం. మీరు వెనుకటి తరగతులలో పరిష్కరించిన పద సమస్య (Word Problem) లకు పోలిన కొన్ని సమస్యలను ఇపుడు చర్చిద్దాం. తరువాత సమస్యను పరిష్కరించడానికి ఉపయోగించు దశలలో కొన్నింటిని గణిత ఆకృతీకరణలలో ఉపయోగిస్తాం అనుటను చూద్దాం.

విభాగం A2.3 లో కొన్ని సరళ మాదిరిలను ప్రస్తావిద్దాం.

విభాగం A2.4 లో మొత్తం ఆకృతీకరణ ప్రక్రియ మరియు దాని ఉపయోగం మరియు పరిమితుల గురించి ప్రస్తావిద్దాం.

A2.2 పద సమస్యల సమీక్ష

ఈ విభాగంలో వెనుకటి తరగతులలో మీరు పరిష్కరించిన కొన్ని సమస్యలను ప్రస్తావిద్దాం ప్రత్యక్ష వైవిధ్యంలో సమస్యలను ప్రారంబిద్దాం.

ఉదాహరణ 1 : నా కారులో 432 km దూరం ప్రయాణించడానికి 48(Lif)t లో పెట్రోలు ఖర్చు అయ్యిది. ఆ ప్రదేశానికి చేరుకోవడానికి నేను ఇంకా 180 km ప్రయాణించాలి. నాకు ఇంకా ఎంత పెట్రోలు అవసరం.

సాధన : సమస్యను పరిష్కరించడానికి ఏ దశలలో కూడి ఉన్నిదో చూద్దాం.

దశ 1 : సూత్రీకరణ

ఎక్కువ దూరం ప్రయాణించడానికి ఎక్కువ పెట్రోలు అవసరం. అని మీకు తెలుసు అంటే ప్రయాణించిన దూరానికి అనుగునంగా పెట్రోలు ప్రమాణం నేరుగా మారుతుంది.

432 km ప్రయాణించడానికి కావలసిన పెట్రోలు = 48 లీటర్లు

180 km ప్రయాణించడానికి కావలసిన పెట్రోలు = ?

గణిత వివరణ :

x = నేను ప్రయాణించిన దూరం

y = నాకు కావలసిన పెట్రోలు

x తో పాటు నేరుగా y కూడా మారుతుంది.

©KTBS Not to be republished

అందువలన $y = kx$ (ఇక్కడ k ఒక స్థిరాంకం) నేను 432km లను 48 లీటర్ల పెట్రోలుతో ప్రయాణించవచ్చు.

కాబట్టి $y = 48, x = 432$.

అందువలన $K = \frac{y}{x} = \frac{48}{432} = \frac{1}{9}$

$y = kx$ కావున $y = \frac{1}{9} x$ .... (1)

సూత్రం (1) : కావలసిన పెట్రోలు మరియు ప్రయాణించు దూరాల సంబంధాన్ని వివరిస్తుంది.

దశ 2 : సాధన :

180 km ప్రయాణించడానికి కావలసిన పెట్రోలును మనం లెక్కించాలి.

అంటే $x = 180$ అయినపుడు y ఎంత అవుతుంది అని చూడాలి. $x = 180$ అని (1) లో ప్రతిక్షేపించిన $y = \frac{1}{9}x$, $y = \frac{1}{9} \times 180 = \frac{180}{9} = 20$

$y = 20$.

వ్యాఖ్యానం 3 : $y = 20$, అయినందువల్ల మనం 180 km ప్రయాణించడానికి 20 లీటర్ల పెట్రోలు కావాలి.

ఇపుడు ఒక విషయం ఆలోచించండి. ఇదే సూత్రాన్ని మీరు ప్రయాణించు సం దర్భాలకు అన్వయించవచ్చా? అది సాధ్యం కాకపోవచ్చు ! సందర్భం ఇలా ఉంది మీరు ప్రయాణిస్తున్న 432km దారి పర్వతాల మధ్య మరియు మిగిలిన 180 km సమతల ప్రదేశం అయ్యిఉంది. మొదటి ప్రయాణంలో ఎక్కువ పెట్రోలు ఖర్చు అవుతుంది (కొండ, గుట్టలలో ప్రయాణం) అదే రేటులో సమతల ప్రదేశాలలో పెట్రోలు ఖర్చు కాదు. ఇక్కడ తక్కువ ప్రమాణంలో ఖర్చు అవుతుంది. ఈ రెండు విషయాలలో ప్రయాణ పరిస్థితులు ఒకే విధంగా ఉంటే సూత్రం అన్వయించబడుతుంది. అల లేక పోతే అన్వయించదు. లేదా ప్రయాణ పరిస్థితులలో మార్పు ఉన్నందువల్ల ప్రయాణ పరిస్థితికి అనుగుణంగా పెట్రోలు ఖర్చు చాలా తక్కువ కూడా కావచ్చు మనం పెట్రోలు ఖర్చు ప్రయాణించిన ప్రత్యక్ష నిష్పత్తిలో ఉంటుంది. అని చెప్పేటపుడు 'దారి' ప్రయాణం రెండూ కూడా ఒకే విధంగా ఉంటాయి అనే ఊహాలో ప్రారంభించాము.

©KTBS Not to be republished

ఉదాహరణ 2 : సుధీర్ 8% వడ్డీరేటులో ₹ 15,000/ లను పెట్టుబడి పెట్టారు. ఈ డబ్బును వెనక్కి తీసుకొని ₹ 19.000/- విలువ గల వాషింగ్ మిషన్ కొనాలనుకున్నాడు వాషింగ్ మిషన్ కొనాలంటే ఈ ₹ 15,000/- ను ఎంత కాలం వరకు పెట్టుబడిగా ఉంచాలి.

సాధన :

దశ 1 : సూత్రీకరణ

ఈ సన్నివేశంలో మనకు అసలు, వడ్డీరేటు తెలుసు. ఈ ₹ 15,000/లకు వడ్డీడబ్బు చేరిస్తే వాషింగ్ మిషన్ కొనవచ్చు. డబ్బు ఎంత కాలం పెడి తన ఇష్టం నెరవేరుతుంది. అని లెక్కించ వలసి ఉంది.

గణిత వివరణ :

సరళ వడ్డీ సూత్రం = $I = \frac{Pnr}{100}$, P = అసలు, n = కాలం, r = వడ్డీరేటు

I = సరళ వడ్డీ

ఈ సమస్యలో P = 15,000/-, n = ? R = 8%

సుధీర్‌కు కావలసిన డబ్బు = ₹ 19,000/-

అందువలన కావలసిన వడ్డీ = ₹ (19,00015,000) = ₹ 4,000/

₹ 15,000/ లను పెట్టుబడి పెట్టవలసిన కాలం = n

₹ 15,000/ లకు వడ్డీరేటు 8%

సంపాదించు వడ్డీ = I

$I = \frac{1500 \times n \times 8}{100} = 1200\, n$

$I = 1200\, n$ .... (1)

(1) ₹ 15,000/ లను 8% వడ్డీరేటులో సరళ వడ్డీ మరియు కాలానికి గల సంబంధాన్ని సూచిస్తుంది.

మనకు ₹ 4000/- కావాలి.

$4000 = 1200\, n$ .... (2)

$n = 4000/1200 = \frac{40}{12} = 3\frac{4}{12} = 3\frac{1}{3} = 3\frac{1}{3}$

©KTBS Not to be republished

దశ 3 : **వ్యాఖ్యానం** : $n=3\frac{1}{3}$, మరియు సంవత్సరంలో $\frac{1}{3}$ వ భాగం అంటే 4 నెలలు అందువలన సుధీర్ 3cm 4 నెలల తరువాత వాషింగ్ మెషిన్ కోనవచ్చు. ఇక్కడ రెండు నిబంధనలను ''ఊహించాలి. అవి ఏమంటే

(1) ఈ అవధిలో వడ్డీరేటు మారదు.

(2) వాషింగ్ మెషన్ విలువ ఎక్కువకాదు. $I = \frac{Pnr}{100}$ ఈ సూత్రం అన్వయంకాదు.

ఉదాహరణ 3 : నది తీరానికి ఇరువైపులా ఉన్న రెండు ఊర్లు/గ్రామాలకు సంపర్కం కల్పించు మోటారు బోటు (ఓడ) ఒక ఊరి నుండి నది ప్రవాహపు ఎదురు తీరంలోని ఊరికి చేరడానికి 60గం॥ సమయం పడుతుంది. అదే మోటారు బోటు ఆ పై తీరంలోని ఊరినుండి క్రింది తీరం లోని గ్రామాన్ని చేరడానికి 5గం॥ సమయం పడుతుంది. నది నీటి ప్రవాహపు వడి (speed) $2 km/h$ ఉంటే స్థిరనీటిపై మోటారు బోటు వేగాన్ని లెక్కించండి.

సాధన :

దశ 1: **సూత్రీకరణం :** మనకు నది ప్రవహించు నీటి వడి మరియు మోటారు బోటు రెండు ఊర్లను చేరుటకు తీసుకొను సమయం తెలుసు. మనం స్థిర నీటిపై బోటు వేగాన్ని కనుగొనవలసి ఉన్నది.

గణిత వివరణ : బోటువేగం x అనుకొందాం తీసుకొన్న కాలం t చలించిన దూరం y అనుకొం దాం.

దూరం = వేగం × కాలం అని తెలుసు.

అపుడు $y = tx$ .... (1)

రెండు ఊర్ల మధ్య దూరం 'd' అనుకోండి నీటి ప్రవాహ నికి వ్యతి రేఖంగా బోటు చలించినపుడు బోటు యొక్క వాస్తవ వేగం = బోటువేగం – నదీప్రవాహ వేగం ఎందుకంటే బోటు నదీప్రవాహనికి వ్యతిరేకంగా పయాణిస్తుంది. అందువలన పై తీరంలోని ఊరికి పోయే బోటు వేగం = $(x - 2)\ km/h$

పై తీరంలోని ఊరికి చేరడానికి పట్టిన కాలం = 6 గం॥ అందువలన (1) నుండి

$d = 6(x - 2)$ అని రాద్దాం .... (2)

బోటు క్రింది తరంలోని ఊరికి చలించునపుడు బోటువేగం నదీ ప్రవాహపు వేగంలో చేరుతుం దికదా?

©KTBS Not to be republished

ఈ సందర్భంలో బోటువేగం = $(x + 2)$ km/h

పై తీరంలోని ఊరినుండి క్రింది తీరంలోని ఊరికి దూరంలో వ్యత్యాసం లేదు.

ఇపుడు తీసుకొన్న కాలం = 5గం॥ అందువలన

అందువలన $d = 5(x + 2)$ .... (3)

(2) మరియు (3) లను ఉపయోగిస్తే $5(x + 2) = 6(x - 2)$

.... (4)

దశ 2 : పరిష్కారాన్ని కనుగొనడం

$$5(x + 2) = 6(x - 2)$$
$$\therefore 5x + 10 = 6x - 12$$
$$6x - 5x = 10 + 12 \therefore x = 22.$$

$\therefore$ బోటు వేగం = 22 km/h

దశ 3 : వ్యాఖ్యానము

$x = 22$ అయినందువలన స్థిరనీటి పై బోటు వేగాం (వడి) 22 km/h

ఇంత వరకు ప్రస్తావించిన పద సమస్యలను పరిష్కరించుటలో మూడు దశలను ఉపయోగించడం జరిగింది అవి

1. సూత్రీకరణం. (Formulation)

మనము సమస్యలను విశ్లేషించి, పరిష్కరించుటలో ప్రధానంగా ప్రభావం చూపే అంశాలను గమనిస్తాము. ఇటి సందర్భోచిత అంశాలు మన మొదటి సమస్యలో సందర్భోచిత అంశాలు అంటే

(i) ప్రయోగించిన దూరం మరియు ఉపయోగించిన పెట్రోలు.

(ii) దారి విధానం (స్థితి) ప్రయాణిస్తున్న వేగం మొదలైన చిన్న చిన్న అంశాలను కూడా గమనించాలి.

అలాకాక పోతే సమస్యను పరిష్కరించడం చాలా (కష్టం) అయ్యేది. మనం పట్టించుకోని కారకాలను అసంబద్ధకారకాలు అంటారు. తర్వాత మనం సమస్యను ఒకటి లేక ఎక్కువ సూత్రాల రూపంలో పరిష్కరిస్తాము.

