अध्याय-8

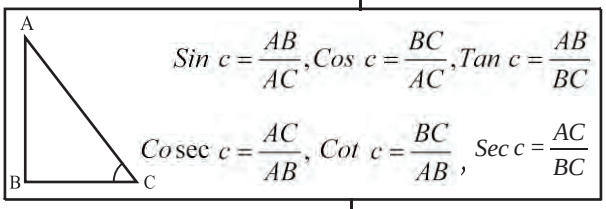
त्रिकोणमिति (Trigonometry)

त्रिकोणमितीय अनुपात

Sine,Cosine, Secant, Cosecant, Tangent, Cotangent

यदि एक न्यूनकोण का एक त्रिकोणमितीय अनुपात ज्ञात हो, तो कोण के शेष त्रिकोणमितीय अनुपात सरलता से ज्ञात किए जा सकते हैं।

ज्यामिति के समकोण त्रिभुज के न्यूनकोण से छः अनुपात की उत्पत्ति होती है। यह अनुपात त्रिभुज के भुजाओं के अनुपात हैं।



$$Sin\ c = \frac{AB}{AC}, Cos\ c = \frac{BC}{AC}, Tan\ c = \frac{AB}{BC}$$

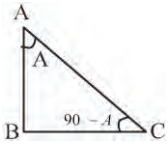
$$Cosec\ c = \frac{AC}{AB}, Cot\ c = \frac{BC}{AB}, Sec\ c = \frac{AC}{BC}$$

जब न्यूनकोण $0, 30, 45, 60, 90$ हो तो इस अनुपात का प्रयोग कर हम त्रिकोणमितीय अनुपात का मान(Value)ज्ञात कर सकते हैं।

समकोण त्रिभज में न्यूनकोण पूरक कोण हो तो पूरक कोण के लिए अनुपात निकाला जाता है।

$$Sin(90 - A) = \frac{AB}{AC} = CosA$$

$$Cos(90 - A) = \frac{BC}{AC} = SinA$$



$$Tan(90 - A) = \frac{AB}{BC} = CotA$$

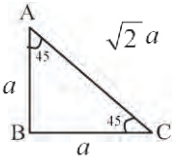
$$Cot(90 - A) = \frac{BC}{AB} = TanA$$

$$Sec(90 - A) = \frac{AC}{BC} = Cosec\ A$$

$$Cosec(90 - A) = \frac{AC}{AB} = SecA$$

उदाहरणस्वरूप :- ABC समद्विबाहु समकोण त्रिभुज है।

$AB = BC = a$ (माना)



$$Sin45 = \frac{AB}{AC} = \frac{a}{\sqrt{2a}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

त्रिकोणमितीय अनुपात से संबधित सर्वसमिका को त्रिकोणमितीय सर्वसमिका कहते हैं।

$Sin^2 A + Cos^2 A = 1$

$Sec^2 A - Tan^2 A = 1$ जहाँ $0 \le A \le 90$

$Cosec^2 A - Cot^2 A = 1$ जहाँ $0 \le A \le 90$

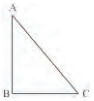
त्रिकोणमिति (Trigonometry)

त्रिकोणमितीय अनुपातः-

(i) छः अनुपात ज्यामिति के समकोण त्रिभुज के न्यून कोण से प्राप्त किए जाते हैं।

जैसेः- Sin c, Cos c, Tan c, Cot c,

Sec c, Cosec c



(ii) एक अनुपात का मान प्राप्त हो तो ज्यामिति के पाइथागोरस प्रमेय का प्रयोग कर अन्य अनुपात हम ज्ञात कर सकते हैं।