2. సాధన (Solution) : దశ – 1లో గణిత సమీకరణాలను తగిన విధానాలను సూత్రాలను ఉపయోగించి పరిష్కరిస్తాము.

©KTBS Not to be republished

3. **వ్యాఖ్యానము (Interpretation) :** దశ – 2లో పొందిన పరిహారాన్ని దత్త సమన్వయ సందర్భానికి ఎలా సరిపోతుందా అని చూస్తాము.

మీకు అభ్యాసానికై కొన్ని సమస్యలు ఇవ్వబడినవి. ఈ సమస్యలను ''మూడు దశలను అన్వయించుకొని పరిష్కరించడం ద్వారా మీకు ఎంతవరకు అర్ధమయినది అని తెలుసుకోవడాన్ని మీరు ఇష్టపడతారు.

పై ఉదాహరణలలో, నదీప్రవాహ వేగము అన్నిచోట్లా ఒకేలా ఉండదు అని మనకు తెలుసు. బోటు నదీ తీరము నుండి చలించి నది మధ్యకు వస్తుంది. చేర్చ వలసిన తీరానికి దగ్గరగా వచ్చినపుడు చలనవేన్నిగా తగ్గించి చలించి ఆ తీర సమీపానికి చలిస్తుంది. కావున బోటు వేగంలో తీరం మధ్యభాగం నేటలో కొంచెం వ్యత్యాసం ఉంటుంది. తీర సమీపంలో బోటుకొంత సేపు మాత్రమే ఉండడం వలన నదీ ప్రవాహవేగము కొంచెం సేపు మాత్రమే పరిణామం చూపిస్తుంది. కావున మనం ఈ సమయాలలో నది యొక్క వేగపు వ్యత్యాసము పట్టించుకోనవసరం లేదు. అదేవిధంగా బోట్ వేగంలోని వ్యత్యాసం కూడ పట్టించుకోనవసరం లేదు. మరొక అశమేమంటే నదినీటికి మరియు బోటు కింది భాగానికి మధ్యన ఘర్షణ ఉంటుంది. ఇది కొంచెం ప్రమాణంలో ఉంటుంది. అందువల్ల దీని పరిణామాన్ని అత్యంత తక్కువ అని భావిస్తాము.

అందువలన,

1. నది ప్రవాహపు వేగము అలాగే బోటు వేగము అన్ని సమయాలలో స్థిరంగా ఉంటుంది.
2. నీరు మరియు బోటు, అలాగే గాలి ఒత్తిడి నుండి కలుగు ఘర్షణను కూడా పట్టించుకోనవసరం లేదు అని ఊహానిర్ణయం (assume) చేస్తాం.

ఈ రెండు ఊహా నిర్ణయాలను ఆధారం చేసుకొని, మనం బోటు వేగాన్ని లెక్కిస్తాము.

అభ్యాసం A2.1

ఈ క్రింది సమస్యలలో సూత్రీకరణం, సాధన, వ్యాఖ్యానం దశలలోగల సుసంబద్ధ, అసంబద్ధ అంశాలు ఏవి అనుటను స్పష్టంగా తెలపండి.

1. ఒక కంపెనీకి కొంతకాలం మాత్రం కంప్యూటర్ అవసరం ఉందని, అనుకొందాం దానికిగాను కంప్యూటర్ బాడుగకు తీసుకొనవచ్చును లేదా కొనవచ్చును. ప్రతి నెల బాడుగ ₹ 2,000/ దాని విలువ ₹ 25,000/. కంప్యూటర్ దీర్ఘకాలం నీకు అవసరమైతే, ఇంత ఎక్కువ బాడుగకు తీసుకోవడం కంటే కంప్యూటర్‌ను తీసుకోవడమే చౌక అవుతుంది.

©KTBS Not to be republished

కంప్యూటర్ యొక్క అవసం ఒక నెల మాత్రమే అనుకుందాం, అపుడు బాడుగకు తీసుకోవడమే మంచిది అవుతుంది. కనీసం ఎంతకాలానికి ఉపయోగించు కంప్యూటర్‌నుకొనడం బాడుగ కంటే చౌక అని లెక్కించండి.

2. ఒక కారు A నుండి 40 km/h వేగం తో ప్రయాణించి B వద్దకు చేరుతుంది. అదేవిధంగా. B నుండి A కి ఒక కారు 30 km/h. వేగంలో ప్రయాణిస్తుంది. A మరియు B ల అంతరం 100 km అనుకుందాం ఎంత సమయం తర్వాత ఈ కార్లు రెండూ కలుస్తాయి లెక్కించండి.

3. భూమి నుండి చంద్రునికి గల దూరము 3,84,000 km భూమి చుట్టూ దాని మార్గం దాదాపు వృత్తాకారంలో ఉంటుంది. భూమిని చంద్రుడు ఒక చుట్టు వేయడానికి 24h కావాలి అని అనుకుందాం. చంద్రుడు ఏ వేగంతో తన కక్ష్యలో భూమిని చుట్టి వస్తుంది. లెక్కించండి

$(\pi = 3.14$ వృత్తపరిధి $= 2\pi r)$

4. ఒక కుటుంబం వాటర్ హీటర్ ఉపయోగించని నెలలో చెల్లించు విద్యుత్ బిల్ యొక్క సరాసరి

₹ 1,000/అదే విధంగా వాటర్ హీటర్ ఉపయోగించిన నెలలలో చెల్లించిన విద్యుత్ బిల్ యొక్క సరాసరి ₹ 1,240/-వాటర్ హీటర్ ఉపయోగించుటకు చెల్లించవలసిన డబ్బు గంటకు ₹ 8/-. ప్రతి రోజు వాటర్ హీటర్ ఉపయోగించు సరాసరి కాలావధిని కనుగొనండి.

A2.3 కొన్ని గణిత నమూనాలు

ఇప్పటి వరకు మనం చర్చలలో కొత్తదనం ఏమి లేదు. ఈ విభాగంలో ఇదివరకే ప్రస్తావించిన 3 దశలకు మరొకదశ చేర్చారు. అదే మంటే ధృవీకరణం (Validity) దశ. ధృవీకరణం అనగానేమి? నిజ జీవితంలో మన వాస్తవ జీవనానికి మ్యాచ్ కాని పరిహారాన్ని ఇచ్చు నమూనాను ఒప్పుకోలేము. వాస్తవంగా జవాబును పరీక్షించే ప్రక్రియ, అలాగే అవసరం ఉంటే గణిత వివరణను సరిచేయు కార్యాన్ని ధృవీకరణం అంటారు. నమూనాలో ఇది ముఖ్యమైన దశ. ఈ విభాగంలో దీనిని పరిచయం చేస్తున్నాము.

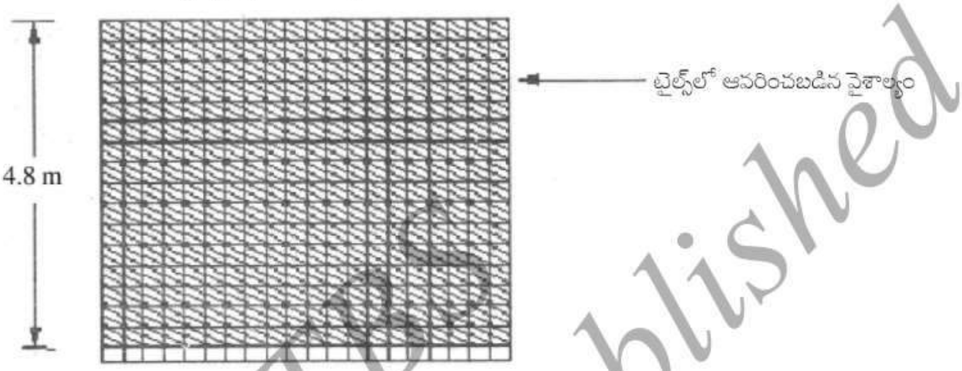
ధృవీకరణ తర్వాత రూపాంతరం చేయదగిన ఒక నమూనాలో ప్రారంభిద్దాం.

ఉదాహరణ 4 : మీరు 6m, పొడవు 5m వెడల్పు గల ఒక గదిని కలిగివున్నారు. అలాగే నేలకు భుజం 30cm గల చదరం గల మొసాయికే టైల్‌లు వేయవలసి ఉంది. ఐతే ఎన్ని చదరాలు అవసరం అవుతాయి. గణిత నమూనాను గీచి ఈ సమస్యను పరిష్కరించండి.

©KTBS Not to be republished

సాధన :

దశ 1: సూత్రీకరణం : మనం గది వైశాల్యము, అలాగే టైల్ వైశాల్యం పరిగణించాలి. ప్రతి టైల్(tile) పొడవు 30cm = 0.3m గది పొడవు 6m. అందువలన గది పొడవుకు వేయు టైల్స్ $\frac{6m}{0.3m}=20$ జోడించవచ్చు. (చిత్రం A2.1)



గదివెడల్పు5m,అందువలన $\frac{5m}{0.3m}=16.67$.అందువలన16టైల్స్‌గదివెడల్పుకుజోడించవచ్చు. అంటే మొత్తం గదికి 16 వరుసల టైల్స్ జోడించవచ్చు. వెడల్పు $16 \times 0.3 = 4.8m$ ను టైల్స్ వేయవచ్చు. అంటే $5 - 4.8 = 0.2m$ వెడల్పులో టైల్స్ వేయలేదు. 0.2m టైల్స్ ముక్కలతో నింపాలి. టైల్ 0.3 m దీనిని సమభాగాలుగా చేసిన 0.15 m ఇది 0.2m కంటే తక్కువ అందువలన టైల్స్‌ను 2 సమభాగాలు చేస్తే 2 భాగాలను ఉపయోగించలేము.

గణిత వివరణ

మనకు కావలసిన టైల్స్ సంఖ్య

= (పొడవునా కావలసిన టైల్స్ × వెడల్పునా కావలసిన టైల్స్) + నింపకుండా మిగిలిన వైశాల్యం --(1)

సాధన : మనమిదివరకే చూసినట్టు పొడవునా కావలసిన టైల్స్ 20 వెడల్పునా కావలసిన టైల్స్ 16 ఈ విలువలను (1)లో ఆదేశించినపుడు

$(20 \times 16) + 20 = 320 + 20 = 340.$

వ్యాఖ్యానం : మనకు మొత్తం గదికి వేయవలసిన టైల్స్ 340.

దృవీకరణం : నిజ జీవింలో మీ పనివాళ్ళు (టైల్స్ జోడించువారు) ఇంకొంచెం ఎక్కువ టైల్స్ అందించమని అడగవచ్చు. ఎందుకంటే కత్తరించునపుడు టైల్స్ పగిలిపోవచ్చు. మీ పనివాడు నైపుణ్యం కలవాడైతే టైల్స్ పగిలిపోకుండా పని చేయవచ్చు. నైపుణ్యం లేని పనివాడు ఎక్కువ

© KTBS Not to be republished

టైల్స్‌ను నిరుపయోగం చేయవచ్చు. దీనికోసం మనం సూత్రం (1) మార్చవలసిన అవసరం లేదు. ఈ సూత్రం మీకు కావలసిన టైల్స్ స్థూల పరిమాణాన్ని ఇస్తుంది. ఇంత చాలు. ఇప్పుడు మరొక సన్నివేశాన్ని పరిశీలిద్దాం.

ఉదాహరణ 5 :

2000 వ సం॥లో U.N (విశ్వసంస్థ) 191 సభ్యదేశాలు ఒక ప్రకటనకు సమ్మతించి సంతకం చేశారు. ఈ ప్రకటనకు సంతకం చేసిన దేశాలు 2015 సంవత్సరానికి ఖచ్చితమైన కొన్ని అభివృద్ధి లక్ష్యాలను సాధించాలని, దీనిని "మిలీనియం అభివృద్ధి లక్ష్యాలు" నిర్ణయించుకున్నారు.

అందులో ఒక లక్ష్యం 'లింగసమానత్యం'. ఈ లక్ష్యాన్ని సాధించామని తెలుసుకొనుటకు ప్రాథమిక, మాధ్యమిక, ఉన్నత పాఠశాల విద్య బాల బాలికల నిష్పత్తి సూచిస్తుంది. భారత దేశం కూడా సంతకం చేసిన సభ్యదేశం, అలాగే ఉన్నది. కింది పట్టికలో ప్రాథమిక పాఠ దాఖలైన విద్యార్థినుల శాతాల ప్రమాణమును చూపిస్తుంది.

పట్టిక **A2.1**

సంవత్సరం	విద్యార్థినుల దాఖలాతి (నమోదు)	
1991 – 92	41.9	
1992 – 93	42.6	
1993 – 94	42.7	
1994 – 95	42.9	
1995 – 96	43.1	
1996 – 97	43.2	
1997 – 98	43.5	
1998 – 99	43.5	
1999 – 2000	43.6 *	} దత్తాంశం తాత్కాలికం
2000 – 2001	43.7 *	} తాత్కాలిక దత్తాంశం
2001 – 2002	44.1 *	} తాత్కాలిక దత్తాంశం

మూలం : భారతద ప్రభుత్వపు విద్యాశిక్షణ సంస్థ (Web page) (Indicates that the data is Provisional)

ఈ దత్తాంశాన్ని ఉపయోగించుకొని ప్రాథమిక పాఠ శాలలో నమోదైన ఆడపిల్లల నిష్పత్తిని గణతీయంగా వివరించండి. సంవత్సరంలో విధ్యార్థినుల నమోదు నిష్పత్తి 50% అవుతుందా లెక్కించండి.

©KTBS Not to be republished

సాధన : మొదట మనం ఈ సమస్యను గణిత సమస్యగా పరిగణించాలి.

దశ 1 : సూత్రీకరణం :

పట్టిక A2.1 నుండి 1991-92 నుండి ప్రతిసంవత్సరం నమోదు చేయ బడి ఉంది. విద్యార్థులు విద్యాసంవత్సర ప్రారంభంలో నమోదు అయినందు వల్ల మనం 1991-92, 1992-93 అనుటకు బదులు 1991, 1992 ఈ విధంగా నమోదుచేయవచ్చు. విద్యార్థినుల నమోదు పట్టికలోని శాతములా కొనసాగుతుంది అనుకుందాం. కావున రెండు సం॥లు ముఖ్యమే (దీనిని పోలిన ఒక సన్నివేశం ₹ 1500 కు 8% రేటులో 3సం॥లకు వడ్డీని లెక్కించునప్పుడు అది 1999 నుండి 2002, అలాగే 2001 నుండి 2004 వరకు. అయితే ఒక ముఖ్యమైన అంశం. ఈ సం॥ రాలలోని వడ్డీరేటు)

ఇక్కడ కూడ 1991 నుండి నమోదు ఎలా పెరిగిందని 1991 నుండి ప్రారంభమైన సంవత్సరాలను గణనకు తీసుకోవచ్చు. 1991 ని 'O' వ సం॥ అని పరిగణించాలి. 1992కు 1వ సం॥ 1993కు 3వ సం॥ ఇదేవిధంగా బోటు పట్టిక A2.2 లో ఉండునట్లు లభిస్తుంది.

పట్టిక A2.2

సంవత్సరం	(దాఖలాతి) నమోదు %
0	41.9
1	42.6
2	42.7
3	42.9
4	43.1
5	43.2
6	43.5
7	43.5
8	43.6
9	43.7
10	44.1

పట్టిక A2.3 లో ప్రతిసంవత్సరం పెరుగుదల చూపుతుంది.

©KTBS Not to be republished

పట్టిక A2.3

సంవత్సరం	(దాఖలాతి) నమోదు %	పెరుగుదల
0	41.9	0
1	42.6	0.7
2	42.7	0.1
3	42.9	0.2
4	43.1	0.2
5	43.2	0.1
6	43.5	0.3
7	43.5	0
8	43.6	0.1
9	43.7	0.1
10	44.1	0.4

1991 నుండి 1992 సంవత్సరాంతం వరకు 41.9 నుండి 42.6%కు అంటే 0.7% పెరిగింది. రెండవ సంవత్సరం వరకు 42.6% నుండి 42.9 వరకు అంటే 0.1% పెరిగింది. పై పట్టిక నుండి నిర్దిష్టమైన పెరుగుదల సంబంధాన్ని గణనకు కాలావధి మరియు శాత ప్రమాణాన్ని రూపించడం కుదరదు. అయితే పెరుగుదల కొంచెం స్థిరంగానే ఉన్నది కేవలం మొదటి సంవత్సరం మరియు పదవ సంవత్సరంలో మాత్రమే వ్యత్యాసమున్నది. ఈ విలువలు సరాసరి పరిశీలిద్దాం.

$$\text{సరాసరి} = \frac{0.7+0.1+0.2+0.2+0.1+0.3+0+0.1+0.1+0.4}{10} = 0.22$$

అందువలన సరాసరి పెరుగుదల 0.22 శాతము అని అనుకుందాం.

గణిత వివరణ :

మనం దాఖలాతిని (నమోదు) 0.22% వలే పెరిగినది అని అనుకుందాం అందువలన మొదటి సంవత్సరం

దాఖలాతి పెరుగుదల శాతం (Enrolment percentage) = EP = 41.9 + 0.22.

రెండవ సంవత్సరం EP = 41.9 + 0.22 + 0.22 = 41.9 + 2 × 0.22

3 వ సంవత్సరం EP = 41.9 + 0.22 + 0.22 + 0.22

= 41.9 + 3 × 0.22.

©KTBS Not to be republished

అదే విధంగా n వ సంవత్సరం EP = 41.9 + 0.22n ($n \geq 0$ కాదు) ....(1)

సమస్యలో ఉన్నట్టు మనం దాఖలాతి శాతము (EP) = 50 అగుటకు ఎన్ని సంవత్సరములు అవుతుందని కనుగొన వలసి ఉన్నిది.

కావున సమీకరణం (1) లో n విలువ కనుగొనాలి

$$50 = 41.9 + 0.22\,n \qquad \text{..............(2)}$$

దశ 2 : **పరిష్కారం :** సమీకరణం (2) ను పరిష్కరించునపుడు

$$0.22\,n = 50 - 41.9 = 8.1$$

$$n = \frac{8.1}{0.22} = 36.8$$

దశ 3 : **వ్యాఖ్యానం :** సంవత్సరాల లెక్కింపు పూర్ణ సంఖ్యలలో ఉండాలి. కావున 36.8 బదులుగా 37 సంవత్సరాలు అనుకుందాం. అందువలన 50 శాతము దాఖలాతి 1991 + 37 = 2028 లో అవుతుంది సమస్య పరిష్కారం ఇక్కడికి ముగిసింది. అయితే నిజజీవితంలో దాని ధృవీకరణ సాధ్యమవుతుందా అని పరిశీలించాలి. గణిత లెక్కింపు నిజ జీవితంలో సన్నివేశాలకు తగినట్టు ధృవీకరణ కావాలి.

దశ 4 : నిజజీవనానికి అనుకూలత ఉందా? అని సమీకరణం (2)ను పరీక్షించాలి. సమీకరణం (2)ను ఉపయోగించుకొని సహజంగా జరిగిన పెరుగుదలకు సరాసరి పెరుగుదలకూ గల వ్యత్యాసాన్ని పట్టీ చేయండి.

పట్టిక A2.4

సం వత్సరం	దాఖలాతి (% లలో)	సమీకరణం (2) కు లభించిన విలువ % లలో	శాతములోని వ్యత్యాసం
0	41.9	41.90	0.00
1	42.6	42.12	0.48
2	42.7	42.34	0.36
3	42.9	42.56	0.34
4	43.1	42.78	0.32
5	43.2	43.00	0.20
6	43.5	43.22	0.28
7	43.5	43.44	0.06
8	43.6	43.66	– 0.06
9	43.7	43.88	– 0.18
10	44.1	44.10	0.00

© KTBS Not to be republished

సమీకరణం (2)లోని విలువకు మరియు వాస్తవ విలువల కంటే తక్కువ 0.3% నుండి 0.5% వరకు. తగ్గుతుంది.

ప్రతి సంవత్సరం1% నుండి 2% పెరుగుదల వల్ల 3 నుండి 5సంవత్సరాలలో ఈ విధంగా కావచ్చు. ఇంత ప్రమాణపు వ్యత్యాసాన్ని ఒప్పుకోవలసి ఉంటుంది. ఈ విషయంలో సూత్రం (2) మన గణిత నమూన.

ఒక వేల ఈ ప్రమాణ దోషము ఎక్కువ ప్రమాణ మైనది అనిపించి, మనం మన నమూనాను మెరుగు చేయవచ్చు. అపుడు మరల దశ – 1 కి వెళ్ళి సమీకరణం (2)ను మార్చవచ్చు అలా చేద్దాం.

దశ 1 : పునర్ సూత్రీకరణం (సూత్రీకరణ మెరుగు)

ఇపుడు మనం పెరుగుదల 0.22% స్థిరంగా ఉందని భావిస్తా. అయితే దోషాన్ని తగ్గించడానికి దోషనివారక అంశంను చేరుస్తాం. దానికోసం మనం దోషపు సరాసరిని లెక్కిద్దాం పట్టిక A2.4 ను చూడండి.

$$\text{దోషపు సరాసరి} = \frac{0+0.48+0.36+0.34+0.32+0.2+0.28+0.06-0.06-0.18+0}{10} = 0.18$$

దోషం సరాసరి 0.18ని తీసుకొని, సమీకరణపు విలువను సరి చేద్దాం.

మెరుగుపరిన గణిత వివరణ :

సరాసరి దోషాన్ని సమీకరణ (2)లో మనకు లభించిన శాతాన్ని కలుపుదారి. అందువలన మనకు సరిచేసిన సమీకరణం దొరుకుంది.

n వ సం॥లో దాఖలాతి శాత ప్రమాణం ($n \leq 1$ అయిన)

$$= 41.9 + 0.22\,n + 0.18 = 42.08 + 0.22\,n \qquad \text{............... (3)}$$

అందాజుగా సమీకరణం (2)ను సరిచేద్దాం

అందువలన n వ కొత్త సమీకరణం

$$50 = 42.08 + 0.22\,n \qquad \text{............... (4)}$$

©KTBS Not to be republished

దశ 2: **మార్చిన తర్వాత పరిష్కారం :** సమీకరణం (4)ను పరిష్కరిద్దాం.

$0.22\,n = 50 - 42.08 = 7.92$

$$n = \frac{7.92}{0.22} = 36$$

దశ 3 : **వ్యాఖ్యానం :** $n = 36$ అయినందువల్ల, ప్రాథమిక పాఠశాలా దశలో బాలికల దాఖలాతి ప్రమాణం 50% 1991 + 36 = 2027 లో అవుతుంది.

దశ 4 : మరొక సారి సమీకరణం (4)లో లభించిన నిలువలను వాస్తవ విలువలతో కలుపుదాం. అలాంటి పోలిక పట్టిక A2.5 లో చూపిస్తే.

పట్టిక A2.5

సంవత్సరం	దాఖలాతి %	(2) నుండి వచ్చిన విలువలు	విలువలు మధ్య వ్యత్యాసు	(4) నుండి వచ్చిన విలువలు	విలువల మధ్య వ్యత్యాసల
0	41.9	41.90	0	41.9	0
1	42.6	42.12	0.48	42.3	0.3
2	42.7	42.34	0.36	42.52	0.18
3	42.9	42.56	0.34	42.74	0.16
4	43.1	42.78	0.32	42.96	0.14
5	43.2	43.00	0.2	43.18	0.02
6	43.5	43.22	0.28	43.4	0.1
7	43.5	43.44	0.06	43.62	−0.12
8	43.6	43.66	−0.06	43.84	−0.24
9	43.7	43.88	−0.18	44.06	−0.36
10	44.1	44.10	0	44.28	−0.18

ఇపుడు (4)లో విలువ (2) లోని విలువలకంటే వాస్తవ విలువలకు దగ్గరగా ఉన్నాయి. అనుటను గమనించవచ్చు. అంటే 6వ వరుసలోని విలువలను సంకలనం చేస్తే దోషం '0' అని తెలుస్తుంది.

ఈ ప్రక్రియను ఇక్కడికి ముగిస్తాం. అందువలన సమీకరణం (4) మన గణిత వివరణ అవుతుంది మరియు అది దాఖలైన సంవత్సరాల సంఖ్య మరియు దాఖలాతి శాత ప్రమాణానికి గల సంబంధాన్ని తెలుపుతుంది. అందువలన మనం పెరుగదలను వివరించే గణాతి నమూనాను రాశాం.

పై సన్ని వేశాలలో మనం ఉపయోగించిన కార్య తంత్రాన్ని "**గణిత ఆకృతీకరణ**" అంటాం.