$$Sin\ c = \frac{p}{h},\ Cos\ c = \frac{b}{h},\ Tan\ c = \frac{p}{b},$$

$$Cosec\ c = \frac{h}{p},\ Sec\ c = \frac{h}{b},\ Cot\ c = \frac{b}{p}$$

कर्ण^2 = लम्ब^2 + आधार^2

$$h^2 = p^2 + b^2$$

(iii) अगर तीन अनुपात, $Sin\ c = \frac{AB}{AC}, Cos\ c = \frac{BC}{AC}, Tan\ c = \frac{AB}{BC}$ प्राप्त हैं तो अन्य तीन भी इनके द्वारा निकाल सकते हैं। $Sin\ c$ का उल्टा $Cosec\ c$, $Cos\ c$ का उल्टा $Sec\ c$ तथा $Tan\ c$ का उल्टा $Cot\ c$ प्राप्त हो जाएगा।

$$\therefore Cosec\ c = \frac{AC}{AB}, Sec\ c = \frac{AC}{BC}, Cot\ c = \frac{BC}{AB}$$

उदाहरणः- यदि $Sin\ c = \frac{4}{5}$ तो $Cos\ c$ तथा $Tan\ c$ का मान ज्ञात करे।

यहाँ $Sin\ c = \frac{p}{h} = \frac{4}{5}$ है।

$$\therefore\ b = \sqrt{h^2 - p^2}$$

$$= \sqrt{(5)^2 - (4)^2}$$

$$= \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9} = 3$$

$$\therefore\ Cos\ c = \frac{b}{h} = \frac{3}{5},\ Tan\ c = \frac{p}{b} = \frac{4}{3}$$

(iv) कुछ विशिष्ट कोणों जैसे $0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ का त्रिकोणमितीय अनुपात दिये गये

सारणी से याद कर प्रश्नों को हल कर सकते हैं।

जैसे:- $Sin60^\circ\ Cos30^\circ + Sin30^\circ\ Cos60^\circ$ का मान ज्ञात करें।

हल:- $\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$

$= \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \frac{4}{4} = 1$

$\angle A$	0°	30°	45°	60°	90°
$SinA$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$CosA$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$TanA$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	अपरिभाषित

(iv) पूरक कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात

$Sin(90^\circ - A) = CosA, \quad Cos(90^\circ - A) = SinA, \quad Tan(90^\circ - A) = CotA,$

$Cot(90^\circ - A) = TanA, \quad Sec(90^\circ - A) = Co\sec A, \quad Co\sec(90^\circ - A) = SecA$

जैसे:- (i) $\frac{Tan65^\circ}{Cot25^\circ}$ का मान निकालिए।

हल:- $Cot25^\circ = Cot(90^\circ - 65^\circ) = Tan65^\circ$

$\frac{Tan65^\circ}{Tan65^\circ} = 1$

त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाएँ

त्रिकोणमितीय निष्पतियों (अनुपात) से ही सर्व समिकाएँ उत्पन्न हुई हैं।

उदाहरणार्थ:- (i) $Sin^2\theta + Cos^2\theta = 1$

(ii) $Sec^2\theta - Tan^2\theta = 1$

(iii) $Co\sec^2\theta - Cot^2\theta = 1$

(iv) $Tan\theta = \frac{Sin\theta}{Cos\theta}, \quad Cot\theta = \frac{Cos\theta}{Sin\theta}$

उपरोक्त सर्व समिकाओं तथा बीजगणितीय सर्व समिकाएँ (सूत्रो) को स्मरण कर सर्व समिकाएँ हल की जा सकती हैं।

उदाहरण:- $\frac{CosA}{1+SinA} + \frac{1+SinA}{CosA} = 2SecA$

हल:- $\frac{Cos^2A + (1+SinA)^2}{CosA(1+SinA)}$

$= \frac{Cos^2A + 1 + 2SinA + Sin^2A}{CosA(1+SinA)}$

$= \frac{2+2SinA}{CosA(1+SinA)}$

$= \frac{2(1+SinA)}{CosA(1+SinA)}$

$= \frac{2}{CosA} = 2SecA$

☆☆☆