©KTBS Not to be republished

మన దగ్గర గల గణిత పరికరాల (Tools) లతో గణిత నమూనారచన (ఆకృతీకరణ) తయారు చేయడానికి ప్రయత్నించాము. మన వద్దగల దత్తాంశాలను ఇంకా పరిణాను కారిగా ఉపయోగించి మున్సూచన ఇచ్చే గణిత పరికరాలున్నాయి. అవి మీ తరగతి వ్యాప్తి కంటే ఎక్కవ మా ఉద్వేశ్యం మిమ్మలి 'గణిత ఆకృతీకరణ' పాఠ్యాంశంలో పాల్గొనేలా చేసి ఈ ప్రక్రియ ఎలా సాగుతుంది అని పరిచయం చేసేదేకాని దానివల్లన అందువలన ఖచ్చితమైన ముందుసూచననే తీసుకోవడ కాదు. ఈ దశలో ఇంతచాలు.

ఇంతవరకు మీరు పరిచయం చేసుకొన్న 'గణిత ఆకృతీకరణ' యొక్క దశలు మీరు అర్థం చేసుకున్నారు. దానిని ఇష్టపడతారని భావించాము దానికొరకు నిత్యం కొన్ని సమస్యలను అభ్యాములో ఇవ్వబడినవి ప్రయత్నించి, ఆనందించండి.

అభ్యాసం A2.2

1. ఒలంపిక్ క్రీడలలో 400మీ॥ పరుగు పందెము 1964 నుండి జరుగుతోంది. ఇందులో '(స్వర్ణ) పదకం' విజేతలు తీసుకున్న కాల పరిమాణంను పట్టికలో కలదు ఈ క్రీడాకారులు తీసుకున్న కాలం మరియు పందెం జరిగిన సంవత్సరం ఉపయోగించి 'గణిత సమూనా' రచించి దీని ఆధారంలో తదుపరి ఒలంపిక్స్‌లో 'స్వర్ణ పదకం' విజేత తీసుకొని, కాలపరిమాణాన్ని అంచాజు వేయండి.

ఒలంపిక్ క్రీలు 4 సం॥లకు ఒకసారి జరుగుతాయి

పట్టిక A2.6

సంవత్సరం	తీసుకున్న కాలపరిమాణం (స్వర్ణపదక విజేతలు) (సెకనులలో)
1964	52.01
1968	52.03
1972	51.08
1976	49.28
1980	48.88
1984	48.83
1988	48.65
1992	48.83
1996	48.25
2000	49.11
2004	49.41

©KTBS Not to be republished

A2.4 గణిత నమూనా తయారి దాని ప్రయోజనాలు మరియు పరిమితులు

గణిత నమూనాలతో కూడిన అంశాలను ఉదాహరణల ద్వారా చర్చించడాన్ని ముగిద్దాం. ఇదివరకు వివిధ ఘటకాల (విభాగాల) నేపథ్యంలో సంక్షిప్తంగా ఈ ప్రక్రియను పర్యావలోకనం మనకు సాధ్యమవుతుంది.

దశ 1 : సూత్రీకరణం : విభాగం A2.2 యొక్క ఉదాహరణ – 1 మరియు విభాగంలోని వ్యత్యాసాన్ని మీరు గమనించి ఉండవచ్చు. విభాగం A2.2 లో అన్ని సిద్ధంగా ఉన్నాయి. అయితే A2.3 ఉదాహరణలో అలా లేదు. మరియు గణిత సూత్రాన్ని (సమీకరణాన్ని) రూపించడానికి కొంచెం సమయం పట్టేది. సమీకరణం (1)ని రచించి, పరిష్కరించి, పరీక్షించినపుడు అది సమీకరణం (2)కన్నా ఉత్తమంగా లేదు అని తెలుసు. నిజ జీవన సన్నివేశాలలో సమీకరణం (1)ని పరిశీలించినపుడు సూత్రం (1)యొక్క అభివృద్ధి అవసరమనిపిస్తుంది. ఇది అత్యంత సాధారణం. మీరు నిజజీవన సమస్యలు, సన్నివేశాలును నివారించునప్పుడు సూత్రీకరణకు ఎక్కువ సమయం కావలసి ఉంటుంది.

ఉదాహరణకు న్యూటన్ యొక్క మూడు గమన నియమాలను తీసుకుందాం.

ఇవి గమనముయొక్క గణిత నిరూపణలు మరియు నిరూపించడానికి సులభంగా (సరళం గా)వున్నాయి.

ఈ నియమాలను నిరూపించడానికి ముందు న్యూటన్ చాలా ప్రయోగాలను చేసి కనుగొన్న దత్తాంశాలను, అలాగే వారికి ముందు శాస్త్రవేత్తలు చేసిన అధ్యయనంను అభ్యసించారు. సూత్రీకరణనుకింది మూడు దశలతో కూడి ఉంటుంది.

(i) సమస్యను పేర్కొనడం (నిరూపించడం) : అనేక సమయాలలో 'సమస్య' అస్పష్టంగా నిరూపిత మవుతుంది.

ఉదాహరణకు బాల-బాలికల దాఖలాతి సమానంగా వుండడానికి సంబంధించిన విస్తృత లక్ష్యం. దీని అర్థం (తత్వం) పాఠశాలకు వెళ్ళవలసిన వయస్సు కలిగిన పిల్లలు 50% బాలికలు మరియు 50% బాలురు నమోదు కానేకావాలనే అర్థం రావచ్చు. మరొక అర్థం నమోదైన విద్యార్థులలో 50% బాలికలు ఉండాలి అనుట. మనం రెండవ అంశమైన పాఠశాలలో నమోదైన పిల్లలో 50% బాలికలుండాలని పరిగణించాము.

(ii) సుసంబద్ధమైన అంశాలను గుర్తించడం :

మన సమస్యకు ఏవి ముఖ్యమైన సంబంధాలు మరియు పరిమాణాలు అని నిర్ధారించాలి. అలాగే ఏవి ముఖ్యంకాదు, వేటిని నిర్లక్షించాలి అనికూడా నిర్ధారించాలి. ఉదాహరణకు ప్రాధమికపాఠశాల

©KTBS Not to be republished

పిల్లలు నమోదు (దాఖలాతి)కు సంబంధించినటు వంటి మునుపటి సంవత్సరపు దాఖలాతి ప్రమాణం పై ప్రభావం చూపవచ్చు. ఇది ఎందుకంటే ఎక్కువ సంఖ్యలో బాలికలు పాఠశాలకు దఖఖలవుటను చూపిన తల్లిదండ్రులు తమ ఆడపిల్లలను కూడా పాఠశాలకు దాఖలు చేయడానికి ముందుకు వచ్చునట్లు చేయడం అయితే మనం ఈ అంశాన్ని గమనించడం లేదు. ఎందుకంటే శాత ప్రమాణం యొక్క నిర్ధిష్టదశను దాటువరకు ఈ విషయం (అంశం) ముఖ్యంకాదు. అదే కాకుండా ఈ అంశాన్ని చేర్చడం ద్వారా మన సమస్య మరింత జటిలమవుతుంది.

(iii) గణిత వివరణ :

మనకు ఈ సమస్య మరియు దాని ఏ అంశాలు ముఖ్యమైనవి అని సుస్పష్టమైనవని అనుకుందాం. సమస్యలోని పరస్పరం సంబంధంగల అంశాల ఆధారంగా మనమిప్పుడు ఒక సమీకరణాన్ని రాయాలి. లేదా ఒక గ్రాఫ్‌ను లేదా ఇంకేదైనా గణిత వివరణ అది సమీకరణం అయితే ఒక చరాంశాన్ని (variable) తప్పకుండా కలిగి వుండాలి. ఇది చాలా ముఖ్యమైన అంశం.

దశ 2 : పరిష్కారాన్ని కనుగొనడం

గణిత సూత్రీకరణమే పరిష్కారాన్ని ఇవ్వదు. మనం ఈ సమీకరణ గణన అంశాలను పరిష్కరించాలి నీ గణిత జ్ఞానం ఇక్కడ ఉపయోగపడుతుంది.

దశ 3 : పరిష్కారం యొక్క విశ్లేషణ

గణిత పరిహారం అంటే నమూనాలోని చరరాశులకు ఒకటి, అంతకంటే ఎక్కువ విలువలు నిర్ధారిత మగుట. చరరాశుల ఈ విలువలతో మనం తిరిగి నిజ జీవిత సమస్యకు వెళ్ళి ఈ విలువలు ఏ అర్థం ఇస్తాయో చూడాలి.

దశ 4 : మౌల్యీకరణం

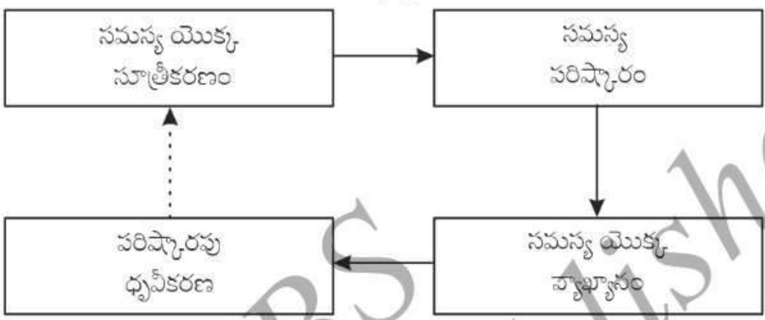
విభాగం A.2.3 లో మనం గమనించినట్లు పరిష్కారాన్ని కనుగొన్న తర్వాత వాస్తవంగా ఇది ఎంత వరకు ఇది సరిపోతుందో అని చూస్తాము. ఇది సరిపోతే గణిత నమూన అంగీకారానికి అర్థమవుతుంది పరిష్కారం సరిపోకపోతే సమస్యను తిరిగి రచించు ప్రక్రియలో పూనుకుంటాము.

ఈ చివరి దశ పదసమస్యలు (Word Problem)ను పరిష్కరించడానికి గణిత నమూనా పరిష్కారానికి గల అత్యంత ముఖ్యమైన (ప్రధానమైన) వ్యత్యాసం. గణిత నమూన ముఖ్యమైన ఈ దశ పదసమస్యలలో లేనటువంటి అత్యంత ముఖ్యమైన దశ. కొన్ని నిజ జీవిత విషయాలలో సాధ్యమైననూ, మనం అన్ని సమస్యల జవాబులు (పరిష్కారాన్ని) ధృవీకరించం. ఎందుకంటే అలాంటి సమస్యలు సులభంగా మరియు పరిష్కారం సరైన రీతిలో ఉంటుంది.

©KTBS Not to be republished

A2.3 లో మనం తీసుకున్న ఉదాహరణ ఇలాంటిది.

క్రింది చిత్రం A2.2 లో గణిత నమూనా ఎలా సాగుతుంది అను సారాంశాన్ని చిత్రించినది ధృవీకరణ దశనుండి సూత్రీకరణ దశకు 'చుక్కల బాణం' ద్వారా చూపబడింది. ఈ దశను మరలా ప్రారంభించ వలసి రావచ్చు అని తెలపడమే దీని ఉద్దేశ్యం.



మీరు ఇప్పుడు గణిత నమూనాదశలను అభ్యసించారు. ఈ దశల ముఖ్యాంశాలను చర్చించి, పరిశీలిద్దాం.

గణిత నమూనా రచన యొక్క ధ్యేయం ఏమంటే నిత్య జీవిత సమస్యల గురించి, ఉపయుక్త సమాచారాలను సంగ్రహించడానికి ఆ సమస్యలను గణిత సమస్యగా మార్చడం. ఈ విధానం ప్రత్యక్ష పరిశీలన లేదా ప్రయోగాల ద్వారా సమాచారాల లాంటి. అధిక వ్యయ విధానాలకంటే లేదా సమాచార సంగ్రహణం అసాధ్యమనిపించు సందర్భాలలో ఉపయోగ పడుతుంది.

గణిత నమూనాను ఎందుకు రచించాలి అని మీకు ఆశ్చర్యం అనిపించవచ్చు.

గణిత నమూనా రచన యొక్క కొన్ని ప్రయోజనాలను గమనిద్దాం. మధురాలోని శుద్ధీకరణ కార్యాగారాలనుండి వచ్చే విషవాయువుయి తాజ్‌మహల్ యొక్క అమృత శిలను తిని వేయుచున్నవి. ఈ పరిణామాన్ని గురించి అధ్యయనం చేయ వలసి ఉన్నది. మనం నేరుగా తాజ్‌మహల్‌ను ఉపయోగించి ఈ అధ్యయనం చేయడాన్ని అపేక్షించను. ఎందుకంటే అలా చేయడం మంచిది కాదు అలా కావాలంటే దాని చిరు ప్రతిరూప నమూనాను తయారు చేయవచ్చు. అయితే దానికి విశేషమైన సౌకరాలు అవసరమవుతాయి. అధిక వ్యయంతో కూడుకొన్నది. గణిత నమూనా రచన ఇలాంటి విషయాలకు చాలా ఉపయోగకరంగా ఉంటుంది. మరొక విషయం మరో 5 సం॥ తరువాత మనకు ఎన్ని ప్రాథమిక పాఠశాలలు అవసరం అనడం కాని, కావాలనడం కాని దీనిని మనం గణిత నమూనా ఉపయోగించి పరిష్కారం కనుగొనవచ్చు. అదేవిధంగా అనేక సమాజ లేక సామాజిక ఘటన ల/ అద్భుతాలు ఉండుటను. నివారించడానికి శాస్త్రవేత్తలకు ఉపయోగ పడే ఏకైక మార్గం ఏమంటే గణిత నమూనా రచన.

©KTBS Not to be republished

రెండవ విభాగము : A2.3 లో మనం పరిష్కారాన్ని మెరుగు పరచడానికి ఇంకా మంచి విధానాన్ని అమలు చేసి ఉండవచ్చు ఈ దశలో మనకు గణిత పరికరాలు లేనందువల్ల నిలప వలసి వచ్చింది. నిజ జీవితంలో ఇలానే అవుతుంది. అనేక సమయాలలో మీరు లభ్యమైన ఇంచుమించు జవాబులతో సంతృప్తి పొందవలసివస్తుంది ఎందుకంటే వేరే విధమైన (సాధనాలు)గణిత పరికరాలు. లేనందు వల్ల.

ఉదాహరణకు వాతావరణ సూచనను దృఢీకరించు 'వాతావరణగణిత నమూనా' అత్యంత జఠిలమైనది మరియు అత్యత ఖచ్చితమైన పరిష్కారాన్ని పొందుటకు ఇంకనూ గణిత పరికరాలు లభ్యంకావు.

మన నమూనాను మెరుగు పరచడానికి ఎన్ని ప్రయత్నాలు కావాలి అని ఆశ్చర్యం కలగవచ్చు సాధారణంగా నమూనాను మెరుగు పరచడానికి మనం ఇంకా ఎక్కువ అంశాలు పరిగణన లోకి తీసుకోవలసి వస్తుంది.

ఇలా చేసినపుడు మన గణిత సూత్రాలలో ఎక్కువ సంఖ్యలో చర రాశులను చేర్చవలసి వస్తుంది అప్పుడు మనకు ఉపయోగించడానికి క్లిష్టమగు నమూనా లభిస్తుంది. ఒక ఉత్తమ గణిత నమూనా రెండు అంశాల సంతులనం కలిగి ఉండాలి.

1. ఖచ్చితత్వం (వాస్తవానికి సాధ్యమైనంత దగ్గరగా).
2. వాడుకలో సౌలభ్యం.

ఉదాహరణ న్యూటన్ గమన నియమాల సూత్రాలు చాలా సరళంగా ఉంటాయి అయితే అనేక భౌతిక సన్నివేశాలలో నమూనాలు సమర్థవంతంగా ఉంటాయి. అలా గైతే మన సమస్యలన్నిం టికి గణిత నమూనాలే పరిష్కారమా? దాదాపుగా! దాని పరిమితులకు లోబడి ఉంటుంది.

అందువలన మనం గమనించవలసినది ఏమనగా

1. గణిత నమూనా నిత్యజీవితంలో సమస్యల సరలీకరణం.
2. నిత్య జీతంలోని సమస్యలు మరియు నమూనాలు రెండూ ఒకటే కాదు. దీనిని దేశ భూపటంలో ప్రకృతి యొక్క లక్షణాలను చూడటానికి నిజమైన దేశానికి గల వ్యత్యాసం తో పోల్చవచ్చు.

భూపటంలో ఒక ప్రదేశంలోని పర్వతాల ఎత్తును, సముద్ర మట్టాన్ని, తెలుసుకోవచ్చు. కాని, అక్కడి ప్రజల లక్షణాలను తెలుసుకోవడం సాధ్యం కాదు.

కనుక ఈ భూపటం యొక్క నమూనా అది దేని కోసమైతే తయారు చేయబడిందో దానికోసమే ఉపయోగించాలి మరియు నమూనా తయారు చేయునపుడు దేశానికి సంబందించిన అం శాలన్నిను అందులో చేర్చ బడవు అని గమనించాలి.

©KTBS Not to be republished

అనేక అంశాలను నిర్లక్ష్యం చేసి ఉంటామని గమనించాలి మనం నమూనా దానిని అన్వయించడానికి సాధ్యమైన పరిమితి లోనే ఉపయోగించాలి. ఈ అంశాన్ని పైతరగతులలో వివరంగా అభ్యాసిస్తారు.

అభ్యాం A2.3

1. పాఠ్య పుస్తకంలోని పద సమస్యలను పరిష్కరించడం గణిత నమూనా రచనా ప్రక్రియనుండి పరిష్కరించడానికి గల వ్యత్యాసం ఏమిటి?
2. నాలుగు రోడ్ల కూడలిలో వాహనాలు స్తంభించినప్పుడు మనం వేచి ఉండు సమయాన్ని తగ్గించడానికి కింది వాటిలో ముఖ్య మైన కారకాలు ఏవి? కానివి ఏవి?
   (i) పెట్రోలు దర
   (ii) నాలుగుదిక్కుల నుండి వచ్చు వాహనాల ప్రమాణం
   (iii) సైకిలు, రిక్షా, మొదలుగు తక్కువ వేగము వాహనాలు మరియు కారు, మోటారు బైకు వంటి వేగవంతమైన వాహనాల నిష్పత్తి.

A.2.5. సారాంశము

ఈ అనుబంధములో క్రింది అంశాలను అభ్యసించినారు,

1. పద సమస్య పరిష్కాలలో అలవర్చుకొన్న దశలు
2. కొన్ని గణిత నమూనాల నిర్మాణం.
3. గణిత నమూనాలో అలవర్చిన దశలు అవి క్రింది పట్టికలో ఇవ్వబడినవి.

> **1. సూత్రీకరణం :**
> (i) ప్రశ్నను పేర్కొనడం
> (ii) సంబంధించిన అంశాలన జాబితా తయారు చేయడం
> (iii) గణిత శాస్త్ర వివరణ
> 2. పరిష్కారాన్ని కనుగొనడం.
> 3. పరిష్కారాన్ని నిజ జీవిత సమస్యలతో వ్యాఖ్యానించడం.
> 4. అభ్యసించడానికి తీసుకొన్న సమస్యకు ఎంతవరకు నమూనా సంబద్ధ మైనది అని ధృవీకరించడం.

4. గణిత నమూనా ధ్యేయం, ఉపయోగం పరయు పరిమితులు.

©KTBS Not to be republished

జవాబులు / సూచనలు

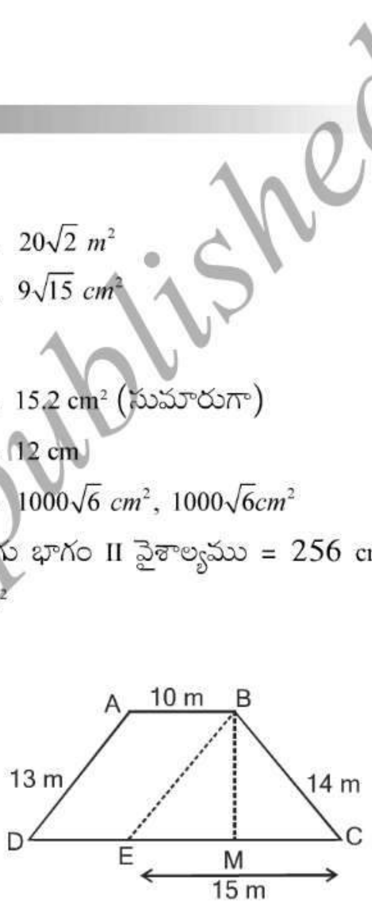
అభ్యాసం 8.1

1. $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$, 900, 3 cm² 2. ₹ 1650000 3. $20\sqrt{2}\ m^2$
4. $21\sqrt{11}\ cm^2$ 5. 9000 cm² 6. $9\sqrt{15}\ cm^2$

అభ్యాసం 8.2

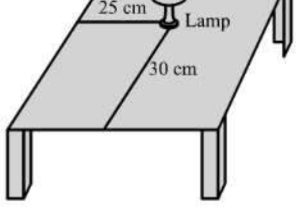
1. 65.5 cm² (సుమారుగా) 2. 15.2 cm² (సుమారుగా)
3. 19.4 cm² (సుమారుగా) 4. 12 cm
5. 48 m² 6. $1000\sqrt{6}\ cm^2$, $1000\sqrt{6} cm^2$
7. రంగు వేసిన భాగం I యొక్క వైశాల్యము = రంగు భాగం II వైశాల్యము = 256 cm² మరియు రంగు భాగం III వై శాల్యము = 17.92 cm²
8. ₹ 705.60
9. 196 m²

   [చిత్రం చూసి, Δ BEC యొక్క వైశాల్యం కనుగొనండి 84 m² ఎత్తు BM కనుగొనండి.]



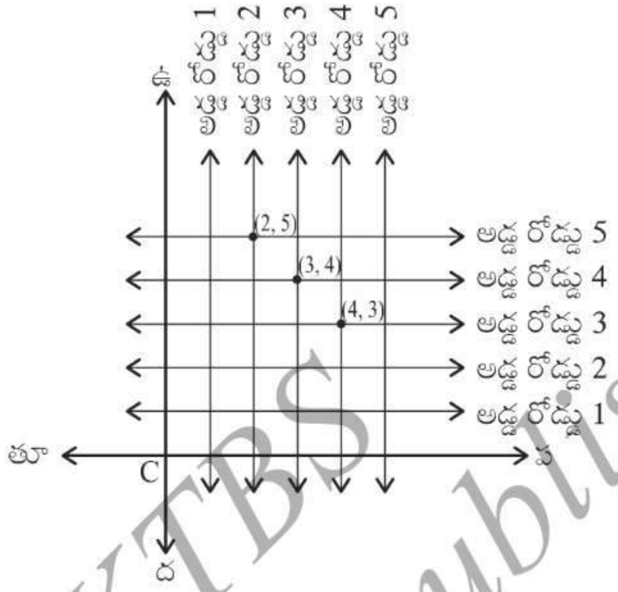
అభ్యాసం 9.1

1. ఒక సమతల బల్లను మరియు ఒక దీపాన్ని తీసుకోండి బల్లపై ఏవైనా రెండు లంభంగావున్న కొనలను ఎన్నుకోండి పొడవైన కొననుండి పొడవును కొలవండి. అది 25 cm వుండాలి చిన్న కొన నుండి దీపం దూరాన్ని కొలవండి అది 30 cm వుండాలి ఇప్పుడు దీపపు నిర్దేశాంకము (25, 30) లేదా (30, 25) అవుతుంది ఇది మీరు ఏ బిందువును మూల బిందువుగా తీసుకుంటారో దానిపై ఆధారపడి వుంటుంది.



©KTBS Not to be republished

2. కింద ఇచ్చిన చిత్రంలో ఒక వీధి ప్రణాళిక (ప్లాన్) ను చూపించారు.



క్రాస్ రోడ్డు మరియు రెండు వీధులను చిత్రంలో గుర్తించారు. రెండు రేఖలను ఆధారంగా చేసుకొని ప్రతి బిందువును ప్రత్యేకంగా గుర్తించడానికి సాధ్యమైనది.

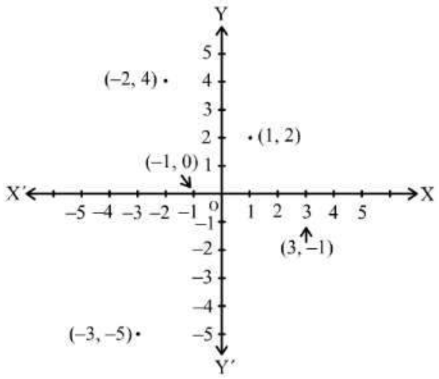
అభ్యాసం 9.2

1. (i) x – అక్షం మరియు y – అక్షం (ii) చతుర్థాంశాలు
(iii) మూల బింధువు.

2. (i) (−5, 2) (ii) (5, − 5) (iii) E (iv) G
(v) 6 (vi) −3 (vii) (0, 5) (viii) (−3, 0)

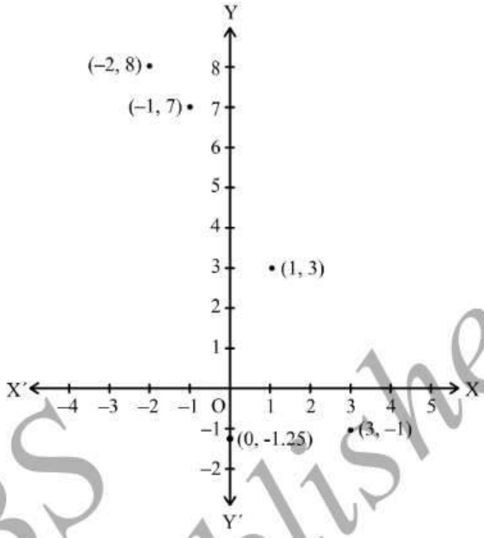
అభ్యాసం 9.3

1. బింధువు (−2, 4) రెండవ పాదంలో వుంది : (3, −1) బింధువు నాల్గవ పాదంలో, (−1, 0) x – అక్షం పై (1, 2) మొదటి పాదంలో (−3, −5) 3 వ పాదంలో వున్నాయి ఈ బిందువుల స్థానాన్ని ప్రక్కన చిత్రంలో చూపించడం అయినది.



©KTBS Not to be republished

2. బిందువుల ద్వారా స్థానాన్ని చుక్కల ద్వారా చిత్రం లో చూపించడమైనది.



అభ్యాసం 10.1

1. $x - 2y = 0$

2. (i) $2x+3y-9.3\overline{5}=0$; $a=2,\quad b=3,\quad c=-9.3\overline{5}$

(ii) $x-\frac{y}{5}-10=0$; $a=1,\quad b=-\frac{1}{5},\quad c=-10$

(iii) $-2x+3y-6=0$; $a=-2,\quad b=3,\quad c=-6$

(iv) $1.x-3y+0=0$; $a=1,\quad b=-3,\quad c=0$

(v) $2x+5y+0=0$; $a=2,\quad b=5,\quad c=0.$

(vi) $3x+0.y+2=0$; $a=3,\quad b=0,\quad c=2$

(vii) $0.x+1.y-2=0$; $a=0,\quad b=1,\quad c=-2$

(viii) $-2x+0.y+5=0$; $a=-2,\quad b=0,\quad c=5.$

అభ్యాసం 10.2

1. (iii) ఎందుకంటే x యొక్క ఏదైనా విలువకు అనుగుణంగా y విలువ వుంటుంది మరియు ప్రతి క్రమంగా.

2. (i) (0,7), (1,5), (2,3), (4,−1). (ii) $(1, 9-\pi)$, (0, 9), $(-1, 9+\pi)$, $\left(\frac{9}{\pi}, 0\right)$

(iii) (0, 0), (4, 1), (−4, 1), $(2, \frac{1}{2})$

©KTBS Not to be republished

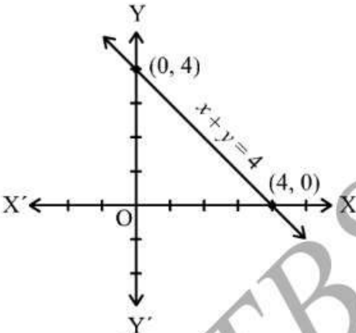
3. (i) కాదు (ii) కాదు (iii) అవును

(iv) కాదు (v) కాదు.

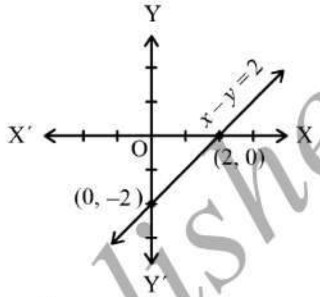
4. 7

అభ్యాసం 10.3

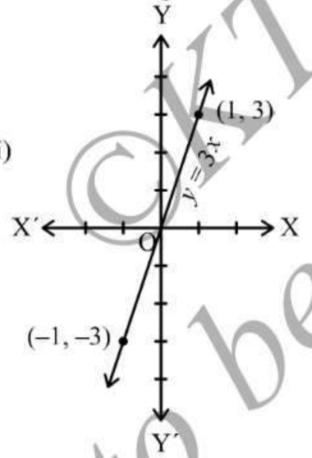
1. (i)



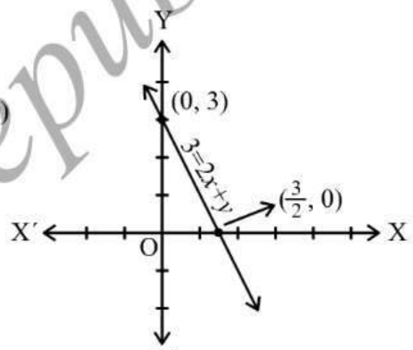
(ii)



(iii)



(iv)

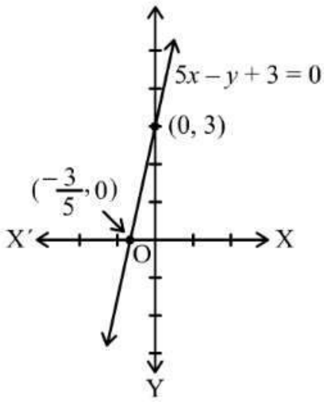


2. $7x - y = 0$ మరియు $x + y = 16$; (ఈ బిందువు ద్వారా అనంత సంఖ్య లో రేఖలను గీయవచ్చు)

3. $\frac{5}{3}$

4. $5x - y + 3 = 0$

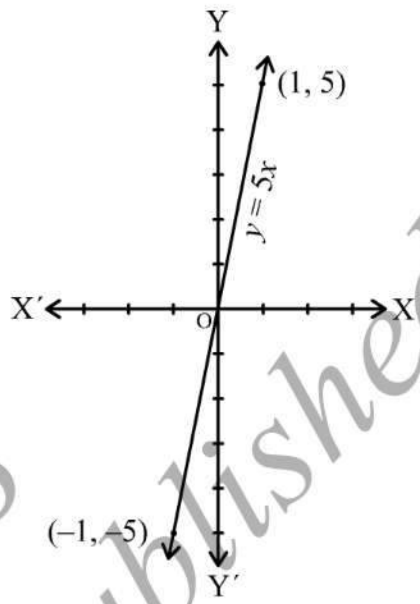
5. చిత్రం 4.6 కు $x + y = 0$ మరియు 4.7 కు $y = -x + 2$



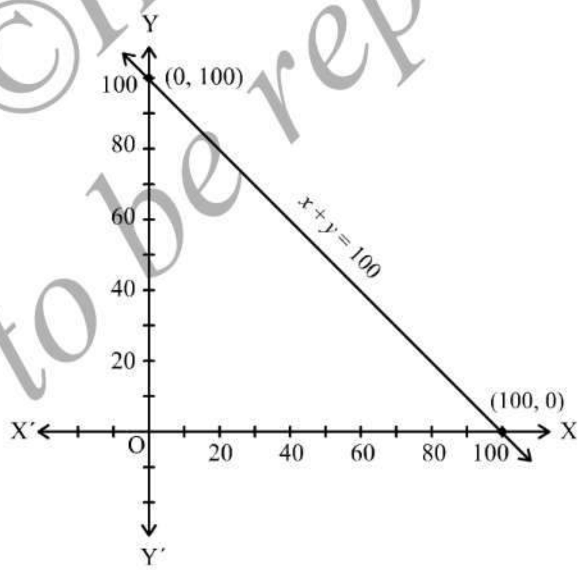
©KTBS Not to be republished

6. x ను దూరంగా మరియు y ను చేసిన పనిగా చూపిన దానినుండి ప్రశ్నప్రకారం సమీకరణం $y = 5x$

(i) 10 యూనిటు (ii) 0 యూనిట్.



7. $x + y = 100$



©KTBS Not to be republished

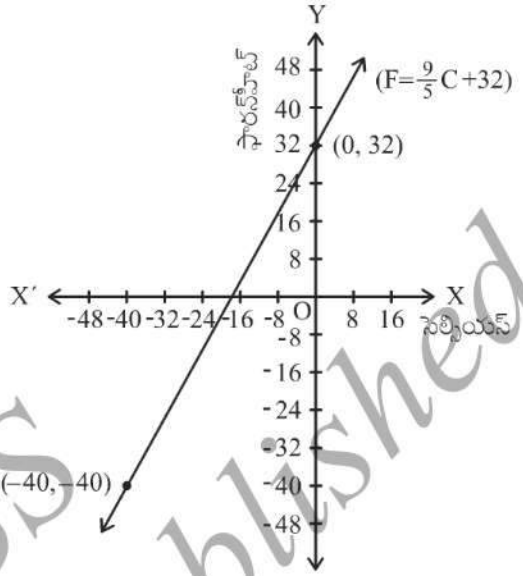
8. (i) ప్రక్క చిత్రం గమనించండి.

(ii) 86° F

(iii) 35° C

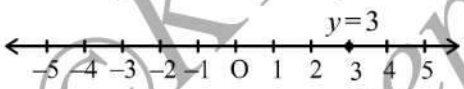
(iv) 32° F, – 17.8° C (సుమారుగా)

(v) అవును, – 40° (F మరియు C రెండింటిలోను)

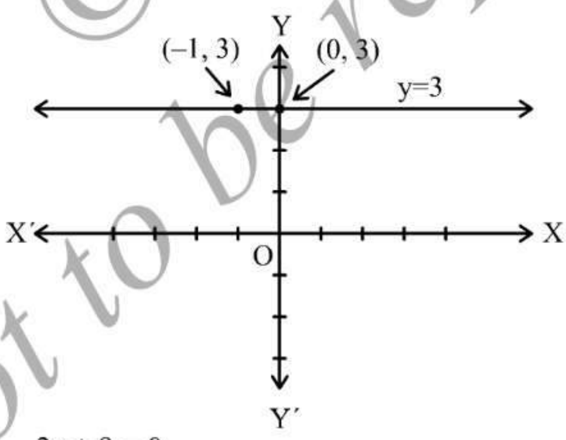


అభ్యాసం 10.4

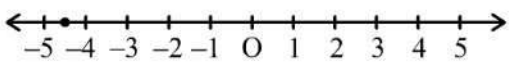
1. (i)



(ii)

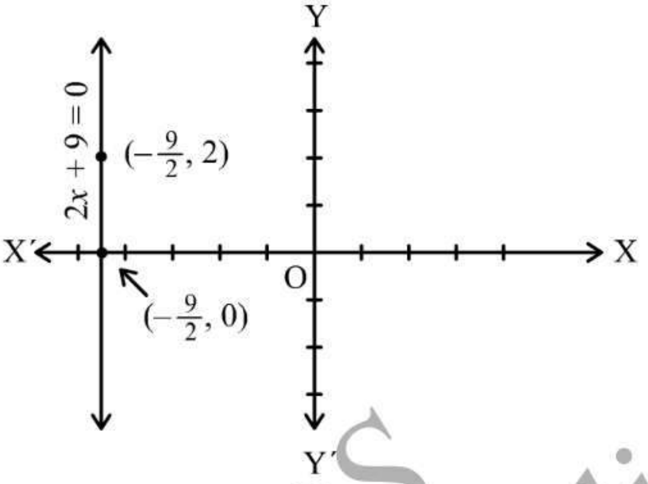


2. (i)



©KTBS Not to be republished

(ii)



అభ్యాసం 11.1

1. (i) పాదం DC, సమాంతర DC మరియు AB:
   (iii) పాదం QR, QR మరియు PS సమాంతరాలు :
   (v) పాదం AD, AD మరియు BQ సమాంతరాలు.

అభ్యాసం 11.2

1. 12.8 cm
2. EG ను కల పండి: ఉదాహరణ 2. ఫలితాన్ని ఉపయోగించండి .
6. Δ APQ లో గోదునులు మరియు మిగిలిన రెండు త్రిభుజాలలో Δ APQ లో పప్పులు లేదా మిగిలిన రెండింటిలో గోదుములు .

అభ్యాసం 11.3

4. CM ⊥ AB మరియు DN ⊥ AB లను గీయండి. CM = DN అని చూపండి..
12. ఉదాహరణ 4 ను చూడండి.

అభ్యాసం 11.4 (ఐచ్ఛిక)

7. ఉదాహరణ 3 ఫలితాన్ని ఉపయోగించండి.

అభ్యాసం 12.1

1. (i) అంతర్గత (లోపల) (ii) బయట (iii) వ్యాసము
   (iv) అర్ధవృత్తం (v) జ్యా (vi) మూడు

©KTBS Not to be republished

2. (i) సరి (ii) తప్పు (iii) తప్పు

(iv) సరి (v) తప్పు (vi) సరి.

అభ్యాసం 12.2

1. జ్యా మరియు అనురూప వృత్తాలను తీసుకొని సిద్ధాంతం 10. 1 లో ఉన్నట్టు సాధించండి.

2. SAS త్రిభుజపు స్వయం స్వీకృతిని ఉపయోగించి రెండు త్రిభుజాలను అనురూప త్రిభుజాలని చూపండి.

అభ్యాసం 12.3

1. 0, 1, 2, రెండు 2. ఉదాహరణ1 లా కొనసాగండి.

3. O, O' వృత్త కేంద్రాన్ని సామాన్య 'జ్యా' AB రేఖ మధ్య బిందువు 'M' కు కలపండి తరువాత $\underline{|OMA} = 90°$ గా చూపండి.

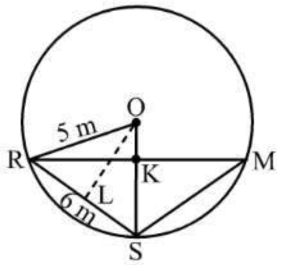
అభ్యాసం 12. 4

1. 6 cm,మొదట వృత్త కేంద్రాలను చేర్చు రేఖల చిన్న వృత్తపు వ్యాసార్ధానికి లంబంగా ఉన్నది. మరియు తరువాత సామాన్య జ్యా చిన్న వృత్తపు వ్యాసమని చూపండి.

2. O వృత్త కేంద్రం గల వృత్తపు AB, CD సమాన జ్యాలు E బిందువు వద్ద ఖండిస్తాయి $OM \perp AB$ మరియు $ON \perp CD$ ను గీయండి. OE ని కలపండి లంభకోణ త్రిభుజం OME మరియు ONE అనురూప వృత్తాలని చూపండి.

3. ఉదాహరణ 2 లో వున్నట్లు.

4. AD కి OM లంబ రేఖను గీతండి..



5. రేష్మ, సల్మా, మందీప్ లను R,S,M అని క్రమంగా గుర్తించండి. KR = x m వుండాలి (చిత్రం చూడండి).

Δ ORS వైశాల్యము $= \frac{1}{2} x \times 5$

Δ ORS వైశాల్యము $= \frac{1}{2}$ RS $\times$ OL $= \frac{1}{2} \times 6 \times 4\ x$ ను.
కనుగొనండి మరియు RM ను కూడా.

6. సమబాహు త్రిభుజపు లక్షణాలు మరియు పైథాగరస్ సిద్ధాంతాన్ని ఉపయోగించండి.

©KTBS Not to be republished

అభ్యాసం 12.5

1. 45° 2. $150^\circ, 30^\circ$ 3. 10°

4. 80° 5. 110° 6. $\angle BCD = 80^\circ$ మరియు $\angle ECD = 50^\circ$

8. CD పై AM మరియు BN లంబ రేఖలను గీయండి $(AB \parallel CD$ మరియు $AB < CD)$. $\Delta AMD \perp \Delta BMC$ అనిచూపి దీనినుండి $\angle C = \angle D$ మరియు $\angle A + \angle C = 180^\circ$.

అభ్యాసం 12.6 (ఐచ్ఛికం)

2. 'O' ను వృత్త కేంద్రం అనుకుందాం రెండు జ్యాలు లంబ సమద్విఖండన చేస్తూ 'O' గుండావెళ్ళుతాయి r వత్త వ్యాసార్థం తరువాత $r^2 = \left(\frac{11}{2}\right)^2 + x^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 + (6-x)^2$ 11 cm పొడవు గల జ్యా పై 'O' బిందువు గుండా గీచిన లంబ రేఖ పాదపు ఇది x అప్పుడు. $x = 1$ అప్పుడు $r = \frac{5\sqrt{5}}{2} cm$

3. 3 cm

4. $\angle AOC = x$ మరియు $\angle DOE = y$, ఉందనుకుందాం. $\angle AOD = z$ అయితే

$\angle EOC = z$ మరియు $x + y + 2z = 360^\circ$

$\angle ODB = \angle OAD + \angle DOA = 90^\circ - \frac{1}{2}z + z = 90 + \frac{1}{2}z, \; \angle OEB = 90^\circ + \frac{1}{2}z$

8. $\angle ABE = \angle ADE, \angle ADF = \angle ACF = \frac{1}{2}\angle C$ దీనినుం $\angle EDF = \angle ABE + \angle ADF = \frac{1}{2}(\angle B + \angle C)$ $= \frac{1}{2}(180 - \angle A) = 90 - \frac{1}{2}\angle A$

9. Q,1, ఉదాహరణ 10.2 మరియు సిద్ధాంతం 10.8 ను ఉపయోగించండి.

10. $\angle A$ యొక్క కోణ సమద్విఖండన రేఖ Δ ABC యొక్క పరివృత్తం D బింధువు వద్ద ఖండించాలి. DC మరియు DB లను కలపండి. తరువాత $\angle BCD = \angle BAD = \frac{1}{2}\angle A$ మరియు $\angle DBC = \angle DAC = \frac{1}{2}\angle A$ కావున $\angle BCD = \angle DBC$ లేదా DB = DC. అలాగే D బిందువు BC లంభ సమద్విఖండన రేఖ పై వుంది.

©KTBS Not to be republished

అభ్యాసం 13.1

1. (i) 5.45 m^2 (ii) ₹ 109

2. ₹ 555 3. 6 m 4. 100 ఇటుకలు

5. (i) ఘనాకారపు పెట్టె వక్రతల వైశాల్యము 40 cm^2 కంటే ఎక్కువ

(ii) దీర్ఘఘనా అకారపు పెట్టె పూర్ణఉపరితలం 10 cm^2 కంటే ఎక్కువ.

6. (i) = 4250 cm^2 గాజు

(ii) 320 cm టేపు (అన్ని అంచుల మొత్తమును లెక్కించండి.) (12 అంచులలో 4 పొడవులు, 4 వెడల్పులు మరియు 4 ఎత్తులు)

7. ₹ 2184 8. 47 m^2

అభ్యాసం 13.2

1. 2 cm 2. 7.48 m^2

3. (i) 968 cm^2 (ii) 1064.8 cm^2 (iii)2038.08 cm^2

పైపు యొక్క పూర్ణ ఉపరితల వైశాల్యము (అంతర్గత వక్ర ఉపరితల వైశాల్యము + బాహ్యవక్ర ఉపరితల వైశాల్యము + వాటి రెండు పాదాల వైశాల్యము). ఉంగరం ఆకారపు పాదం యొక్క వైశాల్యం $\pi(R^2 - r^2)$ నుండి పొందవచ్చు. ఇక్కడ R = బాహ్యవృత్తవ్యాసార్థం r = అంతర్ వృత్త వ్యాసార్థం.

4. 1584 m^2 5. ₹ 68.75 6. 1 m

7. (i) 110 m^2 (ii) ₹ 4400 8. 4.4 m^2

9. (i) 59.4 m^2 (ii) 95.04 m^2

(వాస్తవికంగా ఉపయోగించిన ఇనుము వైశాల్యము x m^2 అందులో $\frac{1}{12}$ వ భాగము ఉపయోగించిన ఇనుము వ్యర్థమైతే, తొట్టి లో ఉపయోగించిన ఇనుము వైశాల్యము $\frac{11}{12}x$ దీని అర్థము వాస్తవంగా ఉపయోగించిన ఇనుము వైశాల్యము $= \frac{11}{12} \times 87.12\ m^2$)

10. 2200 cm^2, సిలిండర్ ఎత్తు (30 + 2.5 + 2.5) cm అవుతుంది.

అభ్యాసం 13.3

1. 165 cm^2 2. 1244.57 m^2 3. (i) 7 cm (ii) 462 cm^2

4. (i) 26 m (ii) ₹ 137280 5. 63 m 6. ₹ 1155

7. 5500 cm^2 8. ₹ 384.34 (సుమారుగా)

అభ్యాసం 13.4

1. (i) 1386 cm^2 (ii) 394.24 cm^2 (iii) 2464 cm^2

2. (i) 616 cm^2 (ii) 1386 cm^2 (iii) 38.5m^2

3. 942 cm^2 4. 1:4 5. ₹ 27.72

© KTBS Not to be republished

6. 3.5 cm 7. 1:16 8. 173.25 cm^2

9. (i) $4\pi r^2$ (ii) $4\pi r^2$ (iii) 1 : 1

అభ్యాసం 13.5

1. 180 cm^3 2. 135000 లీటర్లు 3. 4.75 m 4. ₹ 4320
5. 2 m 6. 3 రోజులు 7. 16000 8. 6 cm, 4 : 1
9. 4000 m^3

అభ్యాసం 13.6

1. 34.65 లీటర్లు
2. 3.432 kg పైపు ఘనపరిమాణం = $\pi h[R^2 - r^2]$ ఇక్కడ R బాహ్యవ్యాసార్ధం r అంతర్వ్యాసార్ధము)
3. సిలిండరు సామర్థ్యము 85 cm^2 ఎక్కువైనది
4. (i) 3 cm (ii) 141.3 cm^3
5. (i) 110 m^2 (ii) 1.75 m (iii) 96.25 *kl*
6. 0.4708 m^2
7. చెక్క ఘనపరిమాణం = 5.28 cm^3, గ్రాఫైట్ ఘనపరిమాణం = 0.11 cm^3
8. 38500 cm^3 లేదా 38.5 *l* లీ సూపు

అభ్యాసం 13.7

1. (i) 264 cm^3 (ii) 154 cm^3
2. (i) 1.232 *l* (ii) $\frac{11}{35}l$
3. 10 cm
4. 8 cm 5. 38.5 *kl*
6. (i) 48 cm (ii) 50 cm (iii) 2200 cm^2
7. 100 π cm^3 8. 240 π cm^3; 5: 12 9. 86.625 m^3, 99.825 m^2

అభ్యాసం 13.8

1. (i) $1437\frac{1}{3}\ cm^3$ (ii) 1.05 m^3 (సుమారుగా)
2. (i) $11498\frac{2}{3}\ cm^3$ (ii) 0.004851 m^3
3. 345. 39 g (సుమారుగా) 4. $\frac{1}{64}$
5. 0.303 *l* (సుమారుగా) 6. 0.06348 m^3 (చ)
7. $179\frac{2}{3}$ cm^3 8. (i) 249.48 m^2 (ii) 523.9 m^3 (సుమారుగా)
9. (i) $3r$ (ii) 1 : 9
10. 22.46 mm^3 (సుమారుగా)

©KTBS Not to be republished

అభ్యాసం 13.9 (ఐచ్ఛిక)

1. ₹ 6275
2. ₹ 2784.32 (సుమారుగా) వెండి రంగు విలువను లెక్కించునప్పుడు ఆధారంపై నిలిచిన గోళాన్ని తీసివేయడం మరువ కూడదు.
3. 43.75%

అభ్యాసం 14.1

1. మనం మన నిత్య జీవితంలో దత్తాంశాలను సంగ్రహించదగిన ఐదు ఉదాహరణలు.

   (i) మన తరగతిలోని విద్యార్థుల సంఖ్య

   (ii) మన పాఠశాలలోని ఫంకాలసంఖ్య

   (iii) మన ఇంటి గడచిన రెండు సంవత్సరాల విద్యుత్ బిల్లులు

   (iv) టెలివిజన్ లేదా వార్తాపత్రికలనుండి సంగ్రహించిన ఓటింగ్ ఫలితాలు.

   (v) విద్యాసర్వేలో పొందిన అక్షరాస్యతా రేటు చిత్రాలు.

   ఖచ్చితంగా ఇవే కాకుండా వేరే చాలా సమాధానాలు ఉన్నాయని జ్ఞాపకం ఉంచుకోండి .

   ప్రాథమిక దత్తాంశం (i), (ii) మరియు (iii) వ్యవస్థిత దత్తాంశం (iv) మరియు (v)

అభ్యాసం 14.2

రక్తపు గుంపు	విద్యార్థుల సంఖ్య
A	9
B	6
O	12
AB	3
మొత్తం	30

అతిసాధారణ గుంపు – O అరుదైన గుంపు – AB

2.

దూరం కి. మీ. లలో	గణన చిహ్నాలు	పౌనఃపున్యం
0 – 5	卌	5
5 – 10	卌 卌 |	11
10 – 15	卌 卌 |	11

©KTBS Not to be republished

15 − 20	~~||||~~ ||||	9
20 − 25			1
25 − 30			1
30 − 35	||	2
	మొత్తం	40

3. (i)

సాపేక్ష ఆర్ద్రత (% లో)	పౌనః పున్యం
84 86	1
86 88	1
88 90	2
90 92	2
92 94	7
94 96	6
96 98	7
98 100	4
మొత్తం	30

(ii) దత్తాంశాన్ని వర్షాకాలంలో తీసుకుంటే అలాగే కనిపిస్తుంది. ఎందుకంటే సాపేక్ష ఆర్ద్రత చాలా ఎక్కువగా ఉంటుంది.

(iii) వ్యాప్తి = 99.2 – 84.9 = 14.3

4. (i)

ఎత్తు (ఛియులలో)	పౌనః పున్యం
150 − 155	12
155 − 160	9
160 − 165	14
165 – 170	10
170 − 175	5
మొత్తం	50

పై పట్టిక నుండి 50% విద్యార్థులు 165 cm కంటే తక్కువ ఎత్తును కలిగి ఉన్నారు అని ఒక నిర్ణయానికి రావచ్చు

©KTBS Not to be republished

5. (i)

సల్ఫర్ డై ఆక్సైడ్ సాంద్రత (ppmలలో)	పౌనఃపున్యం
0.00 – 0.04	4
0.04 – 0.08	9
0.08 – 0.12	9
0.12 – 0.16	2
0.16 – 0.20	4
0.20 – 0.24	2
మొత్తం	30

(ii) సల్ఫర్ డై ఆక్సైడ్ సాంద్రత 8 రోజులు 0.11 pm కంటే ఎక్కువైనది.

6.

తలల సంఖ్య	పౌనః పున్యం
0	6
1	10
2	9
3	5
మొత్తం	30

7. (i)

సంఖ్యలు	పౌనః పున్యం
0	2
1	5
2	5
3	8
4	4
5	5
6	4
7	4
8	5
9	8
మొత్తం	50

(ii) ఎక్కువ సార్లు పునరావృతమైన సంఖ్యలు 3 మరియు 9. తక్కువ పునరావృతమైన సంఖ్య '0'

©KTBS Not to be republished

8. (i)

గంటల సంఖ్య	పౌనః పున్యం
0 5	10
5 10	13
10 15	5
15 20	2
మొత్తం	30

(ii) 2 పిల్లల

9.

బ్యాటరి ఉపయోగం(సం లలో)	పౌనః పున్యం
2.02.5	2
2.53.0	6
3.03.5	14
3.54.0	11
4.04.5	4
4.55.0	3
మొత్తం	40

అభ్యాసం 14.3

1. (ii) సంతానోత్పత్తి ఆరోగ్యస్థితి. 3. (ii) గుంపు A

4. (ii) పౌనః పుణ్యం బహుభుజి (iii) లేదు 5. (ii) 184

వయస్సు (సం ల లో)	తరచుదనం	వెడల్పు	దీర్ఘ చతురస్రపు ఎత్తు
1 - 2	5	1	$\frac{5}{1}\times 1 = 5$
2 - 3	3	1	$\frac{3}{1}\times 1 = 3$
3 - 5	6	2	$\frac{6}{2}\times 1 = 3$
5 - 7	12	2	$\frac{12}{2}\times 1 = 6$
7 - 10	9	3	$\frac{9}{3}\times 1 = 3$
10 - 15	10	5	$\frac{10}{5}\times 1 = 2$
15 - 17	4	2	$\frac{4}{2}\times 1 = 2$

ఇపుడు మీరు ఈ పొడవులను ఉపయోగించి హిస్టోగ్రాం గీయాలి.

©KTBS Not to be republished

9. (i)

అక్షరాల సంఖ్య	తరచుదనం	వర్గీకృత వ్యాప్తి	దీర్ఘ చతురస్రపు ఎత్తు (పొడవు)
1 4	6	3	$\frac{6}{3} \times 2 = 4$
4 6	30	2	$\frac{30}{2} \times 2 = 30$
6 8	44	2	$\frac{44}{2} \times 2 = 44$
8 12	16	4	$\frac{16}{4} \times 2 = 8$
12 20	4	8	$\frac{4}{8} \times 2 = 1$

ఇపుడు దీర్ఘచతురస్రాన్ని గీయండి

(ii) 68

అభ్యాసం 14.4

1. సరాసరి = 2.8, మధ్యగతం = 3, (బహుళకం) = 3
2. సరాసరి = 54.8, మధ్యగతం = 52, బహుళకం = 52
3. $x = 62$ 4. 14
5. 6 మంది పని వాళ్ళ సరాసరి వేతనం ₹ 5083.33

అభ్యాసం 15.1

1. $\frac{24}{30}$ అనాగా $\frac{4}{5}$
2. (i) $\frac{19}{60}$ (ii) $\frac{407}{750}$ (iii) $\frac{211}{1500}$
3. $\frac{3}{20}$ 4. $\frac{9}{25}$
5. (i) $\frac{29}{2400}$ (ii) $\frac{579}{2400}$ (iii) $\frac{1}{240}$
(iv) $\frac{1}{96}$ (v) $\frac{1031}{1200}$

©KTBS Not to be republished

6. (i) $\frac{7}{90}$ (ii) $\frac{23}{90}$

7. (i) $\frac{27}{40}$ (ii) $\frac{13}{40}$

8. (i) $\frac{9}{40}$ (ii) $\frac{31}{40}$ (iii) 0

11. $\frac{7}{11}$ 12. $\frac{1}{15}$ 13. $\frac{1}{10}$

అభ్యాసం A .2.1

1. **దశ 1. సూత్రీకరణం**

ఒక కంప్యూటర్ ను వివిధ కాలాలో కోనడం జరిగింది మరియు రెండు విలువలు ఇవ్వ బడ్డాయి. కాని ఇక్కడ ముఖ్యంగా గమనించాల్సిన విషయం ఏమిటంటే కంప్యూటర్ దరలనూ లేదా కానడం లోనూ మార్పు లేదు. కావున వాటికి సంబంధించి జరిగిన మార్పులను గమనించాలి. మనం అన్ని తరాల కంప్యూటర్‌లను మరియు బ్రాండ్స్‌ను ఒకే విధంగా తీసుకోవడం జరిగింది. కాబట్టి ఈ బౌధం అనేది ప్రస్తుతం కంప్యూటర్ ను అద్దెకు తీసుకున్న దర x నెలలకు = $2000x$. దర అనేది కంప్యూటర్ కొనడానికి నిర్ధారింపిన నిజ ధర కంటే కూడ ఎక్కువ , కావున, మనం కంప్యూటర్ ను కొనడమే మంచింది అప్పుడు సమీకరణం $2000x = 25000$……(i)

దశ 2 : సాధన (1) ని సాధించగా, $x = \frac{25,000}{2000} = 12.5$

దశ 3 : విశ్లేషణ : కంప్యూటర్ ను 12 నెలలకు అద్దెకు తీసుకున్న దర కన్నా కంప్యూటర్ నిజ దర చాలా తక్కువ కావున కంప్యూటర్ ను 12 నెలల కు మించి ఉపయోగించాలి అనుకుంటే కంప్యూటర్ ను కొనడమే మంచిది.

2. **దశ 1 : సూత్రీకరణం:**

రెండు కారు స్థిర వేగంలో ప్రయాణం చేస్తున్నాయి అనుకుంటే. అ ప్రస్తుతంగా కార్లు వేగం లో ఏమైన మార్పు జరిగింది అనుకుంటే. ఆ కార్లు x గంటల ప్రయాణం చేసిన తర్వాత ఎక్కడ కలుస్తాయి. ఒక కార్టు. A

స్థానంనుండి బయలు దేరి $40x$ km ప్రయాణం చేస్తే మరియు రెండవకారు $30x$km కి .మీ. ప్రయాణంచెసింది. కాబట్టి వా మధ్య దూరం $(100 - 30x)$ km A నుండి

సమీకరణం. $40x = (100 - 30x)$km

కావున $70x = 100$ ……. (i)

దశ 2 : ఫలితము సమీకరణం ను సాదించంగా $x = \frac{100}{70} = \frac{10}{7}$

దశ 3 : విశ్లేషణ $\frac{100}{70}$ = అంటే దాదాపుగా 1.4 గంటలు.

కావున ఆ రెండు కార్లు 1.4 గంటల తర్వాత కలుస్తాయి.

©KTBS Not to be republished

3. **దశ 1 : సూత్రీకరణం** : చంద్రుడు భూమి చుట్టు తిరుగుటకు తీసుకునే వేగం = $\frac{\text{కక్ష్యపొడవు}}{\text{పట్టిన కాలం}} = \frac{C}{t}$

దశ 2 : సాధన: కక్ష్య దాదాపుగా వృత్తాకారంగా ఉంటుంది కావున దాని పొడవు

$= 2 \times \pi \times 38400 km = 2411520\ km$

చంద్రుడు తన కక్ష్యలో ఒక సారి చుట్టి రావడానికి పడే కాలం 24 గంటలు.

కావున వేగం $= \frac{2411520}{24} = 100480\ km/hour$

దశ 3 : విశ్లేషణ : కావున వేగం = 100480 km/h

4. **సూత్రీకరణం:** వాటర్ హీటరను ఉపయోగించెనపుడు వాటి విద్యుత్ చార్జీలలో వచ్చే తేడా అనేది వాటిని ఉపయోగించిన కాలంపై ఆధారపడి ఉంటుంది అని ఊహిస్తే వాటర్ హీటర్ ను ఉపయోగించిన సరాసరి గంటలు = x గా తీసుకుంటే.

ఒక నెలలో ఉపయోగించిన వాటర్ హీటర్ల మధ్య తేడా = (₹ 1240 – 1000) = ₹ 240

ఒక గంట వాటర్ హీటర్ ను వాడుటకు అయిన ఖర్చు = ₹ 8

అయితే ఒక నెలలో 30 రోజులు ఉపయోగించిన వాటర్ హీటర్ యొక్క ఖర్చు = $8 \times 30 \times x$

అయితే ఒక వేళ 30 వాటర్ హీటర్‌లు ఉపయోగించిన గంటలో మధ్య తేడాపై బిల్లు ఆధారపడి ఉంటుంది. = ,

కావున $240\ x = 240$

సాధన : ఈ సమీకరణం నుండి $x = 1$

విశ్లేషణ : $x = 1$ నుండి ఒక రోజులో వాటర్ హీటర్ ను ఒక గంట సరాసరిగా వాడారు

అభ్యాసం A 2.2

1. ఇక్కడ మనం ప్రత్యేకించి ఒకే పద్ధతిలో సాధన చేయాలి అని చర్చించ లేదు మీరు కావాలి అనుకుంటే ముందు ఉదాహరణలోని పద్ధతిలోనే సాధన చేయవచ్చు లేదా మరేదైనా సరిపోయే పద్ధతి ఉందా ఆలోచించండి.

అభ్యాసం A 2.3

1. మనం ముందు గానే చెప్పినట్లు సూత్రీకరించిన విధానం పూర్తిగా మన నిజజీవితంలో ఒక సందర్భం. కావున సంఖ్యలలో సమాధానం చెప్పడం సరికాదు ఈ పద సమస్య మాత్రమే సరైన సమాధానం ఇది మన నిజజీవిత సందర్భంలో జరగాలని ఖశ్చితమైన సందర్భంగా చెప్పలేం. (లేదా మన నిజ జీవితం లో జరగాలి అని చెప్పాల్సిన అవసరం లేదు)
2. సమీకరణం (i) మరియు (ii) ముఖ్యమైన అంశాలు ఇక్కడ సమీకరణం (iii) సమస్య పై ప్రభావం చూపెను అది అంత ప్రధానం కాదు కావున సమీకరణం

(i) అనేది ఎన్ని వాహనాలు అమ్ముడు పోయాయి అనే దానిపై ప్రభావం చూపదు.

Not to be republished ©KTBS